Федеральное агентство связи

Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций
и Информатики

СибГУТИ

Кафедра высшей математики

Расчетно-графическая работа № 5

Прямые и плоскости

Выполнил: студент 1 курса группы ИП-013
Иванов Леонид Дмитриевич

Преподаватель: Храмова Татьяна Викторовна

Вариант № 12
НОВОСИБИРСК 2020

A(4;0;3),B(-1;1;2),C(5;3;2),D(2;-1;-3)

A)уравнение плоскости ABC;

Для составления уравнения плоскости используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix}=0$$

Подставим данные и упростим выражение:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-3 \\ -(1)-4 & 1-0 & 2-3 \\ 5-4 & 3-0 & 2-3 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-0 & z-3 \\ -5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-4)\times(1\times(-1)-(-1)\times3)-(y-0)\times((-5)\times(-1)-(-1)\times1)+(z+3)\times((-5)\times3-1\times1)=0$$

$$x-3y-8z+20=0$$

b)Уравнение прямой AD;

1.Составим каноническое уравнение прямой.

Воспользуемся формулой канонического уравненияпрямой:

$$\frac{x-x_a}{x_b-x_a}=\frac{y-y_a}{y_b-y_a}=\frac{z-z_a}{z_b-z_a}$$

Подставим в формулу координаты точек: $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{-6}$

2.Составим параметрическое уравнение прямой.

Воспользуемся формулой параметрического уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=¿+x_1 \\ y=mt+y_1 \\ z=nt+z_1 \end{cases}$$

$$\overline{AD}=\{l:m;n\}$$

$$\overline{AD}=\{x_b-x_a:y_b-y_a;z_b-z_a\}=\{-2;-1;-6\}$$

В итоге получено параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x=-2t+4 \\ y=-t+0 \\ z=-6t+3 \end{cases}$$

в) угол между плоскостью ABC и прямой AD;

Воспользуемся найденными выше параметрическим уравнением прямой и уравнением плоскости.

Направляющий вектор прямой имеет вид $\bar{s}=\{-2;-1;-6\}$

Вектор нормали плоскости имеет вид $\bar{q}=\{1;-3;-8\}$

Найдем угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi=|\cos\psi|¿\frac{|\bar{s}\times\bar{q}|}{|s|\times|q|}=\frac{|s_x\times q_x\times s_y\times q_y\times s_z\times q_z|}{\sqrt{s_x{}^2+s_y{}^2+s_z{}^2}\times\sqrt{q_x{}^2+q_y{}^2+q_z{}^2}}=¿$$

$$\frac{|1\times(-2)+(-3)\times(-1)+(-8)\times(-6)|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-8)^2}\times\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-6)^2}}=¿\frac{|-2+3+48|}{\sqrt{1+9+64}\times\sqrt{4+1+36}}=\frac{49}{\sqrt{74}\times\sqrt{41}}=\frac{49}{\sqrt{3034}}=¿$$

$$\frac{49\times\sqrt{3034}}{3034}\approx0.88$$

$$\varphi=62°$$

г) Уравнение нормали к плоскости ABC, проходящей через точку D;

Для прямой известно направление(она перпендикулярна плоскости)и точка, через которую она проходит, т.е. воспользуемся каноническим уравнением прямой линии.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

Где ($x_0;y_0;z_0$) – координаты точки D, а s(m;n;p)-направляющий вектор прямой. Т.к прямая по условию перпендикулярна плоскости x-3y-8z+20=0, то нормальный вектор плоскости n =(1;-3;-8)будет направляющим вектором прямой. И, с учетом того, что прямая будет перпендикулярна оси Oy, получим уравнения прямой.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-(-1)}{-3}=\frac{z-(-3)}{-8}$$

д)Точку пересечения этой нормали и плоскости ABC;

Представим уравнение нормали в виде двух уравнений:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-(-1)}{-3}\quad\frac{x-2}{1}=\frac{z-(-3)}{-8}$$

Сделаем перекрестное умножение в этих уравнениях:

-3(x-2)=y-(-1)

-8(x-2)=z- (-3)

Откроем скобки и переведём переменные в левую часть уравнений, а остальные элементы в правую часть:

3x+y=5

8x+z=13

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости нужно решить совместно эти два уравнения и уравнение плоскости ABC. Для этого переведем в уравнении плоскости свободный член на правую сторону уравнения и построим матричное уравнение для системы этих трех линейных уравнений.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решим систему линейных уравнений и запишем решение:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{119}{74} \\ \frac{13}{74} \\ \frac{5}{37} \end{pmatrix}$$

Ответ: точка пересечения нормали и плоскости ABC имеет координаты

$\left(\frac{119}{74}; \frac{13}{74}; \frac{5}{37}\right)$