

Мин цифры
Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики
СибГУТИ
Кафедра высшей математики

РГР 3
Несобственный интеграл (вычеты)

Выполнил: студент 2 курса группы ИП-013
Иванов Леонид Дмитриевич

Новосибирск 2022.г

Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 9x^2 + 18}$.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 + 9x^2 + 18}$$

Для начала найдём корни этого уравнения, произведём замену:

$$z^2 = t$$

тогда наше уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{t}{t^2 + 9t + 18}$$

нули знаменателя:

$$t^2 + 9t + 18 = 0$$

$$D = 9$$

$$t = \frac{-9 \pm 3}{2}$$

$$t_1 = -3$$

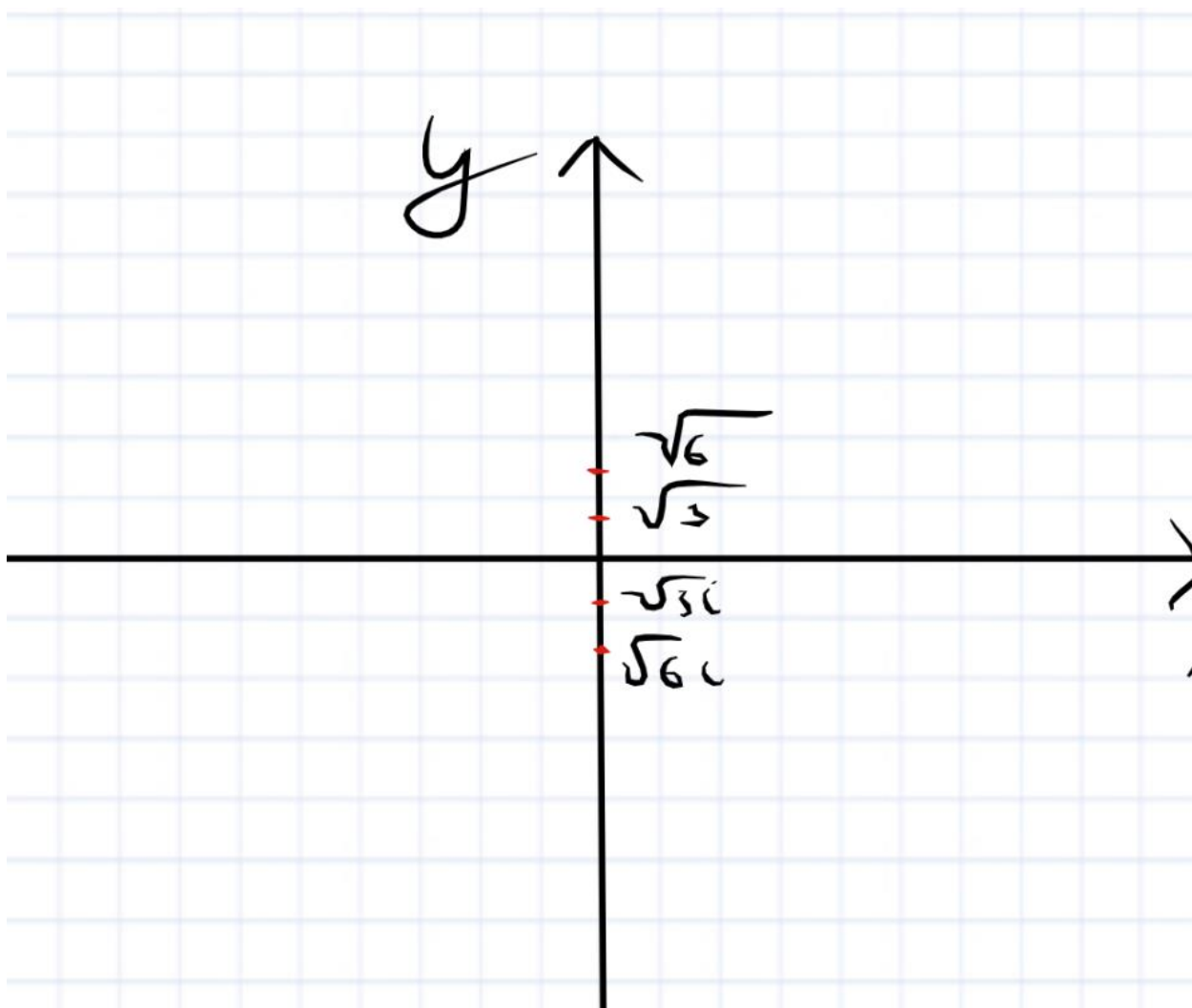
$$t_2 = -6$$

$$z^2 = -3, z^2 = -6$$

$$t_1 = \pm\sqrt{3}i$$

$$t_1 = \pm\sqrt{6}i$$

Нарисуем наши точки на координатной прямой:



Найдём порядки полюсов:

$$z = \sqrt{3}i, z = \sqrt{6}i$$

Сделаем преобразования:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4 + 11z^2 + 18} = \frac{z^2}{(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i)(z - \sqrt{6}i)(z + \sqrt{6}i)}$$

$$g(z) = \frac{z^2}{(z + \sqrt{3}i)(z - \sqrt{6}i)(z + \sqrt{6}i)}$$

$$g(\sqrt{3}i) = \frac{-3}{(\sqrt{3}i + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i - \sqrt{6}i)(\sqrt{3}i + \sqrt{6}i)} = \frac{-\sqrt{3}i}{6\sqrt{3}i} \neq 0$$

$z = \sqrt{3}i$ — простой полюс

$$g(\sqrt{6}i) = \frac{-6}{(\sqrt{6}i - \sqrt{3}i)(\sqrt{6}i + \sqrt{3}i)(\sqrt{3}i + \sqrt{3}i)} = \frac{\sqrt{6}i}{-6\sqrt{6}i} \neq 0$$

$z=\sqrt{6}i$ — простой полюс

считаем вычеты по данной формуле:

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

$$h(z) = z - \sqrt{3}i$$

$$h'(z) = 1$$

$$\operatorname{Res}(\sqrt{3}i) = \frac{g(\sqrt{3}i)}{h'(\sqrt{3}i)} = \frac{-3}{2\sqrt{3}i(\sqrt{3}i - \sqrt{6}i)(\sqrt{3}i + \sqrt{6}i)} = \frac{1}{2\sqrt{3}i}$$

$$h(z) = z - \sqrt{6}i$$

$$h'(z) = 1$$

$$\operatorname{Res}(\sqrt{6}i) = \frac{g(\sqrt{6}i)}{h'(\sqrt{6}i)} = \frac{-6}{-2\sqrt{6}i(\sqrt{6}i - \sqrt{3}i)(\sqrt{6}i + \sqrt{3}i)} = \frac{1}{\sqrt{6}i}$$

Тогда:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 + 9x^2 + 18} = \pi i \left(\frac{1}{2\sqrt{3}i} - \frac{1}{\sqrt{6}i} \right) = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})}{3} \approx 0,7513$$

Ответ: 0,7513.