Механика 1 курс ИВТ

1. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$, где A=2 м/с, B=3 м/с^2 и C= 4 м/с^3 . Найти: а) зависимость скорости v и ускорения a от времени t ; б) расстояние s , пройденное телом, скорость v и ускорение a тела через время t=2с после начала движения. [(а) $v=2-6t-12t^2$ м/с; б) a= -6+24t, м\с^2 ;s=24м; V=38м\С; a=42 м\с^2]

2. Найти угловую скорость **ω**
   а) суточного вращения Земли; [**ω**=72.7 10^{-6} рад\с]
   б) часовой стрелки на часах; [**ω**=145.4 10^{-6} рад\с]
   в) минутной стрелки на часах; [**ω**= 1.74 10^{-6} рад\с**]**

3. Камень массой m=1кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью V_0=9.8 м/с. Построить график зависимости от времени кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня для интервала 0-2 сек.

4. Камень массой m=1кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью V_0=9.8 м/с. Построить график зависимости от высоты h кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня для интервала 0-2 сек.

5. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением $s = A - Bt + Ct^2$, где B=2 м/с, C=1 м/с^2. Найти линейную скорость v точки, ее тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорение через время t=3с после начала движения, если известно, что при t*=2с нормальное ускорение точки a^*_n =0.5 м/с^2.

6. Два свинцовых шара массами m_1 =2 кг, m_2=3кг подвешены на нитях длиной l=70см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол 60° и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе. (h=5.6 см, ΔT=4.12 Дж)

7. На рельсах стоит платформа массой m_1=10 т. На платформе закреплено орудие массой m_2=5 т., из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда m_3=100 кг; его начальная скорость относительно орудия V_0=500 м/с.
   Найти скорость u платформы в первый момент после выстрела, если:
   а) платформа стоит неподвижно; [u = -12 км/ч]
   б) платформа двигалась со скоростью v =18 км/ч и выстрел был направлен в направлении противоположном направлению ее движения; [u= 6 км/ч]
   в) платформа двигалась со скоростью v =18 км/ч и выстрел был направлен в направлении ее движения [u= -30 км/ч].

§ 1. Кинематика

Скорость и ускорение прямолинейиого двнжения в общем случае определяются формулами

$$v=\frac{ds}{dt}, \quad a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

В случае прямолинейного равномерного двнжения

$$v=\frac{s}{t}=\text{const}, \quad a=0.$$

В случае прямолинейного равнопеременного движения

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}, \quad v=v_0+at, \quad a=\text{const}.$$

В этих уравнениях ускорение a положительно при равиоускоренном движении и отрицательно при равнозамедлением.

При криволинейном движении полное ускорение

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}.$$

Здесь a_τ — тангенциальное (касательное) ускорение и a_n — нормальное (центростремительное) ускорение, причем

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{R},$$

где v — скорость движения и R — радиус кривизны траектории в данной точке.

При вращательном движении в общем случае угловая скорость и угловое ускорение находятся по формулам

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

В случае равномерного вращательного движения угловая скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n,$$

где T — период вращения, n — частота вращения, т. е. число оборотов в единицу времени.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v соотношением

$$v = \omega R.$$

Тангенциальное и нормальное ускорения при вращательном движении могут быть выражены в виде

$$a_\tau = \varepsilon R, \quad a_n = \omega^2 R.$$

В табл. 6 дано сопоставление уравнений поступательного движения с уравнениями вращательного движения.

Таблица 6

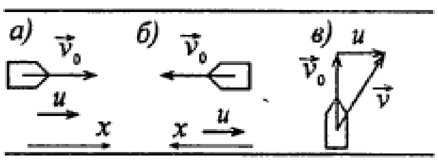
Поступательное движение	Вращательное движение
Равномерное	
$s = vt$	$\varphi = \omega t$
$v = \text{const}$	$\omega = \text{const}$
$a = 0$	$\varepsilon = 0$
Равнопеременное	
$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$a = \text{const}$	$\varepsilon = \text{const}$
Неравномерное	
$s = f(t)$	$\varphi = f(t)$
$v = \frac{ds}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$

РЕШЕНИЯ

1\. **1.4.** Найти скорость v относительно берега реки: а) лодки, идущей по течению; б) лодки, идущей против течения; в) лодки, идущей под углом $\alpha = 90°$ к течению. Скорость течения реки $u = 1$ м/с, скорость лодки относительно воды $v_0 = 2$ м/с.

Решение:

а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x: $v = v_0 + u = 3$ м/с. б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, или в проекции на ось x:

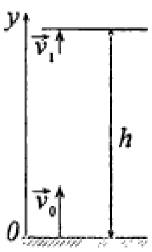


$v = v_0 - u = 1$ м/с. в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, сложив вектора по правилу треугольников, получим: $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx$ $\approx 2{,}24$ м/с.

а) 3м\с; б) 1; в)2.24;

2\. **1.8.** Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t = 3$ с. Какова была начальная скорость v_0 тела и на какую высоту h оно поднялось?

Решение.



Запишем уравнения кинематики в проекциях на ось y: $y(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$ и $v(t) = v_0 - gt$. В наивысшей точке подъема имеем $y(t_1) = h$; $v(t_1) = 0$, т. е. $h = v_0 t_1 - qt_1^2/2$ и $0 = v_0 - qt_1$, где $t_1 = \dfrac{t}{2}$ — время подъема. Откуда $v_0 = qt_1$, $v_0 = \dfrac{qt}{2}$, $h = qt_1^2 - \dfrac{qt_1^2}{2} = \dfrac{qt_1^2}{2}$; $h = \dfrac{qt^2}{8}$. Подставляя числовые данные, получим $v_0 = 14{,}7$ м/с; $h \approx 11$ м.

v_0=14.7м\с, h~11м

3\. Зависимость пройденного телом пути s от времени t дается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$, где A=2 м/с, B=3 м/с^2 и C= 4 м/с^3. Найти: а) зависимость скорости v и ускорения a от времени t ; б) расстояние s , пройденное телом, скорость v и ускорение a тела через время t=2с после начала движения. [(а) $v=2-6t-12t^2$ м/с; б) $a= -6+24t$, м\с^2]

Решение:

а) Скорость тела $v = dS/dt$; $v = A - 2Bt + 3Ct^2$; $v = 2 - 6t + 12t^2$ м/с. Ускорение тела $a = dv/dt = -2B + 6Ct$; $a = -6 + 24t$ м/с^2.

б) Расстояние, пройденное телом, $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Тогда через время $t = 2$ с имеем $s = 24$ м; $v = 38$ м/с; $a = 42$ м/с^2.

4. Точка движется по окружности так, что зависимость пути от времени дается уравнением s = A - Bt + Ct^2, где B=2 м/с, C=1 м/с^2. Найти линейную скорость v точки, ее тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорение через время t=3с после начала движения, если известно, что при t*=2с нормальное ускорение точки a^*_n =0.5 м/с^2.

5. Два свинцовых шара массами m_1 =2 кг, m_2=3кг подвешены на нитях длиной l=70см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол 60° и отпустили. Считая удар центральным и неупругим, определить: 1) высоту h, на которую поднимутся шары после удара; 2) энергию ΔT, израсходованную на деформацию шаров при ударе. (h=5.6 см, ΔT=4.12 Дж)

6. Камень массой m=1кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью V_0=9.8 м/с. Построить график зависимости от времени кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня для интервала 0-2 сек.

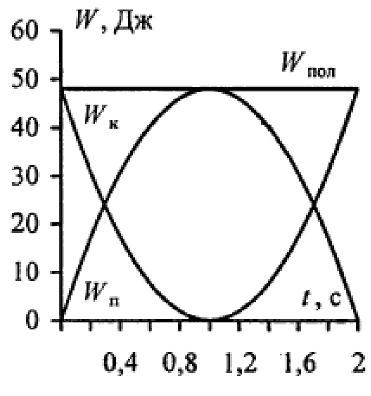
Решение:

$W_к = \frac{mv^2}{2}$; $W_п = mgh$; $v = v_0 - gt$; $h = \frac{-gt^2}{2} + v_0 t$;

$W_к = \frac{m(v_0 - gt)^2}{2}$; $W_п = mg\left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)$; $W_к = \frac{(9{,}8 - 9{,}8t)^2}{2}$;

$W = W_к + W_п = const$; $W_п = 9{,}8(9{,}8t - 4{,}9t^2) = 96t - 48t^2$. Характер зависимости кинетической, потенциальной и полной энергии камня от времени дан на графике.

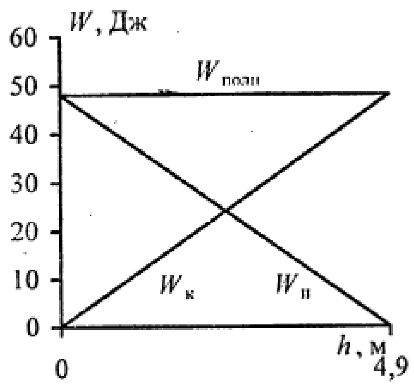
t, с	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
0,2	30,7	17,3
0,4	17,3	30,7
0,6	7,7	40,3
0,8	1,9	46,1
1	0	48
1,2	1,9	46,1
1,4	7,7	40,3
1,6	17,3	30,7
1,8	30,7	17,3
2	48	0



7. Камень массой m=1кг брошен вертикально вверх с начальной скоростью V_0=9.8 м/с. Построить график зависимости от высоты h кинетической $W_к$, потенциальной $W_п$ и полной W энергий камня для интервала 0-2 сек.

Решение:

Кинетическая энергия, которой обладал камень в момент броска, будет в дальнейшем убывать за счет увеличения потенциальной энергии. $W_к = \frac{mv_0^2}{2} - mgh$; $W_п = mgh$. Для построения графика подставим числовые данные: $W_п = 9{,}8h$. Максимальную высоту, на которую поднимется камень, найдем из соотношения: $\frac{mv^2}{2} = mgh$, отсюда $h = \frac{v^2}{2g}$; $h = 4{,}9$ м. Построим график при $0 \le h \le 4{,}9$.



h, м	$W_к$, Дж	$W_п$, Дж
0	48	0
2,7	21,6	26,4
4,9	0	48

8. Найти угловую скорость **ω**
   а) суточного вращения Земли;
   б) часовой стрелки на часах;
   в) минутной стрелки на часах;

Решение:

Угловая скорость $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где T — период обращения.

а) $T = 24$ ч $= 86{,}4 \cdot 10^3$ с; $\omega = 72{,}7 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

б) $T = 12$ ч $= 43{,}2 \cdot 10^3$ с; $\omega = 145{,}4 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

в) $T = 1$ ч $=3600$ с; $\omega = 1{,}74 \cdot 10^{-6}$ рад/с;

9. На рельсах стоит платформа массой m_1=10 т. На платформе закреплено орудие массой m_2=5 т., из которого производится выстрел вдоль рельсов. Масса снаряда m_3=100 кг; его начальная скорость относительно орудия V_0=500 м/с.

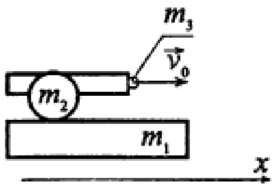
Найти скорость u платформы в первый момент после выстрела, если:

а) платформа стоит неподвижно;

б) платформа двигалась со скоростью v =18 км/ч и выстрел был направлен в направлении противоположном направлению ее движения.

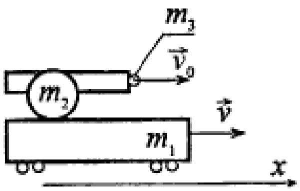
в) платформа двигалась со скоростью v =18 км/ч и выстрел был направлен в направлении ее движения.

Решение:



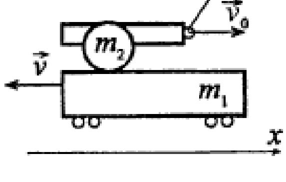
а) При неподвижной платформе начальная скорость снаряда относительно земли равна его скорости v_0 относительно орудия. Систему «платформа — орудие — снаряд» можно считать замкнутой в проекции на ось x при условии, что силой трения качения платформы можно пренебречь. Тогда в проекции на ось x импульс системы до выстрела $p_x = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = 0$, т.к. $v = 0$. Импульс системы после выстрела $p'_x = m_3 v_0 + (m_1 + m_2) \cdot u$. По закону сохранения импульса $p_x = p'_x$ или $0 = m_3 v_0 + (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда

$u = -\dfrac{m_3 v_0}{m_1 + m_2}$; $u = -12$ км/ч. Знак «–» указывает, что платформа стала двигаться в направлении, противоположном направлению движения снаряда.



б) Если выстрел был произведен в направлении движения платформы, то начальная скорость снаряда относительно земли равна $v_0 + v$. На основании закона сохранения импульса имеем: $(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = m_3 (v_0 + v) + (m_1 + m_2) \cdot u$ — (2), откуда $u = \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v - m_3 (v_0 - v)}{m_1 + m_2}$;

$u = 6$ км/ч.



в) Если выстрел был произведен в направлении, противоположном направлению движения платформы, то при $v_0 > 0$ имеем $v < 0$. Тогда уравнение (2) имеет вид: $-(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v = m_3 (v_0 - v) + (m_1 + m_2) \cdot u$, откуда

$u = -\dfrac{(m_1 + m_2 + m_3) \cdot v + m_3 (v_0 - v)}{m_1 + m_2}$;

$u = -30$ км/ч.

§ 2. Динамика

Основной закон динамики (второй закон Ньютона) выражается уравнением

$$F\,dt = d\,(mv).$$

Если масса m постоянна, то

$$F = m\frac{dv}{dt} = ma,$$

где a — ускорение, которое приобретает тело массой m под действием силы F.

Работа силы F при перемещении s может быть выражена формулой

$$A = \int_s F_s\,ds,$$

где F_s — проекция силы на направление перемещения, ds — длина перемещения. Интегрирование должно быть распространено на все перемещение s. В случае постоянной силы, действующей под углом α к перемещению, имеем

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где α — угол между силой F и перемещением s.

Мощность определяется формулой

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

В случае постоянной мощности

$$N = \frac{A}{t},$$

где A — работа, совершаемая за время t.

Мощность может быть определена также формулой

$$N = Fv\cos\alpha,$$

т. е. произведением скорости движения на проекцию силы на направление движения.

Для кинетической энергии тела массой m, движущегося со скоростью v, имеем

$$W_к = \frac{mv^2}{2}.$$

При неупругом центральном ударе двух тел с массами m_1 и m_2 общая скорость движения этих тел после удара может быть найдена по формуле

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2},$$

где v_1 — скорость первого тела до удара и v_2 — скорость второго тела до удара.

При упругом центральном ударе тела будут двигаться с различными скоростями. Скорость первого тела после удара

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

скорость второго тела после удара

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\,v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Сила, вызывающая упругую деформацию x, пропорциональна деформации, т. е.

$$F = kx,$$

где k — жесткость (коэффициент, численно равный силе, вызывающей деформацию, равную единице).

Потенциальная энергия упругого тела

$$W_п = \frac{kx^2}{2}.$$