

Задача 16572

Монохроматический свет с длиной волны 500 нм падает нормально на дифракционную решетку. Вычислите период решетки, если угол между направлениями на максимумы первого и второго порядка равен 10° .

$$\lambda = 500 \text{ нм} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}$$

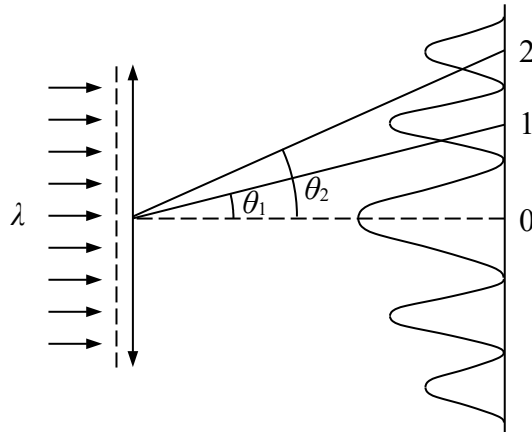
$$\Delta\theta = 10^\circ$$

$$d = ?$$

Направления главных максимумов, создаваемых дифракционной решеткой, определяются формулой

$$d \sin \theta = \pm k \lambda.$$

В данном случае k имеет значения 1 и 2.



Соответствующие уравнения запишутся следующим образом:

$$d \sin \theta_1 = \lambda, \quad (1)$$

$$d \sin \theta_2 = 2\lambda, \quad (2)$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Перепишем уравнения (1) и (2) следующим образом:

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d};$$

$$\sin \theta_2 = \frac{2\lambda}{d}.$$

Складывая и вычитая эти уравнения и используя тригонометрические соотношения для суммы и разности синусов, получаем:

$$\sin \theta_2 - \sin \theta_1 = 2 \cos \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = 2 \cos \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right) \sin \frac{\Delta\theta}{2} =$$

$$= \frac{2\lambda}{d} - \frac{\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d};$$

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \sin \frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = 2 \sin \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right) \cos \frac{\Delta\theta}{2} =$$

$$= \frac{\lambda}{d} + \frac{2\lambda}{d} = \frac{3\lambda}{d};$$

$$\cos \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2} \right) = \frac{\lambda}{2d \sin \frac{\Delta\theta}{2}};$$

$$\sin\left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2}\right) = \frac{3\lambda}{2d \cos \frac{\Delta\theta}{2}}.$$

Возведем эти уравнения в квадрат и сложим их:

$$1 = \frac{9\lambda^2}{4d^2 \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2}} + \frac{\lambda^2}{4d^2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2}};$$

$$4d^2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2} = 9\lambda^2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \lambda^2 \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2};$$

$$4d^2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} \cos^2 \frac{\Delta\theta}{2} = 8\lambda^2 \sin^2 \frac{\Delta\theta}{2} + \lambda^2;$$

$$d^2 \sin^2 \Delta\theta = 8\lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos \Delta\theta}{2} + \lambda^2;$$

$$d^2 \sin^2 \Delta\theta = 4\lambda^2 (1 - \cos \Delta\theta) + \lambda^2;$$

$$d^2 \sin^2 \Delta\theta = \lambda^2 (5 - 4 \cos \Delta\theta);$$

$$d = \frac{\lambda}{\sin \Delta\theta} \sqrt{5 - 4 \cos \Delta\theta} = \frac{5 \cdot 10^{-7}}{\sin 10^\circ} \cdot \sqrt{5 - 4 \cos 10^\circ} = 2,97 \cdot 10^{-6} \text{ м} =$$

$$= 2,97 \text{ мкм}.$$

Ответ: $d = 2,97 \text{ мкм}.$