- Ряды в комплексной области обладают теми же свойствами, что и ряды с действительными членами.
- Остается в силе теорема Абеля и теорема о разложении функции в ряд Тейлора.
- Разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора по степеням z то же, что и для функций действительного переменного.

Главная часть ряда Лорана:
часть с отрицательными показателями

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Правильная часть ряда Лорана:
часть с неотрицательными показателями

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Вычет функции $f(z)$ относительно точки z_0:
комплексное число, равное коэффициенту c_{-1} в разложении данной функции в ряд Лорана.

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz$$

1. z_0 – правильная или устранимая особая точка:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = 0$$

2. z_0 – полюс порядка n:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}((z-z_0)^n f(z))}{dz^{n-1}}$$

3. z_0 – существенно особая точка:

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = c_{-1}$$

****. Если функция представлена в виде $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\omega(z)}$:***

$$\operatorname{res}[f(z), z_0] = \frac{\varphi(z_0)}{\omega'(z_0)}$$

Классификация особых точек:

1. Устранимая Особая Точка:
это точка в которой разложение функции в ряд Лорана не содержит главной части.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = const$$

2. Полюс порядка n:
это точка в которой разложение функции в ряд Лорана содержит конечное число слагаемых в главной части, причем старшая степень в знаменателе равна n.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

3. Существенно Особая Точка:
это точка в которой разложение функции в ряд Лорана содержит бесконечное число слагаемых в главной части.

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \emptyset$$

Вычисление интегралов типа $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = [z = e^{ix}]$$

$$= \int_{|z|=1} F(z)dz$$

$$= 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}[F(z), z_i]$$

Теорема Коши о вычетах:

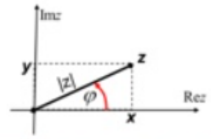
интеграл от функции по контуру C равен коэффициенту 2πi, умноженному на сумму вычетов этой функции относительно всех особых точек внутри контура C.

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_i]$$

Вычисление несобственных интегралов от функций действительного переменного:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{res}[f(z), z_i]$$

где z_i – особая точка, лежащая в верхней полуплоскости (включая действительную ось).



Модуль: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Аргумент: φ – это угол между радиус-вектором точки и вещественной осью. $\varphi \in [0; 2\pi)$

Алгебраическая:
$z = x + iy$

Тригонометрическая:
$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Показательная:
$z = |z|e^{i\varphi}$

Сложение:
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

Умножение:
$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Деление:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$\mathbf{sin}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\quad$ $\mathbf{cos}\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\mathbf{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}$ $\quad$ $\mathbf{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}$

$\mathbf{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$ $\quad$ $\mathbf{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

$\mathbf{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}$ $\quad$ $\mathbf{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}$

$\mathbf{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + 2\pi k i$

$\mathbf{ln}\, z = \ln|z| + i\arg z$

$z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\, z}$

$\mathbf{Arcsin}\, z = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$

$\mathbf{Arccos}\, z = -iLn\left(iz + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

$\mathbf{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$

$\mathbf{Arcctg}\, z = -\frac{i}{2}Ln\left(\frac{z + i}{z - i}\right)$

ФКП **дифференцируема в точке**, если она имеет производную в этой точке.

ФКП **дифференцируема в области**, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Условия Коши-Римана:

$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy}$ $\quad$ $\frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx}$

Формулы вычисления производной:

$f'(z) = u'_x + iv'_x$

$f'(z) = u'_x - iu'_y$

$f'(z) = v'_y + iv'_x$

$f'(z) = v'_y + iu'_y$

ФКП является ***аналитической*** в точке, если она определена и дифференцируема в этой точке и в некоторой ее окрестности

Гармоническая функция: это функция двух действительных переменных, которая имеет непрерывные частные производные до второго порядка и оператор Лапласа от этой функции равен нулю (сумма ч.п.).