Мин цифры
Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики
СибГУТИ
Кафедра высшей математики

РГР 5
Оригинал изображения

Выполнил: студент 2 курса группы ИП-013
Иванов Леонид Дмитриевич

Новосибирск 2022.г

Найдите оригинал функции, используя формулу Дюамеля $F(p) = \dfrac{p}{p^4 - 5p^2 + 4}$

$$F(p) = \frac{p}{p^4 - 5p^2 + 4}$$

Разложим знаменатель на множители:

$$\frac{p}{p^4 - 5p^2 + 4} = \frac{p}{(p^2 - 1)(p^2 - 4)}$$

По формулам из методички найдём оригиналы:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 - 1}$$

$$f(t) = ch(t)$$

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2 - 4}$$

$$\phi(t) = ch(2t)$$

Теперь запишем формулу Дюамеля:

$$\mathbf{pF(p)*\Phi(p) = f(t)*\phi(0)+\int_0^t f(u)\phi'(t-u)du}$$

$$\phi(0) = ch(0) = 1$$

$$\phi' = 2sh(2t)$$

Выразим гиперболические синусы и косинусы через экспоненту:

$$ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

$$sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Вычислим интеграл:

$$ch(t) + \int_0^t \big(ch(u) * 2sh(2t - 2u)\big)\mathrm{du} =$$

$$ch(t) + \int_0^t \left(\frac{(e^u + e^{-u})}{2} * 2\frac{(e^{2t-2u} - e^{-2t+2u})}{2}\right) du =$$

$$ch(t)+\frac{1}{2}\int_0^t\big((e^u+e^{-u})*(e^{2t-2u}-e^{-2t+2u})\big)du=$$

$$ch(t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\left(\frac{e^{2u}+1}{e^u}\right)*(e^{2t-2u}-e^{-2t+2u})\right)du=$$

$$ch(t)+\frac{1}{2}\int_0^t\left(\frac{e^{2t}-e^{4u-2t}+e^{2t-2u}-e^{-2t+2u}}{e^u}\right)du=$$

$$ch(t)+\frac{1}{2}\int_0^t(e^{2t-x}-e^{3u-2t}+e^{2t-3u}-e^{2t+u})du=$$

$$ch(t)+\frac{1}{2}\left(-e^{2t-x}-\frac{e^{3u-2t}}{3}-\frac{e^{2t-3u}}{3}-e^{-2t+u}\right)=$$

$$ch(t)+\left(-\frac{-(e^{2t-u}+e^{-2t+u}}{2}-\frac{-e^{3u-2t}+e^{2t-3u}}{6}\right)$$

Делаем подстановку пределов интегрирования (верхний - нижний):

$$ch(t)+\left(-\frac{-(e^{2t-t}+e^{-2t+t}}{2}-\frac{-e^{3t-2t}+e^{2t-3t}}{6}\right)-$$

$$-\frac{-(e^{2t-0}+e^{-2t+0}}{2}-\frac{-e^{0-2t}+e^{2t-0}}{6}=$$

$$ch(t)-\frac{2}{3}\left(e^t+\frac{1}{e^t}\right)-\left(-\frac{3e^{2t}+3e^{-2t}+e^{-2t}+3e^{2t}}{6}\right)=$$

$$\frac{e^t+e^{-t}}{2}-2\frac{e^t+e^{-t}}{3}+\frac{3e^{2t}+3e^{-2t}+e^{-2t}+3e^{2t}}{6}=$$

$$\frac{-e^{3t}-e^t+4e^{4t}+4}{6e^{2t}}$$