FAKULTA
APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ
UNIVERZITY
V PLZNI

Největší vepsaný obdélník v konvexním polygonu

Semestrální práce z KIV/PRO

Patrik Harag
A15B0034P

27. 10. 2016

Obsah

Úvod

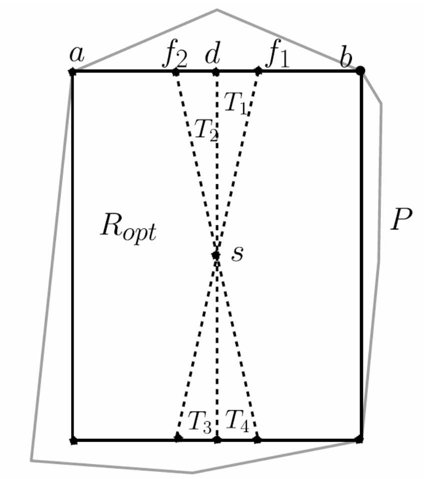
Je dán konvexní polygon *P* obsahující *n* vrcholů, cílem je spočítat největší vepsaný obdélník ležící uvnitř polygonu *P*. Podle autorů původního článku doposud nebyl publikován žádný optimální algoritmus řešící tento konkrétní problém, i když existuje přímočaré řešení v čase $O(n^4)$ (které bude také uvedeno). Budeme se především zabývat aproximačním algoritmem, který má jen logaritmickou časovou složitost pro konvexní polygon *P* se seřazenými vrcholy.

Předpoklad seřazených vrcholů je při práci s polygony běžný. Pokud je však dán polygon se neseřazenými vrcholy, pořadí vrcholů může být určeno pomocí standardních algoritmů pro konstrukci konvexní obálky v čase $O(n \log n)$. Dále budeme uvažovat pouze polygony se seřazenými vrcholy.

Notace a definice

Polygon (nebo také mnohoúhelník, n-úhelník) je omezená část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čarou. Body, které určují polygon, se nazývají vrcholy polygonu. Úhly, které svírají sousední strany, se nazývají vnitřní úhly polygonu. Polygon se nazývá konvexní, jestliže všechny vnitřní úhly jsou menší než 180°. [3]

Označíme obsah polygonu *P* jako $|P|$. Úsečku spojující dva body *a* a *b* označíme jako $\overline{ab}$ a její délku $|\overline{ab}|$. Pro daný konvexní polygon *P*, nechť R_{opt} je největší vepsaný obdélník.



Obr. 1: Největší vepsaný obdélník R_{opt} v konvexním polygonu *P*. (převzato z [1])

Lemma 1. Nechť *P* je polygon s *n* vrcholy. Předpokládejme, že vrcholy polygonu *P* jsou zadány ve směru hodinových ručiček. Potom vepsaný obdélník v polygonu *P* s obsahem alespoň (1 - ϵ) krát větší než obsah největšího vepsaného obdélníku lze vypočítat

- s pravděpodobností t v deterministickém čase $O(1/\epsilon \log n)$ pro libovolnou konstantu $t < 1$,
- v deterministickém čase $O(1/\epsilon^2 \log n)$;
- v deterministickém čase $O(1/\epsilon \log 1/\epsilon \log n + 1/\epsilon^{28})$;

Analýza problému

Pomalý, ale optimální algoritmus. Pro každou čtyřčlennou množinu hran $\{e_1, \dots e_4\}$ spočteme všechny největší obdélníky s rohy alespoň na třech hranách $e_1, \dots e_4$, poslední roh může, ale nemusí ležet na některé z hran polygonu P. Tento algoritmus pracuje v čase $O(n^4)$.

Pokusíme se největší vepsaný obdélník v konvexním polygonu určit aproximací. To nám dovolí získat mnohem lepší asymptotickou složitost. Základní myšlenkou našeho algoritmu je aproximovat směr zarovnání největšího vepsaného obdélníku a dokázat, že obsah tohoto obdélníku také aproximuje $|R_{opt}|$. Pro výpočty vytvoříme množinu možných směrů a najdeme největší vepsaný obdélník pro každý z těchto směrů. Počet možných směrů bude $O(1/\epsilon)$ pro randomizovaný algoritmus a $O(1/\epsilon^2)$ nebo $O(1/\epsilon \log 1/\epsilon)$ pro algoritmus deterministický.

Aproximace R_{opt}

Předpokládejme nyní, že ze známe střed s obdélníku R_{opt}. Pokud zvolíme $O(1/\epsilon)$ náhodných bodů rozprostřených uvnitř P, alespoň jeden z nich s vysokou pravděpodobností leží v jednom z trojúhelníků $T_{1..4}$ (viz Obr. 1). Když určíme směr z tohoto bodu do s, dostaneme směr, který je blízký směru některé ze stran R_{opt}.

Protože neznáme polohu bodu s, předpokládejme, že je dán nějaký jiný bod p v R_{opt}. Potom pro alespoň jeden trojúhelník $T_{1..4}$ existuje translace T_i', pro kterou platí stejný vztah.

Randomizovaný algoritmus

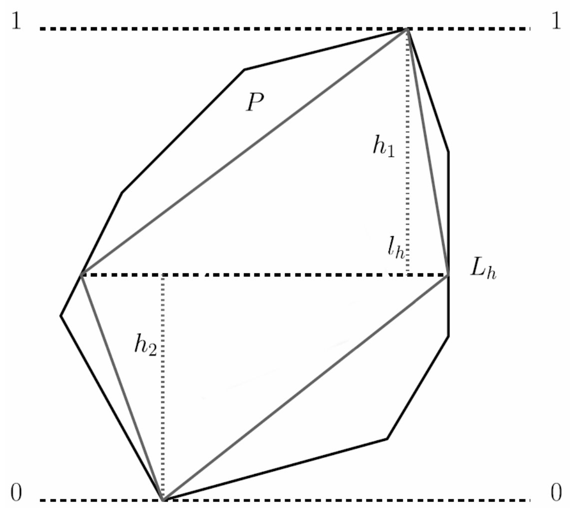
Lemma 2. Nechť P je konvexní polygon a R_{opt} největší vepsaný obdélník v P, potom $|R_{opt}| \geq |P| / 2$.

Z výše uvedeného lemmatu vyplývá, že pokud náhodně vybereme k bodů z polygonu P, potom očekávaný počet bodů uvnitř R_{opt} je k / 2. Kromě toho jsou tyto body uvnitř R_{opt} rozloženy zcela náhodně. Máme tedy algoritmus pro aproximaci největšího vepsaného obdélníku, za předpokladu, že jsme schopni efektivně generovat náhodné body uvnitř P. Kroky shrneme v algoritmu 1.

Algoritmus 1 (převzato z [1])

Take $\Theta(1)$ points in P with the aforementioned distribution and store them in U.
Take $\Theta(1/\epsilon)$ points in P with the aforementioned distribution and store them in V.
$|R_{apx}| = 0$
for all $u \in U$ **do**
    for all $v \in V$ **do**
        Compute the largest inscribed rectangle S that is aligned to $\overline{uv}$.
        if $|S| \geqslant |R_{apx}|$ **then**
            $R_{apx} = S$
return R_{apx}

Generování náhodných bodů uvnitř *P*. Nechť v_t je nejvyšší a v_b nejnižší vrchol *P*. Zvolíme náhodnou výšku *h* mezi těmi body. Vezmeme nejdelší úsečku, která se "vejde" do *P* ve výšce *h* a zvolíme náhodný bod ležící na této úsečce. Tento proces můžeme opakovat tak dlouho, dokud nemáme dostatečný počet náhodných bodů. Každý z těchto bodů může být generován v čase *O*(log *n*), za předpokladu, že jsou vrcholy *P* seřazené.



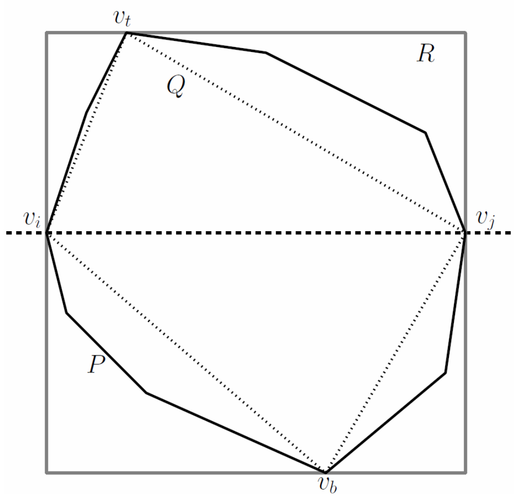
Obr. 2: Výběr náhodných bodů z konvexního polygonu *P*. (převzato z [1], upraveno)

Protože je možné náhodné body generovat v logaritmickém čase, je složitost našeho algoritmu $O(1/\epsilon \log n)$.

Deterministický algoritmus

Pro deterministický algoritmus zbývá už jen určit body v P jiným způsobem, než v případě randomizovaného algoritmu.

Pokud budeme mít ohraničující obdélník R_e polygonu P, jehož obsah je proporčně podobný obsahu P, potom pravidelná mřížka $O(1/\epsilon \times 1/\epsilon)$ v tomto obdélníků vytvoří $O(1/\epsilon \times 1/\epsilon)$ bodů uvnitř P. Pro takovou mřížku, počet bodů v libovolném konvexním polygonu Q uvnitř P, který má obsah alespoň ϵ, obsahuje alespoň $O(1/\epsilon)$ bodů z mřížky. Obdélník R_e je možné spočítat v logaritmickém čase.



Obr. 3: Polygon P s jeho ohraničujícím obdélníkem R_e. (převzato z [3])

Algoritmus 2 (převzato z [1])

Compute an enclosing rectangle R_e with area $|R_e| \leqslant 2\sqrt{2}|P|$
Compute a $\Theta(1) \times \Theta(1)$ grid on R_e. Let G_1 be the set of grid points.
Compute a $\Theta(\frac{1}{\epsilon}) \times \Theta(\frac{1}{\epsilon})$ grid on R_e. Let G_2 be the set of grid points.
$|R_{apx}| = 0$
for all $u \in G_1$ **do**
    for all $v \in G_2$ **do**
        Compute the largest inscribed rectangle S that is aligned to $\overline{uv}$
        if $|S| \geqslant |R_{apx}|$ **then**
            $R_{apx} = S$
return R_{apx}

Závěr

Řešili jsme problém, jak aproximovat největší vepsaný obdélník v konvexním polygonu. Pro polygon se seřazenými vrcholy jsme uvedli deterministický algoritmus, který v čase $O(1/\epsilon \log 1/\epsilon \log n)$. Také jsme uvedli randomizovaný algoritmus, které výsledek vypočte v čase $O(1/\epsilon \log n)$.

Bibliografie

1. **(hlavní zdroj)** Christian Knauer, Lena Schlipf, Jens M. Schmidt, Hans Raj Tiwary, Largest inscribed rectangles in convex polygons, Journal of Discrete Algorithms, Volume 13, May 2012, Pages 78-85, ISSN 1570-8667 [online] http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570866712000160
2. Polygon, Wikipedia - The Free Encyclopedia, [online], citace: 2016-10-08 https://en.wikipedia.org/wiki/Polygon
3. Christian Knauer, Lena Schlipf, Jens M. Schmidt, Hans Raj Tiwary, Largest Inscribed Rectangles in Convex Polygons, EuroCG 2010, Dortmund, Germany, March 22-24, 2010