计算机领域本科教育教学改革试点
工作计划（“101计划”）研究成果

数据结构

俞勇、张铭、陈越、韩文弢

上海交通大学、北京大学、浙江大学、清华大学

第 11 章 查找

11.1 静态查找

林劼
电子科技大学

查找表分类

- 静态查找表

仅作查询和检索操作的查找表。

- 动态查找表

“查询”结果“不在查找表中”→数据元素插入到查找表中；
“查询”结果为“在查找表中”的数据元素→删除。

查找过程中，往往是依据数据元素的某个数据项进行查找，这个数据项通常是数据的关键字。

关键字：是数据元素中某个数据项的值，用以标识一个数据元素。

若关键字能标识唯一的一个数据元素，则称谓**主关键字。**

若关键字能标识若干个数据元素，则称谓**次关键字。**

张三 2016010002 男 成都 1.75

平均查找长度 ASL

$$ASL = P_1C_1 + P_2C_2 + \ldots + P_nC_n$$

P_i——查找第 i 个元素的概率

C_i——查找第 i 个元素需要的比较次数

提纲

11.1.1　顺序查找

11.1.2　折半查找

11.1.3　索引查找

11.1.4　作业

11.1.1 顺序查找

	52	7	13	9	41

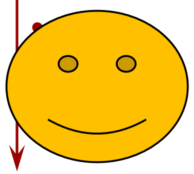
11.1.1 顺序查找

顺序查找基本思想

从表中指定位置（一般为最后一个或第0个位置设为岗哨）的记录开始，沿某个方向将记录的关键字与给定值相比较，若某个记录的关键字和给定值相等，则查找成功；

反之，若找完整个顺序表，都没有与给定关键字值相等的记录，则此顺序表中没有满足查找条件的记录，查找失败。

11.1.1 顺序查找



R

64	21	37	88	19	92	05	64	56	80	75	13	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

key=64

R.Length

i i i i i i i i i i i i

R

60	21	37	88	19	92	05	64	56	80	75	13	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

key=60

R.Length

11.1.1 顺序查找

性能分析

空间复杂度： O(1)

时间复杂度：

查找算法的基本运算是给定值与顺序表中记录关键字值的比较。

最好情况： O(1)

最坏情况： O(n)

平均情况： O(n)

11.1.1 顺序查找

顺序表上顺序查找的平均查找长度

平均查找长度（ASL）：给定值与关键字比较次数的期望值。对于具有n个记录的顺序表，查找成功时的平均查找长度为：

$$ASL=\sum_{i=1}^{n} P_i C_i$$

P_i——查找第i个记录的概率

C_i——找到第i个记录数据需要比较的次数，

对于顺序表，$C_i = n-i+1$

11.1.1 顺序查找

等概率情况

$$P_i = \frac{1}{n}$$

$$ASL = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = \frac{n+1}{2}$$

不等概率

--每个元素的查找概率已知

--每个元素的查找概率未知

顺序查找的应用：查找最大值

问题描述：查找序列（顺序表）$a[1 \ldots n]\ (n > 0)$中的最大元素。

```
1. max_val ← a[1]        //最大元素的初始值
2. for i ← 2 to n do     //依次比较每个元素
3. |  if max_val < a[i] then
4. |  |  max_val ← a[i]
5. |  end
6. end
```

- 比较次数：n-1

顺序查找的应用：查找最大和最小值

问题描述：查找序列（顺序表）$a[1 \ldots n]\ (n > 0)$中的最大元素和最小元素，比较次数不超过 $\frac{3}{2}n$ 。

顺序查找的应用：查找最大和最小值

问题描述：查找顺序表$a[1 \ldots n]$ $(n > 0)$中的最大值和最小值，比较次数不超过$\frac{3}{2}n$。

- **算法1**：朴素查找法

```
max_val ← a[1]    //最大元素的初始值
min_val ← a[1]    //最小元素的初始值
for i ← 2 to n do    //对每个元素依次判断
|   if max_val < a[i] then    //比较1
|   |   max_val ← a[i]
|   else if min_val > a[i] then //比较2
|   |   min_v ← a[i]
|   end
end
```

每次循环只与单个元素比较

比较次数：2(n-1) （最坏情况）

顺序查找的应用：查找最大和最小值

问题描述：查找顺序表$a[1 \dots n]\ (n > 0)$中的最大值和最小值，比较次数不超过 $\frac{3}{2}n$ 。

- 每次只与序列中的一个元素比较，总的比较次数达到 2(n-1)
- 可以考虑每次同时比较多个元素，从中找最大值和最小值
- **思考**：为更新当前的最大值和最小值，与序列多少个元素一起比较效率高？如何比较？

顺序查找的应用：查找最大和最小值

问题描述：查找顺序表 $a[1 \dots n]\ (n > 0)$ 中的最大值和最小值，比较次数不超过 $\frac{3}{2}n$。

- **算法2**：快速查找法

比较次数：$\frac{3}{2}n$

```
max_val ← a[1]
min_val ← a[1]
k ← (n % 2) + 1   //n是奇数，k 从2开始；否则从1开始
while k < n do
|  if a[k] < a[k+1] then   //比较1：两个元素先比较
|  |  if min_val > a[k] then        //比较2：
|  |  |  min_val ← a[k]             //较小值与min_val比较
|  |  end
|  |  if max_val < a[k+1] then  //比较3：
|  |  |  max_val ← a[k+1]           //较大值与max_val比较
|  |  end
|  else     //a[k] > a[k+1]        //比较1'
|  |  if min_val > a[k+1] then  //比较2'
|  |  |  min_val ← a[k+1]
|  |  end
|  |  if max_val < a[k] then     //比较3'
|  |  |  max_val ← a[k]
|  |  end
|  end
|   k ← k + 2   //每次同时比较两个元素
end
```

- 思考题：如果每次同时比较三个元素，能否进一步减少比较次数？

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 1)$内的所有质数。

质数筛选的意义：

- 质数是数论研究的基础---费马大定理、黎曼猜想等
- 质数在密码学中具有重要的应用---RSA加密算法基于质数的乘法和因数分解
- 算法设计中广泛使用了质数的概念和性质---哈希表、哈希函数等

因特网梅森素数大搜索（GIMPS, Great Internet Mersenne Prime Search）

日本虹色社出版

✓ 世界上第一个基于互联网的分布式计算项目，参与者可自行下载prime95和MPrime软件（开放源代码）来搜索梅森素数；成功者可获5-10万美金的奖励！

✓ 梅森素数是可以被写成 $2^n - 1$形式的质数，以17 世纪的法国数学家马丁·梅森命名

✓ 中国数学家周海中于1992年首次给出了梅森素数分布的准确表达式，被国际上命名为“周氏猜测”

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 1)$内的所有质数。

- **算法1**：试除法 时间复杂度：$O(n\sqrt{n})$

  ---小学生都会，但也只有小学生才用吧？！(^_^)

- **算法2**：埃氏筛选法 时间复杂度：$O(n\ \mathrm{loglog}(n))$

  ---不是最优，但最为经典，算法简洁，使用广泛！

- ***算法3**：合数限定法 时间复杂度：$O(n)$

  ---时间最优，但空间复杂度高，纯自研（嗨）算法，仅供参考（拍砖）(@~_~@)

- ***算法4**：欧拉筛选法 时间复杂度：$O(n)$

  ---时间最优，大师创作，但算法较复杂，n越大效率越高！

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法2：埃氏筛选法

- 由希腊数学家Eratosthenes在公元250年提出的一种简单检定质数的算法

- **思路**：把整数2到n排列起来，首先标记2是最小的质数，然后删除2后面所有2的倍数（偶数）。可以发现，2后面第一个没删除的数是3，标记3是下一个质数，再把3后面3的倍数都删除；质数3后面第一个未删除的数是5，说明5是质数，再把5后面所有能被5整除的数都删除。。。这样一直做下去，就会把不超过n的全部合数都筛掉，留下的就是不超过n的全部质数。

- **关键数据结构**：顺序表 is_prime[1...n]

  is_prime[k] = true/false 标注 正整数 k 是否质数

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1,n]$ $(n>1)$内的所有质数。

算法2：埃氏筛选法

```
is_prime[1] ← false    //1不是质数，也不是合数
for k ← 2 to n do
|   is_prime[k] ← true  //初始化，先假设[2...n]都是质数
end
for k ← 2 to n do
|   if is_prime[k] = true then  //k是质数
|   |   m ← 2 * k          //k的最小倍数
|   |   while m ≤ n do
|   |   |   is_prime[m] = false    //k的倍数都不是质数，删除
|   |   |   m ← m + k      //下一个倍数
|   |   end
|   end
end
```

- 时间复杂度：

$$O\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}+\cdots\right)=O(n\,\mathrm{loglog}(n))$$

单选题 1分

设置

将整数$a \in [1 \dots n]$因数分解，得到$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$，其中$p_1, \dots, p_k$是不同的质数（k >1）且指数$n_1, \dots, n_k$都大于0。则在埃氏筛选法中，a会被删除几次？即 $is\_prime[a] \leftarrow \text{false}$ 被执行几次？

A k

B $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

C $\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$

D $p_1 + p_2 + \cdots + p_k$

提交

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法3：合数限定法

- 筛选法的问题在于一个合数会被多次删除，造成时间浪费。如 6,12,18,36是质数2和3的倍数

  问：整数k会被删除几次?

  答：有多少个不同的质因数就被删除几次

  如12 = 2 x 2 x 3，会被删除2次

- **思路**：为使每个合数只删除一次，不能简单地删除质数的所有倍数，而是删除由当前找到的质数合成的数。

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法3：合数限定法

- **思路**：为使每个合数只删除一次，不能简单地删除质数的所有倍数，而是删除由当前找到的质数合成的数。

- **关键数据结构：**

  (1) 顺序表 is_prime[1...n]

  (2) 队列 M

  ---设当前找到k-1个质数: $p_1 < p_2 < \cdots < p_{k-1}$

  --- 用队列M存放由这些质数合成的数值

  即 M = { $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_{k-1}^{n_{k-1}} \leq n \mid \forall i \in [1, k)\text{: } n_i \geq 0)$ }

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法3：合数限定法

- 关键步骤：更新合数队列M

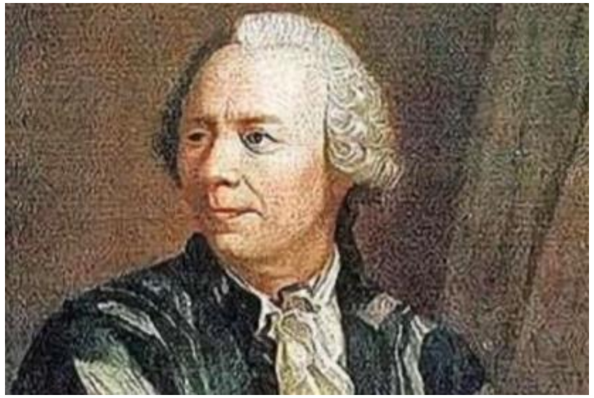
```
            //设找到第k个素数p_k    (is_prime[p_k] = true)
Q ← M   //新建队列Q，然后将M中的所有合数移到Q
while IsEmpty(Q) = false do
|  m ← DeQueue(Q)        //取出合数，与p_k相乘
|  while m * p_k ≤ n do        //相乘结果在区间范围内
|  |  is_prime[m * p_k] ← false   //删除m * p_k，且该合数是第一次删除 (?)
|  |  EnQueue(M, m)      //将合数m放入队列M
|  |  m ← m * p_k         //更新合数，继续与p_k相乘
|  end
end
```

算法细节省略，因为更牛的在后面。。。

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：欧拉筛选法 （线性筛选法）



Leonhard Euler

- **思路**：在埃氏筛选法的基础上，让每个合数只被它的最小质因数删除一次，以达到不重复的目的
- **关键数据结构**： （1）顺序表 is_prime[1...n]

  is_prime[k] = true/false 标注 正整数 k 是否质数

  （2）线性表 prime_list：按升序存储筛选出的质数

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1,n]$ $(n>0)$内的所有质数。

算法4：欧拉筛选法

- 欧拉对质数p的倍数 k * p （k>1) 的分析

Q1：在埃氏筛选法中，合数k * p 什么情况下会被多次删除？

A1：将k质因数分解为 $k = q_1 q_2 \ldots q_j$ 且 $q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_j$

如果 $\exists\, i \in [1..j]$: $q_i \neq p$，则k*p至少会被 p 和 q_i 删除两次

Q2：合数k * p 第一次被删除是在找到哪个质数后发生的？

A2： $k * p = \min\{q_1,p\} *\ q_2 \ldots q_j * \max\{q_1,p\}$

因此，k*p第一次删除发生在找到质数$\min\{q_1,p\}$ 时！

如果$q_1 < p$，p的倍数k*p在筛选出p之前就已经被删除了！

欧拉定理

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小质因数的质数相乘，并删除相乘后的合数

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 1)$内的所有质数。

算法4：欧拉筛选法

```
InitList(prime_list)    //初始化存放质数的线性表
is_prime[1] ← false
for k ← 2 to n do
|   is_prime[k] ← true  //初始化，先假设[2…n]都是质数
end
for k ← 2 to n do   //从2开始筛选
|   if is_prime[k] = true then          //k是质数
|   |   Append(prime_list, k)      //将k从后添加至线性表（升序排列）
|   end
        //判断k是否质数后，再作为系数与已找到的质数相乘，并删除合数
|   j ← 0            //从线性表中的最小质数2开始
|   while k * prime_list[j] ≤ n do      //合数在[1…n]区间内
|   |   is_prime[ k * prime_list[j] ] ← false   //删除合数
|   |   if k % prime_list[j] == 0 then   //prime_list[j] 是k的最小质因数
|   |   |   break                         //结束删除
|   |   else
|   |   |   j ← j + 1                  //否则，k继续与下一个质数相乘
|   |   end
|   end
end
```

- 如果k是质数，已添加至prime_list末尾
- 如果k是合数，则其最小质因数一定在prime_list中 (?)

因此，用k删除合数的运行时间为 O(|prime_list|)

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○		✖																	

k = 2

最小质因数：2

在埃氏筛选法中，2会删除所有偶数，并且删除的合数数量最多！，

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	✖		✖			✖												

k = 3

最小质因数：3

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	O	O	✖		✖		✖	✖												

k = 4

最小质因数：2

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	×	○	×		×	×	×					×						

k = 5

最小质因数：5

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	✖	○	✖		✖	✖	✖		✖			✖						

k = 6

最小质因数：2

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	✖	○	✖	○	✖	✖	✖		✖		✖	✖						✖

k = 7

最小质因数：7

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法)

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	×	○	×	○	×	×	×		×		×	×	×					×

k = 8

最小质因数：2

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	✖	○	✖	○	✖	✖	✖		✖		✖	✖	✖		✖			✖

k = 9

最小质因数：3

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	×	○	×	○	×	×	×		×		×	×	×		×		×	×

k = 10

最小质因数：2

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	O	O	✖	O	✖	O	✖	✖	✖	O	✖		✖	✖	✖		✖		✖	✖

k = 11

最小质因数：11

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]\ (n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

对于每个正整数k，它只需与小于等于其最小素因子的质数相乘，并删除相乘后的合数

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
	○	○	✕	○	✕	○	✕	✕	✕	○	✕	○	✕	✕	✕	○	✕	○	✕	✕

k = 12,13,…,21 （倍数都大于21！）

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法)

***算法证明**:

- 正确性：[1,n]中所有合数都被删除

（证明） 设合数$a \in [1, n]$，且$a = p_1 p_2 \dots p_j$ (质因数$p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_j$)

因为$j > 1$ (?)，设$k = p_2 \dots p_j$，得到$a = k * p_1$

由于整数k的最小质因数 $p_2 \ge p_1$，根据算法，一定和p_1相乘得a

合数a被删除

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法4：线性筛选法 （欧拉筛选法）

***算法证明**：

- 线性时间效率：[1,n]中所有合数只被删除1次！

（反证法）假设合数$a \in [1, n]$被删除两次，即存在整数$k_1 < k_2$，使得$a = k_1 * p_1 = k_2 * p_2$ (p_1, p_2都是质数，且 $p_1 > p_2$)

矛盾

根据算法，$k_1 * p_1$说明k_1的最小质因数大于等于p_1(?)，证明 p_1 是合数 a 的最小质因数

同理，p_2 也是合数 a 的最小质因数

$p_1 = p_2$

顺序查找的应用：查找区间内所有质数

问题描述：查找正整数区间$[1, n]$ $(n > 0)$内的所有质数。

算法比较：

	埃氏筛选法	合数限定法	欧拉筛选法	质数总数
$n = 10^2$	0.006ms	0.01ms	0.013ms	25
$n = 10^4$	0.14ms	0.27ms	0.28ms	1229
$n = 10^6$	10.6ms	15.8ms	13.6ms	78498
$n = 10^8$	1.8s	1.7s	1.4s	5761455
$n = 10^9$	23s	20s	14s	50847534

硬件配置：2.3 GHz 双核 Intel Core i5，8GB内存；编译工具：Xcode；编程语言：C++

11.1.2 折半查找（二分查找）

11.1.2 折半查找

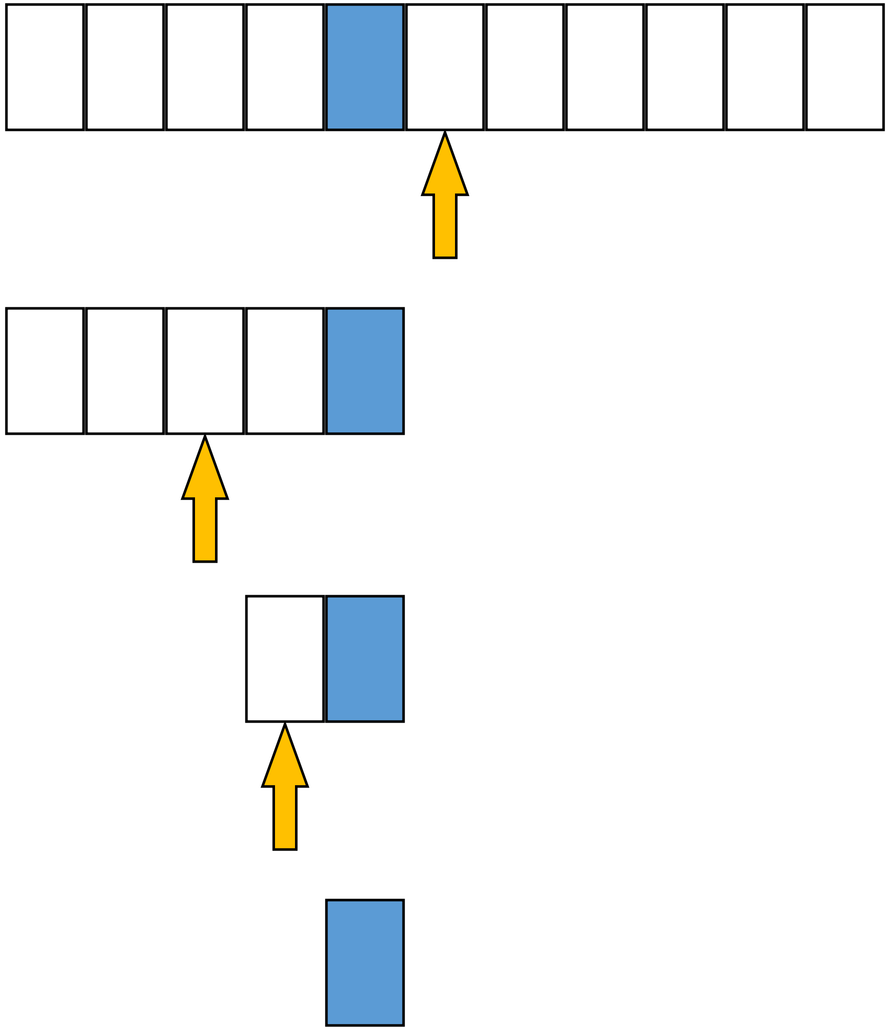
有序表：如果顺序表中的记录按关键字值有序，即：R[i].key≤R[i+1].key（或R[i].key≥R[i+1].key），i=1,2,...,n-1，则称顺序表为有序表 。

1 3 7 10 12 124 有序表

1 3 7 13 12 124 无序表

11.1.2 折半查找（二分查找）

查找过程：



将待查关键字与有序表中间位置的记录进行比较，

- 若相等，查找成功
- 若小于，则只可能在有序表的前半部分
- 若大于则只可能在有序表的后半部分

因此，经过一次比较，就将查找范围缩小一半，这样一直进行下去直到找到所需记录或记录不在查找表中。

11.1.2 二分查找的基本实现

查找过程：

将待查关键字与有序表中间位置的记录进行比较，

- 若相等，查找成功
- 若小于，则只可能在有序表的前半部分
- 若大于则只可能在有序表的后半部分

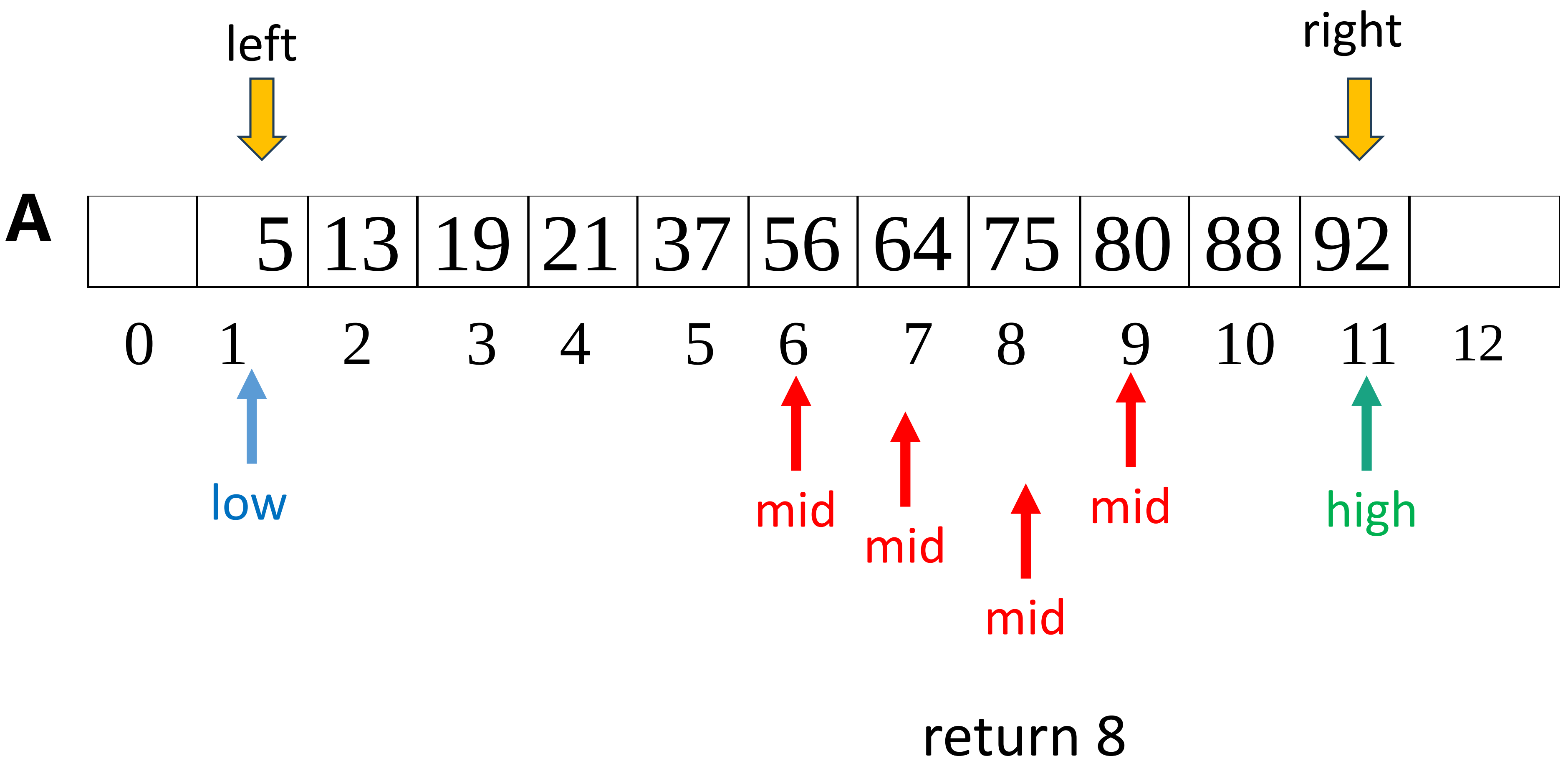
因此，经过一次比较，就将查找范围缩小一半，这样一直进行下去直到找到所需记录或记录不在查找表中。

算法：BinarySearch(A, left, right, key)
输入：顺序表A，数据按升序排列，整数left, right，数据key
输出：如果key在子表A[left...right]中，返回位置；否则返回-1

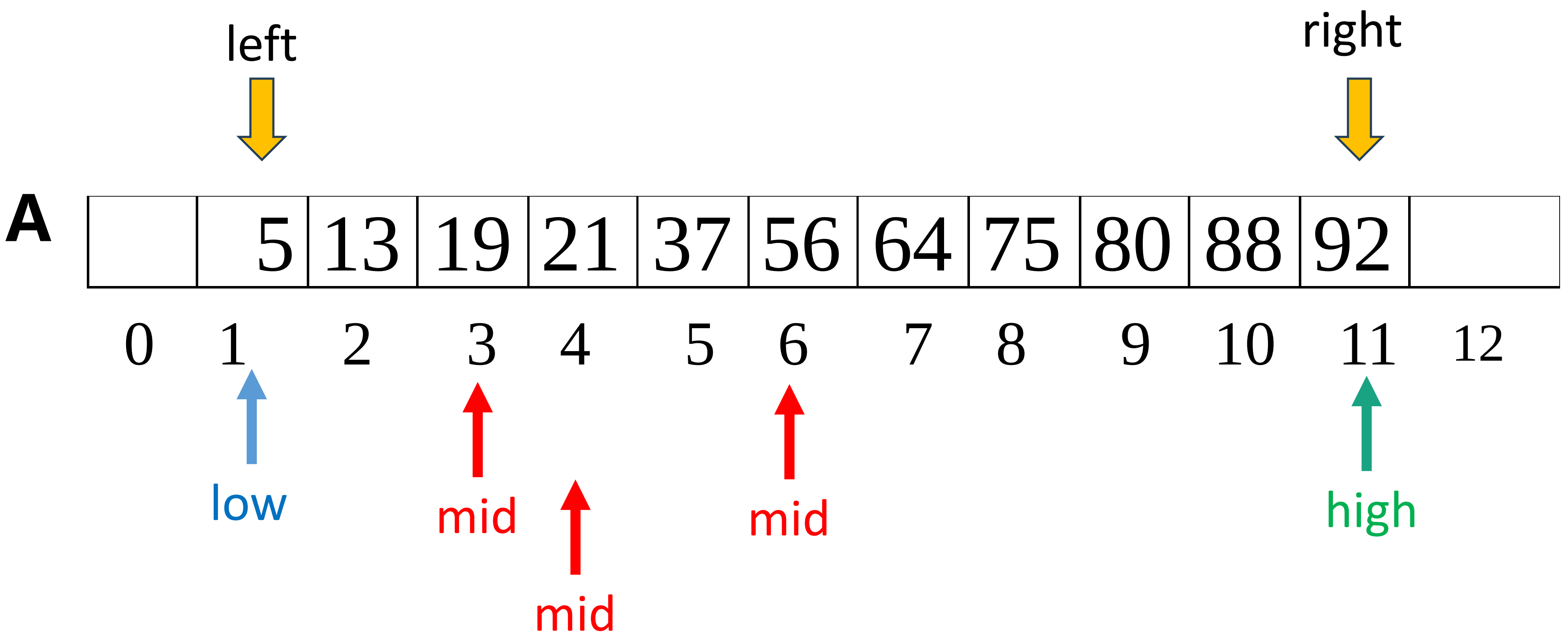
```
low ← left      //low和high分别指向查找区域左右两端
high ← right        //查找区间 [low, high]
while low ≤ high do
|  mid ← (low + high) / 2   //中间位置
|  if A[mid] = key then
|  |  return mid
|  else if key < A[mid] then
|  |  high ← mid – 1     //查找前半区间 [low, mid-1]
|  else         //key > A[mid]
|  |  low ← mid + 1      //查找后半区间 [mid+1, high]
|  end
end
return -1
```

时间复杂度：O(log(n))

例如: **key=75** 的查找过程如下:



例如: key=20 的查找过程如下:



high < low： 查找失败!

return -1

11.1.2 二分查找的简单实现

查找过程：

将待查关键字与有序表中间位置的记录进行比较，

- 若相等，查找成功
- 若小于，则只可能在有序表的前半部分
- 若大于则只可能在有序表的后半部分

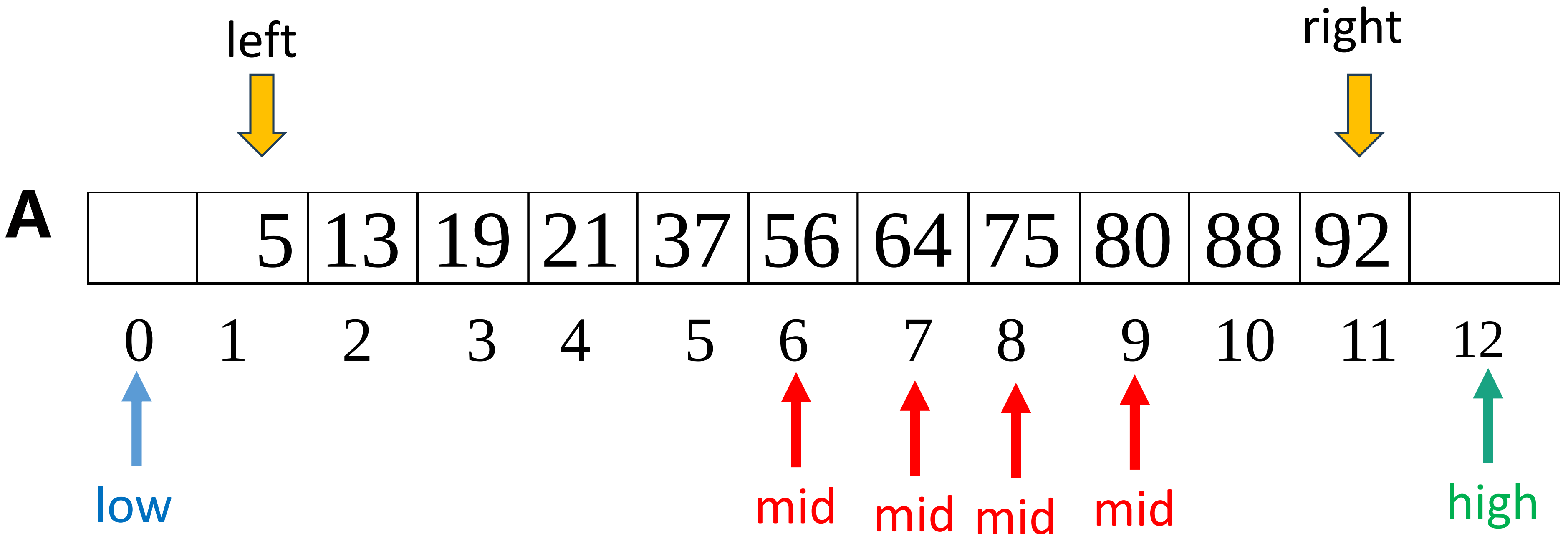
因此，经过一次比较，就将查找范围缩小一半，这样一直进行下去直到找到所需记录或记录不在查找表中。

算法：BinarySearch(A, left, right, key)
输入：顺序表A，非负整数left, right，数据key
输出：如果key在子表A[left...right]中，返回位置；否则返回-1

```
low ← left - 1        //low和high放在查找区域外边！
high ← right +1   //查找区间 (low, high)
while high - low > 1 do
|   mid ← (low + high) / 2  //中间位置：low<mid<high
|   if A[mid] = key then
|   |   return mid
|   else if key < A[mid] then
|   |   high ← mid          //查找前半区间 (low, mid)
|   else        //key > A[mid]
|   |   low ← mid          // 查找后半区间 (mid, high)
|   end
end
return -1
```

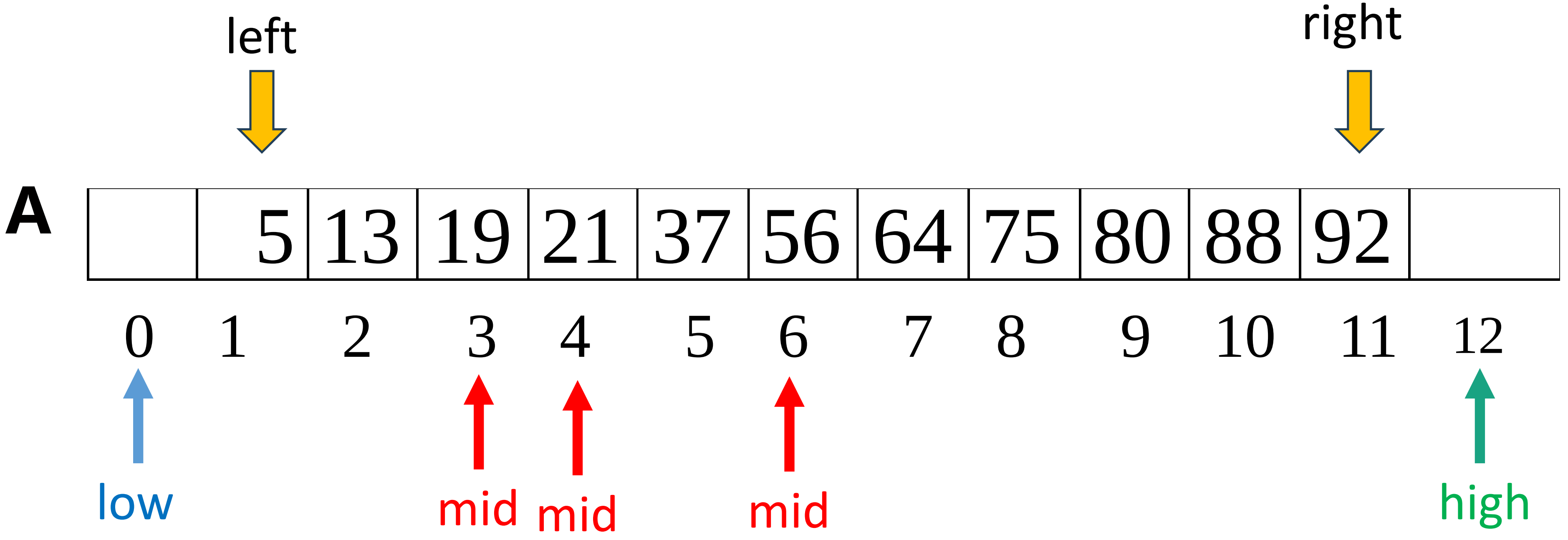
时间复杂度：O(log(n))

例如: **key=75** 的查找过程如下:



return 8

例如: **key=20** 的查找过程如下:



high - low = 1 查找失败!

return -1

多选题 1分

设置

在未排序的数组上作顺序查找和在排好序的数组上作二分查找，下面的说法中，哪些是错误的

A 顺序查找一定比二分查找慢

B 顺序查找在最好情况下只需比较1次，而二分查找做不到

C 如果查找的元素不在数组中，两个算法的时间效率基本相同

D 二分查找也适用于在双向链表上执行

提交

11.1.2 二分查找的应用：区间查询

问题描述：假设序列（顺序表）A[1...n], 满足$A[1] \le A[2] \le \cdots \le A[n]$，求A中所有大小在区间$[a, b)$中的数据。

思路：求序列A中 $\ge a$ 的最小值位置和 $< b$ 的最大值位置

关键算法：

- 假设$A[\text{left}-1] = -\infty, A[\text{right}+1] = +\infty$

(1) 开始时，low ← left – 1, high ← right + 1

(2) 计算区间(low, high)的中间位置mid ← (low + high) / 2

(3) 如果$A[\text{mid}] \ge \text{key}$, $\text{high} \leftarrow \text{mid}$; 若$A[\text{mid}] < \text{key}$, $\text{low} \leftarrow \text{mid}$

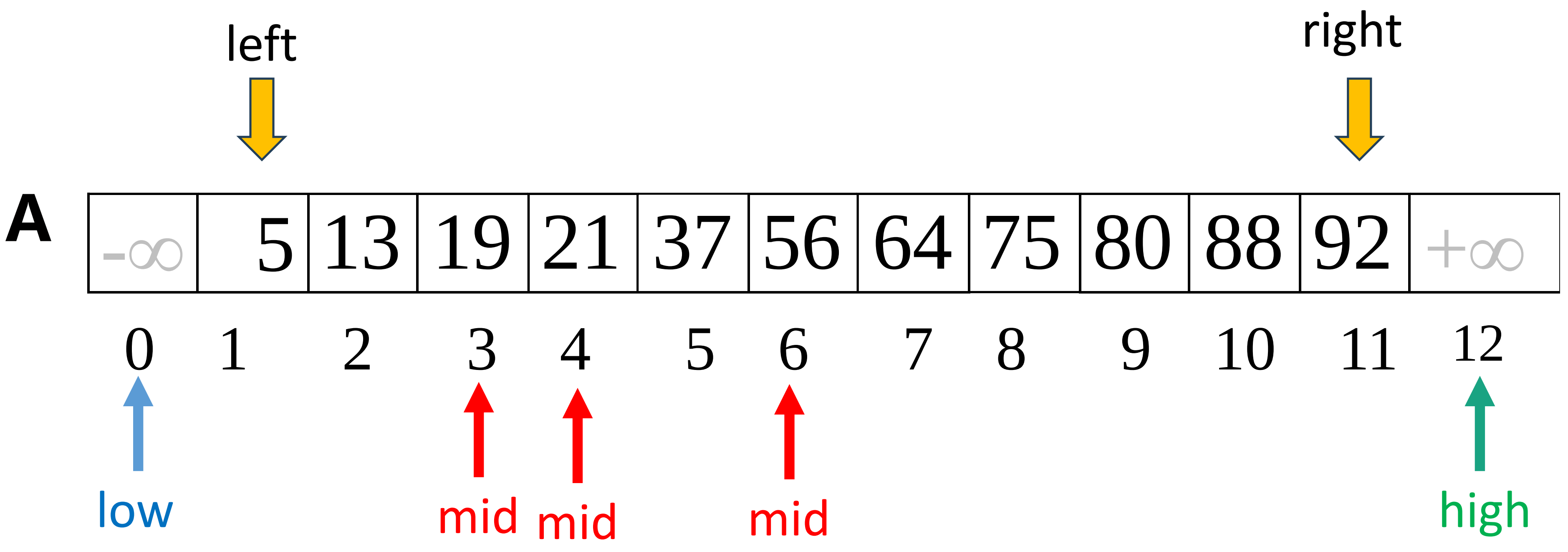
(4) 如果high – low > 1, 回到(2)，继续查找；否则结束操作

保持

- $\text{A[high]} \ge key$
- $\text{A[low]} < \text{key}$

思考：当high = low + 1时，A[high]和A[low]与key是什么关系?

例如: key=20 的查找过程如下:



high - low = 1 ：19是小于20的最大值，21是大于等于20的最小值!

11.1.2 二分查找的应用：区间查询

问题描述：假设序列（顺序表）A[1…n], 满足$A[1] \le A[2] \le \cdots \le A[n]$，求A中所有大小在区间$[a, b)$中的数据。

思路：求序列A中 $\ge a$ 的最小值位置和 $< b$ 的最大值位置

思考：如何求A中大小在区间(a, b], (a, b), [a, b] 内的数据?

关键算法

```
low ← left - 1
high ← right +1
while high - low > 1 do
|   mid ← (low + high) / 2
|   if key ≤ A[mid] then
|   |  high ← mid
|   else        //key > A[mid]
|   |  low ← mid
|   end
end
return high  // ≥ key的最小值位置
          或
       low   // < key的最大值位置
```

11.1.2 二分查找的应用：快速求幂

---不似“二分”，恰是二分

问题描述：给定正整数a和n，求 a^n 的值　　例如：求$3^{1000000000}$

- 直接迭代：$a^n = a^{n-1} * a$

  时间复杂度（相乘次数）$O(n)$

- 二分递归：$a^n = a^{\frac{n}{2}} * a^{\frac{n}{2}} * a^{n\%2}$

  时间复杂度: $O(\log(n))$

算法： Power(a, n)
输入：正整数a, n
输出：a^n

---

1. **if** n = 1 **then**
2. |　**return** a
3. **end**
4. pow ← Power(a, n/2)　//递归计算$a^{\frac{n}{2}}$ (二分)
5. pow ← pow * pow
6. **if** n % 2 = 1 **then**　//n是奇数
7. |　pow ← pow * a
8. **end**
9. **return** pow

11.1.2 二分查找的应用：快速查找 ---不似“二分”，恰是二分

问题描述：查找未排序序列$< a_1, a_2, \ldots, a_n >$中的第k小元素 $(1 \le k \le n)$。

算法1：循环k次选择排序或冒泡排序 ---时间复杂度: O(kn)

思考：插入排序是否可用?

算法2：快速或递归排序 ---时间复杂度: O(nlog(n)) + O(1)

排序 找第k小元素

算法3：快速建最小堆+k次出堆（调整）

---时间复杂度: O(n) + O(klog(n))

思考：能否实现O(n)时间的快速查找?

11.1.2 二分查找的应用：快速查找

---不似“二分”，恰是二分

问题描述：查找未排序序列$< a_1, a_2, \dots, a_n >$中的第k小元素 $(1 \le k \le n)$。

思考：能否实现O(n)时间的快速查找?

思路:

- 对序列$< a_1, a_2, \dots, a_n >$快速排序时，首先选择一个基准值pivot对序列进行划分
- **划分结果**：$\le$ pivot 的所有数据排在它前面，$>$pivot 的数据全部排在后面，然后返回pivot在序列中的排位m
- 如果m = k，说明pivot就是第k小元素
- 如果m < k, 第k小元素在pivot的后半段
- 相反，若m > k, 第k小元素在pivot的前半段

二分原则!

11.1.2 二分查找的应用：快速查找

---不似“二分”，恰是二分

问题描述：查找未排序序列$< a_1, a_2, \dots, a_n >$中的第k小元素 $(1 \le k \le n)$。

算法：

时间复杂度：

- 最好情况：O(n)
- 最坏情况：$O(n^2)$
- 平均情况：？？

算法： QuickSearch(A, l, r, k)
输入：序列A, 整数l, r , k，满足$1 \le l \le k \le r$
输出：在子串A[l…r]中查找A的第k小元素

```
if l < r then  //子串A[l…r]含多个元素
|   m ← Partition(A, l, r)  //选A[r]为pivot进行划分，
                            //返回基准值的排位 (l ≤ m ≤ r)
|   if m = k then
|   |   return A[m]
|   end
|   if m < k then     // m < k ≤ r 成立
|   |   return QuickSearch(A, m+1, r, k)  //A[m+1…r]中查找
|   else    // l ≤ k < m
|   |   return QuichSearch(A, l, m-1, k)  //A[l…m-1]中查找
|   end
end
return A[l]   //子串只含一个元素，即 l = r = k
```

11.1.2 二分查找的应用：快速查找

---不似“二分”，恰是二分

问题描述：查找未排序序列$< a_1, a_2, \dots, a_n >$中的第k小元素 $(1 \le k \le n)$。

算法：

时间复杂度：

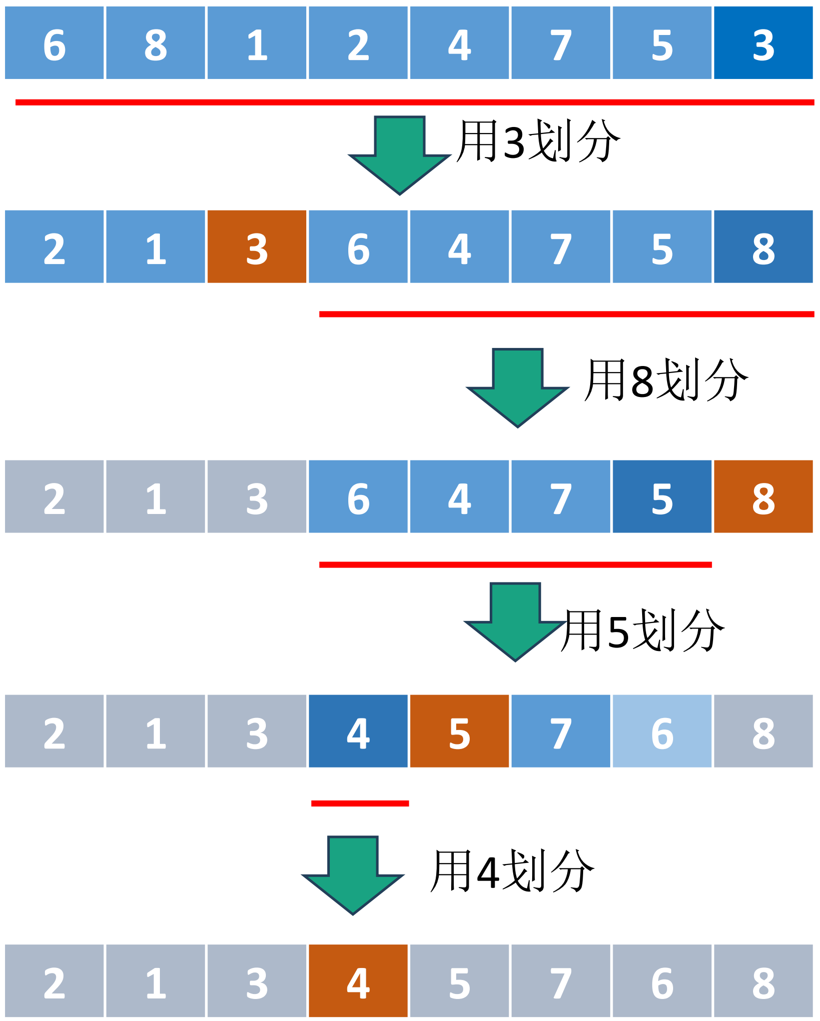
- 最好情况：O(n)
- 最坏情况：O(n^2)
- 平均情况：？？

- 随机选择基准值对序列划分，两个子序列的平均长度比为1：3
- 并且90%以上的概率，子序列的长度比不低于1：19！
- 因此，90%以上的概率，查找的时间T(n)满足

$$
\begin{aligned}
T(n) &\le T\left(\frac{19}{20}n\right) + O(n) \\
&\le T\left(\frac{19^2}{20^2}n\right) + O\left(\frac{19}{20}n + n\right) \\
&\le T\left(\frac{19^k}{20^k}n\right) + O\left(\frac{19^{k-1}}{20^{k-1}}n + \cdots + \frac{19}{20}n + n\right) \\
&\le T(1) + O\left(\dots + \frac{19^k}{20^k}n + \cdots + \frac{19}{20}n + n\right) \\
&= O(n)
\end{aligned}
$$

线性时间

例如: 查找第4小元素的过程如下：



查找成功，返回4

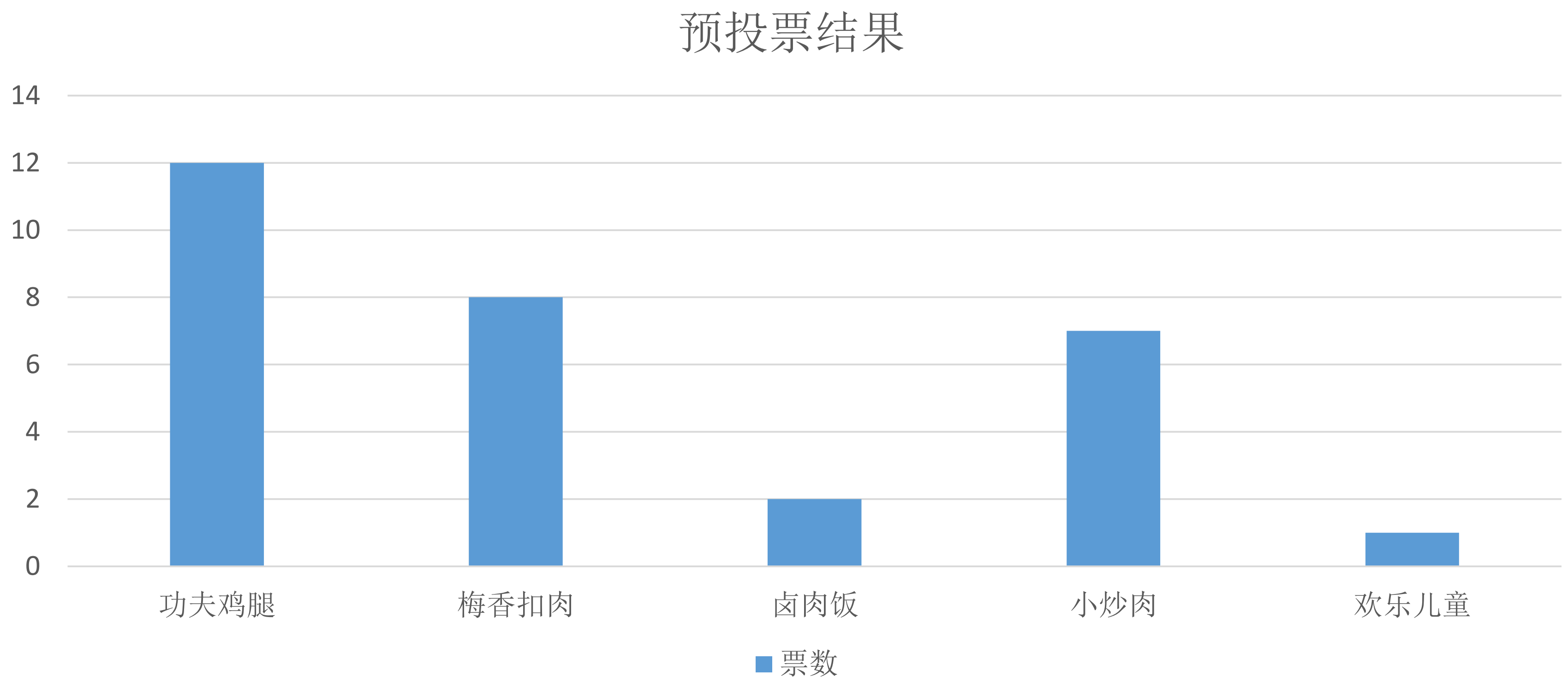
顺序查找的应用：一道趣题*

问题描述：

- Z.Y.班n个人在实验室学习，到了中午，大家决定一起从乡村基点外卖。
- 按照惯例，大家一人一票投票表决，然后一起点获票数最多的套餐！
- 但今天，班长突然“萌发奇想”，想尝尝儿童套餐，怎么办呢？
- 为“梦想成真”，精明的班长先做了一次预投票，提前了解到每个人想投的套餐。
- 要让儿童套餐获票最多，必须“以理服人”，让足够多的人改选儿童套餐，但思想工作难做（ZY班没有省油的灯！！！）
- 因此，班长让你设计一个拉票方案，使儿童套餐的获票最多（不允许票数并列），同时“说服”的人数最少。

顺序查找的应用：一道趣题*

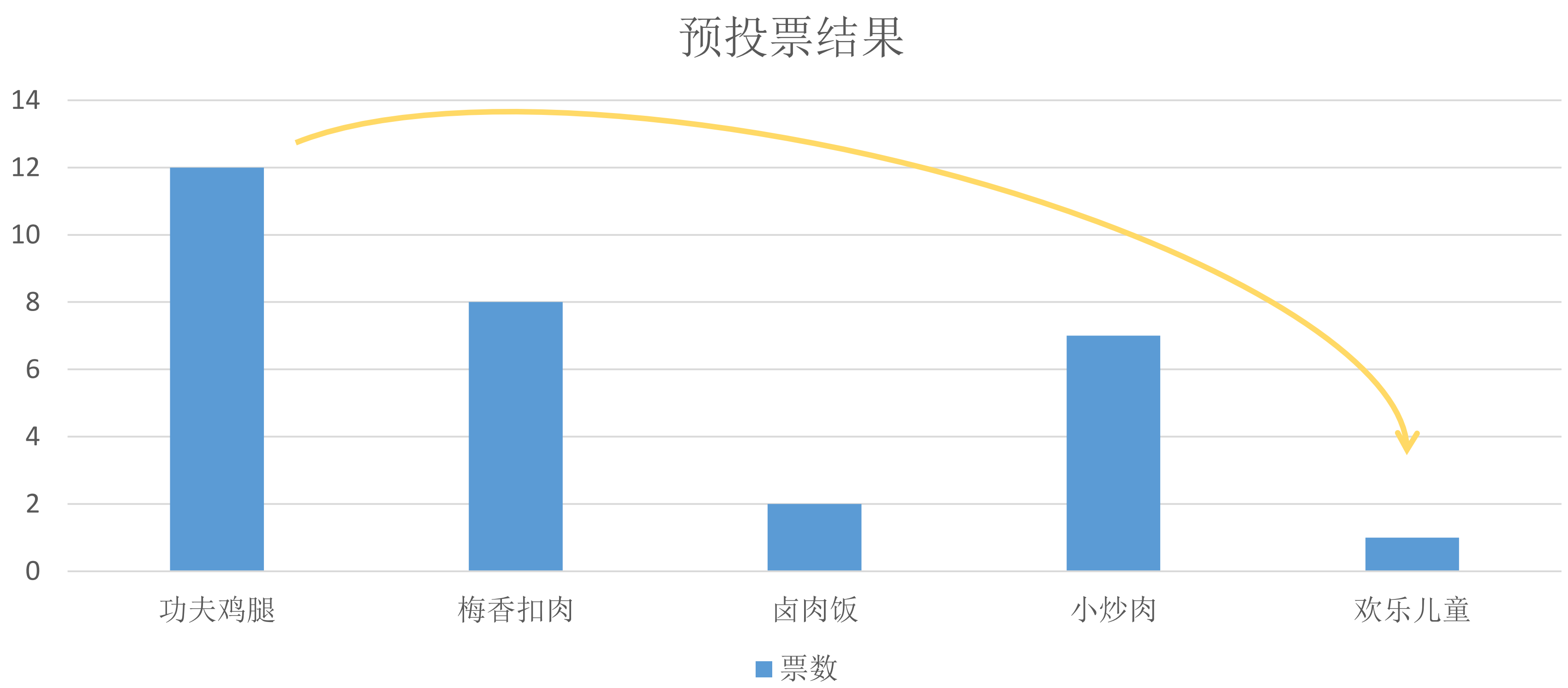
问题描述：



Q：要使儿童套餐获得最多的票，最少需要拉多少票？应该拉哪些套餐的投票？

顺序查找的应用：一道趣题*

问题描述：

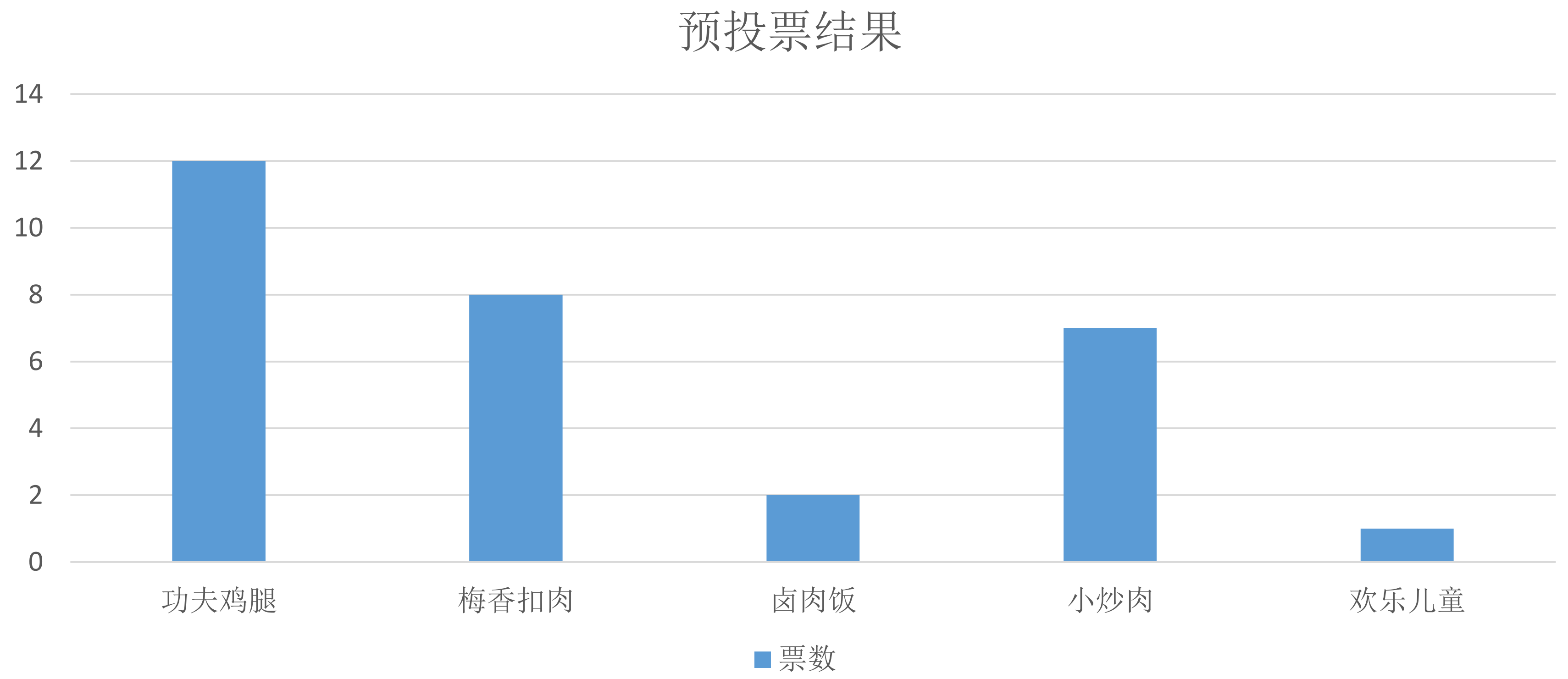


- **贪心法**：每次选择当前获票最多的套餐，从中拉1票过来，重复该过程，直到儿童套餐的得票超过其它套餐

- 可以用最大堆维护当前得票最多的套餐
- **时间复杂度**：O(m logn)，其中m是总票数（人数），n是套餐数

顺序查找的应用：一道趣题*

问题描述：



思路：

(1)设置票数上限k

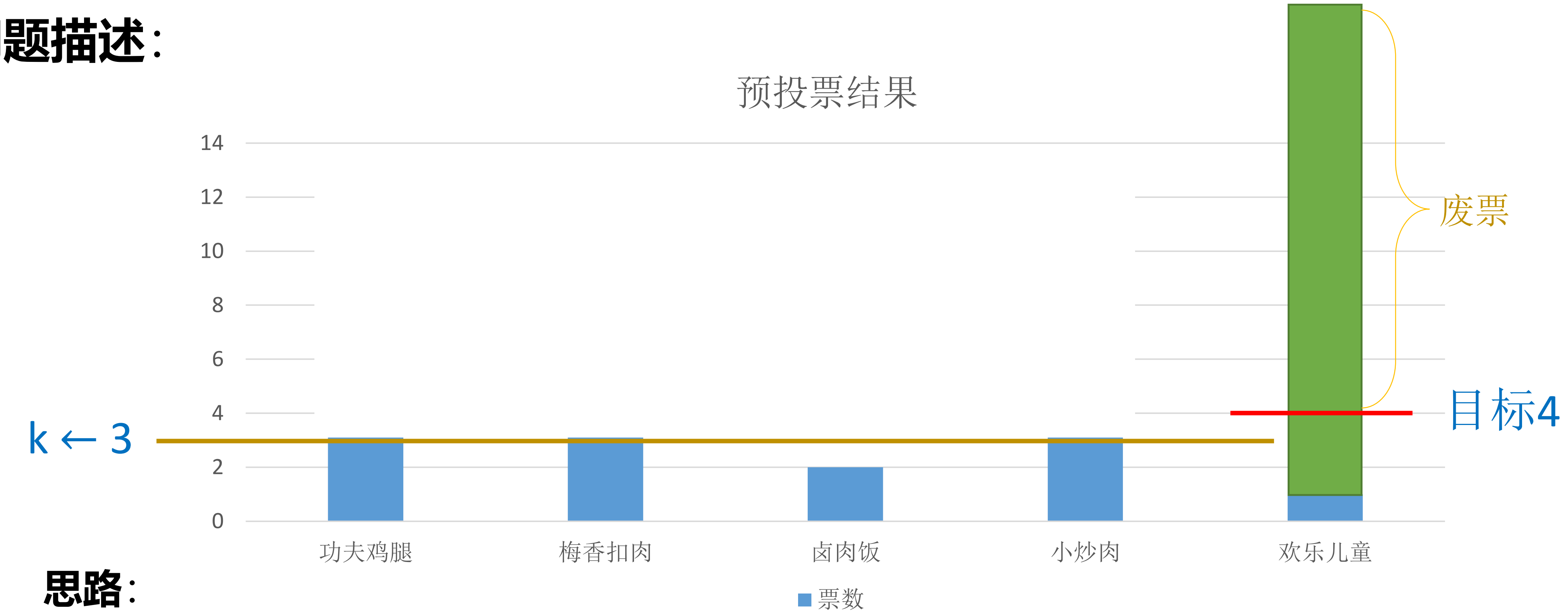
(2) 如果套餐的得票超过k, 将多余的票全部转给儿童套餐

(3) 设置儿童套餐的目标票数为k+1, 如果加上(2)转来的票后票数超过k+1，超出的票成为废票；相反，如果票数不够k+1，还需要从其它套餐拉不足的票！

顺序查找的应用：一道趣题*

k设置太小，废票太多!

问题描述：



思路：

(1)设置票数上限k

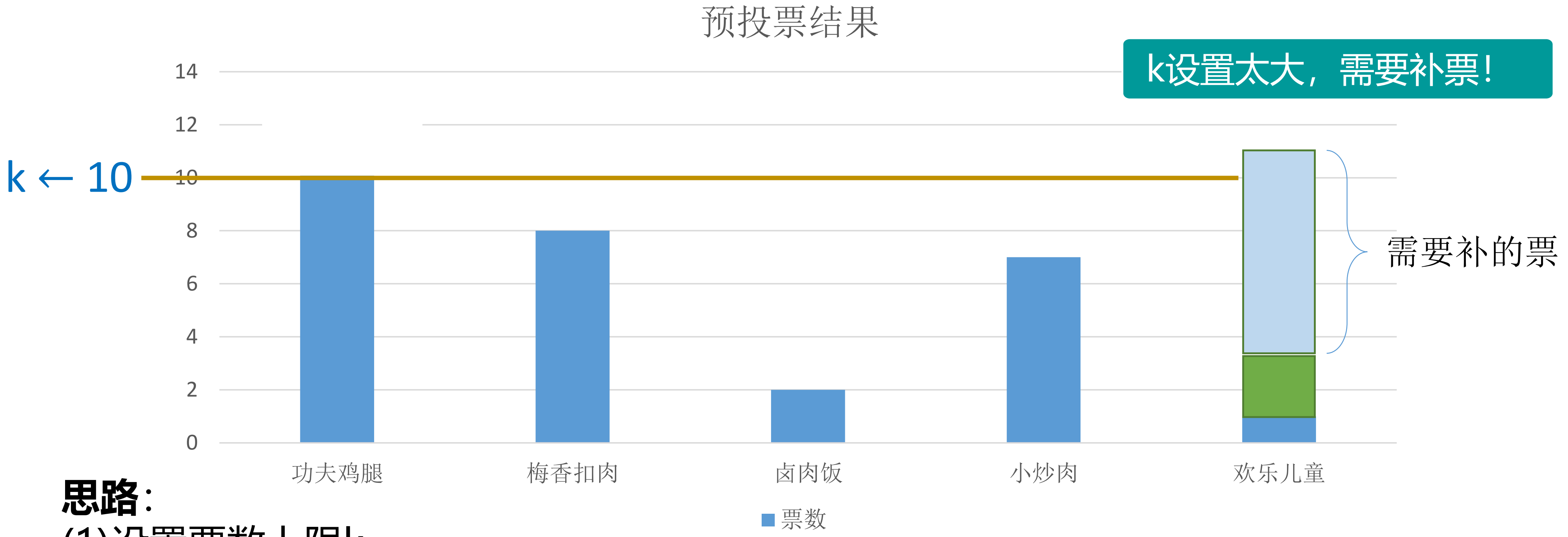
(2) 如果套餐的得票超过k, 将多余的票全部转给儿童套餐

(3) 设置儿童套餐的目标票数为k+1, 如果加上(2)转来的票后票数超过k+1，超出的票成为废票；相反，如果票数不够k+1，还需要从其它套餐补齐不足的票!

顺序查找的应用：一道趣题*

问题描述：

- **思考**：如何求最优的k值？



思路：

(1)设置票数上限k

(2) 如果套餐的得票超过k, 将多余的票全部转给儿童套餐

(3) 设置儿童套餐的目标票数为k+1, 如果加上(2)转来的票后票数超过k+1，超出的票成为废票；相反，如果票数不够k+1，还需要从其它套餐补齐不足的票！

11.1.2 二分查找的应用：一道趣题*

---不似“二分”，恰是二分

- **思考**：如何求最优的k值?

二分法思路：

(1) 设置low_k ← 0, high_k ← m (总票数）//k=0表示所有票都给儿童套餐

(2) 计算mid_k = (low_k + high_k) / 2　　//设置mid_k为当前的k值（上限值）

(3) 查找得票数超过mid_k的套餐，并统计多出的票的总和extra_sum

- 如果 extra_sum + #儿童 ≤ mid_k + 1，high_k ← mid_k

  //k太大，可能需要补票，可以减小k

- 如果 extra_sum + #儿童 > mid_k + 1，low_k ← mid_k

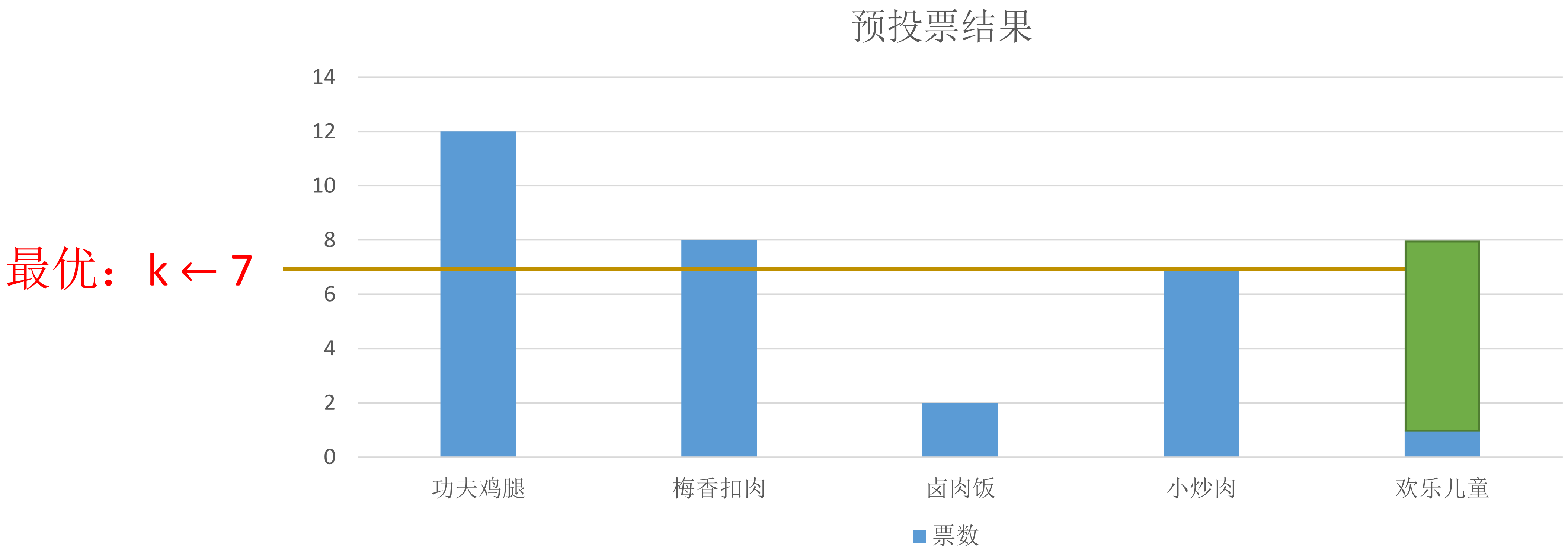
  //k太小，有废票，继续测试更大的k

(4) 如果 low_k + 1 = high_k, 结束查找，返回high_k（最优k）；否则，回到(2)继续查找

- **时间复杂度**：**n log(m) 或 log(m)*log(n) + n log(n)**

顺序查找的应用：一道趣题*

问题描述：



11.1.3 索引表查找

数据太多，杂乱无章，查找困难！

建立索引!

索引使用方法

先分析数据规律，建立索引
再根据索引进行快速定位
在定位的地方进行细致搜索

4　70　8　90　88　89　……

第一个块地址	第一个块最大关键字	第二个块地址	第二个块最大关键字	……	……	第n个块地址	第n个块最大关键字

索引表的构建

1） 分块：

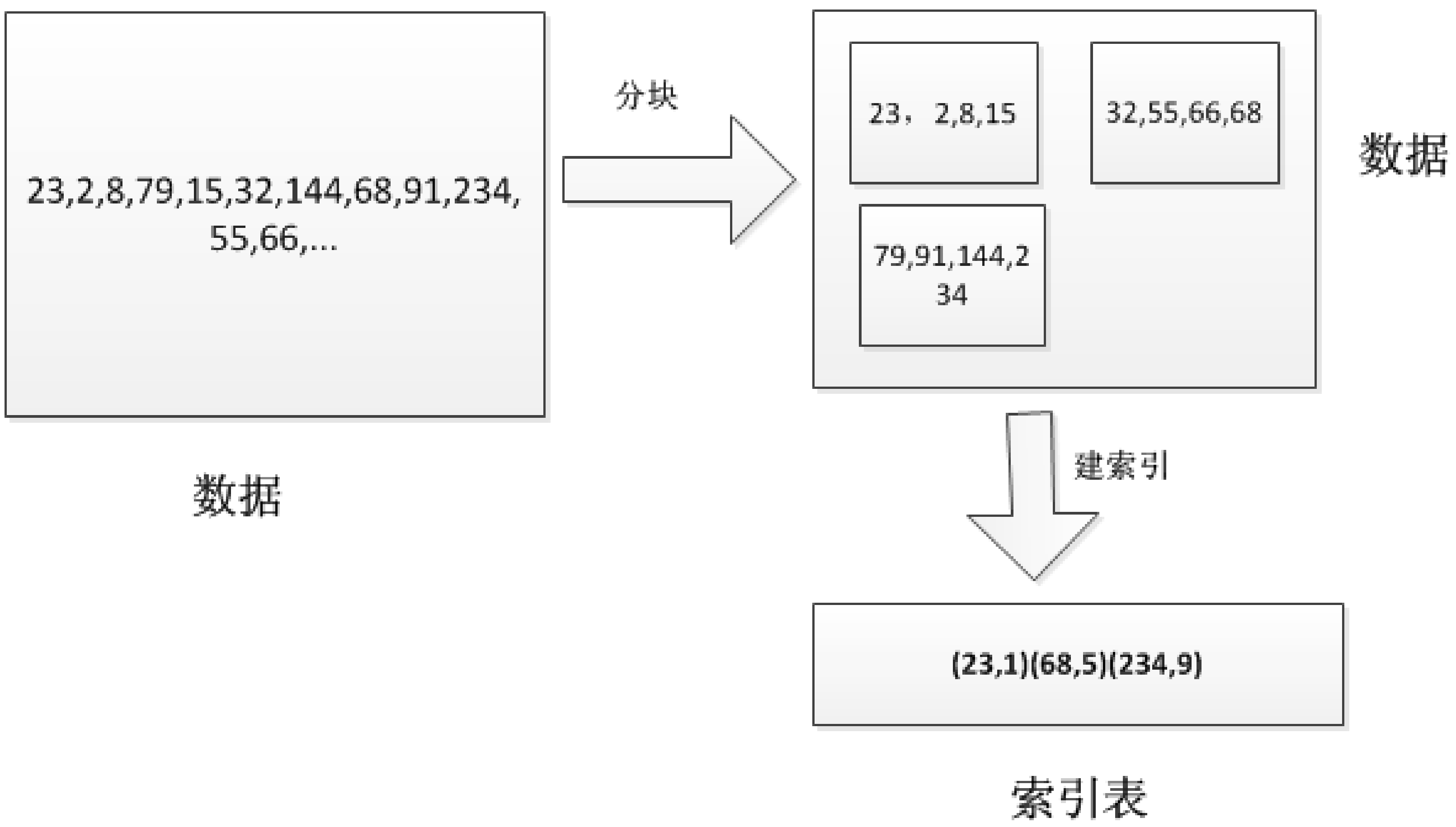
第R_k 块中所有关键字< R_{k+1}块中所有关键字， （k=1, 2, ..., L-1）

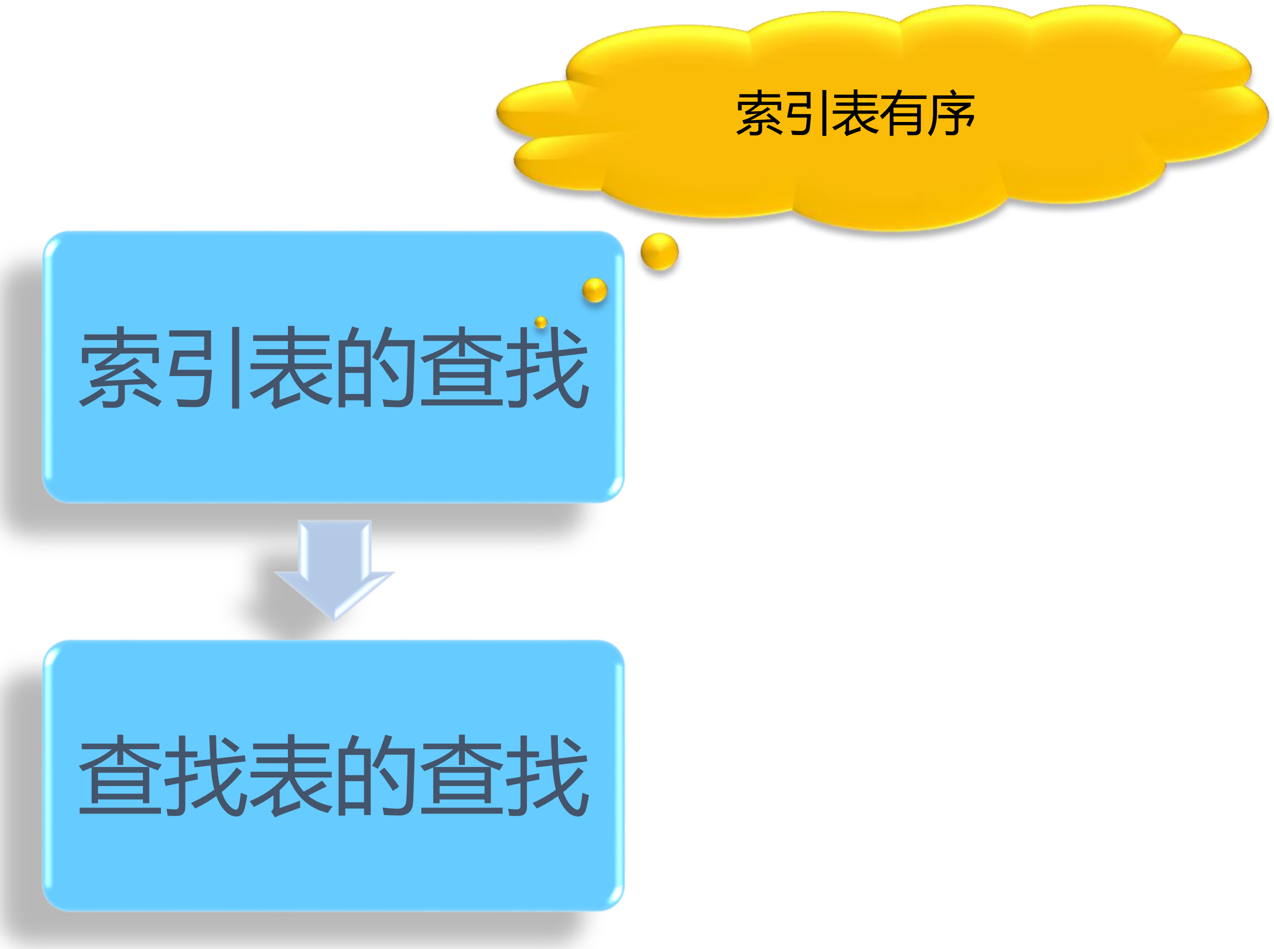
2) 建立索引项：

关键字项：记载该块中最大关键字值；

指针项： 记载该块第一个记录在表中位置。

3) 所有索引项组成索引表。


23,2,8,79,15,32,144,68,91,234,
55,66,...
数据
分块
23，2,8,15
32,55,66,68
79,91,144,2
34
数据
建索引
(23,1)(68,5)(234,9)
索引表



索引表的查找

例子：

建立索引表

查找表

关键字	22	48	86	
指针	1	7	13	19(n+1)

22, 12, 13, 8, 9, 20, 33, 42, 44, 38, 24, 48, 60, 58, 74, 49, 86, 53

例子：

查找关键字k=38

关键字	22	48	86	
指针	1	7	13	19(n+1)

22, 12, 13, 8, 9, 20, 33, 42, 44, 38, 24, 48, 60, 58, 74, 49, 86, 53

例子：

查找关键字k=50

关键字	22	48	86	
指针	1	7	13	19(n+1)

22, 12, 13, 8, 9, 20, 33, 42, 44, 38, 24, 48, 60, 58, 74, 49, 86, 53

例子：

关键字	22	48	86	
指针	1	7	13	19(n+1)

22, 12, 13, 8, 9, 20, 33, 42, 44, 38, 24, 48, 60, 58, 74, 49, 86, 53

思考：块内查找如何结束?

11.1.4 作业

1、对有n个元素的有序顺序表和无序顺序表进行顺序搜索, 试就下列三种情况分别讨论两者在等搜索概率时的平均搜索长度是否相同?

(1) 搜索失败;

(2) 搜索成功, 且表中只有一个关键码等于给定值k的对象;

(3) 搜索成功, 且表中有若干个关键码等于给定值k的对象, 要求一次搜索找出所有对象。

2、假定对有序表：（3,4,5,7,24,30,42,54,63,72,87,95）进行折半查找，试回答下列问题：

（1）画出描述折半查找过程的判定树；

（2）若查找元素54，需依次与哪些元素比较？

（3）若查找元素90，需依次与哪些元素比较？

（4）假定每个元素的查找概率相等，求查找成功时的平均查找长度。

谢谢观看