# 实验4 微分方程模型、求解及稳定性分析

**一、实验目的及意义**

[1] 归纳和学习求解常微分方程(组)的基本原理和方法；

[2] 掌握解析、数值解法，并学会用图形观察解的形态和进行解的定性分析；

[3] 熟悉MATLAB软件关于微分方程求解的各种命令；

[4] 通过范例学习建立微分方程方面的数学模型以及求解全过程；

通过该实验的学习，使学生掌握微分方程(组)求解方法（解析法、欧拉法、梯度法、改进欧拉法等），对常微分方程的数值解法有一个初步了解，同时学会使用MATLAB软件求解微分方程的基本命令，学会建立微分方程方面的数学模型。这对于学生深入理解微分、积分的数学概念，掌握数学的分析思维方法，熟悉处理大量的工程计算问题的方法是十分必要的。

**二、实验内容**

* 1. 微分方程及方程组的解析求解法；
  2. 微分方程及方程组的数值求解法——欧拉、欧拉改进算法；
  3. 直接使用MATLAB命令对微分方程(组)进行求解(包括解析解、数值解)；
  4. 利用图形对解的特征作定性分析；
  5. 建立微分方程方面的数学模型，并了解建立数学模型的全过程。

**三、实验步骤**

1．开启软件平台——MATLAB，开启MATLAB编辑窗口；

2．根据微分方程求解步骤编写M文件

3．保存文件并运行；

4．观察运行结果(数值或图形)；

5．根据观察到的结果和体会写出实验报告。

**四、实验要求与任务**

根据实验内容和步骤，完成以下实验，要求写出实验报告（实验目的→问题→数学模型→算法与编程→计算结果→分析、检验和结论）

**基础实验**

1. **数值积分。**积分的值是多少呢？用**trapz** 或 **quad**解决这个问题。计算积分值，并显示你的结果和的差距。

2.求微分方程的解析解, 并画出它们的图形，

*y*’= *y* + 2*x*, *y*(0) = 1, 0<*x*<1;

*y*’’+*y*cos(*x*) = 0, *y*(0)=1, *y*’(0)=0;

2．用向前欧拉公式和改进的欧拉公式求方程*y*’= *y* - 2*x*/*y*, *y*(0) = 1 (0≤*x*≤1,h = 0.1) 的数值解，要求编写程序，并比较两种方法的计算结果，说明了什么问题？

3．Rossler微分方程组：



当固定参数b=2, c=4时，试讨论随参数*a*由小到大变化（如*a*∈(0,0.65))而方程解的变化情况，并且画出空间曲线图形，观察空间曲线是否形成混沌状？

4.Apollo卫星的运动轨迹的绘制

5.已知微分方程如下，其中，u1(0)=45,u2(0)=30,u3(0)=u4(0)=0,g=9.81,试求解此微分方程，并绘制出各个状态变量u1(t),u2(t),u3(t),u4(t)的时间曲线。

6. 试求出下面隐式微分方程的数值解，并绘制出解曲线和相轨线，已知

**7.**在区间[0,1]上，求解如下迟滞微分方程



具有历史条件: 当t≤0时, y1(t)=exp(t+1), y2(t)=exp(t+0.5), y3(t)=sin(t+1), y4(t)=y1(t), y5(t)=y1(t)，请务必建立一个函数文件exer1h.m来计算历史，并提供句柄，作为dde23的历史输入。注意ddefun和历史函数都必须返回列向量。

**探究实验**

**1. Hodgkin-Huxley的神经元模型。**基于霍奇金和赫胥黎在1952年建立的方程（他们因此获得诺贝尔奖），编写一个ODE文件来描述神经元脉冲。该模型的主要思想是，神经元膜中的离子通道具有电压敏感的门，该门随着膜电压的变化而打开或关闭。 一旦门打开，带电的离子便会流过它们，从而影响膜电压。 这些方程是非线性的并且是耦合的，因此必须数值求解。

a. 文件HH.zip，解压到你的作业文件夹里。压缩包里有6个m文件，分别是alphah.m, alpham.m, alphan.m, betah.m, betam.m, betan.m。这些函数返回与电压相关的h,m,和n栅极的开启速率常数（）和关闭速率常数（）。

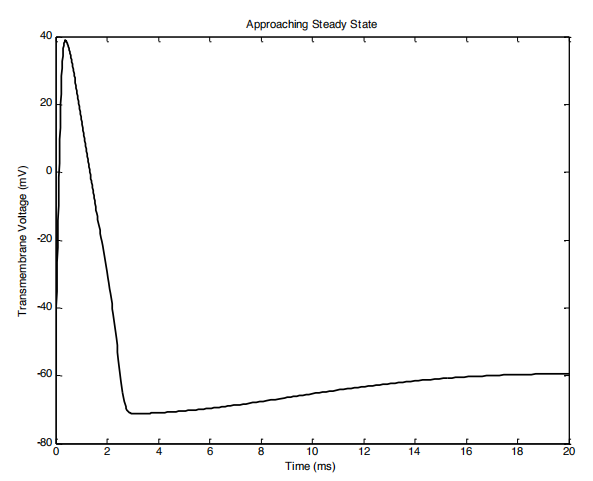
b.编写一个ODE文件返回以下导数值（不必理解它们的含义）和相关常数:



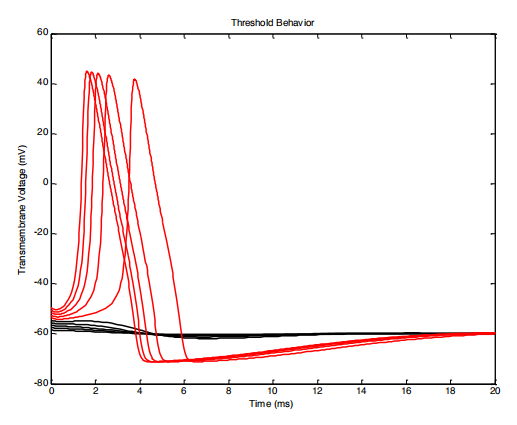
相关的常数（C为膜电容，G为电导，E为钾（K）、钠（Na）和漏（L）通道的反转电位）：



c.写一个名为HH.m的脚本求解微分方程组，并绘制膜电压。首先，我们将系统运行到稳定状态。模拟运行20毫秒（方程的时间单位为ms），初始值为：n=0.5；m=0.5；h=0.5；V=-60（**ode45**）。将所有4个参数的稳态值存储在一个名为ySS的向量中。打开一个新的图形窗口并绘制的时间曲线，以验证它在模拟结束时达到稳定状态。图形应该如下：



d.接下来，我们来探讨该微分方程组的特性：全或无动作电位。已知只有当神经元的膜电压超过一定的电压阈值时，神经元才会“激发”产生脉冲。为了求出该阈值，对微分方程组进行10次求解，每次使用ySS作为初始条件（**ode45**将此作为输入参数），同时将V的初始值从其稳态值分别以1、2、…10 mV的增量增加。每次求解后，检查峰值电压是否超过0毫伏，如果超过，用红线画出电压曲线，如果没有超过，用黑线画出电压曲线。在同一坐标系下绘制出所有膜电压轨迹，如下图所示。我们发现，如果超过电压阈值，神经元就会“激发”一个动作电位；否则它只会返回到稳态值。通过放大图形可以看到这个阈值（红线与黑线的分界点电压值）。



**2 天体运动轨迹**

设卫星所受的力为F, 加速度为a, 质量为m,则由牛顿第二定律有F=ma,由万有引力定律，质量为m2的物体对质量为m1的物体产生的力 ，其中r是两个物体之间的距离。在单体问题中，为简便，忽略了小物体对大物体的作用力，如在小行星围绕大行星运动时，这种简化使我们可以忽略卫星对于行星的力，因而行星可认为是固定的。

以大物体为坐标原点，卫星的坐标为(x,y), 则两物体之间的距离为



大物体对卫星的引力指向坐标原点，即大物体的位置。引力的方向向量，即该方向的单位向量为



因此卫星受到的力为：

，

由牛顿第二定律，就有

，。

单体问题忽略了卫星对于（非常大的）行星的引力，因而不够真实。如果考虑这个引力，得到的两个物体的运动称为二体问题。

三个天体在重力的作用下交互运动，被称为三体问题，该问题在科学史上具有重要地位。即使所有运动都限制在平面（受限三体问题），从本质上讲可能难以预测长期的轨迹。非预测性主要是因为对初值条件的敏感性，即初始位置和速度的微小变动会导致在随后的时间里可能产生大的偏差,即微分方程组的解相对于输入的初始条件是病态的。

受限的三体问题是由6个方程构成的微分方程组，每个物体有两个方程，也是由牛顿第二定律和万有引力定律得到。

1. 设大物体的质量m2=3,g=1,卫星的初始位置x(0)=0,y(0)=2，卫星的初始速度为，画出卫星的运动轨迹。
2. 求解二体问题。设质量为m1=0.3,m2=0.03.画出初始条件(x1(0),y1(0))=(2,2), , (x2(0),y2(0))=(0,0), 下两天体的运动轨迹。
3. 求解三体问题。设质量为m1=0.3,m2=m3=0.03.(a)画出初始条件(x1(0),y1(0))=(2,2), ,(x2(0),y2(0))=(0,0), ,以及(x3(0),y3(0))=(-2,-2),  时的轨迹。(b)将初始条件改为0.20001，比较结果中的轨迹，这是敏感依赖在视觉上令人震惊的例子。

一个惊人的三体八字形轨道由C.Moor在1993年发现。在这种情况下，三个质量相同的物体在一个八字形的环上互相追逐。设置质量m1=m2=m3=1,重力为g=1.画出初始条件(x1(0),y1(0))=(-0.970,0.243), , (x2(0),y2(0))=(- x1(0),-y1(0)), , (x3(0),y3(0))=(0,0), 下的轨迹。(b)轨迹对于初始条件的微小变化敏感吗？探索以10-k改变，其中1≤k≤5.对每个k,确定八字形的模式是否可以保持，或者是最终发生了突变。

**应用实验**

**1．盐水的混合问题**

一个圆柱形的容器，内装350升的均匀混合的盐水溶液。如果纯水以每秒14升的速度从容器顶部流入，同时，容器内的混合的盐水以每秒10.5升的速度从容器底部流出。开始时，容器内盐的含量为7千克。求经过时间*t*后容器内盐的含量。

**2. 遗传模型**

孟德尔(Mendel)第一定律：配子的基因是从其父倍的两个基因型中随机地选择的。

实际应用中，将比例作为概率：*Pk*(A)=Prob{AA或Aa}; *Pk*(a)=Prob{aa}，并记*Xk*­=Pk(a)。得到如下遗传模型：

1). 致死基因遗传模型：*Xk*+1=。讨论*Xk*的变化趋势。

2). 自然选择基因遗传模型：*Xk*+1=。其中：*β*=*r*1/*r*2。*r*1和*r*2分别表示在总人口数量中，新生儿基因为(AA或Aa)和(aa)所占的比例。对不同的*β* 取值，讨论*Xk*的变化趋势，选取初值：*X*0=0.9。

3). 突变基因遗传模型：*Xk*+1=(1−*μ*)*Xk*+*μ*。其中：*μ*为A突变为a的概率(比例一般为：10−5 −10−6)。对不同的*μ*讨论*Xk*的变化情况? 考虑初值*X*0=0.1。

**3．老鼠觅食**

有一个连续的很多个小老鼠笼子（正方形），它们首尾相连。在其前后两边的中央都开有一个洞，可供老鼠自由进出。并在右边放置鼠粮，左边未放鼠粮。老鼠在笼子里面只能够沿着笼子边沿（正方形的四条边）沿左边或从右边向前通过。沿左边则吃不到鼠粮，只有沿右边才能够吃到鼠粮。在每个鼠笼子里，老鼠随机地选择左右之一向前行进。

1)奖励型：如果老鼠沿右边吃到鼠粮后，则下次将毫不犹豫地沿右边，如果沿左边未吃到鼠粮，则下次将以1−*α* 的概率向左。

2)奖惩兼顾型：如果向右吃到鼠粮后，则下次向右的概率为1−*β*；如果向左未吃到鼠粮，则下次向左的概率为1−*α*。

就这两种情况，分别建立并求解老鼠在第*n*次进入鼠笼子时向右能够吃到鼠粮的概率。

并考察其无穷趋势。

**4.** **两种生物种群竞争模型**

两种相似的群体之间为了争夺有限的同一种食物来源和生活空间而进行生存竞争时，往往是竞争力较弱的种群灭亡，而竞争力较强的种群达到环境容许的最大数量。

假设有甲、乙两个生物种群，当它们各自生存于一个自然环境中，均服从 Logistic 规律，即有



其中x1(t), x2(t)分别为两种生物种群在时刻t的数量，λ1，λ2分别为其自然增长率，N1，N2是它们各自的最大容量。

当两个种群在同一个自然环境下生存时，乙消耗的同一自然资源对甲的增长产生了阻滞作用，设为

甲对乙的阻滞作用设为

由于生物种群的数量很大，可视为时间t的连续可微函数。生物种群的相互竞争模型为



1）α1的含义是，对于供养甲的资源而言，单位数量乙（相对N2）的消耗为单位数量甲（相对N1）消耗的α1倍，对α2可作相应的解释。

计算*x*1(t), *x*2(t), 画出图形及相轨迹图。解释其解变化过程。

2）改变λ1，λ2, N1, N2, 而α1，α2不变，计算并分析结果；若α1=1.5，α2=0.7，再分析结果。由此能得到什么结论。

**5．River-bay 系统水污染问题**

一条河流和河湾与大湖相连，位于湾上游的小河是造成湾污染的主要因素，另有一座铝厂恰好建在湾旁,也造成污染。当湾中污染物平均浓度达到1.6mg/l时，铝厂将被迫暂时关闭。假使该湾的容量为4,000,000公升， 流入和流出河湾的水流速度均为40,000公升/天，若当前该河湾水中的污染物浓度为0.8mg/l，河水中污染物的浓度为0.5mg/l。要求

1. 建立湾中水污染状况的模型；
2. 计算30天后该河湾水的污染物浓度；
3. 该河湾水的污染物浓度是否能达到一个稳定值？
4. 如将4,000,000mg污染物瞬间排入河水中，求铝厂必须关闭多长时间？
5. 列出并讨论影响河湾污染的模型中未考虑到的因素至少四种。

**6.饮酒问题**

下表是一个体重约70kg 的人在短时间内喝下1 瓶啤酒(1 个单位)后，隔一定时间测量他的血液中酒精含量（毫克／百毫升），得到的数据

|  |  |
| --- | --- |
| 时间(小时) | 0.25 0.5 0.75 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 |
| 酒精含量 | 15 34 37 41 41 38 34 34 29 26 |
| 时间(小时) | 4.5 5 6 7 8 9 10 12 14 16 |
| 酒精含量 | 25 21 19 17 14 12 9 6 4 2 |

人的体液占人的体重的65%至70%，其中血液只占体重的7%左右；而药物（包括酒精）在血液中的含量与在体液中的含量大体是一样的。

1）若该人在t=0时瞬间吞饮1 瓶啤酒，在给出合理假设后，建立该人胃及血液中酒精含量所满足的微分方程模型，编写求解该微分方程模型的MATLAB程序；

2）如何确定其中的参数。给出相应的MATLAB程序；

3）考虑**如下**的情形，同一个人（或具有相同体质）在某一时段[0，T]匀速饮下n瓶啤酒，试建立该人胃及血液中酒精含量的微分方程模型。

**7. 波浪能装置垂荡运动模型及其求解**

2022年全国大学生数学建模竞赛A题问题一的模型建立与求解。参考优秀论文：2022高教社杯全国大学生数学建模竞赛优秀论文A022。

<https://dxs.moe.gov.cn/zx/a/hd_sxjm_sxjmlw_2022qgdxssxjmjslwzs/221106/1820293.shtml?source=hd_sxjm_sxjmlw_2022qgdxssxjmjslwzs>

**创新实验**

最优捕鱼策略

为了保护人类赖以生存的自然环境，可再生资源（如渔业、林业资源）的开发必须适度。一种合理、简化的策略是，在实现可持续收获的前提下，追求最大产量或最佳效益。

    考虑对某种鱼（鲳鱼）的最优捕捞策略：

  假设这种鱼分４个年龄组：称１龄鱼，……，４龄鱼。各年龄组每条鱼的平均重量分别为5.07,11.55,17.86,22.99（克）；各年龄组鱼的自然死亡率均为0.8（１/年）；这种鱼为季节性集中产卵繁殖，平均每条４龄鱼的产卵量为1.109×105(个）；３龄鱼的产卵量为这个数的一半，２龄鱼和１龄鱼不产卵，产卵和孵化期为每年的最后４个月；卵孵化并成活为１龄鱼，成活率（１龄鱼条数与产卵总数n之比）为1.22×1011/(1.22×1011+n).

  渔业管理部门规定，每年只允许在产卵孵化期前的８个月内进行捕捞作业。如果每年投入的捕捞能力（如渔船数、下网次数等）固定不变，这时单位时间捕捞量将与各年龄组鱼群条数成正比。比例系数不妨称捕捞强度系数。通常使用１３mm网眼的拉网，这种网只能捕捞３龄鱼和４龄鱼，其两个捕捞强度系数之比为0.42:1。渔业上称这种方式为固定努力量捕捞。

  １）建立数学模型分析如何可持续捕获（即每年开始捕捞时渔场中各年龄组鱼群条数不变），并且在此前提下得到最高的年收获量（捕捞总重量）。

２）某渔业公司承包这种鱼的捕捞业务５年，合同要求5年后鱼群的生产能力不能受到太大的破坏。已知承包时各年龄组鱼群的数量分别为：122,29.7,10.1,3.29(×109条），如果仍用固定努力量的捕捞方式，该公司采取怎样的策略才能使总收获量最高。