

# 形式的冪級数勉強会

**2025/10/25**

Harui (Twitter: @Nutoriaezu88808, GitHub: @Harui-i)

# 許して

私は代数をよく知らないこと、体系的にFPSを学んではいないことから、間違いや不適切な表現があるかもしれません。もしあれば、教えていただけると幸いです。

# 扱わない内容

- 実装の詳細
  - 色々な計算について、定数倍が速いアルゴリズムがあったり、NTTの高速な実装があったり、色々面白いトピックはあるんですが、複雑になるので省きます。

## 要求する知識

- 多項式の和/差/積について知っている

# FPSとは？

数列  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  に対して、 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  と書くものを通常型母関数(Ordinary Generating Function, **OGF**)といいます。

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  と書くものを指数型母関数(Exponential Generating Function, **EGF**)といいます。

このように、数列に対応する冪級数を考えている、ということを意識することが重要な気がしています。

## 例

- 数列  $(3, 1, 4, 1, 5, 9)$  に対応するOGFは  $3 + 1x + 4x^2 + 1x^3 + 5x^4 + 9x^5$
- 数列  $(3, 1, 4, 1, 5, 9)$  に対応するEGFは
$$3 + 1\frac{x}{1!} + 4\frac{x^2}{2!} + 1\frac{x^3}{3!} + 5\frac{x^4}{4!} + 9\frac{x^5}{5!} = 3 + x + 2x^2 + \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{9x^5}{5!}$$

## いろいろな言葉について

- FPS(Formal Power Series) = 形式的冪級数
- OGF(Ordinary Generating Function) = 通常型母関数
- EGF(Exponential Generating Function) = 指数型母関数

# 形式的冪級数の演算や性質

ここでは、数列のことは一旦忘れて、FPSの演算や性質について扱います。 なので、数列→FPSの対応付けの違いであるOGF/EGFの違いは一旦忘れても大丈夫です。

FPSの和/差/積/微分/積分は、通常が多項式と同じように定義されます。

## 和/差/積

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  としたとき、

$$f + g = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

$$fg = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right) x^n$$



# 微分

極限を考えているわけではなく、こういう操作に微分という名前をつけているだけです。

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

# 逆元

ここからはおそらく新しい演算に見えると思います。  
係数は  $\mathbb{Q}$  や  $\mathbb{F}_{998244353}$  のような体上であるとします。

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  に対して、 $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  を  $fg = 1$  (この右辺の 1 は  $(1, 0, 0, \dots)$  に対応するFPS) を満たすような  $g$  を、 $f$  の逆元と呼びます。

$f$  の逆元は、 $a_0 \neq 0$  なら一意に存在して、そうでないと存在しません。(証明略)(逆元を手計算で計算する方法を知れば、この条件は納得できると思います)

## 逆元の計算方法・例

$f = 1 - x$  の逆元  $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  を求めます。

$fg = 1$  と、

$$\begin{aligned} fg &= (1 - x)g = g - xg = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+1} \\ &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})x^n \text{ から、 } b_0 = 1, b_n = b_{n-1} (n \geq 1) \end{aligned}$$

がわかるので、 $g = \sum_{n=0}^{\infty} 1x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$  となります。

つまり、

$$1 = (1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$$

こういう意味で、

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

と書いている気がします(要出典)

## 逆元の手計算

$1 - x$ の逆元が $1 + x + x^2 + \dots$ であるのは知っていると思いますが、上のような計算方法が一般に使えます。また、低次の項から並べると多項式の割り算の筆算のように、筆算で計算することもできます。

## ここまでの演算について(仮)

ここまでの定義より、和/差/積/逆元の演算の $N$ 項目までは、元のFPSの $N$ 項目までの係数から計算できます。

なので、FPSの定義では無限の項数が出てきますが、実際に計算したいFPSの $N$ 項目を求めるときは有限の計算で求められます。

## exp

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (ただし、 $a_0 = 0$ ) に対して、

$$\exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$$

とします。 $a_0 \neq 0$  の場合、 $\exp(f)$  の0次の項に  $f$  の係数の無限和が現れてしまいかなり「気い悪い」ことになります。

(たとえば、FPSの性質である和/差/積の  $n$  次目までの係数が、 $n$  次目までの係数だけで決まる、という性質が崩れます)

## **expの性質**

- $\exp(f + g) = \exp(f) \exp(g)$
- $(\exp(f))' = f' \exp(f)$

## log

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  (ただし、 $a_0 = 1$ ) に対して、

$$\log(f) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(f-1)^n}{n}$$

とします。 $a_0 \neq 1$  の場合、 $\log(f)$  の0次の項に  $f$  の係数の無限和が現れてしまいかなり「気い悪い」ことになります。

(たとえば、FPSの性質である和/差/積の  $n$  次目までの係数が、 $n$  次目までの係数だけで決まる、という性質が崩れます)



# logの性質

TODO: 書く

- $(\log f)' = \frac{f'}{f}$
- $\log(fg) = \log f + \log g$

## 微分の嬉しい性質(OGF)

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  のとき、

$$x f' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

つまり、OGFにおいて、微分して $x$ をかける操作は、数列の各項にそのインデックスをかける操作に対応します。

## 微分の嬉しい性質(EGF)

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$  のとき、

$$f' = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \frac{x^n}{n!}$$

つまり、EGFにおいて、微分する操作は、数列の各項を一つ前にずらす操作に対応します。

## 累積和(OGF)

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  のとき、

$$\frac{f}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n a_m \right) x^n$$

つまり、OGFにおいて、 $\frac{1}{1-x}$  をかける操作は、数列の累積和をとる操作に対応します。

## OGFの積

(あたりまえかも)

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  のとき、

$$fg = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^n a_m b_{n-m} \right) x^n$$

## OGFの積(続き)

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  としたとき

$$fgh = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{n_1+n_2+n_3=n} a_{n_1} b_{n_2} c_{n_3}$$

もっと一般に3個以上のOGFの積についても同様に、 $x^n$ の係数には、次数和が $n$ であるような各項の選び方についての係数の積の総和が現れる。

## OGFの積の例(重複組み合わせ, 負の二項定理)

数列  $(1, 1, 1, \dots)$  に対応するOGFは

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

でした。これを  $K$  個掛け合わせると、

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^K = (1 + x + x^2 + \dots)^K = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{n_1 + \dots + n_K = n} 1 \right) x^n$$

となり、 $x^n$  の係数は「 $n$  を  $K$  個の非負整数の和として書く方法の数(足す順番の区別あり)」すなわち重複組み合わせの数に一致します。

( $n$  個の玉と  $K - 1$  個の仕切りを並べる方法の数え上げなので)

## OGFの積の例(重複組み合わせ, 負の二項定理 続き)

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^K = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+K-1}{K-1} x^n$$

これを負の二項定理と呼んだりすることもあるらしいです。



## OGFの積の例(重複組み合わせ, 負の二項定理 まとめ)

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_K=n} 1 = \binom{n+K-1}{K-1}$$

これは、「 $n$ 個の玉と  $K - 1$  個の仕切りの並べかえの数」です。

写像12相的に言うと「 $n$ 個の区別しない玉を  $K$  個の区別する箱に入れる場合の数(箱に入れる数は0でもいい)」でもあります。

## EGFの積

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$  のとき、

$$fg = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j b_{n-j} \right) \frac{x^n}{n!}$$

つまり、 $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ の母関数が $fg$ であるとき、 $c_n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j b_{n-j}$  となります。

OGFの場合との違いは、係数の積に二項係数の重みがついていることです。

## EGFの積(続き)

$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}, g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}, h = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{n!}$  としたとき

$$fgh = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} a_{n_1} b_{n_2} c_{n_3}$$

となります。4個以上のときも同様に、EGFの積の数列の $n$ 項目には、和が $n$ となるような次数の選び方について、係数の積に多項係数で重み付けしたものの総和が現れます。

## EGFの積の例(指数関数の冪)

数列  $(1, 1, 1, \dots)$  に対応するEGFは  $e^x$  です。これを  $K$  個掛け合わせると

$$(e^x)^K = e^{Kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Kx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} K^n \frac{x^n}{n!}$$

となります。EGFの積を考えると、以下のように捉えることもできます。

$$K^n \frac{x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_K=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_K!} 1^K$$

つまり、

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_K=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_K!} = K^n$$

です。これは、 $n$ 個の区別する玉を  $K$  個の区別する箱に入れる場合の数です。

## OGFの積の場合

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_K=n} 1 = \binom{n+K-1}{K-1}$$

- これは、 $n$ 個の区別しない玉を $K$ 個の区別する箱に入れる場合の数

## EGFの積の場合(指数関数の冪 まとめ)

$$\sum_{n_1+n_2+\dots+n_K=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_K!} = K^n$$

- これは、 $n$ 個の区別する玉を $K$ 個の区別する箱に入れる場合の数

このように、区別する/しないの違いがOGF/EGFの違いと対応することもあります(他の例もあるかも)

# FPSを使って問題を解く

## ABC 178 D - Redistribution

整数  $S$  が与えられます。すべての項が3以上の整数で、その総和が  $S$  であるような数列がいくつあるか求めてください (mod  $10^9 + 7$ )

$f = x^3 + x^4 + x^5 + \dots$  とすると、 $f + f^2 + f^3 + \dots$  の  $x^S$  の係数が答え。

$$1 + f + f^2 + f^3 + \dots = \frac{1}{1 - f}, \quad f = \frac{x^3}{1 - x}$$

なので、「 $x^3$ に $1 - x$ の逆元をかけて、マイナス1倍してそれに1を足したものの逆元」を計算すれば求められる。

(実は  $\frac{1}{1-f} = \frac{1}{1-\frac{x^3}{1-x}} = \frac{1-x}{1-x-x^3}$  なので、もっと簡単になる。母関数が有理関数なので線形漸化式があり、それを計算すればもっと単純になる)

## 積の和典型

長さが $N$ 、各要素が1以上 $M$ 以下の整数列  $(a_1, a_2, \dots, a_N)$  であって、和が $M$ であるような全ての数列について  $\prod_i a_i$  を求めて、その総和求めよ。

$f = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$  とすると、求める和は  $f^N$  の  $x^M$  の係数である。

お気持ち: 一つの項で $i$ を選ぶと、数列の和が $i$ 増え、積には $i$ がかかる。 $i$ としては1から $M$ まで選べるので、 $1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + \dots + M \cdot x^M$  に対応している感じがする。和が $M$ な正の整数列にだけ興味があるので、 $M$ 次より大きな項を付け足してもいい。これを $N$ 回選ぶので、 $f^N$ の $x^M$ の係数を求めればよい。

## 積の和典型(続き)

長さが $N$ ・各要素が1以上 $M$ 以下の整数列  $(a_1, a_2, \dots, a_N)$  であって、和が $M$ であるような全ての数列について  $\prod_i a_i$  を求めて、その総和求めよ。

$f^N = (x(\frac{1}{1-x})')^N = (x(1-x)^{-2})^N = (\frac{x}{(1-x)^2})^N$  であり、実は  $(1-x)^{-K} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+K-1}{K-1} x^n$  なので、二項係数さえ求まっていれば、 $f^N$  の $M$ 次の係数は $\Theta(1)$  で計算できる。

$(1-x)^{-K}$  の $n$ 次の係数が二項係数で表せる理由: 区別する $K$ 個の箱に、区別しない $n$ 個の玉を入れる方法の数え上げ(玉と仕切りを考えるやつ)なので、 $n$ 個の玉と $K-1$ 個の仕切りを並べる方法の数え上げに対応するから。



## 積の和典型(続き)

積の和典型あるあるとして「掛けたいものを係数に持ってきて、和を取りたいものを指数に持ってきてがち」というのがある

# 積の和典型の例

## ABC 231 G - Balls in Boxes

1から $N$ の番号がついた $N$ 個の箱があります。各箱にはそれぞれ $A_i$ 個のボールが入っています。あなたは、次の操作を $K$ 回行います。

- 1から $N$ の間で整数 $i$ を等確率で選び、箱 $i$ にボールを1個追加する。  
 $K$ 回の操作が終了した後で箱 $i$ に入っているボールの個数を $B_i$ とするとき、スコアはボールの個数の総積 $\prod_{i=1}^N B_i$ で定義されます。スコアの期待値を求めてください。 (mod 998244353)

注意: 次のスライドにネタバレあり

## ABC 231 G - Balls in Boxes(続き)

期待値を求めているけど、等確率で選んでいるから、全ての場合についてスコアの和を求めて最後に  $N^K$  で割れば期待値も求まる。

そう考えると、積の和典型っぽい。箱  $i$  に追加するボールの個数を  $a_i$  とすると、最終的なスコアは  $\prod_{i=1}^N (A_i + a_i)$  であり、 $\sum_{i=1}^N a_i = K$  である。今回の問題では「箱  $i$  に追加するボールの個数」が積の和典型でいう「数列の各要素」に対応していそう。今回の問題の「ボールの個数の合計」が積の和典型でいう「数列の和」に対応していそう。

となると、となると、 $f_i = A_i + (A_i + 1)x + (A_i + 2)x^2 + (A_i + 3)x^3 + \dots$  として、 $\prod_{i=1}^N f_i$  の  $x^K$  の係数を求めればよさそう。

## ABC 231 G - Balls in Boxes(続き)

実際にその方針で  $N = 2, K = 2$  で計算してみる

$$f_1 = A_1 + (A_1 + 1)x + (A_1 + 2)x^2 + \dots$$

$$f_2 = A_2 + (A_2 + 1)x + (A_2 + 2)x^2 + \dots$$

$x^2$  の係数は  $A_1(A_2 + 2) + (A_1 + 1)(A_2 + 1) + (A_1 + 2)A_2$  となる。

- $A_1(A_2 + 2)$  の項は、箱1に0個、箱2に2個追加する場合に対応している。
  - あってそう
- $(A_1 + 1)(A_2 + 1)$  は箱1に1個、箱2に1個追加する場合に対応している
  - 間違っている。箱1に先に入れる場合とあとに入れる場合があるので、2倍しないと合わない。
- $(A_1 + 2)A_2$  は箱1に2個、箱2に0個追加する場合に対応している。
  - あってそう

## ABC 231 G - Balls in Boxes(続き)

Q: なぜズレたか??

A: 箱1に3個、箱2に1個、箱3に4個追加する場合の数は

$\frac{(3+1+4)!}{3!1!4!}$  になる。このように多項係数の重みをつけなければいけなかったから。

そう考えると、 $f_i = A_i + \frac{(A_i+1)}{1!}x + \frac{(A_i+2)}{2!}x^2 + \dots$  として、 $\prod_{i=1}^N f_i$  の  $x^K$  の係数を求めればよさそう。(先に学んだとおり、EGFの積には係数の重みに多項係数がつくので)

$f_i = (A_i + x)e^x$  なので、 $\prod_{i=1}^N f_i = (\prod_{i=1}^N (A_i + x))e^{Nx}$  となる。

$\prod_{i=1}^N (A_i + x)$  は  $N$  次多項式なので、あとは展開すればよい。 $(e^{Nx}$  の  $n$  次の項は  $\frac{(Nx)^n}{n!}$  なので、 $x^K$  の係数を求めるときは  $N$  次多項式の  $K - n$  次の項を見ればよい)

# 参考文献

- <https://codeforces.com/blog/entry/77468>
  - OGF/EGFの定義からいろいろな性質まで扱っている(英語)
- <https://trap.jp/post/1657/>
  - traPのFPSの講習会の資料。計算方法や、問題を手計算で解く方法などが詳しく書かれている。
- <https://maspypy.com/>多項式・形式的べき級数数え上げとの対応付け
  - FPSで数え上げ問題を解く方法について。(2)や(3)も参考になる。