Hott の中で数学

豊田陽基

目次

1 Introduction

Hott の中で" 普通に" 数学を展開することで, 数学の基礎を置き換えることができるということを示していく. 好きなところから記述していくので内容の不完全性については悪しからず.

2 Hopf fibration

2.1 H-space と Hopf 構成

定義 2.1. $A * A$ を $A \xleftarrow{\pi_1} A \times A \xrightarrow{\pi_2} A$ の pushout とする.

定義 2.2. H-space $(A, e\colon A, \mu\colon A \times A \to A)$ に対して Hopf 構成 $P\colon \Sigma A \to \mathrm{Type}$ を $P(north) = A, P(south) = A, P(merid(a)) = ua(\mu(a, -))$ とする.

補題 2.3. $\sum_{x\colon \Sigma A} P(x) \cong A * A$

Proof. $\alpha\colon A \times A \to A \times A; (x, y) \mapsto (\mu(x, y), y)$ とする. これは同型である. したがって以下の図は span の同型. 上の span の pushout は $\sum_{x\colon \Sigma A} P(x)$, 下の span の pushout は $A * A$ である. □

2.2 Hopf fibration

Hopf fibration を構成する. 個人的な好みによって Hott book の構成を (補題**??**を使うように) 少し改良している.

定義 2.4. $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$

補題 2.5. $f\colon \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to X$ は以下の induction によって構成できる.

- $f(\mathrm{base}, \mathrm{base})\colon X$
- $f(\mathrm{base}, \mathrm{loop})\colon f(\mathrm{base}, \mathrm{base}) = f(\mathrm{base}, \mathrm{base})$
- $f(\mathrm{loop}, \mathrm{base})\colon f(\mathrm{base}, \mathrm{base}) = f(\mathrm{base}, \mathrm{base})$
- $f(\mathrm{loop}, \mathrm{loop})\colon f(\mathrm{base}, \mathrm{loop}) \cdot f(\mathrm{loop}, \mathrm{base}) = f(\mathrm{loop}, \mathrm{base}) \cdot f(\mathrm{base}, \mathrm{loop})$

Proof. 対応する $f'\colon \mathbb{S}^1 \to X^{\mathbb{S}^1}$ を構成する.

まず $f'(\mathrm{base})\colon \mathbb{S}^1 \to X$ を $f'(\mathrm{base})(\mathrm{base}) = f(\mathrm{base}, \mathrm{base}), f'(\mathrm{base})(\mathrm{loop}) = f(\mathrm{base}, \mathrm{loop})$ によって定義する.

さらに $f'(\mathrm{loop})$ を定める. $f'(\mathrm{loop})(\mathrm{base}) = f(\mathrm{loop}, \mathrm{base})$ とする. また $f'(\mathrm{loop})(\mathrm{loop})\colon \mathrm{transport}(f(\mathrm{loop}, \mathrm{base})$ $f(\mathrm{loop}, \mathrm{base})^{-1} \cdot f(\mathrm{base}, \mathrm{loop}) \cdot f(\mathrm{loop}, \mathrm{base}) = f(\mathrm{base}, \mathrm{loop})$ を $f(\mathrm{loop}, \mathrm{loop})$ に対応する path として定める. □

定義 2.6. $\mu\colon T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ を以下のように定義する.

- $\mu(\mathrm{base}, \mathrm{base}) = \mathrm{base}$
- $\mu(\mathrm{base}, \mathrm{loop}) = \mathrm{loop}$
- $\mu(\mathrm{loop}, \mathrm{base}) = \mathrm{loop}$
- $\mu(\mathrm{loop}, \mathrm{loop}) = \mathrm{id}\colon \mathrm{loop} \cdot \mathrm{loop} = \mathrm{loop} \cdot \mathrm{loop}$

この構造によって $\mathbb{S}^1$ が $\mathbb{E}_\infty$ モノイドであることを示したい. しかし Hott の中で $\mathbb{E}_\infty$ モノイドを定義することは未解決問題である.[*1]差し当たっては H-space であることを示す. Hopf fibration の定義にあたってはこれで十分である.

補題 2.7. $(\mathbb{S}^1, \mathrm{base}, \mu)$ は H-space である. すなわち $\prod_{x\colon \mathbb{S}^1} (\mu(\mathrm{base}, x) = x) \times (\mu(x, \mathrm{base}) = x)$

Proof. x についての induction.

$\mathrm{refl}_{\mathrm{base}}\colon \mu(\mathrm{base}, \mathrm{base}) = \mathrm{base}$ とする.

$\mu(\mathrm{base}, \mathrm{loop})\colon \mathrm{transport}(\mathrm{loop})(\mathrm{refl}) = \mathrm{refl}$ は $\mathrm{transport}(\mathrm{loop})(\mathrm{refl}) = \mathrm{loop}^{-1} \cdot \mathrm{refl} \cdot \mathrm{loop} = \mathrm{loop}^{-1} \cdot \mathrm{loop} = \mathrm{refl}$ より構成できる. □

定義 2.8. H-space $(\mathbb{S}^1, \mathrm{base}, \mu)$ に対応する Hopf 構成を Hopf fibration という. これは補題**??**より $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ であり, fibre は $\mathbb{S}^1$ である.

3 Blakers-Massey

補題 3.1 (connectivity lemma)**.**

[*1] 例えば任意の n に対して $B^n\mathbb{S}^1$ が構成できれば良かったりしないだろうか？