素イデアルなしで Zariski spectrum

豊田陽基

scheme は局所的に環付き Zariski spectrum であるような環付き空間として定義される．

Zariski apectrum は素イデアルの集合に適当な位相を入れて定義されるが，この定義に素イデアルを使うことには歴史的な紆余曲折があり，初学者にはなぜ素イデアルを使うのかは分かりづらいだろう． 例えばイタリア学派の古典的な代数幾何との比較や，極大イデアルでは関手性を満たさないから云々と言った説明が考えられるがどれも歴史的経緯に沿ったアドホックな説明である． (少なくとも筆者はそう感じる.)

そこでこの pdf では locale と topos の視点から Zariski spectrum の定義に対して筆者として最も納得のいく説明を与える．

1 通常の定義

まず通常の定義を復習しておこう．

定義 1.1. R を環とする．集合 $Spec(R) = \{\mathfrak{p} : R\text{の素イデアル}\}$ に $\{D_a = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) \mid a \notin \mathfrak{p}\} \mid a \in R\}$ を開基とする位相を入れたものを R の Zariski spectrum という．

Zariski spectrum に関して重要な事実を証明抜きで簡単にまとめよう．

補題 1.2. $Spec(R)$ は spectral である．すなわち以下の性質を満たす.[1)]

- sober
- compact
- compact の交叉は再び compact
- 開 compact な部分集合による開基を持つ

ただし sober とは任意の既約閉部分集合は唯一の生成点を持つことである．

補題 1.3. 開基 $\{D_a\}$ は以下の性質を満たす.

- $D(1) = Spec(R)$
- $D(0) = \emptyset$
- $D(a + b) \subset D(a) \cup D(b)$

1) 実際にはこの性質は Zariski spectrum を特徴づけている．すなわち位相空間が spectral であることとある環の Zariski spectrum であることは同値である．

- $D(ab) = D(a) \cap D(b)$

次の節では sober 性について説明する.

2 pointfree topology

位相空間のさまざまな定義/定理のうち多くは実は台集合を使わずに開集合のなす poset のみを使って述べることができる.

例えば位相空間の定義は開集合が特定の操作について閉じていることを述べているし, compact 性は開集合とその合併の概念さえあれば述べることができる.

そこで以下の概念を定義しよう. 開集合の poset が以下の定義を満たしていることは位相空間の定義そのもの (+冪集合の性質) であることに注意.

定義 2.1. frame とは以下の性質を満たす poset のことである.

- 有限個の交わりを持つ
- 任意個の結びを持つ
- 分配則 $x \wedge (\bigvee_i y_i) = \bigvee_i (x \wedge y_i)$ を満たす.

さらに frame の間の射を順序と結び, 交わりを保つ写像のこととする.

frame のなす圏を $Frame$ と書き, その双対を $Locale = Frame^{op}$ と書く. frame を $Locale$ の対象だと思う時には locale という.

$Locale$ を導入したのは以下の構成のためである.

定義 2.2. 位相空間 X に対して $\mathcal{O}(X)$ を開集合のなす frame とする.

さらに連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して $f^{-1}\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)\colon U \mapsto f^{-1}(U)$ とする.

これによって関手 $Top \to Frame^{op} = Locale$ が定まる.

一般の位相空間に対して $\mathcal{O}(X)$ は位相空間の全ての情報を持っているわけではないが, 実は多くの場合にはそうである.

補題 2.3. 上記の関手を sober な位相空間に制限した $Top_{sober} \to Locale$ は充満忠実である.

この主張の詳細な証明は述べないが, 例えば点の概念は以下のように復元される.

まず一般の位相空間 X に対して点は一点空間 1 からの連続写像と思える. 従って locale に対しては $\mathcal{O}(1)$ からの射 (つまり frame としては $\mathcal{O}(1)$ への射) を点として定義するのが自然である. 一般の位相空間に対してはこれによって元の点より多くの点が出てきてしまうが, sober であればちょうど元の台集合が復元できる.

注意 2.4. sober とは任意の既約閉部分集合は唯一の生成点を持つということであり, 定義の見た目の厳つさから特殊な性質のように思うかもしれないが, 実際には sober という条件はとても弱い. 実際任意の Hausdorff 空間は sober である.

3 素イデアルとは何か

補題??と補題??によって Zariski spectrum を locale $\mathcal{O}(Spec(R))$ の言葉で言い換えることができる.

さらに $\mathcal{O}(Spec(R))$ は補題??($+\alpha$ の考察) によりもっと直接的な定義を持っている.

定義 3.1. frame $\mathcal{O}(R)$ を記号 $D(a), a \in R$ および以下の関係で自由生成された frame[2] とする.

- $D(0) = \bot$
- $D(1) = \top$
- $D(a+b) \leq D(a) \vee D(b)$
- $D(a) \wedge D(b) \leq D(ab)$
- $D(xa) \leq D(a)$

注意 3.2. この frame の順序を反転させると, $D(a)$ はある「素理想数」[3] $\mathfrak{p}$ に対して $\mathfrak{p}|a$ という式であると考えることができる. 実際上記は

- 0 は $\mathfrak{p}$ の倍数
- 1 は $\mathfrak{p}$ の倍数でない
- a, b が $\mathfrak{p}$ の倍数なら $a+b$ は $\mathfrak{p}$ の倍数
- ab が $\mathfrak{p}$ の倍数なら a か b は $\mathfrak{p}$ の倍数
- a が $\mathfrak{p}$ の倍数なら xa は $\mathfrak{p}$ の倍数

と翻訳できる. 「素理想数」を考えることが環としての演算を論理演算にうまく置き換えていることがわかると思う.

これが素イデアルが環論において重要となる理由の説明の一つである.

また, これは加法が $\wedge$ と一致するような値をとる付置であると考えることもできる.

注意 3.3. 順序付き半環と lax morphism の圏は環の圏と distributive lattice の圏を充満忠実に含む.

$Spec$ は環から分配束への普遍的な構成になっている.

補題 3.4. $\mathcal{O}(R) = \mathcal{O}(Spec(R))$

これと節 2 で述べたことの直接の帰結として以下のことがわかる. すなわち" 素イデアルとは locale $\mathcal{O}(R)$ の点である".

代数幾何の歴史を再解釈するなら, 素イデアルによって scheme 論がうまく行ったのはこの性質のおかげであるといえる.

定義 3.5. 斉次イデアルの条件は $f = \Sigma_d f_d$ と d 次斉次式に直した時に $D(f) = \bigvee_d D(f_d)$ となることと同値である. 従って同じく frame を生成するとき, 斉次イデアルのみを考え

---

2) これは同じ関係で自由生成された分配束から自由生成された frame であるということもできる. 分配束から自由生成される frame を coherent であるといい, これは補題??の後半二つの主張を満たすことと同値である.

3) この名前は当然 Kummer の考え出した理想数の概念から取っている.

ることと斉次式のみを生成元として用いることは対応する. そこで frame $\mathcal{O}(\mathbb{P}^n_R)$ を記号 $D(a), a \in R[x_0, x_1, \dots x_n], a$は斉次 および以下の関係で自由生成された frame とする.

- $D(0) = \bot$
- $D(1) = \top$
- $D(a+b) \le D(a) \vee D(b)$ ($a, b, a+b$ は斉次)
- $D(a) \wedge D(b) \le D(ab)$ (a, b は斉次)
- $D(xa) \le D(a)$ (x, a は斉次)
- $\bigvee_i D(x_i) = \top$

それぞれの $(D(a) \downarrow \mathcal{O}(\mathbb{P}^n_R))$ は $D(f) \mapsto D(f/a^d)(d \cdot deg(a) = deg(f)), D(0)$(そのような$d$がない) によって $\mathcal{O}(a^{-1}R_0)$ と同型である.

さらに $\mathbb{N}$ 次数付き環に対して同様の構成ができる. ただし最後の規則は $\bigvee_{x \in S^+} D(x) = \top$ となり, 一般には coherent ではなくなる.

注意 3.6. 自由生成された locale 上の sheaf は生成元のみの上で考えれば良い.(普遍性)

特に $Proj(R)$ はスキーム

4 scheme の定義

さてせっかくなのでこのまま駆け足で scheme を定義してしまおう.

補題 4.1. frame は順序集合であるため, 圏と思える. frame に対して $\bigvee_i U_i = U$ の時 $\{U_i \le U\}$ を covering であると定義するとこれは Grothendieck 位相を定める.

補題 4.2. $\bar{R} \in Set^{\mathcal{O}(R)}$: $\bigvee_i D_{x_i} \mapsto$ (Rのx_iの生成する積閉集合における局所化) とすると, これは上記の位相に関して層である. さらに内部局所環構造を持つ.

そこで組み $(Sh(\mathcal{O}(R)), \bar{R})$ を affine scheme といい, 局所的に affine scheme に同値な環付き topos のことを scheme という.

5 類似の例

stone locale : coherent, Hausdorff

Gelfand spectrum

valuation による spectrum

tensor stable cat の spectrum(THE SPECTRUM OF PRIME IDEALS IN TENSOR TRIANGULATED CATEGORIES)