型理論による弱(∞,∞)-圏

発表者 : 豊田 陽基
@Categories in Tokyo(仮)

目次

(1)coherence定理

(2)型理論によるアプローチ

(3)synthetic weak (∞,∞)-category theory

(4)応用

目次

復習：モノイダル圏

- 対象, 射
- 縦合成 $\circ$, 横合成 $\otimes$
- 結合律

$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C$, $(f \circ g) \otimes (h \circ k) = (f \otimes h) \circ (g \otimes k)$

- 単位元 id , I
- 単位律 $id \circ f = f = f \circ id$, $I \otimes A \cong A \cong A \otimes I$
- coherence

復習：モノイダル圏

- 対象, 射
- 縦合成 ○, 横合成 ⊗
- 結合律

$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$, $A\otimes(B\otimes C) \cong (A\otimes B)\otimes C$, $(f\circ g)\otimes(h\circ k)=(f\otimes h)\circ(g\otimes k)$

- 単位元 id , I
- 単位律 $id\circ f = f = f\circ id$, $I\otimes A \cong A \cong A\otimes I$
- coherence

coherence条件

$$
\begin{tikzcd}
& (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[dr] & \\
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[ur] \arrow[d] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \\
(A \otimes (B \otimes C)) \otimes D \arrow[rr] & & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}
$$

coherence定理(雑)

任意の二つのobjectの間の結合律 α,λ,ρのみによって作られる同型はただ一つ.

- weak (∞,∞)-category theoryではどうなる？

- Grothendieck Maltsiniotisのweak (∞,∞)-category

	cell	結合	結合律	coherence
モノイダル圏	対象, 射	$\circ, \otimes$	α, λ, ρ など	
weak (∞, ∞)-category	???	???	???	???

- ・cell：各自然数nに対してn次元のcellがある

0次元のcell

$$x$$

1次元のcell

$$x \xrightarrow{f} y$$

2次元のcell

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \end{tikzcd}$$

	cell	結合	結合律	coherence
モノイダル圏	対象, 射	$\circ, \otimes$	α, λ, ρ など	
weak (∞, ∞)-category	ok	???	???	???

・結合：boundaryが一致していたら結合できる

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad = \quad x \xrightarrow{f\cdot g} z$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, "h"] & z \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}[column sep=huge] x \arrow[r, bend left, "f\cdot h"] \arrow[r, bend right, "g\cdot h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha\cdot f"] & z \end{tikzcd}$$

	cell	結合	結合律	coherence
モノイダル圏	対象, 射	$\circ, \otimes$	α, λ, ρ など	
weak (∞, ∞)-category	ok	ok	???	???

	cell	結合	結合律	coherence
モノイダル圏	対象, 射	$\circ, \otimes$	α, λ, ρ など	
weak (∞, ∞)-category	ok	ok	???	???

↑

Q.異なるやり方で結合されたcellはいつ同一になるか？

Pasting scheme

- 定義(雑)：boundaryに関して閉じたcellの有限集合でそれぞれのcell α に対して

$$\alpha\text{の}domain < \alpha < \alpha\text{の}codomain$$

という関係で生成される順序構造が全順序をなすものをpasting schemeという

Pasting scheme

- 定義(雑)：boundaryに関して閉じたcellの有限集合でそれぞれのcell α に対して

  αのdomain < α < αのcodomain

  という関係で生成される順序構造が全順序をなすものをpasting schemeという

例

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, "h"] & z \end{tikzcd}$$

x< f < α < g < y < h < z

Pasting scheme

- 定義(雑)： boundaryに関して閉じたcellの有限集合でそれぞれのcell α に対して

αのdomain < α < αのcodomain

という関係で生成される順序構造が全順序をなすものをpasting schemeという

例

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, "h"] & z \end{tikzcd}$$

x< f < α < g < y < h < z

反例

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop above, "f"] \end{tikzcd}$$

退化している

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & y \end{tikzcd}$$

fとgが比較できない

Pasting scheme

- 定義(雑)：boundaryに関して閉じたcellの有限集合でそれぞれのcell α に対して

$$\alpha \text{のdomain} < \alpha < \alpha \text{のcodomain}$$

という関係で生成される順序構造が全順序をなすものをpasting schemeという

➡ある種の"可縮性"をもったdiagram

Pasting scheme

- 要請：任意のpasting schemeがuniqueな結合を持つ

Pasting scheme

- 要請：任意のpasting schemeがuniqueな結合を持つ

例

$$x \xrightarrow{f} y \qquad y \xrightarrow{g} z \qquad z \xrightarrow{h} w$$

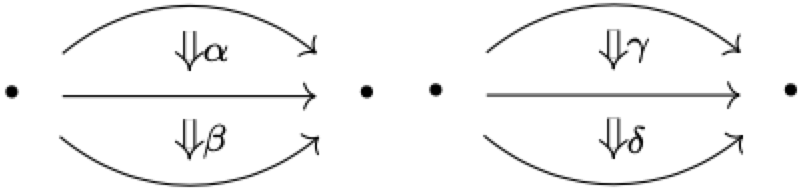
$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \quad z \xrightarrow{h} w \qquad\qquad x \xrightarrow{f} y \quad y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} w$$

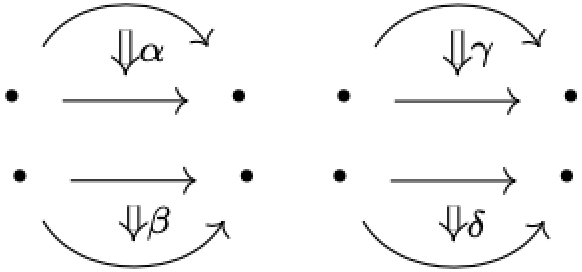
$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} w$$

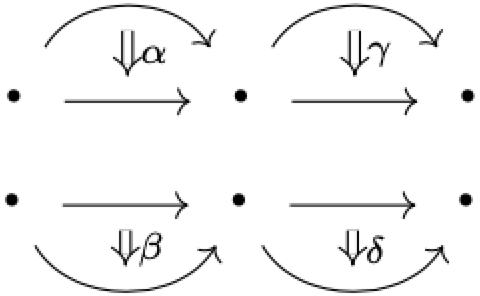
Pasting scheme

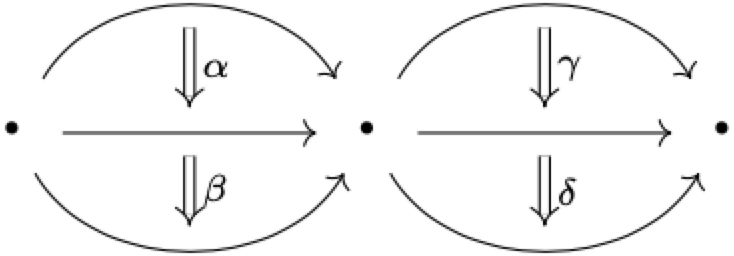
- 要請：任意のpasting schemeがuniqueな結合を持つ

例









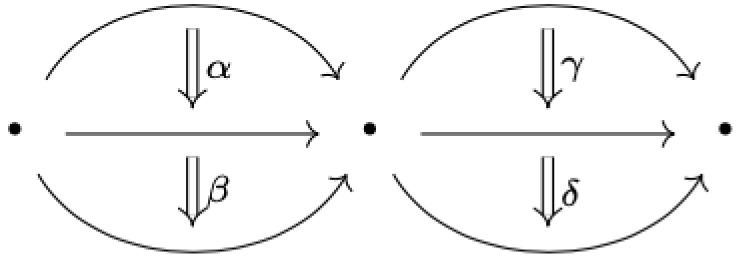
簡易化

- 任意のpasting schemeは結合の次元が一定以上であるようなpasting schemeにcanonicalに分解できる.

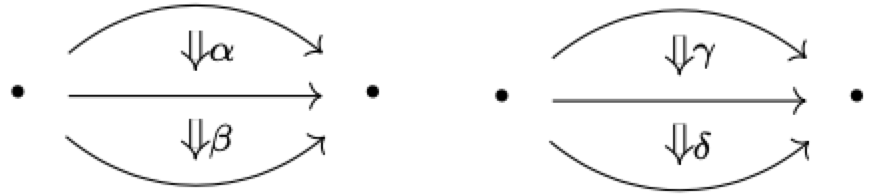
簡易化

- 任意のpasting schemeは結合の次元が一定以上であるようなpasting schemeにcanonicalに分解できる.

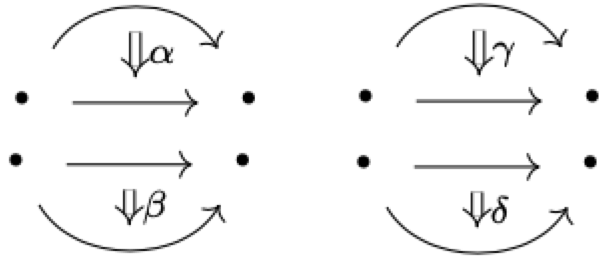
例



結合の次数が1以上の塊



結合の次数が2以上の塊



簡易化

- 任意のpasting schemeは結合の次元が一定以上であるようなpasting schemeにcanonicalに分解できる.
- 逆にこの分解の逆順に結合していけば任意のpasting schemeに標準的な合成を定めることができる.

簡易化

- 任意のpasting schemeは結合の次元が一定以上であるような塊にcanonicalに分解できる.
- 逆にこの分解の逆順に結合していけば任意のpasting schemeに標準的な合成を定めることができる.
- 従って考察を結合の次元が一定であるような結合に帰着できる.

簡易化

- (行間)
- 従って結合律として要求するのは以下の二種類で十分である！

$(f \bullet_n g) \bullet_n h = f \bullet_n (g \bullet_n h)$

$(f \bullet_n g) \bullet_m (h \bullet_n k) = (f \bullet_m h) \bullet_n (g \bullet_m k)$

簡易化

- (行間)

- 従って結合律として要求するのは以下の二種類で十分である！

$(f \bullet_n g) \bullet_n h = f \bullet_n (g \bullet_n h)$

$(f \bullet_n g) \bullet_m (h \bullet_n k) = (f \bullet_m h) \bullet_n (g \bullet_m k)$

例

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z \xrightarrow{h} w$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta"] & \bullet \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\delta"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

簡易化

- (行間)
- 従って結合律として要求するのは以下の二種類で十分である！

$(f \bullet_n g) \bullet_n h = f \bullet_n (g \bullet_n h)$　　$(f \bullet_n g) \bullet_m (h \bullet_n k) = (f \bullet_m h) \bullet_n (g \bullet_m k)$

正確にはこれらの間にcanonicalな射が存在することを要求する.

$coh : (f \bullet_n g) \bullet_n h \to f \bullet_n (g \bullet_n h)$

$coh : (f \bullet_n g) \bullet_m (h \bullet_n k) \to (f \bullet_m h) \bullet_n (g \bullet_m k)$

	cell	結合	結合律	coherence
モノイダル圏	対象, 射	$\circ, \otimes$	α, λ, ρ など	
weak (∞, ∞)-category	ok	ok	ok	???

↑

Coherenceはtype theoryを使って解決

目次

(1)coherence定理

(2)型理論によるアプローチ

(3)synthetic weak (∞,∞)-category theory

(4)応用

型理論(雑)

- Judgementと呼ばれるものがあり，それが基本的な構成要素

- 推論規則によってjudgementを次々構成していく

型理論(雑)

例：論理学

- Judgementは命題
- 推論規則は推論規則

$$\frac{P \quad Q}{P \land Q}$$

$$\frac{}{\top}$$

型理論(雑)

例：群

- Judgementは群の元
- 推論規則は群の公理

$$\frac{x \quad y}{x \cdot y} \qquad\qquad \frac{}{e}$$

型理論によるweak (∞,∞)-圏

- Judgementはcell
- 推論規則はweak (∞,∞)-圏の公理

$$\dfrac{\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \end{tikzcd} \qquad y \xrightarrow{h} z}{\begin{tikzcd} x \arrow[rr, bend left, "f\cdot h"] \arrow[rr, bend right, "g\cdot h"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha\cdot f"] & & z \end{tikzcd}}$$

$$\dfrac{f\colon x \to y \quad g\colon y \to z \quad h\colon z \to w}{coh\colon (f\cdot g)\cdot h \to f\cdot(g\cdot h)\colon x \to w}$$

型理論によるweak (∞,∞)-圏

coherenceはどうする？

型理論によるweak (∞,∞)-圏

- 新しいjudgement α ~ βと推論規則

$$\frac{f \quad g \quad h}{(f \cdot g) \cdot h \sim f \cdot (g \cdot h)} \qquad \frac{\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta}{(\alpha \cdot \beta) \cdot (\gamma \cdot \delta) \sim (\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \delta)}$$

$$\frac{\alpha \sim \beta}{coh(\alpha, \beta) : \alpha \to \beta \quad coh(\alpha, \beta) \sim \alpha}$$

$$\frac{\dim(\alpha) \leq n}{\alpha \cdot_n \beta \sim \beta} \qquad \frac{\dim(\beta) \leq n}{\alpha \cdot_n \beta \sim \alpha}$$

型理論によるweak (∞,∞)-圏

~の気持ち：結合律cohのみによってできる同型

coherence定理(雑)(再)

任意の二つのobjectの間の**結合律 α,λ,ρのみによって作られる**同型はただ一つ.

型理論によるweak (∞,∞)-圏

例

$$\frac{\alpha \sim \alpha}{coh(\alpha,\alpha) : \alpha \to \alpha \quad coh(\alpha,\alpha) \sim \alpha}$$

coh(α,α)をid_αと書く.

$$\frac{\dfrac{x \quad f : x \to y}{id_x \cdot_0 f \sim x \cdot_0 f \sim f}}{coh(id_x \cdot_0 f, f) : id_x \cdot_0 f \to f}$$

型理論によるweak (∞,∞)-圏

定理
任意のcoh : $\alpha \to \beta$は同型射である.すなわちある$coh^{-1} : \beta \to \alpha$が存在して$coh \cdot coh^{-1} \sim \alpha$, $coh^{-1} \cdot coh \sim \beta$

型理論によるweak (∞,∞)-圏

定理
任意のcoh : $\alpha \to \beta$は同型射である.すなわちあるcoh^{-1} : $\beta \to \alpha$が存在して$coh \bullet coh^{-1} \sim \alpha$, $coh^{-1} \bullet coh \sim \beta$

定理
任意のpasting schemeに対して(up to ~で)唯一の結合が存在する.

型理論によるweak (∞,∞)-圏

定理
任意のcoh : α→βは同型射である.すなわちあるcoh^{-1} : β→αが存在してcoh • coh^{-1} ~ α , coh^{-1} • coh ~ β

定理
任意のpasting schemeに対して(up to ~で)唯一の結合が存在する.

定理
任意のcell α, βに対し, αからβへの cohのみを用いて作られるcellは(up to ~で)唯一である.

	cell	結合	結合律	coherence
モノイダル圏	対象, 射	$\circ, \otimes$	α, λ, ρ など	
weak (∞, ∞)-category	ok	ok	ok	ok

目次

たかが用語法, されど用語法

- 0-cellを圏と呼ぶ
- 1-cell $f : x \to y$をxからyへの関手と呼ぶ
- 2-cell $\alpha : f \to g : x \to y$をfからgへの自然変換という

たかが用語法, されど用語法

- 0-cellを圏と呼ぶ
- 1-cell $f : x \to y$をxからyへの関手と呼ぶ
- 2-cell $\alpha : f \to g : x \to y$をfからgへの自然変換という

- 1-cell $x : A \to B$をBのA-objectと呼ぶ
- 2-cell $f : x \to y : A \to B$をxからyへの射という

たかが用語法, されど用語法

- 0-cellを圏と呼ぶ
- 1-cell $f : x \to y$をxからyへの関手と呼ぶ
- 2-cell $\alpha : f \to g : x \to y$をfからgへの自然変換という
- 1-cell $x : A \to B$をBのA-対象と呼ぶ
- 2-cell $f : x \to y : A \to B$をxからyへのA-射という
- BのA-対象 $x : A \to B$及びBからCへの関手$F : B \to C$に対して合成$x \cdot F$を$F(x)$と書く. A-射に関しても同様に$F(f)$などと書く.

たかが用語法, されど用語法

- BのA-対象 x : A → B及びBからCへの関手F :B → Cに対して合成 x・FをF(x)と書く. A-射に関しても同様にF(f)などと書く.

定理

$F(f) \cdot F(g) \sim F(f \cdot g)$

$F(id_x) \sim id_{F(x)}$

などなど…

更なる圏

- 以下の推論規則を要求する

$$\frac{}{1} \qquad \frac{A}{!_A : A \to 1} \qquad \frac{f : A \to 1 \quad g : A \to 1}{f \sim g}$$

更なる圏

- 以下の推論規則を要求する

$$\frac{}{1} \qquad \frac{A}{!_A : A \to 1} \qquad \frac{f : A \to 1 \quad g : A \to 1}{f \sim g}$$

積, イコライザ, Hom, 余積など全て同じように定義できる

更なる圏

- 以下の推論規則を要求する

$$\frac{}{1} \qquad \frac{A}{!_A : A \to 1} \qquad \frac{f : A \to 1 \quad g : A \to 1}{f \sim g}$$

積, イコライザ, Hom, 余積など全て同じように定義できる

1-対象を単に対象という.1-射を単に射という

目次

モデル

- 別の数学に応用するにはこの理論が良いモデルを持つ必要がある

モデル

- 別の数学に応用するにはこの理論が良いモデルを持つ必要がある

予想
この理論はHomotopy type theoryにモデルを持つ

モデル

- 別の数学に応用するにはこの理論が良いモデルを持つ必要がある

予想
この理論はHomotopy type theoryにモデルを持つ

予想
この理論は∞-cosmosにモデルを持つ

夢

- synthetic higher topos theory

  → synthetic微分幾何, synthetic代数幾何, synthetic数理物理

- synthetic higher homotopy theory

  →E_k-algebra, string diagram, spectral algebraic geometry, 絶対数学(リーマン予想！？)