String diagram 入門

haru/

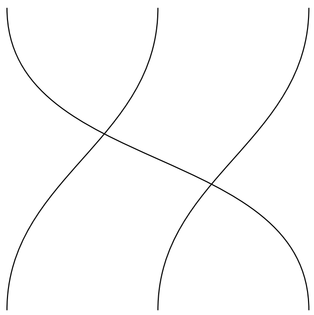
この文章では string diagram について前提知識ほぼ無しで解説する pdf である.

1 Introduction

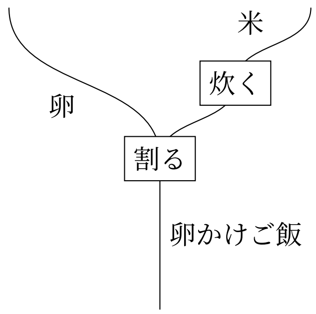
string diagram とは一言で言ってしまえば, モノイダル圏の射を表現する graphical language である. モノイダル圏は圏論に現れる非常に抽象的な概念だが, 簡単に言ってしまえば「遷移」「流れ」といったものの一般化であり, その射は「ネットワーク」を表現する. そしてそれを graphical に, したがって直感的に表現しようというのが string diagram である.

例を使ってイメージを掴むのが早いだろう. これらが string diagram であることの説明は後で詳しくする.

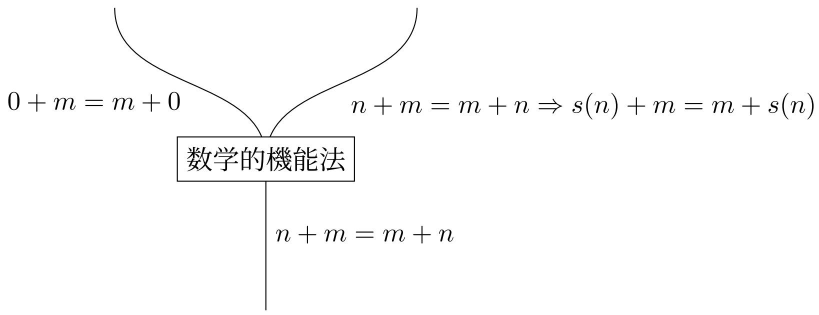
例 1.1.
- あみだくじ



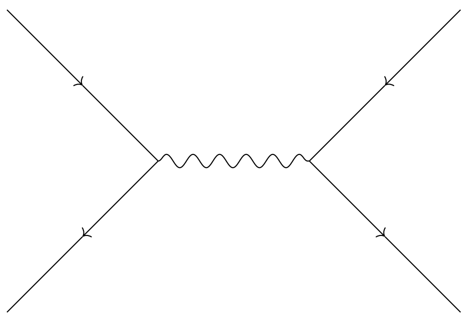
- フローチャート



- 証明図



- Feynman diagram



- 他にも回路図, 細胞システム, 生態系システム, 量子アルゴリズム, 有限状態機械,spin network などなど...

これを見ると様々な分野における「流れ」の現象を捉えていることがわかるだろう. 実際 string diagram はこのような「遷移」「流れ」という現象に対して普遍的で特定の分野によらない共通の基盤を与える.

したがって全ての抽象論がそうであるように,string diagram を考えることには以下の二つのメリットがある: 一つは分野毎に diagram の理論を考える必要がなくなること, もう一つは異なる分野を繋ぐ架け橋になること[1]である.

この文章ではこの「言語」の基礎を知り, あわよくば使えるようになること目指す.

1) string diagram を language であるというのは半分はこの意味においてである. 実際にある分野の理論が string diagram を通じて全く別の分野の理論に応用された例がある. 詳しくは [?][?] を参照.

2 string diagram の基礎

この章ではモノイダル圏と付随する string diagram を定義し, 様々な「ネットワーク」が string diagram として表現できることを見ていく.

まずは一次元的な流れの理論, すなわち通常の圏論から始める.[2)]

定義 2.1. 圏 $\mathcal{C}$ とは以下のデータのことである.

i. 集合 $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$
   この集合の要素を object という.
ii. 各 object のペア $a, b \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$ に対して集合 $\mathrm{hom}(a, b)$
   この集合の要素を a から b への射といい,$f \in \mathrm{hom}(a, b)$ を $f : a \to b$ とも書く.
iii. 各 object a, b, c に対して結合演算 $\circ\colon\ \mathrm{hom}(a, b) \times \mathrm{hom}(b, c) \to \mathrm{hom}(a, c)$
   これによる (f, g) の行き先を $g \circ f$ と書く.
iv. 各 object a に対して恒等射 $\mathrm{id}_a \in \mathrm{hom}(a, a)$
v. 結合律 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
   この両辺を単に $f \circ g \circ h$ と書く.
vi. 単位律 $f \circ \mathrm{id}_a = \mathrm{id}_b \circ f = f$

これらの string diagram の視点から見た気持ちは以下のようである.

i. $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ は状態の集合である.
ii. 集合 $\mathrm{hom}(a, b)$ は a から b への遷移の集合であり,$f\colon a \to b$ は f が a から b への遷移であることを表す.
iii. $g \circ f$ は f で遷移してから g で遷移するような遷移である.
iv. 恒等射 id_a は何もしないという遷移である.
v. 結合律 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ は遷移に対して当然成り立って欲しい性質である.
vi. 単位律 $f \circ \mathrm{id}_a = \mathrm{id}_b \circ f = f$ もそう.

例 2.2. 集合の圏

i. $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ は集合全ての集合[3)]
ii. $\mathrm{hom}(a, b)$ は a から b への写像の集合
iii. $\mathrm{g \circ f}$ は合成写像
iv. 恒等射 $\mathrm{id_a}$ は恒等写像
v. 結合律 $\mathrm{(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)}$ は ok

2） 少し下に書いてある string diagram を見ながら定義を眺めるとわかりやすいかもしれない
3） 正確には小さい集合の集合

vi. 単位律 $\mathrm{f} \circ \mathrm{id_a} = \mathrm{id_b} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}$ も ok

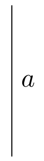
例 2.3. ベクトル空間の圏

i. $\mathrm{obj}(\mathcal{C})$ はベクトル空間の集合
ii. $\mathrm{hom}(a, b)$ は a から b への線形写像の集合
iii. $\mathrm{g} \circ \mathrm{f}$ は合成写像
iv. 恒等射 $\mathrm{id_a}$ は恒等写像
v. 結合律 $(\mathrm{f} \circ \mathrm{g}) \circ \mathrm{h} = \mathrm{f} \circ (\mathrm{g} \circ \mathrm{h})$ は ok
vi. 単位律 $\mathrm{f} \circ \mathrm{id_a} = \mathrm{id_b} \circ \mathrm{f} = \mathrm{f}$ も ok

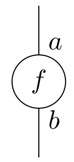
この例を見れば位相空間と連続写像の圏や群と群準同型の圏が定義できることも簡単に想像がつくだろう.

さて, 実は圏の定義を string diagram を用いて表現することができる.

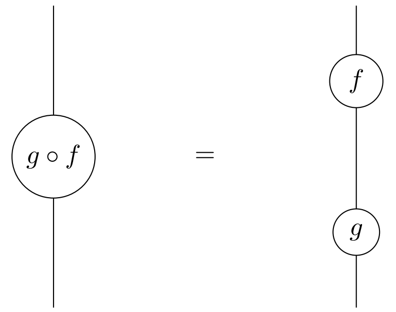
i. object a



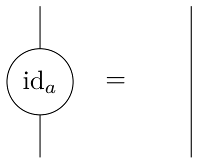
ii. $f \in \mathrm{hom}(a, b)$



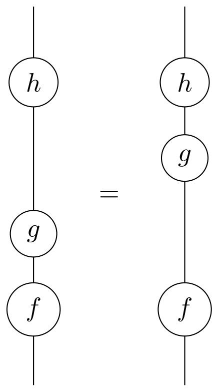
iii. $g \circ f$



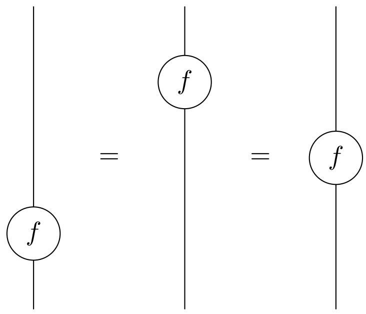
iv. id_a



v. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$



vi. $f \circ \mathrm{id}_a = \mathrm{id}_b \circ f = f$



ここからわかるように圏は既に一次元的な遷移を表現している．ここに「並列操作」を追加したものがモノイダル圏である.[4]

定義 2.4. モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ とは以下のデータ[5]

i. 圏 $\mathcal{C}$

ii. 各 object a, b に対して $a \otimes b \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$

iii. 各 $f \colon a \to b, g \colon c \to d$ に対して $f \otimes g : a \otimes c \to b \otimes d$

iv. object $I \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$

v. 結合律 $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c), (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$

この両辺を単に $a \otimes b \otimes c, f \otimes g \otimes h$ と書く．

---

4)　少し下に書いてある string diagram を見ながら定義を眺めるとわかりやすいかもしれない

5)　なおここで述べているのは正確には strict monoidal 圏の定義である. 以下の例ではカノニカルな同型を=として記号を濫用していると考えれば良い. 詳しくは [?] を参照のこと.

vi. 単位律 $a = I \otimes a = a \otimes I$
vii. コヒーレンス $(f \circ g) \otimes (h \circ i) = (f \otimes h) \circ (g \otimes i)$

モノイダル圏 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ を省略して $\mathcal{C}$ と書くことも多い. モノイダル圏の概念の string diagram の視点から見た気持ちも述べておこう.

i. 圏は状態, 遷移, 合成のデータ.
ii. $a \otimes b$ は状態が横に並んだ状態. そして $f \otimes g$ は f, g でそれぞれ遷移するような遷移.
iii. I は何もないという状態.
iv. 結合律は当然成り立って欲しい性質.
v. 単位律もそう.
vi. コヒーレンスもそう.

例 2.5. 集合の圏と直和

i. 圏は集合の圏
ii. $a \otimes b$ は集合の直和
iii. I は空集合
iv. 結合律は当然成り立つ
v. 単位律も ok
vi. コヒーレンスも ok

例 2.6. 集合の圏と直積

i. 圏は集合の圏
ii. $a \otimes b$ は集合の直積
iii. I は一点集合
iv. 結合律は当然成り立つ
v. 単位律も ok
vi. コヒーレンスも ok

例 2.7. k-ベクトル空間の圏とテンソル積

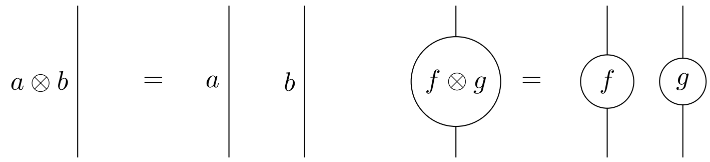
k を体とする

i. 圏は k-ベクトル空間の圏
ii. $a \otimes b$ はベクトル空間のテンソル積
iii. I は k
iv. 結合律は当然成り立つ
v. 単位律も ok
vi. コヒーレンスも ok

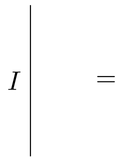
圏の string diagram を拡張してモノイダル圏の string diagram を考えよう

i. 圏の部分は同じ

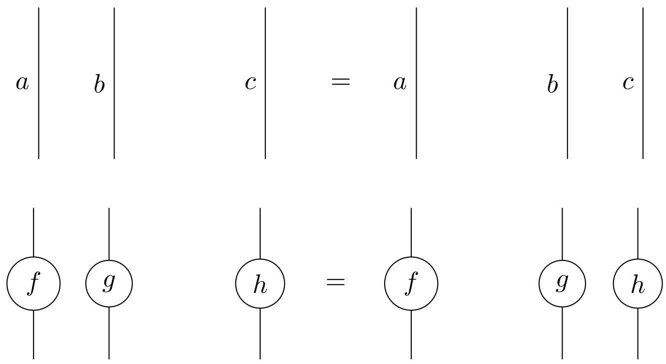
ii. $a \otimes b, f \otimes g$



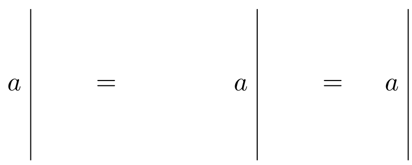
iii. I(書かない)



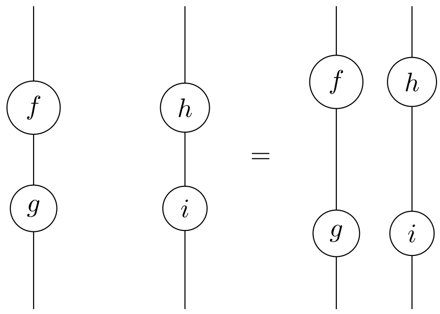
iv. $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c), (f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$



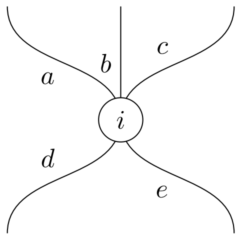
v. $a = I \otimes a = a \otimes I$ (I は空白になっていることに注意)



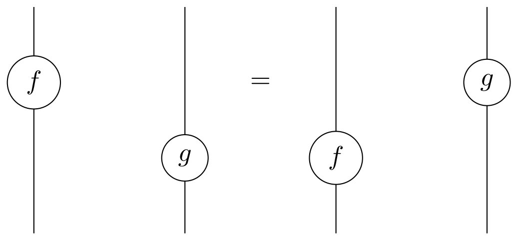
vi. $(f \circ g) \otimes (h \circ i) = (f \otimes h) \circ (g \otimes i)$



なお一般に $f\colon a\otimes b\otimes c\to d\otimes e$ のような射を以下のように書く.



ここで定義を用いて以下のようなことが示せる.



すなわち射をスライドすることができる. さらに一般に以下の定理が成り立つ [**?**].

定理 2.8. 以下は同値

i. diagram の表現する射が等しい
ii. diagram が「連続な変形」で写りあう

この定理を証明するには string diagram や連続な変形を厳密に定義する必要がありここでは行わないが, 直感的に言っていることはわかるだろう.　この定理によって string diagram の直感的な操作が可能になるのである.

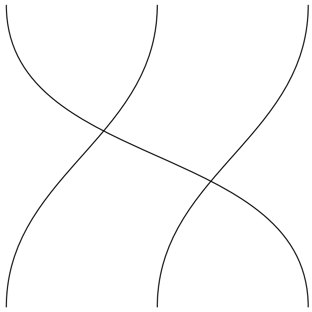
それでは Introduction で述べた例が string diagram になっていることを見ていこう.

例 2.9. あみだくじ

対応するモノイダル圏は以下で定まる.

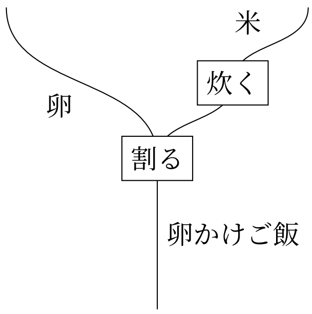
i. obj は有限集合の集合

ii. hom は全単写からなる集合
iii. $\circ$,id は集合の圏と同様
iv. $\otimes$ は直和,I は空集合
v. その他の条件は自然に成り立つ



例 2.10. フローチャート
対応するモノイダル圏は以下で定まる.[6]

i. obj は可能な状態の集合
ii. hom は可能な操作の集合
iii. $\circ$ は操作を続けて行ったもの,id は何もしない操作
iv. $\otimes$ は状態の並列,I は何もない状態
v. その他の条件は当然成り立つ



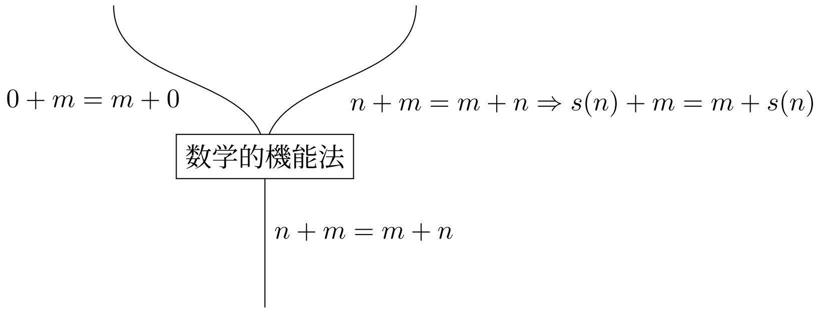
例 2.11. 証明図
対応するモノイダル圏は以下で定まる.

i. obj は命題の集合
ii. hom は導出, すなわち $\mathrm{hom}(a,b)$ は $a \Rightarrow b$ なら一つの元を持ち, そうでないなら元を持たない
iii. $\circ$ は導出の合成,id は $a \Rightarrow a$

6） 厳密な定義ではない.

iv. $\otimes$ は論理積,I は真命題

v. その他の条件も成り立つ



例 2.12. Feynman diagram 群 G を固定する. 対応するモノイダル圏は以下で定まる.

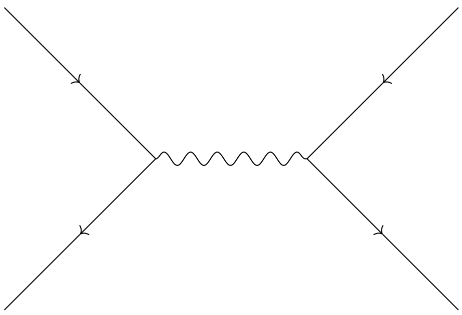
i. obj は G の複素表現の集合

ii. hom は表現の写像の集合

iii. $\otimes$ は表現のテンソル積,I は自明表現

iv. その他の条件も成り立つ

物理学において,G としてある種のリー群を持ってくるとその (既約) 表現が粒子に, 表現の射が相互作用に対応することが知られている. よって string diagram は粒子の相互作用の様子, すなわち Feynman diagram である.



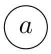
演習問題 2.13. 身近な「ネットワーク」を探して対応するモノイダル圏を定義せよ. さらに string diagram を書いて遊んでみよう.

3 string diagram による線形代数

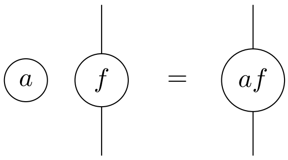
この章では string diagram を使って線形代数を行う. この章を通じて string diagram が以下に直感的で強力な武器であるかを感じてもらいたい.

線形代数を行うため使うモノイダル圏は有限次元ベクトル空間の圏である (すなわち例 2.7 の圏のうち obj を制限したもの). 簡単のため係数体は $\mathbb{C}$ とする.

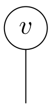
まずスカラーを表現しよう. 一般に線形写像 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は 1 の行き先 $f(1)$ によって完全に決定される.(あるいは行列表示をとったと考えても良い.) そこで a 倍写像を $a\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ と書こう.$I = \mathbb{C}$ は diagram では空白で表現されることに注意すれば, スカラーは以下のように宙に浮いた数になる.



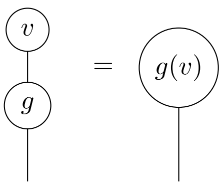
一般に $a \otimes f\colon V(\cong \mathbb{C} \otimes V) \to (\mathbb{C} \otimes W) \cong W$ はスカラー倍 af に対応するためこれはちゃんとスカラーとして機能する.



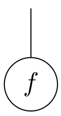
次にベクトルについて考えよう. 上と同じように線形写像 $f\colon \mathbb{C} \to V$ は 1 の行き先 $f(1)$ によって完全に決定される. そこで $f(1) = v$ のとき写像を $v\colon \mathbb{C} \to V$ と書こう.diagram で書くと以下のようになる.



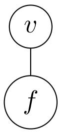
以下の記号のもとで一般に $g \circ v = g(v)$ が言えるため, これによって線形写像のベクトルへの作用が表現できる.



次に線形形式について. V 上線形形式とは線形写像 $f\colon V \to \mathbb{C}$ のことである. よって diagram では以下のようになる.

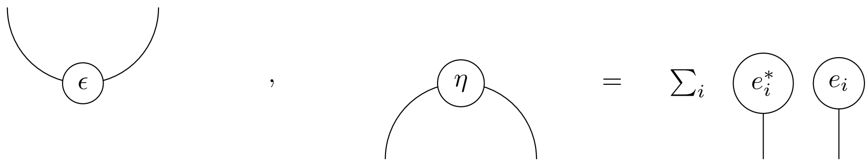


さらに線形形式 f のベクトル v は以下のように書けてスカラーになっている.



最後に双対ベクトル空間について．V を有限次元線形空間として $V^* := \hom(V, \mathbb{C})$ を双対空間という．また $\epsilon\colon V \otimes V^* \to \mathbb{C}\colon v \otimes f \mapsto F(v), \eta\colon \mathbb{C} \to V^* \otimes V : 1 \mapsto \sum_i e_i \otimes e{*}_i$ としよう．なお e_i は V の基底,$e{*}_i$ は双対基底である.[7)]

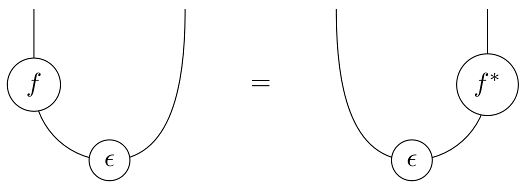
これは diagram では以下のようになる．



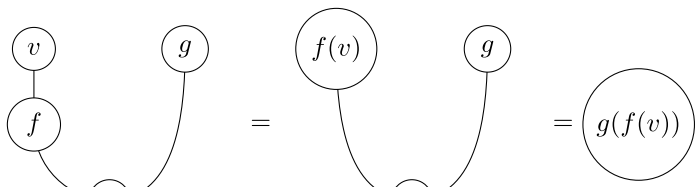
さらに線形写像 $f\colon V \to W$ に対して双対写像を $f{*}\colon W{*} \to V{*}\colon g \mapsto g \circ f$ と定義する.

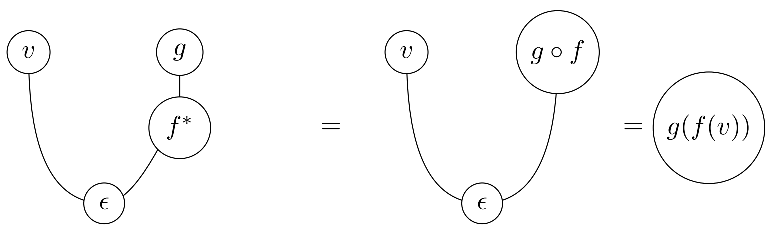
以下, 一連の補題を示すことによってϵとηが diagram において 「山」と「谷」として直感的に表現できることをみよう.

補題 3.1.



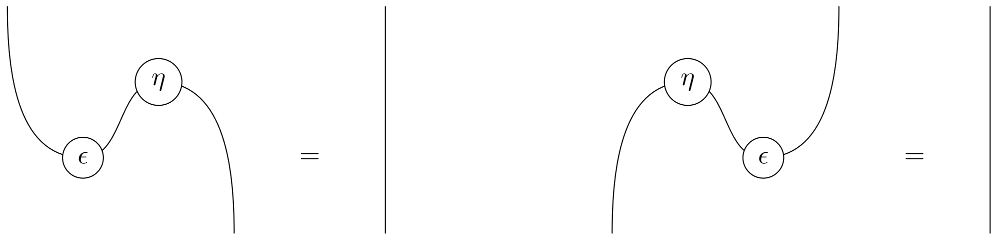
証明　任意の $v \otimes g$ に対して同じ値なら良い.





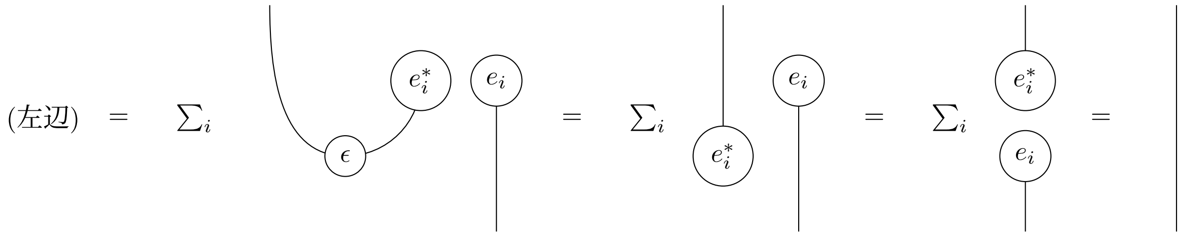
□

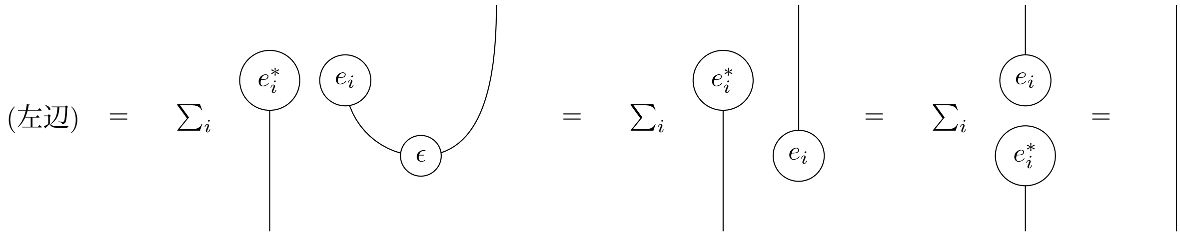
7）　実はηは基底の取り方に依存しない. しかし以下この事実を使うことはないので証明は省略する



補題 3.2.

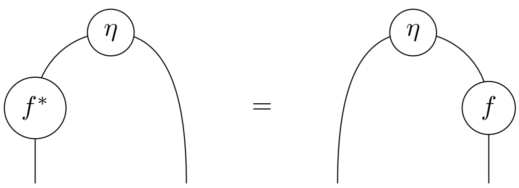
証明　順に証明していく.



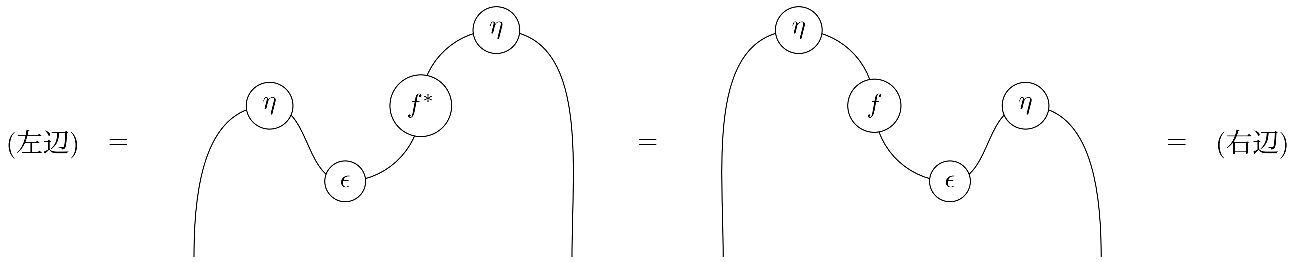


□

補題 3.3.



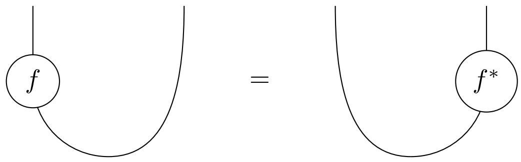
証明　　補題 3.2 の二つ目,3.1,3.2 の一つ目と順に用いる.

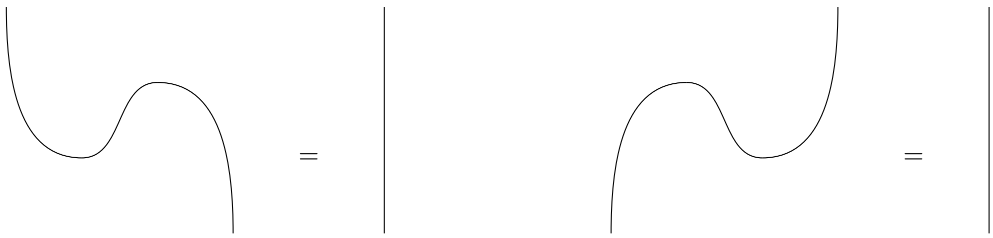


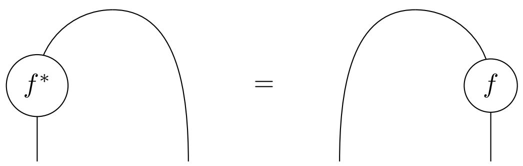
□

これら補題を根拠に以下の表記を導入しよう.

この表記によって上の補題は以下のように書ける.







つまり双対は diagram をグニャグニャと曲げることで表現できる！一般のモノイダル圏に対して双対を定義することができ, 任意の対象に双対は存在すればただ一つであることがわかる [**?**]. 一般に任意の対象に対して双対が存在するようなモノイダル圏をコンパクト閉圏と言い, このような圏に対してさらにもっとすごいことが言える [**?**].

定理 3.4. コンパクト閉圏において以下は同値

i. diagram の表現する射が等しい
ii. diagram が「連続な変形」で写りあう

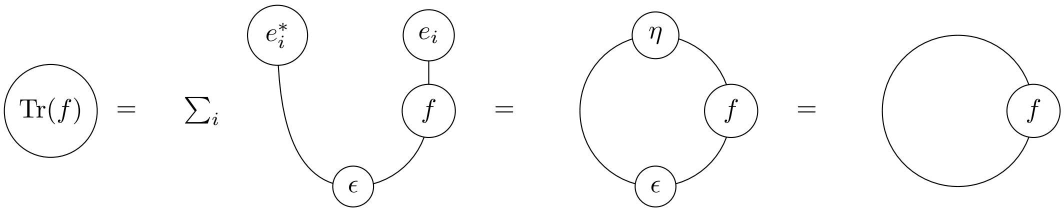
これは見かけ上定理 2.8 と同じだが, 図式を「曲げる」ことが許されており定理 2.8 の拡張になっている.

この理論を応用してトレースの cyclicity を証明してみよう.

まず $f\colon V \to W$ に対してトレースは $\mathrm{Tr}(f) = \sum_i f(e_i)e*_i$ で定義する.[8] したがって diagram とし

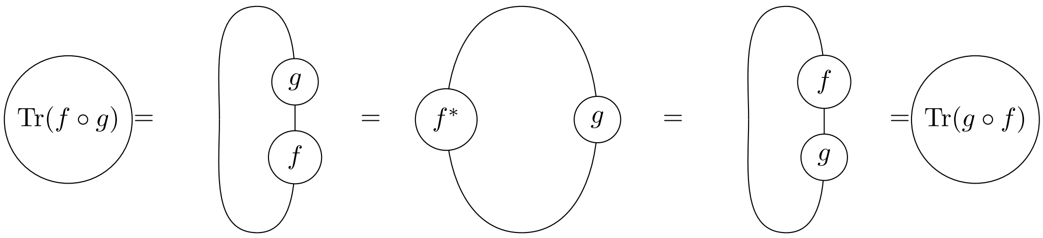
8) これはよく知られた行列の対角和としての定義と一致する. 気になる人は確かめてみよう.

て以下のように書ける.



定理 3.5. $\mathrm{Tr}(f \circ g) = \mathrm{Tr}(g \circ f)$

証明　補題 3.1,3.3 と順に用いる.



□

4　まとめ

この文章では string diagram の定義, 具体例, そして数学への応用を見てきた. ここまで読んできた読者なら string diagram の応用範囲が非常に広いこと, そして直感的な道具として非常に優秀なことを感じていただけただろう.

この文章を書いた (そして都数の合宿で発表した) のは当然 string diagram を布教するためであるが, これは string diagram の存在意義を鑑みれば非常に重要なことである. 最初に述べたように string diagram は, 単なる面白概念ではなく非常に広範な学問分野を繋ぐ架け橋となりうる. しかし現状では残念ながら string diagram がその有用性に見合った注目を集めているとは言いがたい. そこで読者の皆さんはそれぞれの分野で出会った「ネットワーク」の解析に積極的に string diagram を用いて欲しいのである. それはあなたの理解を助けるだけでなく, 科学の統一という大きな夢の小さな一歩にもなるだろう.

参考文献

[1] Brendan Fong, David I Spivak, *SevenSketchesinCompositionality : AnInvitationtoAppliedCategoryTheory*, 2018. https://arxiv.org/pdf/1803.05316.pdf

[2] Brendan Fong, David I Spivak『活躍する圏論』共立出版, 2023.

[3] 32842327 『【応用圏論】回路もフローチャートも数学で！図式と圏論のハナシ』,2023. https://www.youtube.com/watch?v=r9DKJ6F1bBw

[4] John C Baez, $NetworkTheory$, 2014. https://math.ucr.edu/home/baez/networks_oxford/

[5] Chris Heunen, Jamie Vicary, 『圏論的量子力学』川辺治之訳, 森北出版, 2021.

[6] S Maclane 『圏論の基礎』(三好　博之, 高木　理 訳), 丸善出版, 2012.

[7] 西郷甲矢人『圏論の地平線』, 技術評論社, 2022.