位相空間論は" 間違っている"

haru/

この pdf では位相空間論の" 間違い" を指摘し, それを自然に解決する枠組みである type theory を紹介する. なお" 間違い" というのは決して論理的な誤りがあるということを主張しているのではなく, より望ましい定式化があるのに現実はそうなっていないということである.

この pdf に対する疑問や誤りの指摘等は`@haru_mathphys` まで.

1 問題点

以下の命題は位相空間の間の連続写像の正当性を示す最も重要な根拠の一つと言えるだろう.

定理 1.1. $(X, d), (Y, d')$ を距離空間,$f\colon X \to Y$ を (集合としての) 写像とする. このとき $1 \Leftrightarrow 2$.

1. f は距離空間の写像として連続. すなわち $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \forall x \in X, d(f(x), f(y)) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$
2. X, Y に距離から誘導される位相構造を入れたとき,f は位相空間の間の写像として連続.

証明 この pdf においては $1 \Leftarrow 2$ は不要なので $1 \Rightarrow 2$ のみ示す.Y の開集合 U を任意に取る.$V := f^{-1}(U)$ が開集合であることを示せば良い.$x \in V$ を任意に取る.$f(x) \in U$ であり, 距離構造に誘導される位相の定義からある ϵ が存在し,$B(f(x), \epsilon) \subseteq U$. また 2 よりある δ が存在し $B(x, \delta) \subseteq B(f(x), \epsilon)$.$\underline{\text{従って関数 } X \to \mathcal{P}(X)\colon x \mapsto B(x, \delta(x, \epsilon_x)) \text{ がとれ}}$, 各 $B(x, \delta(x, \epsilon_x))$ は開集合かつ x を含み,U に包まれる. 従って $U = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta(x, \epsilon_x))$ と書け, 開集合である. □

ここで選択公理を用いた部分に下線を引いた. この証明は選択公理を使っているが, しかし実は多くの具体的な関数に対しては二つの同値性を選択公理なしで言えるのである[1).]

ポイントは多くの関数において, 関数の連続性の証明のときに関数 $\delta(x, \epsilon)$ を具体的に構成しているということである.

例えば

1) 実は証明を工夫すれば選択公理なしでこの命題を示せる. しかし以下で言いたいことは選択公理なしで同じ証明が回せるということである.

- 定数写像：$\delta(x,\epsilon)=1$ と取れる.
- 恒等写像：$\delta(x,\epsilon)=\epsilon$ と取れる.
- 和：f に対して $\delta(x,\epsilon)$,g に対して $\delta'(x,\epsilon)$ が取れる時,$f+g$ に対して $\delta(x,\epsilon)+\delta'(x,\epsilon)$ が取れる.
- 積：f に対して $\delta(x,\epsilon)$,g に対して $\delta'(x,\epsilon)$ が取れる時,fg に対して $\delta(x,\epsilon)|g(x)|+\delta(x,\epsilon)\delta'(x,\epsilon)+|f(x)|\delta'(x,\epsilon)$ が取れる.
- 多項式：上から従う.

など. 他にも合成関数や指数関数などについても同じことが言える.

言い換えれば多くの重要な応用の上では選択公理を必要としないが, 一般論を展開する上では選択公理が必要になっているのである. これは選択公理を認める認めないという議論を置いておいても奇妙な状況であると言えよう.

2　解決編

上での観察から問題点は連続性の証明において構成した関数 $\delta(x,\epsilon)$ を忘れてしまっていることにあると言えそうである. そこで距離空間の間の写像が連続であることの定義を以下のように修正してみよう.

定義 2.1. $(X,d),(Y,d')$ を距離空間,$f\colon X\to Y$ を (集合としての) 写像とする. さらに $ev\colon X\times\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ も写像[2]とする. このとき組 (f,ev) が連続とは $\forall x,y\in X,\forall\epsilon\in\mathbb{R}_{>0},d(x,y)<\epsilon\Rightarrow d'(f(x),f(y))<ev(x,\epsilon)$ であることを言う

この定義に関して以下のことがわかる

- 上にあげた関数達は全てこの意味で連続関数である.
- さらにこの定義は選択公理のもとで通常の連続関数の定義と同値である[3].
- ev を使って関数 $X\to\mathcal{P}(X)\colon x\mapsto B(x,\delta(x,\epsilon_x))$ が具体的に構成できるため, この定義において定理 1.1 を選択公理なしで証明できる.

つまり距離空間の間の連続写像の定義を少し変えることで問題を解決できるのである！

定義 2.1 のポイントは距離空間の間の写像の連続性がどのように証明されたかを覚えておくと言うことにある. さらに考えを発展させて, 現代では一般に証明を数学的なオブジェクトとして扱うと言う思想がある[4]. この思想を自然に実現するのが type theory である.

---

2) 以下の定義を見ればわかるように ev は δ で ϵ を評価 (evaluate) するための関数なのでこのように名前をつけた. この名前 (というかそもそもこの意味の連続関数の定義自体) はこの pdf だけのものである.

3) 実際には関数 ev の情報が増えている.

4) これを proof relevant な数学と言う.

3 Type theory

type theory における基本的な要素は型とその項である. 直感的には型とは命題と集合の共通の一般化で, その項はその証明及び元の一般化である.

型 A	集合 A	命題 A
項 a	元 a	証明 a
$a\colon A$	aはAに属する	a は A の証明である

さらに type theory には type から別の type を作る規則 (type constructor) があり, これと述語論理および集合論との対応は以下のようになっている.

型	集合	命題
$A \times B$	$A \times B$	$A \wedge B$
$A + B$	$A + B$	$A \vee B$
$A \times B$	$A \times B$	$A \wedge B$
$A \to B$	$A \to B$	$A \wedge B$
$\Sigma_{x:A} B_x$	$\bigsqcup_{x \in A} B_x$	$\exists x \in A, B(x)$
$\Pi_{x:A} B_x$	$\Pi_{x:A} B_x$	$\forall x \in A, B(x)$
1	$\{*\}$	$\top$
0	$\varnothing$	$\perp$

この対応を用いて距離空間及び連続写像の定義を型理論に移植することができる.

例 3.1. 距離空間は (集合の一般化としての) 型 X と (写像の一般化としての) 型 $X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ の項 d 及び,(命題としての) 型 $(\Pi_{x:X} d(x,x) = 0) \times (\Pi_{x,y:X} d(x,y) = d(y,x)) \times (\Pi_{x,y,z:X} d(x,y) + d(y,z) < d(x,z))$ の項 w の組となる.

例 3.2. $(X, d, w), (Y, d', w')$ を距離空間,$f\colon X \to Y$ とする.f が連続写像であると言う命題は以下の型として表現され, 連続写像とは (写像としての) 項 f と (証明としての) 項 ev のペアになる. $\Pi_{x:X} \Pi_{\epsilon:\mathbb{R}_{>0}} \Sigma_{\delta:\mathbb{R}_{>0}} \Pi_{y:X} d(f(x), f(y)) < \delta \to d(x,y) < \epsilon$

ここで注目したいのは ev を table の型と集合の対応で翻訳するとちょうど定義 2.1 の ev に対応していると言う事実である[5]. すなわち型理論において ϵ-δ 論法を作ると自然に定義 2.1 になるので

5) $d(x,y) + d(y,z), d(x,y) < \epsilon, \mathbb{R}_{\geq 0}$ などは説明していないが, 対応する型を構成でき, 対応表を使ってちょうど古典的なものと対応することがわかる

ある！

脱線：定義 2.1 を用いると一様連続関数の定義は ev が x, y に依存しないこととして簡単に述べられる. この単純化は証明の内容を覚えている分だけ単純に使える道具 (この場合は ev) が多いと言う事実に基づいている.

4 文献紹介

最後に関連する文献を紹介してこの pdf を終わりにする.

1. Hott book[?]：type theory の内, " 等号とは何か" についての深い考察から生まれたのが Homotopy Type Theory であり, ホモトピー論との衝撃的なつながりが発見されている. この本は数学の基礎を Homotopy type theory に置き換えてしまいその中で数学をやろうという野心的な試みの元に書かれた本である. 前半は Homotopy type theory の解説, 後半は集合論, 圏論, ホモトピー論などへの応用が書かれている.

2. Introduction to Homotopy Type Theory[?]：上の Hott book は type theory を informal に (すなわち普段の我々の ZFC に対する態度と同じように)type theory を扱っているのに対し, こちらは formal に書かれているので, 人によってはこちらの方が読みやすいだろう. Hott book と合わせて Hott の入門書の二大巨頭.

3. Using the internal language of toposes in algebraic geometry[?]：スキームは自然にトポスとその上の環と思うことができる. そしてトポスがあれば対応する type theory (internal language) を考えることができ, internal language においてスキームは通常の環のように振る舞う. このことを利用して代数幾何を簡単に書き直そうというのがこの論文である.

4. Homotopy type theory: the logic of space[?]：∞-topos と Hott の対応について非常にわかりやすく書かれている. 圏論に触れたことある人には Hott の入門としてもおすすめ.

5. Brouwer's fixed-point theorem in real-cohesive homotopy type theory[?]：上と同じ著者の論文で,modality を Hott の上にどのように実現するかということを論じている. 応用としてブラウアーの不動点定理を Hott パワーを使って示す.

6. differential geometry in a cohesive infinity-topos[?]：微分幾何は実はより広く (cohesive) topos の上に一般化でき, これを使って様々な現象に統一的な視点を与えることができる. この論文は数理物理への応用に重きを置いているため, 物理に興味がある人にもおすすめ.

7. A topos-theoretic view of difference algebra[?]：差分環上の代数幾何という分野があり, この論文以前には理論が ad hoc に作られている節があったようである. この論文は topos internal lnguage をうまく使うことで良い代数幾何の一般化を作った.

参考文献

[1] The Univalent Foundations Program. (2013). Homotopy Type Theory:Univalent Foundations of Mathematics. Institute for Advanced Study. https://homotopytypetheory.org/book.

[2] Rijke, E. (2022) Introduction to Homotopy Type Theory. https://arxiv.org/abs/2212.11082

[3] Blechschmidt, I. (2021). Using the internal language of toposes in algebraic geometry. https://arxiv.org/abs/2111.03685.

[4] Shulman, M. (2017). Homotopy type theory: the logic of space. https://arxiv.org/abs/1703.03007.

[5] Shuman, M. (2015). Brouwer’s fixed-point theorem in real-cohesive homotopy type theory. https://arxiv.org/abs/1509.07584.

[6] Schreiber, U. (2013). Differential cohomology in a cohesive infinity-topos. https://arxiv.org/abs/1310.7930

[7] Tomasic, I. (2020). A topos-theoretic view of difference algebra. https://arxiv.org/abs/2001.09075.