∞-圏における Dold Kan 対応

豊田陽基

この pdf の目標は定理 3.2 を示すことである.

1　安定 ∞-圏の特徴づけ

定義 1.1. ∞-圏 C が安定であるとは以下の条件を満たすこと.

- 0 対象をもつ
- 任意の fiber および cofiber をもつ
- 任意の図式 $(\Delta_1)^2 \to C$ が fiber 図式 $\Leftrightarrow$ cofiber 図式

補題 1.2. 安定 ∞-圏 C と ∞-圏 J があり, C は J-余極限を持つとする. この時図式 $\bar{\alpha} : \Delta_1 \times J^{\triangleright} \to C$ を $\bar{p}$ から $\bar{q}$ への自然変換とする. この時 $\bar{\alpha}$ が余極限図式 $\Leftrightarrow$ $coker(\bar{\alpha})$ が余極限図式.

証明　p, q の余極限図式とその間に誘導される自然変換を $\alpha' : p' \to q'$ とする. この時 $\bar{\alpha}$ が余極限図式 $\Leftrightarrow$ 以下の図式が押し出し.

$$\begin{tikzcd} p'(\infty) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'(\infty)"'] & \bar{p}(\infty) \arrow[d, "\bar{\alpha}(\infty)"] \\ q'(\infty) \arrow[r] & \bar{q}(\infty) \end{tikzcd}$$

これは $coker(\alpha'(\infty)) \to coker(\bar{\alpha}(\infty))$ が同型であることと同値. (ここに安定であることを用いている.)

さらにこれは $coker(\bar{\alpha})$ が余極限図式であることと同値. □

補題 1.3. ∞-圏 C に対して以下は同値.

- 安定
- 有限完備かつ有限余完備かつ任意の図式 $(\Delta_1)^n \to C$ が極限図式 $\Leftrightarrow$ 余極限図式.

証明　後者の時 $n = 0, 2$ とすればよい.

逆に安定な時任意の図式 $(\Delta_1)^n \to C$ が極限図式 $\Leftrightarrow$ 余極限図式であることを n に関する帰納法で示す.

$n = 0$ の時は 0 対象の存在から従う.

$\alpha : (\Delta_1)^{n+1} \to C$ が与えられたとする．これは $(\Delta_1)^n \to C$ における自然変換であると思える．補題 1.2 と帰納法の仮定によって

α が極限図式 $\Leftrightarrow$ $coker(\alpha)$ が極限図式 $\Leftrightarrow$ $ker(\alpha) = coker(\alpha)[-1]$ が余極限図式 $\Leftrightarrow$ $ker(\alpha)$ が余極限図式 $\Leftrightarrow$ α が余極限図式. □

2 simplicial vs cubical

補題 2.1. $(\Delta_1)^n \cong (\Delta^{inj}_{+,\leq n})_{/[n]}$

補題 2.2. $i : (\Delta_1)^n \cong (\Delta^{inj}_{+,\leq n})_{/[n]} \to \Delta_{\leq n}$ は共終.

3 ∞-Dold Kan

補題 3.1. 安定 ∞-圏 C と関手 $F :\ \Delta^{op}_{+,\leq n} \to C$ を取る．この時以下は同値.

- F は $F|_{\Delta^{op}_{\leq n}}$ の左 Kan 拡張
- F は $F|_{\Delta^{op}_{+,\leq n-1}}$ の右 Kan 拡張

証明 補題 1.3, 2.2 および各点 Kan 拡張の公式により

F は $F|_{\Delta^{op}_{\leq n}}$ の左 Kan 拡張 $\Leftrightarrow$ F は余極限図式 $\Leftrightarrow$ $F \circ i$ は余極限図式 $\Leftrightarrow$ $F \circ i$ は極限図式 $\Leftrightarrow$ F は $F|_{\Delta^{op}_{+,\leq n-1}}$ の右 Kan 拡張. □

J を $\Delta^{op}_{+} +_{[-1]=0} \mathbb{N}$ とする.

さらに $i_n :\ \Delta^{op}_{+,\leq n} \to J : [-1] \mapsto n, [k] \mapsto [k] (0 \leq k)$ とする.

定理 3.2 (∞-Dold Kan)**.** 安定 ∞-圏 C に対して以下の G, G' は圏同値.

$$\begin{tikzcd} C^{\Delta^{op}} & C^J \arrow[l] \arrow[r] & C^{\mathbb{N}} \\ & Fun'(J,C) \arrow[ul, "G"] \arrow[u, hook] \arrow[ur, "G'"'] & \end{tikzcd}$$

ただし $Fun'(J, C)$ は $F :\ J \to C$ であって任意の n に対して $F \circ i_n$ が補題 3.1 の同値な条件を満たすものによる充満部分圏である.

従って特に $C^{\Delta^{op}} \cong C^{\mathbb{N}}$.

証明 どちらも補題 3.1 の条件によって図式を一意的に拡張することで逆関手が作れることから従う. □