Q-category 入門

豊田陽基

この pdf では Rosenberg によって導入された Q-category を解説する. 非可換幾何学において通常の site の概念が上手く働かない現象が観察されたことで、site の概念の一般化として導入された. この概念は site より概念的にわかりやすいのみならず, sheaf や代数幾何における formally unramified/smooth/étale map, separated/absolutely closed/proper map, 多様体論における沈めこみ/はめ込み/局所微分同相などさまざまな概念を統一することのできる枠組みである.

このような利点に反して著者にはこの概念が十分に普及していないように見える. そこで (自分の勉強も兼ねて) 宣伝として Q-category の入門 pdf を作成することにした.

1 定義と例

まず Q-category を定義しよう. と言いたいところだが, 圏の双対に関連して微妙かつ非本質的な問題がある. ここでは Q$^{\mathrm{o}}$-category を定義する.

定義 1.1. Q$^{\mathrm{o}}$-category とは圏とその反映的部分圏の組みである.

正確には組み $(A, \bar{A}, G\colon A \to \bar{A}, F\colon \bar{A} \to A)$ であって

- $F \dashv G$
- G は充満忠実

であるようなもの. [1)]

定義としては非常に簡単なのがわかるだろう. いくつか例を見てみよう.

例 1.2. (C, J) を site とする. すなわち各 $x \in C$ に対して $Hom(-,x)\colon C^{op} \to Set$ の subfunctor の族が定まっているとする.

$\hat{C} = Set^{C^{op}}$ とする.

topology のデータは J に属するモノ射 $S \rightarrowtail Hom(-,x)$ を対象とする充満部分圏 $W \hookrightarrow \hat{C}^2$ のデータと対応する. ただし $2 = \{s \to t\}$ である.

ここで $G\colon C \to W; x \mapsto id_{Hom(-,x)}, F\colon W \to C; (S \rightarrowtail Hom(-,x)) \mapsto x$ として定義すればこれは Q$^{\mathrm{o}}$-category である.

例 1.3. $A = fpAff$ を有限表示アフィンスキームの圏 (i.e. $\mathbb{Z}$ 上有限表示な環の圏の双対) とする.

1) $(A^{op}, \bar{A}^{op}, G^{op}, F^{op})$ が Q$^{\mathrm{o}}$-category であるとき $(A, \bar{A}, G, F)$ を Q-category という.

また $\bar{A}=fpAff_{inf}$ を $fpAff^2$ の kernel が nilpotent であるような射からなる充満部分圏とする.

さらに $G\colon fpAff\to fpAff_{inf}; R\mapsto id_R, F\colon fpAff_{inf}\to fpAff; (f\colon R_1\to R_2)\mapsto R_2$ として定義すればこれは Q°-category である.

例 1.4. $A=fpAff$ を有限表示アフィンスキームの圏 (i.e. $\mathbb{Z}$ 上有限表示な環の圏の双対) とする. また $\bar{A}=fpAff_{lim}$ を $fpAff^2$ の恒等射または付置環から商体への包含 (の双対) であるような射からなる充満部分圏とする.

さらに $G\colon fpAff\to fpAff_{lim}; R\mapsto id_R, F\colon fpAff_{lim}\to fpAff; (f\colon R_1\to R_2)\mapsto R_2$ として定義すればこれは Q°-category である.

勘の良い読者はここまでの全ての例が同じパターンに沿っていることに気づいたかもしれない. 実際以下の二つの補題を組み合わせることによってたくさんの Q°-category が作れる.

補題 1.5. C を圏とする. $id\to C\to C^2; x\to id_x, dom\colon C^2\to C; (f\colon x\to y)\mapsto x, cod\colon C^2\to C; (f\colon x\to y)\mapsto y$ とすると (C,C^2,id,cod) は Q°-category である.

補題 1.6. $(A,\bar{A},G\colon A\to\bar{A},F\colon\bar{A}\to A)$ が Q°-category であるとする. $W\hookrightarrow\bar{A}$ を A の G による像を含むような $\bar{A}$ の充満部分圏とする. この時 $G'\colon A\to W; x\mapsto G(x), F'\colon W\to A; y\mapsto F(y)$ によって (A,W,G',F') は Q°-category を成す.

2 Q°-category 上の層

さて, site の一般化ができたら次はその上の層の圏を構成したくなるだろう.

まず (記号の導入を含めて) 前層に関して少し復習しよう.

記号 2.1. 圏 C に対して $\hat{C}=Set^{C^{op}}$ とする.

関手 $F\colon C\to D$ があれば $F^*=Lan_{よ_C}(よ_D\circ F)\colon\hat{C}\rightleftharpoons\hat{D}\colon F_*=(-\circ F)$ によって随伴 $F_*\dashv F^*$ が構成できる. さらに F_* は有限極限を保つ.

定義 2.2. $(A,\bar{A},G\colon A\to\bar{A},F\colon\bar{A}\to A)$ が Q°-category であるとする.

この時 $\hat{A}$ と $\hat{\bar{A}}$ の間に随伴の列 $G^*\dashv G_*=F^*\dashv F_*$ が構成できる. 以下この状況において $G^*=F_!$ と書くことにする.

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \arrow[r, bend left, "F_!=G^*"] & \hat{\bar{A}} \arrow[l, "F^*=G_*"'] \arrow[l, bend left, "F_*"] \end{tikzcd}$$

特に Q°-category として site から作ったものを取った時を考えると, $(\hat{A},\hat{\bar{A}},\hat{G},\hat{F})$ は前層圏と topology の情報を持っている. そこでこの上で層の概念を定義したくなる. 実はこれは以下のように達成できる.

定義 2.3. $(A,\bar{A},G\colon A\to\bar{A},F\colon\bar{A}\to A)$ を Q°-category とする.

この時 $f\colon X\to Y\in\hat{A}$ が formally étale/smooth/unramified であるとは以下の図式に対応する $F_*(X)\to F_!(X)\times_{F_!(Y)}F_*(Y)$ が iso/epi/mono であること.

$$\begin{tikzcd} F_!(X) \arrow[r] \arrow[d] & F_!(Y) \arrow[d] \\ F_*(X) \arrow[r] & F_*(Y) \end{tikzcd}$$

さらに $X \in \hat{A}$ が sheaf/mono presheaf/epi presheaf とは $X \to 1$ が formally étale/unramified/smooth であること. i.e. $F_!(X) \to F^*(X)$ が iso/mono/epi であること.

これが古典的な層の概念を再現することを見てみよう.

例 2.4. **??**の状況で考える. まず $F_! = G_* = Lan_{よ_A}(よ_{\hat{A}} \circ G)$ を各点 Kan 拡張の公式によって計算しよう.

$F_!(X)(x,R) = colim_{V \in (G \downarrow (x,R))} X(V)$ また $F_*(X)(x,R) = (X \circ F)(x,R)$ である.

従って比較射は $colim_{V \in (G \downarrow (x,R))} X(V) \to (X \circ F)(x,R)$ となり, これが同型であるということは古典的な意味で層であるということである.

さらに別の例を見てみよう.

例 2.5. **??**の状況で考える. この時 G はさらに右随伴 $H\colon fpAff_{inf} \to fpAff; (f\colon R_1 \to R_2) \mapsto R_1$ を持ち, 従って $F_! = (- \circ H)$ である.

従って $f\colon X \to Y \in A$ に対して比較射は $X(R_2) \to X(R_1) \times_{Y(R_1)} Y(R_2)$ となる. 米田の補題から自然に $X(R) \cong Hom_{\hat{A}}(よ_R, X)$ であるから, これが iso/epi/mono であるのは以下の正方図式に対してドットで表された lift が一意的に/少なくとも一つ/高々一つ存在することと同値である.

$$\begin{tikzcd} R_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ R_2 \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

これは f が scheme の射として formally étale/smooth/separated であることと同値.

例 2.6. **??**の状況で考える. 一つ前の例と同じで G が codomain を返す右随伴を持つので $f\colon X \to Y$ が formally étale/smooth/unramified であることは恒等射または付置環から商体への包含 (の双対) であるような任意の射に対して lift 性を持つことと同値. 恒等射に対しては常に唯一の lift が存在するので, これは付置環から商体への包含 (の双対) についての lift 性と同値.

従って付置判定法から以下が言える.[2)]

- スキームの射が絶対閉 iff (一般化された意味で)formally smooth かつ quasi-compact
- スキームの射が分離 iff (一般化された意味で)formally unramified かつ quasi-separated
- スキームの射が固有 iff (一般化された意味で)formally étale かつ quasi-compact, quasi-separated, locally of finite type

note 2.7. スキームの射が局所有限型/表示であることは一般の topos に通用するやり方で一般化することができる. 一般に formally étale/smooth/unramified かつこの意味で有限な射を étale/smooth/unramified といい, これは古典的な étale/smooth/unramified map を再現する. さらに固有射は étale かつ quasi-compact, quasi-separated ということができる.

また, 固有射の例を見た読者の中で quasi-compact/quasi-separated の条件も同じようにある

2) 実はスキームの射がこの例を見ると quasi-compact, quasi-

Q^o-category の formally smooth/unramified の条件として書けないか疑問に思った方もいるかもしれない. それは著者も疑問に思っているので何か知っている/思いついた方がいれば是非教えてほしい.

3 sheafification

余裕があれば書く

4 Q-category の先

??は topos とその上の随伴の組み $H \rightleftarrows H_{th}$ が存在すれば意味をもつ. 実はこのような例で Q^o-category からは定義されない (正確にはもっとも簡単な定義においてはそのような定義ではない) ような面白いものが synthetic 微分幾何において存在する.

この例を理解するのには前提知識がいくらか必要になるが, 結論自体は初等的な微分幾何を知っていれば理解できる : 局所微分同相/はめ込み/沈めこみを formally étale/unramified/smooth map として特徴づけることができる.

まずは synthetic 微分幾何の門を開こう.

4.1 synthetic 微分幾何

note 4.1. 先に言い訳しておくと, この節以降は分量が多いので説明が雑になりがちである.

定義 4.2. $A = Cart$ を対象を有限次元ユークリッド空間, 射を C^∞-map とする圏とする.

C^∞-代数とは関手 $Cart \to Set$ であって有限積を保つものである.

note 4.3. この初見ではよくわからない概念に" 代数" という名前がついている理由を説明しよう.

$F : Cart \to Set$ を C^∞-代数としよう. まず $F(\mathbb{R}^n) \cong F(\mathbb{R})^n$ であるから対象の行き先は $F(\mathbb{R})$ のみによって決まる. そこで $F(\mathbb{R})$ を台集合と呼ぶことにしよう.

結論から言えばこの集合の上には自然な $\mathbb{R}$-代数構造が入る.

そのためにはまず, $0 : \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}; * \mapsto 0, 1 : \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}; * \mapsto 1, + : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x+y, \times : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto x \times y, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto rx$ が C^∞ 関数であることを確かめよう.

すると対応して台集合の上の演算 $F(0) : F(\mathbb{R}^0) \to F(\mathbb{R}), F(1) : F(\mathbb{R}^0) \to F(\mathbb{R}), F(+) : F(\mathbb{R}^2) \to F(\mathbb{R}), F(\times) : F(\mathbb{R}^2) \to F(\mathbb{R}), F(r) : F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$ が定まる. もとの $0, 1, +, \times, r$ は $\mathbb{R}$-代数の適切な可換図式 (交換律, 単位律など) を全て満たし, 関手性から $F(\mathbb{R})$ 上の演算も全ての可換図式を満たす. これによって $F(\mathbb{R})$ に自然な $\mathbb{R}$-代数構造が入った.[3)]

逆に C^∞-代数は通常の $\mathbb{R}$-代数構造に加えて $F(\mathbb{R})$ 上には $(x, y) \mapsto sin(cos(x)y^2)$ のような (奇怪な?)C^∞-演算が入っているような代数系と思うことができる.

簡単に見つかる重要な例は以下のようなものである.

---

3) 以上の構成は F について関手的であり, C^∞-代数の圏から $\mathbb{R}$-代数の圏への関手を構成できたことになる.

例 4.4. 多様体 X に対して $\bar{X}: Cart \to Set; \mathbb{R}^n \mapsto C^\infty(X, \mathbb{R}^n)$ は C^∞-代数.

実は多様体 X に対して $C^\infty(X)$ を構成するという操作は多様体やその開集合, 閉集合の情報をよく保持し, ちょうど $Spec$ と環の関係のようになっている. それを表すのが次の定理である.

定理 4.5. Mfd を多様体の圏, $C^\infty - Alg$ を C^∞-代数の圏とする.

1. $Mfd^{op} \to C^\infty - Alg; X \to C^\infty(X)$ は充満忠実.[4)]
2. X がパラコンパクト, $h: X \to \mathbb{R}$ は 0 を正則点にもち Y が対応する多様体であるとする. この時 $C^\infty(X)/(h) \cong C^\infty(Y)$. ただし $C^\infty(X)/(h)$ は $\mathbb{R}$-代数として $C^\infty(X)$ を (h) の生成するイデアルで割ったもの (に自然な C^∞-代数の構造を入れたもの) である.
3. X がパラコンパクト, $h: X \to \mathbb{R}$, $Y = h^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ とする.[5)] この時 $C^\infty(X)[h^{-1}] \cong C^\infty(Y)$. ただし $C^\infty(X)[h^{-1}]$ は $C^\infty(X)$ において h を可逆にする普遍的な C^∞-代数.(存在は認めることにする.)
4. (1) の包含写像は transversal な pullback を pullback に送る. i.e. 以下の図式において f, g が Z 上で transversal に交わるならこの図式の像は pullback 図式. $\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$

証明 証明は時間があれば書く. それか synthetic 微分幾何で別の詳しい pdf を書くかもしれない. ... 参照 □

note 4.6. この (1) の結果を用いて C^∞-代数を多様体の一般化とみなすことがある. ただ (1) における関手は反変関手であるので" 空間" としての射と" 代数" としての射は逆向きであることに注意しよう.

このことは代数幾何と状況としてよく似ている.

さらに Q°-category を構成するのに重要な C^∞-代数の別の例は以下のものである.

定義 4.7. V を有限次元 $\mathbb{R}$ ベクトル空間としよう. これに付随した C^∞-代数 $\bar{V}: Cart \to Set$ を以下のように作る.

一般に C^∞-代数の射の行き先は $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の形の射の行き先が決まった時, $f = (f_1, f_2, \dots f_m): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の行き先は積を保つという条件から

4) わざわざ定理の主張に含めることはしないが, 例えばこれは $C^\infty(X) \cong C^\infty(Y)$ ならば $X \cong Y$ であることを含意する.

5) 任意のパラコンパクト多様体において任意の開部分集合はある $h: X \to \mathbb{R}$ に対して $Y = h^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ の形にかける.

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\mathbb{R}) \\
 & & F(\mathbb{R}) \\
F(\mathbb{R}^n) \arrow[uurr, bend left, "F(f_1)"] \arrow[urr, "F(f_2)"] \arrow[drr, bend right, "F(f_m)"'] \arrow[r, dotted, "{(F(f_1),F(f_2),\ldots,F(f_m))}"'] & F(\mathbb{R}^m) \arrow[uur, bend left, "F(\pi_1)"] \arrow[ur, "F(\pi_2)"'] \arrow[dr, "F(\pi_m)"] & \cdots \\
 & & F(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

のように $F(f_i)$ の組みを使って書ける．従って $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の形の射の行き先を決めれば十分.

まず $\bar{V}(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}\oplus V)^n$ とする．次に $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して $\bar{V}(f) : (\mathbb{R}\oplus V)^n \to \mathbb{R}\oplus V; (r_1 \oplus v_1, r_2 \oplus v_2, \ldots r_n \oplus v_n) \mapsto (f_1(r_1, r_2, \ldots r_m) \oplus \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(r_1, r_2, \ldots, r_n)v_i$ とする．これは気持ちとしては V に対しては f の線形近似によって作用するということである.

特に $\bar{\mathbb{R}^n}$ を D^n と書くことにする.

このような形の C^∞-代数のことを infinitesimally thickend point といい[6)], V が n-次元の時 n-次元 infinitesimally thickend point という．この代数が実際に「無限小」であることの気持ちは以下の補題から読み取れる.

補題 4.8. X をパラコンパクト多様体, $f\colon C^\infty(X) \to D^n$ を取る． これに対して $C^\infty(X) \to D^n \to C^\infty(1)$ によって対応する X の点を $x \in X$ としよう.

この時任意の開集合 $x \in U \subset X$ に対して f は $C^\infty(X) \to C^\infty(U) \to D^n$ と一意的に分解する.

証明 U を $h\colon X \to \mathbb{R}$ を用いて $U = h^{-1}(\mathbb{R}^\times)$ と表示しておく.(存在は認める) この時 $C^\infty(U) \cong C^\infty(X)[h^{-1}]$ であるから $f(h)$ が可逆であれば一意的に f を分解する射が延びる.

$f(h) = (h(x), dh) \in \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^n$ と表示しておく．$x \in U = h^{-1}(\mathbb{R}^\times)$, すなわち $h(x) \in \mathbb{R}^\times$ なので, 逆数は $((h(x))^{-1}, -(h(x))^{-2}dh)$ と構成できる. □

??の内容を思い出しつつこの補題を" 空間" 側の言葉に翻訳すると, " 空間" の射 $D^n \to X$ の像は合成 $1 \to D^n \to X$ の無限小近傍に含まれている.

さらに精密なことがわかる：D^1 は無限小のベクトルである.

補題 4.9. C^∞-代数の射の集合 $Hom(\hat{X}, D^1)$ は X の接バンドル TX に一致する.

証明 まず $\phi\colon TX \to Hom(\hat{X}, D^1); (x, v) \mapsto (f \mapsto (f(x), \frac{\partial f}{\partial v}))$ が well-defined であることを確かめよう．確かめるべきことは $f \mapsto (f(x), \frac{\partial f}{\partial v})$ が C^∞-代数の準同型であることである．このためには任意の $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して以下の図式が可換になることが言えれば良い.

6） 実は infinitesimally thickend point には Weil algebra を用いたもっと一般の定義がある．この pdf で扱うのは一次の点である.

$$
\begin{array}{ccc}
Hom(X,\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & (\mathbb{R}\oplus\mathbb{R})^n \\
{\scriptstyle Hom(X,g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\mathbb{R}}(g)} \\
Hom(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
(f_1, f_2, \dots f_n) & \longmapsto & (f_1(x) \oplus \frac{\partial f_1}{\partial v}(f_1(x), \dots f_n(x)), \dots f_n(x) \oplus \frac{\partial f_n}{\partial v}(f_1(x), \dots f_n(x))) \\
\downarrow & & \downarrow \\
g \circ (f_1, f_2, \dots f_n) & \longmapsto & (g(f_1(x), \dots f_n(x)), \Sigma_i \frac{\partial g}{\partial v}(f_1(x), \dots f_n(x)) \frac{\partial f_i}{\partial v})
\end{array}
$$

これの可換性は微分の連鎖律に他ならない.

従って後は逆写像を構成すれば良い.

まず $0 \colon D^1 \to \hat{1}$ を $0(\mathbb{R}) \colon \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \to Hom(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}; (r, v) \mapsto r$ とする. これを用いて $Hom(\hat{X}, D^1) \to Hom(\hat{X}, \hat{1}) \cong X$ を構成できる. この対応によって任意の $\theta \colon Hom(\hat{X}, D^1)$ の元がある $x \in X$ に対して $f \mapsto (f(x), ???)$ という形であることがわかる. 次に接ベクトルの情報を引き出したい.

θ に第二成分への射影を合成した ($\mathbb{R}$ 加群としての) 写像 $\hat{X} \to D^1 \to \mathbb{R}$ を考えると, これは線形かつライプニッツ則を満たす. さらに**??**により, これは x の近傍にしかよらない. 従って多様体論のよく知られた定理によってこれはある x における接ベクトルにおける方向微分に対応する.[7] $\square$

さて, ここまででざっくりとした準備は整ったので話を formally étale map に戻そう.

4.2 synthetic 微分幾何における formally étale map

定義 4.10. $A = Cart$ とする. $\bar{A}$ を $C^\infty - Alg^{op}$ の $C^\infty \oplus \bar{V}$ の形の対象がなす充満部分圏とする.

$G \colon A \to \bar{A}; X \mapsto \hat{X} (= \hat{X} \otimes \bar{0})$, $F \colon \bar{A} \to A; \hat{X} \otimes \bar{V} \mapsto X$ とする.

補題 4.11.
- G は充満忠実
- $G \dashv F$

証明 一つ目は**??**から従う. 二つ目は, 任意の $\hat{X} \otimes \bar{V} \in \bar{A}, Y \in A$ に対して $Hom(F(\hat{X} \otimes \bar{V}), Y) = Hom(X, Y) \cong Hom(\hat{X} \otimes \bar{V}, Y) = Hom(\hat{X} \otimes \bar{V}, \hat{Y})$ を示せば良い. このためには $(0, v) \in \bar{V} = \mathbb{R} \oplus V$ の行き先が 0 しかないことを言えば良い. これは $(0, v)^2 = 0$ であることから従う. $\square$

さらに $A = Cart$ には $\{f_i \colon U_i \to U\}$ が被覆 iff それぞれの f_i が単射開写像かつ $\bigcup_i f_i(U_i) = U$ として site の構造が入る. 同様に $\bar{A}$ にも $\{f_i \colon U_i \times \bar{V}_i \to U \times \bar{V}\}$ が被覆 iff 第一成分に関しては被覆で第二成分に関しては恒等写像として site の構造が入る.

この時 F, G は明らかに被覆を保つ.

従って以下のような topos とその間の随伴の組みが構成できる.

---

7) 多様体論においては接ベクトルを無限小曲線として定義する方法と, 適当な条件を満たす演算子として定義する方法がある. C^∞ 多様体においてこれらは一致してしまうのでこの pdf ではこれらはあまり区別されていないが, 証明から読み取れるように D^1 が直接的に対応するのは後者の意味の接ベクトルである.

$$\begin{tikzcd} Sh(A) \arrow[r, bend left, "G^*"] \arrow[r, bend right, "F_*"'] & Sh(\bar{A}) \arrow[l, "F^*=G_*"'] \end{tikzcd}$$

また，$Mfd \to Sh(A); M \to (\mathbb{R}^n \mapsto C^\infty(\mathbb{R}^n, M))$ は充満忠実なので（認める)，これによって多様体を $Sh(A)$ の元とみなす. 以上の準備のもので以下の定理が示せる.

定理 4.12. 多様体の写像 $f\colon X \to Y$ が局所微分同相/はめ込み/沈めこみであることは formally étale/unramified/smooth であることと同値.

証明 formally étale は以下の図式が pullback であることと同値.

$$\begin{tikzcd} G^*(X) \arrow[r] \arrow[d] & G^*(Y) \arrow[d] \\ F_*(X) \arrow[r] & F_*(Y) \end{tikzcd}$$

さらにこれは任意の $\bar{U} \times D^n \in \bar{A}$ に対して

$$\begin{tikzcd} Hom(\hat{U} \times D^n, G^*(X)) \arrow[r] \arrow[d] & Hom(\hat{U} \times D^n, G^*(Y)) \arrow[d] \\ Hom(\hat{U} \times D^n, F_*(X)) \arrow[r] & Hom(\hat{U} \times D^n, F_*(Y)) \end{tikzcd}$$

が pullback であることと同値. さらに $Hom(\hat{U} \times D^n, F_*(X)) \cong Hom(F^*(\hat{U} \times D^n), X) = Hom(U, X)$, $Hom(\hat{U} \times D^n, G^*(X)) \cong Hom(\hat{U}, [D^n, G^*(X)]) = Hom(F^*(U), [D^n, G^*(X)]) \cong Hom(U, F_*([D^n, G^*(X)]))$

さらに $Hom(U, F_*([D^n, G^*(X)])) \cong Hom(U, TX \times_X TX \ldots TX)$.(最後の $F_*([D^n, G^*(X)]) \cong TX \times_X TX \ldots TX$ は本質的に**??**からと同じだ (と思う) が，ここでは認める.)

よってこれは $Sh(A)$ において

$$\begin{tikzcd} TX \times_X TX \ldots TX \arrow[r] \arrow[d] & TY \times_Y TY \ldots TY \arrow[d] \\ X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

が pullback 図式であることと同値.

埋め込み $Mfd \to Sh(A)$ は taransversal な pullback を保ち反映するので，特に上記の図式を保存し，反映する.

よってこの条件は局所同相であることと同値.

はめ込み/沈めこみに関しても同様に証明できる. □