命題の間の homotopy

haru/

Hausdorff 空間 Y に対して以下の命題を考えよう.

1. 任意の X: compact, $f\colon X \to Y$: 連続 に対し, $f(X)$ は閉集合.
2. 任意の $X \subset Y$: compact 部分空間に対し X は閉集合.

この時 1 と 2 は以下のように同値であることがわかる.

同値性の証明　1 ならば 2. $X \subset Y$: compact 部分空間をとる. 包含写像に対して 1 を適用することで X は閉集合.

2 ならば 1. X: compact, $f\colon X \to Y$: 連続 をとる. この時 $f(X)$ は compact 集合からの連続写像の像なので compact である. 従って $f(X)$ に 2 を適用することで $f(X)$ は閉集合. □

この構成は同値性の証明ではあるが互いに逆になっているとは言えない.

このことを正確に述べるために A を 1 の証明全体の集合, B を 2 の証明全体の集合[1]としよう. この時上の同値性証明は以下のような構成に対応している.

- $R\colon A \to B\colon a \mapsto a$を包含写像$X \subset Y$に適用したもの
- $L\colon B \to A\colon b \mapsto b$を$f(X)$に適用したもの

この時 $R \circ L$ は恒等写像だが $L \circ R$ は恒等写像ではない. 実際 $L \circ R\colon a \mapsto a$を包含$f(X) \subset X$に適用したもの となる. しかし a と aを包含$f(X) \subset X$に適用したもの は cpt の像は cpt という命題によって結局同値である. つまり $L \circ R$ は恒等写像と同値ではあるのである.

この状況をより正確に述べるには A と B に" 証明の同値性" を用いて groupoid の構造を入れると良い. この時以下の定理が成り立つ (とある方法で数学的に正当化できる).

定理　A は上記の構成によって B の retract である. 特に homotopy 同値である. □

このようにして命題を証明を要素とする構造と思って数学の俎上に乗せたものを proof relevant な数学という. 特に Homotopy type theory では命題には (∞-) groupoid の構造が入る.

このような数学は数学基礎論とホモトピー論との衝撃的なつながりを明らかにするだけではなく, 定理証明支援系の開発の基礎としても使われている.

1）　正確な定義は置いておいてお気持ちで考えよう.