# Laboratorio N°1 - Algoritmos Númericos

Cristhofer Parada Salazar
*Departamento de Ingeniería Informática*
*Universidad de Santiago de Chile*, Santiago, Chile
cristhofer.parada@usach.cl

***Resumen*—En este documento se muestran los resultados del Laboratorio N°1 de la asignatura Algoritmos Numéricos. Se muestran los resultados y análisis del método de Newton Multivariable y adicionalmente se muestra los análisis de un gestor el cual a través de distintos parámetros busca la mejor forma de resolver sistema de ecuaciones utilizando uno de los diversos métodos propuestos por la actividad.**

## I. Introducción

En este laboratorio se realizó la solución de ecuaciones lineales mediante distintos métodos numéricos los cuales "... constituyen técnicas mediante las cuales es posible formular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas"[1]. Dichas técnicas son esencialmente algoritmos, por lo que es posible implementar los métodos en computadores, en este laboratorio, estos métodos fueron implementados en el lenguaje de programación Matlab. Como información previa, se advierte al lector que las aproximaciones conseguidas en los resultados dependen de la maquina en la cual se haya hecho el cálculo y del propio método en particular.

Este documento tiene como objetivo mostrar los resultados obtenidos en el laboratorio N°1, en este laboratorio se solicitaron las siguientes actividades:

1. Realizar la implementación mediante Matlab de los métodos numéricos: Newton Multivariable, Gauss Jacobi, Gauss Seidel, LU, Cholesky, QR, LSQR y LSQR-Disperso.
2. Utilizar el Método de Newton Multivariable para la resolución de un sistema de ecuaciones y mostrar los resultados del mínimo error obtenido.
3. Construcción de un gestor paramétrizado que dadas N características sea capaz de utilizar el método numérico más apropiado para el sistema de ecuación entregado.

## II. Metodología

En esta sección se mostrará la metodología que fue usada para la experiencia.

### II-A. *Ecuaciones*

El sistema de ecuaciones no lineales a resolver con el Método de Newton Multivariable es:
$x_1^2 + x_2 - 37 = 0$
$x_1 - X_2^2 - 5 = 0$
$x_1 + x_1 + x_3 - 3 = 0$
$X_{(0)} = (1,1,1)^T$ Para el uso del gestor, se utilizaron 3 distintos tipos de sistemas de ecuaciones, los cuales pueden ser representados en matrices de 289x289, 1089x1089 y 4225x4225. Dichos sistemas pueden ser vistos en este link.

### II-B. *Métodos Numéricos*

Como ha sido mencionado en la introducción, para esta experiencia se hizo uso de los siguientes métodos numéricos:

- Método de Newton Multivariable.
- Método Gauss Jacobi.
- Método Gauss Seidel.
- Método LU.
- Método de Cholesky.
- Método QR.
- Método LSQR.
- Método LSQR-Disperso.

### II-C. *Error*

El error es usado por los algoritmos de cada método, es usado para verificar la exactitud del resultado calculado, cada método implementado tiene una medida del error, las cuales serán presentadas en la sección de resultados.

### II-D. *Tolerancia*

La tolerancia es el error objetivo al que se quiere llegar con un método numérico. Dentro de los algoritmos la tolerancia es usada como la condición de termino y determina que tan exactos serán los resultados. Para esta experiencia de laboratorio, se utilizó una tolerancia de $1{\times}10^{-}10$.

### II-E. *Costo temporal*

El costo temporal es el tiempo que tarda en ejecutarse el método hasta llegar a un resultado. En la implementación del laboratorio se usaron las funciones *tic* y *toc* quienes entregan el tiempo de una operación en segundos.

### II-F. *Costo espacial*

El costo espacial es la cantidad de operaciones que realiza el algoritmo en un método, las operaciones que realiza un algoritmo son operaciones matemáticas como sumas y restas, comparaciones, asignaciones a variables, multiplicaciones , divisiones, llamadas a funciones, etc.
Con el fin de poder medir el costo espacial, se establecieron

ciertas reglas, que tienen que ver con asignarle un costo a cada operación como las mencionadas anteriormente, con el fin que el costo espacial para cada método estará determinado por la suma de todos estos costos al final del algoritmo. En esta regla se puede ver los siguientes casos:

- Sumas y restas / Condiciones y lógica = 1 de costo.
- Multiplicaciones y divisiones = 2 de costo.
- Llamados a funciones = 5 de costo.

### II-G. *Especificaciones técnicas del equipo*

Como fue mencionado en la introducción, uno de los factores influye en los resultados en los métodos numéricos son las limitaciones que vienen dadas por el equipo en el cual se realiza el cálculo, por esto cabe mencionar las especificaciones técnicas en la cual se desarrolla esta experiencia:

- CPU: AMD Ryzen 5 3600.
- RAM: 16 GB @3200MHz CL16-18-18-38.
- OS: Windows 10 Pro.

## III. Resultados

Esta sección presenta los resultados obtenidos en la experiencia de laboratorio.

### III-A. *Resultados Pregunta 1*

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos utilizando el método de Newton Multivariable a través del paso de las iteraciones, mostrando el resultado final al final de la iteración (8).

Tabla I: Tabla de soluciones para el SE

| Iteración | x | y | z |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 2 | 16.0000 | 6.0000 | -19.0000 |
| 3 | 9.0519 | 3.3377 | -9.3896 |
| 4 | 6.4654 | 1.8884 | -5.3538 |
| 5 | 6.0006 | 1.2091 | -4.2097 |
| 6 | 5.9985 | 1.0175 | -4.0160 |
| 7 | 6.0000 | 1.0001 | -4.0001 |
| 8 | 6.0000 | 1.0000 | -4.0000 |

Adicionalmente, se mostrarán los resultados de los errores medidos, para ello se utilizaron los errores normales y los errores absolutos.

Tabla II: Tabla de errores para el SE

| Iteración | Error Normal | Error Absoluto |
|---|---|---|
| 1 | 5.548059082 | 5.548059082 |
| 2 | -18.27375479 | 18.27375479 |
| 3 | -6.182524945 | 6.182524945 |
| 4 | -1.323997568 | 1.323997568 |
| 5 | -0.148917658 | 0.148917658 |
| 6 | -0.01003684 | 0.01003684 |
| 7 | -8.28E-05 | 8.28E-05 |
| 8 | 0 | 5.74E-09 |

### III-B. *Resultados Pregunta 2*

Dado que las matrices eran enormes, la cantidad de resultados obtenidos también lo son, es por ello que se presentaran tiempos y costos operacionales solamente. Los tiempos fueron medidos en segundos.

II-F Costo espacial.

Tabla III: Tabla de tiempos para los distintos métodos

| SE | 289x289 | 1089x1089 | 4225x4225 |
|---|---|---|---|
| Gauss Jacobi | 0.0375 | 3.7230 | 439.6799 |
| Gauss Seidel | 0.0240 | 1.7661 | 232.9140 |
| Cholesky | 0.0662 | 1.1913 | 34.1084 |
| LU | 0.0130 | 0.6477 | 90.1148 |
| QR | 0.0306 | 1.1551 | 212.3430 |
| LSQR | 0.8220 | 10.9341 | 224.5921 |
| LSQR-disperso | 0.7830 | 1.8757 | 6.2691 |

Además del tiempo, también se midió el error presente en las repuestas de cada método, el cual se puede ver en la siguiente tabla.

Tabla IV: Tabla de errores para los distintos métodos

| SE | 289x289 | 1089x1089 | 4225x4225 |
|---|---|---|---|
| Gauss Jacobi | 3.04E-10 | 3.45E-10 | 1.04E-09 |
| Gauss Seidel | 3.04E-10 | 3.45E-10 | 1.04E-09 |
| Cholesky | 8.04E-10 | 1.72E-09 | 2.81E-09 |
| LU | 7.00E-10 | 1.30E-09 | 4.19E-09 |
| QR | 5.74E-09 | 6.39E-09 | 1.37E-08 |
| LSQR | 1.42E-09 | 5.39E-09 | 2.11E-08 |
| LSQR-disperso | 1.10E-09 | 4.83E-09 | 2.43E-08 |

Finalmente, se quiere mostrar la tabla con los costos espaciales que tuvo cada método, recordar que estos están especificados en la sección.

Tabla V: Tabla de costos espaciales para los métodos

| SE | 289x289 | 1089x1089 | 4225x4225 |
|---|---|---|---|
| Gauss Jacobi | 7.83E+07 | 4.26E+09 | 2.41E+11 |
| Gauss Seidel | 4.00E+07 | 2.15E+09 | 1.21E+11 |
| Cholesky | 3.36E+05 | 4.75E+06 | 7.14E+07 |
| LU | 2.56E+06 | 5.22E+07 | 9.60E+08 |
| QR | 3.77E+05 | 5.34E+06 | 8.03E+07 |
| LSQR | 8.20E+05 | 8.20E+05 | 8.20E+05 |
| LSQR-disperso | 8.20E+05 | 8.20E+05 | 8.20E+05 |

## IV. Análisis de resultados

En torno a los resultados obtenidos en la pregunta 1, se consideran que son acorde a los esperados por el profesor, puesto que logran llegar a los resultados esperados obteniendo un error bastante diminuto, lo que se esperaba con la tolerancia dada.

Respecto a la pregunta 2, en este caso hubo un trabajo más de investigación que de aplicar métodos, puesto que los métodos eran accesibles para todos, pero investigar de qué manera realizar el gestor era la parte complicada de esto. El gestor propuesto cumple con una determinada serie de preguntas en torno a la matriz que se desea trabajar, como si es simétrica, simétrica positiva o no, grado de dispersión de la matriz y si es diagonal dominante. Pero, considerando que las matrices propuestas eran todas simétricas positivas, se tomaron los datos obtenidos referentes al tiempo y referentes al error, para realizar una especie de ranking de los métodos en donde se evalúa este ranking por medio de intervalos, en donde cada intervalo correspondería a un método determinado y la elección del ranking es tomada por el programa como una entrada siendo esta un número entero entre 1 y 101, donde más cercano al 1 corresponde un método que tendrá un menor error, es decir mayor eficacia; en cambio si se toma un valor cercano a 100, se utilizará un método que sea más eficiente. De esta forma, midiendo costos temporales utilizando el gestor junto con el método y el método por separado, al utilizar la matriz de 289x289 y con una entrada de 100 (es decir, priorizando el tiempo) el método junto con el gestor nos da un tiempo de 0.058333 segundos, y tomando los datos de los costos temporales mostrados en II-F, podemos ver que al usar el método LU por si solo este tiene un costo temporal de 0.0130 segundos, por lo tanto el gestor tiene un costo temporal de 0.045333 segundos lo con matrices más grandes se hace indistinguible.

## V. Conclusiones

Para concluir, en esta experiencia de laboratorio es destacable el uso de distintos métodos para resolver matrices simétricas positivas de distinto largo y con ello hacer mediciones de tiempo y error para esclarecer de manera concisa cuando es adecuado usar un método dependiendo del criterio que se tenga. A grandes rasgos se pudo ver que el método de Gauss Jacobi tuvo el menor error a lo largo de las matrices vistas y para el caso de las matrices menores a 1089 se vio que el método LU es el que tuvo menor tiempo de ejecución. No así para las matrices que tienen un largo más grande, que en ese caso el método que tiene un menor tiempo es el LSQR-disperso.

## Referencias

[1] S. C. Chapra, R. P. Canale, R. S. G. Ruiz, V. H. I. Mercado, E. M. Díaz, and G. E. Benites, *Métodos numéricos para ingenieros*. McGraw-Hill, 2011, vol. 5.