Hausdorff 測度

埼玉大学理学部数学科 4 年 佐伯滉耶

2013/06/09

目次

1 INTRODUCTION

$\mathbb{R}^2$ 内にヒモがおいてあるという状況を考えてみます. ヒモを曲線とみなせば, このヒモは 1 次元的な長さをもっています. しかし, このヒモの面積を考えてみると, 厳密な証明はしませんが, 面積 0 になります. 1 次元の Lebesgue 測度で長さを測ろうと考えるかもしれませんが, ヒモがまっすぐではない場合は長さを測ることができません. ヒモには長さがあるのにそれを測れないのでは困ります. こういったヒモのような 2 次元内にある 1 次元的なものの大きさを測れるようなものがほしいですね. 今回はこの要求にこたえてくれる測度を紹介しようと思います.

2 Lebesgue 測度

ここでは Lebesgue 測度について復習します. 今回は $\mathbb{R}^2$ で話をすすめます. Lebesgue 測度について勉強されたことのない人は参考文献 [1],[2] などを読んでみてください. 今回は Caratheodory による測度の特徴づけを Lebesgue 測度の定義として採用します. この定義は測度論になれればごくごく自然な定義であるように感じますが, 初めて学ぶ人は参考文献 [1] の定義を参考にするとよいと思います.

DEFINITION 1. $a, b, l \in \mathbb{R}^n$ $(l > 0)$ とする.

$$Q = [a, a + l) \times [b, b + l)$$

を基本正方形といい, この基本正方形に対して

$$|Q| \equiv l^2$$

と定める. これを基本正方形 Q の面積という.

次に Lebesgue 外測度を定義します. これは測りたい集合 A を基本正方形の和集合で近似して, 基本正方形の面積を足し合わせることで A の面積を近似しようというものです.

DEFINITION 2. $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathcal{L}^2(A) \equiv \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \big| Q_k \text{は基本正方形で } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \text{を満たす}\} \tag{1}$$

と定める. $\mathcal{L}^2(A)$ を A の Lebesgue 外測度という.

次に Lebesgue 可測集合についての定義をします．可測集合の測度は集合を図形とみなしたときの面積に対応するものです．

DEFINITION 3. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする.A が Lebesgue 可測であるとは, 任意の $B \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathcal{L}^2(B) = \mathcal{L}^2(B \cap A) + \mathcal{L}^2(B \setminus A) \tag{2}$$

をみたすことをいう．また

$$\mathfrak{M} \equiv \{A \subset \mathbb{R}^2 | A \text{ は Lebesgue 可測 }\}$$

と定める．

Lebesgue 外測度の定義から任意の $A, B \subset \mathbb{R}^2$ に対して $\mathcal{L}^2(A) \leq \mathcal{L}^2(A \cap B) + \mathcal{L}^2(A \setminus B)$ が成り立つことがわかります. したがって集合 A が可測であるかどうかを確かめるには逆向きの不等式さえ示せればよいことがわかります. これは単純ですが非常に有用なものです.

次に Lebesgue 外測度の性質をみていきます. ただし $\mathcal{L}^2(\phi) = 0$ とします.

THEOREM 1. μ を Lebesgue 外測度とすると以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{L}^2(\phi) = 0$

(2) $A_i \in \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2, \cdots)$ とすると

$$\mathcal{L}^2(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_i)$$

が成り立つ.

Proof. (2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_i) = \infty$ のときは定理の不等式は必ず成り立つので, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_i) < \infty$ とします.

まず任意に $\varepsilon > 0$ をとります．Lebesgue 外測度の定義から各 A_i に対してこれを覆う基本正方形の列 $\{Q_k^{(i)}\}$ で

$$\mathcal{L}^2(A_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k^{(i)}| \leq \mathcal{L}^2(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^i} \tag{3}$$

となるものがとれます．i について和をとると

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k^{(i)}$$

となるので, 再び Lebesgue 外測度の定義から

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) &\le \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k^{(i)}| \\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\bigl(\mu(A_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\bigr) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^2(A_i)+\varepsilon\end{aligned}$$

を得ます. ただし 2 行目は (3) を用いました. さて $\varepsilon > 0$ は任意でしたので

$$\mathcal{L}^2(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^2(A_i)$$

となります. これで定理が示されたことになります. □

Lebesgue 外測度は定義から $A \subset B$ としたときに $\mathcal{L}^2(A) \le \mathcal{L}^2(B)$ となることが簡単にわかります. つまり Lebesgue 外測度には単調性があります. この単調性を考えると上の定理はごく自然なものだと感じられると思います. 図をかいてみるとさらにわかると思います. 次にいくつか知っておくべき性質と定理を下に挙げておきます.

THEOREM 2. (Lebesgue 外測度の代数的性質)

1. $0 \le \mathcal{L}^2(A) \le \infty$, $\mathcal{L}^2(\phi) = 0$
2. $A \subset B$ ならば $\mathcal{L}^2(A) \le \mathcal{L}^2(B)$
3. $\mathcal{L}^2(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty}\mathcal{L}^2(A_i)$

この定理は既に示されたことか, 定義から簡単にわかることなので証明は省略します.

THEOREM 3. (Lebesgue 可測集合の性質)

1. ϕ ,$\mathbb{R}^2$ $\in \mathfrak{M}$
2. $A \in \mathfrak{M}$ ならば $X \setminus A \in \mathfrak{M}$
3. $A_i \in \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ ならば $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i \in \mathfrak{M}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i \in \mathfrak{M}$

THEOREM 4. (完全加法性定理)

$A_i \in \mathfrak{M}$, $A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j)$ とする．このとき $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{M}$ であり

$$\mathcal{L}^2(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^2(A_i)$$

が成り立つ.

THEOREM 5. $A \subset \mathbb{R}^2$ を Lebesgue 可測集合とする.Lebesgue 可測集合は平行移動, 回転を施しても Lebesgue 可測であり, さらに Lebesgue 測度は変化しない.

他にも Lebesgue 測度に関する良い性質や定理はたくさんありますが, 今回の目標とは異なるので省略します．しかし, 最後に 1 つだけ, 後の話のために定理を証明します.

THEOREM 6. $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ を C^1 級曲線で, $c(t) = (x_1(t), x_2(t))$ とあらわされるものとする．この曲線の軌跡

$$\Gamma = \{c(t) | t \in [0, 1]\}$$

は零集合 (i.e. $\mu(\Gamma) = 0$) となる.

Proof. C^1 級であることから $\frac{dx_i}{dt}$ は $[0, 1]$ 上連続で, $C = \max \frac{dx_i}{dt}$ が存在します. そこで Lagrange の平均値の定理から

$$|x_i(t) - x_i(s)| \leq C|t - s| \quad (t, s \in [0, 1])$$

を得ます．ここで区間 $[0, 1]$ を N 等分し, その分点を

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$$

と表し, 分割区間を $\Delta(n) = [t_{n-1}, t_n]$ で表します．(記号が多いですが我慢してください.)
さらに

$$a_n = \min_{t \in \Delta(n)} x_1(t) \ , \ b_n = \max_{t \in \Delta(n)} x_1(t)$$
$$c_n = \min_{t \in \Delta(n)} x_2(t) \ , \ b_n = \max_{t \in \Delta(n)} x_2(t)$$

とおいて, $l = \max\{b_n - a_n, d_n - c_n\}$ とおきます．これらを用いて基本正方形 Q_n を $Q_n = [a_n, a_n + 2l) \times [c_n, c_n + 2l)$ とします．基本正方形の定め方から

$$\Gamma \subset \bigcup_{n=1}^{N} Q_n$$

がわかります. (図をかいてみましょう.) さて平均値の定理を用いた不等式から

$$|a_n - b_n| \leq CN^{-1}\ ,\ |c_n - d_n| \leq CN^{-1}$$

を得られることは簡単にわかります. これから Q_n の面積を評価してみると

$$|Q_n| = 4l^2 \leq C^2 N^{-2}$$

が得られます. したがって Γ の外測度を計算すると

$$\mathcal{L}^2(\Gamma) \leq 4CN^{-1} \to 0\ (N \to \infty)$$

となり, 主張を得ます. □

3 一般測度論超入門

この節では一般の外測度を定義して, 簡単な性質を証明します. 上の完全加法性などは一般の測度の定義から示せる性質なのでこの節で証明を与えます. ここでもまた, 後の Hausdorff 測度を理解するために必要なものだけを取り上げます.

DEFINITION 4. X を空でない集合とする.
$\mu : X \to [0, \infty]$ が X 上の外測度 (outer measure) であるとは以下を満たすことをいう.

1. $\mu(\phi) = 0$
2. $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ならば $\mu(A) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$

定義から単調性, つまり $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立つことがわかります.

DEFINITION 5. μ を X 上の外測度, $A \subset X$ とする. このとき

$$\mu\mid_A (C) \equiv \mu(A \cap C) \text{ for all} C \subset X$$

と定める. これを μ を A に制限した測度という.

次に, Lebesgue 測度同様に可測集合の定義をします.

DEFINITION 6. $A \subset X$ とする.
A が μ-可測であるとは, 任意の $B \subset X$ に対して

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

が成り立つことをいう.

定義から

(a) 零集合 (外測度が 0) は可測集合
(b) A:可測 ならば $X \setminus A$:可測
(c) $B : \mu$ 可測 ならば $B : \mu\mid_A$:可測

が成り立つことはすぐにわかります.

可測集合の代数的性質をみてみます. 以下の定理は非常によく使われる (もはやなれてくると意識せずに使う) ものです.

THEOREM 7. μ を X 上の測度, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を可測集合の列とする. 以下が成り立つ.

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ は可測
2. $\{A_i\}$:disjoint であれば
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$
3. A_i が単調増加列, つまり $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_i \subset A_{i+1} \subset \cdots$ を満たすとき
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$
4. $\mu(A_1) < \infty$ であり,A_i が単調減少列, つまり $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_i \supset A_{i+1} \supset \cdots$ を満たすとき
$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$$

Proof. 外測度の性質から任意の $A, B \subset X$ に対して

$$\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

が成り立っていることはわかります. 従ってこの反対向きの不等式を示せればよいですね. 以下それを示していきます.

まずは 1 の有限個の場合を示します.A_1, A_2 の可測性から任意の $B \subset X$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) \\ &= \mu(B \cap A_1) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu((B \setminus A_1) \setminus A_2) \\ &\geq \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2))\end{aligned}$$

したがって $A_1 \cup A_2$ は可測です.

$$X \setminus (A_1 \cap A_2) = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2)$$

が成り立つことから $A_1 \cap A_2$ の可測性もわかります. 帰納的に

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \ , \ \bigcap_{i=1}^{m} A_i$$

の可測性もわかります.

さて 2 を示します.$\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を disjoint とします.$j = 1, 2, \cdots$ に対して

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{j} A_i$$

とおきます. B_j は可測集合で, 定め方から集合がうまく計算できて

$$\begin{aligned} \mu(B_{j+1}) &= \mu(B_{j+1} \cap A_{j+1}) + \mu(B_{j+1} \setminus A_{j+1}) \\ &= \mu(A_{j+1}) + \mu(B_j) \end{aligned}$$

が成り立ちます. これを繰り返せば

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{j} A_i) = \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$$

を得られます. これから任意の j について不等式

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{j} \mu(A_i)$$

を得られるので

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

が成り立ち, 2 が示されたことになります.

次に 3 を示します. 2 を用いると

$$\lim_{i \to \infty} \mu(A_i) = \mu(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1} \setminus A_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

また,4 については 3 を用いると ($\mu(A_1) < \infty$ という仮定を忘れないこと)

$$\begin{aligned}\mu(A_1) - \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) &= \lim_{i\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_i) \\ &= \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)) \\ &\geq \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)\end{aligned}$$

となるので 4 が示されます.

さて 1 に戻ります. 有限の場合は既に示されたので可算の場合を考えます. $B \subset X$ に対して, もとの測度で可測な集合は, B の制限測度 $\mu\mid_B$ でも可測な集合になることは定義から簡単にわかりました. これを上手に用います. 今 B の外測度が無限大の場合は示すべき不等式は明らかなので $\mu(B) < \infty$ とします.

$$\begin{aligned}\mu(B \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) + \mu(B \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) &= (\mu\mid_B)(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) + (\mu\mid_B)(\bigcap_{i=1}^{\infty} (X \setminus B_i)) \\ &= \lim_{i\to\infty} (\mu\mid_B)(B_i) + \lim_{i\to\infty} (\mu\mid_B)(X \setminus B_i) \\ &= \mu(B)\end{aligned}$$

が成り立ちます. したがって $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ の可測性がわかりました. 有限の場合と同様にして $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ の可測性もこれからわかります. 以上で定理が示されたことになります. □

一般の測度論には他にも非常に多くの性質, 重要な概念 (σ algebra など) がありますが, 今回は省略します.

4 Hausdorff 測度

今回のメインテーマです. ようやく話せます (苦笑). イントロダクションでも触れましたが, Hausdorff 測度は 2 次元内の曲線の長さを測ることのできる測度です. まず Hausdorff 測度を定義する前にどうして Lebesgue 測度では測度 0 になってしまうのかを考えてみます.

とても単純な曲線を考えましょう. たとえば

$$C = \{(x, 0) | x \in [0, 1)\}$$

を考えましょう．この曲線の Lebesgue 外測度を計算してみます．これは一辺の長さ $\frac{1}{n}$ の基本正方形 n 個で覆えるので Lebesgue 外測度は

$$\mu(C) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

と評価されます．したがって, $n \to \infty$ と考えて (被覆を細かくして)

$$\mu(C) = 0$$

を得ます．曲線の長さは 1 ですから, どこに原因があるかを考えると, 一辺の長さを足し合わせずに面積を足し合わせてしまったことに原因がありそうです．したがって今度は一辺の長さを足し合わせる測度を考えてみましょう．これを ν とします．すると

$$\nu(C) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

となります．うまくいってますね．しかし少し考えるとわかるようにこの測度には問題点があります．例えば, 一辺が 1 の正方形を考えます. すなわち

$$S = \{(x,x)|x \in [0,1)\}$$

を考えます．この曲線の長さは $\sqrt{2}$ です．これを ν ではかってみると, 定義から

$$\nu(A) = 1$$

となります．これでは曲線の長さを測るものとしては失格ですね．本来であればもっといろいろと試行錯誤すべきなのでしょうが, 打つのに疲れるので天から授けられたことにしてこんな考えをもちだします.

$\mathbb{R}^2$ 内の任意の図形 U に対してその図形の”直径”を

$$d(U) = \sup\{d(x,y)|x,y \in U\}$$

と定めます．ただし, $d(\phi) = 0$ とします.

また, $\delta > 0$ と $A \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたときに $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ が

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \ , \ d(U_i) \leq \delta$$

をみたすとき $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ を A の δ 被覆と呼ぶことにします.

この $\delta > 0$ を固定し, $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathcal{H}_{\delta}^{1}(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)|U_i \text{は } A \text{ の } \delta \text{ 被覆 }\}$$

と定め, これを用いて Hausdorff 測度を定めます．定め方から $0 < \delta' < \delta$ に対して

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \mathcal{H}^1_{\delta'}(A)$$

が成り立っています．これから

$$\mathcal{H}^1(A) \equiv \sup \mathcal{H}^1_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^1_\delta(A)$$

と定め, これを 1 次元 Hausdorff 外測度といいます.

上の定義を外測度というからには満たしていてほしい性質がありました．以下の定理にまとめておきます.

THEOREM 8. (Hausdorff 外測度の性質)

1. $0 \leq \mathcal{H}^1 \leq \infty$, $\mathcal{H}^1(\phi) = 0$
2. $A \subset B$ ならば $\mathcal{H}^1(A) \leq \mathcal{H}^1(B)$
3. $\mathcal{H}^1\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(A_i)$
4. $d(A, B) > 0$ ならば $\mathcal{H}^1(A \cup B) = \mathcal{H}^1(A) + \mathcal{H}^1(B)$

Proof. 1.2. については定義から明らかに成り立つことがわかります.

3. については $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(A_i) = \infty$ のときは明らかに不等式が成り立つので $\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(A_i) < \infty$ とします．$\mathcal{H}^1(A_i)$ の定義から $\varepsilon > 0$ に対して A_i の δ 被覆 $U_k^{(i)}$ で

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(U_k^{(i)}) \leq \mathcal{H}^1_\delta(A_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$$

となるものがとれます．i, k を動かせば $U_k^{(i)}$ は $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ の δ 被覆になっているので

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1_\delta\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) &\leq \sum_{i,k=1}^{\infty} d(U_k^{(i)}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1_\delta(A_i) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(A_i) + \varepsilon\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ は任意なので

$$\mathcal{H}^1_\delta\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(A_i)$$

を得ます．上の不等式は任意の $\delta > 0$ について成り立っているので，上限をとり

$$\mathcal{H}^1(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(A_i)$$

となります．3. が示されたことになります．

4. を示します．$d(A, B) > \delta > 0$ となる δ をとります．U_i を $A \cup B$ の $\frac{\delta}{3}$ 被覆とします．被覆のとり方から U_i は A, B と同時に交わることはありませんから

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} d(U_i) &\geq \sum_{i:A\cap U_i \neq \phi} d(U_i) + \sum_{i:B\cap U_i \neq \phi} d(U_i) \\ &\geq \mathcal{H}^1_{\delta/3}(A) + \mathcal{H}^1_{\delta/3}(B)\end{aligned}$$

$\delta > 0$ は任意なので

$$\mathcal{H}^1(A \cup B) \leq \mathcal{H}^1(A) + \mathcal{H}^1(B)$$

を得ます．これで定理が示されたことになります．□

上の定理から 1 次元 Hausdorff 外測度は一般の外測度の定義を満たすことがわかりますから，同様に可測集合の定義をすれば THEOREM 7 が成り立つことがわかります．またここでは証明はしませんが (参考文献 [1] をみてください) 上で定義した 1 次元 Hausdorff 測度は曲線の長さを測ることができるものになっています．少し先を急ぎます．ずっと”1 次元” Hausdorff 測度といってきましたが，Hausdorff 測度は 1 次元だけではありません．以下 $s \geq 0$ とします．少し不思議に思われるかもしれませんが s は実数です．

DEFINITION 7. $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} d(U_i)^s | U_i \text{は } A \text{ の}\delta\text{被覆}\}$$

と定め

$$\mathcal{H}^s(A) \equiv \sup \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)$$

を s 次元 Hausdorff 測度という.$s = 0$ のときは A の点の個数が出力されるものとします．

Hausdorff 測度に関するいくつかの定理を紹介します．測度論を勉強したことのある人は知っていると思いますが，Hausdorff 測度は Borel 正則測度ですが Radon 測度ではありません．しかし多くのよい性質を持ちます．

THEOREM 9. (Hausdorff 測度の初等的性質)

1. $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ on $\mathbb{R}^1$ ($\mathcal{L}^1$は 1 次元 Lebesgue 測度)
2. $A \subset \mathbb{R}^d$ とする.
$$\frac{\pi^{d/2}}{2^d\Gamma(d/2+1)}\mathcal{H}^d(A) = \mathcal{L}^d(A)$$
ただし $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-y}y^{x-1}dy$
3. $s > d$ なる任意の s に対して $\mathcal{H}^s \equiv 0$ on $\mathbb{R}^d$
4. 任意の $\lambda > 0$ に対して $\mathcal{H}^s(\lambda) = \lambda^s\mathcal{H}^s(A)$
5. Hausdorff 外測度は平行移動, 回転に関して不変である.

次に Hausdorff 次元というものを定義するために以下の定理を紹介します.

THEOREM 10. $A \subset \mathbb{R}^d$ とし, $0 \leq s < t < \infty$ とする.

1. $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ であれば $\mathcal{H}^t(A) = 0$
2. $\mathcal{H}^t(A) > 0$ であれば $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$

Proof. 1. U_i を A の任意の δ 被覆とします. ただし δ は $0 < \delta < 1$ としておきます. このとき定義にしたがって計算していくと

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^\infty d(U_i)^t &= \delta^{t-s}\sum_{i=1}^\infty \delta^{s-t}d(U_i)^t \\ &\geq \delta^{t-s}\sum_{i=1}^\infty d(U_i)^{t-s}d(U_i)^t \\ &= \delta\sum_{i=1}^\infty d(U_i)^s \geq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)\end{aligned}$$

となるので

$$\mathcal{H}_\delta^t(A) \geq \delta^{t-s}\mathcal{H}_\delta^s(A)$$

が成り立ちます. ここで仮定の $\mathcal{H}^t(A) < \infty$ を用いると

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq \delta^{s-t}\mathcal{H}_\delta^t(A) \to 0 \quad (\delta \to 0)$$

を得ることができます. これで 1. が示されたことになります.

2. を示します. 1 の対偶をとればわかります. 以上で定理が示されたことになります. □

さて, Hausdorff 次元を定義します. これはいわば,d 次元内の体積が 0 になってしまうような図形がどのくらいの大きさをもっているかを示すものだと思えます.

DEFINITION 8. $A \subset \mathbb{R}^d$ とする.

$$\mathcal{H}_{dim}(A) \equiv \inf\{0 \leq s < \infty | \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

を A の Hausdorff 次元という. 定義から明らかに $\mathcal{H}_{dim}(A) \leq d$ がわかる.

5 Hausdorff 次元

この節では今まで意味のわからない話をずーっときいてきたので遊んでみます. 上で定義した Hausdorff 次元というものを実際の図形に適用してみましょう. これで Hausdorff 次元のすごさがわかるかと思います.

まずは 1 次元 Cantor 集合の Hausdorff 次元を測ってみます. Cantor 集合を知らない... だ... と? 簡単に説明します. 区間 $[0,1]$ を用意します. これを

$$[0,\frac{1}{3}]\ ,\ (\frac{1}{3},\frac{2}{3})\ ,\ [\frac{2}{3},1]$$

と 3 分割します. 真ん中の開区間はいらないのでゴミ箱に捨てます. 残りを I_1 とします. 両サイドの区間を再び 3 分割して真ん中の区間をゴミ箱に捨てます.

$$I_2 = [0,\frac{1}{3^2}] \cup [\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}] \cup [\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}] \cup [\frac{8}{3^2},1]$$

となります. これを繰り返して $I_3, I_4, \cdots$ と構成していきます. そして

$$C \equiv \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$

と定めます. C を 1 次元 Cantor 集合といいます.

THEOREM 11. 1 次元 Cantor 集合は Lebesgue 零集合である.

Proof. 簡単です. 構成の仕方をみると I_n は互いに交わらない長さ 3^{-n} の閉区間 2^n 個からなっています. したがって

$$\mathcal{L}^1(I_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

であり, これから

$$\mathcal{L}^1(C) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^1(I_n) = 0$$

となります. □

実は Cantor 集合は非可算集合です. (可算集合だったら測度 0 は明らかですね) 測度が 0 なのに, 非可算集合... これは面白そうですね. Hausdorff 次元, 測りましょう！

THEOREM 12. 1 次元 Cantor 集合の Hausdorff 次元は $\mathcal{H}_{dim}(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ である.

Proof. Cantor 集合の各 I_n は長さ 3^{-n} の閉区間 2^n 個から構成されてますからこれを番号付けて $I_{n,j}$ とおきます. $j > 2^n$ のときは $I_{n,j} = \phi$ と定めておきます. n, j を存分に動かしてみると I_n, j は C の 3^{-n} 被覆になりますね. したがって

$$\mathcal{H}^s_{3^{-n}}(C) \leq \sum_{j=1}^{\infty} d(I_{n,j})^s = \sum_{j=1}^{2^n} 3^{-ns} = 2^n 3^{-ns}$$

となります. $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ とすると任意の n について $2^n 3^{-ns} = 1$ となるので, $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ となることがわかります. 逆向きの不等式は難しいので今回は証明しませんが, 示すべきことは測度が 0 より大きくなることです. □

今回はフラクタル図形の Hausdorff 測度を測るのに非常に有用な定理を紹介したいと思います. この定理は一般の次元に簡単に拡張できますが, 今回は見通しをよくするためにも 2 次元の場合, さらに縮小率も一定の場合で証明します.

DEFINITION 9. $0 < c < 1$ とする. $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が縮小率 c の相似縮小変換であるとは

$$d(\psi(x), \psi(y)) = cd(x, y) \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

をみたすことである.

THEOREM 13. (Hutchinson の定理) $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_m$ $(m \geq 2)$ を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への縮小率 c の相似縮小変換とする. さらに $K \subset \mathbb{R}^2$ を

$$K = \psi(K) \cup \psi(K) \cup \cdots \cup \psi_m(K) \tag{4}$$

を満たす空でないコンパクト集合として, この ψ_i と K に対して以下を満たす有界な開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ をとることができるものとする.

1. $\psi_i(U) \subset U \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$
2. $\psi_i(U) \cap \psi_j(U) = \phi \quad (i \neq j)$
3. $K \subset \overline{U}$

このとき, $s = \frac{\log m}{\log(c^{-1})}$ とおくと, $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$ が成り立つ. これからすぐに $\mathcal{H}_{dim}(K) = s$ がわかる.

定理を証明するのに幾つか記号と補題を用意します.

$A \subset \mathbb{R}^2$ と $i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, m\}$ に対して

$$A_{i_1 \cdots i_k} = \psi_{i_k}(\cdots \psi_{i_2}(\psi_{i_1}(A)) \cdots)$$

と定めます. また

$$I_k(A) = \{(i_1, i_2, \cdots, i_k) | i_1, \cdots, i_k \in \{1, \cdots, m\}\ ,\ A \cap \overline{U_{i_1 \cdots i_k}} \neq \phi\}$$

とおき

$$\lambda_k(A) = |I_k(A)|\ ,\ \mu_k(A) = \frac{\lambda_k(A)}{m^k}$$

と定めます.

LEMMA 1. $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\bigcup_{i_1, i_2, \cdots, i_k = 1}^{m} K_{i_1 \cdots i_k} = K$$

が成り立つ.

Proof. $k = 1$ のときは (4) より成り立つ. $k = 2$ のときについて

$$\begin{aligned}\bigcup_{i_1, i_2 = 1}^{m} K_{i_1 i_2} &= \bigcup_{i_1 = 1}^{m} \Big(\bigcup_{i_2 = 1}^{m} \psi_{i_1}(\psi_{i_2}(K)) \Big) \\ &= \bigcup_{i_1 = 1}^{m} \psi_{i_1} \Big(\bigcup_{i_2 = 1}^{m} \psi_{i_2}(K) \Big) \\ &= \bigcup_{i_1 = 1}^{m} \psi_{i_1}(K) = K\end{aligned}$$

これを繰り返せば補題を得ます. □

LEMMA 2. $k \in \mathbb{N}$ とする. 以下が成り立つ.

1. $\mu_{k+1}(A) \leq \mu_k(A)$
2. $A \subset B$ ならば $\mu_k(A) \leq \mu_k(B)$
3. $\mu_k(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \leq \mu_k(A_1) + \cdots + \mu_k(A_n)$

4. $\mu(K) = 1$

Proof. 1. について

$$\mu_{k+1}(A) = \frac{\lambda_{k+1}(A)}{m^{k+1}} \leq \frac{\lambda_k(A)}{m^{k+1}} \leq \frac{\lambda_k(A)}{m^k} = \mu_k(A)$$

2.3.4. については明らかです. □

Proof of THEOREM13. まず $\mathcal{H}_{dim}(K) \leq s$ を示します. ここで $s = \frac{\log m}{\log(c^{-1})}$ です. 縮小写像の性質から

$$d(K_{i_1 \cdots i_k}) \leq \cdots \leq c^k d(K)$$

を得ます. 右辺を δ_k とおきます. $0 < c < 1$ ですから, 任意の $\delta > 0$ に対して, $\delta_k < \delta$ となるような十分大きな $k \in \mathbb{N}$ がとれます. 補題 1 を用います. $\{K_{i_1 \cdots i_k}\}$ は K の δ 被覆になっているので

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_\delta(K) &\leq \sum_{i_i, \cdots, 1_k}^{m} d(K_{i_1 \cdots i_k})^s \\
&\leq \sum_{i_i, \cdots, 1_k}^{m} c^{ks} d(K)^s \\
&= (mc^s)^k d(K)^s = d(K)^s < \infty
\end{aligned}$$

となります. 最後の行は $s = \frac{\log m}{\log(c^{-1})}$ を用いました. したがって $\mathcal{H}_{dim}(K) \leq s$ がわかります.

次に逆向きの不等式を示します. THEOREM10. より $\mathcal{H}^s(K) > 0$ を示せばよいことがわかります.

$0 < \delta < \frac{c}{2}$ なる δ と K の任意の δ 被覆 $\{W_j\}_{j=1}^\infty$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(W_j)^s \geq \gamma > 0$$

となる γ の存在をいいます. これがいえれば $\mathcal{H}^s(K) \geq \gamma > 0$ とわかります. 少しわかりにくい評価をしますが我慢してください.

$\{W_j\}_{j=1}^\infty$ を K の任意の δ 被覆として, W_j を覆うような直径が $2d(W_j)$ の開円盤 D_j をとると

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(W_j)^s = 2^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} d(D_j)^s \tag{5}$$

が成り立ちます．これを評価します．今，$K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$ であり，K はコンパクト集合なので

$$K \subset D_1 \cup \cdots \cup D_N$$

と有限個の被覆にすることができます．したがって $k \in \mathbb{N}$ にたいして

$$1 = \mu_k(K) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu_k(D_j) \tag{6}$$

となります．ここでは補題 2 を用いました．$d(D_j) \leq 2\delta < c$ となるように D_j と δ, c はとってきていたので，$c^{l_j} \leq d(D_j) < c^{l_j - 1}$ をみたすような $l_j \in \mathbb{N}$ が存在します．これより

$$\mu_{l_j}(D_j) = \frac{\lambda_{l_j}(D_j)}{m^{l_j}} = c^{l_j s}\lambda(D_j) \leq d(D_j)^s \lambda_{l_j}(D_j)$$

が成り立つことがわかり，(6) から

$$1 = \mu_{max\{l_1, \cdots, l_N\}}(K) \leq \sum_{j=1}^{N} d(D_j)^s \lambda_{l_j}(D_j) \tag{7}$$

を得ることができます．(5) とあわせて考えてみると，$\lambda_{l_j}(D_j)$ を評価してみるのがよいとわかります．以下では $l = l_j$ と表します．U は有界な開集合なので，十分小さい半径 r の閉円盤 B と，十分大きい半径 R の閉円盤 B' を $B \subset U \subset B'$ となるようにとれます．これらに相似縮小変換を施しますと $B_{i_1 \cdots i_l} \subset U_{i_1 \cdots i_l} \subset B'_{i_1 \cdots i_l}$ となります．($B_{i_1 \cdots i_l}$ の半径は $c^l r$ で，$B'_{i_1, \cdots, i_l}$ の半径は $c^l R$ です．) D_j の中心を x_j とすると

$$D_j \cap \overline{U_{i_1 \cdots i_l}} \neq \phi \text{ ならば } U_{i_1 \cdots i_l} \subset D(x_j, (2R+1)d(D_j))$$

が成り立ちます.(問 なぜか) これより

$$\bigcup_{(i_1, \cdots, i_l) \in I_l(D_j)} U_{i_1 \cdots i_l} \subset D(x_j, (2R+1)d(D_j))$$

を得ます．したがって

$$\mathcal{L}^2\Big(\bigcup_{(i_1, \cdots, i_l) \in I_l(D_j)} U_{i_1, \cdots, i_l}\Big) \leq \mathcal{L}^2(D(x_j, (2R+1)d(D_j))) \tag{8}$$

$$\leq \pi(2R+1)^2 d(D_j)^2 \tag{9}$$

を得ることができます．ところで $U_{i_1\cdots i_l}$ は仮定から交わらないので

$$\mathcal{L}^2\Big(\bigcup_{(i_1,\cdots,i_l)\in I_l(D_j)} U_{i_1,\cdots,i_l}\Big) = \sum_{(i_1,\cdots,i_l)\in I_l(D_j)} \mathcal{L}^2(U_{i_1\cdots i_l})$$

となります．さらに $B_{i_1\cdots i_l} \subset U_{i_1\cdots i_l}$ より

$$\begin{aligned}\sum_{(i_1,\cdots,i_l)\in I_l(D_j)} \mathcal{L}^2(U_{i_1\cdots i_l}) &\geq \sum_{(i_1,\cdots,i_l)\in I_l(D_j)} \pi r^2 c^{2l} &(10)\\ &= \lambda_l(D_j)\pi r^2 c^2 c^{2(l-1)} &(11)\\ &> \lambda_l(D_j)\pi r^2 c^2 d(D_j)^2 &(12)\end{aligned}$$

が成り立ちます．(9),(12),(5) より

$$\sum_{j=1}^{\infty} d(W_j)^s = 2^{-s}\sum_{j=1}^{N} d(D_j)^s \geq 2^{-s}\Big(\frac{rc}{2R+1}\Big)^2$$

となり定理が示されたことになります．□

今回は時間の都合上, Hausdorff 距離に関する幾つかの命題を既知としています．気になる人は参考文献 [1] をみてください．また一般の測度論についても詳しく書かなかったのですがこれも気になる人は参考文献 [3] をみるとよいと思います．しかし [3] は具体的な例などは一切のっていませんし, 演習問題もまったくありません．測度論に関する具体例などはみずから構成を試みるか, 他の本を参照してください．

参考文献

[1] 新井仁之, ルベーグ積分講義 ルベーグ積分と面積 0 の不思議な図形たち, 日本評論社, 2003

[2] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963

[3] L.C.Evans, Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics