マクスウェル分布に従う磁化プラズマ中の波動

平衡状態の速度分布として、以下のような磁場方向に対して温度非等方性があるbi-Maxwellianを考える。

$$f_{s0}(v_\perp, v_\parallel) = \frac{n_{s0}}{\pi^{3/2} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2} - \frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \tag{1}$$

一応この式がVlasov方程式の平衡解であるか確認？

誘電率テンソルの表式

磁化プラズマ中の一般的な誘電率テンソルの表式

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right) I - \\ \sum_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\omega_{ps}^2}{n_{s0}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \left[\left(k_\parallel \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right) \frac{\mathbf{S}_{ns}}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

ただし、

$$\mathbf{S}_{ns} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\right)^2 J_n^2 & i\frac{v_\perp \omega_{cs}}{k_\perp} nJ_nJ_n' & \frac{v_\parallel \omega_{cs}}{k_\perp} nJ_n^2 \\ -i\frac{v_\perp\omega_{cs}}{k_\perp} nJ_nJ_n' & v_\perp^2 J_n'^2 & -iv_\perp v_\parallel J_n J_n' \\ \frac{v_\parallel\omega_{cs}}{k_\perp} nJ_n^2 & iv_\perp v_\parallel J_n J_n' & v_\parallel^2 J_n^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である。ただし、J_nは第1種ベッセル関数であり、引数は$\lambda = k_\perp v_\perp / \omega_{cs}$である。導出はこちら。

f_{s0}として(1)の形を代入すると、

$$k_\parallel \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} = -\frac{2n_{s0}}{\pi^{3/2} v_{th_\parallel,s} v_{th_\perp,s}^2} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2} - \frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \times \left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)$$

となる。もう少し見通しをよくするために、(2)の右辺の第2項の積分を含む項をAと置き、$v_\parallel$と$v_\perp$の部分に分けると、

$$A_n = \sum_s \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \mathbf{S}_{ns} \tag{4}$$

となり、

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 - \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right) I + \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_n$$

Weber 積分

(4)において、まず$v_\perp$について積分を行う。その際に以下のような被積分関数にベッセル関数とガウス関数を含んだ4種類の積分を実行する必要がある。

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_n^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W1}$$

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp^2 J_n J_n' \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W2}$$

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp^3 J_n'^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W3}$$

これらの積分を計算するために以下のような積分公式を用いる。この積分はWeber積分と呼ばれている。(Weber積分の導出はこちら)

$$
\begin{aligned}
W_n(\alpha) &= \int_0^\infty xJ_n^2(\alpha x)\exp(-x^2)dx \\
&= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

式(W1)について

$x = v_\perp/v_{th_\perp,s}$とすると、$J_n$の引数$\lambda_s$は、$\lambda_s = k_\perp v_\perp/\omega_{cs} = (k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs})x$となる。
従って、(W1)において、$\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}$とすれば、

$$
\begin{aligned}
(W1) &= v_{th_\perp,s}^2\int_0^\infty xJ_n^2(\alpha x)\exp(-x^2)dx \\
&= \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right)I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (\alpha = k_\perp v_\perp/\omega_{cs})
\end{aligned}
\tag{6}
$$

である。

式 (W2)について

まず、W_nの積分表示を微分すると、

$$
\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = \int_0^\infty x\frac{\mathrm{d}J_n^2(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha}\exp(-x^2)dx
$$

である。ここで、

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}\frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}
$$

であるので、

$$
\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = 2\int_0^\infty x^2J_nJ_n'\exp(-x^2)dx
$$

となる。次にW_nの具体的な表式を微分すると、

$$
\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\}
$$

であるので、先ほどの式と合わせると、

$$
\int_0^\infty x^2J_nJ_n'e^{-x^2}dx = \frac{\alpha}{4}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\}
\tag{7}
$$

となる。(W1)の場合と同様に変数変換をすれば、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{W2}) &= v_{th_\perp,s}^3\int_0^\infty x^2J_n(\alpha x)J_n'(\alpha x)e^{-x^2}dx \\
&= \frac{\alpha}{4}v_{th_\perp,s}^3e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} \quad (\alpha = k_\perp v_\perp/\omega_{cs})
\end{aligned}
\tag{8}
$$

式(W3)について

(7)の積分をSと置き、αで微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} &= \int_0^\infty x^2e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}(J_nJ_n')dx \\
&= \int_0^\infty x^2e^{-x^2}\frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}(J_nJ_n')dx \\
&= \int_0^\infty x^3e^{-x^2}(J_n'^2 + J_nJ_n'')dx \\
&= \underbrace{\int_0^\infty x^3e^{-x^2}J_n'^2dx}_{=A} + \int_0^\infty x^3e^{-x^2}J_nJ_n''dx
\end{aligned}
$$

この右辺第一項が(W3)に相当する式である。これをAとおく。

$$
J_n''(\alpha x) = \left(\frac{n^2}{\alpha^2x^2} - 1\right)J_n - \frac{1}{\alpha x}J_n'
$$

であることを利用すると、

$$A=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}+\frac{1}{\alpha}S-\frac{n^2}{\alpha^2}W_n+\underbrace{\int_0^\infty x^3e^{-x^2}J_n^2dx}_{=B}$$

である。右辺第4項は、

$$\begin{aligned}B&=\int_0^\infty x^3e^{-x^2}J_n^2dx\\&=\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)x^2J_n^2dx\\&=\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}x^2J_n^2dx\right]_0^\infty+\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{2xJ_n^2+x^2\frac{\mathrm{d}J_n^2}{\mathrm{d}x}\right\}dx\end{aligned}$$

である。第1項は括弧の中身が$x\to 0,\infty$でどちらも0となるため0である。また、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}J_n^2}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}J_n^2(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)}\\&=2\alpha J_n'J_n\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}B&=\int_0^\infty xe^{-x^2}J_n^2dx+\alpha\int_0^\infty x^2e^{-x^2}J_nJ_n'dx\\&=W_n+\alpha S\end{aligned}$$

となる。これを元の式へ代入すると、

$$A=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)S+\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)W_n$$

とかける。ここで登場する$dS/d\alpha$を計算する必要があるが、Sは(6)のように表されるので、修正ベッセル関数I_nの2階微分が必要になる。修正ベッセル関数とその微分との間に成り立つ関係式を利用すると、

$$\frac{\mathrm{d}^2I_n(z)}{\mathrm{d}z^2}=\left(\frac{n^2}{z^2}+1\right)I_n-\frac{1}{z}I_n'$$

であることが導かれるので、

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left(2\alpha^2+\frac{4n^2}{\alpha^2}-1\right)I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)-\frac{1}{4}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}(2\alpha^2+1)I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

である。この時、

$$I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\frac{\alpha^2}{2})}I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

であることに注意する。

最終的に、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^3e^{-x^2}J_n'^2(\alpha x)dx&=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)S+\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)W_n\\&=\left\{\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{n^2}{2\alpha^2}\right)I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)-\frac{\alpha^2}{4}I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\end{aligned}\tag{8}$$

と求められる。変数変換を行えば、

$$\begin{aligned}(\mathrm{W3})&=v_{th_\perp,s}^4\int_0^\infty x^3e^{-x^2}J_n'^2(\alpha x)dx\\&=v_{th_\perp,s}^4\left\{\left(\frac{\alpha^2}{4}+\frac{n^2}{2\alpha^2}\right)I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)-\frac{\alpha^2}{4}I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\quad(\alpha=k_\perp v_\perp/\omega_{cs})\end{aligned}\tag{9}$$

となる。

プラズマ分散関数の導入

$v_\parallel$についての積分を簡単に表すため、以下のような積分関数であるプラズマ分散関数を導入する。

$$Z(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{z-\xi}e^{-z^2}dz\tag{10}$$

これを用いて、(4)の$v_\parallel$を含む積分を表す。$z = v_\parallel / v_{th_\parallel,s}$と置換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} e^{-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}} = \frac{1}{v_{th_\parallel,s}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z-\xi_{ns}} e^{-z^2} dz + \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\xi_{ns}} e^{-z^2} dz$$

となる。ここで、

$$\xi_{ns} = \frac{\omega - n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}}$$

とおいた。さらに、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z-\xi_{ns}} e^{-z^2} dz &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-z^2}\right)' \frac{1}{z-\xi_{ns}} dz \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-z^2} \frac{1}{z-\xi_{ns}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{e^{-z^2}}{(z-\xi_{ns})^2} dz \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\mathrm{d}Z(\xi_{ns})}{\mathrm{d}\xi_{ns}}\end{aligned}$$

であるので、

$$\sqrt{\pi} \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} Z - \frac{\sqrt{\pi}}{2 v_{th_\parallel,s}} Z'$$

となる。これを(4)へ代入すると、

$$A_n = \sum_s \frac{2}{v_{th_\perp,s}^2} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left(2 \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}} Z - \frac{T_{s\perp}}{T_{s\parallel}} Z'\right) \int_0^{\infty} dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \mathbf{S}_{ns}$$

リンク

- Weber integralの証明 https://mtaylor.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/16915/2018/04/weber.pdf