プラズマ中の線形波動の基礎

始めに

線形波動とは「線形微分方程式」の振動解のことである。線形とはいっても、真空中のMaxwell方程式のように完全に線形な例は少なく、一般に支配方程式は非線形である。なのでより正確にいうと、支配方程式に現れる非線形項を線形化して考えても差し支えないくらい「振幅が微小な波動」のことである。

よく線形波動との対比として「有限振幅の波動」という言葉が使われるが、これは言い換えると非線形項を無視することができず、波動間の相互作用を考える必要があるという意味が含まれる。

線形波動の例を挙げると「地磁気脈動」がある。地磁気脈動は地球の固有磁場の磁力線の振動を指す。地上付近では、地球の固有磁場は$10^4\ \mathrm{nT}$のオーダーである一方で、地磁気脈動の振幅は数 nTである。このように、背景の量に対して振幅が十分小さい場合には、線形波動と呼んでよい。

基本モードと分散関係

「基本モード」とは、線形微分方程式の解全体がなすベクトル空間の基底を指す。したがって、基本モードの数は、解空間の自由度（変数の数）に対応する。ちなみにモードとは固有値（固有ベクトル）のことで、微分方程式を代数方程式に変換し、固有値問題に落とし込む考え方である。

線形波動の文脈の場合、基本モードの形を規定するのが**分散関係**である。
数学的には、任意の「絶対可積分」な関数は、フーリエ変換により平面波解

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \tilde{\psi} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega \mathbf{t})}$$

の重ねあわせにより表現できる。分散関係を求める際には、この形を微分方程式に代入し、$\mathbf{k}$とωの関係を求める。

この代数方程式は慣習的に、

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0$$

と表される。この方程式を解くことで得られる解空間の自由度分得られる以下の方程式群

$$\omega = \omega_i(\mathbf{k})$$

が各固有モードの分散関係である。iは各固有モードに対応する。

> *フーリエ変換によりある物理量を表すということは、暗黙のうちに"系が平衡状態に達しており、空間的に十分一様である"ということを仮定している。このような仮定をWKB近似と呼ぶ。フーリエ変換では、時間や空間の局所性、つまり、ある期間の周波数は~だが次の期間は~である、ということを考えることができず、無限の時間・空間でどのような波があるのかを考える。しかし、実際の物理現象では、始まりと終わりが確かに有るわけだが、そのような一連の流れが十分定常状態に達していれば十分である。*

基本モードとそれ以外に対応するもの

前述の通り、基本モードの考え方は、線形微分方程式の回をフーリエ変換に基づいてsin, cosの直交基底で表すというものであった。しかし、全ての回がフーリエ変換で表せるような条件を満たしているわけではない。例えば、$e^{-\gamma t}$のような時間に対して指数関数的に減少していくような減衰解は、$t \to -\infty$では逆に発散するということになるため、フーリエ変換では表すことができない。したがって、想定される物理現象に対して必ずしも基本モードの考え方が適切であるとは限らない。

これについてもう少し具体例を出して考えてみる。

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

のような微分方程式は、減衰振動解を持つ線形微分方程式である。この微分方程式をフーリエ変換して出てくる解はただの振動解である。これはいわゆる微分方程式の「特解」である。
しかし、この方程式の表す物理の本質はそれではなく、減衰しながら振動する解である。先ほど述べたようにこのような解は、$t \to -\infty$では逆に発散するような解になるため、フーリエ変換によって解こうとしても、そもそもそれによって表現できないような解を導くことができない。

このような問題がなぜ生じるかというと、$-\infty < t < \infty$という無限の時間を考えていたためである。物理現象には始まりが必ずあるので、ある意味これは不自然なことである。したがってある時刻をスタートとし、そこからの変化を追っていくという方が自然である。これを「初期値問題」と呼ぶ。このような初期値問題を解くための典型的な手法がラプラス変換である。ラプラス変換の定義式では$t < 0$の値を全て無視し、$t = 0$の値が明示的に含まれている。

Vlasov方程式をラプラス変換によって解くことで始めて明らかになったものが「ランダウ減衰」と呼ばれる波動の減衰現象である。

ラプラス変換

線形システムと応答

ここでは線形なプラズマ系における入力と応答を関係づけるための数学的記述を行う。

線形応答理論

線形システムとは、ある入力$q(t, \mathbf{x})$を与えた時に、その応答が線形変換$\mathcal{L}$を用いて、

$$p(t, \mathbf{x}) = \mathcal{L}(q(t, \mathbf{x}))$$

と表される系のことである。プラズマ中では、電場（入力）に対して、プラズマがどのように応答するのか、つまり電流密度（出力）が重要である。この関係を表す変換が**電気伝導度** である。

通常、ある電場が与えられた時に、電流ができる→磁場が変化する→電場ができる ...というように、電場を与えたことによって電流が生じ、さらに電場や磁場にフィードバックが生じて電流を流す、ということが起きる。これはつまり電気伝導度自体が電場に依存する量であり、電場と電流との関係は非線形であるということになる。しかし、与えた電場が十分小さければ、それによる2次以降のフィードバックは無視してもよいと考えることができる。このような仮定がまさしく振幅が小さい「線形波動」を考えるということである。

このような仮定のもとで、電場と電流密度の関係を式で表すと以下のようになる。

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \sigma[\mathbf{E}]$$

この関係はいわゆる**オームの法則**である。ここで、σは線形変換であり、電場自体には依存しない量である。線形変換はテンソルで表されるので、

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \sigma \cdot \mathbf{E}$$

となる。

では、この関係式をより物理的に書いてみよう。

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt' \; G(t|t', \mathbf{x}|\mathbf{x}', \mathbf{E}) \cdot \mathbf{E}(t', \mathbf{x}')$$

この式の意味は、ある時刻t'ある位置$\mathbf{x}'$において単位パルス的な電場を与えた際に、時刻t位置$\mathbf{x}$の位置に作る電流密度の応答がGという形で表されており、それを全時間、全空間で畳み込んだものが正味の$\mathbf{j}$であるということである。つまりこのGという関数はGreen関数である。ここでは、一般的な形としてあえてGが電場$\mathbf{E}$に依存しているように書いているが、前述のように線形波動を考える際にはGは$\mathbf{E}$とは無関係に決まる量である。

線形波動を考える際には、始めに述べた前提の通り、空間的な一様性と時間的な一様性（平衡状態）を仮定するので、Gは特定の位置と時刻に依存せず、入力の位置と時間からの相対的な位置と時間のみで決まるはずである。よって、

$$G(t|t', \mathbf{x}|\mathbf{x}') = \begin{cases} G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') & (t' \leq t) \\ 0 & (t' > t) \end{cases}$$

という形になるはずである。ここで、$t' > t$という未来の情報は含まないという因果律を満たす形にしている。したがって、

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x' \int_{-\infty}^{t} dt' \; G(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot \mathbf{E}(t', \mathbf{x}')$$

という関係が成り立つはずである。この式は、畳み込み積分の形になっており、数学的に非常に扱いやすい性質を持っている。特に、畳み込み積分のフーリエ変換は、畳み込んだ関数のフーリエ成分の同士の積の形になるというよい性質を持っているため、「周波数-波数空間」におけるオームの法則は以下のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}) &= \tilde{G}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \tilde{E}(\omega, \mathbf{k}) \\ &= \tilde{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \tilde{E}(\omega, \mathbf{k}) \end{aligned}$$

線形プラズマ波動の分散関係

Maxwell 方程式のFaradayの式のrotを取った式と、Ampereの式の時間微分を取った式を連立することで、電場と電流のみで構成される微分方程式を立てることができる。

$$\nabla^2\mathbf{E} - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}$$

この微分方程式は$\mathbf{E}$, $\mathbf{j}$について線形であるが、一般に$\mathbf{E}$と$\mathbf{j}$の関係は非線形であるということは先述の通りである。

この式や前の畳み込みの式からわかるように、電気伝導度σはその場の情報だけでなく、その周辺の情報つまり、空間・時間微分を含んだ演算子の形になる。したがって、単純な代数的な関係式にはなり得ない。しかし、空間・時間の一様性を仮定することによりそのフーリエ変換$\tilde{\sigma}$については代数的に表現することができる。

この微分方程式をフーリエ変換すると、

$$(-k^2 + \mathbf{k}\mathbf{k} + \frac{\omega^2}{c^2})\tilde{\mathbf{E}}(\omega,\mathbf{k}) = -i\omega\mu_0\tilde{\mathbf{j}}(\omega,\mathbf{k})$$

ここにオームの法則を代入して整理すると、

$$\left\{\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)I - \mathbf{k}\mathbf{k} - i\mu_0\omega\tilde{\sigma}\right\}\cdot\tilde{\mathbf{E}} = 0$$

となる。さらに**誘電率テンソル$\tilde{\epsilon}(\omega,\mathbf{k})$** を以下のように定義する。

$$\tilde{\epsilon}(\omega,\mathbf{k}) = I - \frac{\tilde{\sigma}}{i\omega\varepsilon_0}$$

これを先ほどの式に代入して整理すると、

$$\left\{\frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} - I\right) - \tilde{\epsilon}\right\}\cdot\tilde{\mathbf{E}} = 0$$

という代数方程式が得られる。この式が$\tilde{\mathbf{E}}$についての非自明な解を持つためには、

$$\mathrm{Det}\left[\frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} - I\right) - \tilde{\epsilon}\right] = 0$$

という条件が必要であり、これがプラズマ中の線形波動の固有モードの分散関係である。

この関係式を求めた際に用いた関係式は、Faradayの式とAmpereの式だけであり、プラズマがどのような状態、つまり、どのような速度分布を持っているのかについての仮定は一切置いていない。したがって、この式は空間一様かつ平衡状態にであれば、どのような速度分布を持つプラズマに対しても成り立つ。

プラズマがどのような状態にあるのかについての情報は全て誘電率テンソルを介して反映されることになるため、プラズマ中にどのような波動が存在するのかについてを調べるということは、この誘電率テンソルを求めることに等しい。

具体的な分散関係の表式

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} - I\right) + \epsilon = \frac{c^2}{\omega^2}\begin{pmatrix} -k_\parallel^2 & 0 & k_\perp k_\parallel \\ 0 & -k^2 & 0 \\ k_\perp k_\parallel & 0 & -k_\perp^2 \end{pmatrix} + \epsilon$$

である。ここで、

$$n = \frac{kc}{\omega}$$
$$n_\perp = \frac{k_\perp c}{\omega}$$
$$n_\parallel = \frac{k_\parallel c}{\omega}$$

とすれば、分散関係式は以下のように書き表される。

$$
\begin{aligned}
D(\omega, \mathbf{k}) &= \mathrm{Det}\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathbf{kk}}{k^2} - I\right) + \epsilon\right) \\
&= \mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} -n_\parallel^2 & 0 & n_\perp n_\parallel \\ 0 & n^2 & 0 \\ n_\perp n_\parallel & 0 & -n_\perp^2 \end{pmatrix} + \epsilon(\omega, \mathbf{k})\right)
\end{aligned}
$$

静電波の分散関係式

静電波、つまり$\mathbf{k} \parallel \tilde{\mathbf{E}}$となるような縦波の振動$\tilde{\mathbf{E}}_{stat}$は、

$$
\tilde{\mathbf{E}}_{stat} = \frac{(\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}})}{k^2}\mathbf{k}
$$

と表せる。この式を、一般的な分散関係式に代入すれば、

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Det}(\tilde{\epsilon}(\mathbf{kk})) &= \mathrm{Det}(\mathbf{k} \cdot \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{k}) \\
&= \mathbf{k} \cdot \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\epsilon_L = \mathbf{k} \cdot \tilde{\epsilon} \cdot \mathbf{k}
$$

を縦誘電率とも呼ぶ。

不安定性の成長率

周波数を$\omega = \omega_r - i\gamma$のように複素数に拡張してみる。$\gamma > 0$であれば、これは指数関数的に増大するような回になる。先述の通り、本来そのような関数はそもそもフーリエ変換ができないので、このように周波数を複素数に拡張するということ自体が数学的な裏付けのない操作であるが、$|\omega| \gg \gamma$のように成長率が十分小さければ、考えている波の振動時間スケールに比べてゆっくりと増大することになり、ひとまずこのように考えても良いと考える。

以下のように分散関係式を$\omega = \omega_r + i0$の実周波数の周りでテイラー展開し、実部と虚部に分解する。

$$
\begin{aligned}
D(\omega, \mathbf{k}) &= D(\omega_r, \gamma, \mathbf{k}) \\
&\sim D(\omega_r, 0, \mathbf{k}) + \left.\frac{\partial D(\omega_r, \gamma, \mathbf{k})}{\partial \omega}\right|_{\gamma=0} \delta\omega \\
&= D(\omega_r, 0, \mathbf{k}) + \left.\left(\frac{\partial D}{\partial \omega_r} + i\frac{\partial D}{\partial \gamma}\right)\right|_{\gamma=0} i\gamma \\
&= D_r(\omega_r, 0, \mathbf{k}) + iD_i(\omega_r, 0, \mathbf{k}) + \\
&\quad i\gamma\left.\left(\frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} - \frac{\partial D_i}{\partial \gamma}\right)\right|_{\gamma=0} + \gamma\left.\left(-\frac{\partial D_i}{\partial \omega_r} - \frac{\partial D_r}{\partial \gamma}\right)\right|_{\gamma=0}
\end{aligned}
$$

ここで、$\gamma\partial D_i/\partial\gamma$が$\gamma$についての2次の微小量であることから無視し、正則関数に対して成り立つコーシー・リーマンの関係式

$$
\frac{\partial D_r}{\partial \gamma} = -\frac{\partial D_i}{\partial \omega_r}
$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
D(\omega, \mathbf{k}) &\sim D_r(\omega_r, 0, \mathbf{k}) + iD_i(\omega_r, 0, \mathbf{k}) + i\gamma\left.\frac{\partial D_r(\omega_r, \gamma, \mathbf{k})}{\partial \omega_r}\right|_{\gamma=0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となる。この式の実部=0は従来の分散関係式である。虚部=0から、成長率γが求められ、

$$
\gamma = -D_i(\omega_r, 0, \mathbf{k}) \Big/ \left.\frac{\partial D_r(\omega_r, \gamma, \mathbf{k})}{\partial \omega_r}\right|_{\gamma=0}
$$

となる。

念押ししておくと、このように記述できるのは成長率が十分小さい不安定性である。本来であれば、ラプラス変換によって求める必要がある？

参考

- Basic Space Plasma Physics, Baumjohann and Treumann
- 畳み込み積分とフーリエ変換について https://ramenhuhu.com/math-fouriertransform
- Princeton大学資料 https://www.princeton.edu/~idodin/ast553/main.pdf