# 磁化プラズマ中の運動論的波動の分散関係

## 手順

1. 速度擾乱 $\delta f(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v})$ を決定
2. 速度擾乱から、電流擾乱$\delta\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{v})$を決定
3. $\delta\mathbf{j} = \sigma \cdot \delta\mathbf{E}$の線形のオームの法則から電気伝導度$\sigma$を決定する。
4. $\sigma$から誘電率テンソル$\epsilon$を求める。
5. 誘電率テンソルから分散関係を求める。

一般的な線形波動の分散関係を求める手順はこちらで解説。
[プラズマ中の線形波動の基礎]

## 速度分布関数の擾乱

### 方程式の線形化

粒子種sに対するVlasov方程式

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f_s + \frac{q_s}{m_s}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_s = 0 \tag{1}$$

擾乱を以下のように設定。

$$\begin{aligned} f_s &= f_{s0} + \delta f_s \\ \mathbf{E} &= \delta\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B} \end{aligned} \tag{2}$$

これらを(1)へ代入し、2次以上の微小量を無視すると以下のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) + \frac{q_s}{m_s}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0) \cdot \nabla_v\right)\delta f_s = -\frac{q_s}{m_s}(\delta\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \delta\mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_{s0} \tag{3}$$

左辺は、時間の全微分の形になっているので、時間の依存性を明示する形で書き直すと、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta f_s(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))) = -\frac{q_s}{m_s}[\delta\mathbf{E}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{v}(t) \times \delta\mathbf{B}(t, \mathbf{x}(t))] \cdot \nabla_{v(t)} f_{s0}(\mathbf{v}(t)) \tag{4}$$

となる。この時、プラズマは空間一様を考えているので$f_0$は空間には依存しない。

(4)を$t$で積分すると、

$$\delta f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = -\frac{q_s}{m_s}\int_{-\infty}^{t} dt' \left\{\delta\mathbf{E}(t', \mathbf{x}(t') + \mathbf{v}(t') \times \delta\mathbf{B}(t', \mathbf{x}(t))\right\} \cdot \nabla_{v(t')} f_0(\mathbf{v}(t')) \tag{5}$$

積分範囲に現れる$t = -\infty$での値は、初期値、つまり不定積分に対する積分定数を決定する役割をになっている。なので、値さえわかっていれば、どの時刻の値を初期値としても良いはずである。しかし、初期値を設定する時には系の状態を完全に把握しておく必要があるため、物理的な制約をかけやすい$t = -\infty$での値を初期値として取るのが妥当であろう。
物理的に考えれば、初期には速度分布の擾乱は0であったと考えて良いはずである（フーリエ変換の定義には反するが）。

### 平面波解の代入

ここで、電場と磁場に対して、以下のような平面波解を仮定して代入する。

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{E}(t', \mathbf{x}(t')) &= \delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t') - \omega t')} \\ \delta\mathbf{E}(t', \mathbf{x}(t')) &= \frac{\mathbf{k}}{\omega} \times \delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{6}$$

これらを(5)へ代入して変形すると、

$$\delta f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = -\frac{q_s}{m_s\omega}\int_{-\infty}^{t} dt' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t') - \omega t')} \left\{\delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) + \mathbf{v}(t') \times \mathbf{k} \times \delta\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})\right\} \cdot \nabla_{v(t')} f_0(\mathbf{v}(t')) \tag{7}$$

となる。被積分関数を以下のように変形する。($I$は単位行列)

$$\mathbf{v}\times\mathbf{k}\times\delta\mathbf{E}=(\mathbf{k}\mathbf{v}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})I)\delta\mathbf{E}$$

すると、

$$\delta f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{v}(t))=-\frac{q_s}{m_s\omega}\left[\int_{-\infty}^{t}dt' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t')-\omega t')}\{\mathbf{k}\mathbf{v}+(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})I\}\delta\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\cdot\nabla_{v(t')}f_0(\mathbf{v}(t'))\right] \tag{8}$$

となる。さらに、速度分布についても以下のような平面波解を仮定する。

$$\delta f(t,\mathbf{x}(t),\mathbf{v}(t))=\delta f(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v})e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)-\omega t)} \tag{9}$$

左辺のvの時間依存性が消えることに注意。この形を(8)へ代入し、

$$\delta f(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v})=-\frac{q_s}{m_s\omega}\left[\int_{-\infty}^{t}dt' e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t')-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)-\omega(t'-t))}\{\mathbf{k}\mathbf{v}+(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})I\}\delta\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\cdot\nabla_{v(t')}f_0(\mathbf{v}(t'))\right]$$

さらに、$\tau=t-t'$と変数変換を行うと、

$$\delta f(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v})=-\frac{q_s}{m_s\omega}\left[\int_{0}^{\infty}d\tau\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(\tau+t)-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(t)-\omega\tau)}\{\mathbf{k}\mathbf{v}+(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})I\}\delta\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\cdot\nabla_{v(\tau+t)}f_0(\mathbf{v}(\tau+t))\right]$$

となる。この時、tという変数が残っているが、分布関数について任意の時刻tについて成り立つ(9)を仮定しているため、$t=0$としても一般性を失うことはない。よって、

$$\begin{aligned}\delta f(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v})&=-\frac{q_s}{m_s\omega}\left[\int_{0}^{\infty}d\tau\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(\tau)-\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}(0)-\omega\tau)}\{\mathbf{k}\mathbf{v}+(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})I\}\delta\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\cdot\nabla_{v(\tau)}f_0(\mathbf{v}(\tau))\right]\\&=-\frac{q_s}{m_s\omega}\left[\int_{0}^{\infty}d\tau\, e^{i(\mathbf{k}\cdot(x(\tau)-\mathbf{x}(0))-\omega\tau)}\left(\nabla_{v(\tau)}f_0(\mathbf{v}(\tau))\right)^T\{\mathbf{k}\mathbf{v}+(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})I\}\right]\cdot\delta\mathbf{E}(\omega,\mathbf{k})\end{aligned} \tag{10}$$

となる。

### 速度分布関数摂乱の表式

$$\varphi(\tau)=\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}(\tau)-\mathbf{x}(0))-\omega\tau \tag{11}$$

とおき、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left\{ie^{i\varphi(\tau)}\right\}=(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})e^{i\varphi(\tau)}$$

であることを利用して、(10)を部分積分すると、

$$\delta f=\frac{q_s}{im_s\omega}\left[\left[e^{i\varphi(\tau)}\nabla_v f_{s0}\right]_0^\infty-\int_0^\infty d\tau e^{i\varphi(\tau)}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla_v f_{s0}+i\nabla_v f_{s0}\,\mathbf{k}\mathbf{v}\right\}\right]\cdot\delta\mathbf{E} \tag{12}$$

となる。ここで、第1項目の積分を実行する必要がある。方程式の線形化の最後でも述べたが、$\tau=\infty$での値は、初期値を与える役割をになっている。やや乱暴ではあるが、物理的には初期には擾乱はなかったと考えられるので、$\tau=\infty$では、かっこの中身が0になる必要がある。よって、

$$\delta f=\frac{q_s}{im_s\omega}\left[\nabla_v f_{s0}-\int_0^\infty d\tau e^{i\varphi(\tau)}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla_v f_{s0}+i\nabla_v f_{s0}\,\mathbf{k}\mathbf{v}\right\}\right]\cdot\delta\mathbf{E} \tag{13}$$

となる。この式が磁化プラズマの速度分布関数の擾乱を表す式である。

---

## 電気伝導度の導出

### オームの法則

初めに、(13)を利用して電流密度擾乱を求める。

$$
\begin{aligned}
\delta\mathbf{j}(\omega,\mathbf{k}) &= \sum_s q_s\int dv^3\mathbf{v}\delta f(\omega,\mathbf{k},\mathbf{v}) \\
&= \left[\sum_s \frac{q_s^2}{im_s\omega}\int d^3v\mathbf{v}\left[\nabla_v f_0+\int_0^\infty d\tau\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla f_{s0}+i\nabla_v f_{s0}\,\mathbf{kv}\right\}e^{i\varphi(\tau)}\right]\right]\cdot\delta\mathbf{E} \\
&= \sigma(\omega,\mathbf{k})\cdot\delta\mathbf{E}
\end{aligned} \tag{14}
$$

この式は、電場と電流密度の関係を表すオームの法則である。
したがって、

$$
\sigma(\omega,\mathbf{k}) = \sum_s \frac{q_s^2}{im_s\omega}\int d^3v\mathbf{v}\left[\nabla_v f_0+\int_0^\infty d\tau\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla f_{s0}+i\nabla_v f_{s0}\,\mathbf{kv}\right\}e^{i\varphi(\tau)}\right]
$$

である。ここから具体的にこの積分を実行していく。
まず1項目の積分を計算する。

$$
\begin{aligned}
\int d^3v\mathbf{v}\nabla_v f_0 &= \int d^3v(v_i\partial v_j f_{s0}) \\
&= \int d^3v\{\partial v_j(v_i f_{s0})-f_{s0}\partial v_j v_i\} \\
&= -n_{s_0}\delta_{ij}+\int d^3v\{\partial v_j(v_i f_{s0})\} \\
&= -n_{s_0}I
\end{aligned}
$$

ここで、3段目の2項目は$[-\infty,\infty]$の積分で0になることを利用した。さもなくば、1次のモーメント、つまりバルク速度が無限大に発散してしまうからだ。これを代入すると、

$$
\sigma(\omega,\mathbf{k}) = \sum_s \frac{q_s^2}{im_s\omega}\left[-n_{s0}I+\int d^3v\mathbf{v}\int_0^\infty d\tau\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla f_{s0}+i\nabla_v f_{s0}\mathbf{kv}\right\}e^{i\varphi(\tau)}\right] \tag{15}
$$

である。これが磁化プラズマ中の電気伝導度を表す式である。

## 粒子軌道の計算

(15)の積分を実行する際に、正確な粒子の位置と速度が必要になる。ここでは空間一様なプラズマ中の線形波動を考えているので、粒子の運動は以下のように簡単なジャイロ運動により解析的に記述できる。

$$
\begin{cases}
v_x(\tau) = v_\perp\cos(\omega_{cs}\tau+\theta) \\
v_y(\tau) = v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta) \\
v_z(\tau) = v_\parallel \\
x(\tau) = x(0)+\dfrac{v_\perp}{\omega_{cs}}\{\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)-\sin\theta\} \\
y(\tau) = y(0)-\dfrac{v_\perp}{\omega_{cs}}\{\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)-\cos\theta\} \\
z(\tau) = z(0)+v_\parallel\tau
\end{cases} \tag{16}
$$

ここで背景磁場はz軸方向に存在していると仮定している。
$\omega_{cs}$は粒子種sのジャイロ周波数である。$\theta$は初期位相であり、このパラメータを変化させることであらゆる初期速度の粒子軌道に対応させている。

> *通常、位置を$x=r_L\cos$のような形で書くことが多いが、ここでは速度を$v_x=v_\perp\cos$のような形で表現している。これは単純に後の式変形の都合であり、逆でも問題ない。ただ、ほとんどの教科書でこのように設定されているのでここでもそれに倣う。*

ここで、波の波数ベクトルがx-z平面内にあるとしても一般性を失わないので、$\mathbf{k}=k_\perp\mathbf{e}_x+k_\parallel\mathbf{e}_z$とする。これらを用いると、$\varphi(\tau)$を具体的に以下のように書くことができる。

$$
\begin{aligned}
\varphi(\tau) &= \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{cs}}(\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)-\sin\theta)+(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau \\
&= \lambda_s(\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)-\sin\theta)+(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau \quad (\lambda_s=k_\perp v_\perp/\omega_{cs})
\end{aligned} \tag{17}
$$

## 電気伝導度の具体的な表式

(15)の$\tau$についての積分を取り出し、

$$
\mathbf{F} = \int_0^\infty d\tau\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla f_{s0}+i\nabla_v f_{s0}\mathbf{kv}\right\}e^{i\varphi(\tau)} \tag{18}
$$

とおく。まず、被積分関数の1項目を展開する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\nabla_v f_{s0}) &= \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\right)\nabla_v f_{s0} \\
&= \frac{\partial}{\partial\tau}(\nabla_v f_{s0})
\end{aligned}
$$

平衡状態において空間一様なプラズマを考えているため、$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}} = 0$である。

$$
\begin{aligned}
\nabla_v = &\left(\frac{\partial v_\perp}{\partial v_x}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\partial v_\parallel}{\partial v_x}\frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial\theta}{\partial v_x}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_x + \\
&\left(\frac{\partial v_\perp}{\partial v_y}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\partial v_\parallel}{\partial v_y}\frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial\theta}{\partial v_y}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_y + \\
&\left(\frac{\partial v_\perp}{\partial v_z}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \frac{\partial v_\parallel}{\partial v_z}\frac{\partial}{\partial v_\parallel} + \frac{\partial\theta}{\partial v_z}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z
\end{aligned}
$$

$$
v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad v_\parallel = v_z
$$

であるので、

$$
\nabla_v f_{s0} = \left(\mathbf{e}_x\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \mathbf{e}_y\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \mathbf{e}_z\frac{\partial}{\partial v_\parallel}\right)f_{s0} \tag{19}
$$

となる。ただし、$f_{s0}$は$\theta$に依存しない、つまり平衡状態の速度分布はジャイロ等方(gyrotropic)であるということを仮定して$\theta$についての微分を含む項を落としている。ジャイロ非等方な分布は一般的に不安定であるため、平衡状態であればジャイロ等方であるという仮定は十分妥当である。

(19)より、

$$
\frac{\partial}{\partial\tau}(\nabla_v f_{s0}) = \left(-\mathbf{e}_x\omega_{cs}\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial}{\partial v_\perp} + \mathbf{e}_y\omega_{cs}\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial}{\partial v_\perp}\right)f_{s0} \tag{20}
$$

となる。

次に、(18)の被積分関数の第2項目を展開する。

$$
\begin{aligned}
\nabla_v f_{s0}\mathbf{k}\mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} \\ \sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} \\ \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k_\perp v_\perp\cos(\omega_{cs}\tau+\theta) & k_\perp v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta) & k_\perp v_\parallel \\ 0 & 0 & 0 \\ k_\parallel v_\perp\cos(\omega_{cs}\tau+\theta) & k_\parallel v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta) & k_\parallel v_\parallel \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_\perp v_\perp\cos^2(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + k_\parallel v_\perp\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \\ k_\perp v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + k_\parallel v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \\ k_\perp v_\parallel\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + k_\parallel v_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \end{pmatrix}^T
\end{aligned} \tag{21}
$$

(20, 21)より、

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\nabla_v f_{s0} + i\nabla_v f_{s0}\mathbf{k}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\omega_{cs}\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\perp v_\perp\cos^2(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\parallel v_\perp\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \\ \omega_{cs}\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\perp v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\parallel v_\perp\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \\ ik_\perp v_\parallel\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\parallel v_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} \end{pmatrix}^T \tag{22}
$$

となる。以下、この式を(18)に代入し、$F$の各成分を求める。
(18)にはexpの指数に三角関数が入った形が出てくるので、それらを積分可能な形に変形するためにベッセル関数を用いる。ベッセル関数の性質については、こちらを参照 (ベッセル関数)。

### $F_x$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\tau\left\{-\omega_{cs}\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\perp v_\perp\cos^2(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\parallel v_\perp\cos(\omega_{cs}\tau+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}\right\}\cdot e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau}\cdot e^{i\lambda_s\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)}\cdot e^{-i\lambda_s\sin\theta} \\
&= e^{-i\lambda_s\sin\theta}\left[\int_0^\infty d\tau\, e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{i\omega_{cs}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}J_n' + ik_\perp v_\perp\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\left(\left(\frac{n}{\lambda_s}\right)^2 J_n - \frac{1}{\lambda_s}J_n'\right) + ik_\parallel v_\perp\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}\frac{n}{\lambda_s}J_n\right\}e^{in(\omega_{cs}\tau+\theta)}\right] \\
&= e^{-i\lambda_s\sin\theta}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}\int_0^\infty d\tau\left\{i\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)J_n\right\}e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs})\tau}\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m e^{-im\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}\left\{i\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)J_n\right\}\int_0^\infty d\tau\, e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs})\tau} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}iJ_mJ_n e^{i(n-m)\theta}\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\left[\frac{e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs})\tau}}{i(k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs})}\right]_0^\infty \\
&= -\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_mJ_n e^{i(n-m)\theta}\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\frac{1}{k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs}}
\end{aligned} \tag{23}
$$

$F_y$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\tau \left\{\omega_{cs}\cos(\omega_{cs}+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\perp v_\perp \sin(\omega_{cs}+\theta)\cos(\omega_{cs}+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} + ik_\parallel v_\perp \sin(\omega_{cs}+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}\right\}\cdot\ e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau}\ \cdot\ e^{i\lambda_s\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)}\ \cdot\ e^{-i\lambda_s\sin\theta} \\
&= e^{i\lambda_s\sin\theta}\left[\int_0^\infty d\tau\ e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\omega_{cs}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\frac{n}{\lambda_s}J_n - k_\perp v_\perp \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} n\left(\frac{J_n}{\lambda_s^2}-\frac{J_n'}{\lambda_s}\right) + ik_\parallel v_\perp \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}J_n'\right)e^{in(\omega_{cs}+\theta)}\right] \\
&= -i\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m J_n' e^{i(n-m)\theta}\ v_\perp\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}+\frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\frac{1}{k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs}}
\end{aligned} \tag{24}$$

$F_z$

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty d\tau\left\{ik_\perp v_\parallel\cos(\omega_{cs}+\theta)\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}+ik_\parallel v_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}\right\}\cdot\ e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau}\ \cdot\ e^{i\lambda_s\sin(\omega_{cs}\tau+\theta)}\ \cdot\ e^{-i\lambda_s\sin\theta} \\
&= e^{\lambda_s\sin\theta}\left[\int_0^\infty d\tau\ e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega)\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(ik_\perp v_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\frac{n}{\lambda_s}J_n+ik_\parallel v_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}J_n\right)e^{in(\omega_{cs}\tau+\theta)}\right] \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_nJ_m e^{i(n-m)\theta} i v_\parallel\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}+\frac{nk_\perp}{\lambda_s}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\int_0^\infty d\tau e^{i(k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs})\tau} \\
&= -\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_nJ_m e^{i(n-m)\theta}v_\parallel\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}+\frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\frac{1}{k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs}}
\end{aligned} \tag{25}$$

以上が$\mathbf{F}$の各成分である。次に(15)に含まれる$\mathbf{F}$の速度についての積分を行う。速度の積分は以下の通り円筒座標系で行う。

$$\int d^3v = \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \int_0^{2\pi} d\theta$$

まず、$\mathbf{F}$の全ての成分に共通して含まれる項を以下のようにおく。

$$A_n = \left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}+\frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\frac{1}{k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs}} \tag{26}$$

そうすると、$\mathbf{F}$の各成分は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
F_x &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_nJ_m\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}A_n\ e^{i(n-m)\theta} \\
F_y &= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_n'J_m v_\perp A_n\ e^{i(n-m)\theta} \\
F_z &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_nJ_m v_\parallel A_n\ e^{i(n-m)\theta}
\end{aligned} \tag{27}$$

次に、(15)に含まれるテンソル$\mathbf{vF}$の成分以下のようになる。

$$\mathbf{vF} = \begin{pmatrix} v_\perp\cos\theta\,F_x & v_\perp\cos\theta\,F_y & v_\perp\cos\theta\,F_z \\ v_\perp\sin\theta\,F_x & v_\perp\sin\theta\,F_y & v_\perp\sin\theta\,F_z \\ v_\parallel F_x & v_\parallel F_y & v_\parallel F_z \end{pmatrix}$$

これを方位角$\theta$について積分する。
その際に必要になる積分は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n J_m e^{i(n-m)\theta} \cos\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n J_m \left( \frac{e^{i(n-m+1)\theta}}{2} + \frac{e^{i(n-m-1)\theta}}{2} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (2\pi \delta_{n,m-1} J_n J_m + 2\pi \delta_{n,m+1} J_n J_m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \pi J_n (J_{n-1} + J_{n+1}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi n \frac{J_n^2}{\lambda_s}
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n J_m e^{i(n-m)\theta} \sin\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n J_m \left( \frac{e^{i(n-m+1)\theta}}{2i} - \frac{e^{i(n-m-1)\theta}}{2i} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2i} (2\pi \delta_{n,m-1} J_n J_m - 2\pi \delta_{n,m+1} J_n J_m) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i\pi J_n (J_{n+1} - J_{n-1}) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i\pi J_n J_n'
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n' J_m e^{i(n-m)\theta} \cos\theta \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi n \frac{J_n J_n'}{\lambda_s}
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n' J_m e^{i(n-m)\theta} \sin\theta \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2i\pi J_n'^2
\end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n J_m e^{i(n-m)\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi J_n^2
\end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
a_6 &= \int_0^{2\pi} d\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n' J_m e^{i(n-m)\theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi J_n J_n'
\end{aligned} \tag{33}$$

これらより、

$$\begin{aligned}
\int d^3v \, \mathbf{v}\mathbf{F} &= \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^{\infty} v_\perp dv_\perp \int_0^{2\pi} d\theta \, \mathbf{v}\mathbf{F} \\
&= -2\pi \sum_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^{\infty} v_\perp dv_\perp A_n \, \mathbf{S}_{ns}
\end{aligned}$$

ただし、$\mathbf{S}_{ns}$は以下のようなテンソルである。

$$\mathbf{S}_{ns} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\right)^2 J_n^2 & i\frac{v_\perp \omega_{cs}}{k_\perp} n J_n J_n' & \frac{v_\parallel \omega_{cs}}{k_\perp} n J_n^2 \\ -i\frac{v_\perp \omega_{cs}}{k_\perp} n J_n J_n' & v_\perp^2 J_n' & -iv_\perp v_\parallel J_n J_n' \\ \frac{v_\parallel \omega_{cs}}{k_\perp} n J_n^2 & iv_\perp v_\parallel J_n J_n' & v_\parallel^2 J_n^2 \end{pmatrix} \tag{34}$$

これを(15)へ代入することで、電気伝導度を求めることができる。

# 分散関係式

## 誘電率テンソル

$$
\begin{aligned}
\epsilon(\omega,\mathbf{k}) &= I + \frac{i}{\omega\epsilon_0}\sigma(\omega,\mathbf{k}) \\
&= \left(1-\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right)I- \\
&\sum_s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi\omega_{ps}^2}{n_{s0}\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}dv_\parallel\int_0^\infty v_\perp dv_\perp\left[\left(k_\parallel\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel}+\frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right)\frac{\mathbf{S}_{ns}}{k_\parallel v_\parallel-\omega+n\omega_{cs}}\right]
\end{aligned}
\tag{35}
$$

## 分散関係

$$
\begin{aligned}
\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}-I\right)+\epsilon = \frac{c^2}{\omega^2}\begin{pmatrix}-k_\parallel^2 & 0 & k_\perp k_\parallel\\ 0 & -k^2 & 0\\ k_\perp k_\parallel & 0 & -k_\perp^2\end{pmatrix}+\epsilon \\
n = \frac{kc}{\omega} \\
n_\perp = \frac{k_\perp c}{\omega} \\
n_\parallel = \frac{k_\parallel c}{\omega}
\end{aligned}
\tag{36}
$$

とすれば、分散関係式は、

$$
\begin{aligned}
D(\omega,\mathbf{k}) &= \det\left(\frac{k^2c^2}{\omega^2}\left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2}-I\right)+\epsilon\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix}-n_\parallel^2 & 0 & n_\perp n_\parallel\\ 0 & n^2 & 0\\ n_\perp n_\parallel & 0 & -n_\perp^2\end{pmatrix}+\epsilon(\omega,\mathbf{k})\right)
\end{aligned}
$$

---

# 参考


- BASIC SPACE PLASMA PHYSICS (Baumjohann and Treumann)
- 高温プラズマの物理学