Lysak and Lotko (1996)
https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1029/95JA03712

Apendix: Derivation of Equation (5)

背景磁場ありの熱的プラズマ中の波動の分散関係式
マクスウェル分布に従う磁化プラズマ中の波動の分散関係

一般的な解を求めることは困難なので、以下のような近似をして、解析解を求める。

- 低周波: $\omega \ll \omega_{ci}$
- 長波長: $k_\parallel v_{th} \ll \omega_{ci}$ （平行波長についての条件はなし）
- 温度等方

プラズマ分散関数$Z(\xi_{ns})$の引数ξ_{ns}について、長波長近似の下では、$n \neq 0$の時に、

$$\xi_{ns} = \left| \frac{\omega - n\omega_{cs}}{k_\parallel} \right| \gg 1$$

となるため、これを用いてZを近似する。

まず、Zの積分区間を以下のように分ける。

$$Z(\xi_{ns}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{|z| \geq \xi_{ns}} \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{ns}} dz + \int_{-\xi_{ns}}^{\xi_{ns}} \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{ns}} dz \right]$$

左辺第2項の被積分関数は、$z/\xi_{ns} < 1$として無限等比級数展開して、

$$\begin{aligned} \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{ns}} &= -\frac{e^{-z^2}}{\xi_{ns}(1 - z/\xi_{ns})} \\ &= -\frac{e^{-z^2}}{\xi_{ns}} \left[1 + \frac{z}{\xi_{ns}} + \left(\frac{z}{\xi_{ns}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\xi_{ns}} \right)^3 + \cdots \right] \end{aligned}$$

となる。また、第1項については、

$$\int_{|z| \geq \xi_{ns}} \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{ns}} dz < e^{-\xi_{ns}^2} \int_{|z| \geq \xi_{ns}} \frac{dz}{z - \xi_{ns}} = e^{-\xi_{ns}^2} [\log |z - \xi_{ns}|]_{|z| \geq \xi_{ns}}$$

であるが、ξ_{ns} が十分大きければ、この項は第2項に比べて無視することができる。

これより、

$$Z(\xi_{ns}) \sim -\frac{1}{\xi_{ns}\sqrt{\pi}} \int_{-\xi_{ns}}^{\xi_{ns}} e^{-z^2} \left[1 + \frac{z}{\xi_{ns}} + \left(\frac{z}{\xi_{ns}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\xi_{ns}} \right)^3 + \cdots \right] dz$$

と近似できる。さらに、4次以降の項を無視し、ξ_{ns}が十分大きいことから積分区間を$[-\infty, \infty]$とみなしてガウス積分すると、

$$Z(\xi_{ns}) \sim -\xi_{ns}^{-1} - \frac{1}{2}\xi_{ns}^{-3}$$

となる。

Link

- プラズマ分散関数
  - https://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/Plasma/node111.html
  - https://homepage.physics.uiowa.edu/~ghowes/teach/phys195/hw/195hw5.pdf