マクスウェル分布に従う磁化プラズマ中の運動論的波動

平衡状態の速度分布として、以下のような磁場方向に対して温度非等方性があるbi-Maxwellianを考える。

$$f_{s0}(v_\perp, v_\parallel) = \frac{n_{s0}}{\pi^{3/2} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2} - \frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \tag{1}$$

一応この式がVlasov方程式の平衡解であるか確認？

誘電率テンソル

磁化プラズマ中の一般的な誘電率テンソルの表式

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right) I - \\ \sum_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\omega_{ps}^2}{n_{s0}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \left[\left(k_\parallel \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right) \frac{\mathbf{S}_{ns}}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

ただし、

$$\mathbf{S}_{ns} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\right)^2 J_n^2 & i\frac{v_\perp \omega_{cs}}{k_\perp} n J_n J_n' & \frac{v_\parallel \omega_{cs}}{k_\perp} n J_n^2 \\ -i\frac{v_\perp\omega_{cs}}{k_\perp} n J_n J_n' & v_\perp^2 J_n'^2 & -i v_\perp v_\parallel J_n J_n' \\ \frac{v_\parallel\omega_{cs}}{k_\perp} n J_n^2 & i v_\perp v_\parallel J_n J_n' & v_\parallel^2 J_n^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である。ただし、J_nは第1種ベッセル関数であり、引数は$\lambda = k_\perp v_\perp / \omega_{cs}$である。導出はこちら。

f_{s0}として(1)の形を代入すると、

$$k_\parallel \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} = -\frac{2n_{s0}}{\pi^{3/2} v_{th_\parallel,s} v_{th_\perp,s}^2} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2} - \frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \times \left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)$$

となる。もう少し見通しをよくするために、(2)の粒子種sについての和の中身をϵ_sと置き、$v_\parallel$と$v_\perp$の部分に分けると、

$$\begin{aligned} \epsilon_s &= -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} I + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \mathbf{S}_{ns} \\ &= \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \left[-I + \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \mathbf{S}_{ns} \right] \end{aligned} \tag{4}$$

となる。

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = I + \sum_s \epsilon_s$$

$v_\perp$についての積分への準備（Weber 積分）

(4)における$v_\perp$について積分の準備を行う。以下のような被積分関数にベッセル関数とガウス関数を含んだ4種類の積分を計算しておく。

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_n^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W1}$$

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp^2 J_n J_n' \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W2}$$

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp^3 J_n'^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W3}$$

これらの積分を計算するために以下のような積分公式を用いる。この積分はWeber積分と呼ばれている。(Weber積分の導出はこちら)

$$\begin{aligned} W_n(\alpha) &= \int_0^\infty x J_n^2(\alpha x)\exp(-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

式(W1)について

$x = v_\perp / v_{th_\perp,s}$とすると、$J_n$の引数$\lambda_s$は、$\lambda_s = k_\perp v_\perp/\omega_{cs} = (k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs})x$となる。
従って、(W1)において、$\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}$とすれば、

$$\begin{aligned} (W1) &= v_{th_\perp,s}^2 \int_0^\infty x J_n^2(\alpha x)\exp(-x^2)dx \\ &= \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}) \end{aligned} \tag{6}$$

である。

式 (W2)について

まず、W_nの積分表示を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = \int_0^\infty x \frac{\mathrm{d}J_n^2(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha}\exp(-x^2)dx$$

である。ここで、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}\frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}$$

であるので、

$$\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = 2\int_0^\infty x^2 J_n J_n' \exp(-x^2)dx$$

となる。次にW_nの具体的な表式を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\}$$

であるので、先ほどの式と合わせると、

$$\int_0^\infty x^2 J_n J_n' e^{-x^2}dx = \frac{\alpha}{4}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} \tag{7}$$

となる。(W1)の場合と同様に変数変換をすれば、

$$\begin{aligned} (\mathrm{W2}) &= v_{th_\perp,s}^3 \int_0^\infty x^2 J_n(\alpha x) J_n'(\alpha x) e^{-x^2}dx \\ &= \frac{\alpha}{4}v_{th_\perp,s}^3 e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} \quad (\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}) \end{aligned} \tag{8}$$

式(W3)について

(7)の積分をSと置き、αで微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(J_n J_n'\right) dx \\
&= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}\left(J_n J_n'\right) dx \\
&= \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} (J_n'^2 + J_n J_n'') dx \\
&= \underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n'^2 dx}_{=A} + \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n J_n'' dx
\end{aligned}
$$

この右辺第一項が(W3)に相当する式である。これをAとおく。

$$
J_n''(\alpha x) = \left(\frac{n^2}{\alpha^2 x^2} - 1\right) J_n - \frac{1}{\alpha x} J_n'
$$

であることを利用すると、

$$
A = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{1}{\alpha} S - \frac{n^2}{\alpha^2} W_n + \underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n^2 dx}_{=B}
$$

である。右辺第4項は、

$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n^2 dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) x^2 J_n^2 dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} x^2 J_n^2 dx\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\left\{2x J_n^2 + x^2 \frac{\mathrm{d}J_n^2}{\mathrm{d}x}\right\} dx
\end{aligned}
$$

である。第1項は括弧の中身が$x \to 0, \infty$でどちらも0となるため0である。また、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}J_n^2}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}J_n^2(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)} \\
&= 2\alpha J_n' J_n
\end{aligned}
$$

であるので、

$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^\infty x e^{-x^2} J_n^2 dx + \alpha \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} J_n J_n' dx \\
&= W_n + \alpha S
\end{aligned}
$$

となる。これを元の式へ代入すると、

$$
A = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) S + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) W_n
$$

とかける。ここで登場する$dS/d\alpha$を計算する必要があるが、Sは(6)のように表されるので、修正ベッセル関数I_nの2階微分が必要になる。修正ベッセル関数の満たす微分方程式より、

$$
\frac{\mathrm{d}^2 I_n(z)}{\mathrm{d}z^2} = \left(\frac{n^2}{z^2} + 1\right) I_n - \frac{1}{z} I_n'
$$

となるので、

$$
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(2\alpha^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2} - 1\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{1}{4} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (2\alpha^2 + 1) I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)
$$

である。この時、

$$
I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\frac{\alpha^2}{2})} I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)
$$

であることに注意する。

最終的に、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n'^2(\alpha x) dx &= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) S + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) W_n \\
&= \left\{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{n^2}{2\alpha^2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{4} I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

と求められる。変数変換を行えば、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{W3}) &= v_{th_\perp,s}^4 \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n'^2(\alpha x) dx \\
&= v_{th_\perp,s}^4 \left\{ \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{n^2}{2\alpha^2} \right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2} \right) - \frac{\alpha^2}{4} I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2} \right) \right\} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \quad (\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs})
\end{aligned}
\tag{9}
$$

となる。

$v_\parallel$についての積分への準備（プラズマ分散関数の導入）

$v_\parallel$についての積分を簡単に表すため、以下のような積分関数であるプラズマ分散関数を導入する。

$$
Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z-\xi} e^{-z^2} dz \tag{10}
$$

始めにプラズマ分散関数の性質について確認しておく。

奇関数性

$$
Z(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z+\xi} e^{-z^2} dz
$$

ここで、$z' = -z$と置換すれば、

$$
Z(-\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{z'-\xi} e^{-z'^2} dz' = -Z(\xi) \tag{11}
$$

であるので奇関数である。

微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(z-\xi)^2} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-\xi} \right) e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{e^{-z^2}}{z-\xi} \right]_{-\infty}^\infty - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \underbrace{\frac{z}{z-\xi}}_{=1+\frac{\xi}{z-\xi}} e^{-z^2} dz \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz - 2\xi Z(\xi) \\
&= -2 - 2\xi Z(\xi)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

便宜上、プラズマ分散関数の被積分関数にzの冪乗をかけた積分も、ここで先に計算しておく。

- 1乗

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{z-\xi} e^{-z^2} dz &= -\frac{1}{2} Z'(\xi) \\
&= 1 + \xi Z(\xi)
\end{aligned}
\tag{13}
$$

- 2乗

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{z^2}{z-\xi} e^{-z^2} dz &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{z^2-\xi^2}{z-\xi} + \frac{\xi^2}{z-\xi} \right) e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^\infty z e^{-z^2} dz + \xi \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} dz + \xi^2 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-z^2}}{z-\xi} dz \right] \\
&= \xi + \xi^2 Z(\xi)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

誘電率テンソルの表式の計算

式(3)からわかるように、誘電率テンソルの成分で独立なものは6成分であることから、(4)式におけるϵ_sの成分を以下のように書くことができる。

$$\epsilon_s = \begin{pmatrix} \epsilon_{s1} & \epsilon_{s2} & \epsilon_{s3} \\ -\epsilon_{s2} & \epsilon_{s4} & -\epsilon_{s5} \\ \epsilon_{s3} & \epsilon_{s5} & \epsilon_{s6} \end{pmatrix} \tag{15}$$

ϵ_{s1}の計算

$v_\perp$の積分

式(6)より、

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) J_n^2 = \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

ただし、$\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}$である。
ここで、

$$\mu_s = \frac{1}{2}\alpha^2 \tag{16}$$

$$\Gamma_n(\mu_s) = e^{-\mu_s} I_n(\mu_s) \tag{17}$$

とすると、

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) J_n^2 = \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2} \Gamma_n(\mu_s) \tag{18}$$

となる。

$v_\parallel$の積分

$z = v_\parallel / v_{th_\parallel,s}$, $\xi_{sn} = (\omega - n\omega_{cs})/k_\parallel v_{th_\parallel,s}$とすると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) &= \frac{1}{v_{th_\parallel,s}} \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{z - \xi_{sn}} e^{-z^2} dz + \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{sn}} dz \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2 v_{th_\parallel,s}} Z'(\xi_{sn}) + \sqrt{\pi} \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} Z(\xi_{sn}) \end{aligned} \tag{19}$$

全体

(4)の大括弧の中身に(18), (19)を代入すると、

$$\begin{aligned} & -1 + \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \sum_{n=-\infty}^\infty \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2 v_{th_\parallel,s}} Z' + \sqrt{\pi} \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} Z\right) \left(\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\right)^2 \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2} \Gamma_n(\mu_s) \\ &= -1 + \sum_{n=-\infty}^\infty \frac{T_{\perp,s}}{T_{\parallel,s}} \left(-\frac{1}{2} Z' + \frac{n\omega_{cs} v_{th_\parallel,s}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} Z\right) \frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s} n^2 \\ &= -1 + \sum_{n=-\infty}^\infty \left(-\frac{1}{2} Z' \frac{T_{\perp,s}}{T_{\parallel,s}} + \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}} Z\right) \frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s} n^2 \\ &= -1 + \sum_{n=-\infty}^\infty \left[-\frac{1}{2} Z'(\xi_{sn}) \frac{T_{\perp,s}}{T_{\parallel,s}} + \left(\frac{\omega}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}} - \xi_{sn}\right) Z(\xi_{sn})\right] \frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s} n^2 \end{aligned}$$

ここで、温度異方性を表すパラメータとして、

$$A_s = \frac{T_{s\perp}}{T_{s\parallel}} - 1$$

を導入し、(12)を用いると、

$$= -1 + \sum_{n=-\infty}^\infty \left(-\frac{A_s}{2} Z'(\xi_{sn}) + \frac{\omega}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}} Z(\xi_{sn}) + 1\right) \frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s} n^2$$

となる。さらに、Appendixの(A3)式から

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s}n^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\mu_s}I_n(\mu_s)}{\mu_s}n^2=1$$

となり、ちょうど打ち消し合うので、

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\frac{A_s}{2}Z'(\xi_{sn})+\frac{\omega}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}}Z(\xi_{sn})\right)\frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s}n^2$$

である。
(4)の係数をもとに戻すと最終的に、

$$\epsilon_{s1}=\frac{\omega_{ps}^2}{\omega k_\parallel v_{th_\parallel,s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(Z(\xi_{sn})-\frac{A_s k_\parallel v_{th_\parallel,s}}{2\omega}Z'(\xi_{sn})\right)\frac{\Gamma_n(\mu_s)}{\mu_s}n^2 \tag{20}$$

となる。

ϵ_{s2}の計算

$v_\parallel$の積分に関しては、ϵ_{s1}と全く同じなので、(19)がそのまま使える。$v_\perp$の積分については、(8)式を用いる。途中の変形はϵ_{s1}の時と同様なので省略すると、

$$\epsilon_{s2}=i\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\omega}{k_\parallel v_{th_\parallel,s}}Z(\xi_{sn})-\frac{A_s}{2}Z'(\xi_{sn})+1\right)ne^{-\mu_s}(I_n'(\mu_s)-I_n(\mu_s))$$

と変形できる。
ここで、修正ベッセル関数の次数について$I_n(z)=I_{-n}(z)$という対称性から、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}nI_n(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nI_n'(z)=0 \tag{21}$$

が成り立つことと、$\Gamma_n'(z)=e^{-z}(I_n'(z)-I_n(z))$となることを利用すれば、最終的に以下のように変形できる。

$$\epsilon_{s2}=i\frac{\omega_{ps}^2}{\omega k_\parallel v_{th_\parallel,s}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(Z(\xi_{sn})-\frac{A_s k_\parallel v_{th_\parallel,s}}{2\omega}Z'(\xi_{sn})\right)n\Gamma_n'(\mu_s) \tag{22}$$

ϵ_{s3}の計算

$v_\parallel$の積分

式(19)の計算と同様だが、$\mathbf{S}_{ns}$の13成分に$v_\parallel$が含まれる点が異なる。(19)の被積分関数に$v_\parallel=v_{th_\parallel,s}z$をかけて計算をすれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{z-\xi_{sn}}e^{-z^2}dz+\frac{n\omega_{cs}v_{th_\parallel,s}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z}{z-\xi_{sn}}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}\left[\xi_{sn}+\xi_{sn}^2Z(\xi_{sn})+\frac{n\omega_{cs}v_{th_\parallel,s}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2}(1+\xi_{sn}Z(\xi_{sn}))\right] \tag{23}$$

$v_\perp$の積分

式(6)をそのまま流用できる。

全体

Appendix

修正ベッセル関数の積分表示から導かれるフーリエ級数展開

$$e^{z\cos\theta}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}I_n(z)e^{in\theta} \tag{A0}$$

において、$\theta=0$とおくと、

$$e^z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z) \tag{A0'}$$

が成り立つことがわかる。この式の両辺にe^{-z}をかけると、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-z} I_n(z) = 1 \tag{A1}$$

となる。もしくは、$\Gamma_n(z) = e^{-z} I_n(z)$を用いて、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n(z) = 1 \tag{A1}$$

とも書ける。

(A0')の両辺をzで任意の回数微分してから、e^{-z}をかけることで、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-z} \frac{\mathrm{d}^k I_n(z)}{\mathrm{d}z^k} = 1 \tag{A2}$$

が導かれる。

(A0)の両辺をθについて2回微分してから、$\theta = 0$を代入することで、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 e^{-z} I_n(z) = z \tag{A3}$$

となる。[1]

参考文献

1. Baumjohann and Treumann, Basic Space Plasma Physics
2. 田中 基彦 西川 恭治, 高温プラズマの物理学, 丸善, 初版

---

1. 参考文献[2]では、$e^{\lambda \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(\lambda) \cos n\phi$ という関係式から(A1)-(A3)が導かれると書いてあるが、$I_n(\lambda) = I_{-n}(\lambda)$という関係式を使えば(A0)から出てくる。 ↩