マクスウェル分布に従う磁化プラズマ中の波動

平衡状態の速度分布として、以下のような磁場方向に対して温度非等方性があるbi-Maxwellianを考える。

$$f_{s0}(v_\perp, v_\parallel) = \frac{n_{s0}}{\pi^{3/2} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2} - \frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \tag{1}$$

一応この式がVlasov方程式の平衡解であるか確認？

誘電率テンソル

磁化プラズマ中の一般的な誘電率テンソルの表式

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = \left(1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\right) I - \\ \sum_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi\omega_{ps}^2}{n_{s0}\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp dv_\perp \left[\left(k_\parallel \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp}\right) \frac{\mathbf{S}_{ns}}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}}\right]\end{aligned} \tag{2}$$

ただし、

$$\mathbf{S}_{ns} = \begin{pmatrix} \left(\frac{n\omega_{cs}}{k_\perp}\right)^2 J_n^2 & i\frac{v_\perp\omega_{cs}}{k_\perp} nJ_nJ_n' & \frac{v_\parallel\omega_{cs}}{k_\perp} nJ_n^2 \\ -i\frac{v_\perp\omega_{cs}}{k_\perp} nJ_nJ_n' & v_\perp^2 J_n'^2 & -iv_\perp v_\parallel J_nJ_n' \\ \frac{v_\parallel\omega_{cs}}{k_\perp} nJ_n^2 & iv_\perp v_\parallel J_nJ_n' & v_\parallel^2 J_n^2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

である。ただし、J_nは第1種ベッセル関数であり、引数は$\lambda = k_\perp v_\perp/\omega_{cs}$である。導出はこちら。

f_{s0}として(1)の形を代入すると、

$$k_\parallel \frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\parallel} + \frac{n\omega_{cs}}{v_\perp}\frac{\partial f_{s0}}{\partial v_\perp} = -\frac{2n_{s0}}{\pi^{3/2} v_{th_\parallel,s} v_{th_\perp,s}^2} \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2} - \frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \times \left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)$$

となる。もう少し見通しをよくするために、(2)の粒子種sについての和の中身をϵ_sと置き、$v_\parallel$と$v_\perp$の部分に分けると、

$$\begin{aligned}\epsilon_s &= -\frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \mathbf{S}_{ns} \\ &= \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2}\left[-1 + \frac{4}{\sqrt{\pi} v_{th_\perp,s}^2 v_{th_\parallel,s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \mathbf{S}_{ns}\right]\end{aligned} \tag{4}$$

となる。

$$\epsilon(\omega, \mathbf{k}) = I + \sum_s \epsilon_s$$

$v_\perp$についての積分への準備（Weber 積分）

(4)における$v_\perp$について積分の準備を行う。以下のような被積分関数にベッセル関数とガウス関数を含んだ4種類の積分を計算しておく。

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp J_n^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W1}$$

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp^2 J_n J_n' \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W2}$$

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp^3 J_n'^2 \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) \tag{W3}$$

これらの積分を計算するために以下のような積分公式を用いる。この積分はWeber積分と呼ばれている。(Weber積分の導出はこちら)

$$\begin{aligned} W_n(\alpha) &= \int_0^\infty x J_n^2(\alpha x)\exp(-x^2)dx \\ &= \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

式(W1)について

$x = v_\perp / v_{th_\perp,s}$とすると、$J_n$の引数$\lambda_s$は、$\lambda_s = k_\perp v_\perp/\omega_{cs} = (k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs})x$となる。
従って、(W1)において、$\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}$とすれば、

$$\begin{aligned} (W1) &= v_{th_\perp,s}^2 \int_0^\infty x J_n^2(\alpha x)\exp(-x^2)dx \\ &= \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad (\alpha = k_\perp v_\perp/\omega_{cs}) \end{aligned} \tag{6}$$

である。

式 (W2)について

まず、W_nの積分表示を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = \int_0^\infty x \frac{\mathrm{d}J_n^2(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha}\exp(-x^2)dx$$

である。ここで、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}\frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}$$

であるので、

$$\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = 2\int_0^\infty x^2 J_n J_n' \exp(-x^2)dx$$

となる。次にW_nの具体的な表式を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}W_n}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\}$$

であるので、先ほどの式と合わせると、

$$\int_0^\infty x^2 J_n J_n' e^{-x^2}dx = \frac{\alpha}{4}e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} \tag{7}$$

となる。(W1)の場合と同様に変数変換をすれば、

$$\begin{aligned} (\mathrm{W2}) &= v_{th_\perp,s}^3 \int_0^\infty x^2 J_n(\alpha x) J_n'(\alpha x) e^{-x^2}dx \\ &= \frac{\alpha}{4}v_{th_\perp,s}^3 e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\left\{I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} \quad (\alpha = k_\perp v_\perp/\omega_{cs}) \end{aligned} \tag{8}$$

式(W3)について

(7)の積分をSと置き、αで微分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} &= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(J_n J_n'\right) dx \\
&= \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} \frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\alpha x)}\left(J_n J_n'\right) dx \\
&= \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} (J_n'^2 + J_n J_n'') dx \\
&= \underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n'^2 dx}_{=A} + \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n J_n'' dx
\end{aligned}
$$

この右辺第一項が(W3)に相当する式である。これをAとおく。

$$
J_n''(\alpha x) = \left(\frac{n^2}{\alpha^2 x^2} - 1\right) J_n - \frac{1}{\alpha x} J_n'
$$

であることを利用すると、

$$
A = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} + \frac{1}{\alpha} S - \frac{n^2}{\alpha^2} W_n + \underbrace{\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n^2 dx}_{=B}
$$

である。右辺第4項は、

$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n^2 dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right) x^2 J_n^2 dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} x^2 J_n^2 dx\right]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \left\{2x J_n^2 + x^2 \frac{\mathrm{d}J_n^2}{\mathrm{d}x}\right\} dx
\end{aligned}
$$

である。第1項は括弧の中身が$x \to 0, \infty$でどちらも0となるため0である。また、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}J_n^2}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(\alpha x)}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}J_n^2(\alpha x)}{\mathrm{d}(\alpha x)} \\
&= 2\alpha J_n' J_n
\end{aligned}
$$

であるので、

$$
\begin{aligned}
B &= \int_0^\infty x e^{-x^2} J_n^2 dx + \alpha \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} J_n J_n' dx \\
&= W_n + \alpha S
\end{aligned}
$$

となる。これを元の式へ代入すると、

$$
A = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) S + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) W_n
$$

とかける。ここで登場する$dS/d\alpha$を計算する必要があるが、Sは(6)のように表されるので、修正ベッセル関数I_nの2階微分が必要になる。修正ベッセル関数とその微分との間に成り立つ関係式を利用すると、

$$
\frac{\mathrm{d}^2 I_n(z)}{\mathrm{d}z^2} = \left(\frac{n^2}{z^2} + 1\right) I_n - \frac{1}{z} I_n'
$$

であることが導かれるので、

$$
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \left(2\alpha^2 + \frac{4n^2}{\alpha^2} - 1\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{1}{4} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} (2\alpha^2 + 1) I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)
$$

である。この時、

$$
I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\frac{\alpha^2}{2})} I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)
$$

であることに注意する。

最終的に、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n'^2(\alpha x) dx &= \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha} + \alpha\right) S + \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) W_n \\
&= \left\{\left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{n^2}{2\alpha^2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{4} I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)\right\} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

と求められる。変数変換を行えば、

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{W3}) &= v_{th_\perp,s}^4 \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} J_n'^2(\alpha x) dx \\
&= v_{th_\perp,s}^4 \left\{ \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{n^2}{2\alpha^2} \right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\alpha^2}{4} I_n'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \right\} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \quad (\alpha = k_\perp v_\perp/\omega_{cs})
\end{aligned} \tag{9}
$$

となる。

$v_\parallel$についての積分への準備（プラズマ分散関数の導入）

$v_\parallel$についての積分を簡単に表すため、以下のような積分関数であるプラズマ分散関数を導入する。

$$
Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-\xi} e^{-z^2} dz \tag{10}
$$

始めにプラズマ分散関数の性質について確認しておく。

奇関数性

$$
Z(-\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z+\xi} e^{-z^2} dz
$$

ここで、$z' = -z$と置換すれば、

$$
Z(-\xi) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z'-\xi} e^{-z'^2} dz' = -Z(\xi) \tag{11}
$$

であるので奇関数である。

微分

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-\xi)^2} e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z-\xi}\right) e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{e^{-z^2}}{z-\xi} \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{z}{z-\xi}}_{=1+\frac{\xi}{z-\xi}} e^{-z^2} dz \\
&= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz - 2\xi Z(\xi) \\
&= -2 - 2\xi Z(\xi)
\end{aligned} \tag{12}
$$

便宜上、プラズマ分散関数の被積分関数にzの冪乗をかけた積分も、ここで先に計算しておく。

- 1乗

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{z-\xi} e^{-z^2} dz &= -\frac{1}{2} Z'(\xi) \\
&= 1 + \xi Z(\xi)
\end{aligned} \tag{13}
$$

- 2乗

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{z-\xi} e^{-z^2} dz &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{z^2-\xi^2}{z-\xi} + \frac{\xi^2}{z-\xi} \right) e^{-z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2} dz + \xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz + \xi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{z-\xi} dz \right] \\
&= \xi + \xi^2 Z(\xi)
\end{aligned} \tag{14}
$$

誘電率テンソルの表式の計算

式(3)からわかるように、誘電率テンソルの成分で独立なものは6成分であることから、(4)式におけるϵ_sの成分を以下のように書くことができる。

$$\epsilon_s = \begin{pmatrix} \epsilon_{s1} & \epsilon_{s2} & \epsilon_{s3} \\ -\epsilon_{s2} & \epsilon_{s4} & -\epsilon_{s5} \\ \epsilon_{s3} & \epsilon_{s5} & \epsilon_{s6} \end{pmatrix} \tag{15}$$

ϵ_{s1}の計算

$v_\perp$の積分

式(6)より、

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) J_n^2 = \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) I_n\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

ただし、$\alpha = k_\perp v_{th_\perp,s}/\omega_{cs}$である。
ここで、

$$\mu_s = \frac{1}{2}\alpha^2 \tag{16}$$
$$\Gamma(\mu_s) = e^{-\mu_s} I_n(\mu_s) \tag{17}$$

とすると、

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{v_{th_\perp,s}^2}\right) J_n^2 = \frac{v_{th_\perp,s}^2}{2} \Gamma(\mu_s) \tag{18}$$

となる。

$v_\parallel$の積分

$z = v_\parallel / v_{th_\parallel,s}$, $\xi_{sn} = (\omega - n\omega_{cs})/k_\parallel v_{th_\parallel,s}$とすると、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dv_\parallel \frac{\left(\frac{k_\parallel v_\parallel}{v_{th_\parallel,s}^2} + \frac{n\omega_{cs}}{v_{th_\perp,s}^2}\right)}{k_\parallel v_\parallel - \omega + n\omega_{cs}} \exp\left(-\frac{v_\parallel^2}{v_{th_\parallel,s}^2}\right) &= \frac{1}{v_{th_\parallel,s}} \int_{-\infty}^\infty \frac{z}{z - \xi_{sn}} e^{-z^2} dz + \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-z^2}}{z - \xi_{sn}} dz \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2 v_{th_\parallel,s}} Z'(\xi_{sn}) + \sqrt{\pi} \frac{n\omega_{cs}}{k_\parallel v_{th_\perp,s}^2} Z(\xi_{sn}) \end{aligned} \tag{19}$$

リンク

- Weber integralの証明 https://mtaylor.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/16915/2018/04/weber.pdf