ベッセル関数(Bessel function)

n次ベッセル関数はよく$J_n(x)$と表される。
英語では、Bessel function of first kind

ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \tag{1}$$

ここで、νは正の実数である。(ガンマ関数の収束に関わる。)
参考: [Gamma_Function]

母関数とベッセル関数の積分表示

ベッセル関数は、以下のような母関数をローラン展開した時の係数となっている(これをベッセル関数の定義とする場合もある)。

$$e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \tag{2}$$

この式の両辺をt^{m+1}で割り、$|t| = 1$の単位円周上で周回積分を行うと、左辺については以下のようになる。

$$\oint_{|t|=1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n-m-1} = J_m(z)\oint_{|t|=1}\frac{dt}{t} + \sum_{n=-\infty, n\neq m}^{\infty} J_n(z)\oint_{|t|=1} t^{n-m-1}dt \tag{3}$$

コーシーの積分定理より、右辺の第2項の積分は0になり、第1項の積分は$2\pi i$となる。したがって、

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1} e^{\frac{z}{2}(t-1/t)}t^{-n-1}dt \tag{4}$$

である。さらに$t = e^{i\theta}$とおけば、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} &= ie^{i\theta} \\ t - \frac{1}{t} &= e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \end{aligned} \tag{5}$$

となるので、

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{iz\sin\theta}\cdot e^{-i(n+1)\theta}\cdot ie^{i\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}d\theta \end{aligned} \tag{6}$$

である。$\theta = \pi$についての対称性を踏まえてもう少し変形すると、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(z\sin\theta - n\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\ \{\cos(z\sin\theta - n\theta) + i\sin(z\sin\theta - n\theta)\} \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)\,d\theta \end{aligned}$$

となる。

ベッセル関数の性質

漸化式 その1

ベッセル関数の母関数をtで微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\frac{z}{2}(t-1/t)}\right) &= \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{z}{2}e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} \\
&= \frac{z}{2}e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} + \frac{z}{2t^2}e^{\frac{z}{2}(t-1/t)} \\
&= \frac{z}{2}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^{n-2}\right\} \\
&= \frac{z}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(J_n(z)+J_{n+2}(z))t^n
\end{aligned} \tag{7}
$$

である。一方で、母関数のローラン展開表示(2)の方をtで微分すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n\right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(z)t^{n-1} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(n+1)J_n(z)t^n
\end{aligned} \tag{8}
$$

となる。これら2つの級数展開の係数を比較すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{z}{2}(J_n+J_{n+2}) = (n+1)J_{n+1} \\
\Leftrightarrow\quad &J_{n-1}+J_{n+1} = \frac{2n}{z}J_n
\end{aligned} \tag{9}
$$

という漸化式が成り立つことがわかる。

漸化式 その2

$$
\begin{aligned}
J_{n+1}-J_{n-1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(e^{i(z\sin\theta-(n+1)\theta)} - e^{i(z\sin\theta-(n-1)\theta)}\right)d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(e^{-i\theta}-e^{i\theta})e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-2i\sin\theta)e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta \\
&= -2\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}z}
\end{aligned} \tag{10}
$$

2階微分

(10)を繰り返し用いることで、

$$
\frac{\mathrm{d}^2J_n}{\mathrm{d}z^2} = \left(\frac{n^2}{z^2}-1\right)J_n - \frac{1}{z}J_n'
$$

が導かれる。

フーリエ級数

(6)のベッセル関数の積分表示は、$f(\theta)=e^{iz\sin\theta}$という関数のフーリエ係数の表式になっているので、逆フーリエ変換により以下のように変形できる。

$$
e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)e^{in\theta} \tag{11}
$$

ベッセル関数を微分し、上と同じようにフーリエ級数展開として捉えると、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}J_n(z)}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i\sin\theta\, e^{i(z\sin\theta - n\theta)}d\theta \\
\Rightarrow\quad \sin\theta\, e^{iz\sin\theta} &= (-i)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}J_n(z)}{\mathrm{d}z}e^{in\theta}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

という関係式が導かれる。

次に、以下のような積分を考える。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2}e^{i(z\sin\theta-(n-1)\theta)}+\frac{1}{2}e^{i(z\sin\theta-(n+1)\theta)}\right\}d\theta \\
&= \frac{J_{n-1}}{2}+\frac{J_{n+1}}{2}
\end{aligned}
$$

ここで、(9)の漸化式を用いれば、

$$
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\, e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta = \frac{n}{z}J_n \tag{13}
$$

となる。この式も、フーリエ係数の表式になっていることに注意すると、

$$
\cos\theta\, e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n}{z}J_n(z)e^{in\theta} \tag{14}
$$

が成り立つ。また、この式の両辺をzで微分して変形すれば、

$$
\sin\theta\cos\theta\, e^{iz\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in\left(\frac{J_n(z)}{z^2}-\frac{J_n'(z)}{z}\right)e^{in\theta} \tag{15}
$$

対称性

(6)において、nを$-n$に置き換えると、

$$
\begin{aligned}
J_{-n}(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(z\sin\theta+n\theta)}d\theta \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\theta'-n\theta')}d\theta' \quad (\because \theta'=\pi-\theta) \\
&= (-1)^n J_n
\end{aligned}
\tag{15}
$$

その他

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}\right)e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}e^{i(z\sin\theta-(n-2)\theta)}+\frac{1}{2}e^{i(z\sin\theta-(n+2)\theta)}+d\theta \\
&= \frac{1}{2}J_{n-2}+\frac{1}{2}J_{n+2} \\
&= \frac{1}{2}(J_{n-2}+J_n+J_n+J_{n+2}-2J_n) \\
&= \frac{n-1}{z}J_{n-1}+\frac{n+1}{z}J_{n+1}-J_n \\
&= \frac{n}{z}(J_{n-1}+J_{n+1})+\frac{1}{z}(J_{n+1}-J_{n-1})-J_n \\
&= 2\left(\frac{n}{z}\right)^2 J_n - J_n - \frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}z}
\end{aligned}
$$

これより、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta &= \left(\frac{n}{z}\right)^2 J_n - \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}z} \\
\Rightarrow\quad \cos^2\theta\, e^{iz\sin\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{n}{z}\right)^2 J_n - \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}J_n}{\mathrm{d}z}\right\}e^{in\theta}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

ベッセル関数の級数表示

$$e^{\frac{xt}{2}}e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k t^k \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left(-\frac{x}{2}\right)^l t^{-l}$$

$n = k - l$とすれば、$n \in \mathbb{Z}$であるから、

$$\begin{aligned}&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(n+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+l}t^{n+l}\frac{1}{l!}\left(-\frac{x}{2}\right)^l t^{-l}\\ =&\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\right\}t^n\end{aligned}$$

これはローラン展開の形になっているので、その係数がベッセル関数になることを思い出すと、

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!(n+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \tag{17}$$

である。nが非整数の場合には、階乗をガンマ関数に置き換えて、

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!\Gamma(n+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \tag{18}$$

となる。

修正ベッセル関数 (Modified Bessel function)

修正ベッセル関数は、

$$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) \tag{17}$$

と定義される。

修正ベッセル関数の母関数

修正ベッセル関数は、以下のような母関数をローラン展開した時の係数となっている。

$$e^{\frac{z}{2}(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)t^n$$

ベッセル関数の場合と同様（式(2)-(6))に変形すると、修正ベッセル関数の積分表示は、

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} e^{z\cos\theta - in\theta}d\theta$$

となる。また、この形がフーリエ級数展開の形になっていることから、

$$e^{z\cos\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(z)e^{in\theta}$$

修正ベッセル関数の級数表示

式で$x \to ix$とすれば、

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!\Gamma(n+l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \tag{18}$$

となる。

ベッセル関数を含む積分

Weber積分

熱平衡プラズマ中の分散関係式で出てくる以外の用途がわからない積分。

$$\begin{aligned} W_n(\alpha, \beta, \gamma) &= \int_0^{\infty} x J_n(\alpha x) J_n(\beta x) \exp(-\gamma x^2) dx \quad (\gamma > 0) \\ &= \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}\right) I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

この等式を示すためにはベッセル関数を具体的に書き下し積分を実行する必要がある。この時、1. 積分表示で表す方法と2. テイラー展開により表す方法、の2通りがパッと思いつく。1の方を選択した場合、最終的に三角関数を引数に持つ誤差関数の積分を行う必要が出てくるが、かなり煩雑である。よって2の方法により計算を進める。

まず、ベッセル関数の部分をテイラー展開により表す。

$$\begin{aligned} J_n(\alpha x) J_n(\beta x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{\alpha x}{2}\right)^{2m+n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+n+1)} \left(\frac{\beta x}{2}\right)^{2k+n} \\ &= \left(\frac{\alpha\beta}{4}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!k!\Gamma(m+n+1)\Gamma(k+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^m \left(-\frac{\beta^2}{4}\right)^k x^{2m+2k+2n} \end{aligned}$$

この式を元の式へ代入すると、

$$\left(\frac{\alpha\beta}{4}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!k!\Gamma(m+n+1)\Gamma(k+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4}\right)^m \left(-\frac{\beta^2}{4}\right)^k \int_0^{\infty} x^{2m+2k+2n+1} \exp(-\gamma x^2) dx$$

となる。ここで、$t = \gamma x^2$と置くと、xについての積分は以下のようにガンマ関数で表すことができる。

$$\frac{1}{2\gamma^{m+k+n+1}} \int_0^{\infty} t^{m+k+n} e^{-t} dt = \frac{1}{2\gamma^{m+k+n+1}} \Gamma(m+k+n+1)$$

これを代入すると、

$$\frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\alpha\beta}{4\gamma}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+n+1)}{m!k!\Gamma(m+n+1)\Gamma(k+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma}\right)^m \left(-\frac{\beta^2}{4\gamma}\right)^k$$

となる。この式を最終的な形に向けて変形していくのはやや複雑なので、ここからは最終形から遡ってこの形に持っていく方向で進めていく。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\gamma} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\gamma}\right) I_n\left(\frac{\alpha\beta}{2\gamma}\right) &= \frac{1}{2\gamma} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma}\right)^s \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{t!} \left(-\frac{\beta^2}{4\gamma}\right)^t \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{u!\Gamma(u+n+1)} \left(\frac{\alpha\beta}{4\gamma}\right)^{2u+n} \\ &= \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{\alpha\beta}{4\gamma}\right)^n \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{s!t!u!\Gamma(u+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma}\right)^{s+t} \left(-\frac{\beta^2}{4\gamma}\right)^{t+u} \end{aligned}$$

この式と先ほどの式を比較すると、示すべき等式は、

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+k+n+1)}{m!k!\Gamma(m+n+1)\Gamma(k+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma}\right)^m \left(-\frac{\beta^2}{4\gamma}\right)^k = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{s!t!u!\Gamma(u+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma}\right)^{s+u} \left(-\frac{\beta^2}{4\gamma}\right)^{t+u}$$

となる。この式が成り立つためには指数がm, kの項の係数が両辺で一致することを示れば十分である。よって、$s + u = m$, $t + u = k$と置いてその時の各項を比較する。対象性を考慮して$m \geq k$を仮定し、s, tを置き換えると右辺は、

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{k} \frac{1}{(m-u)!(k-u)!u!\Gamma(u+n+1)} \left(-\frac{\alpha^2}{4\gamma}\right)^m \left(-\frac{\beta^2}{4\gamma}\right)^k$$

であるので、

$$\frac{\Gamma(m+k+n+1)}{m!k!\Gamma(m+n+1)\Gamma(k+n+1)} = \sum_{u=0}^{k} \frac{1}{(m-u)!(k-u)!u!\Gamma(u+n+1)} \tag{*}$$

を示す。ここからの式変形をスムーズに行うため、下降冪を表すPochhammer symbolを導入する。

$$(n)_m = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1)}_{m} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-m+1)}$$

これを用いると、(*)は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m+k+n+1)}{\Gamma(m+n+1)} &= \sum_{u=0}^{k} \frac{m!}{(m-u)!} \frac{k!}{(k-u)!} \frac{1}{u!} \frac{\Gamma(k+n+1)}{\Gamma(u+n+1)} \\ \Leftrightarrow \qquad (m+n+k)_k &= \sum_{u=0}^{k} \binom{m}{u} \binom{k}{u} u!(n+k)_{(k-u)} \end{aligned}$$

こちら にあるPochhammer symbolの性質を用いて左辺を変形していくと、

$$\begin{aligned} (m+n+k)_k &= \sum_{u=0}^{k} \binom{k}{u} (m)_u (n+k)_{k-u} \\ &= \sum_{u=0}^{k} \binom{k}{u} \frac{(m)_u}{u!} u!(n+k)_{k-u} \\ &= \sum_{u=0}^{k} \binom{k}{u} \binom{m}{u} u!(n+k)_{k-u} \end{aligned}$$

となり、確かに右辺に一致することがわかる。以上よりWeber積分の表式が(19)のようになることが確認できた。

参考

- https://github-nakasho.github.io/math/bessel
- http://www.wannyan.net/scidog/spfunc/ch03.kk
- https://appliedmath.brown.edu/sites/default/files/fractional/35%20TheBesselFunctions.pdf
- 特殊関数を集めたサイト https://math-functions-1.watson.jp/index.html
- Bessel関数にやたら詳しいサイト(英語) https://dlmf.nist.gov/10
  - Bessel関数を含む色々な積分の公式集 https://dlmf.nist.gov/10.22
- Pochhamer記号 https://en.wikipedia.org/wiki/Falling_and_rising_factorials
- Weber積分の証明 https://mtaylor.web.unc.edu/wp-content/uploads/sites/16915/2018/04/weber.pdf