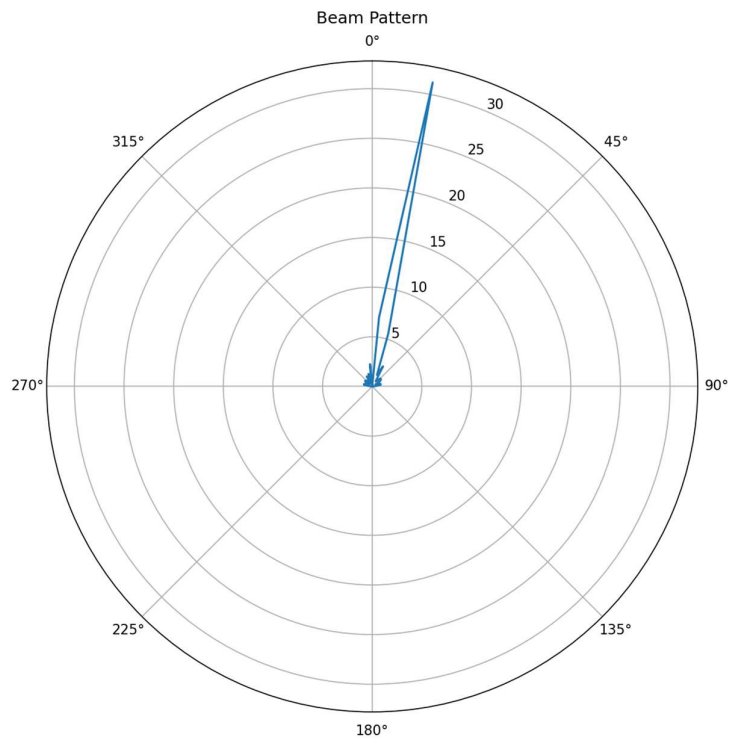


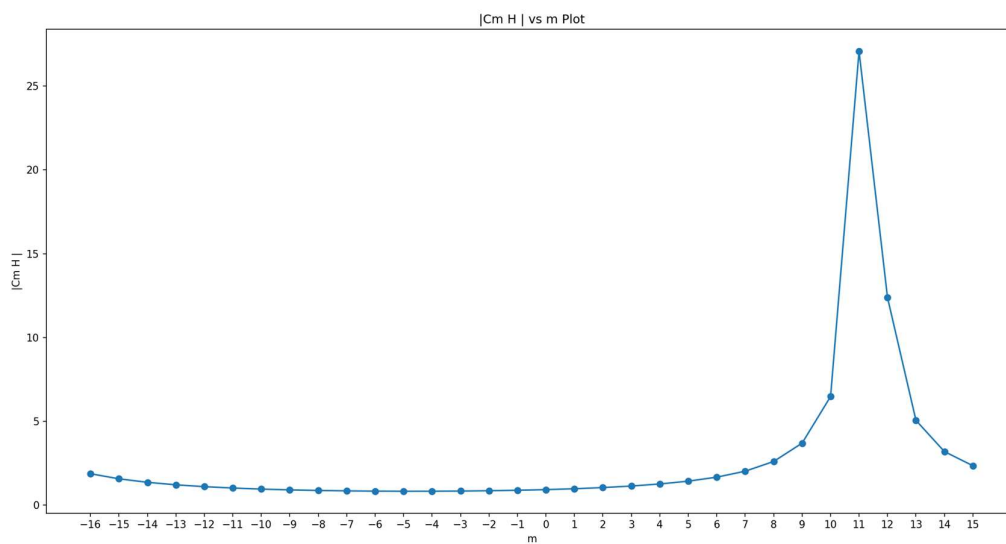
姓名: 葉冠宏 學號:R11943113

1.

(a)



(b)



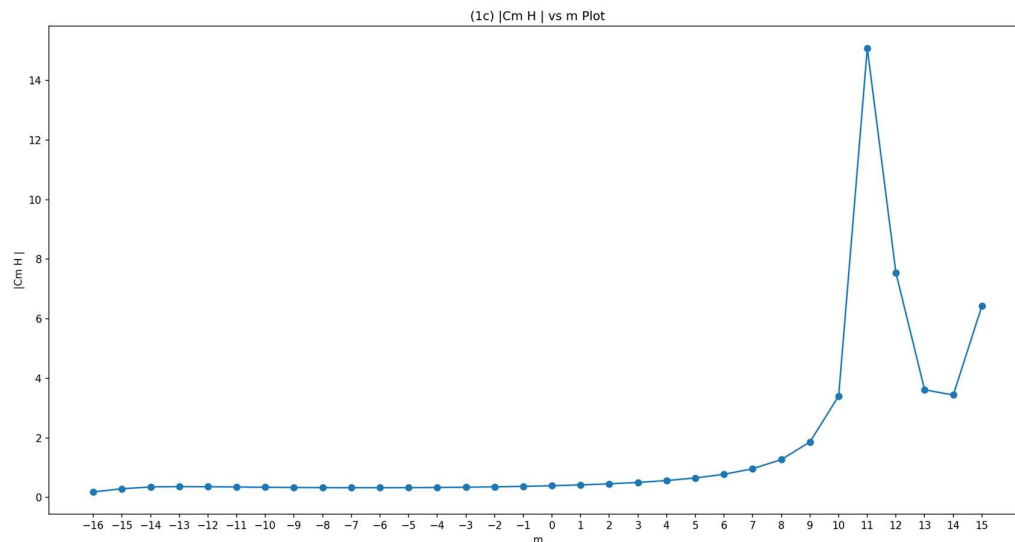
magnitude of the combination result:

```
|Cm H |
[1.8773494622951696, 1.5736609892943565, 1.3658662380800999, 1.2168996553074343, 1.1068426709379677, 1.024086326961817, 0.9614593717910944,
0.9143489730552379, 0.8797160491698122, 0.8555496852880653, 0.8405541203710586, 0.8339683910151418, 0.835468525836019, 0.8451277765409191,
0.8634255109722275, 0.8913068332600326, 0.9303072353317371, 0.982774596478881, 1.0522532275619598, 1.1441601226366076, 1.2670282779226203,
1.4349419564697399, 1.672730935039722, 2.028398072009916, 2.6080575787850924, 3.7014863011503056, 6.481109559315922, 27.06986355017052,
12.381227624026222, 5.058207692363472, 3.197691612026896, 2.3543760793697377]
```

```
thetar value: 0.7853981633974483 ,m value: 11 , psi value: 0.758040765426236
[Finished in 8.9s]
```

我們從以 $|Cm H|$ 為 y value，和 m 為 x value 所畫出的圖可以看到當 m 為 11 左右的時候， $|Cm H|$ 會有最大值 27.06986355017052。我們把 $m=11$ 帶入 $\sin^{-1}(2m/N)$ 算出 psi 值 0.758040765426236，其值和我們當初設定的 $\theta\{r\}$ 的值為 $(1/4)\pi$ 是近似的。可以發現的確 $\sin^{-1}(2m/N)$ 可以作為 physical angle 和 virtual angle 之間的轉換，best result will generate。

(c)



magnitude of the combination result:

```
|Cm H|
[0.19325794998700777, 0.29725468893339896, 0.35913781678551, 0.36962872282172543, 0.3649939160355384, 0.3564393232056846, 0.34789867949259773,
0.34086289187906677, 0.3359226694776366, 0.333324671694432, 0.3332398510582526, 0.33578978464744247, 0.3411810474976286, 0.3497071128138334,
0.361797796466756, 0.37807496102196014, 0.39943205569733803, 0.427164745823775, 0.4631836837092317, 0.5103862027111116, 0.5733388852381632,
0.659620486268057, 0.7827026230834927, 0.9688946866449312, 1.2769901183980161, 1.8692944731065495, 3.40887597323031, 15.076311702976358,
7.535569576229735, 3.617844582148012, 3.4442430718255066, 6.438390288706536]
```

```
thetar1 value: 0.7853981633974483 ,m1 value: 11 , psi1 value: 0.758040765426236
thetar2 value: 1.1853981633974482 ,m2 value: 15 , psi2 value: 1.2153751251046732
```

我們從以 $|Cm H|$ 為 y value，和 m 為 x value 所畫出的圖可以看到當 m 為 11 和 m 為 15 的時候會有兩個高峰。

當 m 為 11 左右的時候， $|Cm H|$ 會有 local maximum 15.076311702976358。

當 m 為 15 左右的時候， $|Cm H|$ 會有 local maximum 6.438390288706536。

我們把 $m=11$ 帶入 $\sin^{-1}(2m/N)$ 算出 psi1 值 0.758040765426236，其值和我們當初設定的 $\theta\{r\}$ 的值為 $(1/4)\pi$ 是近似的。

我們把 $m=15$ 帶入 $\sin^{-1}(2m/N)$ 算出 psi2 值 1.2153751251046732，其值和 $\theta\{1\} + 0.4$ 的值為 $(1/4)\pi + 0.4$ 是近似的。

可以發現的確 $\sin^{-1}(2m/N)$ 可以作為 physical angle 和 virtual angle 之間的轉換，best result will generate。

(d)

如果我只能設一個 m ，我會設 m 為 11，如果我可以設兩個 m ，我會設 m 為 11 和 15。原因是因為我們會選 $|c(m)^H H \mathbf{1}|$ 所能產生的結果中是 local maximum 的點，這樣可以使當我們選那個值所對應的 m 時，receiving antenna 所能接收到的訊號可以最大程度的被放大。

2.

$$y(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta_k + \phi), \theta_k \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$$

$$P_1 = A \cos(2\pi f_c t + \theta_k + \phi) \times \cos(2\pi f_c t)$$

$$= \frac{A}{2} \left[\cos(4\pi f_c t + \theta_k + \phi) + \cos(\theta_k + \phi) \right] \xrightarrow{\text{LPF}} \frac{A}{2} \cos(\theta_k + \phi)$$

$$P_2 = A \cos(2\pi f_c t + \theta_k + \phi) \times \cos(2\pi f_c t + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{A}{2} \left[\cos(4\pi f_c t + \theta_k + \phi + \frac{\pi}{4}) + \cos(\theta_k + \phi - \frac{\pi}{4}) \right] \xrightarrow{\text{LPF}} \frac{A}{2} \cos(\theta_k + \phi - \frac{\pi}{4})$$

$$P_3 = A \cos(2\pi f_c t + \theta_k + \phi) \times \cos(2\pi f_c t + \frac{3\pi}{4}) \xrightarrow{\text{LPF}} \frac{A}{2} \cos(\theta_k + \phi - \frac{3\pi}{4})$$

$$P_4 = A \cos(2\pi f_c t + \theta_k + \phi) \times \cos(2\pi f_c t + \frac{5\pi}{4}) \xrightarrow{\text{LPF}} \frac{A}{2} \cos(\theta_k + \phi - \frac{5\pi}{4})$$

$$\Rightarrow P_1 \times P_2 \times P_3 \times P_4 = \frac{A^4}{16} \times \left[\cos(\theta_k + \phi - \frac{3\pi}{4}) \times \cos(\theta_k + \phi - \frac{\pi}{4}) \right] \times \left[\cos(\theta_k + \phi) \times \cos(\theta_k + \phi - \frac{5\pi}{4}) \right]$$

$$= \frac{A^4}{16} \times \frac{1}{2} \left[\cos(2\theta_k + 2\phi - \pi) + \cos(\frac{\pi}{2}) \right] \times \frac{1}{2} \left[\cos(2\theta_k + 2\phi - \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) \right]$$

$$= \frac{A^4}{64} \times \frac{1}{2} \left[\cos(4\theta_k + 4\phi - \frac{3\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2}) \right] = \frac{A^4}{128} \cos(4\theta_k + 4\phi - \frac{3\pi}{2})$$

$$4\theta_k \in \left\{ \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi \right\} = \frac{A^4}{128} \sin(4\phi)$$

$$4\theta_k - \frac{3\pi}{2} \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \Rightarrow \text{當 } \theta_k \text{ 很大的時候} \approx \frac{A^4}{128} \times 4\phi = \frac{A^4}{32} \phi$$

$$\Rightarrow \theta_e = \frac{A^4}{32} \phi$$

3.

(a)

3. (a)

$$S_n^* = S_{In} - j S_{Qn}, \quad \hat{d}_n = \hat{d}_{In} + j \hat{d}_{Qn}$$

$$S_n^* \hat{d}_n = (S_{In} - j S_{Qn})(\hat{d}_{In} + j \hat{d}_{Qn})$$

$$= [S_{In} \hat{d}_{In} + S_{Qn} \hat{d}_{Qn}] + j [S_{In} \hat{d}_{Qn} - S_{Qn} \hat{d}_{In}]$$

$$\Rightarrow \text{Im} \{ S_n^* \hat{d}_n \} = S_{In} \hat{d}_{Qn} - S_{Qn} \hat{d}_{In}$$

$$= Q_e(n) \quad \text{X}$$

在 $s\{I,n\} \hat{d}\{Q,n\} - s\{Q,n\} \hat{d}\{I,n\}$ 中，我們可以把式子看成 $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 和 $(\hat{d}\{Q,n\}, -\hat{d}\{I,n\})$ 的內積。而 $(\hat{d}\{Q,n\}, -\hat{d}\{I,n\})$ 我們可以看成是 $(\hat{d}\{I,n\}, \hat{d}\{Q,n\})$ 去轉 90 度，因為 $(\hat{d}\{I,n\}, \hat{d}\{Q,n\})$ 和 $(\hat{d}\{Q,n\}, -\hat{d}\{I,n\})$ 兩者內積為 0。而 $(\hat{d}\{I,n\}, \hat{d}\{Q,n\})$ 代表的是 received signal 所處的相位。又 $(\hat{d}\{I,n\}, \hat{d}\{Q,n\})$ 只會有 $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$ 幾種可能，剛

好是 qpsk 中 4 個真實可能所代表的實部虛部向量。

我們可以先把 received signal $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 去投影到一個最近的 qpsk 向量，也就是把 $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 去投影到 $(d\{I,n\}, d\{Q,n\})$ ，代表對於該 received signal，我們所估的 estimated true signal 為何。然後 $(d\{Q,n\}, -d\{I,n\})$ 和 $(d\{I,n\}, d\{Q,n\})$ 又差 90 度的轉角。因此 $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 和 $(d\{Q,n\}, -d\{I,n\})$ 的內積可以看做是 received signal 和 estimated true signal 的向量差，也就是 $\theta\{e\}$ 。所以如果用這樣的物理意義來去解讀， $\theta\{e\}$ 就可以去估計 phase error $\phi\{e\}$ 。

也就是說，假設：

V1 向量: received signal $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$

V2 向量: estimated true signal = $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 內積 $(d\{I,n\}, d\{Q,n\}) = (S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 到 $(d\{I,n\}, d\{Q,n\})$ QPSK 向量的投影量

V3 向量: 代表 $\theta\{e\}$ 向量

則 V1 向量 = V2 向量 + V3 向量。而 V3 向量就是 $(S\{I,n\}, S\{Q,n\})$ 投影到 $(d\{Q,n\}, -d\{I,n\})$ 向量的投影量。

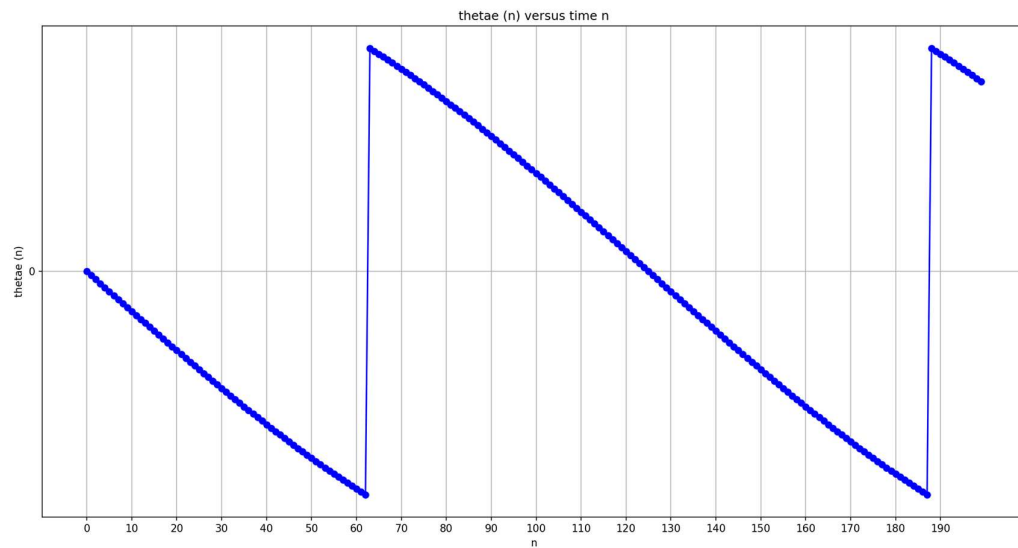
所以以所給定的圖來說，我們可以假設 true phase 是 45 度，其向量為 $(1,1)$ ，所 received 的 signal 的 phase 就是打叉所標示的向量方向，那麼 $\phi\{e\}$ 就是打叉所表示的方向和 45 度的方向的向量差。

(b)

true phase rotation versus time n:



estimated results $\theta e(n)$ versus time n :

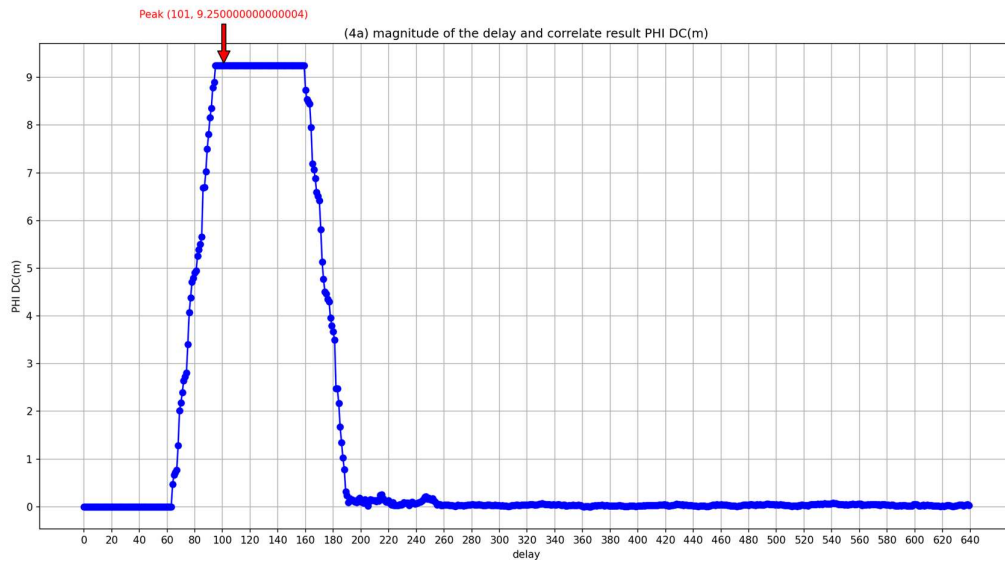


(c)

Costas loop 的目的是要去讓 receiver 的參考 phase 可以盡量和 transmitter 的 phase 可以對齊。然而，對於某些 modulation scheme，例如:QPSK 來說，因為其可能有 4 種不同的 phase 資訊，45 度，135 度，225 度，315 度。但 Costas loop 並不知道你 qpsk 傳的 phase 是那四種的哪一個，也因此 costas loop 的校正過程中，只能根據你所傳的 received signal，確保其選其中一個 qpsk 的角度來去校正，並不一定是正確的。所以我們可以看到理論上所要補償的 phase 下降會和你 carrier frequency offset 的上升會完全對齊，然而我們可以看到 θe 在約 $n=60$ 處的下降和 true phase rotation 在 $n=0$ 處開始上升的 n 並沒有完全對齊。這就是 phase ambiguity。

4.

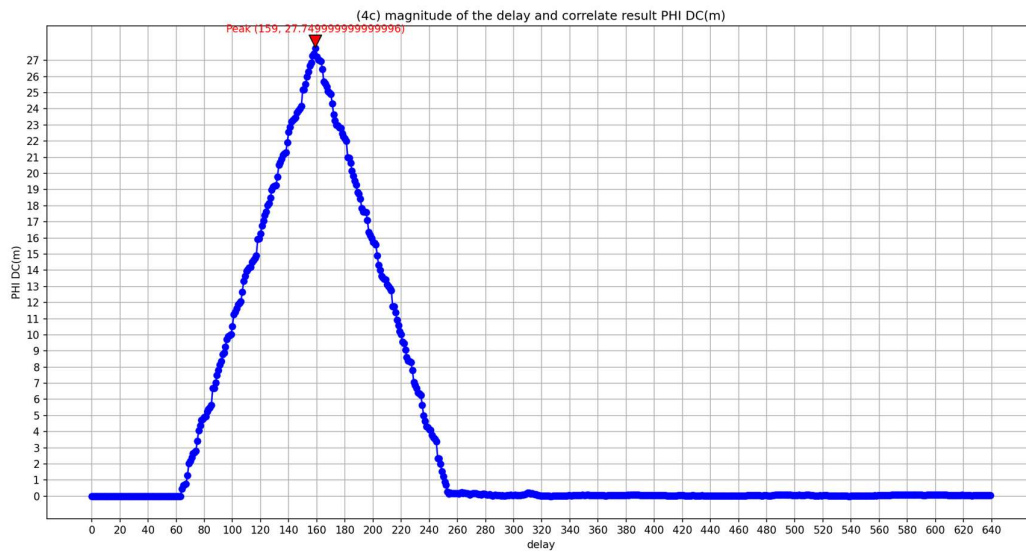
(a)



(b)

根據 4(a)，peak 在 $m = 102$ 處，我們選 $m = 102$ 。

(c)



(d)

根據 4(c)，peak 在 $m = 160$ 處，我們選 $m = 160$ 。

(e)

Q4(d)比較好，因為由題目我們知道 $N + N_g = 160$ 個樣本點。而在 Q4(d)中 $R + L = 96 + 64 = 160$ ，也是 160 個樣本點。因此我們可以捕抓到在訊號完整的一整個週期中的 delay 可能性。