時頻分析與小波轉換 hw1

姓名: 葉冠宏 學號:R11943113 系所:電子所一年級

(1)

Q:

(1) Which of the following applications are the proper applications of the short -time Fourier transform? Also illustrate the reasons. (a) Signal sampling. (b) convolution computation; (c) music signal analysis. (d) video analysis. (15 scores)

Ans:

(a)

我們在 signal sampling 中主要是採用，filter 或是 window 的方式來去做，我們是把連續訊號採樣成離散化之後，再去用 short time fourier transform 作分析。所以 signal sampling 比較不像是 short-time fourier transform 的 application(應用)。

(b)

我們在做 short time fourier transform 的時候可以使用各種 window，而 window 的產生本身就是許多 sinc function 的 convolution 所產生，所以 short time fourier transform 可以算是 convolution computation 的 application。

(c)

由於音樂的訊號會隨著時間而變動，我們可以用 short time fourier transform 來去分析頻率隨時間的變化。所以 music signal analysis 算是 short time fourier transform 的 application。

(d)

Video 是由好幾張影像隨著時間不同串接所產生，而每張影像我們都可以做 frequency domain 的分析。每個時間點的瞬間影像可能頻譜都是不一樣的。所以我們可以用 short time fourier transform 來去做分析，算是一個 application。

(2)

Q:

(2) How do we determine the <u>frequency</u> of a signal <u>without the Fourier transform</u> if its local maximums are positive and local minimum are negative?

(10 scores)

Ans:

我們可以採用 Hilbert Huang Transform 的方式。我們可以去計算一段時間內通過波形 x 軸的交點數目，再去除以兩倍的經歷時間來去計算這個波的頻率是什麼。

(3)

Q:

(3) (a) Why the sinc function may not reflect the frequency distribution of a rectangular function? (b) Suppose that

$$x(t) = 1 \text{ for } -2 < t < 2, \quad x(t) = 0 \text{ otherwise.}$$

Determine the rec-STFT of $x(t)$ if $B = 1$. (15 scores)

Ans:

(a)

Rectangular function 的頻譜和 sinc function 是在連續訊號中的 Fourier Transform 的對應關係。但在離散訊號中，兩者的關係只是近似的對應關係而已。而當你的訊號在採樣的時候，如果取樣頻率低於兩倍 Nyquist frequency 頻率，就會產生 Aliasing 的現象，就會產生嚴重的偏差。

(b)

3.(b)

$$X(t,f) = \int_{t-B}^{t+B} x(\tau)\, e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

∵ if $x(t)=1$ for $-2<t<2$, $x(t)=0$ otherwise, if $B=1$

$$X(t,f) = \int_{-3}^{3} 1 \times e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \frac{1}{-j2\pi f}\, e^{-j2\pi f\tau}\Big|_{-3}^{3}$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}\left(e^{-6\pi f j} - e^{6\pi f j}\right) = \frac{1}{-j2\pi f}\left[\cancel{\cos(-6\pi f)} + j\sin(-6\pi f) - \cancel{\cos(6\pi f)} - j\sin(6\pi f)\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{-j}2\pi f}\left(\cancel{-2j}\,\sin(6\pi f)\right) = \frac{\sin 6\pi f}{\pi f}$$

(4)

Q:

(4) (a) How does the parameter σ affect the resolution of the scaled STFT?

(b) If we want to analyze a vocal signal (the units in the t-axis and the f-axis are second and Hz), should we use a larger or a smaller value of σ? Why?

(15 scores)

Ans:

(a)

比較大的 sigma 會造成在 time domain 上有比較高的 resolution，在 frequency domain 上有比較低的 resolution。

而當 sigma 比較小的時候，在 time domain 上則會有比較低的 resolution，在 frequency domain 上會有比較高的 resolution。

(b)

我們應該要用大的 sigma，因為聲音的變化單位是幾毫秒，需要對時間的敏感度較佳以偵測短時間的頻率變化。所以我們需要在 time domain 上有較高的 resolution。

(5)

Q:

(5) (a) Why sometimes it is better to use the STFT with an asymmetric window instead of a symmetric one? (b) What is the relation between a rectangular function and a Gaussian function? (c) Why better time-frequency analysis result can be obtained if one uses the Gaussian window instead of the rectangular window? (15 scores)

Ans:

(a)

在例如:地震的分析、碰撞的偵測上，我們需要在未來訊號出現的時候，短時間整合所有資訊迅速算出時頻分析。所以我們需要把過往的資訊在 window 的設計上佔有比較多的比例，未來的訊號則佔有比較小的比例，因此在此情況中，我們是採用了 asymmetric window。

(b)

Gaussian function 是由 rectangular function 去做 convolution 無限多次後，再去除以 c^(n-1) 所趨近求得。

(c)

因為和其他的 window 相比，Gaussian window 可以同時讓 time-domain 和 frequency domain 擁有較好的清晰度，而且使在時頻分布的面積達到最小。當 window 太寬，time domain 的解析度較差。當 window 太窄，frequency domain 的解析度較差。

而由於 Gaussian function 是 Fourier transform 的 eigen function，因此 Gabor Transform 在 time domain 和 frequency domain 的性質將互相對稱。

(6)

Q:

(6) Why $x(t) = A\exp\left(j(Bt + C) - \pi(Dt + E)^2\right)$ satisfies the lower bound of the uncertainty principle ($\sigma_t \sigma_f = \frac{1}{4\pi}$) for any A, B, C, D, E? (10 scores)

Ans:

由上課所講的東西，我們可以得知對於原來是 x(t)=exp(-pi * T^2)，不管是平移、exp 前面乘以一個常數、-pi * T^2 前面多一項常數係數、前面多乘以一個 exp(Bjt)的函數，他都不影響 sigma t * sigma f 的下界。

原式可以拆解成 X(t)= (A*exp(j(B*t+C)))* exp(-pi * (D*t+E)^2)。我們把 exp(-pi * (D*t+E)^2)看成先把 exp(-pi * T^2) 去平移-E/D 後，我們再去做 scaling D 的動作。而這些都不影響原本的下界。接著乘以(A*exp(j(B*t+C)))，By 老師上課講的，乘以一個 exp(Bjt)的函數不影響下界。最後我們去平移-C/B 也不影響下界。所以得證，不管 A, B, C, D, E 是什麼，sigma t * sigma f 都等於 1/(4*pi)。

(7)

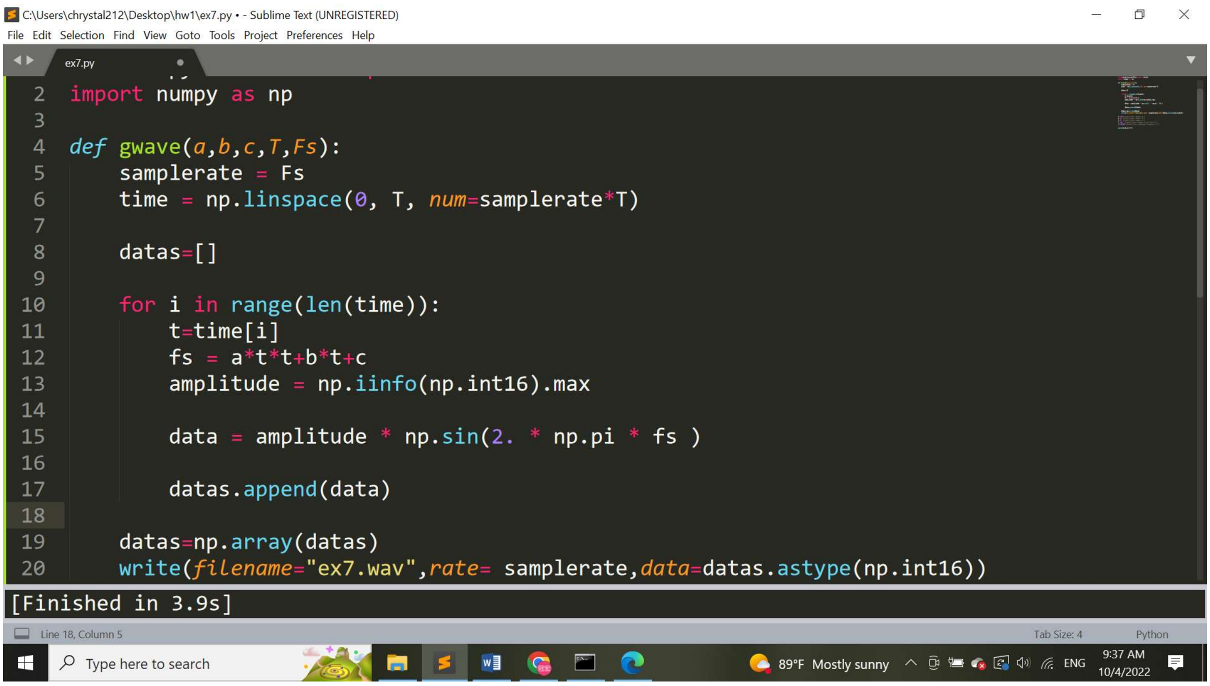
Q:

(7) Write a Matlab or Python program that can generate a *.wav file whose instantaneous frequency is $\pm(at^2 + bt + c)$ Hz, the length of the file is T second, and the sampling frequency is Fs Hz.

gwave (a, b, c, T, Fs)

Ans:

程式碼如附檔，執行方式: python ex7.py




```python
import numpy as np

def gwave(a,b,c,T,Fs):
    samplerate = Fs
    time = np.linspace(0, T, num=samplerate*T)

    datas=[]

    for i in range(len(time)):
        t=time[i]
        fs = a*t*t+b*t+c
        amplitude = np.iinfo(np.int16).max

        data = amplitude * np.sin(2. * np.pi * fs )

        datas.append(data)

    datas=np.array(datas)
    write(filename="ex7.wav",rate= samplerate,data=datas.astype(np.int16))
```

(8)

Q:

Extra(學號尾數 3): Short time Fourier transform 絕對值的平方是什麼?

Ans:

叫做 Spectrogram。

$$SP_x(t,f) = \left|X(t,f)\right|^2 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)e^{-j2\pi f\tau}x(\tau)d\tau\right|^2$$