

1.

Q:

- (1) (a) What is the role of the scaling function in the continuous wavelet transform? (b) What is the role of the generating function in the continuous wavelet transform with discrete coefficients? (10 scores)

Ans:

(a)

主要的功能是可以使下列幾點功能得以實現:

1.任何 function 都可以由 $\phi(t)$, $\phi(2t)$, $\phi(4t)$以及他們的位移所組成

例如: $\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1)$

2.任何平均為 0 的 function 都可以由 $\psi(t)$, $\psi(2t)$, $\psi(4t)$...所組成。

例如: $\psi(t)=\psi(2t)-\psi(2t-1)$

3.可以使 $X_w(n,m)$ 的係數用 $X_w(2n,m+1)$ 和 $X_w(2n+1,m+1)$ 表示

4.角色類似 lowpass filter

(b)

只要 generating function 決定了，mother wavelet 和 scaling function 皆可決定。可以決定 $\phi(f)$ 和 $\psi(f)$ 。

2.

Q:

(2) What are the vanishing moments of (a) $\frac{d^7}{dt^7} e^{-\pi t^2}$, (b) the 18-point coiflet, (c) $h[0] = h[4] = 1/16, h[1] = h[3] = -1/4, h[2] = 3/8, h[n] = 0$ otherwise.

(Hint: $H(f) = \sum_n h[n] e^{-j2\pi f n} = [1 - e^{-j2\pi f}]^m / 2^m$ $\frac{d^k}{df^k} H(f) = ?$ (15 scores)

Ans:

(a)

Vanishing moment 是 7

(b)

18/6=3，所以 vanishing moment 是 3。

(c)

Vanishing moment=4，算式如下:

$$H(f) = \sum_n h[n] e^{-j2\pi f n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h[0] = h[4] = 1/16 \Rightarrow H(f) = \frac{1}{16} [e^{-j8\pi f} + 1] - \frac{1}{4} [e^{-j2\pi f} + e^{-j6\pi f}] \\ h[1] = h[3] = -1/4 \\ h[2] = 3/8 \end{array} \right. + \frac{3}{8} e^{-j4\pi f}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{df} H(f) = \frac{1}{16} [-j8\pi e^{-j8\pi f}] - \frac{1}{4} [-j2\pi e^{-j2\pi f} - j6\pi e^{-j6\pi f}] + \frac{3}{8} [-j4\pi e^{-j4\pi f}] \Rightarrow \frac{d}{df} H(0) = \frac{-j\pi}{2} + j2\pi - j\frac{3}{2}\pi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{df^2} H(f) = \frac{1}{16} [-64\pi^2 e^{-j8\pi f}] - \frac{1}{4} [-4\pi^2 e^{-j2\pi f} - 36\pi^2 e^{-j6\pi f}] + \frac{3}{8} [-16\pi^2 e^{-j4\pi f}] \Rightarrow \frac{d^2}{df^2} H(0) = \frac{1}{16} [-64\pi^2] - \frac{1}{4} [-4\pi^2 - 36\pi^2] + \frac{3}{8} [-16\pi^2] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^3}{df^3} H(f) = 32j\pi^3 e^{-j8\pi f} - j\pi^3 e^{-j2\pi f} - 54j\pi^3 e^{-j6\pi f} + 24j\pi^3 e^{-j4\pi f}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3}{df^3} H(0) = (32 - 1 - 54 + 24)j\pi^3 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^4}{df^4} H(f) = 256\pi^4 e^{-j8\pi f} - \pi^4 e^{-j2\pi f} - 324\pi^4 e^{-j6\pi f} + 96\pi^4 e^{-j4\pi f}$$

$$\Rightarrow \frac{d^4}{df^4} H(0) = 24\pi^4$$

$\Rightarrow \therefore$ Vanishing moment = 4

3.

Q:

(3) Why the complexity of the 1-D discrete wavelet transform is $O(N)$?

(10 scores)

Ans:

假設在 $x[n]*y[n]$ 的 convolution 的計算中， $x[n]$ 的總長為 N ， $y[n]$ 的總長為 L 。在做 1-D discrete wavelet transform 的時候，我們是做 $N+L-1$ 個點的 discrete fourier transform 或是 inverse discrete fourier transform，所以正常來講需要 $(N+L-1) \log(N+L-1)$ 的 time complexity。但如果 $N \gg L$ ，然後我們把 N 切成很多小段，每段的長度是 N_1 的話，現在會共有 $S=N/N_1$ 段，且。

$N \gg N_1 \gg L$ 。所以時間複雜度變成 $S(N_1+L-1) \log(N_1+L-1)$ 。因為 $N_1 \gg L$ ，所以變成 $S N_1 \log N_1 = N/N_1 \times N_1 \times \log(N_1) = N \log(N_1)$ 。因為你每段的長度是你自己設定固定的，所以 $\log N_1$ 可以當作常數。所以最後我們取 Big O 後，時間複雜度就是 $O(N)$ 了。

4.

Q:

(4) Why the wavelet transform can be used for (a) directional edge detection, (b) pattern recognition and (c) adaptive filter design? (15 scores)

Ans:

(a)

我們可以用 2D 的 discrete wavelet transform 去做 directional edge detection。在每次 iteration 中，我們會去做 lowpass filter，以及 highpass filter，然後再去做 down sampling 的動作。其中 highpass filter 可以去偵測出 edge 的部分，因為那是相鄰的像素有比較大的差異的地方，造成高頻。而在每次 iteration 的時候，我們會 row 和 column 交替去做，分別可以偵測出水平的 edge 和垂直的 edge。而在同時 row 和 column 都有偵測到的地方，就是 corner。

(b)

因為 wavelet transform 可以濾出不同的頻率，所以你可以利用這些資訊來提取特徵以利於圖形識別。例如，在羊毛的紋理中，我們可以用 wavelet transform 去偵測出他的邊長紋理的走向，最後用於圖形識別。

(c)

在 filter design 中，我們可以利用許多個 stage 的 wavelet transform 來達到例如:不傷到 edge，又可以將 noise 去除掉的目的。在用 high pass filter 時，如果是高頻且變化比較大的地方，可能才會是 edge，而其他高頻但變化沒那麼大的地方則會是 noise，所以在經過多個 stage 的 high pass filter 後保留下來的地方是 edge。此外，我們也可以針對我們所感興趣的區間做 preserve，也可以針對變化比較複雜的區域在進一步做 filter。而 lowpass filter 則是負責去保留到除了 edge 或是 noise 以外的圖片中其他點的資訊，算是原圖的縮圖。

5.

Q:

(5) For a three-point wavelet filter, if $g[0] = 1/2$, $g[1] = b$, $g[2] = c$, and $g[n] = 0$ otherwise.

(a) What are the values of b and c if $g[n]$ is a quadratic mirror filter?

(b) What are the values of b and c if $g[n]$ is an orthonormal filter?

(10 scores)

Ans:

(a)

$B=1$

$c=0$

(b)

$B=\pm\sqrt{3}/2$

$C=0$

算式如下:

5.

(a)

$$G(z) = a + b\bar{z}^1 + c\bar{z}^2$$

$$G(-z) = a - b\bar{z}^1 + c\bar{z}^2$$

$$\Rightarrow G^2(z) = a^2 + b^2\bar{z}^2 + c^2\bar{z}^4 + 2ab\bar{z}^1 + 2ac\bar{z}^2 + 2bc\bar{z}^3$$

$$G^2(-z) = a^2 + b^2\bar{z}^2 + c^2\bar{z}^4 - 2ab\bar{z}^1 + 2ac\bar{z}^2 - 2bc\bar{z}^3$$

$$\Rightarrow G^2(z) - G^2(-z) = 4ab\bar{z}^1 + 4bc\bar{z}^3$$

$$\Rightarrow g[0] = \frac{1}{2}, g[1] = b, g[2] = c, g[k] = 0 \text{ otherwise}$$

$$G^2(z) - G^2(-z) = 2z^k$$

$$\Rightarrow \text{if } k = -1, \begin{cases} bc = 0 \\ ab = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases} \quad \#$$

(b)

$$G_1(z) = a + b\bar{z} + c\bar{z}^2, G_1(\bar{z}) = a + b\bar{z}^1 + c\bar{z}^2$$

$$G_1(-z) = a - b\bar{z} + c\bar{z}^2, G_1(-\bar{z}) = a - b\bar{z}^1 + c\bar{z}^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_1(z)G_1(\bar{z}) + G_1(z)G_1(-\bar{z}) &= (a + b\bar{z} + c\bar{z}^2)(a + b\bar{z}^1 + c\bar{z}^2) \\ &\quad + (a + b\bar{z} + c\bar{z}^2)(a - b\bar{z}^1 + c\bar{z}^2) \\ &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2ac\bar{z}^2 + 2ac\bar{z}^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{by problem, } a = \frac{1}{2}, ac = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c = 0 \end{cases} \quad \#$$

6.

Q:

(6) What are the main advantages of (a) the symlet, (b) the coiflet?

(10 scores)

Ans:

(a)

給定一個 support 的情況下，Symlet 和其他的 orthogonal wavelet 相比，是有較少的不對稱性的。所以可以造成在 transfer function 上有 linear phase。人類在視覺系統上也比較可以接受較對稱的系統性錯誤。此外，影像的邊界也可以比較好的被處理，因為 $g[n]$ 的最大值幾乎在中間，所以在做 wavelet transform 之後，圖片的偏移幅度會比較小。最後，因為 symlet filter 有 compact support，所以其是 finite impulse response，也會有 FIR 相關的優點。

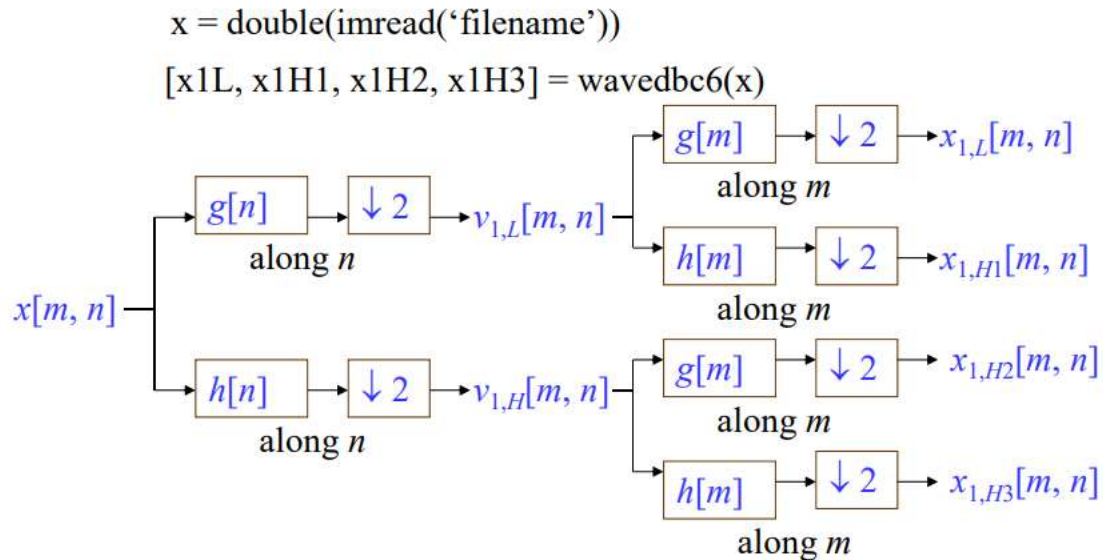
(b)

Coiflet 因為有較高的 vanishing moment，也有在一定的 passband 下有 almost interpolating 和 linear phase low-pass 的特性，所以適合用於偵測訊號處理中的 fractals，也適合用於數據分析。

7.

Q:

(7) (a) Write a Matlab or Python code for the following 2-D discrete 6-point Daubechies wavelet.



(b) Also write the program for the inverse 2-D discrete 6-point Daubechies wavelet transform.

```

x = iwavedbc6(x1L, x1H1, x1H2, x1H3)

```

The code should be handed out by NTUCool.

(30 scores)

Ans:

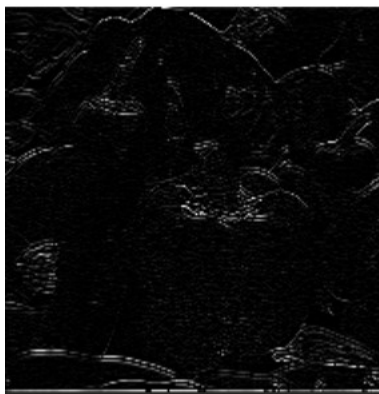
(a)

經過程式運算後我們的實驗結果如下:

X1L:=>我們可以發現經過 rowise 和 columnwise 的 lowpass filter 後可以展現出原圖的大部分樣貌縮圖。



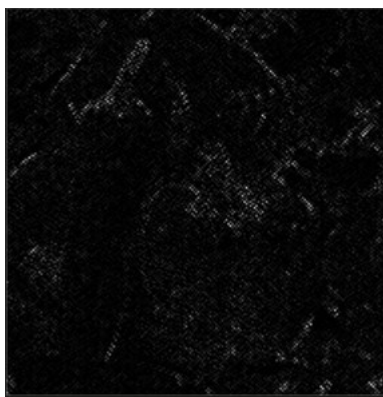
X1h1:=>我們可以發現如果先沿著 column 方向做完 lowpass filter 後，再去沿著 row 方向做 highpass filter，則我們可以篩選出水平方向的邊長。



X1H2:=>我們可以發現如果先沿著 column 方向做 highpass filter 後，再去沿著 row 方向做 lowpass filter，可以呈現出垂直方向的邊緣。



X1H3:經過 row 方向和 column 方向的 highpass filter 後，會顯示出圖片的 corner。



(b)

我們可以觀察到經過還原後的 inverse 2D discrete Daubechies wavelet transform 後的結果如下圖：



8.

Q:學號尾數 3

(Extra): Answer the questions according to your student ID number.
(ended with 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9)

加分題:p456 做了 4 次小波轉換之後，比例變成原圖的幾分之幾?

Ans:

因為做了一次變成原圖的 $\frac{1}{4}$ ，所以做了 4 次小波轉換之後會變成原圖的 $(\frac{1}{4})^4 = \frac{1}{256}$ 。