時頻分析與小波轉換 hw3

學號:R11943113 姓名:葉冠宏

1.

(1) The window of the S transform is $s(f)\exp(-\pi\tau^2 s^2(f))$. Which of the following function is the best choice for $s(f)$? Why? (a) $f^{1.5}$, (b) $50+2f^{0.5}$, (c) $10+\cos(f^{0.5})$. (10 scores)

答案:

由於測不準原理的影響，為了不讓你的 window 在高頻的時候變成無限窄，在低頻的時候變得無限寬，我們藉由 s(f)的 function 來去做調整，所以 s(f)必須符合 f0+f^(a)，a<1 的形式。所以答案是(b)。f0=50，然後 a=0.5<1。

2.

(2) Compared to the Fourier transform, what are the main advantage and the disadvantage of the 3 or 4-parameter atom? (10 scores)

答案:

在 3 parameter atom 中，你的 parameter 是 t0,f0,sigma。和原始的模型相比，我們多了一個 sigma 的參數去控制 scaling 的問題。

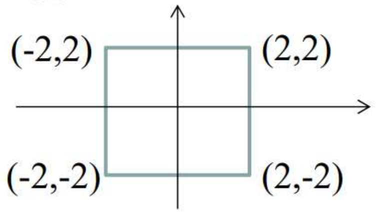
在 4 parameter atom 中，你的 parameter 是 t0,f0,sigma,etta。和原始的模型相比，我們多了 sigma 去控制 scaling 的問題，etta 去控制 chirp rate。

在 3 parameter atom 和 4 parameter 中，我們想選用一些 basis 去形成 series 試圖合成原來的 x(t)的 function。而 fourier transform 是我們試圖去轉換原來的 x(t)的 function，然後試圖用不同頻率去組成原來的 function。和 fourier transform 相比，3 or 4 parameter atom 的優點是，你可能只需要少許的 term 就可以去近似原來的 function，而且我們不像 fourier transform 一樣需要選取 window 才可以去實作。而且由於多了一些參數，你在 fit 模型上可以更佳的彈性。

缺點是由於 3 or 4-parameter 的 basis 不會是互相垂直的，而且我們試圖解的是 L0 norm 的問題，所以我們需要去轉換問題為 L1 norm，而且我們是 iteratively 去藉由 x(t)和近似解的差，去在每一個 iteration 去尋找適當的 basis，又你的 basis 有可能不互相垂直，所以可能在尋找 basis 上會比較沒有效率，不見得可以有效地找到 global 的最佳解。

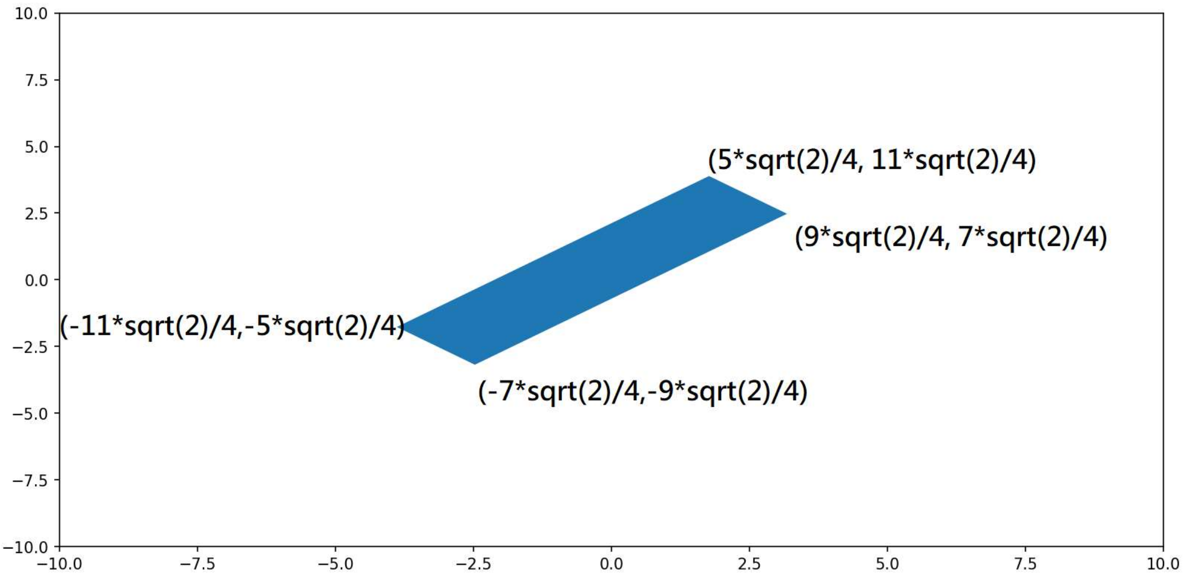
3.

(3) Suppose that the WDF of $x(t)$ is as follows.



Plot the WDF of $O_F^{\pi/4}\left(x(2t+2)\right)$ where $O_F^{\pi/4}$ means the fractional Fourier transform with parameter $\pi/4$. (10 scores)

答案:



Step1:

$x(t-t_0) \to W_x(t-t_0, f)$

⇒ 這邊我們先對 x 去向左移動 1 單位，∴ WDF 也向左移動 1 單位，⇒ $(-3,2)$, $(-3,-2)$, $(1,-2)$, $(1,2)$

Step2:

$\frac{1}{\sqrt{a}}x(\frac{t}{a}) \to W_x(\frac{t}{a}, af)$

由於這邊我們只關心 W_x 的位置，不關心其量值，∴ 先不管 $1/\sqrt{a}$ 這一項。這邊 ∵ x 去 scaling，a 取 $1/2$

⇒ $W_x(2t, \frac{1}{2}f)$

⇒ 四端點變 $(-\frac{3}{2}, 4)$, $(-\frac{3}{2}, -4)$, $(\frac{1}{2}, -4)$, $(\frac{1}{2}, 4)$

Step3: 接著我們去對於那些點去順時針旋轉 45°

⇒ 旋轉矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ \frac{11}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-11}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-5}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

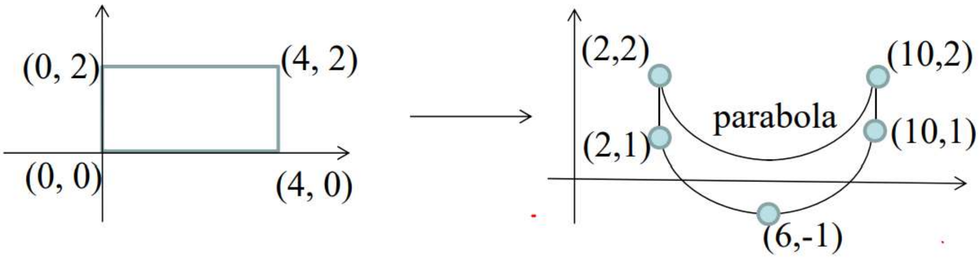
⇒ 四個點的座標分別是 $(\frac{5}{4}\sqrt{2}, \frac{11}{4}\sqrt{2})$, $(\frac{-11}{4}\sqrt{2}, \frac{-5}{4}\sqrt{2})$, $(\frac{-7}{4}\sqrt{2}, \frac{-9}{4}\sqrt{2})$, $(\frac{9}{4}\sqrt{2}, \frac{7}{4}\sqrt{2})$ #

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2\sqrt{2}} \\ \frac{-9}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2\sqrt{2}} \\ \frac{7}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

4.

(4) Suppose that the WDFs of $x(t)$ and $\exp(j(at^3+bt^2+ct))x(dt+e)$ are the left and the right figures, respectively. Determine the values of a, b, c, d , e. (15 scores)



答案:

A=-pi/12 , B=3pi/2 , C=-5pi , D=1/2 ,E=-1

Step1:

$\frac{1}{\sqrt{a}}x(\frac{t}{a}) \longrightarrow W_x(\frac{t}{a}, af)$

我們可以觀察到 垂直間距從 $2 \rightarrow 1$

水平間距從 $4 \rightarrow 8$

$\Rightarrow$ 可知當初應該是 $x(\frac{1}{2}t)$ 產生 $W_x(\frac{t}{2}, 2f)$ 的效果

使端點變為 $(0,1)$ $(0,0)$, $(8,0)$, $(8,1)$

Step2: 接著我們觀察到 W_x 有平移 $(2,1)$ 變成

$(2,2)$, $(2,1)$ $(10,1)$, $(10,2)$

所以接續 step1，目前是 $x(\frac{1}{2}(t-2)) \times e^{j2\pi \times 1t}$

Step3: 我們可以觀察到 拋物線的方程式為 $y=\frac{1}{8}(x-6)^2-1$

$\Rightarrow$

而如果原來 step2 是 $W_x(t,f)$ 值的

then 轉換後是 $W_y(t, f-[\frac{1}{8}(t-6)^2-1])$ 值的

$\Rightarrow \frac{\phi'(t)}{2\pi} = \frac{1}{8}(t-6)^2-1 \Rightarrow \phi'(t) = \frac{\pi}{4}(t-6)^2-2\pi$

$= \frac{\pi}{4}t^2-3\pi t+7\pi$

$\Rightarrow \phi(t) = \frac{\pi}{12}t^3-\frac{3\pi}{2}t^2+7\pi t$

$\Rightarrow x(t)e^{-j\phi(t)} = y(t)$

$\Rightarrow$ 繼 step2，目前是 $x(\frac{1}{2}(t-2)) \times e^{j2\pi t} \times e^{-j[\frac{\pi}{12}t^3-\frac{3\pi}{2}t^2+7\pi t]}$

$= x(\frac{t}{2}-1) \times e^{j(\frac{-\pi}{12}t^3+\frac{3\pi}{2}t^2-5\pi t)}$

$\Rightarrow a=\frac{-\pi}{12}, b=\frac{3\pi}{2}, c=-5\pi, d=\frac{1}{2}, e=-1$

#

5.

(5) (a) Compared to the FT, what is the advantage of using the FRFT for filter design? (b) What is the condition where the noise cannot be removed even if the FRFT is applied? (10 scores)

答案:

(a)

讓我們可以去比較彈性的以任意的角度去分割你所要的區域，然後取用你所關心的時頻區間。此外因為你可以去框住特定的區域，因此在 sample 上你也只要去取用你所在意的 area 就好，不需要去考慮其他區域。

(b)

就是當有 white noise 的時候，因為其 wigner distribution function 的平均值是 sigma 常數，使其在時頻圖的分布是無所不在，所以不管你怎麼去排除其他區域，你還是無法去濾掉。

6.

(6) Suppose that $x(t)$ is a stationary random process. Which of the following random processes are also stationary? Why? (i) $x(2t)$; (ii) $x(t)\cos(2\pi t)$; (iii) $FT[x(t)]$; (iv) $x(t)\exp(j\pi t^2)$; (v) $x(t) * \exp(j\pi t^2)$ (* means the convolution).

(10 scores)

答案:

如果 wigner distribution function 的平均值的時頻圖不隨時間而有所改變的話，那我們就認定他是 stationary 的，所以以下我們要去看如果 x function 做了該操作的話是怎樣的影響時頻圖。如果其值仍不隨時間而有所改變的話，我們就認定他依然是 stationary 的。所以答案是 (i),(ii),(v)是 stationary，原因如下:

(i)

當你做 x(t/a)時，wdf 對於位置產生的效果是 Wx(t/a,af)。如果本來在圖中是平行的白色線依然是平行，所以依然是 stationary。

(ii)

Cos(2*pi*t) = (e^(j*2*pi*t)+e^(-j*2*pi*t))/2

X(t)去乘以各自的 term 的效果是使 vertical shifting。前面那一項使時頻圖產生向上一單位的位移，後面的那一項使產生向下一單位的位移。最後我們去疊合兩張圖。但時頻圖上不同時間 t 的值仍然是常數。所以依然是 stationary。

(iii)

因為 Fourier transform 代表是順時鐘旋轉 90 度。所以水平的白線變成垂直的，你時間變動的時候頻率也在變動，所以就不是 stationary。

(iv)

當 x(t)=exp(jxpixaxt^2)*y(t)的時候，你的 Wx(t,f)=Wy(t,f-at)，而這邊 a=1，你產生了垂直方向 shearing 的效果。所以你變成在不同時間 t 的時候，頻率是不一樣的，所以變得不是 stationary。

(v)

當 x(t)=exp(jxpi/axt^2)*y(t)的時候，你 Wx(t,f)=Wy(t-axf,f)，產生了水平方向的 shearing，所以你不同時間 t 的情況下，頻率還是不變，所以是 stationary。

7.

(7) Write a Matlab or Python program for the scaled Gabor transform (unbalanced form).

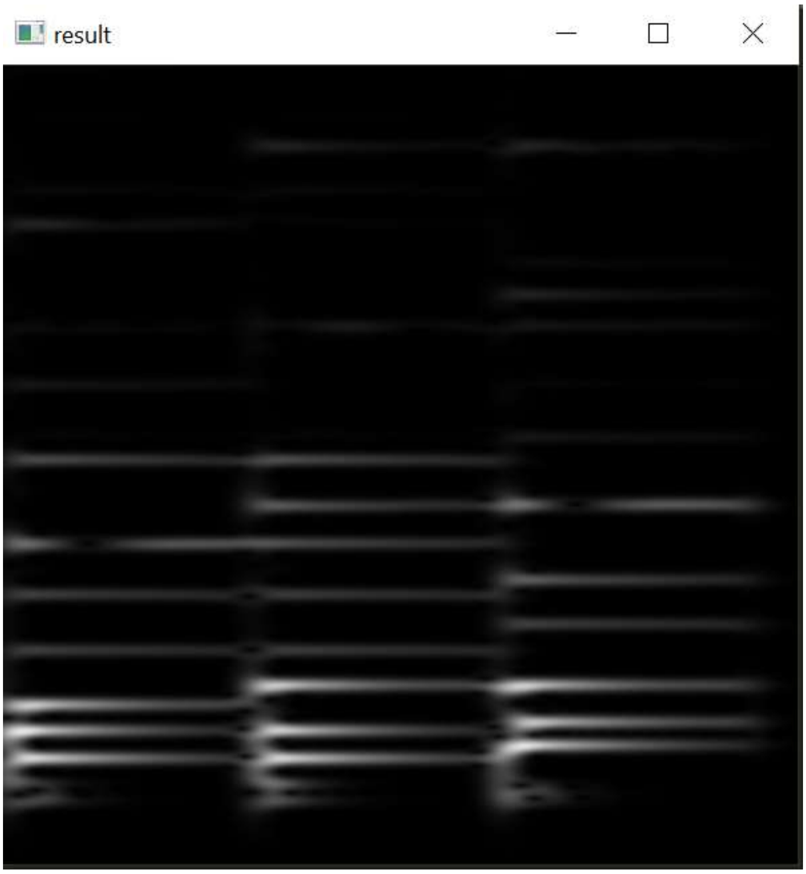
y = Gabor(x, tau, t, f, sgm) (35 scores)

x: input, *tau*: samples on *t*-axis for the input, *t*: samples on *t*-axis for the output
f: samples on *f*-axis, *sgm*: scaling parameter, *y*: output

(i) The code should be handed out by NTU Cool, (ii) Choose an input x (Use *.wav)，plot the output y ，(iii) Use tic and toc to show the running time，(iv) The running time for the following example should be within 1.5 seconds.

```
[a1, fs] = audioread('Chord.wav');
x=a1(:,1).‘;    % only extract the first channel
tau = (?  Please think how to determine tau);
dt = 0.01;              df= 1;       sgm= 200;
t= 0:dt:max(tau);      f= 20:df:1000;
tic
y= Gabor (x, tau, t, f, sgm);
toc
```

結果如下:



8.Extra 題目

1. p193 的瞬時頻率有一個，那是什麼?

$$x(t) = \exp(j(t-5)^4 - j5\pi(t-5)^2)$$

答案:

我們去整理成 exp(j*phi)的形式，然後我們用瞬時頻率為 phi'/(2*pi)的公式求得的瞬時頻率如下:

(2/pi)t^3 -(30/pi)t^2 + (150/pi -5)t +25 -250/pi

2.p194 瞬時頻率有兩個，那是什麼?

$$x(t) = 2\cos((t-5)^3 + 4\pi t)$$

答案:

我們利用 2*cos(theta) = exp(j*theta) +exp(j*(-theta)) ，再利用瞬時頻率為 phi'/(2*pi)的公式求得的瞬時頻率如下:

(3/(2pi))t^2 –(15/pi)t + 75/(2pi) +2

和

(-3/(2pi))t^2 +(15/pi)t - 75/(2pi) -2