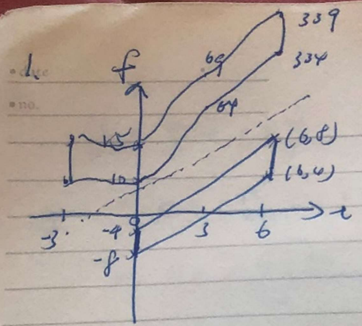
時頻分析 hw4 姓名:葉冠宏 學號:r11943113

1.



⇒ 我們可以先用一條 $y=2t$ 的分割線把兩個部份去分開

⇒ 然後我們針對 $0 \le t \le 6$, $2t-8 \le f \le 2t-4$ 這一個訊號

∵ 我們想要讓其訊號可以變得如矩形
(時頻圖)

∴ 我們去讓原本的訊號 $x(t)$ 去乘以 $e^{-j2\pi t^2}$，使得時頻圖的樣子變成矩形，然後再去做 sampling #

⇒ 針對時頻圖中，$-3 \le t \le 3$, $t^3+3t^2+10 \le f \le t^3+3t^2+15$ 的訊號，我們令 $\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} = t^3+3t^2+10 = \frac{\phi'(t)}{2\pi}$

$$\phi(t) = \left(\frac{1}{4}t^4 + t^3 + 10t\right) \times 2\pi$$

我們對此段訊號去乘以 $e^{-j\left[\frac{\pi}{2}t^4 + 2\pi t^3 + 20\pi t\right]}$

就會使該段訊號的時頻圖變成矩形，然後我們再去做 sampling #

2.

2. (a) 1° 可以用於分解多個組成的訊號，可以使在決定 instantaneous frequency 時更加精準

2° 在我們分解訊號時，sinusoid-like components 的 period 和 amplitude 可以是不固定的，可以分析頻率會隨著時間而改變的信號

(b) sinusoid function 和 intrinsic mode function 的

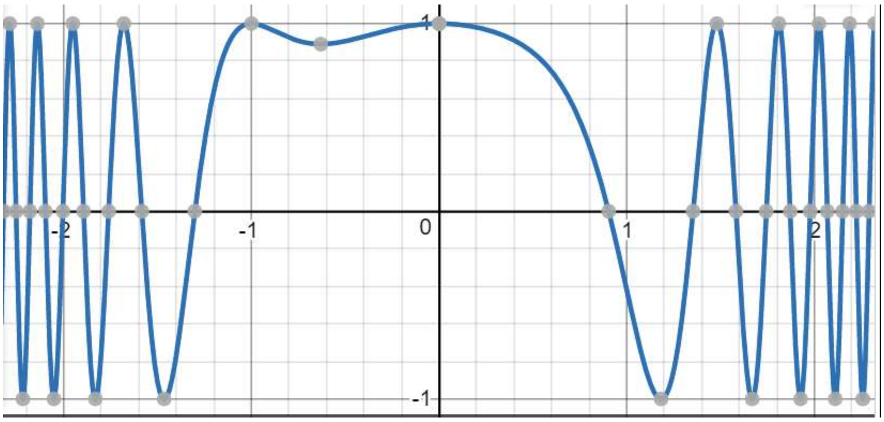
similarities: 1° number of extremes and the number of zero-crossings must either equal or differ at most by one

2° At any point, the mean value of the envelope defined by the local maxima and the envelope defined by the local minima is near to zero.

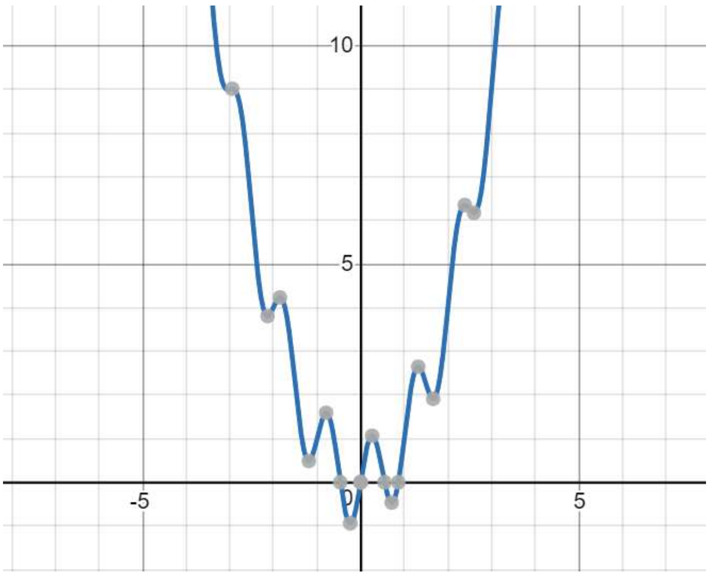
differences: 1° IMF 的頻率和振幅可以比較隨時間而變化，而 sinusoid function 則不會

(c)

(i)cos(t^4+t)



(ii) t^2+sin(2*pi*t)



我們可以從上面兩張圖看出，因為 IMF 要符合

(1) The number of extremes and the number of zero-crossings must either

equal or differ at most by one.

(2) At any point, the mean value of the envelope defined by the local maxima

and the envelope defined by the local minima is near to zero.

這兩項特徵。而(ii)並無符合，你可以看到他的 local minimum 在 zeros 以上，而且上下 envelope 的平均也不為 0，所以(ii)不是 IMF。

反之，(i)中，其雖然在-1~1 之間有 local minimum 在 zeros 以上，但大多數情形，其是滿足 IMF 的。

3.

(i) x(3t)

x(3t)經過 Fourier transform 後會使時頻圖產生 scaling，變成 W(3t,1/3 f)。而 white noise 的 wdf 是一個常數 sigma，所以你即使做 scaling，仍然是常數，區域是在全域空間，符合 white noise 的性質。所以是 white noise。

(ii) exp(j pi t^2)x(t)

exp(j pi t^2)x(t) 後會使得頻譜圖產生上下的 shearing，變成 W(t,f-t)。你在做上下的 shearing 之後並不會影響 wdf 是常數的這個性質，區域是在全域空間，所以最後仍然是 white noise。

(iii) exp(j pi t^2) * x(t)

exp(j pi t^2) * x(t) 後會使得頻譜圖產生左右的 shearing，變成 W(t-f,f)。你在做左右的 shearing 之後不會影響 wdf 是常數的性質，區域是在全域空間，所以仍然是 white noise。

(iv) sinc(t) * x(t)

Sinc 的 fourier transform 是 rectangular function，然後當你的 input 是 convolution，在時頻圖上的關係是相乘的關係，所以最後時頻圖是 X(t,f) 乘以一個 rectangular function。你只會在時頻圖上座標(0,0)的地方才會看到有常數值，而 rectangular function 的區域以外則不會有值。所以這不是一個 white noise。

4.

(a)

在影像處理上可以很快速地去幫助邊緣、變化量、亮度差異的偵測，尋找一些 bases，也可以用不同的寬度和位置來分析高頻的成分。

(b)

$$[0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \otimes [1, 1]$$

$$\Rightarrow [\underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{1\,1}\ \underline{-1\,-1}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}\ \underline{0\,0}]$$

#

5.

(a)

可以濾掉低頻的成份，幫助高頻的分析。

(b)

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x \exp(-|x|)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \exp(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x \exp(-x)\,dx$$

$$= (x-1)e^{x}\Big|_{-\infty}^{0} + (-x-1)e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = -1-0+0-(-1) = 0$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \exp(-|x|)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \exp(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2 \exp(-x)\,dx$$

$$= e^{x}\left[x^2-2x+2\right]\Big|_{-\infty}^{0} + e^{-x}\left[-x^2-2x-2\right]\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= 2-0+0-(-2) = 4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ vanishing moment $= 1$ #

6.

WDF 的特徵是可以使時頻圖有較好的清晰度 ，但難排除 cross term 的問題。

Gabor transform 的優點是其時頻圖可以沒有 cross term 的問題。

HHT 的特點是可以去拆解許多頻率的成分，進而去分析其 trend。

Wavelet transform 可以藉由矩陣或是函數的設計去濾掉某些頻率。

(a)

在 image denoising 的問題上面，因為我們的問題是要去濾掉一些頻率的雜訊，所以我們使用 wavelet transform 的方式。

(b)

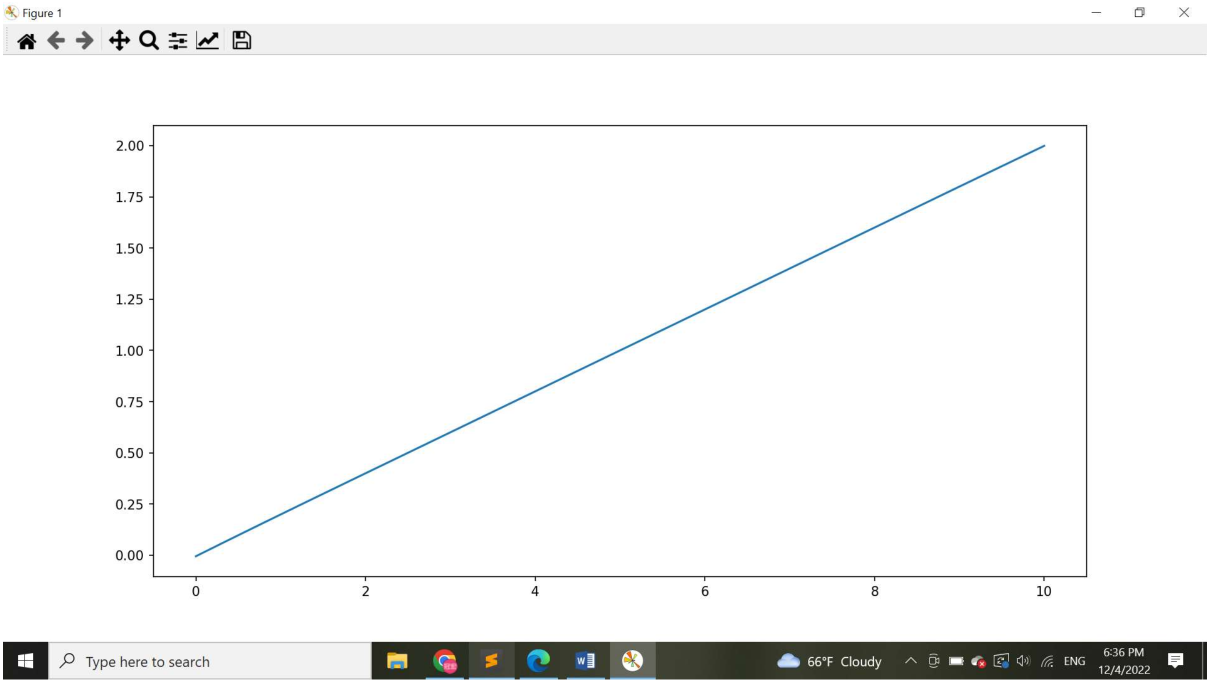
在 climate data analysis 的問題上面，因為可能氣候問題參雜著許多的頻率，所以我們使用 HHT 去拆解分析其 trend。

(c)

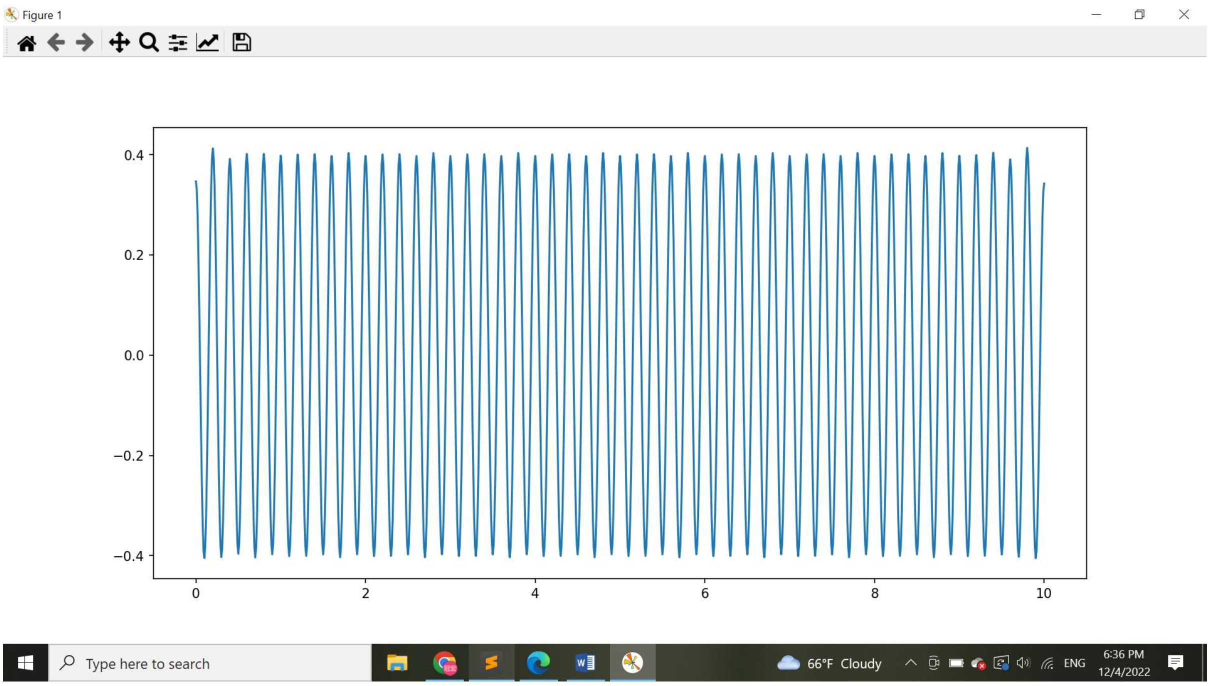
在 tone analysis 中，因為人的聲音有可能有二次方以上的函數，為了避免 cross term 的問題，我們可以去使用 gabor transform 來避免 cross term 的問題，來做出時頻圖來去分析。

7.

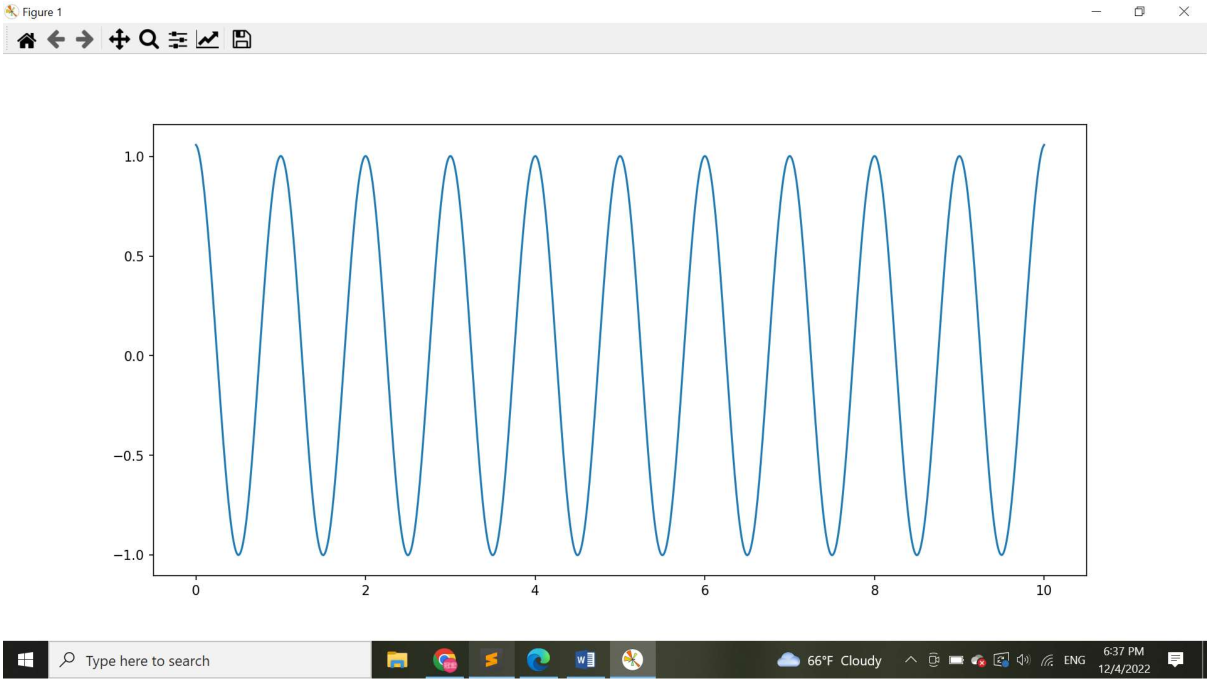
X0(t):



IMF1:



IMF2:



當我們去執行 Hilbert Huang Transform 之後，我們可以分解出 3 個成份，x0(t)，IMF1,IMF2。我們可以看到 x0(t)顯示出 trend 的部分，IMF1 和 IMF2 各顯示出不同的波動。

Extra:

Q:音樂訊號 和國語三聲，哪一個是 imf?

Ans:

國語的三聲符合 IMF 的性質，因為其符合 IMF 的以下性質:

(1) The number of extremes and the number of zero-crossings must either equal or differ at most by one.

(2) At any point, the mean value of the envelope defined by the local maxima and the envelope defined by the local minima is near to zero.

但音樂訊號的部分有可能有 local minimum 或是 maximum 不符合(2)或是(1)的性質。