Лекция № 5

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, неразрешенные относительно производной

ДУ 1-го порядка неразрешенное относительно производной характеризуется тем, что из него не может быть легко выражена производная y'.

Одним из методов решения таких уравнений является применение математических преобразований, целью которых является выражение производной из ДУ. В результате получается одно или несколько ДУ вида: $y' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, ..$

Пример 1.

Дано: $(y')^2 + xy = y^2 + xy'$

Решение:

$$(y')^2 + xy = y^2 + xy'$$

$$(y')^2 - xy' = y^2 - xy$$

Выделим полный квадрат в левой и правой частях уравнения:

$$\underset{a^2}{(y')^2} - 2\underset{a}{y'} \cdot \underset{b}{\frac{1}{2}x} + \underset{b^2}{\frac{1}{4}x^2} - \frac{1}{4}x^2 = \underset{a^2}{y^2} - 2\underset{a}{y} \cdot \underset{b}{\frac{1}{2}x} + \underset{b^2}{\frac{1}{4}x^2} - \frac{1}{4}x^2$$

$$(y' - \frac{1}{2}x)^2 = (y - \frac{1}{2}x)^2$$

$$y' - \frac{1}{2}x = y - \frac{1}{2}x \quad \text{и} \qquad y' - \frac{1}{2}x = -(y - \frac{1}{2}x)$$

Получили два ДУ, разрешенных относительно производной:

1) $y' = y$ − ДУ с разделяющимися переменными;
2) $y' = -y + x$ − линейное неоднородное ДУ.

При интегрировании ДУ $y' = y$ получаем $y = Ce^x$, при интегрировании ДУ $y' = -y + x$ получаем $y = x - 1 + C \cdot e^{-x}$.

Ответ: $\boxed{y = Ce^x, \ y = x - 1 + C \cdot e^{-x}}$

В общем случае алгоритмических методов решения ДУ, неразрешенных относительно производной, не существует, кроме случаев, когда из ДУ легко выражается x или y. В этом случае используют метод введения параметра.

Метод введения параметра

Алгоритм решения ДУ, неразрешенного относительно производной методом введения параметра

<table>
<tr><th>Из ДУ легко выражается y : $y = f(x, y')$</th><th>Из ДУ легко выражается x : $x = f(y, y')$</th></tr>
<tr><td>1. Разрешить ДУ относительно y:
$$y = f(x, y')$$</td><td>1. Разрешить ДУ относительно x:
$$x = f(y, y')$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Ввести параметр $p = y' = \frac{dy}{dx}$, тогда получится:</td></tr>
<tr><td>$$y = f(x, p)$$</td><td>$$x = f(y, p)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Взять полный дифференциал правой и левой частей уравнения, получится:</td></tr>
<tr><td>$$dy = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp$$</td><td>$$dx = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Сделать замену в левой части ДУ:</td></tr>
<tr><td>$dy = pdx$, получится:
$$pdx = \frac{\partial f(x,p)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,p)}{\partial p}dp$$
Это ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной</td><td>$dx = \frac{dy}{p}$, получится:
$$\frac{dy}{p} = \frac{\partial f(y,p)}{\partial y}dy + \frac{\partial f(y,p)}{\partial p}dp$$
Это ДУ 1-го порядка, разрешенное относительно производной</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Решить полученное ДУ, записать его решение:</td></tr>
<tr><td>$$x = \phi(p, C)$$</td><td>$$y = \phi(p, C)$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Записать решение исходного ДУ в параметрической форме:</td></tr>
<tr><td>$$\begin{cases} x = \phi(p, C) \\ y = f(\phi(p, C), p) \end{cases}$$</td><td>$$\begin{cases} x = f(\phi(p, C), p) \\ y = \phi(p, C) \end{cases}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Проверить потерянные решения: все потерянные решения вида $p = \ldots.$, подставляются в выражение из п. 2 алгоритма и принимают вид: $y = \ldots.$ или $x = \ldots.$ Затем следует проверка подстановкой в исходное ДУ</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Записать общее решение ДУ</td></tr>
</table>

Пример 2

Дано: $y = x + y' - \ln y'$

Ответ: $\boxed{\begin{cases} x = \ln|p| + C \\ y = p + C \end{cases}, \quad y = x + 1}$

В данном примере можно исключить параметр p и получить решение в явном виде. Для этого выразим параметр из первого уравнения:

$$x = \ln|p| + C$$

$$\ln|p| = x - C$$

$$p = e^{x-C}$$

Затем подставим полученное выражение во второе уравнение: $y = e^{x-C} + C$.

Ответ: $\boxed{y = e^{x-C} + C, \quad y = x + 1}$

Условия существование и единственность решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Задача Коши

При решении практических задач, как правило, необходимо найти не общее, а частные решения ДУ, соответствующие определенным априори известным условиям. Обычно это так называемые начальные условия, которые накладываются на искомую функцию $y(x)$ в заданной точке x_0.

Определение 1. Задачей Коши для ДУ 1-го называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0, y_0 заданы.

Поскольку задача Коши носит исключительно прикладной характер, возникает вопросы: существует ли решение ДУ, удовлетворяющее заданному начальному условию и будет ли оно единственным.

Теорема Коши (Теорема существования и единственности решения ДУ)

Дано: $y' = f(x, y)$,

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D, содержащей точку $P_0 = (x_0, y_0)$, и удовлетворяет в D условию Липшица, то в достаточно малом интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h, h > 0$ существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$.

Существование решения при этом утверждается на достаточно малом интервале, а единственность в пределах рассматриваемой области.

Замечание. Условие Липшица может быть заменено несколько более грубым условием существования ограниченной по модулю, непрерывной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области D.

Утверждение.

1) Если функция $f(x,y)$ непрерывна, то в интервале $x_0-h\le x\le x_0+h,\ h>0$ существует решение ДУ.
2) Если кроме этого, существует ограниченная непрерывная частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ в рассматриваемой области, то это решение является единственным.

Пример 3.

Проанализировать поставленные задачи Коши:

1) $y'=\frac{y}{x},\quad y(0)=1$
2) $y'=x\sqrt{y},\quad y(1)=0$

Решение

1) Рассмотрим задачу $y'=\frac{y}{x},\quad y(0)=1$.

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x,y)=\frac{y}{x}-$ это функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки, точки задаваемой начальными условиями: $P_0=(0,1)$. Очевидно, что в самой точке $P_0=(0,1)$ функция имеет разрыв, а, следовательно, не является непрерывной.

Вывод: задача Коши не имеет решений.

Для сравнения, общее решение данного ДУ: $y=C\cdot x$, очевидно, что при подстановке начальных условий в общее решение получим: $1=0$

2) Рассмотрим задачу $y'=x\sqrt{y},\quad y(1)=0$.

Рассмотрим правую часть уравнения: $f(x,y)=x\sqrt{y}-$ это функция двух переменных. Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки, точки задаваемой начальными условиями: $P_0=(1,0)$. Очевидно, что функция не имеет разрывов, а, следовательно, является непрерывной.

Вывод: задача Коши имеет решение.

Рассмотрим частную производную функции $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}}$ − это также функция двух переменных.

Исследуем поведение этой функции в окрестности начальной точки $P_0 = (1, 0)$. Очевидно, что в самой точке $P_0 = (1, 0)$ функция имеет разрыв, а, следовательно, не является непрерывной.

Вывод: задача Коши имеет более одного решения.

Для сравнения, общее решение данного ДУ: $\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + C, \quad y = 0$, очевидно, что при подстановке начальных условий в общее решение получим два решения задачи Коши: $\sqrt{y} = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}, \quad y = 0$