Курсовая работа
по курсу "Дифференциальные
и уравнения".
Выполнил студент группы
М7О-208БВ-24 Фельдман Л.Б.
Вариант № 25

Этап #2
Задание:

а) $y'(ln(y)-4cos(x)=2x-4y\cdot sin(x)$

б) $x\cdot dx=(y\cdot e^{2y}+x^2)dy$

Этап #2
Задание. Определить тип
(с доказательством) и найти
общее решение каждого ДУ
1-ого порядка.

Уравнение а)
Дано: $y'(ln(y)-4cos(x))=2x-4y\cdot sin(x)$
Определить тип и найти
общее решение ДУ

Решение:
Определим тип исходного ДУ.
Проверим является ли данное
ДУ уравнением в полных
диффиринциалах:

$$\frac{dy}{dx}(ln(y)-4cos(x))=2x-4y\cdot sin(x)$$

$(\ln(y) - 4\cos(x))\,dy = (2x - 4y\sin(x))\,dx$

$$\underbrace{(4y\sin(x) - 2x)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(\ln(y) - 4\cos(x))}_{N(x,y)}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4\cdot\sin(x) \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 4\cdot\sin(x)$$

Т.к $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ДУ является уравнением в полных дифференциалах.

Будем искать решение в виде: $F(x,y) = C$, где

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) = 4y\cdot\sin(x) - 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y) = \ln(y) - 4\cdot\cos(x)$$

Для поиска решения проинтегрируем $N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}$ по y:

$$F(x,y) = \int(\ln(y) - 4\cos(x))\,dy =$$

$$= \ln(y)y - y - 4y\cos(x) + C(x)$$

$$F(x,y) = \ln(y)y - y - 4y\cdot\cos(x) + C(x)$$

Продифферинцируем найденную функцию по x и приравняем $M(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = +4y \cdot \sin(x) + C'(x)$$

$$\underbrace{+4y \cdot \sin(x) + C'(x)}_{\frac{\partial F}{\partial x}} = \underbrace{+4y \cdot \sin(x) - 2x}_{M(x,y)}$$

Следовательно $C'(x) = -2x$

Тогда $C(x) = \int -2x \cdot dx = -x^2$

Запишем найденную функцию:

$$F(x,y) = y \cdot \ln(y) - y - 4y \cdot \cos(x) - x^2$$

Окончательно: $F(x,y) = C \rightarrow$ $\ln(y)y - y - 4y \cdot \cos(x) - x^2 = C$ или

Ответ:

$$y \cdot \ln(y) - y - 4y\cos(x) - x^2 = C$$

Упражнение б)

Дано: $x \cdot dx = (y \cdot e^{2y} + x^2)\, dy \mid : dy$

Определить тип и найти общее решение ДУ

Решение:

Выразим x' из ДУ и определим тип исходного уравнения:

$$x \cdot x' = (y \cdot e^{2y} + x^2) \mid : x$$

$$x' = \underbrace{1}_{a(x)}x + \underbrace{y \cdot e^{2y}}_{b(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{x^n} \text{ — это ДУ}$$

Бернулли при $n = -1$

Разделим обе части на x^{-1}:

$x \cdot x' = x^2 + y \cdot e^{2y}$ (*)

Вводим замену: $z = \frac{1}{x^{-1-1}} = x^2$;

$z' = 2x \cdot x' \rightarrow$

$\rightarrow x' = \frac{z'}{2x}$

Подставим полученные выражения в ДУ (*)

$\frac{z'}{2x} \cdot x = 2z + 2y \cdot e^{2y}$

$z' = 2z + 2y \cdot e^{2y}$ - это неоднородное ЛДУ 1-го порядка.

Решаем неоднородное ЛДУ методом вариации произвольной постоянной.

Сначала решаем соответствующее однородное ЛДУ

$z' = 2z$

$\frac{dz}{dy} = 2z \qquad \int \frac{dz}{z} = \int 2 \cdot dy$

$\ln|z| = 2y + C \qquad z = e^{C \cdot 2y} = C \cdot e^{2y}$

В полученном решении заменяем произвольную постоянную на неизвестную функцию:

$z=C(y)\cdot e^{2y}$

Подставляем полученное решение в ЛДУ:

$$(C(y)\cdot e^{2y})'=2y\cdot e^{2y}+2\cdot C(y)\cdot e^{2y}$$

$$\cancel{C(y)\cdot 2e^{2y}}+C'(y)\cdot \cancel{e^{2y}}=2y\cdot \cancel{e^{2y}}+\cancel{C(y)\cdot 2e^{2y}}$$

$$C'(y)=2y$$

Находим неизвестную функцию $C(y)$:

$$C(y)=\int 2y\cdot dy=y^2+C$$

Подставляем найденное выражение в решение:

$$z=e^{2y}(y^2+C)$$

Делаем обратную замену:

$$x^2=e^{2y}(y^2+C)$$

Проверяем потерянные решения:

$x=0$ – не решение, т.к. противоречит исходному ДУ:

$0\cdot 0'=(y\cdot e^{2y}+0^2)$ $\quad 0\neq y\cdot e^{2y}$

$e^{2y}=0$ $\quad y\notin R$

Ответ:

$$x^2=e^{2y}(y^2+C)$$