Лекция № 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем случае имеет вид:

$$F(x, y, y', y''...y^{(n)}) = 0$$

или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$$ – уравнение, разрешенное относительно производной.

Решение ДУ имеет вид $\Phi(x, y, C_1, C_2...C_n) = 0$ и зависит от n произвольных постоянных:

Случаи интегрирование ДУ высших порядков (продолжение)

Нахождение общего решения ДУ высшего порядка возможно только в нескольких случаях.

Случай I.

ДУ имеет вид: $y^{(n)} = f(x)$.

В этом случае решение находится в результате n кратного интегрирования левой и правой частей ДУ.

Пример 1.

Дано: $y''' = \sin x$

Решение:

Трижды интегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int y'''dx = \int \sin x dx \quad \to \quad y'' = -\cos x + C_1$$

$$\int y''dx = \int (-\cos x + C_1)dx \quad \to \quad y' = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$\int y'dx = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)dx \quad \to \quad y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

Ответ: $\boxed{y = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3}$

Остальные случаи решения ДУ высшего порядка требуют использование специальных замен.

Общий алгоритм решения ДУ высшего порядка в случае использования замен

1. Понизить порядок ДУ до 1-го, используя необходимые замены.
2. Решить ДУ 1-го порядка.
3. Сделать обратные замены. Если необходимо опять понизить порядок (п.1, 2). Всего нужно решить n ДУ 1-го порядка.
4. Выписать все решения ДУ. Хотя бы одно из них должно содержать n произвольных постоянных.
5. Проверить потерянные решения.
6. Записать ответ.

Случай II.

ДУ имеет вид: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ − ДУ не содержит y.

Замена:

Вводится новая функция: $z(x) = y^{(k)}$, тогда $y^{(k+1)} = z'$ и т.д.

Пример 1.

Дано: $x \cdot y'' = 3y'$

Ответ: $\boxed{y = C_1 \dfrac{x^4}{4} + C_2}$

Случай III.

ДУ имеет вид: $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ − ДУ не содержит x.

Замена:

Вводится новая переменная: y

Вводится новая функция: $p(y) = y'$, тогда

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

Пример 2.

Дано: $y'' = 2y \cdot y'$

6. **Ответ:** $\boxed{\dfrac{1}{2C_1} \ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = x + C_2; \quad -\dfrac{1}{y} = x + C_2; \quad \dfrac{1}{C_1} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{C_1} = x + C_2; \quad y = C}$

Случай IV.

ДУ является *однородным относительно* y *и производных*, а это значит, оно не меняется в результате одновременной замены y на $k\cdot y$, y' на $k\cdot y'$ и т.д., где k – любое число, не равное 0.

Замена:

Вводится новая функция: $z(x)=\dfrac{y'}{y}$ или $y'=z\cdot y$, тогда

$$y''=(z\cdot y)'=z'\cdot y+z\cdot y'=z'\cdot y+z\cdot(z\cdot y)=z'\cdot y+z^2\cdot y$$

Пример 3.

Дано: $x\cdot y\cdot y''-x\cdot(y')^2=y\cdot y'$

Ответ: $\boxed{\ln|y|=C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2,\quad y=0}$

Порядок уравнения легко понижается, если удается преобразовать уравнение к такому виду, чтобы обе его части являлись полными производными по x от каких либо функций.

Пример 4.

Дано: $y'\cdot y'''=2(y'')^2$

Решение:

Делим обе части ДУ на $y'\cdot y''$: $\dfrac{y'''}{y''}=2\dfrac{y''}{y'}$

Выделяем в обеих частях уравнения полные производные:

$$[\ln y'']'=2[\ln y']'$$

Интегрируем:

$$\ln y''=2\ln y'+\ln C_1 \quad\Rightarrow\quad y''=C_1(y')^2$$ – ДУ 2-го порядка

Делим обе части уравнения на y':

$$\frac{y''}{y'}=C_1y' \quad\Rightarrow\quad [\ln y']'=C_1y'$$

Интегрируем:

$$\ln y'=C_1y+\ln C_2 \quad\Rightarrow\quad y'=C_2\cdot e^{C_1y}$$ – ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными.

Решаем полученное уравнение:

$$\int\frac{dy}{e^{C_1y}}=\int C_2dx \quad\Rightarrow\quad \int e^{-C_1y}dy=\int C_2dx \quad\Rightarrow\quad \underline{-\frac{1}{C_1}e^{-C_1y}=C_2x+C_3}$$

После проверки потерянных решений получаем:

Ответ: $\boxed{-\dfrac{1}{C_1}e^{-C_1 y}=C_2 x+C_3;\quad y=C_1 x+C_2}$

Задача Коши для ДУ высших порядков

Определение 1. Задачей Коши для ДУ называется задача об отыскании частного решения ДУ, удовлетворяющего n начальным условиям, где n − порядок ДУ.

Определение 2. Начальные условия – это условия на функцию y и ее производные до $n-1$ порядка включительно, заданные в одной и той же точке x_0, называемой начальной.

Поставить задачу Коши для ДУ это значит задать начальные условия.

Пример. Записать ДУ 4-го порядка в общем виде. Поставить задачу Коши.

$$y^{IV}=f(x,y,y',y'',y''')$$

$$y(x_0)=a$$

$$y'(x_0)=b$$

$$y''(x_0)=c$$

$$y'''(x_0)=d$$

x_0, a, b, c, d – некоторые числа.

Алгоритм решения задачи Коши для ДУ n-го порядка в случае его интегрируемости

1. Решить ДУ. Записать его общее решение.
2. Продифференцировать общее решение $n-1$ раз.
3. Подставить в общее решение и найденные производные начальные условия. Получится система алгебраических уравнений, относительно произвольных постоянных $C_1, C_2 \ldots C_n$.
4. Решить систему. Найти $C_1, C_2 \ldots C_n$.
5. Подставить найденные значения в общее решение – это решение задачи Коши.

Пример 5.

Дано: $x\cdot y''=3y'$

$$y(1)=1$$

$$y'(1)=2$$

Решение:

1. Решаем ДУ (см. пример 2.). Общее решение ДУ имеет вид: $y=C_1\dfrac{x^4}{4}+C_2$.

2. Дифференцируем общее решение один раз:

$$y' = C_1 x^3$$

3. Подставляем заданные начальные условия в общее решение и производную:

Условие $y(1) = 1$ означает, что при $x = 1$ функция $y = 1$, значит $1 = C_1 \dfrac{1^4}{4} + C_2$

Условие $y'(1) = 2$ означает, что при $x = 1$ функция $y' = 2$, значит $2 = C_1 \cdot 1^3$

Получили: $\begin{cases} 1 = \dfrac{1}{4} C_1 + C_2 \\ 2 = C_1 \end{cases}$

4. Решаем систему:

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

5. Подставим найденные значения в общее решение: $y = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{1}{2}$ – решение задачи Коши

Ответ: $\boxed{y = \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{1}{2}}$

Теорема Коши. (Теорема существования и единственности решения ДУ)

Дано: $y^{(n)} = f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$

Если в некоторой области D, содержащей точку $P_0 = (x_0, a, b, c, ..., s)$, функция $f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$ является непрерывной функцией своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, то в достаточно малом интервале $x_0 - h \le x \le x_0 + h, h > 0$, существует единственное решение ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$\begin{aligned} &y(x_0) = a \\ &y'(x_0) = b \\ &y''(x_0) = c \\ &....... \\ &y^{(n-1)}(x_0) = s \end{aligned}$$

***Замечание*:** Условие Липшица может быть заменено несколько более грубыми условиями существования ограниченных частных производных первого порядка по всем аргументам, начиная с y: $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dfrac{\partial f}{\partial y''} ... \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ в области D.

***Утверждение*:**

1. Решение существует на интервале, если функция $f(x, y, y', y''...y^{(n-1)})$ непрерывна.

2. Решение единственное в области D, если существуют ограниченные непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \frac{\partial f}{\partial y''} ... \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$