مبانی و کاربردهای هوش مصنوعی

مسائل ارضای محدودیت 1 (فصل 6.1 الی 6.5)

مدرس: مهدی جوانمردی

دانشکده مهندسی کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(الهام گرفته از محتوای درس هوش مصنوعی دانشگاه برکلی)

مسائل ارضای محدودیت
(Constraint Satisfaction Problems)

N متغیر

D دامنه

محدودیت‌ها

حالت‌ها

تخصیص جزئی

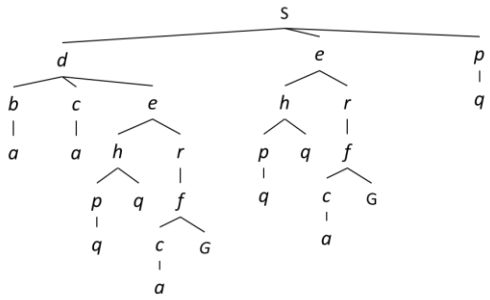
آزمون هدف

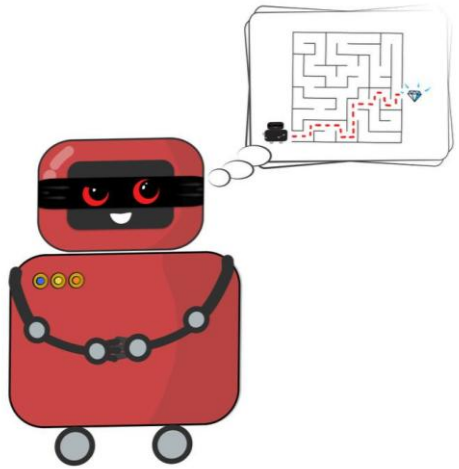
تخصیص کامل،
ارضای محدودیت‌ها

تابع پسین

تخصیص یک مقدار
به یک متغیر

جستجو برای چه هدفی؟

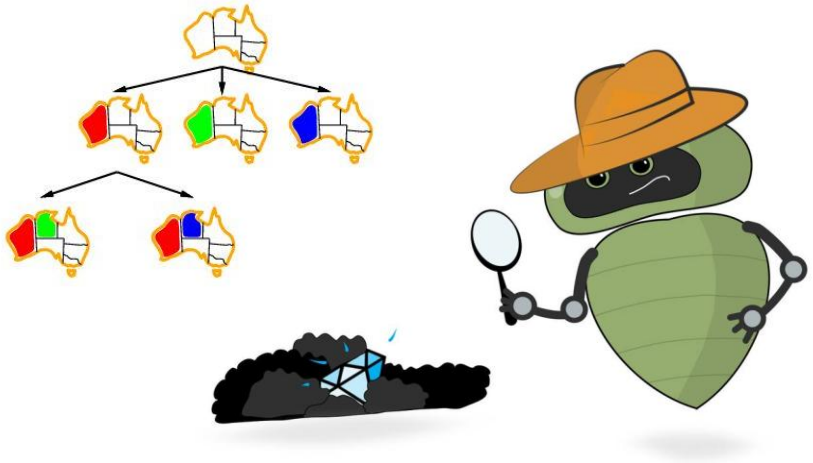




- مفروضات در مورد جهان:

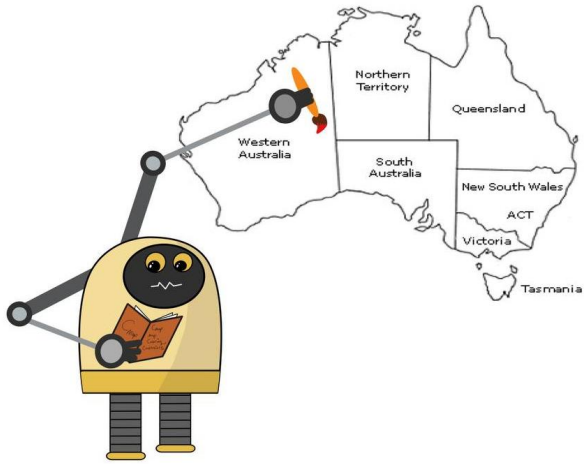
  تک عامل، اقدامات قطعی، حالت کاملا مشاهده‌پذیر، فضای حالت گسسته

- برنامه‌ریزی (planning): دنباله‌ای از اقدامات
  - مسیر رسیدن به هدف مهم است.
  - مسیرها عمق و هزینه متفاوتی دارند.
  - هیوریستیک‌ها راهنمایی‌های مخصوصی برای مسئله ارائه می‌دهند.



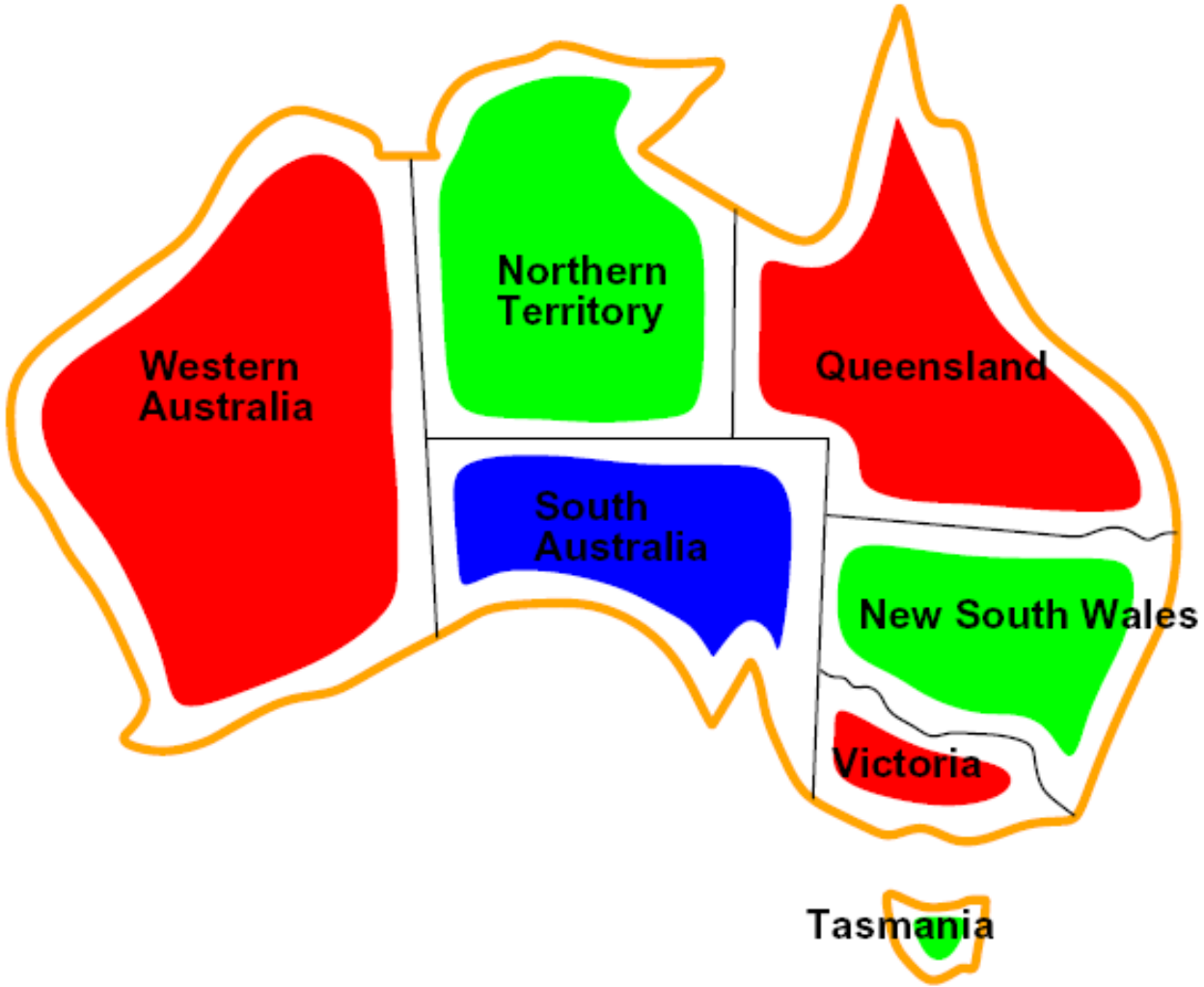
- شناسایی (identification): تخصیص مقادیر به متغیرها
  - خود هدف مهم است نه مسیر
  - معمولا همه مسیرهای هدف در عمق یکسان (برای برخی از فرمولاسیون‌ها)
  - مسائل ارضای محدودیت (CSP) اختصاصاً برای مسائل شناسایی طراحی شده است

مسائل ارضای محدودیت

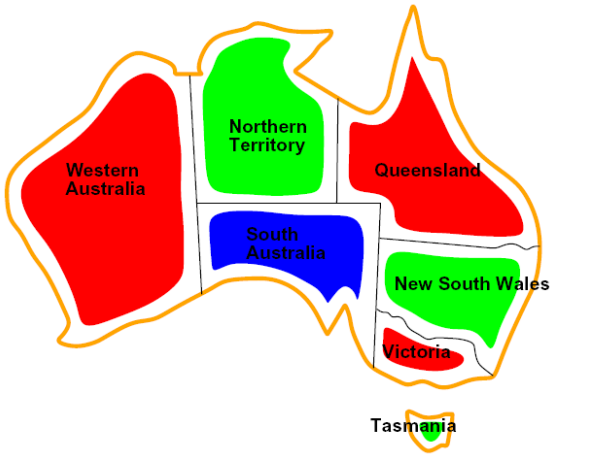


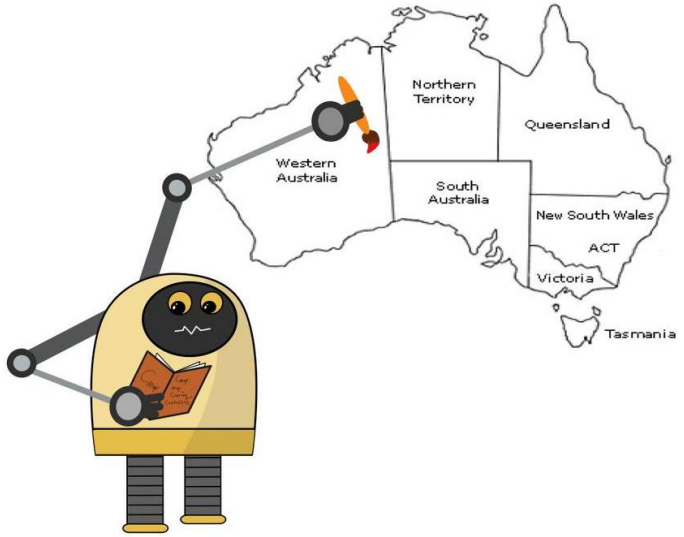
- مسائل جستجوی استاندارد:
  - حالت (state) یک "جعبه سیاه" است: ساختار داده دلخواه
  - آزمون هدف می‌تواند هر تابعی بر روی حالت‌ها باشد.
  - تابع پسین نیز می‌تواند هر چیزی باشد.
- مسائل ارضای محدودیت (CSPs):
  - یک زیرمجموعه خاص از مسائل جستجو
  - حالت توسط متغیرهای X_i با مقادیر دامنه D تعریف می‌شود. (گاهی اوقات D به i بستگی دارد)
  - آزمون هدف مجموعه‌ای از محدودیت‌ها است که ترکیبات مجاز مقادیر را برای زیرمجموعه‌های متغیرها مشخص می‌کند.
- مجموعه‌ای از الگوریتم‌های همه‌منظوره را ارائه می‌دهد که از الگوریتم‌های جستجوی استاندارد قوی‌تر است.

مثال‌های CSP


Western Australia
Northern Territory
Queensland
South Australia
New South Wales
Victoria
Tasmania

مثال: رنگ‌آمیزی نقشه





- متغیرها:

$$WA, NT, Q, NSW, V, SA, T$$

- دامنه‌ها:

$$D = \{red, green, blue\}$$

- محدودیت‌ها: مناطق مجاور باید رنگ‌های متفاوتی داشته باشند.

ضمنی: $WA \neq NT$

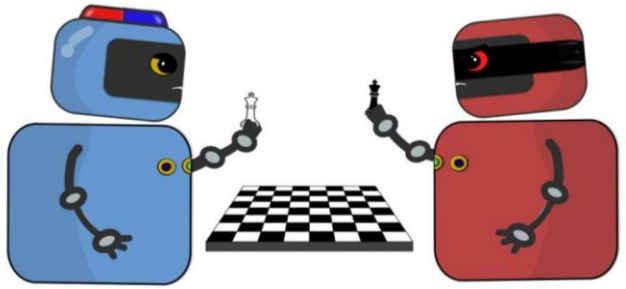
صریح: $(WA, NT) \in \{(red, green), (red, blue), \dots\}$

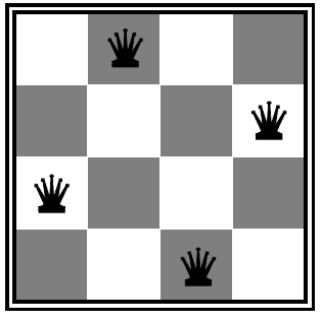
- راه‌حل‌ها انواع تخصیص‌هایی هستند که تمام محدودیت‌ها را برآورده می‌کنند،

به عنوان مثال:

$$\{WA = red, NT = green, Q = red, NSW = green,$$
$$V = red, SA = blue, T = green\}$$

مثال: N وزیر





- فرمول‌بندی 1:
  - متغیرها:

$$X_{ij}$$

  - دامنه‌ها:

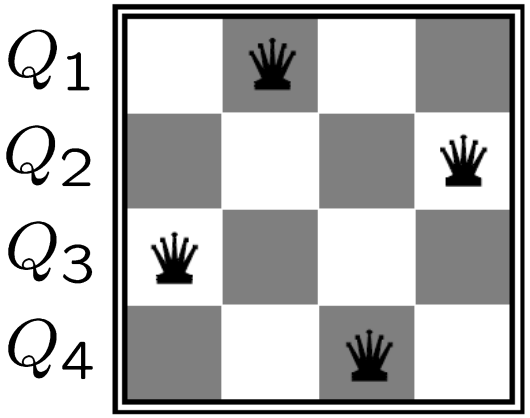
$$\{0, 1\}$$

  - محدودیت‌ها:

$$\forall i,j,k \ \ (X_{ij}, X_{ik}) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$$
$$\forall i,j,k \ \ (X_{ij}, X_{kj}) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$$
$$\forall i,j,k \ \ (X_{ij}, X_{i+k,j+k}) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$$
$$\forall i,j,k \ \ (X_{ij}, X_{i+k,j-k}) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}$$

$$\sum_{i,j} X_{ij} = N$$

مثال: N وزیر



- فرمول‌بندی 2:
  - متغیرها:

$$Q_k$$

  - دامنه‌ها:

$$\{1, 2, 3, \dots, N\}$$

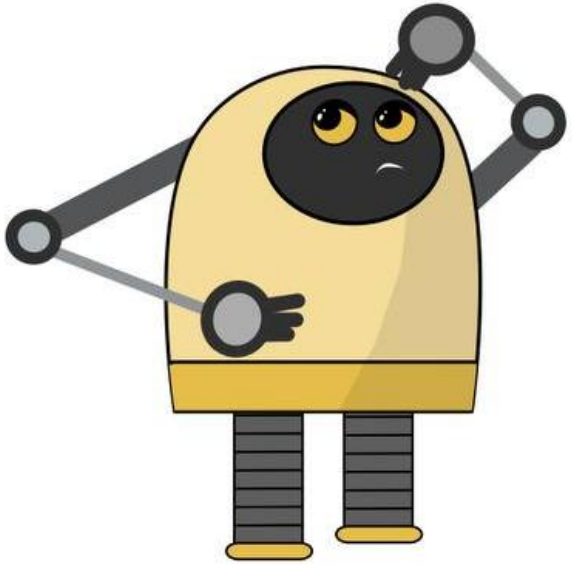
  - محدودیت‌ها:

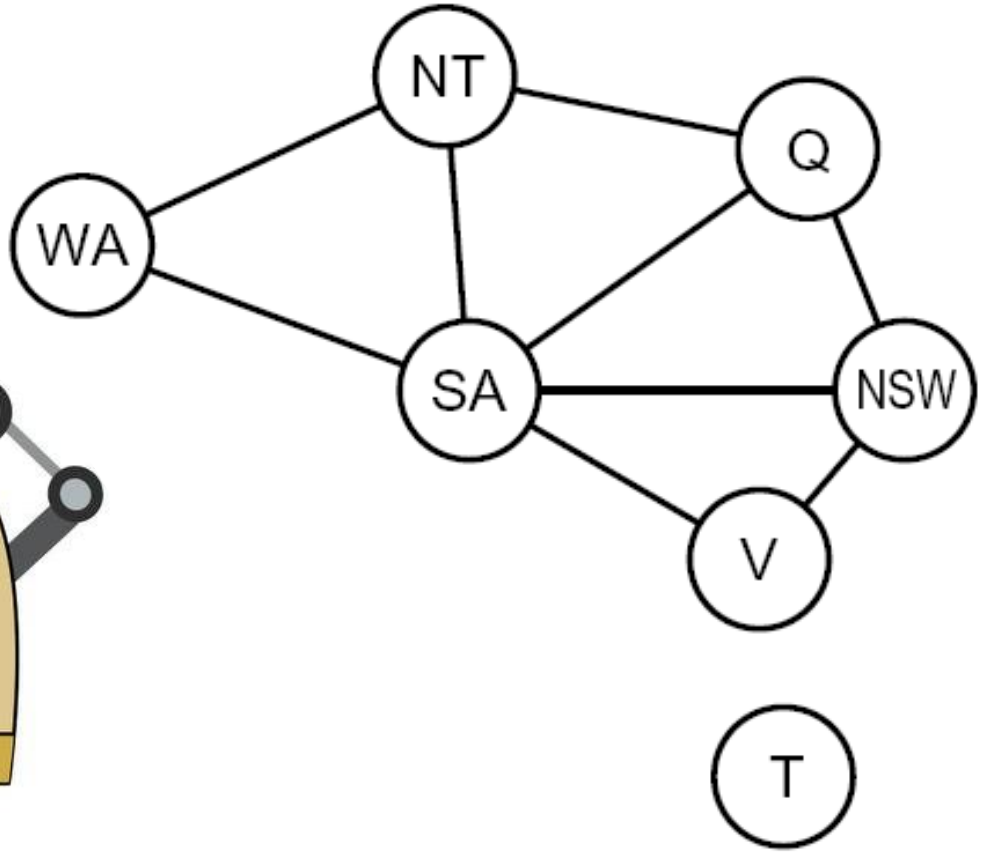
ضمنی: $\forall i, j \;\; non\_threatening(Q_i, Q_j)$

صریح: $(Q_1, Q_2) \in \{(1,3), (1,4), \dots\}$

$\dots$

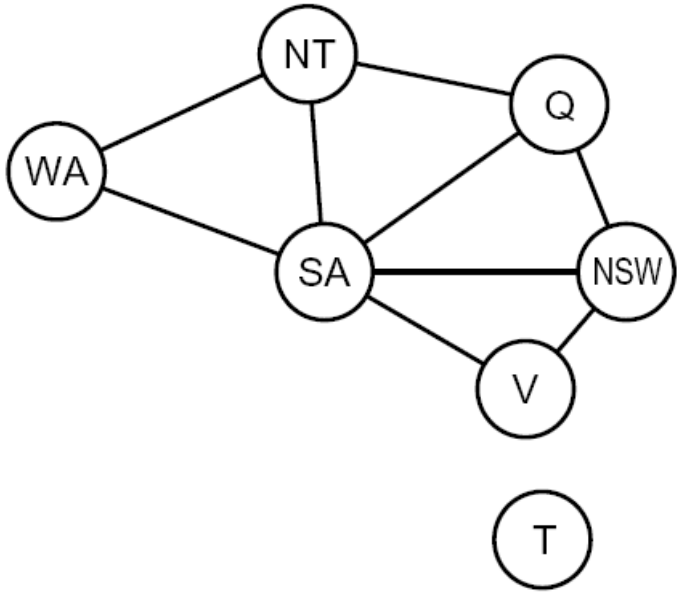
گراف محدودیت
(Constraint Graph)



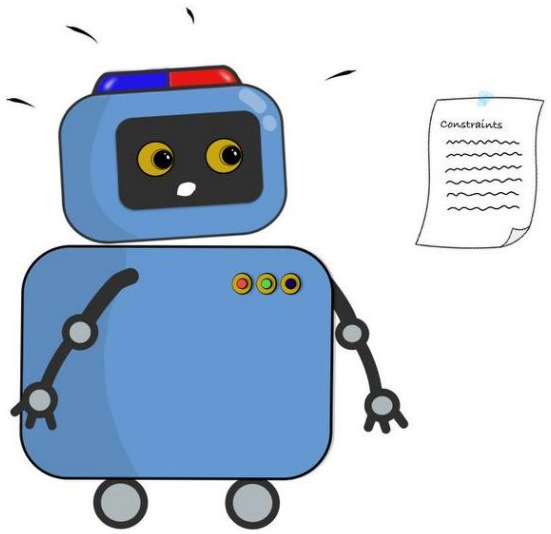


گراف محدودیت

- CSP باینری: هر محدودیت (حداکثر) به دو متغیر مربوط می‌شود.
- گراف محدودیت باینری: گره‌ها متغیر هستند، یال‌ها محدودیت‌ها را نشان می‌دهند.
- الگوریتم‌های CSP همه‌منظوره از ساختار گراف برای سرعت بخشیدن به جستجو استفاده می‌کنند. به عنوان مثال، تاسمانی (T) یک زیرمسئله مستقل است!

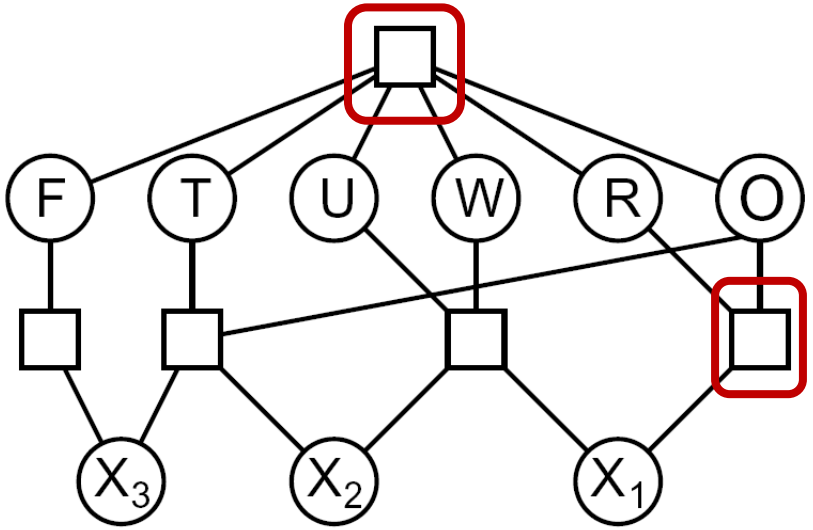


مثال: رمزگذاری



X_1

	T	W	O
+	T	W	O
F	O	U	R



- متغیرها:

$$F\ T\ U\ W\ R\ O\ X_1\ X_2\ X_3$$

- دامنه‌ها:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

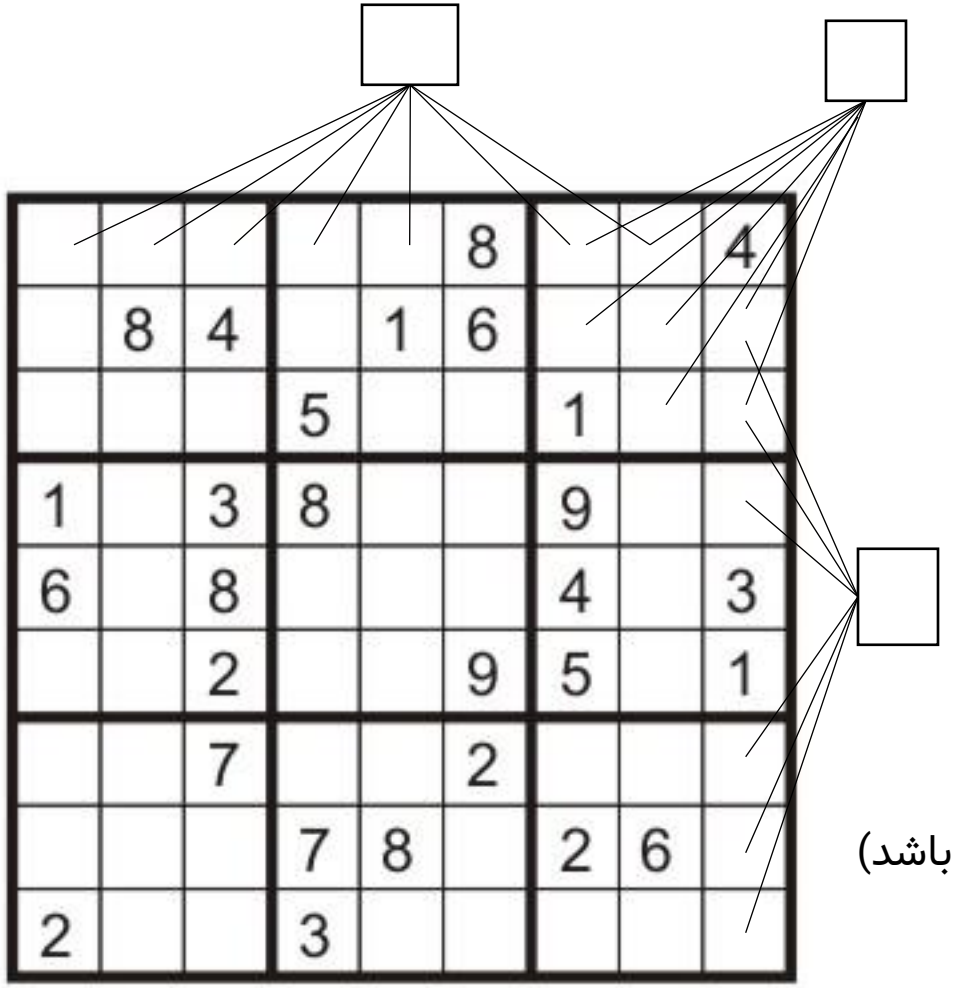
- محدودیت‌ها:

$$alldif(F, T, U, W, R, O)$$

$$O + O = R + 10 \cdot X_1$$

...

مثال: سودوکو



- متغیرها:
  - هر مربع (خالی)
- دامنه‌ها:
  - $\{1,2,\ldots,9\}$
- محدودیت‌ها:
  - 1 تا 9 متمایز(alldiff) برای هر ستون
  - 1 تا 9 متمایز برای هر سطر
  - 1 تا 9 متمایز برای هر ناحیه

(یا می‌تواند یک دسته از محدودیت‌های نابرابری دو به دو داشته باشد)

انواع محدودیت‌ها

- انواع محدودیت‌ها
  - محدودیت‌های یگانی (Unary) شامل یک متغیر منفرد (معادل کاهش دامنه‌ها) است، به عنوان مثال:

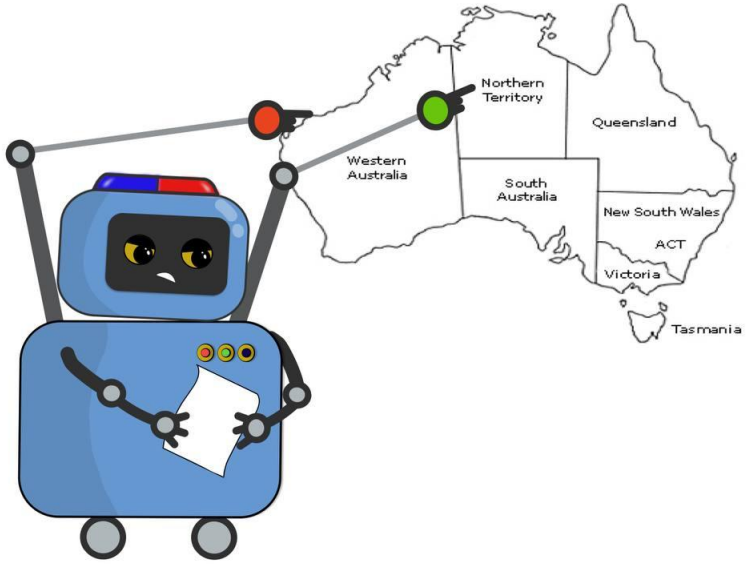
$$SA \neq green$$

  - محدودیت‌های دوتایی (Binary) شامل جفت متغیر است، به عنوان مثال:

$$SA \neq WA$$

  - محدودیت‌های مرتبه بالاتر(N-ary) شامل 3 یا چند متغیر است:

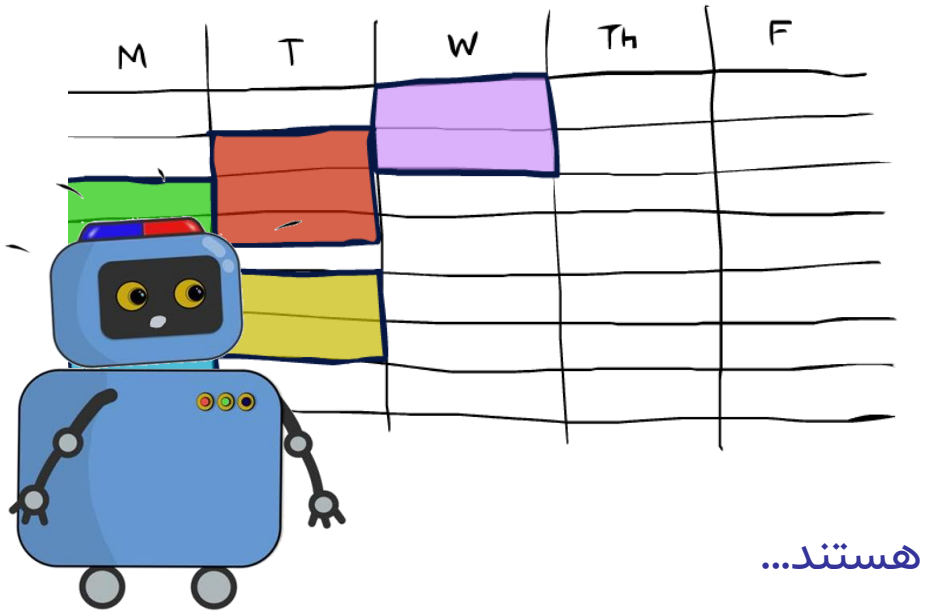
    به عنوان مثال، محدودیت‌های ستون تعیین رمز (Cryptarithmetic)



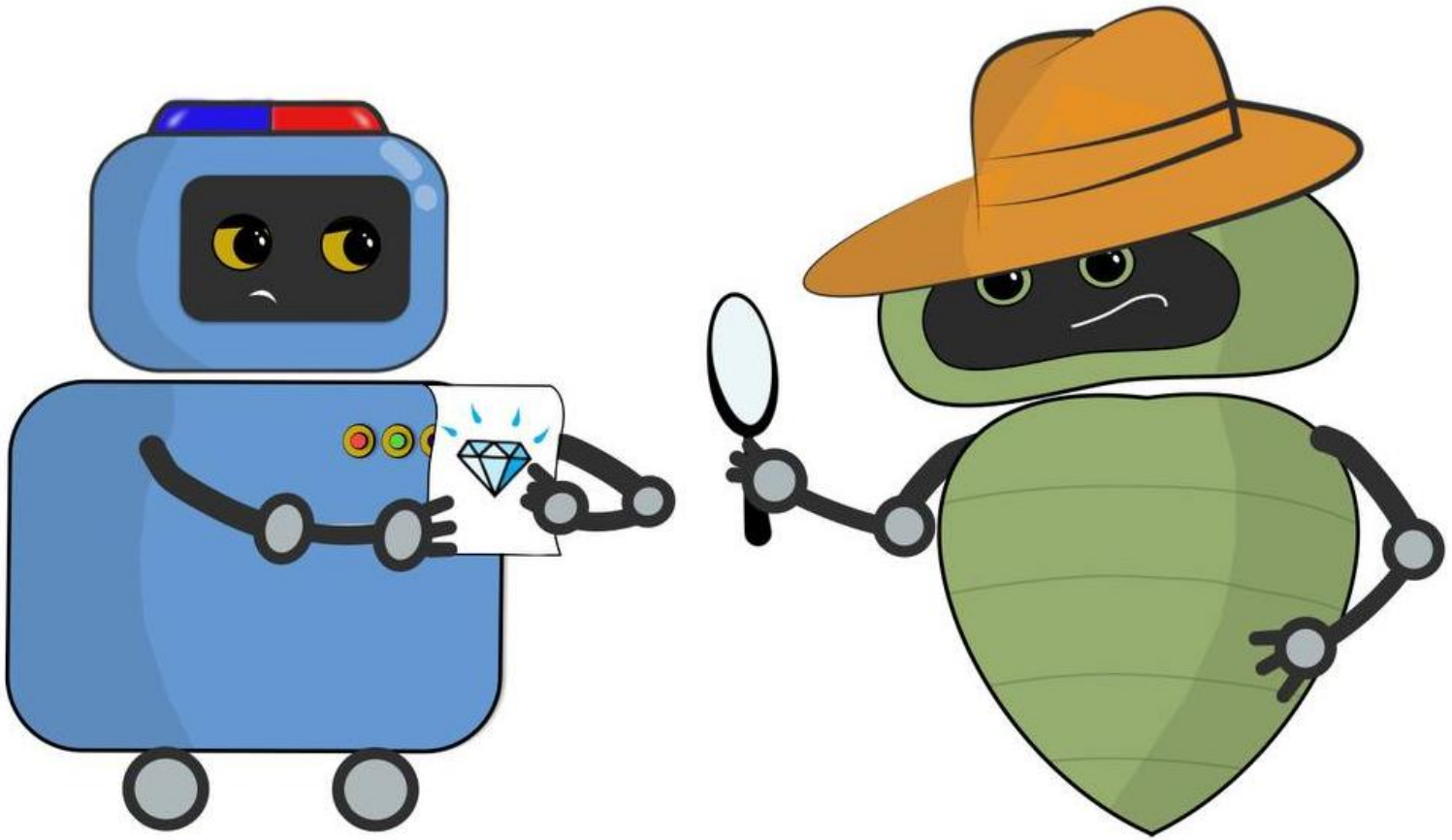
- ترجیحات (محدودیت‌های نرم):
  - به عنوان مثال، قرمز بهتر از سبز است.
  - اغلب با هزینه‌ای برای هر انتساب متغیر قابل نمایش است.
  - مسائل بهینه سازی دارای محدودیت را ارائه می‌دهد.
  - (تا زمانی که به شبکه‌ی بیز برسیم، این‌ها را نادیده می‌گیریم)

CSPهای دنیای واقعی

- مسائل برنامه‌ریزی: به عنوان مثال، چه زمانی همه ما می‌توانیم ملاقات کنیم؟
- مسائل زمان‌بندی: به عنوان مثال، کدام کلاس در چه زمانی و در کجا ارائه می‌شود؟
- مسائل تخصیص: به عنوان مثال، چه کسی در چه کلاسی تدریس می‌کند.
- پیکربندی سخت افزار
- برنامه‌ریزی حمل و نقل
- برنامه‌ریزی کارخانه
- طراحی مدار الکتریکی
- تشخیص عیب
- ... خیلی بیشتر!
- بسیاری از مسائل دنیای واقعی شامل متغیرهایی با مقادیر حقیقی هستند...



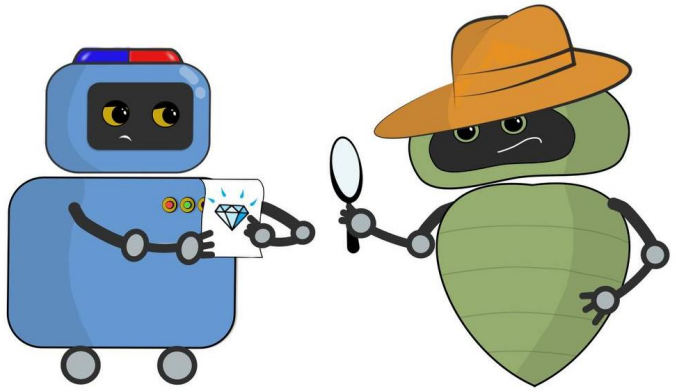
حل کردن CSPها



فرمول جستجوی استاندارد
(Standard Search)

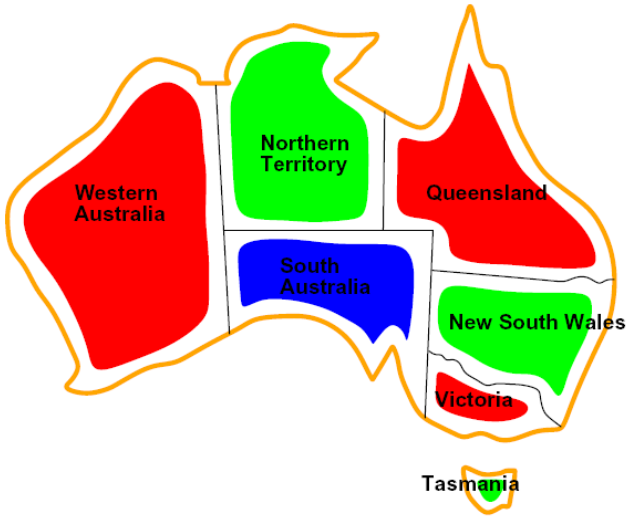
- فرمول جستجوی استاندارد CSPها
- تعریف حالت: مقادیر اختصاص‌یافته تاکنون (تخصیص جزئی متغیرها)
  - حالت اولیه: هیچ مقداری به هیچ متغیری اختصاص نیافته است، { }
  - تابع پسین: یک مقدار را به یک متغیر تخصیص نیافته اختصاص دهید
  - آزمون هدف: همه متغیرها تخصیص یافته است (تخصیص کامل)

    و تخصیص صورت گرفته تمامی محدودیت‌ها را برآورده می‌کند
- ما با یک رویکرد صریح و ساده کار را شروع می‌کنیم، سپس آن را بهبود می‌بخشیم



روش‌های جستجو

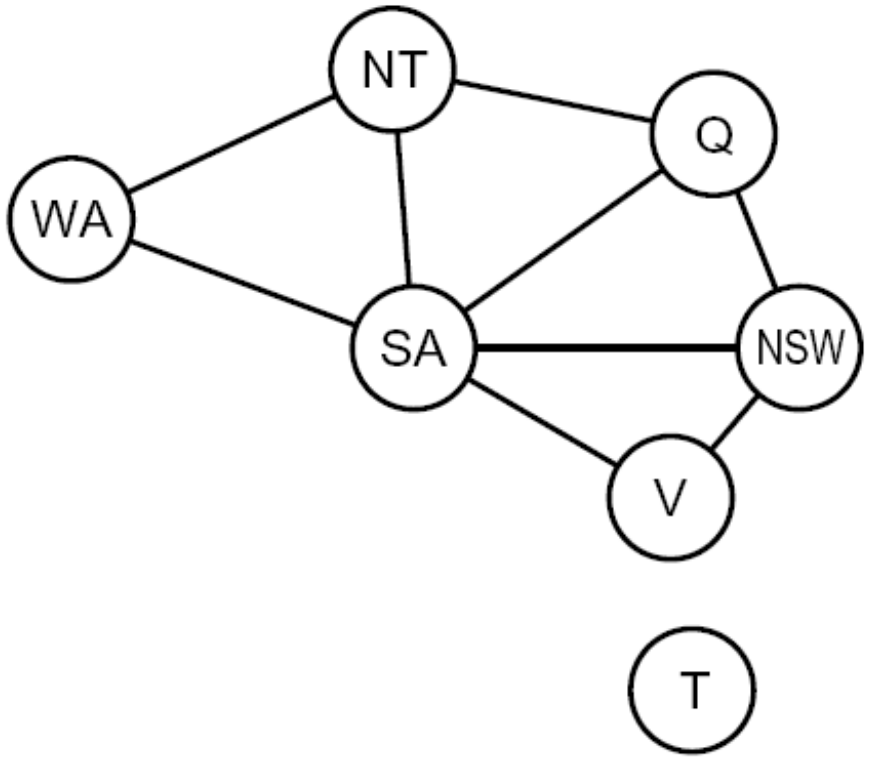
- BFS چه کاری انجام می‌دهد؟



$\{\}$

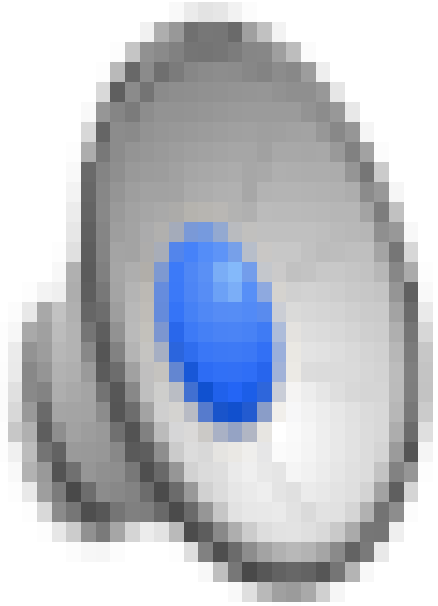
$\{WA=g\}$ $\{WA=r\}$ … $\{NT=g\}$ …

روش‌های جستجو

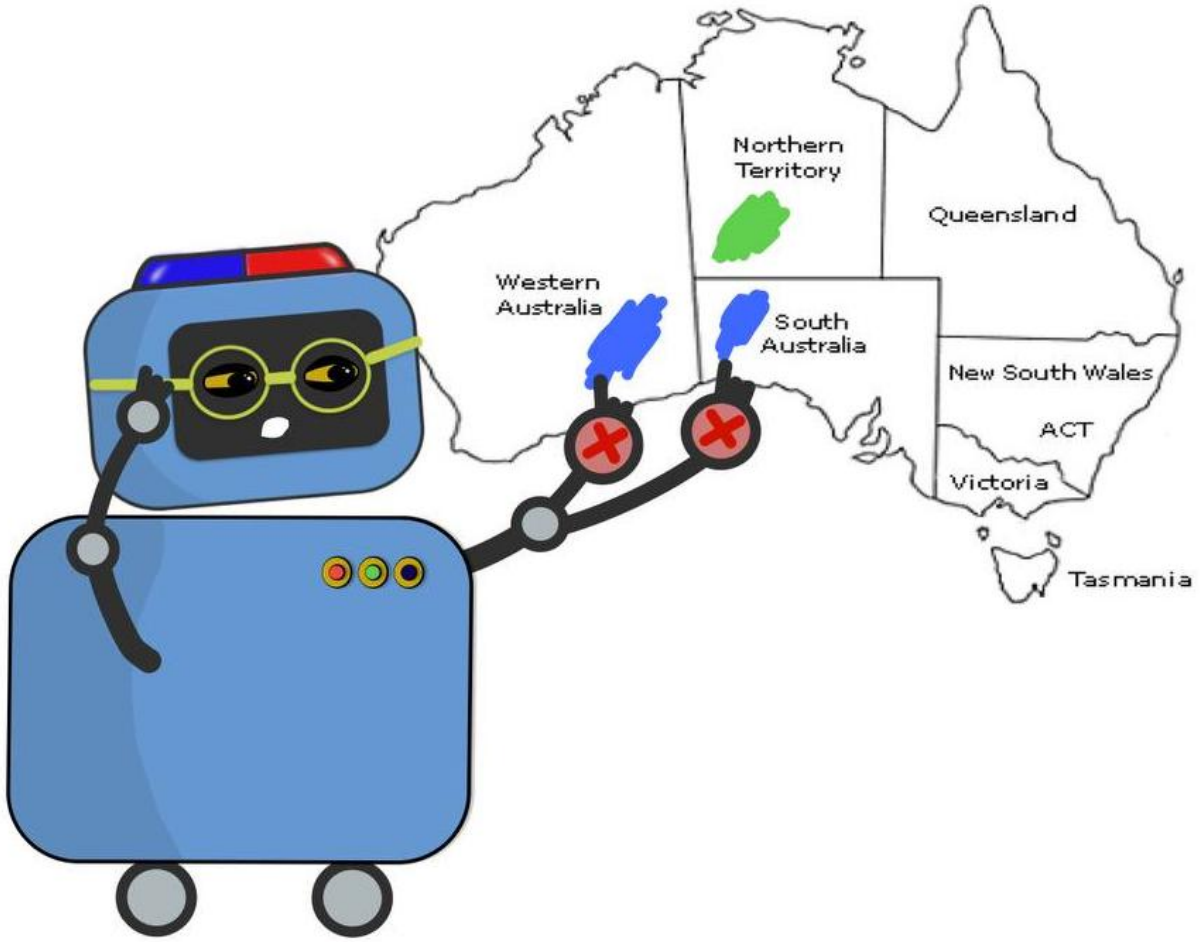


- BFS چه کاری انجام می‌دهد؟
- DFS چه کاری انجام می‌دهد؟
- جستجوی ساده چه مشکلاتی دارد؟

ویدیوی رنگ‌آمیزی دمو -- DFS



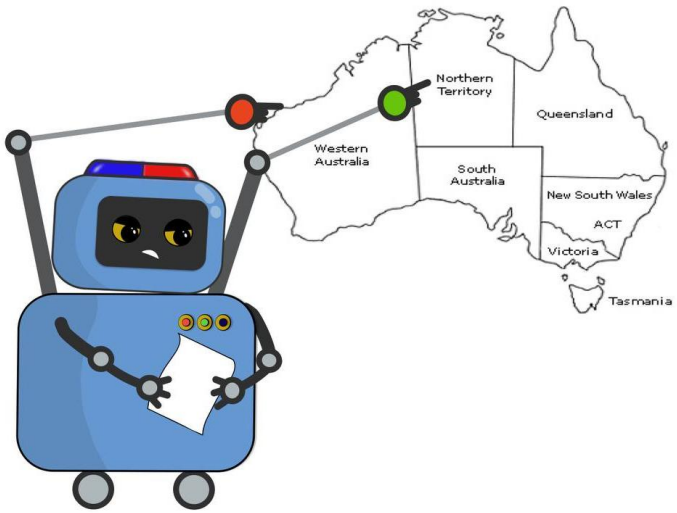
جستجوی عقبگرد
(Backtracking Search)



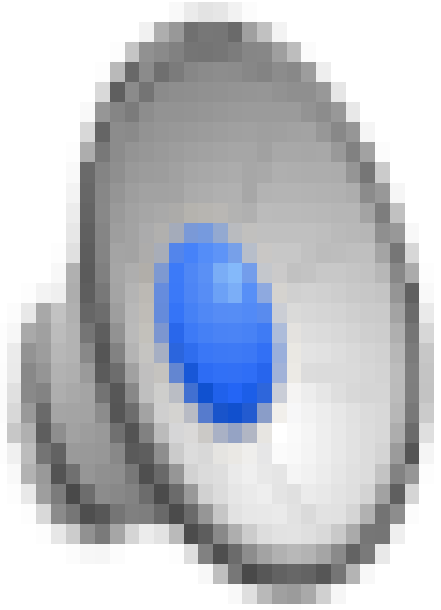
جستجوی عقبگرد (پس‌گرد)

Backtrack search

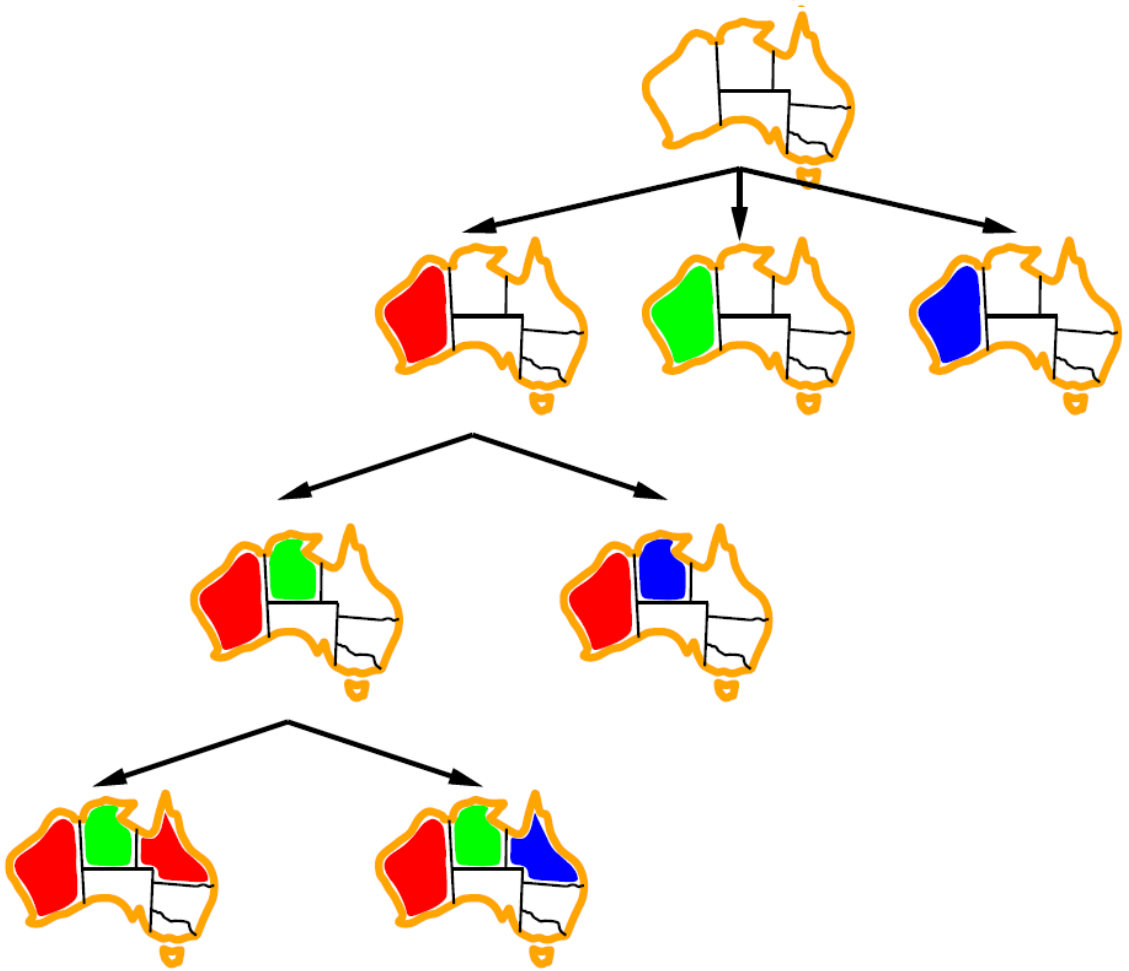
- جستجوی عقبگرد یک الگوریتم ناآگاهانه پایه برای حل CSPها است
- ایده 1: تعیین ترتیب مقداردهی متغیرها: یک متغیر در هر گام
  - مقداردهی متغیرها جابه‌جایی پذیر است، بنابراین یک **ترتیب** مشخص کنید.
  - یعنی $[WA = red\ then\ NT = green]$ با $[NT = green\ then\ WA = red]$ برابر است
  - در هر گام صرفا لازم است تا تخصیص مقدار به یک متغیر را در نظر بگیریم
  - بصورت شهودی: اندازه درخت را از $(nd)^n$ به d^n هرس میکند
- ایده 2: محدودیت‌ها را در حین تخصیص، بررسی کنید
  - تنها مقادیری را در نظر بگیرید که با تخصیص‌های قبلی مغایرت ندارند
  - اگر مقدار بدون مغایرت وجود نداشت برگشت به عقب
  - ممکن است برای بررسی محدودیت‌ها، مقداری محاسبات انجام شود
  - "آزمون هدف افزایشی"
- جستجوی اول عمق (DFS) با این دو بهبود جستجوی عقبگرد نامیده می‌شود
- می‌تواند n وزیر را برای $n \approx 25$ حل کند

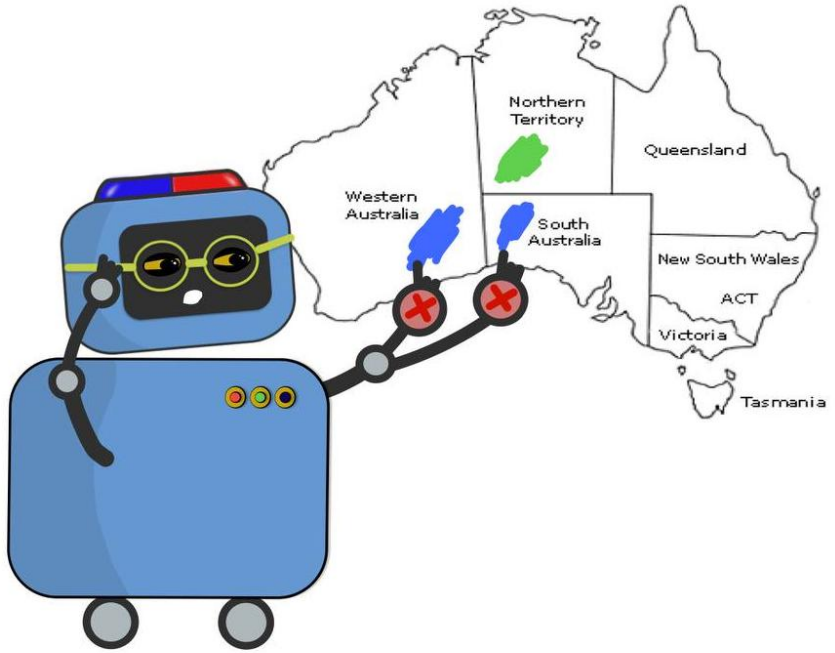


ویدیوی رنگ‌آمیزی دمو -- عقبگرد



مثال عقبگرد




Northern Territory
Queensland
Western Australia
South Australia
New South Wales
ACT
Victoria
Tasmania

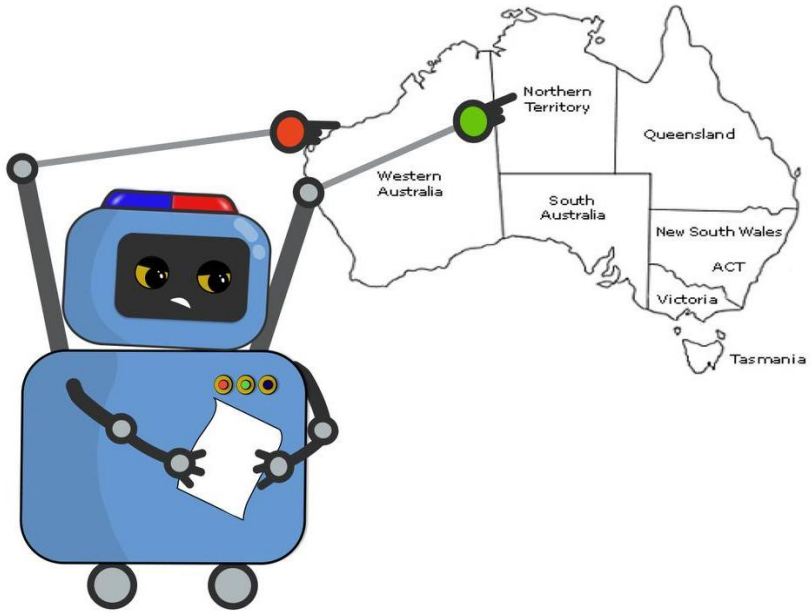
جستجوی عقبگرد

```
function BACKTRACKING-SEARCH(csp) returns solution/failure
    return RECURSIVE-BACKTRACKING({}, csp)

function RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp) returns soln/failure
    if assignment is complete then return assignment
    var ← SELECT-UNASSIGNED-VARIABLE(VARIABLES[csp], assignment, csp)
    for each value in ORDER-DOMAIN-VALUES(var, assignment, csp) do
        if value is consistent with assignment given CONSTRAINTS[csp] then
            add {var = value} to assignment
            result ← RECURSIVE-BACKTRACKING(assignment, csp)
            if result ≠ failure then return result
            remove {var = value} from assignment
    return failure
```

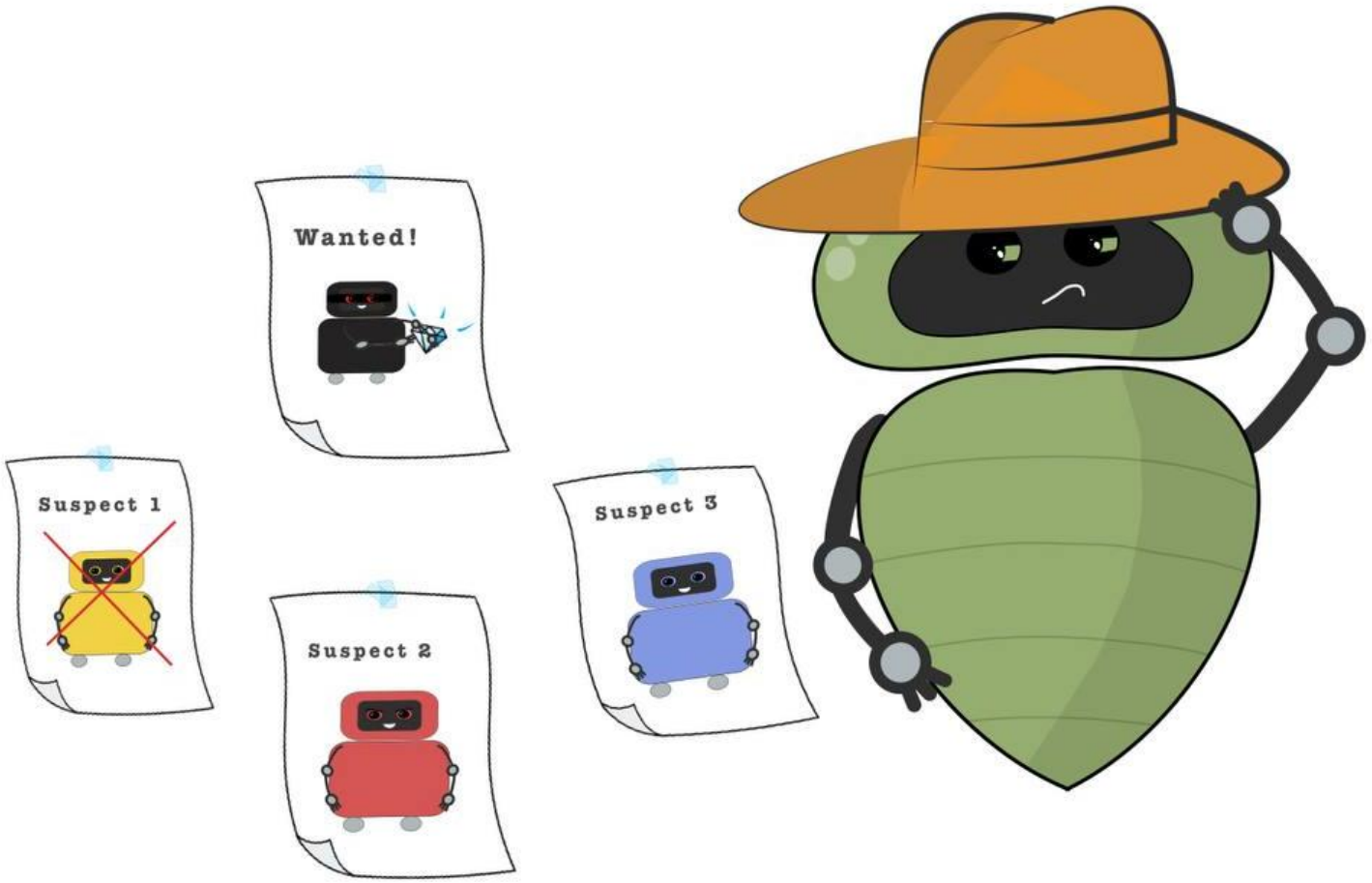
- عقبگرد = DFS + مرتب‌سازی متغیرها (variable ordering) + شکست در هنگام مغایرت (fail-on-violation)
- نقاط انتخاب / بهبود چه هستند؟

بهبود عقبگرد

- ایده‌های همه‌منظوره بهبود قابل توجهی در سرعت یافتن راه‌حل به همراه دارند
- فیلتر کردن: آیا می‌توانیم شکست اجتناب ناپذیر را زود تشخیص دهیم؟
- مرتب‌سازی:
  - کدام متغیر باید در مرحله بعد مقداردهی شود؟
  - مقادیر ممکن آن را به چه ترتیبی باید امتحان کرد؟
- ساختار: آیا می‌توانیم از ساختار مسئله بهره برداری کنیم؟

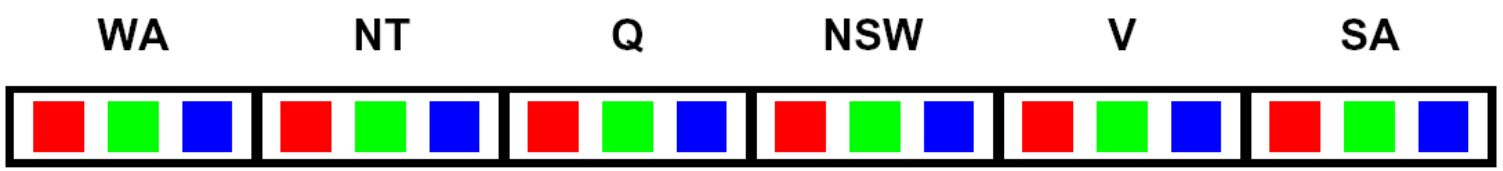


فیلتر کردن

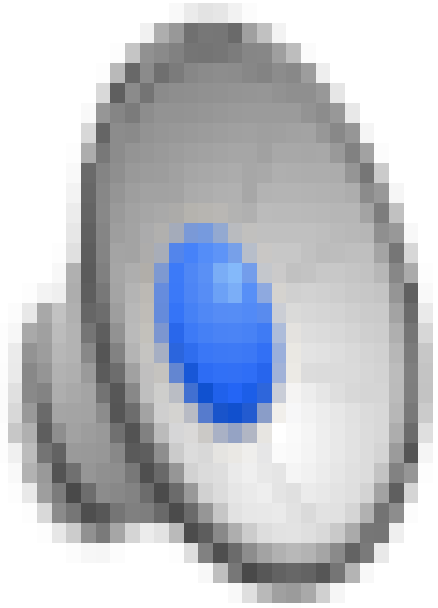


فیلتر کردن: بررسی رو به جلو
(Forward Checking)

- فیلتر کردن: دامنه‌های متغیرهای تخصیص نیافته را ردیابی کنید و گزینه‌های نامناسب را کنار بگذارید
- بررسی رو به جلو: خط زدن مقادیری که با تخصیص‌شان به تخصیص‌های فعلی محدودیتی نقض می‌شود از دامنه

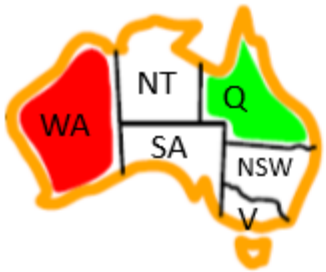


ویدیوی رنگ‌آمیزی دمو – عقبگرد با بررسی رو به جلو



فیلتر کردن: انتشار محدودیت
(Constraint Propagation)

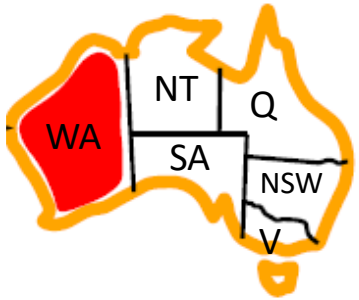
- "بررسی رو به جلو" اطلاعات را از متغیرهای اختصاص‌یافته به متغیرهای اختصاص‌نیافته انتشار می‌دهد،
  اما نمی‌تواند تشخیص زودهنگام را برای تمام حالت‌های شکست‌ها فراهم کند:

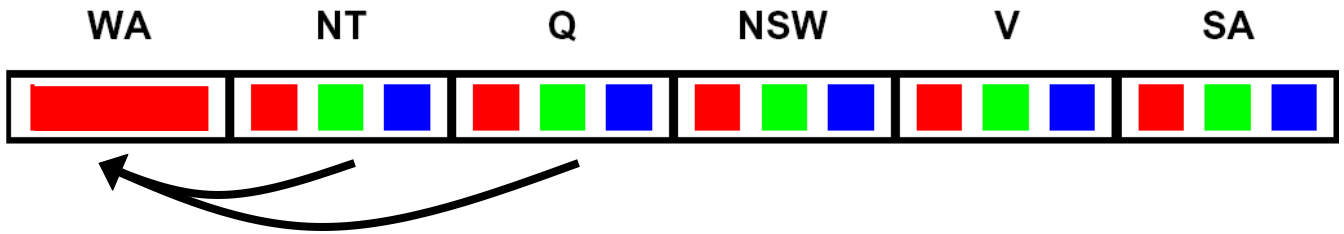


- NT و SA نمی‌توانند هر دو آبی باشند!
- چرا ما تاکنون این مشکل را تشخیص ندادیم؟
- انتشار محدودیت: استدلال در مورد یک محدودیت از طریق محدودیت دیگر

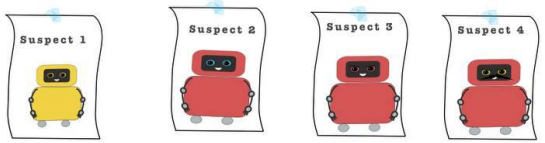
سازگاری یک یال
(Arc Consistency)

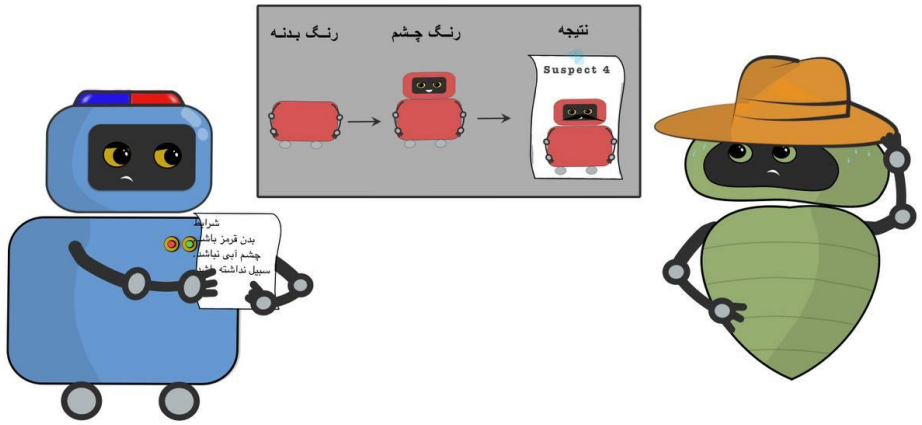
- یال $X \rightarrow Y$ سازگار (consistent) است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار x در دامنه تَه (X)، حداقل یک مقدار y در دامنه سر (Y) وجود داشته باشد که بتواند بدون نقض محدودیتی بین دو متغیر X و Y، اختصاص داده شود





- اگر سازگاری وجود نداشت از تَه (X) مقدار ناسازگار را حذف کنید!



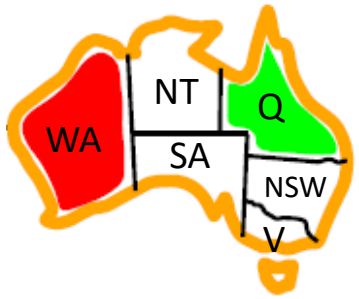


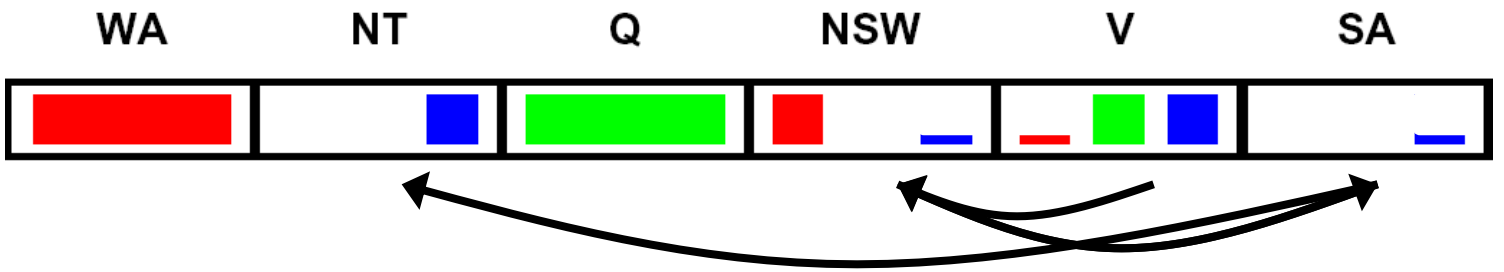
- بررسی رو به جلو؟

  اعمال سازگاری یال‌هایی که به تخصیص جدید اشاره می‌کنند

سازگاری یال در کل CSP

- یک مدل ساده از انتشار محدودیت، اطمینان حاصل می‌کند که تمام یال‌ها سازگار هستند:





- نکته مهم: اگر X مقداری را از دست داد، همسایگان X باید دوباره بررسی شوند!
- "سازگاری یال"، شکست را زودتر از "بررسی رو به جلو" تشخیص می‌دهد
- می‌تواند به عنوان یک پیش‌پردازنده یا بعد از هر تخصیص اجرا شود
- ضعف اعمال سازگاری یال چیست؟

به یاد داشته باشید: حذف از تَه!

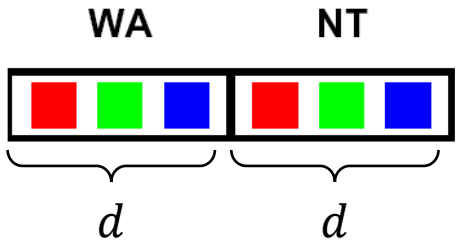
اعمال سازگاری یال در یک CSP

```
function AC-3( csp) returns the CSP, possibly with reduced domains
  inputs: csp, a binary CSP with variables {X_1, X_2, ..., X_n}
  local variables: queue, a queue of arcs, initially all the arcs in csp

  while queue is not empty do
    (X_i, X_j) ← REMOVE-FIRST(queue)
    if REMOVE-INCONSISTENT-VALUES(X_i, X_j) then
      for each X_k in NEIGHBORS[X_i] do
        add (X_k, X_i) to queue

---

function REMOVE-INCONSISTENT-VALUES( X_i, X_j) returns true iff succeeds
  removed ← false
  for each x in DOMAIN[X_i] do
    if no value y in DOMAIN[X_j] allows (x,y) to satisfy the constraint X_i ↔ X_j
      then delete x from DOMAIN[X_i]; removed ← true
  return removed
```

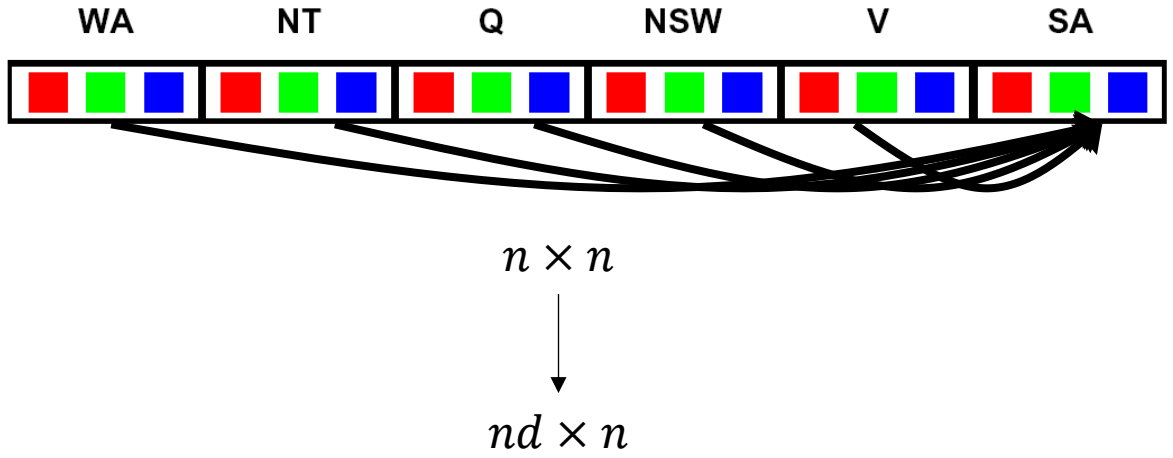
- زمان اجرا: $O(n^2d^3)$، می‌تواند به $O(n^2d^2)$ کاهش یابد (AC-4 algorithm (Mohr and Henderson, 1986))

مرتبه زمانی AC-3

Check consistency for an arc between two variables -> d^2

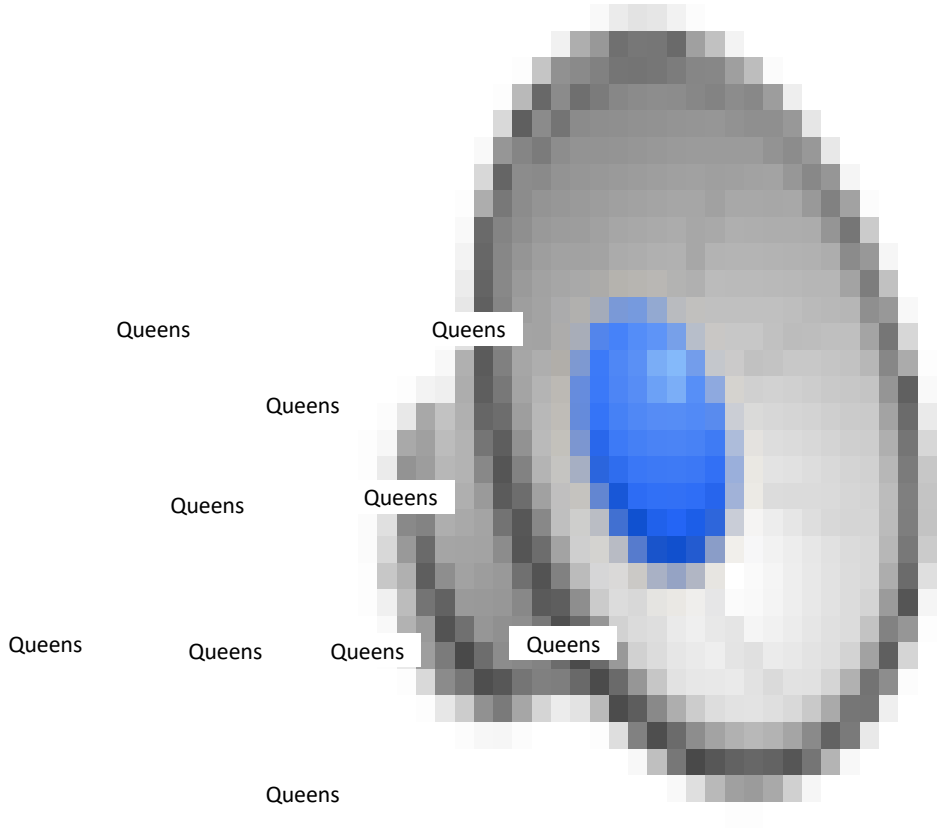


Number of arcs to be checked during arc consistency -> $n^2 d$

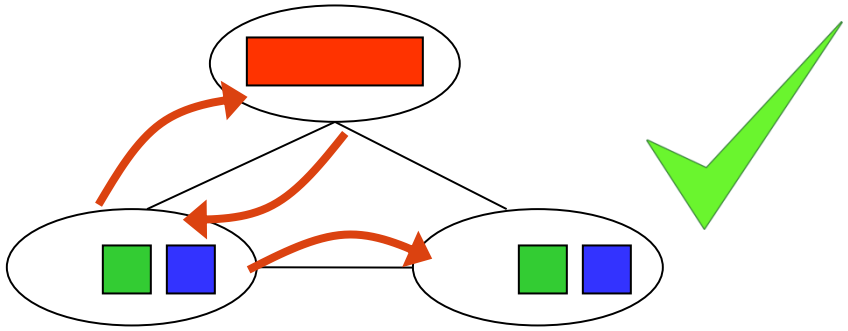


- زمان اجرا: $O(n^2d^3)$، می‌تواند به $O(n^2d^2)$ کاهش یابد (AC-4 algorithm (Mohr and Henderson, 1986))

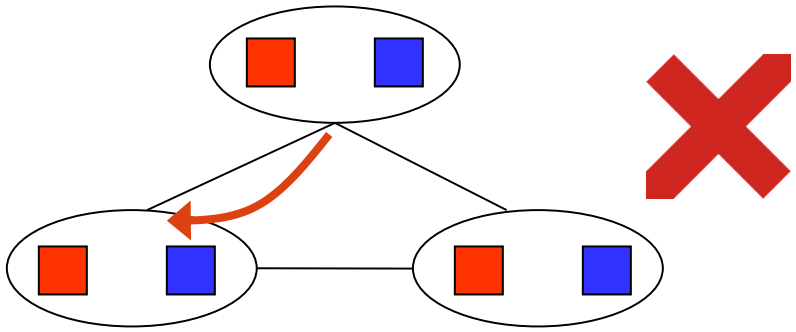
ویدیوی دمو سازگاری یال – N – CSP Applet وزیر



محدودیت‌های سازگاری یال



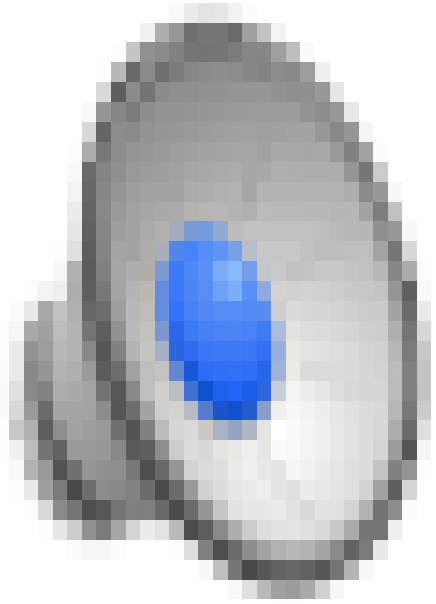
- پس از اعمال سازگاری یال:
  - می‌تواند یک راه حل باقی بماند
  - می‌تواند چندین راه حل باقی مانده باشد
  - می‌تواند هیچ راه حلی باقی نمانده باشد (و الگوریتم جستجو نداند)



- سازگاری یال همچنان در داخل جستجوی عقبگرد اجرا می‌شود!

اینجا چه اشتباهی
رخ داده است؟

ویدیوی رنگ‌آمیزی دمو – عقبگرد با بررسی رو به جلو – گراف پیچیده



ویدیوی رنگ‌آمیزی دمو – عقبگرد با سازگاری یال – گراف پیچیده