



## «مبانی و کاربردهای هوش مصنوعی» ترم پائیز ۱۴۰۴

### تمرین پنجم

در انجام تمرین‌ها به نکات زیر توجه فرمائید:

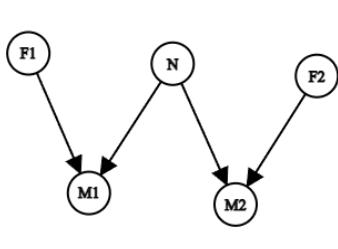
- ۱- مطابق قوانین دانشگاه هر نوع کپی‌برداری و اشتراک کار دانشجویان غیرمجاز است و پاسخ به تمرین‌ها باید به صورت انفرادی و بدون استفاده از ابزارهای هوش مصنوعی انجام شود، در صورت مشاهده چنین مواردی با طرفین شدیداً برخورد خواهد شد.
- ۲- پاسخ خود را در قالب یک فایل PDF به صورت تایپ‌شده و یا دستنویس (مرتب و خوانا) در سامانه کورسز آپلود نمائید.
- ۳- در صورت هر گونه سوال یا ابهام می‌توانید از طریق راههای ارتباطی گفته‌شده با تدریس‌یارهای طراح این تمرین در ارتباط باشید.
- ۴- توجه نمائید پاسخ تمرین‌ها تنها در صورت آپلود در سامانه کورسز پذیرفته خواهد شد و ارسال پاسخ از طریق ایمیل یا تلگرام بررسی نخواهد شد.
- ۵- فایل تمرین را با فرمت StudentID\_AI\_HW05.pdf تا ساعت ۲۳:۵۹ روز ۱۰/۰۵/۱۴۰۴ فقط در بخش مربوطه در سایت درس آپلود نمائید.

## Bayes' Net

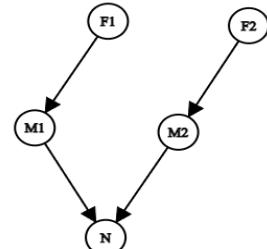
### سوال اول

دو دوربین روی دو فانوس دریایی در نقاط مختلف یک بندر قرار دارند. این دو دوربین می خواهند تعداد کشتی های موجود در یک ناحیه از اقیانوس را اندازه گیری کنند. به احتمال  $e$  هر دوربین ممکن است تعداد کشتی ها را یک مورد بیشتر یا کمتر اندازه گیری کند. هر دوربین به احتمال  $f$  ممکن است خراب بشود که در این صورت تعداد کشتی ها توسط هر دوربین سه عدد یا بیشتر، کمتر شمرده می شود یا اگر تعداد کشتی ها کمتر سه باشند کلانمی توانند بشمارند. فرض کنید تعداد کشتی ها  $N$  است و دوربین اول را با  $M_1$  و دوربین دوم با  $M_2$  و خرابی دوربین اول و دوم را با متغیر های  $F_1$  و  $F_2$  نشان می دهیم.

الف) کدام یک از شبکه های بیزین زیر برای مدلسازی مسئله مناسب است؟ دلیل بیاورید.



A



B

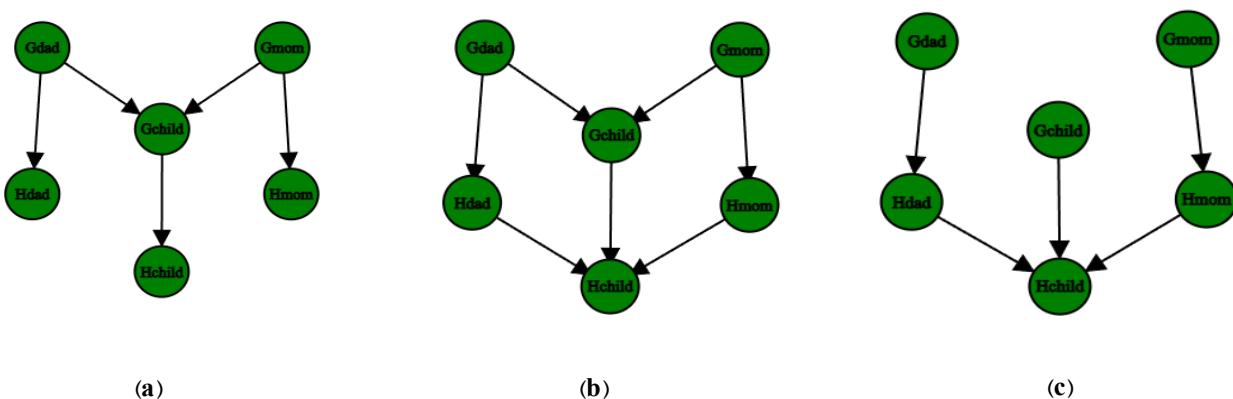
ب) توزیع شرطی  $P(M_1|N)$  بنویسید. فرض کنید  $N$  اعداد صحیح ۱ تا ۳ و  $M_1$  اعداد صحیح ۰ تا ۴ هستند. هر قسمت از توزیع شرطی شما باید بر حسب پارامتر های  $f$  و  $e$  نوشته شوند.

ج) فرض کنید که  $M_1 = M_2 = 3$  باشد. در این صورت مقادیر ممکن که  $N$  می تواند داشته باشد را بیابید.

د) با توجه به فرض های قسمت قبل کدام مقدار  $N$  بیشترین احتمال را دارد؟ آیا می توان آن را حساب کرد؟ اگر جواب بله است چطور حساب می کنید؟ اگر جواب خیر است چه اطلاعات بیشتری نیاز است تا آن را حساب کنیم؟

## سوال دوم

فرض کنید  $H_x$  متغیری باشد که چپدست یا راستدست بودن فرد  $x$  را با مقدار های  $\{ \text{چپدست}, \text{راستدست} \}$  یا  $\{\text{راستدست}\}$  نشان می‌دهد. یک فرضیه عمومی این است که راستدست یا چپدست بودن از طریق یک سازوکار وراثتی ساده به نسل بعد منتقل می‌شود. یعنی یک زن به نام  $G_x$  وجود دارد که مقدار آن  $1$  یا  $2$  است و وضعیت چپدست یا راستدست بودن با احتمال  $s$  مشابه زنی باشد که در بدن او قرار دارد. علاوه بر این زن فرزند به احتمال مساوی از والدین به ارث می‌رسد، اما این احتمال هم وجود دارد که با یک جهش تصادفی به احتمال  $m$ ، وضعیت دست عوض شود.



الف) کدامیک از سه شبکه داده شده ادعا می‌کند که سه زن پدر، مادر و فرزند از هم مستقل هستند؟

ب) کدامیک از سه شبکه داده شده روابط استقلالی ای را نشان می‌دهد که با فرضیه ارائه شده در مورد نحوه به ارث رسیدن وضعیت دست، تطابق دارد؟

ج) از بین این سه نمودار کدامیک بهترین توصیف را از فرضیه مورد نظر دارد؟

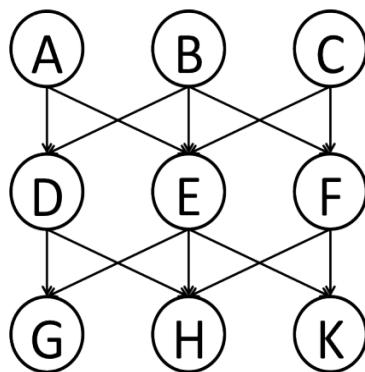
د) آیا می‌توان گره جدیدی با توجه به اطلاعات داده شده به شبکه  $a$  اضافه کرد؟

ه) CPT مربوط به گره  $G_{\text{child}}$  در شبکه  $a$  را بدست بیاورید.

و) فرض کنید احتمال اینکه پدر و مادر زن چپدست را داشته باشند، هردو برابر  $q$  باشد. در این صورت در شبکه  $a$  با شرطی سازی بروی گره های والد، احتمال اینکه فرزند زن چپدست داشته باشد را برحسب فقط  $m$  و  $q$  محاسبه نمایید.

### سوال سوم

با توجه به شبکه بیزین زیر، در هر مورد مشخص کنید که آیا شبکه استقلال شرطی داده شده را تضمین می‌کند که درست است یا نادرست است یا کلانمی توان آن را مشخص کرد.



$$A \perp C \text{ (الف)}$$

$$A \perp C \mid E \text{ (ب)}$$

$$A \perp C \mid G \text{ (ج)}$$

$$A \perp K \text{ (د)}$$

$$A \perp G \mid D, E, F \text{ (ه)}$$

$$A \perp B \mid D, E, F \text{ (امتیازی)}$$

$$A \perp C \mid D, F, K \text{ (ز)}$$

$$A \perp G \mid D \text{ (ح)}$$

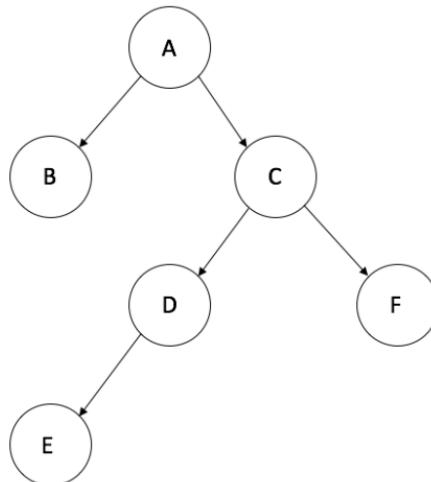
$$A \perp C \mid H \text{ (ط)}$$

$$G \perp F \mid H, E \text{ (ی)}$$

## سوال چهارم

شبکه بیزی زیر را در نظر بگیرید. همه متغیرها (دوحالتی) هستند:

$$A, B, C, D, E, F \in \{+, -\}$$



(i) [درست/نادرست] بررسی کنید آیا  $F$  و  $D$  مستقل‌اند یا نه:

$$F \perp D$$

(منظور از «درست/نادرست» این است که با توجه به ساختار BN (و با منطق d-separation/استقلال شرطی گرافی) تصمیم بگیرید این استقلال برقرار است یا خیر.)

(ii) [درست/نادرست] بررسی کنید آیا  $F$  و  $E$  با شرط  $D$  مستقل می‌شوند یا نه:

$$F \perp E \mid D$$

(یعنی آیا با دانستن مقدار  $D$ ، دانستن  $E$  هیچ اطلاعات اضافه‌ای درباره  $F$  نمی‌دهد؟)

(iii) می‌خواهیم کوئری زیر را حساب کنیم:

$$P(F \mid +e)$$

(یعنی evidence  $e$  این است که  $A = +$ ). تصمیم می‌گیریم با elimination variable حل کنیم و ترتیب حذف را این‌طور انتخاب می‌کنیم: ابتدا  $D$  و سپس  $C$ . پس از حذف  $D$  و  $C$ ، یک factor به دست می‌آورید که آن را این‌گونه نام‌گذاری می‌کنیم:

$$f(+e, F \mid A, B)$$

عبارت  $f(+e, F \mid A, B)$  را فقط بر حسب احتمال‌های شرطی گُشته در BN (یعنی CPT‌های مربوطه مثل  $P(F \mid C)$ ,  $P(E \mid D)$ ,  $P(D \mid B, C)$ ,  $P(C \mid A)$ ,  $P(B \mid A)$ ) بنویسید.

(iv) حالا  $f(+e, F | A, B)$  را دارید و می‌خواهید ادامه variable elimination را انجام دهید: ابتدا  $B$  و سپس  $A$  را حذف می‌کنید تا factor نهایی زیر ساخته شود:

$$f(+e, F)$$

را بر حسب CPT‌های مرتبطی که در این دو مرحله لازم می‌شوند بنویسید.

(v) گام آخر نرمال‌سازی است تا به  $P(F | +e)$  برسیم. عبارت نهایی  $P(F | +e)$  را با نرمال‌سازی  $f(+e, F)$  بنویسید.

## سوال پنجم

شبکه بیزی زیر را در نظر بگیرید که در آن شواهد (evidence) داریم:

$$B = +b, \quad D = +d$$

| $P(A)$ |     |
|--------|-----|
| $+a$   | 0.5 |
| $-a$   | 0.5 |

| $P(B A)$ |      |     |
|----------|------|-----|
| $+a$     | $+b$ | 0.8 |
| $+a$     | $-b$ | 0.2 |
| $-a$     | $+b$ | 0.4 |
| $-a$     | $-b$ | 0.6 |

| $P(C B)$ |      |     |
|----------|------|-----|
| $+b$     | $+c$ | 0.1 |
| $+b$     | $-c$ | 0.9 |
| $-b$     | $+c$ | 0.7 |
| $-b$     | $-c$ | 0.3 |

| $P(D A, C)$ |      |      |     |
|-------------|------|------|-----|
| $+a$        | $+c$ | $+d$ | 0.6 |
| $+a$        | $+c$ | $-d$ | 0.4 |
| $+a$        | $-c$ | $+d$ | 0.1 |
| $+a$        | $-c$ | $-d$ | 0.9 |
| $-a$        | $+c$ | $+d$ | 0.2 |
| $-a$        | $+c$ | $-d$ | 0.8 |
| $-a$        | $-c$ | $+d$ | 0.5 |
| $-a$        | $-c$ | $-d$ | 0.5 |

### الف) Gibbs sampling

فرض کنید Gibbs sampling انجام می‌دهیم. همچنین فرض کنید مقداردهی اولیه همه متغیرها این است:

$$A = +a, B = +b, C = +c, D = +d$$

سپس متغیر  $C$  را un-assign می‌کنیم، یعنی مقدار  $C$  را موقتاً «نامعین» می‌گذاریم تا دوباره resample شود:

$$A = +a, B = +b, C = ?, D = +d$$

در این مرحله، احتمال‌های زیر را حساب کنید:

$$P(C = +c \text{ at next step}), \quad P(C = -c \text{ at next step})$$

) در Gibbs sampling، هنگام resample یک متغیر (اینجا  $C$ ) باید از توزیع شرطی آن با توجه به

بقیه مقدارهای فعلی نمونه (و evidence) نمونه‌گیری کنیم:

$$P(C | A = +a, B = +b, D = +d)$$

و معمولاً فقط CPT‌های مربوط به\*\* همان متغیر وارد محاسبه می‌شوند.)

ب) Hybrid: Rejection Sampling + Likelihood-Weighted Sampling

یک طرح نمونه‌گیری در نظر بگیرید که hybrid از rejection sampling و likelihood-weighted sampling است:

۱. ابتدا برای متغیرهای A و B انجام می‌دهیم (با درنظر گرفتن evidence مربوط،  $B = +b$  یعنی).

۲. سپس مقادیر نمونه‌برداری شده A و B را نگه می‌داریم و نمونه را برای متغیرهای C و D extend می‌کنیم و برای D از likelihood-weighted sampling استفاده می‌کنیم (یعنی evidence مربوط به در وزن وارد می‌شود).

(i) چند نمونه کاندید برای بخش rejection (روی A, B) داده شده است. مشخص کنید کدامها رد (reject) می‌شوند:

- (-a, -b) •
- (+a, +b) •
- (+a, -b) •
- (-a, +b) •

(ii) مستقل از قسمت (i)، یک مجموعه جدید از نمونه‌های کامل (برای  $A, B, C, D$ ) داده شده است. وزن هر نمونه را تحت همین طرح hybrid محاسبه کنید:

- a, +b, -c, +d •
- +a, +b, -c, +d •
- +a, +b, -c, +d •
- a, +b, +c, +d •
- +a, +b, +c, +d •

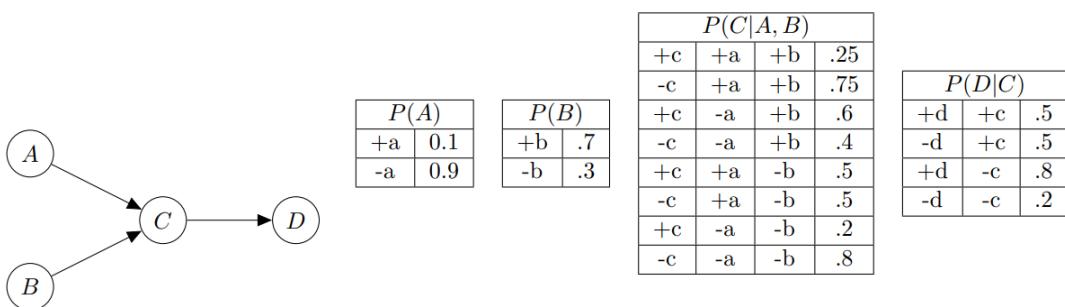
(iii) با استفاده از همین نمونه‌های وزنده، یک تخمین از عبارت زیر به دست آورید:

$$P(+a | +b, +d)$$

(در تخمین وزنده، سهم هر نمونه متناسب با weight آن است (پس شمردن ساده کافی نیست).)

### سوال ششم

فرض کنید شبکه بیزی زیر و توزیع‌های متناظر متغیرهای آن به شما داده شده است:



الف) فرض کنید شواهد (evidence) دریافت کردۀایم که:

اگر بخواهیم با Sampling Rejection نمونه‌برداری کنیم، به‌طور امیدریاضی (on expectation) چه درصدی از نمونه‌ها رد (reject) خواهند شد؟

ب) اکنون فرض کنید هر دو مشاهده زیر را داریم:

در Likelihood Weighting، وزن (weight) نمونه‌های زیر را محاسبه کنید:

$$(+a, -b, +c, +d) \quad .1$$

$$(+a, -b, -c, +d) \quad .2$$

$$(+a, +b, -c, +d) \quad .3$$

ج) (امتیازی) با استفاده از نمونه‌های قسمت قبل، مقدار زیر را تخمین بزنید:

د) فرض کنید باید به صورت تقریبی (approximately) به دو کوئری استنتاجی زیر برای همین گراف پاسخ دهیم:

$$P(C|+a) \quad \text{و} \quad P(C|+d)$$

شما موظف هستید:

- یکی از این دو کوئری را با Likelihood Weighting

- و دیگری را با Gibbs Sampling پاسخ دهید.

در هر حالت فقط می‌توانید تعداد کمی نمونه جمع‌آوری کنید؛ بنابراین برای بیشترین دقیقۀ الگوریتم را هوشمندانه با توجه به مناسب‌بودنش برای کوئری انتخاب کنید.

۱) مشخص کنید هر الگوریتم را برای کدام کوئری استفاده می‌کنید.

۲) انتخاب خود را توجیه (justify) کنید.