Adı Soyadı: PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ .... KASIM 2023

Bölüm: MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ İmza: ....

2023-2024 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI

LİNEER CEBİR ARASINAV SORULARI

S1) A= $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi için B= $\frac{1}{3}(A^2 - A - 5I)$ ifadesini bulunuz ve A.B çarpımının sonucu nedir?

S2) A= $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin çarpmaya göre tersini bildiğiniz bir yoldan bulunuz (Ek matris yöntemi, satır indirgeme yöntemi, Cayley Hamilton yöntemi.....).

S3) Lineer bağımlı, lineer bağımsız ve lineer birleşim ne demektir? Açıklayınız.

S4) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$ lineer denklem sistemi bildiğiniz bir yöntemle çözünüz (Gauss yok etme, cramer yöntemi, X = A^{-1}B yöntemi.....)

S5) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$ lineer denklem sistemini A X = B biçiminde yazınız. Katsayılar matrisini, genişletilmiş Katsayılar matrisini, X matrisini ve B matrisini yazınız. X = A^{-1}B sonucu ile ne elde ederiz.

① $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$

$P(A) = A^3 - A^2 - 5A - 3I = 0$

$A^{-1} = B = \frac{1}{3}(A^2 - A - 5I)$

$B = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 13 & -10 & 8 \\ 24 & -19 & 16 \\ 20 & -18 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right)$

$B = \begin{bmatrix} 7/3 & -7/3 & 4/3 \\ 20/3 & -17/3 & 8/3 \\ 14 & -11/3 & 5/3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -7 & 4 \\ 20 & -17 & 8 \\ 14 & -11 & 5 \end{bmatrix}$

$A * B = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Burada $B = A^{-1}$ dır.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $|A| = 1$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ olmalı.

i) ✓

$A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|} = \dfrac{EK(A)}{det(A)} = A^{-1}$ ✓

ii) ✓

$[A \mid I] \to [I \mid A^{-1}] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R_3 \to -5R_1 + R_3$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & +4 & +15 & +5 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -4 & -1 \end{array}\right]$

$R_3 \to -4R_2 + R_3$ $\qquad$ $R_3 \to -R_3$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$

$R_2 \to -4R_3 + R_2$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$

$R_1 \to -2R_2 + R_1$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$ ✓

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $|A| = 1$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24$, $A_{12} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -(-20) = 20$

$A_{13} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -(-18) = 18$, $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -(6-10) = 4$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(8-3) = +5$ $A_{32} = (-1)^{5} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -(+4) = -4$

$A_{33} = (-1)^{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T}$ $= Ek(A) \Rightarrow Adj = \begin{bmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}^T$

$ek(A) = adj(A) = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & +4 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{|A|} = \dfrac{\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}}{1}$ ✓

4) $a_i \in \mathbb{R}$
$v_i \in V$

i) $a_i v_i = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ lineer birleşim

ii) $a_i v_i = 0$ $a_i = 0$ ise lineer bağımsızlık

iii) $a_i v_i = 0$ $a_k \neq 0$ ise lineer bağımlı

5) $x_1 + x_2 - x_3 = 8$
$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6$
$x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 10$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}}_{B} \Rightarrow AX = B$$

A katsayılar matrisi
[A|B] genişletilmiş katsayılar matrisi

$X = A^{-1} B$ ile (x_1, x_2, x_3) çözümü elde edilir.

4) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 6 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106/9 \\ 28/9 \\ 62/9 \end{pmatrix}$$

i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 13 & -3 & 2 \\ 7 & -3 & -1 \\ 11 & -6 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{106}{9} \\ \frac{28}{9} \\ \frac{62}{9} \end{pmatrix}$$

ii)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 0 \quad -x_2 - x_3 &= -10 \\ 0 \quad -6x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ +x_2 + x_3 &= 10 \\ -6x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ x_2 + x_3 &= 10 \\ 0 + 9x_3 &= 62 \Rightarrow x_3 = \frac{62}{9} \end{aligned}$$

$$x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_2 + \frac{62}{9} = \frac{90}{9} \Rightarrow x_2 = \frac{90-62}{9} = \frac{28}{9}$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 8 \Rightarrow x_1 + \frac{28}{9} - \frac{62}{9} = \frac{72}{9}$$

$$x_1 = \frac{34+72}{9} = \frac{106}{9}$$