2017 年度

数理モデル解析特論

期末レポート

神戸大学システム情報学研究科

長谷川 益大

174X016X

2017 年 6 月 15 日

数理モデル解析特論　レポート　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　平成 29 年 6 月 16 日

長谷川 益大 174X016X

1. 問 1

次の連立常微分方程式はハミルトン方程式に書き換えられるか．またハミルトン方程式であるなら，離散勾配法によりエネルギーを保存する数値計算法を設計せよ．

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = uv(u-1)+1, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v^2(\frac{1}{2}-u)(1-1)$$

$$(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

1.1. 1-1

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = uv(u-1)+1, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = v^2(\frac{1}{2}-u)$$

そのまま $u=q, v=p$ とすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv(u-1)+1 \\ v^2(\frac{1}{2}-u) \end{pmatrix}$$

これがハミルトン方程式を満たすなら，歪対称行列 A を用いて次のように表せられる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial v} \\ -\frac{\partial H}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uv(u-1)+1 \\ v^2(\frac{1}{2}-u) \end{pmatrix}$$

各項を積分すると

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}uv^2(u-1)+v+C_1(u) \\ \frac{1}{2}u^2v^2-\frac{1}{2}uv^2+C_2(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^2v^2-\frac{1}{2}uv^2+v+C_1(u) \\ \frac{1}{2}u^2v^2-\frac{1}{2}uv^2+C_2(v) \end{pmatrix}$$

となるので $H=\frac{1}{2}u^2v^2-\frac{1}{2}uv^2+v+C(C$ は定数$)$ というハミルトニアンが存在するので，ハミルトン方程式に書き換えられる．

これを離散系に書き直す．簡単のため $C=0$ とする．

$$\begin{aligned}
H_{n+1}-H_n &= \{\frac{1}{2}u_{n+1}^2v_{n+1}^2-\frac{1}{2}u_{n+1}v_{n+1}^2+v_{n+1}\}-\{\frac{1}{2}u_n^2v_2^2-\frac{1}{2}u_nv_n^2+v_n\} \\
&= \frac{1}{2}(u_{n+1}v_{n+1}+u_nv_n)(u_{n+1}v_{n+1}-u_nv_n)-\frac{1}{2}(u_{n+1}v_{n+1}^2-u_nv_n^2)+(v_{n+1}-v_n) \\
&= \frac{1}{2}(u_{n+1}v_{n+1}+u_nv_n)\{\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n)(v_{n+1}-v_n)+\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}+v_n)\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}(u_{n+1}+u_n)(v_{n+1}^2-v_n^2)+\frac{1}{2}(u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}^2+v_n^2)\}+(v_{n+1}-v_n) \\
&= \frac{1}{4}\{(u_{n+1}v_{n+1}+u_nv_n)(v_{n+1}+v_n)-(v_{n+1}^2+v_n^2)\}(u_{n+1}-u_n) \\
&\quad +\frac{1}{4}\{(u_{n+1}v_{n+1}+u_nv_n)(u_{n+1}+u_n)+4\}(v_{n+1}-v_n) \\
&\quad -\frac{1}{4}(u_{n+1}+u_n)(v_{n+1}+v_n)(v_{n+1}-v_n) \\
&= \frac{1}{4}\{(u_{n+1}v_{n+1}+u_nv_n)(v_{n+1}+v_n)-(v_{n+1}^2+v_n^2)\}(u_{n+1}-u_n) \\
&\quad +\frac{1}{4}\{(u_{n+1}v_{n+1}+u_nv_n-u_{n+1}-u_n)(v_{n+1}+v_n)+4\}(v_{n+1}-v_n) \\
&= \nabla_uH(u_{n+1}-u_n)+\nabla_vH(v_{n+1}-v_n)
\end{aligned}$$

どのような n においてもこれが 0 であるように $u_{n+1}, u_n, v_{n+1}, v_n$ の更新則を定めれば良い．

1.2. 1-2

$$(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t})^2 + 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$q = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}, p = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ とすると与式は

$$\begin{aligned} q^2 + qp = q(q+p) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = q \end{aligned}$$

ここで $q = 0, -p$ となる．

$q = 0$ の時

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これを満たすハミルトニアン $H = C(C$ は定数) が存在するのでハミルトン方程式に書き換えられる．

$q = -p$ の時

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

これを満たすハミルトニアン $H = -\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}p^2 + C(C$ は定数) が存在するので，ハミルトン方程式に書き換えられる．

これを離散系に書き直す．簡単のため $C = 0$ とする．

$$\begin{aligned} H_{n+1} - H_n &= \{-\frac{1}{2}q_{n+1}^2 + \frac{1}{2}p_{n+1}^2\} - \{-\frac{1}{2}p_n^2 + \frac{1}{2}p_n^2\} \\ &= -\frac{1}{2}(q_{n+1}^2 - q_n^2) + \frac{1}{2}(p_{n+1}^2 - p_n^2) \\ &= -\frac{1}{2}(q_{n+1} + q_n)(q_{n+1} - q_n) + \frac{1}{2}(p_{n+1} + p_n)(p_{n+1} - p_n) \\ &= \nabla_q H(q_{n+1} - q_n) + \nabla_p H(p_{n+1} - p_n) \end{aligned}$$

どのような n においてもこれが 0 であるように $u_{n+1}, u_n, v_{n+1}, v_n$ の更新則を定めれば良い．

2. 問２

単純な振り子運動は以下のラグランジアン $\mathscr{L}$ でモデル化される

$$\mathscr{L}(q, \dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mgl(1 - \cos(q))$$

これに関する離散ラグランジアン $\mathscr{L}_d$ を次のように定める．

$$\mathscr{L}_d(q_{n+1}, q_n) = \frac{m}{2}(\frac{q_{n+1} - q_n}{h})^2 - mgl(1 - \cos(q_n))$$

2.1. 2-1

離散 Euler-Lagrange 方程式を求めよ．

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_d(x,y) &= \frac{m}{2}(\frac{x-y}{h})^2 - mgl(1-\cos(y)) \\
D_1\mathscr{L}_d &= \frac{\partial}{\partial x}\mathscr{L}_d = m(\frac{x-y}{h^2}) \\
D_2\mathscr{L}_d &= \frac{\partial}{\partial y}\mathscr{L}_d = -m(\frac{x-y}{h^2}) - \sin(y) \\
D_1\mathscr{L}_d(q_{n+1},q_n) + D_2\mathscr{L}_d(q_n,q_{n-1}) &= \{m(\frac{q_{n+1}-q_n}{h^2})\} + \{-m(\frac{q_n-q_{n-1}}{h^2}) - \sin(q_{n-1})\} \\
&= \frac{m}{h}\{\frac{q_{n+1}-q_n}{h} - \frac{q_n-q_{n-1}}{h}\} - \sin(q_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

2.2. 2-2

$p_n = \frac{q_n - q_{n-1}}{h}$ と定める．

$$q_{n+1} = \phi(q_n,p_n), p_{n+1} = \psi(q_n,p_n)$$

となるような $\phi(q_n,p_n), \psi(q_n,p_n)$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
D_1\mathscr{L}_d(q_{n+1},q_n) + D_2\mathscr{L}_d(q_n,q_{n-1}) &= \frac{m}{h}(p_{n+1}-p_n) - \sin(q_{n-1}) = 0 \\
\rightarrow \quad & p_{n+1} = p_n + \frac{h}{m}\sin(q_{n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_n = \frac{q_n - q_{n-1}}{h} \quad \rightarrow \quad & p_{n+1} = \frac{q_{n+1}-q_n}{h} \\
& q_{n-1} = q_n - hp_n \\
& q_{n+1} = q_n + hp_{n+1} = q_n + hp_n + \frac{h^2}{m}\sin(q_{n-1})
\end{aligned}$$

以上より

$$\phi(q_n,p_n) = q_n + hp_n + \frac{h^2}{m}\sin(q_n - hp_n), \psi(q_n,p_n) = p_n + \frac{h}{m}\sin(q_n - hp_n)$$

2.3. 2-3

求めた $\phi(q_n,p_n), \psi(q_n,p_n)$ から定まる数値解放はシンプレクティックであることを示せ．

2.4. 2-4

求めた $\phi(q_n,p_n), \psi(q_n,p_n)$ から定まる数値解放を用いて近似解を計算するプログラムを書け．刻み幅 h は各自で適切に定め，$q_0 = 1, p_0 = 1, m = g = l = 1$ として $t = 100$ まで計算せよ．

作成したプログラムを以下の図 1 に示す．

しかし，実行しても p, q が 0 のままだった．

```c
#include <stdio.h>
#include <math.h>


int main(){
    double q0=0,p0=0,m=1,g=1,l=1;
    double h=0.001;
    double rev_h = 1/h;

    double t=0;

    FILE *out;
    out = fopen("mathRepo.dat","w");
    if(out==NULL)
        printf("Cannnot Open mathRepo.data");

    double q=q0;
    double p=p0;
    for(t=0;t<=100;t+=h){
        printf("q[%f]=%f,p[%f]=%f\n",t,q,t,p);
        fprintf(out,"%f %f %f\n",t,p,q);

        p=p+h*(sin(q-h*p));
        q=q+h*p;
    }
    fclose(out);
    return 0;
}
```

図 1　プログラム

3. 問 3

$q(0) = 0, q(1) = 1$ となるような $q(t)$ について，以下のラグランジアンに関する Euler-Lagrange 方程式の解はどのようなものか

$$\mathscr{L}(q, \dot{q}) = q^2 \dot{q}$$