本科高等数学(上册) 历年考试真题

一、填空题

1. 设$s>0, I_n=\int_0^{+\infty} e^{-sx}x^n dx (n=1,2,\cdots)$，则$I_n=$ $\underline{\dfrac{n!}{s^{n+1}}}$

2. 若曲线$y=x^3+ax^2+bx+1$有拐点(-1,0)，则$b=$___3____

3. 曲线$y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$的渐近方程为___$y=2x$_______

4. 当$0\le\theta\le\pi$时，曲线$r=e^{\theta}$的弧长为 $\underline{\sqrt{2}(e^{\pi}-1)}$

5. 设$f'(0)=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(3\sin x)-f(2\arctan x)}{x}=$ $\underline{\ 2\ }$

6. 设$y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$ $(C_1,C_2$为任意常数$)$为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为 $\underline{\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}+2y=0}$

二、选择题

7. 下列命题正确的是(D)

(A) $f(x)$在点x_0连续的充要条件是$f(x)$在x_0可导

(B) 若$f'(x)=x^2$（偶函数），则$f(x)$必是奇函数

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$（常数），则$f'(0)=a$

(D) 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+\ln(1-x^2)}{x}, & x\ne 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则$f'(0)=-1$

8. 设$f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当$x$充分大时有(C)

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$ (B) $h(x)<g(x)<f(x)$ (C) $f(x)<g(x)<h(x)$ (D) $g(x)<f(x)<h(x)$

9. 曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x\,(a\ne 0)$,则$a=$(C)

(A) 4e (B) 3e (C) 2e (D)e

10. 积分 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx=$(B)

(A) 0 (B) 4/3 (C) 1 (D) -1

11. 函数$f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为(C)

(A) 1 (B)2 (C) 3 (D)无穷多个

12. 设$y=f(x)$在点x_0的某邻域内具有连续的四阶导数, 若$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, 且$f^{(4)}(x_0)<0$, 则(B)

(A) $f(x)$在点x_0取得极小值 (B) $f(x)$在点x_0取得极大值

(C)点$(x_0,f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点 (D) $f(x)$在点x_0的某邻域内单调减少

三、解答题

13.求微分方程 $y''+2y'+5y=\sin 2x$ 的通解.

解:对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+5=0$,解得特征根为$\lambda_1=-1+2i,\lambda_2=-1-2i$

齐次方程通解为:$y=C_1e^{-x}\sin 2x+C_2e^{-x}\cos 2x$, 设原方程特解:$y=A\sin 2x+B\cos 2x$

代入原方程, 比较同类项前面系数得:$A-4B=1,\ B+4A=0$解得$A=\dfrac{1}{17},B=-\dfrac{4}{17}$

所以方程特解:$y=\dfrac{1}{17}\sin 2x-\dfrac{4}{17}\cos 2x$

原方程通解为:$y=C_1e^{-x}\sin 2x+C_2e^{-x}\cos 2x+\dfrac{1}{17}\sin 2x-\dfrac{4}{17}\cos 2x$,($C_1,C_2$为任意常数)

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0\\ 6, & x=0\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0\end{cases}$,

问 a 为何值时 $f(x)$在 $x=0$ 连续; a 为何值时 $x=0$ 是 $f(x)$的可去间断点?

解: $\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{ax^3}{x-\arcsin x}=-6a$

$\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x^2/4}$

$=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{ae^{ax}+2x-a}{x/2}=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{a^2e^{ax}+2}{1/2}=2(a^2+2)$

$\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)$ 得 $a=-1$ 或 $a=-2$

当$a=-1$时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6=f(0)$, $f(x)$在$x=0$连续.

当$a=-2$时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=12\neq f(0)$, $x=0$为$f(x)$的可去间断点

15. 设函数 $y=y(x)$由参数方程 $\begin{cases}x=1+2t^2\\ y=\displaystyle\int_1^{1+2\ln t}\frac{e^u\mathrm{d}u}{u}\ (t>1)\end{cases}$ 确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}$

解:由$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e^{1+2\ln t}}{1+2\ln t}\cdot\dfrac{2}{t}=\dfrac{2et}{1+2\ln t},\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4t$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{e}{2(1+2\ln t)}$

所以$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{e}{2}\cdot\dfrac{-1}{(1+2\ln t)^2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{1}{4t}=-\dfrac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}$

$x=9$时由 $x=1+2t^2$及$t>1$得 $t=2$, 故 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=9}=-\left.\dfrac{e}{4t^2(1+2\ln t)^2}\right|_{t=2}=-\dfrac{e}{16(1+2\ln 2)^2}$

16. 设函数 $f(x)$有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0,f''(x)>0$,又设 $u=u(x)$是曲线

y=y(x)在点(x, f(x))处的切线在 x 轴上的截距，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u(x)}$

解:在(x_0,y_0)处的切线方程 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, x轴上截距$u(x_0)=\dfrac{x_0f'(x_0)-f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{x}{u(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{xf'(x)-f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)}{xf''(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f'(x)}{x}\frac{1}{f''(x)}\right]=1+\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}\frac{1}{f''(x)}=1+\frac{f''(0)}{f''(0)}=2$$

17. 已知 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, g'(x)=\dfrac{1}{1+x}, f(0)=g(0)=0$,试求 $\lim\limits_{x\to}\left[\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{g(x)}\right]$

解 $f(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$, 又$f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

由$g'(x)=\dfrac{1}{1+x}$及$g(0)=0$知 $g(x)=\ln(1+x)$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1 \quad \therefore \ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x,(x\to 0)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)\cdot\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$\ln(1+x)\sim x$;
$\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+x^2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-(1+x)}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}-1\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}-1\right)=-\frac{1}{2}$$

18. 设f(x)在[0,1]上连续，在(0,1)上可导,f(0)=0,f(1)=1，试证：对任意给定的正数 a,b,

在(0,1)内存在不同的ξ,η,使得$\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$

证明:由条件知$0<\dfrac{a}{a+b}<1, f(0)=0$，$f(1)=1$,由连续函数的介值定理可知存在$c\in(0,1)$

使得$f(c)=\dfrac{a}{a+b} \Rightarrow 1-f(c)=\dfrac{b}{a+b}$.对$f(x)$在$[0,c]$及$[c,1]$上分别用拉格朗日定理得

$$f(c)=f(c)-f(0)=f'(\xi)\cdot c,(0<\xi<c) \Rightarrow c=\frac{f(c)}{f'(\xi)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$f(1)-f(c)=f'(\eta)\cdot(1-c),(c<\eta<1) \Rightarrow 1-c=\frac{f(1)-f(c)}{f'(\eta)}=\frac{1-f(c)}{f'(\eta)} \quad \cdots \quad (2)$$

(1)+(2)得 $1=\dfrac{f(c)}{f'(\xi)}+\dfrac{1-f(c)}{f'(\eta)}=\dfrac{a}{(a+b)f'(\xi)}+\dfrac{b}{(a+b)f'(\eta)}\Rightarrow\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b$