2019-2020学年第一学期高等数学(1)试卷参考答案

一、填空题(每小题4分，共20分. 请将答案填在如下指定位置)

1._2^{x^2}__ 2.__$\frac{1}{e}$___ 3.__0___ 4.__0___ 5.___$-2xe^{-x^4}dx$___

二、选择题(每小题3分，共15分. 请将答案填在如下指定位置)

1.__D____ 2.__B____ 3.___C___ 4.__C___ 5.___B___

三、计算题(本大题包含7小题，每小题6分，共42分. 请将答案写在后面试卷纸上，要写出解答步骤)

1. 解 利用公式或变异系数法都可以，下面是凑微分法.

原微分方程可写为$e^{-x^2}dy-2xye^{-x^2}dx=\cos x dx$,

即 $e^{-x^2}dy+yde^{-x^2}=\cos x dx$，所以$d\left(ye^{-x^2}\right)=d(\sin x)$,

通解为$ye^{-x^2}=\sin x+C$，即$y=e^{x^2}(\sin x+C)$……………………………….(5分)

特解为$y=e^{x^2}(\sin x+1)$…………………………………………………….(6分)

2. 解 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}=-t$,…………………………………………………………..……(3分)

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-\sqrt{1-t^2}$……………………………………………………...……….(6分)

3. 解 $f(x)=\int\frac{1}{x}dx=\begin{cases}\ln x+C_1, & x>0\\ \ln(-x)+C_2, & x<0\end{cases}$,………………………………………...……(4分)

由两个函数值确定出$C_1=2$，$C_2=1$,

因此$f(x)=\begin{cases}\ln x+2, & x>0\\ \ln(-x)+1, & x<0\end{cases}$……………………………………………………...…..(6分)

4. 解 令$t=\sqrt{2x+1}$，则$x=\frac{1}{2}(t^2-1)$，$dx=tdt$,

$$\int e^{\sqrt{2x+1}}dx=\int te^t dt……………………\ ………………………(3分)$$

$$=\int tde^t=te^t-\int e^t dt$$

$$=te^t-e^t+C=e^{\sqrt{2x+1}}\left(\sqrt{2x+1}-1\right)+C…………(6分)$$

5. 解 所求体积为

$\int_{-1}^{1}\pi\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]dy$………………………………………(3分)

$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}dy=4\pi^2$……………………………………………………………(6分)

6.解 由$x\sin x^n=x^{n+1}+o(x^{n+1})$,

$(1-\cos x)\ln(1+x^2)=\left(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(x^2+o(x^2)\right)=\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$,

$e^{x^2}-1=x^2+o(x^2)$ ……………………………………………… ………..(4分)

和已知条件得

$2<n+1<4$，即 $1<n<3$，所以$n=2$…………………………………………..(6 分)

7. 解 对应的齐次线性方程的特征方程为$\lambda^2+2\lambda+1=0$，解得特征根为$-1,-1$，所以对应的齐次线性方程的通解为$(C_1+C_2x)e^{-x}$…………………………………………(3 分)

设原方程的特解为$Ax^3\mathrm{e}^{-x}$，代入原方程可得$A=\frac{1}{6}$,

所以原方程的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$ (C_1,C_2为任意常数)……………..(6 分)

四、综合题(第一小题 13 分,第二小题 10 分, 共 23 分. 请将答案写在后面试卷纸上，要写出解答步骤)

1.解 定义域$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

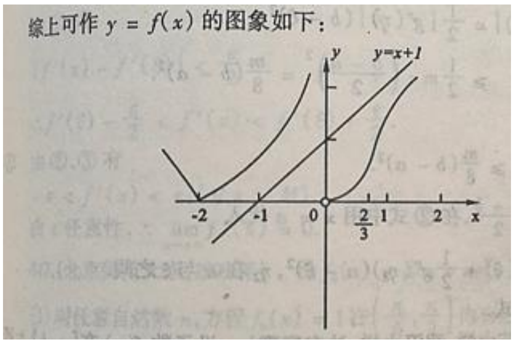
由 $x\to+\infty$ 时，$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=(x+2)(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=x+1+o(1)$， 知 $y=x+1$ 是 $x\to+\infty$时的渐近线,

由$x\to-\infty$时，$|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=-(x+2)(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)=-x-1+o(1)$，知$y=-x-1$是$x\to-\infty$时的渐近线,

由$x\to0+$时, $|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to0$, $x\to0-$时, $|x+2|\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\to+\infty$，所以$x=0$是$x\to0-$时的渐近线…………………………………………………………………………… ….(5 分)

由$f'(x)=\begin{cases}-\frac{x^2+x+2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<-2\\ \frac{x^2+x+2}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & -2<x\neq0\end{cases}$，知在$(-\infty,-2)$严格单调减，在$(-2,0)$和$(0,+\infty)$严格单调增，点$(-2,0)$是极小值点……………………………………...………...(8 分)

由 $f''(x)=\begin{cases}\frac{3x-2}{x^4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & x<-2\\ \frac{2-3x}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}, & -2<x\neq0\end{cases}$， 知 $x=\frac{2}{3}$ 时 $f''(x)=0$， 而且在 $(-\infty,-2)$ 和 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$上是凸的，在区间$(-2,0)$和$\left(0,\frac{2}{3}\right)$上是凹的，$x=\frac{2}{3}$处是拐点……………....(11 分)



………………………………………(13 分)

2.证 设$f(x)$在点α取最大值2020，即$f(\alpha)=2020$，$\alpha\in(0,1)$.

构造函数$F(x)=f(x)-2019x$，$x\in[0,1]$. $F(x)$在$[0,1]$连续，$(0,1)$可导. $F(0)=0$.
……………… …………(4 分)

由$F(1)=f(1)-2019=-1<0$，$F(\alpha)=f(\alpha)-2019\alpha=2020-2019\alpha>0$，由于$F(x)$在$[\alpha,1]$连续及零点存在定理知存在$\beta\in(\alpha,1)$，使得$F(\beta)=0$………………(8 分)

由$F(x)$在$[0,\beta]$连续，$(0,\beta)$可导，$F(0)=F(\beta)=0$及 Rolle 定理知存在$\xi\in(0,\beta)\subseteq(0,1)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=2019$. …………………………… …..(10 分)