

山东大学 2019~2020 学年第一学期高等数学（1）课程试卷

一. 填空题（本大题包含 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，请将答案填在如下指定位置）

1. 设 $f(x) = x^2, g(x) = 2^x$, 则 $g(f(x)) =$ _____.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =$ _____.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} =$ _____.

4. 函数 $\sqrt{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 阶导数是_____.

5. 微分 $d\left(\int_{x^2}^0 e^{-t^2} dt\right) =$ _____.

二. 填空题（本大题包含 5 小题，每小题 3 分，共 15 分，请将答案填在如下指定位置）

1. 设数列 x_n, y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = 0$, 则下列断言正确的是

- A. 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散 B. 若 x_n 无界, 则 y_n 必有界
C. 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小 D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小

2. 假设 $f(x) = o(x) (x \rightarrow 0)$, 则下列结论不一定成立的是

- A. $f(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是无穷小量
B. $f(0) = 0$
C. 若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 则一定是可去间断点
D. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则在 $x=0$ 可导

3. 方程 $x^3 + 5x - c = 0$ (c 是大于零的常数) _____ 正根

- A. 有两个 B. 无 C. 只有一个 D. 不能确定有几个

4. 下列点不可能是函数的极值点的是

- A. 驻点 B. 不可导的点
C. 可导但导数不为零的点 D. 一阶二阶导都为零的点

5. 具有特解 $y_1 = -1, y_2 = 3e^x - 1, y_3 = 2e^{-x} + e^x - 1$ 的二阶常系数线性微分方程的通解为

- A. $-C_1 + C_2 e^x + e^{-x}$ B. $C_1 e^{-x} + C_2 e^x - 1$
C. $-C_1 + C_2 e^{-x} + e^x$ D. $3C_2 e^{-x} + 2C_2 e^x$

三. 计算题（本大题包含 7 小题，每小题 6 分，共 42 分。请将答案写在后面试卷纸上，要写出解答步骤）

1. 求微分方程 $y' - 2xy = e^{x^2} \cos x$, $y|_{x=0} = 1$ 的解

2. 已知 $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 时有定义, 经过点 $(-1, 1)$ 和 $(1, 2)$, 且可导, 其导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 求 $f(x)$

4. 计算不定积分 $\int e^{\sqrt{2x+1}} dx$

5. 求圆盘 $(x-2)^2+y^2\leq 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积

四. 综合题（本大题包含 2 小题，第 1 小题 13 分，第 2 小题 10 分，共 23 分，请将答案写在后面试卷纸上，要写出解答步骤）

1. 讨论 $y = |x + 2|e^{-\frac{1}{x}}$ 的渐近线、单调区间、最值、凹凸区间、拐点，并作图。

6. 设 n 是正整数，已知当 $x \rightarrow 0$ 时， $x \sin x^n$ 是比 $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 低阶而比 $e^{x^2} - 1$ 高阶的无穷小量，求 n

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续， $(0, 1)$ 可导，在 $[0, 1]$ 上的最大值是 2020, $f(0) = 0$, $f(1) = 2018$, 证明：存在 $\xi \in (0, 1)$ ，使得 $f'(\xi) = 2019$

7. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ 的通解