

## 第3章 微分中值定理与导数的应用

### 3.1 微分中值定理

1. 设  $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$ , 则方程  $f'(x) = 0$  的实根的个数为 ( ).

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

2. 设  $a > b > 0$ , 求证:  $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ .

3. 求证:  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} (-1 \leq x \leq 1)$ .

4. 求证: 当  $b > a > 0$ ,  $n > 1$  时,  $na^{n-1}(b-a) < b^n - a^n < nb^{n-1}(b-a)$ .

5. 求证: 当  $x > 0$  时,  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .

## 3.2 洛必达法则

1. 设  $b \neq 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

3. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ .

4. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$ .

5. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}}$ .

6. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$ .

7. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} (n > 0)$ .

8. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x}$ .

9. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} \quad (b \neq 0)$ .

10. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{\lambda x}} \quad (n \in \mathbb{Z}^+, \lambda \in \mathbb{R}^+)$ .

11. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1 + 2x^3)}$ .

12. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ .

### 3.3 泰勒公式

1. 求  $f(x) = xe^x$  带有佩亚诺型余项的  $n$  阶麦克劳林公式.

2. 求极限:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{e^x - x - 1}$ .

### 3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性

1.  $y = \frac{1}{3}x^3 - x$  在  $(-\infty, -1)$  内是 ( ).

A. 递增且凸的      B. 递增且凹的      C. 递减且凸的      D. 递减且凹的

2. 曲线  $y = x^3 - 4x + 1$  的拐点为\_\_\_\_\_.

3. 曲线  $y = -6x^2 + 4x^4$  的凸区间是\_\_\_\_\_.

4. 判断曲线  $y = x^3$  的凹凸性.

5. 求曲线  $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$  的凹凸区间及拐点.

6. 求证: 当  $x > 1$  时,  $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ .

7. 求证: 当  $x > 0$  时,  $1 + \frac{1}{2}x > \sqrt{1+x}$ .

8. 求证:  $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$  ( $x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1$ ).

### 3.5 函数的极值与最大值最小值

1. 函数  $y = 12x - x^3$  的极大值为\_\_\_\_\_.

2. 函数  $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$  的极小值为\_\_\_\_\_.

3. 函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的极小值为\_\_\_\_\_.

4. 函数  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$  的极大值为\_\_\_\_\_.

5. 函数  $y = x + 2\cos x$  在区间  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的最大值为\_\_\_\_\_.

6. 设  $f(x)$  的导数在  $x = a$  处连续, 又  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$ , 则 ( )

A.  $x = a$  是  $f(x)$  的极小值点

B.  $x = a$  是  $f(x)$  的极大值点

C.  $(a, f(a))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

D.  $f(a)$  不是  $f(x)$  的极值,  $(a, f(a))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

7. 求函数  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 14$  在  $[3, 4]$  上的最大值和最小值.

8. 将长为 $a$ 的铁丝截成为两段，一段折成正方形，另一段围成圆形，问这两段铁丝长度分别为多少时，正方形与圆的面积之和最小.

9. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋，现有存砖只够砌 20m 长的墙壁. 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

10. 已知制作一个背包的成本为 40 元，如果每一个背包的售价为 $x$ 元，售出的背包数 $n$ 由函数

$$n = \frac{a}{x-40} + b(80-x).$$

给出，其中 $a, b$ 为正常数，问什么样的售出价格能带来最大利润？

11. 将一块边长为 6 的正方形铁皮，从每个角截去同样的小正方形，然后把四边折起来，成为一个无盖的方盒，为使其容积最大，问截去的小正方形的边长为多少？

12. 一房地产公司有 50 套公寓要出租. 当月租金定为 4000 元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加 200 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓平均每月需花费 400 元的维修费. 问房租定为多少可获得最大收入?

13. 要造一圆柱形油罐, 体积为  $V$ , 问底半径  $r$  和高  $h$  等于多少时, 才能使表面积最小?