概率论与数理统计
习题集

第一章 随机事件及其概率

1.随机试验 2.样本空间、随机事件

一、填空题

1. 设A,B,C为事件，A,B至少有一个发生，但C不发生的事件可以表示为_______.$(A\cup B)\overline{C}$

2. 设A,B,C为事件，A,B发生，但C不发生的事件可以表示为_______.$AB\bar{C}$

二、选择题

1. 向指定的目标射三枪，以A_1,A_2,A_3分别表示事件“第一、二、三枪击中目标”，则“只击中第一枪”用A_1,A_2,A_3表示为_______.B

（A） A_1　　(B) $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$　　(C) $\overline{A}_1\overline{A_2}\overline{A_3}$　　(D) $A_1\cup A_2\cup A_3$

2. 向指定的目标射击三枪，若以A_1,A_2,A_3分别表示事件“第一、二、三枪击中目标”，则“至少击中一枪”用A_1,A_2,A_3表示为_________.　B

3. （A）A_1　（B）$A_1\cup A_2\cup A_3$　（C）$\overline{A}_1\overline{A_2}\overline{A_3}$　（D）$A_1\overline{A_2}\overline{A_3}$

3.频率与概率

1. 2 设 A,B 是两个事件，已知 $P(A)=\dfrac{1}{4}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(AB)=\dfrac{1}{8}$，则 $P(\overline{A}B)=$_______.$\dfrac{3}{8}$或 0.375

2. 设A与B为两个事件，$P(A\cup B)=0.4$，则$P(\overline{A}\overline{B})=$____.0.6

3. 设A与B为两个互不相容的事件，$P(A)=0.4,P(B)=0.5$，则$P(\overline{A}\overline{B})=$____.0.1

4. 设A，B是任意两个事件，则$P(A-B)=$_____.　C

   (A) $P(A)-P(B)$　　(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$

   (C) $P(A)-P(AB)$　　(D) $P(A)+P(B)-P(AB)$

5. 设 A 与 B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.7, P(A\cup B)=0.8$，则 $P(A\overline{B})=$_______. A

（A）0.1 （B）0.3 （C）0.5 （D）0

6. 设 A 与 B 是两个事件，已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.7, P(A\cup B)=0.8$，则 $P(AB)=$_______.D

（A） 0.1 (B) 0.3 (C)0.5 (D) 0.4

4.等可能概型（古典概型)

1. 袋中装有 10 只球，其编号为$1,2,\cdots,10$.从中任取 3 只球，则取出的球中最大号码为 5 的概率是_______.$\frac{1}{20}$

2. 袋中有a只白球，b只红球，k个人（$k\le a+b$）依次在袋中取一只球，在不放回抽样下，求第 2 个人取到白球的概率_______.$\frac{a}{a+b}$

3. 从 5 双不同型号的鞋中任取 4 只,则至少有 2 只鞋配成 1 双的概率为_______. D

（A） $\frac{1}{21}$ （B）$\frac{12}{21}$ （C）$\frac{8}{21}$ （D）$\frac{13}{21}$

5.条件概率

一、综合计算题

1. 设有 2 个同样的箱子，第一箱中有 10 个球，其中 8 个白球和 2 个黑球。第二箱中有 20 个球，其中 4 个白球和 16 个黑球。现在从 2 箱子中任取 1 个箱子，从中任取 1 球，求取到白球的概率.

解：

由全概率公式得：

$P(A)=\frac{1}{2}$

2. 某工厂有三个车间 A,B,C，生产一种产品的概率依次为 0.6, 0.3, 0.1，它们的次品率依次为 0.01, 0.05, 0.04。若从这批产品中随机取一件，求该产

品是次品的概率？

解：由全概率公式得：

$P(A)=0.025$

3. 设播种的麦种混有一等，二等，三等，四等的种子，百分比分别占 0.955，0.02，0.015，0.01. 一等，二等，三等，四等的种子长出的麦穗含 50 颗以上麦粒的概率分别是 0.5，0.15，0.1，0.05，求这批种子所结麦穗含 50 颗以上麦粒的概率.

解：

由全概率公式得：

$P(A)=0.4825$

4. 设一仓库中有 10 箱同种规格的产品，其中由甲、乙、丙三厂生产的分别为 5 箱、3 箱、2 箱，三厂产品的次品率依次为 0.1，0.2，0.3，从这 10 箱中任取一箱，再从这箱中任取一件，求这件产品为正品的概率.若取出的产品为正品，它是甲厂生产的概率是多少.

解 0.83,45/83

5. 一在线计算机系统，有 4 条输入通讯线，其性质如下表，求一随机选择的进入讯号无误差地被接受的概率.

通讯线	通讯量的份额	无误差的讯息的份额
1	0.4	0.9998
2	0.3	0.9999
3	0.1	0.9997
4	0.2	0.9996

解：0.99978

6. 计算机中心有三台打字机 A,B,C，程序交与各台打字机打字的概率依次为 0.6,0.3,0.1，打字机发生故障的概率依次为 0.01,0.05,0.04.已知一程序因打字机发生故障而被破坏了，求该程序是在 A,B,C 上打字的概率分别为多少？

解：0.24/0.60/0.16

7. 一种用来检验 50 岁以上的人是否患有关节炎的检验法，对于确实患关节炎

的患者有 85%给出了正确结果；而对于已知未患关节炎的人有 4%会认为他患关节炎.已知人群中有 10%的人患有关节炎.问一名被检验者经检验，认为他没有患关节炎，而他却患有关节炎的概率？

解：一名被检验者经检验认为没有关节炎而实际却有关节炎的概率为 1.706%

8. 某地区居民的肝癌发病率为 0.0004，现用甲胎蛋白法进行普查，医学研究表明，化验结果是存在错误的.已知患有肝癌的人其化验结果 99%呈阳性（有病），而没有患有肝癌的人其化验结果 99.9%呈阴性（无病），现某人的检验结果为阳性，问他真的患肝癌的概率是多大.

解

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{0.99\times 0.0004}{0.0013956}=0.2837489$$

9. 甲袋中有 3 个白球 2 个黑球，乙袋中有 4 个白球 4 个黑球，今从甲袋中任取 2 球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求该球是白球的概率.

解：$\frac{13}{25}$

10. 假设有同种零件两箱，第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品。现从 2 箱中任取 1 箱，从中任取 1 个零件，求取出的零件是一等品的概率.

解：$P(A)=\frac{2}{5}$

6.独立性

1. 设事件 A,B 相互独立，$P(A)=0.3, P(AB)=0.18$，则 $P(B)=$_______.0.6
2. 设 A,B 两事件相互独立，$P(A\cup B)=0.6$，$P(A)=0.4$，则 $P(B)=$_________. $\frac{1}{3}$
3. 1 甲、乙两人分别独立破译某个密码，设甲、乙单独译出的概率是 0.4，0.7，则密码能译出的概率是_______.0.82
4. 3 个人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3}$,则三人能同时译出密码的概率是________. $\frac{1}{60}$

5. 某一治疗方法对一个患者有效的概率为 0.9，今对 3 个患者进行了治疗，对

各个患者的治疗效果是相互独立的，则对 3 个患者的治疗中，至少有一人是有效的概率_____. 0.999

6. 设事件 A ， B ， $P(A)>0, P(B)>0,$ 且 $A\subset B$ ，则下列命题正确的是_____.

C

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (B) $P(AB)=P(A)P(B)$

(C) $P(A|B)=\dfrac{P(A)}{P(B)}$ (D) $P(A-B)=P(A)-P(B)$

7. 设 A 与 B 互不相容， $P(A)>0, P(B)>0$ ，则___________一定成立.

B

（A） $P(A)=1-P(B)$ （B） $P(A|B)=0$ （C） $P(A|\overline{B})=1$ （D） $P(\overline{AB})=0$

8. 设事件 A 与 B 互不相容， $P(B)>0$ ，则_______一定成立. C

（A） $P(B|A)>0$ （B）$P(A|B)=P(A)$ （C）$P(A|B)=0$ （D）$P(AB)=P(A)P(B)$

9. 设事件 A 与 B 相互独立， $P(A)>0$ ， $P(B)>0$ ，则_______一定不成立.9、C

（A） $P(B|A)>0$ (B) $P(A|B)=P(A)$

(C) $P(A|B)=0$ (D) $P(AB)=P(A)P(B)$

10. 设事件 A 与 B 互不相容， $P(A)>0, P(B)>0$ ，则_______一定成立.D

（A） $P(A)=1-P(B)$ (B) $P(A|B)=1$

(C) $P(A|\overline{B})=1$ (D) $P(\overline{AB})=1$

11. 设每次试验成功的概率是 $p(0<p<1)$ ，则 3 次重复独立试验都失败的概率为_______. B

（A） p^3 (B) $(1-p)^3$ (C) $p(1-p)^2+p^2(1-p)$ (D) $1-p^3$

第二章 随机变量及其分布

1.随机变量

2.离散型随机变量及其分布律

1. 设随机变量 X 的分布律为

X	1	2	3
P	1/2	1/3	1/6

则 $P(2 \le X < 4) =$____. 0.5

2. 设随机变量 X 的分布律为 $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$，则 $P\{X \le 2\} =$________.0.7

3. 在进行 10 次重复独立试验中, 每次试验成功率为 p（$0 < p < 1$），则 10 次试验中 4 次成功的概率为__________. A

（A）$C_{10}^4 p^4 (1-p)^6$　　（B）$C_9^3 p^4 (1-p)^6$

（C）$C_9^4 p^4 (1-p)^5$　　（D）$C_9^3 p^3 (1-p)^6$

4. 设每次试验成功的概率是 $p(0 < p < 1)$，则在 3 次重复独立试验中至少失败一次的概率为________. D

（A）p^3　（B）$(1-p)^3$　（C）$p(1-p)^2 + p^2(1-p)$　（D）$1-p^3$

二、综合计算题

1. 一电话公司有 5 名讯息员，各人在 t 分钟内收到讯息的次数 $X \sim \pi(2t)$（设各人收到讯息与否相互独立）.（1）求在一给定的一分钟内第一个讯息员未收到讯息的概率；（2）求在给定的一分钟内 5 个讯息员恰有 4 人未收到讯息的概率；（3）写出在一给定的一分钟内，所有 5 个讯息员收到相同次数的讯息的概率.（无理数 e 不用做近似计算）

1 解：在给定的一分钟内，任意一个讯息员收到讯息的次数 $X \sim \pi(2)$.

（1）$P\{X = 0\} = e^{-2}$；

（2）设在给定的一分钟内 5 个讯息员中没有收到讯息的讯息员人数用 Y 表示，则 Y~ B(5, e^{-2})，所以

$$P\{Y = 4\} = C_5^4 (e^{-2})^4 \times (1 - e^{-2}).$$

（3）每个人收到的讯息次数相同的概率为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^k e^{-2}}{k!}\right)^5=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{32^k e^{-10}}{(k!)^5}\right)$$

3.随机变量的分布函数

1. 设离散型随机变量 X 的分布律为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$，求 X 的分布函数 $F(x)$ 和概率 $P\left(\frac{5}{4}<X\le\frac{5}{2}\right)$，$P(2\le X<4)$.

解：分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 1/2 & 1\le x<2 \\ 5/6 & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$

$P(5/4<X\le 5/2)=1/3$

$P(2\le X<4)=1/2$

2. 4、一袋中有 5 个乒乓球，编号分别为 1，2，3，4，5，从中随机地取 3 个球，以 X 表示取出的 3 个球中最小号码.（1）写出 X 的分布律；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$.

解：（1）

X	1	2	3
概率	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

，（2）$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{6}{10} & 1\le x<2 \\ \frac{9}{10} & 2\le x<3 \\ 1 & x\ge 3 \end{cases}$

3. 一袋中有 10 个球（其中 7 个旧球 3 个新球），每次从中随机地任取 1 个球（不放回），以 X 表示直到取到旧球为止所进行的抽取次数，（1）写出 X 的分布律；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$.

解：

X	1	2	3	4
概率	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ \frac{7}{10} & 1\le x<2\\ \frac{14}{15} & 2\le x<3\\ \frac{119}{120} & 3\le x<4\\ 1 & x\ge 4\end{cases}$$

4. 、一袋中有 5 个乒乓球，编号分别为 1，2，3，4，5，从中随机地取 3 个球，以 X 表示取出的 3 个球中最大号码，（1）写出 X 的分布律；（2）求 X 的分布函数 $F(x)$.

解：

X	3	4	5
概率	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<3\\ \frac{1}{10} & 3\le x<4\\ \frac{4}{10} & 4\le x<5\\ 1 & x\ge 5\end{cases}$$

5. 一袋中有 6 张卡片，编号分别为 0,1，2，3，4，5，从中随机地取 3 张，以 X 表示取出的 3 张中最大号码，求：（1）X 的分布律；（2）X 的分布函数 $F(x)$.

解：

$$\begin{pmatrix} X & 3 & 4 & 5 & 2\\ P & \frac{3}{20} & \frac{6}{20} & \frac{10}{20} & \frac{1}{20}\end{pmatrix}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<2\\ \frac{1}{20} & 2\le x<3\\ \frac{4}{20} & 3\le x<4\\ \frac{10}{20} & 4\le x<5\\ 1 & 5\le x\end{cases}$$

4.连续型随机变量及其概率密度

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\{X\le \frac{1}{2}\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$_______. $\frac{9}{64}$

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 则常数 $k=$_______.3

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}kx, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$，则 $k=$_______.2

4. 设随机变量 X 的函数为 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$，则其密度函数为 $f(x)=$_______. $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x}{a}, & 0<x<a,\\ 1, & x\ge a.\end{cases}$，则其密度函数为 $f(x)=$_______. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{a}, & 0<x<a\\ 0, & 其它\end{cases}$

6. 设 $X\sim N(0,1)$，$\Phi(x)$ 为 X 的分布函数，若 $\Phi(-a)=0.7$，则 $\Phi(a)=$__________.
0.3；

7. 设随机变量 $X\sim N(1,2)$，且 $P\{1<X<3\}=0.4$，则 $P\{X<-1\}=$_______.0.1；

8. 设随机变量 $X\sim N(3,4)$，若 $P\{X<C\}=P\{X\ge C\}$，则 $C=$_______. 3；

9. 设随机变量 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.4$，则 $P\{X<0\}=$_______.0.1；

10. 设随机变量 $X\sim N(3,16)$，则 $P(X>3)=$_______.0.5

二、选择题

1. 设连续型随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}2\sin x, & x\in[0,A\pi],\\ 0, & 其他.\end{cases}$，则常数 $A=$_____. B

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{3}{2}$

2. 若 $X \sim U(0,5)$，方程 $x^2+2Xx+5X-4=0$ 有实根的概率为_____. D

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

3. 设随机变量 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则随着 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 将会_______.C

（A） 单调增加 （B）单调减少 （C）保持不变 （D）不能确定

三、计算题

1. 设随机变量 X 服从指数分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\frac{-x}{2}}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求 X 的分布函数.

解：$F(x)=\begin{cases}1-e^{\frac{-x}{2}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

2. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x<0\ ,\\ x^2, & 0\le x\le 1\ ,\\ 1\ , & x\ge 1\ .\end{cases}$$

求：（1） $P\{0.3<X<0.7\}$；（2） X 的密度函数 $f(x)$.

解：

$P\{0.3<X<0.7\}=F(0.7)-F(0.3)=0.4$ (5分)

$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x & 0\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$(5分)

3. 一教授当下课铃打响时，他还不结束讲解.他常结束他的讲解在铃响后的一分钟以内，以 X 表示铃响至结束讲解的时间.设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}kx^2 & , & 0\le x\le 1,\\ 0 & , & 其\ 他.\end{cases}$ (1)确定 k；(2)求 $P\{X\le\frac{1}{3}\}$；(3)求 $P\{\frac{1}{4}\le X\le\frac{1}{2}\}$.

解：（1） $k=3$；

（2） $P\{X\le\frac{1}{3}\}=\int_0^{1/3}3x^2dx=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$；

（3）$P\{\frac{1}{4} \le X \le \frac{1}{2}\} = \int_{1/4}^{1/2} 3x^2 dx = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{7}{64}$；

4. 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0\ , & x < 0\ , \\ x^2, & 0 \le x \le 1\ , \\ 1\ , & x \ge 1\ . \end{cases}$$

求：（1）$P\{0.3 < X < 0.7\}$；（2）X的密度函数$f(x)$.

解：

$P\{0.3 < X < 0.7\} = F(0.7) - F(0.3) = 0.4$ (5分)

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$(5分)

5. 设随机变量Y的概率密度为$f(y) = \begin{cases} 0.2\ , & -1 < y \le 0, \\ 0.2 + Cy\ , & 0 < y \le 1, \\ 0\ , & \text{其　他}. \end{cases}$ (1) 试求确定常数C；（2）求分布函数$F(y)$；（3）求$P\{0 \le Y \le 0.5\}$.

解：(1)，得到$C = 1.2$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & y < -1 \\ 0.2(y+1) & -1 \le y < 0 \\ 0.6y^2 + 0.2y + 0.2 & 0 \le y < 1 \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

$P\{0 \le Y \le 0.5\} = 0.25$.

6. 设顾客在某银行的窗口等待服务的时间X（以 min 计）服从指数分布，其概率密度为$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0\ , \\ 0\ , & \text{其他}\ . \end{cases}$某顾客在窗口等待服务，若超过 10min，他就离开. 他一个月要到银行 5 次，以Y表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数，试求$P\{Y \ge 1\}$.

解：$P(Y \ge 1) = 1 - P(Y = 0) = 0.5167$

7. 设某种型号的器件的寿命X（以小时计）具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1000}{x^2}, & x>1000,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$现有一大批这种器件（设各器件损坏与否相互独立），任取 5 只，问其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率.

解：Y：寿命大于 1500 小时的器件数

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1)=\frac{232}{243}$$

8. 设随机变量 $X\sim U[2,5]$，现对 X 进行 3 次独立观测，求至少有 2 次观测值大于 3 的概率.

解：设 Y 为 3 次观测中，观测值大于 3 的观测次数，

$$P(Y\geq 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{20}{27}$$

9. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

Y 表示对 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X\leq\frac{1}{2}\}$ 出现的次数。

（1）求 $P\{Y=2\}$；（2）写出随机变量 X 的分布函数 $F(x)$.

解：$P\{Y=2\}=\dfrac{9}{64}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x^2 & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$$

10. 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

Y 表示对 X 的 3 次独立重复观察中事件 $\{X\leq\frac{1}{2}\}$ 出现的次数。

求：（1） $P\{Y=1\}$；（2）随机变量 X 的分布函数 $F(x)$.

解：(1) $P\left(Y=1\right)=C_3^1\left(\dfrac{3}{8}\right)\left(\dfrac{5}{8}\right)^2=\dfrac{225}{512}$

(2) $F\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{3x^2}{2} & 0\leq x<1\\ 1 & x\geq 1\end{cases}$

11. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}0.003x^2, & 0\le x\le 10,\\ 0\quad\quad, & \text{其　他}.\end{cases}$ 求 t 的方程 $t^2+2Xt+5X-4=0$ 有实根的概率.

1 解：方程有实根的概率为 0.001+0.936=0.937.

5.随机变量的函数的分布

一、填空题

1. 设随机变量 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1 & 4\\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4\end{pmatrix}$，则 $Y=2X^2+1$ 的分布律为 $Y\sim$____ $\begin{pmatrix}1 & 3 & 33\\ 0.2 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$

2. 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	-1	0	1	3
P_k	1/5	1/6	1/5	1/15	11/30

随机变量 $Y=X^2+1$，则 $P(Y=2)=$____. $\dfrac{7}{30}$

3. 设随机变量 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1 & 0.4 & 0.5\end{pmatrix}$，则 $Y=X^2+1$ 的分布律为 $Y\sim$________. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.4 & 0.6\end{pmatrix}$

4. 设随机变量 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.3 & 0.3 & 0.4\end{pmatrix}$，则 $Y=X^2+1$ 的分布律为 $Y\sim$________. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$

5. 设随机变量 X 的分布律为 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 3\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$，则 $P(X>2)=$_______.0. 3

6. 设随机变量X的密度函数为$f(x)=\begin{cases} Ax & 0<x<2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$，则$A=$________.1/2

7. 设随机变量X的分布律为$X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$，则$Y=X+1$的分布律为

$Y\sim$________.$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$

二、综合计算题

1. 设随机变量$X\sim U(-1,1)$, 求$Y=(X+1)/2$的概率密度.

解：

$$f_Y(y)=\begin{cases} 1 & ,0<y<1 \\ 0 & ,其他 \end{cases}$$

2. 设随机变量X的概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 求$Y=-2\ln X$的概率密度.

解：$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

3. 设随机变量X的概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 求$Y=e^X$的概率密度.

解：$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{y}, & 1<y<e, \\ 0, & 其他. \end{cases}$

4. 设随机变量 X 的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\geq 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$，求$Y=\sqrt{X}$的概率密度$f_Y(y)$.

解：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases} 2ye^{-y^2}, & y>0 \\ 0, & y\leq 0 \end{cases}$$

5. 设随机变量$X\sim N(0,\sigma^2)$，求随机变量$Y=|X|$的概率密度$f_Y(y)$.

解：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

6. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\ge 0,\\ 0\ , x<0.\end{cases}$ 求随机变量 $Y=e^{2x}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解： $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}, y\ge 1\\ 0\quad ,\text{其它}\end{cases}$

第三章 多维随机变量及其分布

2.边缘分布 4.相互独立的随机变量

5.两个随机变量的函数的分布

一、选择题

1、设随机变量 X 和 Y 相互独立，其概率分布律为

X	－1	1
p	0.5	0.5

Y	－1	1
p	0.5	0.5

则下列式子正确的是_______.C

（A） $X=Y$ (B) $P\{X=Y\}=0$

(C) $P\{X=Y\}=0.5$ (D) $P\{X=Y\}=1$

2、设 X,Y是相互独立的两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$， $F_Y(y)$，则$Z=\max(X,Y)$的分布函数为_____________. 5、C

（A） $F_Z(z)=\max\{F_X(z),F_Y(z)\}$ （B） $F_Z(z)=\max\{|F_X(z)|,|F_Y(z)|\}$

（C） $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$ （D）以上都不对

3、设 X,Y 是相互独立的两个随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x),F_Y(y)$，则 $Z=\min(X,Y)$ 的分布函数为_______. 6、B

（A） $F_Z(z)=\min\{F_X(z),F_Y(z)\}$ （B） $F_Z(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

（C） $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)$ （D）以上都不对

三、综合计算题

1. 随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & 其它\end{cases}.$

求：（1）边缘概率密度；（2）$P\{X<Y\}$；（3）X,Y是否相互独立？

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^1 4xydy=2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^1 4xydx=2y, & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

(2)

$$P\{X<Y\}=\iint\limits_{x<y}f(x,y)dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y 4xydx$$

$$=\int_0^1 2y^3dy=\frac{1}{2}$$

(3) X和Y独立

2. 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x\ge 0.\end{cases}$ 求$Y=e^X$的概率密度

$f_Y(y)$.

解：$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1\\ 0, & y\le 1\end{cases}$

3. 设随机变量(X,Y)在由曲线$y=x^2, y=\sqrt{x}$所围成的区域G内服从均匀分布.
试求：

（1）(X,Y)的联合概率密度；（2）边缘密度$f_X(x), f_Y(y)$；（3）判断X和Y是否独立？

解：（1）$f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x,y\right)dx=\begin{cases}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} 3dx=3\left(\sqrt{y}-y^2\right), & 0<y<1\\ 0 & ，其它\end{cases}$$

(3) X 和 Y 不独立

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}ce^{-(x+y)}, & x>0，y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）求 c；（2）求边缘概率密度 $f_X(x)及f_Y(y)$；（3）判断 X，Y 是否独立.

解：(1) $c=1$

(2) $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（3）X，Y 独立

5. 设二维随机变量 (X,Y) 在由曲线 $y=2,y=x,y=2x$ 所围成的区域 G 服从均匀分布. 求（1）边缘概率密度 $f_X(x)及f_Y(y)$；（2）判断 X，Y 是否独立.

解：（1） $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，

$f_X\left(x\right)=\begin{cases}x & 0\le x\le 1\\ 2-x & 1<x\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$，$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{y}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & 其它\end{cases}$

（2）不独立。

6. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 G 内服从均匀分布，G 由直线 $\dfrac{x}{2}+y=1$，x 轴及 y 轴围成，求：（1）(X,Y) 的概率密度；（2）关于 X 和关于 Y 的边缘概率密度，并说明 X,Y 是否相互独立；（3）$P\{Y\ge X\}$.

解：（1）(X,Y) 的密度概率 $f(x,y)=\begin{cases}1 & x\in G\\ 0 & 其他\end{cases}$

（2） X 的边缘密度 $f_X(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{2} & 0\le x\le 2\\ 0 & 其他\end{cases}$；

Y 的边缘密度 $f_Y(y)=\begin{cases}2-2y & 0\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$

$f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，则 X 与 Y 不独立；

（3） $P(Y\ge X)=\dfrac{1}{3}$

7. 随机变量 (X,Y) 在由曲线 $y=x^2, y=x^2/2, x=1$ 所围成的区域 G 上服从均匀分布.

（1）求 (X,Y) 的概率密度；（2）求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$.

解：（1） $f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$.

（2） $f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$；

$$f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{2y}-\sqrt{y}), & 0<y<0.5\\ 6(1-\sqrt{y}), & 0.5<y<1\\ 0, & 其\quad 他\end{cases}$$

8. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{3}xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求（1）求 (X,Y) 的边缘密度函数；（2） $P\{X<Y\}$.

解： $f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\dfrac{2}{3}x, 0\le x\le 1\\ 0, 其他\end{cases}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{y}{2}), 0\le y\le 2\\ 0, 其他\end{cases}$$

$$P\{X<Y\}=\int_0^1 dx\int_x^2 (x^2+\frac{1}{3}xy)dy=\frac{17}{24}$$

9. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(x+2y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求（1）求A；（2）边缘密度函数$f_X(x),f_Y(y)$；（3）X和Y是否独立？

解 ：$A=2$

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-y} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

X和Y独立

10. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\le y\le 1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

求：（1）确定常数c；（2）求边缘密度$f_X(x),f_Y(y)$，并判断随机变量X,Y的独立性.

解：$(1)c=\frac{21}{4}$ ，$f_X(x)=\begin{cases}\frac{21x^2(1-x^4)}{8} & -1\le x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{7y^{\frac{5}{2}}}{2} & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$ ，X,Y不相互独立

11. 设二维随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

求（1）常数A；（2）边缘密度函数$f_X(x),f_Y(y)$；（3）X和Y是否独立？

解： $A=2$

$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x},x>0\\ 0,其它\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y},y>0\\ 0,其它\end{cases}$ X和Y独立

12. 随机变量X_1,X_2,X_3,X_4独立同分，

$P\{X_i=0\}=0.6,P\{X_i=1\}=0.4,(i=1,2,3,4)$，

求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

解：　　由于 X_1,X_2,X_3,X_4 独立同分布，可得

$\begin{pmatrix} X_1X_4 & 0 & 1 \\ P & 0.84 & 0.16 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} X_2X_3 & 0 & 1 \\ P & 0.84 & 0.16 \end{pmatrix}$

$X=X_1X_4-X_2X_3$ 的可能值为-1,0,1

$P\{X=-1\}=P\{X_1X_4=0,X_2X_3=1\}=P\{X_1X_4=0\}P\{X_2X_3=1\}$ =0.84*0.16=0.1344

$P\{X=0\}=P\{X_1X_4=0,X_2X_3=0\}+P\{X_1X_4=1,X_2X_3=1\}$ $=0.84^2+0.16^2=0.7312$

$P\{X=1\}=P\{X_1X_4=1,X_2X_3=0\}=P\{X_1X_4=1\}P\{X_2X_3=0\}$ =0.16*0.84=0.1344

第四章　随机变量的数字特征

1.数学期望

一、填空题

1. 设随机变量 X 服从区间 $(2,5)$ 上的均匀分布，则 X 的数学期望 $E(X)$ 为________. C

　(A) 2　　(B) 3　　(C) 3.5　　(D) 4

2. 已知 X 服从泊松分布，且 $P(X=5)=P(X=6)$，则 $E(X+2)=$______. 8；

3. 设 $X\sim U(0,2)$，则 $E(X)=$_______.　1；

4. 设随机变量 $X\sim U(1,6)$，则 $E(X)=$_______. 7/2

二、综合计算题

1. 将 n 只球（$1\sim n$ 号）放入 n 个盒子（$1\sim n$ 号）中去，一个盒子装一只球. 若一只球装入与球同号的盒子中，称为一个配对. 记 X 为总的配对数，求 $E(X)$.

解：引入随机变量 $X_i=\begin{cases} 1\text{，第i个球落入第i个盒子} \\ 0\text{，第i个球未落入第i个盒子} \end{cases}$

则 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$，且因为 $P(X_i=1)=\dfrac{1}{n}$，所以 $E(X_i)=\dfrac{1}{n}$

故$E\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}E\left(X_{i}\right)=1$

2. 设随机变量X具有概率密度$f(x)=\begin{cases}k(1-\dfrac{1}{x^2}), & 1<x<2, \\ 0, & 其他.\end{cases}$

（1）求参数k；（2）求X的数学期望$E(X)$.

解：(1) $k=2$

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \;=3-2\ln 2$

3. 在美国，致命的汽车事故占所有汽车事故的比例X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}kx(1-x)^5, & 0<x<1, \\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）求参数k，（2）求X的数学期望$E(X)$.

解：(1)　$k=42$

(2) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx \;=\dfrac{1}{4}$

4. 掷一颗骰子，若得 6 点则可掷第二次，此时得分为：6+第二次所掷的点数，否则得分就是第一次所掷的点数，不能再掷，求所得分数的分布律，并求得分的数学期望.

解：根据题意，设X为掷骰子的分数　则X的分布律为

X	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

则$E(\mathrm{X})=\sum x_k p_k \;=\dfrac{49}{12}$

5. 某种动物寿命X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{25}{x^2}, & x>5, \\ 0, & 其它.\end{cases}$求$X$的数学期望.

解：

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{50}{x^3}, x>5 \\ 0, 其它\end{cases}$,

$E(X)=10$

\$2 方差.

1、已知$E(X)=-2$，$E(X^2)=5$，则$D(1-3X)=$________.9 ；

2、已知$X\sim N(2,9)$，则$E(X^2)=$______. 13；

3、设随机变量$X\sim B(10,0.2)$，则$D(X)=$________. 1.6；

4、已知$D(Y)=36, Cov(X,Y)=12, \rho_{XY}=0.4$，则$D(X)=$______. 25；

5、设$X\sim b(100,0.1)$，则$DX=$__________. 9；

6、设$X\sim b(n,p)$，则$DX=$__________. $np(1-p)$；

7、设随机变量X与设随机变量Y相互独立，则X与Y的相关系数$\rho=$__________. 0；

8、设随机变量$X\sim U(0,2)$，则$DX=$________. $\dfrac{1}{3}$

9、1 设随机变量$X\sim U(1,6)$，则$D(X)=$________. 25/12；

10、设随机变量$X\sim N(1,2), Y\sim N(3,2)$，且$X,Y$独立，则$Z=2X-Y, Z\sim$________.2、$N(-1,10)$；

二、选择题

1、对于任意两个随机变量X和Y，若$E(XY)=E(X)E(Y)$，则有______. B

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$　　　　(B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

(C) X 和 Y 独立　　　　(D) X 和 Y 不独立

2、若随机变量 X 的期望为 $E(X)$，方差为 $D(X)=\sigma^2$，由切比雪夫不等式得 $P\{|X-E(X)|\geq 3\sigma\}\leq$_______.1、C

（A） $\frac{1}{3}$　　(B) $\frac{4}{3}$　　(C) $\frac{1}{9}$　　(D) $\frac{8}{9}$

3、设随机变量 $X\sim b(n,p)$，且 $EX=2.4, DX=1.44$，则二项分布参数 n,p 的值为_______. 8、 B

（A） $n=4, p=0.6$　　（B）$n=6, p=0.4$

（C）$n=8, p=0.3$　　（D）$n=24, p=0.1$

4、设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 6 和 3，则 $D(2X-3Y)$ 为_______.　A

（A） 51　　（B）21　　（C）-3　　（D）36

5、设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=5, D(X)=2.5$，则二项分布的参数 n,p 的值为_______.10、A

（A） $n=10, p=0.5$　(B) $n=6, p=0.4$　(C) $n=8, p=0.3$　(D) $n=24, p=0.1$

6、设 a,b 均为常数，则下列数学期望和方差的性质中错误的是_______.　11、C

（A） $E(X+Y)=EX+EY$　　　　(B) $D(b)=0$

(C) $D(aX)=aD(X)$　　　　(D) $E(aX)=aE(X)$

7、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(X\leq 1+\mu)=$_____. 3、D

(A)随 μ 的增大而增大　　(B)随 μ 的增大而减少

(C)随 σ 的增大而增大　　(D)随 σ 的增大而减少

8、设随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$ 都存在，且 $D(X)>0$，则 $Y=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 的数学期望 $E(Y)=$____________. A

（A） 0　　（B） 1　　（C） -1　　（D） 2

9、设随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y=2X-2$，则 $Y\sim$________.1、C

（A） $N(0,1)$　　(B) $N(-1,4)$　　(C) $N(-2,4)$　　(D) $N(-2,1)$

10、设 $X\sim N(-3,1), Y\sim N(2,1)$，且 X 与 Y 相互独立，令 $Z=X-2Y+7$，则 $Z\sim$______.　2、A

(A) $N(0,5)$　　(B) $N(0,3)$　　(C) $N(0,46)$　　(D) $N(0,54)$

11、设随机变量 $X\sim N(0,1), Y=2X-1$，则 $Y\sim$________.　4、 B

（A） $N(0,1)$　　(B) $N(-1,4)$　　(C) $N(-2,4)$　　(D) $N(-2,1)$

三、综合计算题

1、某工程队完成某项工程的天数 X 是随机变量，具有分布律

X	10	11	12	13	14
p_k	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

所得利润（以一万元计）为 $Y=1000(12-X)$，求随机变量 Y 的期望和方差.

解：根据题意，可得利润的分布律为

Y	2000	1000	0	-1000	-2000
p_k	0.2	0.3	0.3	0.1	0.1

因此，

$E(Y)=2000\times0.2+1000\times0.3-1000\times0.1-2000\times0.1=400$（元）

$E(Y^2)=2000^2\times0.2+1000^2\times0.3+(-1000)^2\times0.1+(-2000)^2\times0.1=1600000$

$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1440000$。

2、设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}Ax^2, & 0\le x\le 2,\\ 0, & 其它\end{cases}$. 求：常数 A，$E(X)$ 及

$D(X)$.

解：（1）A=$\frac{3}{8}$；

（2）$E(X)=\frac{3}{2}$

（3）$$\begin{aligned}&E(X^2)=\int_0^2\frac{3}{8}x^4dx=\frac{12}{5}\\&D(X)=\frac{3}{20}\end{aligned}$$

3、随机变量 X 的概率密度为$f(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$求$E(X)$、$D(X)$.

解：

$EX=1$

$EX^2=\frac{7}{6}$

$DX=\frac{1}{6}$

4、在一批 12 台电视机中有 2 台次品，从中随机抽取 3 台，求取到的电视机中的次品数的数学期望和方差.

解：$\begin{pmatrix}Y & 0 & 1 & 2\\ P & \frac{6}{11} & \frac{9}{22} & \frac{1}{22}\end{pmatrix}\cdots$2 分

$E(Y)=0.5$

$E(Y^2)=13/22$

$D(Y)=15/44$

3.协方差及相关系数

1、设X,Y为两个随机变量,已知$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，则必有____________.　C

（A）X与Y相互独立　　（B）$D(XY)=DX\cdot DY$

（C）$E(XY)=EX\cdot EY$　　（D）以上都不对

2、设(X,Y)为二维随机变量，则$\xi=X+Y$与$\eta=X-Y$不相关的充要条件为_____.　B

(A) $E(X)=E(Y)$ (B) $E(X^2)-E^2(X)=E(Y^2)-E^2(Y)$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$ (D) $E(X^2)+E^2(X)=E(Y^2)+E^2(Y)$

第五章 大数定律与中心极限定理

一、综合计算题

1、以 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 记 100 袋额定重量（以 kg 计）为 25 的袋装肥料的真实的净重，$E(X_i)=25$，$D(X_i)=1$，$i=1,2,\cdots,100$, $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 服从同一分布，且相互独立. $\overline{X}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i$，求 $P\{24.75\le\overline{X}\le25.25\}$ 的近似值.

[附表]设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938

解：

$$P\{24.75\le\overline{X}\le25.25\}=2\Phi(2.5)-1=0.9876$$

2、一仪器同时收到 100 个信号，其中第 i 个信号的长度为 X_i，$i=1,2,\cdots,100$. 设 X_i 是相互独立且都服从数学期望为 2 的指数分布，$i=1,2,\cdots,100$，试求 $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i>180\right)$.

[附表]设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938

解：$P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i>180\right)=1-P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\le180\right)\approx1-\Phi(-1)=\Phi(1)=0.8413$

3、预测量两地的距离，限于测量工具，将其分成 1200 段进行测量. 设每段测量

误差（单位：千米）相互独立，且均服从区间（-0.5,0.5）上的均匀分布，试求总距离测量误差的绝对值不超过 20（千米）的概率.(利用中心极限定理）

x	1	2	3
$\Phi(x)$	0.8413	0.9772	0.9987

解：X_i 第 i 段测量误差 $i=1,2,\cdots,1200$

$$P(\left|\sum_{i=1}^{1200} X_i\right| \le 20) = P(-20 \le \sum_{i=1}^{1200} X_i \le 20) = 2\Phi(2)-1 = 0.9544$$

4、假设生产线上组装每件成品所花费的时间服从指数分布，统计资料表明：该生产线每件产品的平均组装时间为 10 分钟. 假设各件产品的组装时间相互独立. 试求在 15 小时至 20 小时之间在该生产线组装完成 100 件成品的概率.（利用中心极限定理）.

x	1	2	3
$\Phi(x)$	0.8413	0.9772	0.9987

解：X_i 第 i 件产品的组装时间 $i=1,2,\cdots,100$

$$P(900 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 1200) \approx \Phi(2)-\Phi(-1) = \Phi(2)+\Phi(1)-1 = 0.8185$$

5、某种电子元件的寿命 X（以年计）服从数学期望为 2 的指数分布，各元件的寿命相互独立. 随机取 100 只元件，求这 100 只元件的寿命之和大于 180 的概率.

解：设这 100 只元件的寿命分别记为随机变量 $X_1,\cdots X_{100}$，

$$P\{\sum_{i=1}^{100} X_i > 180\} \approx 1-\Phi(\frac{1.8-2}{0.2}) = \Phi(1) = 0.8413$$

6、一加法器同时收到 20 个噪声电压 $V_k\left(k=1,2,\cdots,20\right)$，设它们是相互独立的随

机变量，且都在区间$(0,10)$上服从均匀分布.记$V=\sum_{k=1}^{20}V_k$，求$P\{V>105\}$的近似值.

[附表]设$\Phi(x)$是标准正态分布函数

x	0	0.387	0.950	1.241	2.072	2.551
$\Phi(x)$	0.5000	0.6520	0.8289	0.8925	0.9808	0.9946

解：

$$P\{V>105\}=P\left\{\frac{V-20\times 5}{\sqrt{100/12}\cdot\sqrt{20}}>\frac{105-20\times 5}{\sqrt{100/12}\cdot\sqrt{20}}\right\}\approx 1-\Phi\left(0.387\right)\ =0.348$$

7、某种电灯的寿命X（以年计）服从数学期望为2的指数分布，各只电灯的寿命相互独立。随机取100只，利用中心极限定理求这100只电灯的寿命之和大于220年的概率.

[附表]设$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$\Phi(x)$	0.5000	0.6915	0.8413	0.9332	0.9772	0.9938

解：设这100只电灯的寿命分别记为随机变量$X_1,\cdots X_{100}$，

$$P\{\sum_{i=1}^{100}X_i>220\}\approx 1-\Phi(\frac{2.2-2}{0.2})=1-\Phi(1)=0.1587$$

第六章 样本及抽样分布

一、填空题

1、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自标准正态总体$N(0,1)$的样本，则统计量

$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim$________.1、$\chi^2(n)$；

2、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，则

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2}}\sim$________.　$t(n-1)$；

3、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，S^2 是样本方差，则 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim$_____. $\chi^2(n-1)$；

4、设 $X_i\sim N(0,1), i=1,2,\cdots,6.$， $C[(X_1+X_2+X_3)^2+(X_4+X_5+X_6)^2]\sim\chi^2(2)$，则 $C=$_____. $\frac{1}{3}$

二、选择题

1、设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自于正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ,σ^2 未知，则下面不是统计量的是_______.1、D

（A） X_i (B) $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

(C) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ (D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2$

2、下列结论中，不正确的是_______. 2、A

（A）若 $X\sim\chi^2(2), Y\sim\chi^2(3)$，则 $X+Y\sim\chi^2(5)$

(B) 若 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(0,1)$，且 X 和 Y 独立，则 $X^2+Y^2\sim\chi^2(2)$

(C) 设 $X_1,\cdots X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则 $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$

(D) 若 $X\sim\chi^2(10)$，则 $D(X)=20$

3、对于给定的 α，$0<\alpha<1$，其中满足条件 $P\{t>t_\alpha(n)\}=\int_{t_\alpha(n)}^{\infty}h(t)dt=\alpha$ 的点 $t_\alpha(n)$ 为 $t(n)$ 分布的上 α 分位点，故___________. 3、B

（A） $t_{1-\alpha}(n)=t_\alpha(n)$ （B） $t_{1-\alpha}(n)=-t_\alpha(n)$

（C） $t_{1-\alpha}(n)=-t_{\alpha-1}(n)$ （D） $t_{1-\alpha}(n)=1-t_\alpha(n)$

4、设 $X_1,X_2,\cdots,X_{20}$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，则统计量 $\overline{X}$ 服从的分布__________. 4、A

（A）$N(\mu,\frac{\sigma^2}{20})$ （B）$N(20\mu,400\sigma^2)$ （C）$N(\mu,20\sigma^2)$ （D）$N(20\mu,\frac{\sigma^2}{400})$

5、设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，则统计量 T= $\dfrac{\sum_{i=1}^{5}X_i}{\sqrt{\sum_{i=6}^{10}X_i^2}}$ ~ _________. 5、B

（A） $\chi^2(10)$　　（B） $t(5)$　　（C） $F(5,10)$　　（D） $N(0,1)$

6、下列结论中，不正确的是_______.A

（A） 若 $X\sim N(0,1),Y\sim N(0,1)$，则 $X^2+Y^2\sim\chi^2(2)$

(B) 若 $X\sim\chi^2(2),Y\sim\chi^2(3)$ 且 X 和 Y 独立，则 $X+Y\sim\chi^2(5)$

(C) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X}$ 是样本均值，则 $\overline{X}\sim N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$

(D) 若 $X\sim\chi^2(10)$，则 $D(X)=20$

第六章 参数估计

1.点估计 2.基于截尾样本的最大似然估计

一、选择题

1、设总体 $X\sim U(0,\theta)$，其中 θ 为未知参数，X_1，X_2，……，X_n 为来自总体 X 的样本，则 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=$_______.　1、C

（A） X　　(B) $\overline{X}$　　(C) $2\overline{X}$　　(D) 以上都不对

2、设总体 X 服从参数 λ 的泊松分布，其中 $\lambda>0$ 为未知参数，X_1，X_2，……，X_n 为来自总体 X 的样本，则 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}=$_______.　2、B

（A） X　　(B) $\overline{X}$　　(C) $\dfrac{1}{\overline{X}}$　　(D) 以上都不对

二、综合计算题

1、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta\cdot x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数。$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个容量为n的简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为一相应的样本值，求参数θ的最大似然估计值.

解：θ的极大似然估计：$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\dfrac{\text{-n}}{\ln(\mathrm{X_1}\cdots\mathrm{X_n})}$

2、设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}, x>0,\\ 0 \quad ,其它.\end{cases}$ 其中$0<\theta<\infty$为未知参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个容量为n的简单随机样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为一相应的样本值，试求参数θ的最大似然估计值.

解：$\hat{\theta}=\dfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{\overline{x}}{2}$

3、设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{6\theta^4}x^3e^{\frac{-x}{\theta}}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中θ（$\theta>0$）为待估参数，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一个样本值，求参数θ的最大似然估计值.

解：θ的最大估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{\overline{x}}{4}$

4、设总体X的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$0<\theta<1$为待估参数，设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$是一个样本值，求参数θ的最大似然估计值.

解：θ的最大估计值为$\hat{\theta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2n}$

5、设 X 服从参数为 $p(0<p<1)$ 的几何分布，其分布律为 $P\{X=x\}=(1-p)^{x-1}p, x=1,2,\cdots$.

p 为未知参数. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是一个样本值，求 p 的最大似然估计值.

解： p 的最大似然估计值为

$$\hat{p}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}。$$

6、设总体 $X\sim\pi(\lambda),\lambda>0$ 未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值.（1）求 λ 的矩估计量；（2）求 λ 的最大似然估计值.

解：λ 的最大似然估计值为

$$\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$$

7、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\frac{\theta^x\cdot e^{-\theta}}{x!}\qquad(x=0,1,\cdots)$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数。设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值，求参数 θ 的最大似然估计值.

解：

θ 的极大似然估计： $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\bar{x}$

8、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta\cdot e^{(-\theta x)}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数。设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值，用最大似然估计法求参数 θ 的估计值.

解： θ 的极大似然估计：$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{\bar{x}}$

9、已知总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，其概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体的样本值，求参数 λ 的最大似然估计值.

解：$\hat{\lambda}=\frac{1}{\bar{x}}$

10、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)\cdot x^{\theta}, & 0<x<1, \\ 0, & 其它 .\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数。$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值，用最大似然估计法求参数 θ 的估计值.

解：

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$$

3.估计量的评选标准

一、填空题

1、$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是常数 θ 的两个无偏估计量，若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则_______ 更有效. 1、

$\hat{\theta}_1$

二、选择题

1、设 $X_1,\cdots X_n$ 是总体的样本，则下列统计量均为总体均值的无偏估计，其中最有效的是_______. 3、 B

（A）$\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$ （B）$\frac{1}{3}(X_1+X_2+X_3)$ （C）$X_1+X_2-X_3$ （D）$\frac{1}{2}(X_1+X_2)$

2、设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X},S^2$ 是样本均值和样本方差，下列结论中，错误的是_______.4、C

（A）$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ (B) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

(C) S^2 为 σ^2 的有偏估计量 (D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 为 σ^2 的有偏估计量

3、设 $X_1,\cdots X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，$\overline{X},S^2$ 是样本均值和样本方差，下列结论中，错误的是_______. 5、D

（A）$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ （B）$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

（C）S^2为σ^2的无偏估计量　（D）$B_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$为$\sigma^2$的无偏估计量

第七章 假设检验

1.假设检验

一、填空题

1、假设盒中有5个球,关于球的颜色有如下假设H_0:盒中至多有一个红球.若H_0为基本假设，其对立假设H_1为_________. 1、盒中至少有两个红球

二、选择题

1、在假设检验中，显著性水平α的意义是_______.1、A

（A）H_0为真，但经检验拒绝H_0的概率　(B) H_0为真，经检验接受H_0的概率

(C) H_0不成立，经检验拒绝H_0的概率　(D) H_0不成立，但经检验接受H_0的概率

2、在对单个正态总体均值的假设检验中，当总体方差已知时，选用_______. D

（A）t检验法　(B) χ^2检验法　(C) F检验法　(D) u检验法

3、在假设检验中，显著性水平α 的意义是_____. 3、A

(A) H_0为真，但经检验拒绝H_0的概率 (B) H_0为真，经检验接受H_0的概率

(C) H_0为假，经检验拒绝H_0的概率　(D) H_0为假，但经检验接受H_0的概率

4、设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，σ^2未知，统计假设为$H_0:\mu=\mu_0$（μ_0已知）$H_1:\mu\neq\mu_0$，则所用统计量为_____.　4、B

(A) $U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$　(B) $T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\mathrm{S}/\sqrt{n}}$　(C) $\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$　(D) $\chi^2=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\mu)^2$