第四章　向量组的线性相关性

一、填空题

1. 向量组 $\alpha_1=(1,1,-1)^T,\alpha_2=(1,-1,1)^T,\alpha_3=(-1,1,1)^T$ 的线性相关性为__________.

2. 向量组 $a_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},a_2=(-1,3,0)^{\mathrm{T}},a_3=(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$，则它们线性________.（填相关或无关）

3. 已知向量组 $\alpha_1=(a,1,1)$， $\alpha_2=(1, a, -1)$， $\alpha_3=(1, -1, a)$ 线性相关，则 $a=$____________.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$，已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$__________.

5. 设 $\alpha=(1,0,0)$， $\beta=(0,0,1)$， $\gamma=(-3,0,4)$，则 γ 由 α,β 线性表示的表达式__________.

6. 设 $\alpha=(1,0,0)$，$\beta=(0,1,0)$，$\gamma=(-2,3,0)$，则 γ 由 α,β 线性表示的表达式为_____.

7. 设 $\alpha_1=(1,1,1)^T,\alpha_2=(0,2,5)^T,\alpha_3=(2,4,7)^T$，则 α_3 可由 α_1,α_2 线性表示为_____.

8. 设 A 是 4×6 矩阵，线性方程组 $Ax=0$ 的解空间的维数是 2，则 $R(A)=$_______.

二、选择题

1. 设 $R(A)=n-1$， n 元线性方程组 $Ax=b(b\neq0)$ 有三个互不相同的解 α,β 和 γ，则导出组基础解系为__________.

   (A) α,β,γ　　(B) $\alpha-\beta$

   (C) $\alpha+\beta$　　(D) α,β

2. 设 $\beta=(2, t, -1)$ 可由 $\alpha_1=(1,4,3)$， $\alpha_2=(-2,3,1)$ 线性表示，则 $t=$ __________.

   (A) 1　　(B) -2

   (C) 3　　(D) -3

3. 设向量组 A 能由向量组 B 线性表示，则__________.

   (A) $R(B)\leq R(A)$　　(B) $R(B)<R(A)$

(C) $R(B)=R(A)$ (D) $R(B)\ge R(A)$

4. 设 A 与 B 为 4 阶方阵，$\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，$\det(A)=\begin{vmatrix}\alpha & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\end{vmatrix}=4$，$\det(B)=\begin{vmatrix}\beta & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4\end{vmatrix}=1$，则 $|A+B|=$_____.

(A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 40

5. n 元齐次线性方程组 $Ax=O$，$R(A)=r(r<n)$,则该方程组的基础解系含____个解向量.

(A) n (B) r (C) $r-n$ (D) $n-r$

6. 设有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则_________.

(A) α_1,α_3 线性无关 (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关 (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关

7. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是_________.

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\ne\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关；

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要条件是任意两个向量线性无关.

8. 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关等价于_________.

(A) 存在一组不全为 0 的数，使其组合不为零向量；

(B) 其中任意两个向量线性无关；

(C) 存在一个向量不能用其他向量线性表示；

(D) 任何一个向量均不能用其他向量线性表示.

9. 设向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 可由向量组 $B:\beta_1,\beta_2,...,\beta_s$ 线性表示，则_________.

(A)当 $r>s$ 时，向量组 B 线性相关 (B)当 $r>s$ 时，向量组 A 线性相关

(C)当 $r<s$ 时，向量组 B 线性相关 (D)当 $r<s$ 时，向量组 A 线性相关

10. 下列集合________不构成一个向量空间.

(A) $V_1=\{(x_1,x_2,...,x_{n-1},0)|x_1,x_2,...,x_{n-1}\in R\}$

(B) $V_2=\{(x_1,x_2,...,x_n)|x_1+x_2+...+x_n=0,x_1,x_2,...,x_n\in R\}$

(C) $V_3=\{(x_1,x_2,...,x_{n-1},1)|x_1,x_2,...,x_{n-1}\in R\}$

(D) $V_4=\{(x_1,x_2,...,x_{n-2},0,0)|x_1,x_2,...,x_{n-2}\in R\}$

三、综合题

1. 求 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的一个最大线性无关组，并用最大线性无关组表示其余向量.

2. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\3\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}5\\-2\\8\\-9\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\\7\end{pmatrix}$ 的秩和一个最大无关组，并用最大无关组表示其余向量.

3. 求 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\7\\10\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}8\\5\\9\\11\end{pmatrix}$，的一个最大线性无关组，并用最大线性无关组表示其余向量.

4．求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ 的秩和一个最大无关组，并把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示.

5. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ 的秩和一个最大无关组，并把不属于最大无关组的向量用最大无关组线性表示.

6. 求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$, $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\14\end{pmatrix}$, $\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$, $\alpha_5=\begin{pmatrix}2\\1\\5\\6\end{pmatrix}$ 的秩和一个

最大无关组.

7. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 4 & 0 & -1\\ 4 & -6 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的秩和一个最大无关组，并把其余列向量用最大无关组线性表示.

8. 求向量组 $a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},a_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix},a_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},a_4=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$ 的极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组线性表示.

9. 求向量组 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-4\\-1\end{bmatrix},\alpha_2=\begin{bmatrix}1\\4\\0\\1\end{bmatrix},\alpha_3=\begin{bmatrix}2\\10\\2\\3\end{bmatrix},\alpha_4=\begin{bmatrix}1\\2\\-2\\0\end{bmatrix}$ 的秩和一个最大线性无关组，并把不属于最大线性无关组的向量用最大线性无关组表示.

10. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 4 & 5 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 5\\ 0 & -3 & -1 & 6\\ 2 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵的列向量组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

11. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$, 求矩阵 A 的列向量组的秩和列向量组的一个最大无关组，并把不属于最大无关组的列向量用最大无关组线性表示.

12.求向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\\4\end{pmatrix}$，$\alpha_5=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix}$ 的最大线性无关组，并把其他向量用最大线性无关组线性表示.

13.求方程组 $\begin{cases}2x_1+6x_2+x_3-3x_4=1\\ x_1+3x_2+3x_3-2x_4=2\\ 5x_1+15x_2-7x_4=1\end{cases}$ 的通解，并写出对应导出组的基础解系.

14.求方程组$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1 \\ 4x_1+2x_2-2x_3+x_4=2 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \end{cases}$的通解，并写出对应导出组的基础解系.

15.求方程组$\begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6 \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_2-x_3=3 \end{cases}$的通解，并写出对应导出组的基础解系.

16.求方程组$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad\quad =5 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4 \ =1 \\ 5x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3 \end{cases}$的一个解及对应齐次方程组的基础解系.

17.求齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=0 \\ -3x_1+x_2+2x_3-4x_4=0 \\ -x_1-2x_2+3x_3+x_4=0 \end{cases}$的一个基础解系及其通解.

18.求方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4=5 \\ 2x_1+4x_2-x_4=-3 \\ -x_1-2x_2+3x_3+2x_4=8 \\ x_1+2x_2-9x_3-5x_4=-21 \\ 6x_3+3x_4=13 \end{cases}$ 的通解，并写出导出组的基础解系.

19.求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+2x_4=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3+8x_4=8 \\ -3x_1+2x_2-x_3-9x_4=-5 \\ x_2-2x_3-3x_4=-4 \end{cases}$的通解及所对应的齐次线性方程组的基础解系.

20.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$b_1=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$b_2=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，$b_3=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，证明:$b_1,b_2,b_3$线性无关.

21.设$b_1=\alpha_1$，$b_2=\alpha_1+\alpha_2,\cdots,b_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_r$，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关，证明：向量组$b_1,b_2,\cdots,b_r$线性无关.

22.设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，证明:向量组$b_1=\alpha_1,b_2=\alpha_1+\alpha_2,b_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$线性无关.

23.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\,(m>1)$线性无关，且$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$，证明：向量组$\beta-\alpha_1,\beta-\alpha_2,\cdots,\beta-\alpha_m$线性无关.

24.设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$, $\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

证明：向量组β_1,β_2,β_3线性无关.

25. 设 $\beta_1=3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，　$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3$ ，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，　证明：向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性无关.

26.已知向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_2+2\alpha_3,\beta_3=3\alpha_1+\alpha_3$，判定向量组$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的线性相关性，说明理由.

27. 设 $\beta_1=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，　$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$ ，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，　证明：向量组$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$线性无关.

28.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+3\alpha_3,\beta_3=3\alpha_3+\alpha_1$.

证明：向量组β_1,β_2,β_3线性无关.

29.设$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$，且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，

证明：向量组β_1，β_2，β_3线性无关.

30.设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$，……，$\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$，　证明：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关的充要条件是$s$为奇数.