填空题

1. **偶排列**（2比1大，5比4大，有2个逆序对）

> ## 如何判断一个排列的奇偶性?
>
> ### 定义
>
> - **排列**：一个数的全排列是指从这些数中任取几个（也可以是全部）进行排列。
> - **奇偶性**：排列的奇偶性是指排列中逆序对的奇偶性。如果一个排列中逆序对的数量是奇数，则该排列是奇排列；如果逆序对的数量是偶数，则该排列是偶排列。
>
> ### 关键概念：逆序对
>
> - **逆序对**：在一个序列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么这对数构成一个逆序对。
> - **计算方法**：逐个检查每对数字，统计总的逆序对数目。
>
> ### 计算排列奇偶性的步骤
>
> 1. **选择排列**：确定要检查的排列，例如 `[3, 1, 4, 2]`。
> 2. **检查每对数字**：从左至右对比每对数字，记录逆序对的数量。
>   - 比如在排列 `[3, 1, 4, 2]` 中，逆序对包括 (3, 1), (3, 2), (4, 2)。
> 3. **统计逆序对**：计算逆序对总数。
> 4. **判断奇偶性**：
>   - 如果逆序对数量是奇数，则排列是奇排列。
>   - 如果逆序对数量是偶数，则排列是偶排列。

2. **16**
3. **5**
4. **正号**

> 为了确定5阶行列式 $|a_{ij}|$ 中包含 a_{42}、a_{13}、a_{35}、a_{54}、a_{21} 的项的符号，我们需要考虑这些元素在行列式中的排列位置。行列式中的每一项的符号是由排列的奇偶性决定的，即由这些元素的排列产生的逆序对的数量决定。
>
> ## 步骤
>
> 1. **确定排列**：
>   - 从上述元素可以看到，这些元素来自不同的行和列，因此我们需要考虑的排列是这些元素的行索引按照列索引的顺序排列，即考虑元素 a_{13}、a_{21}、a_{35}、a_{42}、a_{54}。
>   - 对应的j排列是：$(3, 1, 5, 2, 4)$。
> 2. **计算逆序对**：
>   - 对排列 $(3, 1, 5, 2, 4)$计算逆序对。
>   - 逆序对列表：
>   - $(3, 1)$
>   - $(3, 2)$

> - $(5,2)$
> - $(5,4)$
> - 总逆序对数：4个。
>
> 3. **确定符号**：
>   - 由于逆序对的总数为偶数，根据行列式的性质，如果一个排列的逆序对数是奇数，则对应的项的符号为负号。
>
> ## 结论
>
> 在5阶行列式 $|a_{ij}|$ 的展开式中，包含 a_{42}、a_{13}、a_{35}、a_{54}、a_{21} 的项前面的符号是 **正号。**

5. **0**
6. **15**
7. **24**

> 给定的矩阵是一个上三角矩阵。对于上三角矩阵（或下三角矩阵），其行列式的值等于对角线元素的乘积。这是因为在上三角矩阵中，所有位于主对角线以下的元素都是0，这使得在行列式的展开中只有一项是非零的，即对角线元素的乘积。
>
> 矩阵如下：
> $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$
> 行列式的计算可以直接通过乘以对角线元素来完成：
>
> $$\text{行列式} = 1 \times 4 \times 6 = 24$$
>
> 因此，该上三角矩阵的行列式值为 24。这种类型的矩阵计算是直观且简单的，特别是在涉及到三角矩阵时。

8. **3**

> 当你给一个行列式的某一列或某一行乘上一个标量 x，行列式的值将会按照这个标量 x 线性缩放。这意味着，行列式的新值将是原始行列式值乘以 x。
>
> 具体来说，假设有一个 $n \times n$ 阶行列式 Δ，其值为 1。如果你选择这个行列式的某一行（或列）并将这一行（或列）中的每个元素乘以 x，那么行列式的新值将变为 $x \times 1 = x$。
>
> ## 为什么会这样?
>
> 行列式的一个基本性质是，如果将行列式中的一行（或一列）中的所有元素乘以一个常数 x，则行列式的值也乘以 x。这是因为行列式的定义是基于行（或列）的线性组合，且每个元素的倍增直接反映到行列式的最终计算结果上。
>
> ## 数学表达
>
> 假设 A 是一个初值行列式为 1 的矩阵，且我们将 A 的第 k 行所有元素乘以 x，形成新的矩阵 A'。则 A' 的行列式 $\det(A')$ 为：
>
> $$\det(A') = x \cdot \det(A) = x \cdot 1 = x$$

9. **9**

> 已知的 2x2 矩阵的行列式为：
>
> $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$$

> 我们需要计算 3x3 矩阵的行列式：
>
> $$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 8 \\ 3c & 3d & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
>
> 根据行列式的基本性质，特别是行列式展开（按照第三列展开），我们可以直接利用第三行的"1"来简化计算。行列式可以按第三列展开，考虑到第三行的前两个元素是 0，只有第三个元素是 1，所以行列式可以简化为：
>
> $$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 8 \\ 3c & 3d & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$$
>
> 接下来计算 2x2 矩阵的行列式：
>
> $$\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{vmatrix}$$
>
> 可以将这个行列式视为原始矩阵每行乘以 3 的结果：
>
> $$= 3 \times 3 \times \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 9 \times 1 = 9$$
>
> 因此，给出的 3x3 矩阵的行列式为：
>
> $$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 8 \\ 3c & 3d & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$
>
> 这里我们使用了原始 2x2 矩阵的行列式等于 1 的事实，并考虑到将矩阵每个元素乘以 3，即可得到最终结果。

10. **3**
11. **0**

> 当第二行被替换后，如果第二行和第三行的数值完全相同，则根据行列式的性质，如果一个行列式中有两行完全相同，则该行列式的值为零。
>
> 这个性质可以用来简化我们之前的表达式。假设替换后的矩阵 $\widetilde{D}$ 的第二行和第三行完全相同，那么：
>
> $\widetilde{D} = 0$
>
> 因此，对于题目中的要求：
> $-A_{21} + 3A_{22} + A_{23} + 3A_{24}$
>
> 我们可以考虑这样一个事实：因为 $D = 0$，并且这个表达式实际上是对行列式 D 按第二行的线性组合展开（由于第二行和第三行相同），因此展开后的结果也必定为零。这是因为行列式展开的本质是线性组合，而当两行相同时，行列式的值必然为零。
>
> 所以，计算结果为：
> $-A_{21} + 3A_{22} + A_{23} + 3A_{24} = 0$

12. **0**
13. **-7**

选择题

1. **D**

> 给定的行列式是一个 n×n 阶行列式，它是一个反对角线行列式（anti-diagonal matrix），其非零元素从右上角到左下角排列。具体来说，它的元素 $a_{1,n} = n, a_{2,n-1} = n-1, \ldots, a_{n,1} = 1$，其他位置的元素都是 0。
>
> 计算这种行列式的值可以通过多种方式，其中一个简单方法是对这个矩阵进行行交换，使其变为一个更常见的上三角或下三角矩阵。每次交换行会改变行列式的符号（即每次行交换，行列式的符号乘以 -1）。
>
> 为了将这个行列式转换为一个上三角行列式，我们需要执行若干行交换。具体来说，需要交换的次数等于从1到 $n-1$ 的整数之和，即需要把第一行交换到最后一行，第二行交换到倒数第二行，依此类推。
>
> 行交换次数为：
>
> $\text{交换次数} = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$
>
> 这是等差数列求和公式。因此，行列式的符号改变为 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。
>
> 最后，由于反对角线行列式变成了上三角行列式，其对角线元素就是原来的反对角线元素，因此行列式的值为这些元素的乘积：
>
> $\text{行列式} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times n!$
>
> 这里，$n!$ 是 n 的阶乘，表示 n 乘以所有小于 n 的正整数的乘积。
>
> 综上所述，这个行列式的值为：
>
> $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times n!$
>
> 这个结果表明，行列式的值取决于 n 的值和 n 的奇偶性，具体通过指数 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性决定符号。

2. **-3**
3. **5**

> $f(x) = 5 * x^3 - x^2 - 8 * x + 1$

4. **-12**

综合题

1. $[(a-2b)+bn]\times(a-2b)^{n-1}$

> ## 分解矩阵
>
> 对于矩阵 A 的每个对角线元素是 $a-b$，而每个非对角线元素是 b，我们可以将 A 写成：
>
> $A=(a-b)I+bJ-bI=(a-2b)I+bJ$
>
> 这里 $(a-2b)I$ 是对角矩阵，对角线上的每个元素都是 $a-2b$，而 bJ 是全一矩阵的每个元素乘以 b。
>
> ## 特征值分析
>
> 全一矩阵 J 的特征值有一个是 n（矩阵大小为 $n\times n$），其余 $n-1$ 个特征值为 0。基于此，对于矩阵 A，我们可以求得特征值：
>
> - 对于 bJ，特征值是 bn（对应全一矩阵的特征值 n 乘以 b）和 $n-1$ 个 0。
> - 所以 A 的特征值可以写作 $(a-2b)+bn$ 和 $n-1$ 个 $(a-2b)$。
>
> ## 行列式计算
>
> 现在我们有了特征值，可以计算矩阵 A 的行列式：
>
> $\det(A)=[(a-2b)+bn]\times(a-2b)^{n-1}$
>
> 这是由一个特征值 $(a-2b)+bn=a+(n-1)b$ 和其余 $n-1$ 个特征值 $a-2b$ 的乘积。

2. $(x+3)(x-1)^3$
3. **-3**
4. **48**
5. **-243**
6. **a + b + c + d**
7. **-9**
8. **-102**
9. **-160**
10. **90**
11. **0**
12. **4**