第 9 章 多元函数微分法及其应用

9.1 多元函数的基本概念

1. 设函数 $f(x,y)=(x+y)^{x-y}$，则函数 $f(x+y,y)=$__________________.

2. 设 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2+\varphi(x+y)$， $f(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$______________.

3. 函数 $z=\ln\left(y^2-2x+1\right)$ 的定义域为______________.

4. 函数 $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ 的定义域为______________.

5. 函数 $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}$ 的定义域为______________.

6. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to2}}\dfrac{x+y}{xy}=$（　　　）.

A. A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{3}{2}$　　C. 1　　D. $\ln 2$

7.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=$（　　　）.

A. -1　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $-\dfrac{3}{2}$

8.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=$（　　　）.

A. $-\ln 2$　　B. 1　　C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

9.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$（　　　）.

A. $\ln 2$　　B. $\dfrac{3}{2}$　　C. 0　　D. $-\dfrac{1}{4}$

10.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to2\\y\to0}}\dfrac{\tan(xy)}{y}=$（　　　）.

A. 2　　B. -1　　C. $-\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

11. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$（　　　）.

A. 0　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　C. 2　　D. -1

12. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(xy)}{x^2y}=$（　　　　）.

A. 0　　　　B. $-\dfrac{1}{4}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. -1

9.2 偏导数

1. 已知理想气体的状态方程 $pV=RT$ （R 为常数），求 $\dfrac{\partial p}{\partial V}=$（　　　　）.

A. $-\dfrac{RT}{V^2}$　　　　B. $\dfrac{R}{p}$　　　　C. $\dfrac{V}{R}$　　　　D. -1

2. 函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________________ .

3. 函数 $z=x^2+3xy+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________________ .

4.函数 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，则 $f_x(x,1)=$________________.

5. 设 $z=x^y\ (x>0,x\neq 1)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

6. 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

7. 设 $u=x\ln(xy)$，求二阶偏导数.

9.3 全微分

1. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分是 $f(x,y)$ 在该点连续的（　　　）条件.

A.必要　　B. 充分　　C. 充要　　D. 无关

2. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的（　　　）条件.

A.必要　　B. 充分　　C. 充要　　D. 无关

3. 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 存在且连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的（　　　）条件.

A.必要　　B. 充分　　C. 充要　　D. 无关

4. 函数 $z=\dfrac{y}{x}$，当 $x=2$， $y=1$， $\mathrm{d}x=0.1$， $\mathrm{d}y=-0.2$ 时的全微分 $\mathrm{d}z=$________________.

5. 函数 $z=\dfrac{y}{x}$，当 $x=2$， $y=1$， $\mathrm{d}x=0.1$， $\mathrm{d}y=-0.2$ 时的全增量 $\Delta z=$________________.

6. 函数 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{(2,1)}=$____________________________.

7. 函数 $z=x^2+3xy^2$ 的全微分 $\mathrm{d}z=$____________________________.

8. 函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+\mathrm{e}^{yz}$ 的全微分 $\mathrm{d}u=$____________________________.

9. $(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$ 为某一函数 $f(x,y)$ 的全微分，则 a 和 b 的值分别是（　　　）.

A.-2 和 2　　B. 2 和-2　　C. -3 和 3　　D. 3 和-3

9.4 多元复合函数的求导法则

1. 设 $z=\mathrm{e}^{x-2y}$，而 $x=\sin t$， $y=t^3$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

2. 设 $z=\arcsin(x-y)$，而 $x=3t$， $y=4t^3$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

3. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$， $v=x-y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

4. 设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$， $v=x-y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

5. 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，而 $u=xy$， $v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

6. 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v$，而 $u=xy$， $v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $z=uv+sin\,t$，而 $u=\mathrm{e}^t$， $v=\cos t$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

8. 设 $z=\arctan\left(xy\right)$，而 $y=e^x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

9.5 隐函数的求导公式

1. 已知方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内能唯一确定一个单值可导且 $x=0$ 时 $y=1$ 的隐函数 $y=f(x)$，求这函数的一阶导数在 $x=0$ 的值 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

2. 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3. 已知 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

5. 设 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

6. 设 $e^{z}-xyz=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

7. 设 $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

9.6 多元函数微分学的几何应用

1. 曲线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \\ z=4\sin\dfrac{t}{2} \end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 处的切线方程是（　　）.

A. $\dfrac{x-\dfrac{\pi}{2}+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$　　B. $x+y+\sqrt{2}z-\dfrac{\pi}{2}-4=0$

C. $\dfrac{x-1}{\dfrac{\pi}{2}-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$　　D. $x+y+\sqrt{2}z-4=0$

2. 曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线方程为（　　　）.

A. $x+2y+3z-6=0$　　　B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$　　　D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$

3. 曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的法平面方程为（　　　）.

A. $x+2y+3z-6=0$　　　B. $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+1}{3}$

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}$　　　D. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$

4. 曲面 $xyz=6$ 在点 $(1,2,3)$ 处的切平面方程是（　　　）.

A. $6x+3y-2y+1=0$　　　B. $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{2}$

C. $6x+3y+2z-18=0$　　　D. $\dfrac{x-6}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

5. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程是（　　　）.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$　　　B. $x+2y+z-4=0$

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{0}$　　　D. $x+2y-4=0$

6. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程是（　　　）.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$　　　B. $x+2y+z-4=0$

C. $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{0}$　　　D. $x+2y-4=0$

7. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处切平面的一般方程为（　　　）.

A. $4(x-2)+2(y-1)+(z-4)=0$　　　B. $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$

C. $4x+2y-z-6=0$　　　D. $2x+y+4z-6=0$

8. 旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处法线方程为（　　　）.

A. $4(x-2)+2(y-1)+(z-4)=0$　　　B. $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$

C. $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$　　　D. $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{4}$

9.7 方向导数与梯度

1. 函数 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 方向的方向导数为（　　　）.

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{3}+1$　　D. $4\sqrt{3}+2$

2. 函数 $z=xe^{xy}$ 在点 $(-3,0)$ 处沿从点 $(-3,0)$ 到点 $(-1,3)$ 方向的方向导数为（　　）.

A. 1　　B. 9　　C. $\frac{29}{\sqrt{13}}$　　D. 29

3. 函数 $u=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角分别为 60^0、60^0、60^0 方向的方向导数为（　　）.

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. $\frac{98}{13}$

4. 函数 $u=xyz$ 在点 $(5,1,2)$ 处沿 $\vec{l}=(4,3,12)$ 的方向导数为（　　）.

A. 2　　B. 10　　C. 5　　D. $\frac{98}{13}$

5. 某金属板上的电压分布为 $V=50-2x^2-4y^2$，在点 $(1,-2)$ 处沿 $\vec{l}$ 方向电压生得最快，则 $\vec{l}=$（　　）.

A. $-4\vec{i}+16\vec{j}$　　B. $-2\vec{i}+4\vec{j}$　　C. $4\vec{i}-16\vec{j}$　　D. $2\vec{i}-4\vec{j}$

6. 设 $f(x,y)=x^3y-\sin x$，则在点 $(0,1)$ 处的梯度 $\mathrm{grad}\, f(0,1)=$（　　）.

A. $(0,0)$　　B. $(3,1)$　　C. $(0,1)$　　D. $(-1,0)$

7. 函数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3$ 在点 $(2,1)$ 处的最大方向导数为____________ .

8. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $gradf(0,0,0)=$____________.

9.8 多元函数的极值及其求法

1. 函数 $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$ 的驻点为（　　）.

A. $(0,0)$　　B. $(3,1)$　　C. $(2,2)$　　D. $(2,-2)$

2. 函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极小值点为（　　）.

A. $(1,0)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-3,0)$　　D. $(-3,2)$

3. 函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点为（　　）.

A. $(1,0)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-3,0)$　　D. $(-3,2)$

4. 函数 $z=x^3+y^3-3xy$ 的极小值为（　　）.

A. 0　　B. -1　　C. -3　　D. -5

5. 函数 $z=4xy-x^4-y^4$ 的极大值为（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6. 求函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$ 的极值.

7. 函数 $f(x,y)=\left(x^2-1\right)^2+y^2$ 的极值.

8. 某工厂要制一个体积 $2\,\mathrm{m}^3$ 的有盖的长方体水箱，问长、宽、高各取多少尺寸，可使用料最省？最省为多少？

9. 求半径为 R 的球内接长方体的最大体积.

10. 在直线 $x+y=2$ 上求一点，使得该点到原点的距离最短.

11.从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

12. 求过点$(2,3,6)$的平面π，其在三个坐标轴上的截距都是正数，且与三个坐标面所围成四面体的体积为最小，并求最小四面体的体积.

13. 设生产某种产品的数量与所用两种原料 A、B 的数量x、y间有关系式$P(x,y)=0.005x^2y$. 欲用 150 元购料，已知 A、B 原料的单价分别为 1 元、2 元，问购进两种原料各多少，可使生产的产品数量最多？