第 2 章导数与微分

2.1 导数概念

1. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的（　　　）条件.

A. 充分不必要　B. 必要不充分　C. 充要　D. 既不充分也不必要

2. $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的（　　　）条件.

A. 充分不必要　B. 必要不充分　C. 充要　D. 既不充分也不必要

3. 设 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}=$（　　　）.

A. $f'(x_0)$　B. $3f'(x_0)$　C. $-3f'(x_0)$　D. 3

4. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处可导，则 $f'(x)=$（　　　）.

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$　B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{2\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$　D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{\Delta x}$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, x\le 1\\ x^2,\quad x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处（　　　）.

A. 左、右导数都存在　B. 左导数存在，但右导数不存在

C. 左导数不存在，但右导数存在　D. 左.右导数都不存在

6. 已知 $f'(x_0)=3$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$____________________.

7. 已知 $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$____________________.

8. 曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程为____________________.

9. 曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线方程为____________________.

10. 曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 在点 $(4,8)$ 处的切线方程为______________________.

11. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处的法线方程为______________________.

12. 曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的法线方程为______________________.

13. 曲线 $y=2\sin x+x^2$ 上横坐标为 $x=0$ 的点处的法线方程为________________.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$，求 $f'(x)$.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a、b 应取什么值？

2.2 函数的求导法则

1. 设 $y=2^{-x}$，则 $y'=$（　　　）.

A. 2^{-x}　　B. -2^{-x}　　C. $-2^{-x}\ln 2$　　D. $2^{-x}\ln 2$

2. 设 $y=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $y'=$________.

3. 设 $y=\sin^2 x$，则 $y'=$________.

4. 设 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，则 $y'=$________.

5. 设 $y=(\arcsin x)^2$，则 $y'=$________.

6. 设 $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$，则 $y'=$________.

7. 设 $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，则 $y'=$________.

8. 已知物体的运动规律为 $s=t^3\left(\mathrm{m}\right)$，则该物体在 $t=2\left(\mathrm{s}\right)$ 时的加速度 $a=$______ $\mathrm{m/s^2}$.

9. 设 $y=\mathrm{e}^{x^4}$，则 $y'=$________.

10. 设 $y=x^2\ln x$，则 $y'=$________.

11. 设 $y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}+\ln 5$，则 $y'=$________.

12. 设 $y=\cos\left(4-3x^2\right)$，则 $y'=$________.

13. 设 $y=\arcsin\sqrt{x}$，则 $y'=$________.

14. 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$，则 $y'=$________.

15. 设 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $y'=$________.

2.3 高阶导数

1. 函数 $y=2x^2+\ln x$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

2. 函数 $y=\mathrm{e}^{2x-1}$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

3. 函数 $y=\tan x$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

4. 函数 $y=x\cos x$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

5. 函数 $y=\ln\left(1+x^2\right)$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

6. 函数 $\boldsymbol{y=xe^x}$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

7. 函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 的二阶导数 $y''=$____________________.

8. 求函数 $y=a^x$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}=$____________________.

9. 函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}=$____________________.

10. 函数 $y=\sin x$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}=$____________________.

2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

1. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y^2-2xy+9=0$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

3. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

4. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=\sin(xy)$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

5. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $x-y-\mathrm{e}^y=0$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

6. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $y=1-x\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

7. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+1=\mathrm{e}^{x+y}$ 所确定的隐函数，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

8. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $xy^2+\mathrm{e}^y=\cos(x+y^2)$ 所确定的隐函数，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

9. 设函数 $y=y(x)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 所确定的隐函数，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

10. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ 在 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 处的切线及法线方程.

11. 计算由参数方程 $\begin{cases}x=at^2\\y=bt^3\end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

12. 计算由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\cos t\\y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ 确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

13. 计算由参数方程 $\begin{cases}x=1+\mathrm{e}^t\\y=t+\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

14. 计算由参数方程 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\sin t\\y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

15. 计算由参数方程$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2} \\ y=1-t \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

16. 求由参数方程$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

17. 求由参数方程$\begin{cases} x=3\mathrm{e}^{-t} \\ y=2\mathrm{e}^{t} \end{cases}$所确定的函数$y=y(x)$的导数$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

18. 求曲线$\begin{cases} x=2\mathrm{e}^{t} \\ y=\mathrm{e}^{-t} \end{cases}$在$t=0$相应的点处的切线方程及法线方程.

19. 求曲线$\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$在$t=2$相应的点处的切线方程及法线方程.

20. 求曲线$\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$在$\boldsymbol{t}=\dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$相应的点处的切线方程及法线方程.

2.5 函数的微分

1. 设 $y = \mathrm{e}^{x^3}$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

2. 设函数 $y = \tan 3x$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

3. 函数 $y = x\sin 2x$ 的微分 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

4. 设 $y = \ln\sin x$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

5. 设 $y = \mathrm{e}^x \cos x$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

6. 函数 $y = \ln\ln x$ 则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

7. 设 $y = \ln^2(1-x)$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

8. 设函数 $y = x^2\mathrm{e}^{2x}$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

9. 设函数 $y = \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.

10. 设函数 $y = \arcsin\sqrt{1-x}$，则 $\mathrm{d}y =$ ____________________.