

第三章 矩阵的初等变换与线性方程组

一、填空题

1、设 A 与 B 均为 3×4 矩阵, 且 A 与 B 等价, 若 $R(A)=3$, 则 $R(B)=$ _____.

2、若 A 为 4×3 矩阵, $R(A)=2$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $R(AB)=$ _____.

3、已知 $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (1 \quad 2 \quad -3)$, 则 $R(AB)=$ _____.

4、若 A 为 4×3 矩阵, 且 A 有一个三阶子式不等于零, 则 $R(A)=$ _____.

5、如果 x_1, x_2 都是方程 $A_{n \times n} x = 0$ 的解, 且 $x_1 \neq x_2$, 则 $|A_{n \times n}| =$ _____.

6、若方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ 有非零解, 则 $\lambda =$ _____.

7、 n 元线性方程组 $Ax=b$ 无解的充分必要条件是 $R(A)$ _____ $R(A, b)$.

8、非齐次线性方程组 $Ax=b$ 有解, 且增广矩阵 $B=(A|b)$ 的秩为 3, 则系数矩阵的秩为_____.

二、选择题

1、设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有_____.

(A) 当 $|A|=a(a \neq 0)$ 时, $|B|=a$ (B) 当 $|A|=a(a \neq 0)$ 时, $|B|=-a$

(C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B|=0$ (D) 当 $|A|=0$ 时, $|B|=0$

2、设 A, B 均为 n 阶方阵, 则下列命题中正确的是_____.

(A) 若 $|A|=|B|$, 则 $A=B$ (B) 若 A 与 B 等价, 则 $R(A)=R(B)$

(C) 若 $|A|=0$, 则 A 为零矩阵 (D) 若 A 与 B 等价, 则 $|A|=|B|$

3、设 A 是 $m \times n$ 阶矩阵, A 的秩 $R(A)=r$, 则 A 中_____.

(A) 至少有一个 r 阶子式不等于 0

(B) 所有 r 阶子式都不等于 0

(C) 所有 $r-1$ 阶子式都不等于 0

(D) 有一个 $r+1$ 阶子式等于 0, 其余 $r+1$ 阶子式可能不等于 0

4、设矩阵 A 的秩为 r , 则 A 中_____.

- (A) 所有 $r-1$ 阶子式都不为 0 (B) 所有 $r-1$ 阶子式都为 0
(C) 至少有一个 r 阶子式不等于 0 (D) 所有 r 阶子式都不为 0

5、设 A 为 3 阶方阵, $R(A)=1$, 则_____.

- (A) $R(A^*)=3$ (B) $R(A^*)=2$ (C) $R(A^*)=1$ (D) $R(A^*)=0$

6、矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ 的秩为 3, 则_____.

- (A) a, b, c 都不为 1 (B) a, b, c 都不为 0 (C) a, b, c 互不相等 (D) $a=b=c$

7、设 A 为 4×3 的矩阵, B 为三阶可逆矩阵, 且 $R(A)=3$, 则矩阵 AB 的秩为_____.

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

8、设 n 阶方阵 A 不可逆, 则必有_____.

- (A) $R(A) < n$ (B) $R(A) = n-1$ (C) $A=O$ (D) 方程组 $Ax=0$ 只有零解

9、设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 则_____.

- (A) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (B) 当 $m > n$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$
(C) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| \neq 0$ (D) 当 $n > m$ 时, 必有行列式 $|AB| = 0$

10、设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的增广矩阵 $B=(A|b)$ 为 m 阶方阵, 且 B 的行列式不为零, 则该方程组_____.

- (A) 无解 (B) 有唯一解 (C) 有无穷多解 (D) 解的情况无法确定

11、设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充要条件是_____.

- (A) $R(A)=n$ (B) $R(A)=R(A,b)=n$
(C) $R(A)=R(A,b)$ (D) $R(A)=R(A,b) < n$

12、设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的导出组为 $Ax=0$, 如果 $m < n$ 则_____.

- (A) $Ax=b$ 必有无穷多解 (B) $Ax=b$ 必有唯一解
(C) $Ax=0$ 必有非零解 (D) $Ax=0$ 必有唯一解

13、 n 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 无解的充要条件是_____.

- (A) $R(A)=R(A,b)=n$ (B) $R(A)=R(A,b) < n$
(C) $R(A) < R(A,b)$ (D) $R(A) < n$

三、解答题

1、求三阶方阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

2、利用初等变换法求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

3、用初等变换求 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

4、设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使得 $AX = B$.

5、求矩阵 X , 使其满足 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 90 \\ 43 \\ 19 \end{pmatrix}$.

6、设矩阵 A, B, X 满足 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X .

7、求矩阵 X , 使其满足 $AX = B$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8、求解矩阵方程 $AX = A + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9、求解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

10、求非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -5 \\ 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 13 \\ 4x_1 - x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$ 的通解.

11、求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 1 \end{cases}$ 的通解.

12、求方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases}$ 的通解.

13、求解非齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$.