第 1 章 函数与极限

1.1 映射与函数

1. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{9-x^{2}}}{\lg\left(x+2\right)}$ 的定义域为_____________.

2. 函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}-x-6}+\cos\left(x+1\right)$ 的定义域为_____________.

3. 函数 $f\left(x\right)=\arccos\dfrac{x}{3}+\left(x-1\right)^{-1}$ 的定义域为_____________.

4. 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1,-4\le x<2\\ x^{2}-1,\quad 2<x\le 3\end{cases}$ 的定义域为_____________.

5. 设函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[0,2\right)$，则函数 $f\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+f\left(7-x\right)$ 的定义域为_________________.

6. 与 $y=\mathrm{e}^{x}$ 是同一函数的是（　　）

   A. $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^{2}}}$　　B. $y=\mathrm{e}^{\left(\sqrt{x}\right)^{2}}$　　C. $y=\mathrm{e}^{\left(\sqrt[3]{x}\right)^{3}}$　　D. $y=\mathrm{e}^{|x|}$

7. 函数 $f\left(x\right)=\sqrt{x^{2}}$ 与 $g\left(x\right)=x$ 相同时，x 的取值范围是（　　）

   A. $\mathbb{R}$　　B. $x\ge 1$　　C. $x\ge 0$　　D. $x\le 0$

8. 下列各组函数是同一函数的为（　　）

   A. $f\left(x\right)=\ln x^{2}$ 与 $g\left(x\right)=2\ln x$

   B. $f\left(x\right)=\cos x$ 与 $g\left(x\right)=\sqrt{1-\sin^{2}x}$

   C. $f\left(x\right)=\ln\left(\sqrt{1+x^{2}}-x\right)$ 与 $g\left(x\right)=-\ln\left(\sqrt{1+x^{2}}+x\right)$

   D. $f\left(x\right)=x-1$ 与 $g\left(x\right)=\dfrac{x\left(x-1\right)}{x}$

9. 若 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^{3}+x}{x^{4}+1}$，则 $f\left(x\right)=$_________________.

10. 设 $f\left(x\right)=\begin{cases}1,|x|\le 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$，则 $f\left\{f\left[f\left(x\right)\right]\right\}=$（　　）.

   A. 0　　B. 1　　C. $\begin{cases}1,|x|\le 1\\ 0,|x|>1\end{cases}$　　D. $\begin{cases}0,|x|\le 1\\ 1,|x|>1\end{cases}$

11. 函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\arcsin\left(2x-1\right)}$ 的值域为（　　）

A. $\left[0,\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$　　B. $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$　　C. $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$　　D. $\left[0,+\infty\right)$

12. 函数 $f\left(x\right)=x^3+2$ 的反函数为 $g\left(x\right)$，则 $g\left(29\right)=$（　　）

A. 2　　B. -1　　C. 3　　D. -3

13. 若函数 $f\left(x\right)=\frac{x+a}{x+b}$ 的反函数 $f^{-1}\left(x\right)=\frac{x+a}{x+b}$，则 a 为________，b 为________.

14. 若 $f\left(x\right)$ 为奇函数，当 $x\geq 0$ 时，$f\left(x\right)=1-\left|x-1\right|$，则当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)=$________.

15. 函数 $f\left(x\right)=\ln\frac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性为____________.

16. 函数 $y=3^x$ 与 $y=\log_3 x$ 的图像关于（　　）对称.

A. x 轴　　B. y 轴　　C. 直线 $y=x$　　D. 原点

17. 周期函数 $f\left(x\right)=\left|\cos x\right|+\left|\sin x\right|$ 的最小正周期是（　　）.

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. π　　D. 2π

18. 若对一切实数 x，都有 $f\left(x\right)=-f\left(x+5\right)$，则曲线 $y=f\left(x\right)$（　　）.

A. 关于直线 $x=\frac{5}{2}$ 对称

B. 关于点 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 对称

C. 向左（或右）平移10个单位，与原曲线相重合

D. 以上都不对

1.4 无穷大与无穷小

1. 当 $x \to 0$ 时，下列变量为无穷小量的是（　　）.

A. $y=\frac{1}{x^2}$　　B. $y=\frac{x}{\sin x}$　　C. $y=\tan x$　　D. $y=\ln(x+\mathrm{e})$

2. 下列四种趋势下，函数 $y=\frac{1}{x^3-1}$ 为无穷大的是（　　）.

A. $x \to 0$　　B. $x \to 1$　　C. $x \to -1$　　D. $x \to +\infty$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 0, \quad x=0\end{cases}$，则当 $x \to 0$ 时 $f(x)$（　　）

A. 为无穷小　　B. 为无穷大

C. 既不是无穷大，也不是无穷小　　D. 极限均在但不是0

4. 当 $x \to \infty$ 时，$\frac{\pi}{2}-\arctan x$ 是（　　）.

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 有界变量　　D. 无界变量

5. 当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）.

A. 无穷大量　　B. 无穷小量　　C. 有界变量　　D. 无界变量

1.5 极限运算法则

1. 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则下列极限等式正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$　　B. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)+g(x)}=\infty$　　D. $\lim\limits_{x\to x_0}bf(x)=0$（$b$ 为非零常数）

2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=$（　　）.

A. 0　　B. 3　　C. 6　　D. 9

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 2　　D. 1

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=$（　　）.

A. $\frac{3}{7}$　　B. 0　　C. ∞　　D. $-\frac{2}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-x^2+5}{3x^2-2x-1}=$（　　）.

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. 0　　C. ∞　　D. -5

6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. 2

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x-1}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. 2

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2-1}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. 2

9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. $\dfrac{2}{3}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-1}\right)=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-3n^2+4n+3}{2(n+6)^3}=$（　　）.

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2 x-2\cos x-1}{2\cos^2 x+\cos x-1}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)=$（　　）.

A. -2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

15. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

16. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin x+\cos x)\cdot\dfrac{x}{x^2+2x}$.

17. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2024x^{2023}+2023x^{100}+2024}{2023x^{2023}+2024x^{1000}+2023}$.

18. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值.

19. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{ax^2+bx+1}\right)=2$，求 a,b.

1.6 极限存在准则 两个重要极限

1. 下列极限正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\left(x^2\right)}{x^3}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan 3x}{2x}=$（　　）.

A. 1　　B. 3　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=$（　　）.

A. 1　　B. 3　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sin 2x}{x}\right)=$（　　）.

A. ∞　　B. 2　　C. 1　　D. 0

6. 下列极限正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{x}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}=1$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}=-\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$（　　）.

A. e　　B. e^{-1}　　C. 1　　D. 0

8. $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=$（　　）.

A. e^2　　B. e　　C. 1　　D. 0

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=$（　　）.

A. e^2　　B. e　　C. 1　　D. 0

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x+2c}\right)^{x}=4$，则$c=$（　　）.

A. 2　　B. 1　　C. $\ln 4$　　D. $-\ln 4$

11. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{kn}=\mathrm{e}^{-3}$，则$k=$（　　）.

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{3}{2}$　　D. $-\frac{2}{3}$

12. 设数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$满足$a_n\le b_n\le c_n$，下列命题不正确的是（　　）.

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$ （a是实数），则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$

B. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$

C. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=-\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$

D. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$

13. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

14. 设$0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\,(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

1.7 无穷小的比较

1. 当 $x \to 0$ 时与 x 等价的无穷小是（　　）

A. $\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$　　B. $\dfrac{\ln(1+2x)}{2}$　　C. $2\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)$　　D. $x^2(x+1)$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=$（　　）.

A. 1　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $-\dfrac{2}{3}$　　D. 0

4. 当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1+2n^2+3n^3}{1+n^4}$ 是 $\dfrac{1-2n^2+3n^3}{1-n^5}$ 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶但不等价无穷小　　C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=$（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 0

6. 设 $x\neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\tan\dfrac{x}{2^n}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. x　　D. ∞

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}\sin x\right)=$（　　）.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 3

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{\sin 2x}=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. ∞　　D. 2

9. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 1　　D. $\sqrt{2}$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^p}=\dfrac{1}{2}$，则常数 $p=$（　　）.

A. -2　　B. 2　　C. -3　　D. 3

11. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{ax^2+b}\sim\dfrac{1}{x^2+1}$，则（　　）

A. $a=0,b=0$　　B. $a=-1,b=0$　　C. $a=1,b=-1$　　D. $a=1,b$ 可取任意实数

12. 当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim ax^n$，则 $a=$__________，$n=$__________.

13. 当 $x \to 0$ 时，$\arcsin x^2$ 是 $1-\sqrt{1-2x}$ 的（　　）

A. 高阶无穷小　　B. 低阶无穷小　　C. 同阶但非等价无穷小　　D. 等价无穷小

14. 当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小的阶数从低到高的正确排列是（　　）

A. $e^{\sqrt{x}}-1,\ \tan(\sin x),\ \ln(1+x^2),\ 1-\cos x^2$

B. $\tan(\sin x),\ e^{\sqrt{x}}-1,\ \ln(1+x^2),\ 1-\cos x^2$

C. $\ln(1+x^2),\ \tan(\sin x),\ 1-\cos x^2,\ e^{\sqrt{x}}-1$

D. $\ln(1+x^2),\ 1-\cos x^2,\ e^{\sqrt{x}}-1,\ \tan(\sin x)$

1.8 函数的连续性与间断点

1. $x=\dfrac{\pi}{2}$ 是函数 $y=\tan x$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

2. $x=0$ 是函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3. $x=1$ 是函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

4. $x=1$ 是函数 $y=\begin{cases} x-1, x\le 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

5. $x=1$ 是函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 的（　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

6. 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x-1}}, x\neq 1\\ 0, \quad x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处（　　　）.

A. 连续　　B. 左连续　　C. 右连续　　D. 左右都不连续

7. $x=0$ 是函数 $f\left(x\right)=x\cos\dfrac{1}{x}+x^2$ 的（　　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

8. $x=1$ 是函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的（　　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

9. $x=0$ 是函数 $y=\begin{cases}x-1, x<0\\ 0, \quad x=0\\ x+1, x>0\end{cases}$ 的（　　　）.

A. 跳跃间断点　　B. 可去间断点　　C. 无穷间断点　　D. 振荡间断点

10. 设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\ln\left|x\right|}$，当 $x=0$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的__________间断点；当 $x=1$ 是函数 $f\left(x\right)$ 的__________间断点.（填“可去”、“跳跃”或“第二类”）

11. 函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+1, x\leq 1\\ 2+x, x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处间断是由于（　　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)$ 不存在　　B. $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)$ 不存在

C. $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处无定义　　D. $\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)$

12. $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-8}{x-2}, x\neq 2\\ 2a, \quad x=2\end{cases}$ 为连续函数，则 $a=$（　　　）.

A. 0　　B. 3　　C. 6　　D. 12

13. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x}, x>0\\ 0, \quad x\leq 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 k 的取值范围是（　　　）.

A. $k>0$　　B. $k\leq 0$　　C. $k<1$　　D. $k\geq 0$

14. 已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}, x>0\\ B, \qquad x=0\\ \dfrac{A\sin 3x}{x}, x<0\end{cases}$，问 A,B 取何值时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 连续.

15. 设 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}\ln\left(1-x\right)$，要使 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处连续，则需补充定义 $f\left(0\right)=$（　　）.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

16. 设函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f\left(x\right)-1}{x-2}$ 存在，则 $f\left(2\right)=$__________.

17. 若 $f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(x\right)-2}{x-1}=1$，则 $f\left(1\right)=$（　　）.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

18. 已知函数 $f\left(x\right)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left[xf\left(x\right)\right]}{\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)f\left(x\right)}=1$，则 $f\left(0\right)=$（　　）.

A. 0　　B. -1　　C. 1　　D. 2

19. $f\left(x\right)=m\left|x+1\right|+n\left|x-1\right|$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上（　　）.

A. 连续

B. 仅有两个间断点 $x=\pm 1$，它们都是可去间断点

C. 仅有两个间断点 $x=\pm 1$，它们都是跳跃间断点

D. 以上都不对，其连续性与常数 m,n 有关

20. $f\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, x\neq 0\\ a,\ x=0\end{cases}$，则（　　）.

A. 当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 点左连续　　B. 当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 点左连续

C. 当 $a=0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 点右连续　　D. 当 $a=1$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 点右连续

1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性

1. 当 $x \to 0$ 时，下列结论正确的是（　　）.

A. $\ln\left(1-2x^2\right) \sim x^2$　　B. $\sqrt{1+2x}-1 \sim 2x$

C. $1-e^{2x} \sim 2x$　　D. $\ln\left(1+\arcsin x\right) \sim x$

2. 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小是（　　）.

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

3. 当 $x \to 0$ 时，$x^2+2\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ 是 x 的（　　）.

A. 高阶无穷小　　B. 同阶但不等价无穷小　　C. 低阶无穷小　　D. 等价无穷小

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\arctan x}=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 1　　D. 2

5. 若 $x \to 0$ 时，$\left(1-ax^2\right)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$（　　）.

A. -2　　B. 2　　C. -4　　D. 4

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

7. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=$（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. e　　D. e^{-1}

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin x}-1\right)}=$（　　）.

A. 0　　B. -3　　C. 3　　D. 6

9. 计算极限：$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\sqrt{1+\arcsin^2\dfrac{x}{2}}$.

10. 计算极限：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\ln\left(1+x^2\right)}}$.

11. 讨论函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x^{2}}-1}{x^{2}}, x<0\\ \dfrac{1}{2}, \quad x=0\\ \dfrac{1}{x}\arctan\dfrac{x}{2},\ x>0\end{cases}$ 在其定义域内的连续性.

12. 讨论函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+4}, \quad x\geq 0\\ \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x}, x<0\end{cases}$ 在其定义域内的连续性.

1.10 闭区间上连续函数的性质

1. $f\left(a\right)\cdot f\left(b\right)<0$ 是方程 $f\left(x\right)=0$ 在 $\left(a,b\right)$ 有解的（　　）.

A. 必要不充分条件　B. 充分不必要条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

2. 方程 $x^{5}-3x=1$ 在区间（　　）上必有实根.

A. $\left(0,1\right)$　B. $\left(1,2\right)$　C. $\left(2,3\right)$　D. $\left(3,4\right)$

3. 方程 $x^{3}-4x^{2}+1=0$ 在区间（　　）上必有实根.

A. $\left(0,1\right)$　B. $\left(1,2\right)$　C. $\left(2,3\right)$　D. $\left(4,5\right)$

4. 方程 $x^{4}+x-1=0$ 在区间（　　）上必有实根.

A. $\left(1,2\right)$　B. $\left(2,3\right)$　C. $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　D. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

5. 下列结论中正确的是（　　）.

A. 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且在 $x=a$ 与 $x=b$ 点有定义，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界

B. 函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都连续的必要条件是函数 $f(x)+g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界

C. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值

D. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

6. 求证：方程 $x^3-9x-1=0$ 恰有三个实根.

7. 求证：方程 $x^2\mathrm{e}^x=2$ 至少有一个小于1的正根.

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间上连续，且有 $f(0)=f(4)\neq f(2)$. 求证：在区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=f(2+\xi)$.

9. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，求证：在 $[0,a]$ 上至少存在一点 x，使得 $f(x)=f(x+a)$.

10. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<g(a),f(b)>g(b)$，证明：曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个交点.

11. 一个旅游者在早上 7 点钟离开安徽黄山下的旅馆，沿着一条上山的路在下午 7 点钟走到了黄山顶上的旅馆；第二天早上 7 点钟他从山顶沿原路下山，在下午 7 点钟回到了山下的旅馆. 试证明：在路上存在这样的一个地点，旅游者在两天里的同一个时刻经过它.