Final Project

姓名、学号

2022/06/10 截止

考虑数值求解如下的优化问题

$$\min_{u(x)\in C_0^1([0,1])}\int_0^1\left\{\frac{1}{2}\left(u'(x)\right)^2+\frac{\alpha}{4}u^4(x)-f(x)u(x)\right\}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

令$h=\frac{1}{n}, x_i=ih, i=0,\cdots,n$。记$f_i=f(x_i)$，$u_i$为$u(x_i)$的数值逼近，则$u_0=u_n=0$。对(1)采用如下的数值积分格式

$$\min_{\{u_1,\cdots,u_{n-1}\}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)^2h+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\alpha}{4}u_i^4-f_iu_i\right)h. \tag{2}$$

分别记$u_h=(u_1,\cdots,u_{n-1})^T$，$f_h=(f_1,\cdots,f_{n-1})^T$。试回答如下问题：

1. 当$\alpha=0$时，推导$u_1,\cdots,u_{n-1}$满足的线性方程组$A_hu_h=f_h$；
2. 当$f(x)=\pi^2\sin(\pi x)$，$n=10,20,40,80,160$时，分别利用Jacobi和Gauss-Seidel迭代法求解$A_hu_h=f_h$（迭代法的终止准则$\varepsilon=10^{-10}$），并比较u_h与精确解$u_e(x)=\sin(\pi x)$之间的误差$e_h=\|u_h-u_e\|_2$，记录在一张表中；
3. 假设(2)中的u_h对(1)中的$u_e(x)$的逼近误差满足$e_h=\Theta(h^\beta)$，基于上表中的数据试利用最小二乘方法找到β；
4. 对$n=10,20,40,80,160$，分别记录Jacobi和Gauss-Seidel迭代法收敛所需要的迭代次数在同一张表中，从中你能得到什么结论？
5. 当$\alpha=1$，推导$u_1,\cdots,u_{n-1}$满足的非线性方程组；
6. 当$f(x)=\pi^2\sin(\pi x)+\sin^3(\pi x)$，$n=10,20,40,80,160$时，利用牛顿迭代法求解上一小题中的非线性方程组（迭代法的终止准则$\varepsilon=10^{-8}$），并比较u_h与精确解$u_e(x)=\sin(\pi x)$之间的误差$e_h=\|u_h-u_e\|_2$，记录在一张表中，并利用最小二乘法找出该情形下算法的收敛阶。