Electrostatique

UAE / ENS - LE - MATHS

Prof : fatima Yakhlef

Rappel mathématique

Théorèmes fondamentaux

Circulation d'un vecteur:

Soit ,dans l'espace ,un champ vectoriel $\vec{E}(\vec{r})(\vec{r} = \overrightarrow{OM})$.on appelle circulation de $\vec{E}(\vec{r})$ le long de la courbe ab, la quantité :

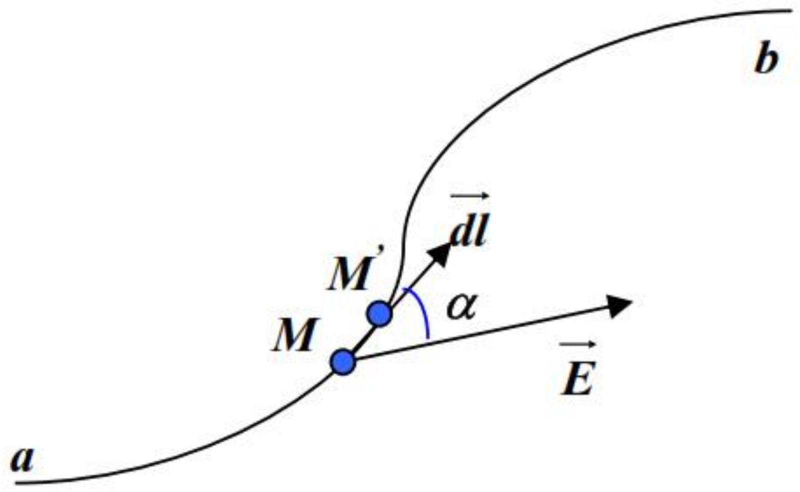
$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dl}$$

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl.\cos\alpha$$

- Si $\vec{E} \perp \vec{dl}$, $\cos\alpha = 0$ *et donc* $C(\vec{E}/ab) = 0$
- Si $\vec{E} // \vec{dl}$, $\cos\alpha = 1$ *et donc*

$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl$ si en plus ***E*** est uniforme (constant en tout point ***M*** de ***ab***) alors :

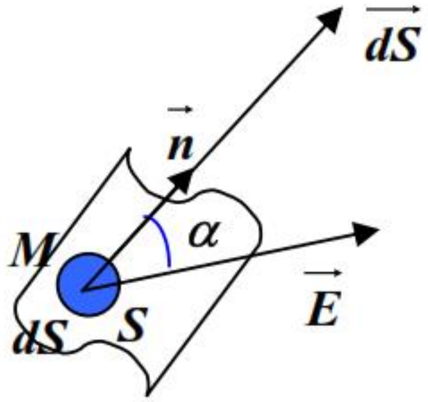
$$C(\vec{E}/ab) = E\int_{ab} dl = E.ab$$



Flux d' un vecteur à travers une surface

Par définition ,on appelle flux de $\vec{E}$ à travers la surface S , la quantité :

$$\Phi(\vec{E}|S) = \iint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$



Si $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}, cos\alpha = 0$ et $\Phi(\vec{E}|S) = 0$.

Le flux est minimal.

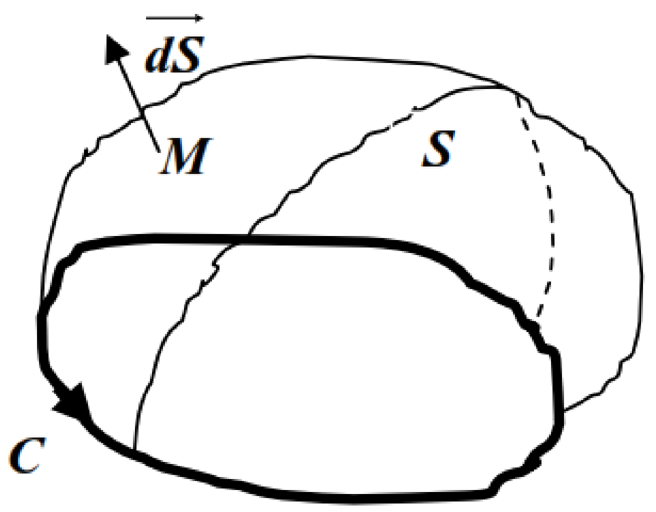
Si $\vec{E} \,//\, \overrightarrow{dS}$, $cos\alpha = 1$ et $\Phi(\vec{E}|S) = \iint_S EdS$.

En plus si E est uniforme (uniforme en tout point M de S)alors

$$\Phi(\vec{E}|S) = E \iint_S dS = E\,S\,.$$

Le flux est maximal.

Théorème de Stokes



Soit :

-Un champ de vecteurs $\vec{E}$.

-Une courbe fermée C .

-Une surface S s'appuyant sur C .

Remarque: on a orienté la courbe C ,en un point M de S , le vecteur surface $\overrightarrow{dS}$ obéira la règle du tir bouchon ou à la règle des trois doigts de la main droite.

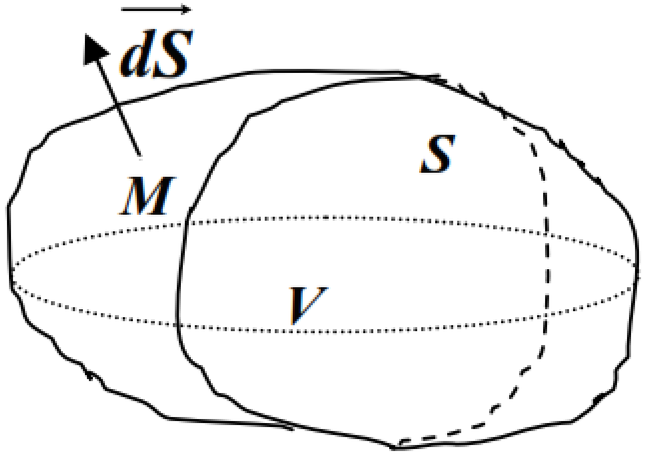
Enoncé:

La circulation de E à travers (C) est égale aux flux à travers S de son rotationnel.

$$\oint \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot\vec{E}}\,\overrightarrow{dS}$$

le symbole $\oint$ signifie que la courbe d'intégration (C) est fermée.

Théorème de Green Ostrogradski



Soit :

-Un champ de vecteurs $\vec{E}$.

-Une courbe fermée C .

-Une surface fermée S délimitant un volume V.

Remarque :

Quand la surface est fermée, on oriente $\overrightarrow{dS}$ de l'intérieur vers l'extérieur.

Enoncée : le flux de $\vec{E}$ à travers (S) est égale à l'intégrale triple de sa divergence.

$$\oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{E}.dV$$

Le symbole $\oiint_S$ signifie que la surface d'intégration(S) est fermée.

Electrostatique

Introduction

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes (champ et potentiel électrostatique) créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les forces électrostatiques sont décrites par la loi de Coulomb qui présente une certaine analogie avec l'interaction gravitationnelle.

La charge électrique

La charge électrique d’une particule est une grandeur scalaire (algébrique) qui caractérise les actions électromagnétiques subies ou exercée par la particule.

La charge électrique joue dans l’interaction électrostatique le même rôle que joue la masse (scalaire positive) dans l’interaction gravitationnelle.

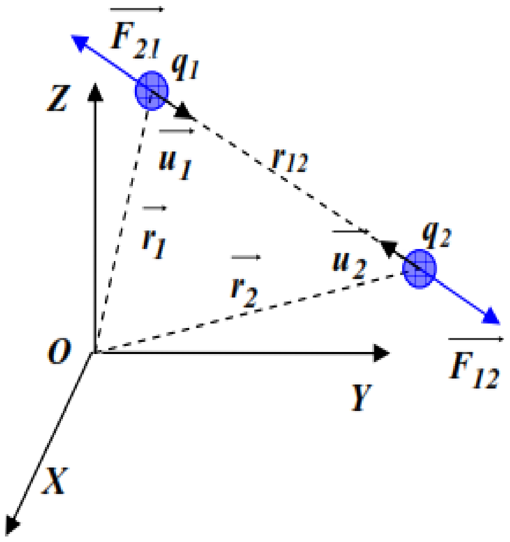
Quantification de la charge

A l’échelle microscopique, l‘expérience (Millikan, 1913), montre que la charge électrique varie de façon discontinue et se présente par unité sous forme de quantité bien déterminée. On dit qu’elle est quantifiée. Sa valeur est un multiple entier d’une charge qu’on peut prendre comme charge élémentaire, notée e. C’est la valeur absolue de la charge de l’électron $e = 1,60219\ 10^{-19}$ C.

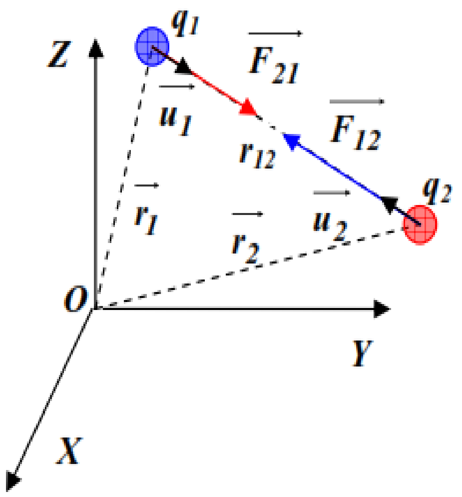
La loi de Coulomb

Soit deux charges ponctuelles immobiles q_1 et q_2. La force électrostatique existante entre les deux charges est attractive si les charges ont des signes opposés, et est répulsive si elles sont de même signe.

La force est proportionnelle au produit des charges, et inversement proportionnelle au carré de leur distance.



q_1 et q_2 de même signe



q_1 et q_2 de signe opposé

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} = -\vec{F}_{21}$$

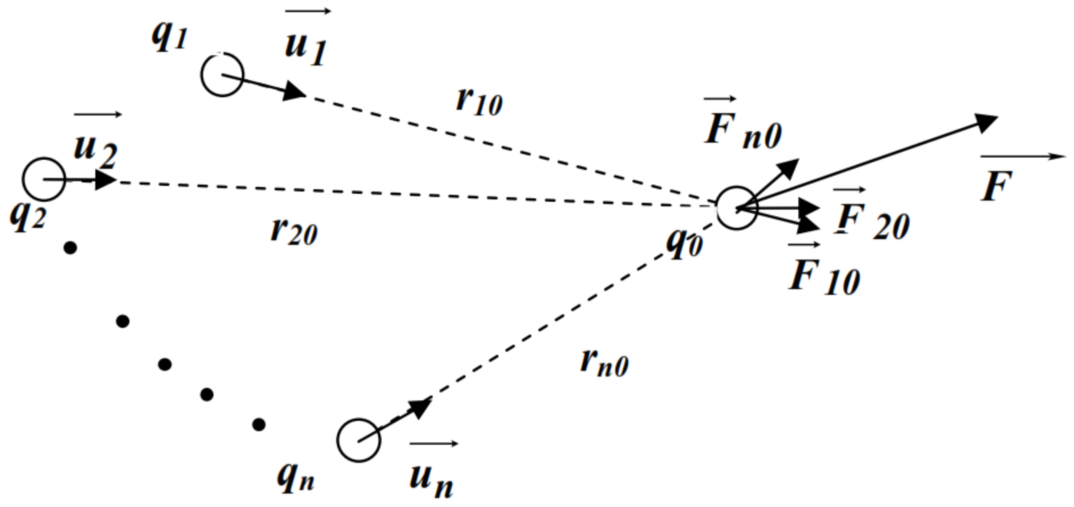
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_{12}\overrightarrow{u_1}}{r_{12}^3} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_1} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{12}^2}\overrightarrow{u_2} = -\vec{F}_{21}$$

Remarques :

- Dans l’expression précédente il faut tenir compte du signe de la charge.

- Le sens de la force électrostatique dépend du signe de la charge, alors que le sens des vecteurs unitaires u_1 *et* u_2 *est toujours le même.*

Théorème de superposition



Soit $\boldsymbol{q_0}$ une charge électrique située en un point $\boldsymbol{M}$

de l’espace et soit $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, . . ., $\boldsymbol{q}$ des charges situées aux points $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{M_2}$, …, $\boldsymbol{M}$.

On suppose, bien sûr, que les charges sont ponctuelles et immobiles.

Soit $\vec{F}$ la résultante vectorielle des forces coulombiennes exercées par chacune des ***n charges sur*** $\boldsymbol{q_0}$

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u}_i}$$

Champ électrique dans le vide

Dans l'expression de la force résultante par superposition , on peut remarquer que la charge q_0 ***ne dépend pas de i.*** *On peut la* faire sortir à l'extérieur de Σ.

$$\vec{F} = q_0 \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u_i} \right]$$

Elle ne dépend que des autres charges et de la distance M_0M_i

La quantité entre crochets est indépendante de la charge q_0. Cette quantité est appelée champ électrique :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{\left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|^3} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_{i0}^2} \vec{u_i}$$

Il est crée au point M_0 par l'ensemble des charges immobiles q_1, q_2, …, q_n.

$$\Longrightarrow \quad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

Remarque important : Le champ électrique crée par une charge existe en tout point M de l’espace alors que la force électrique n’existe que s’il y a aux moins deux charges.

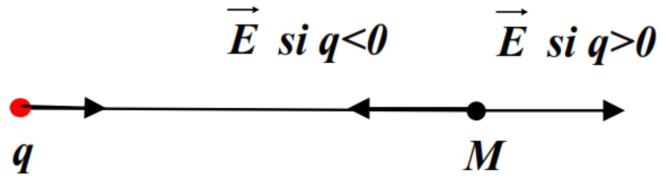
champ crée par une seule charge ponctuelle

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

Quand $q > 0$ $\vec{E}$ *et* $\vec{u}$ *sont de même sens .*

Quand $q < 0$ $\vec{E}$ *et* $\vec{u}$ *sont de* signe contraire.

On dit que le champ électrique fuit les charges positives et se dirige vers les charges négatives.



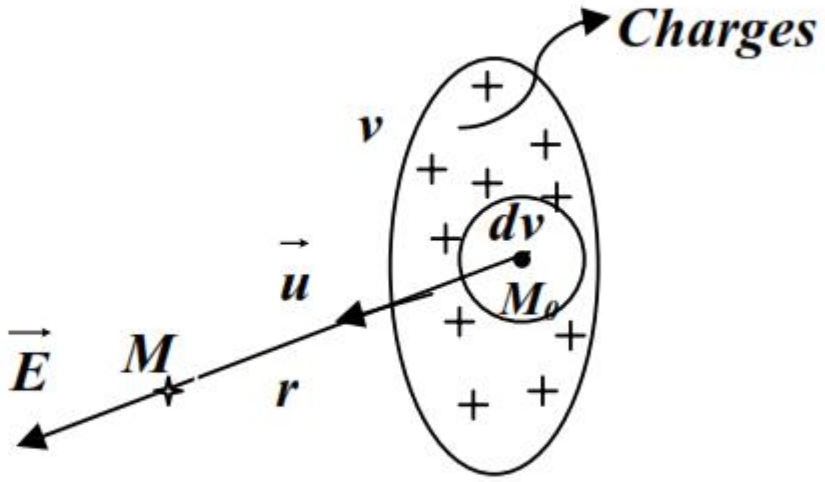
Champ électrique crée par une distribution continue de charges

Une distribution de charge continue peut être **volumique** (que l'on note souvent $\boldsymbol{\rho}$), **surfacique (σ) (**on dit aussi superficielle**)** ou **linéique (**$\boldsymbol{\lambda}$**).** Une distribution de charge peut être constante ou variable.

Distribution volumique

Supposons qu'un volume quelconque ***v*** *contient une distribution continue de* charges. Soit ***dv*** *un élément de volume autour* d'un point *M* . Supposons que, ***dv*** *soit petit* par rapport aux distances macroscopiques, mais grand par rapport aux dimensions des particules.

Soit ***dq*** *la charge électrique* élémentaire contenue dans *dv.*



La densité volumique de charge au point *M, notée ρ , est définie comme:*

$$\boxed{\rho = \frac{dq}{dv}}$$

Le champ crée par dq au point M est:

$$\overrightarrow{dE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\vec{u}$$

Si maintenant on divise *v en un ensemble de volumes très petits* v_i (*i* = *1* --- > *n*) *contenant* chacun une charge élémentaire *dq*, le champ total crée au point *M par toute ces charges (donc par* une distribution discontinue de charge) serait :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dv_i}{r_i^2}\overrightarrow{u_i}$$

Où ri est la distance entre la charge qi (située au point M_{0i}) est le point M et $\overrightarrow{u_i}$ est le vecteur unitaire de la direction $M_{0i}M$.

Et si en plus on fait tendre n vers l'infini, la distribution discrète de charges va devenir une distribution continue et le champ serait:

$$\vec{E} = \iiint_v \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}$$

Distribution surfacique

Pour une distribution surfacique, le même résonnement nous conduit à :

$$\vec{E} = \iint_s \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}$$

Distribution linéique

Et en fin quand la distribution est linéique nous aurons

$$\vec{E} = \int_l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \vec{u}$$

Invariance et symétrie

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\,\vec{u_x} + E_y(x,y,z)\,\vec{u_y} + E_z(x,y,z)\,\vec{u_z}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{u_\theta} + E_z(r,\theta,z)\,\vec{u_z}$$

Invariance ⇒ Suppression de coordonnée(s) de dépendance du champ électrique

symétrie ⇒ Suppression de composante(s) du champ électrique

Invariance par translation

$$M \xrightarrow[oz]{\text{Translation}} M'$$

Les points M et M' doivent voir la même distribution de charges

$$\vec{E}(r,\theta,\cancel{z}) = E_r(r,\theta,\cancel{z})\,\vec{u_r} + E_\theta(r,\theta,\cancel{z})\,\vec{u_\theta} + E_z(r,\theta,\cancel{z})\,\vec{u_z}$$

Invariance par rotation

$$M \xrightarrow[\vec{u_\theta}]{\text{rotation}} M'$$

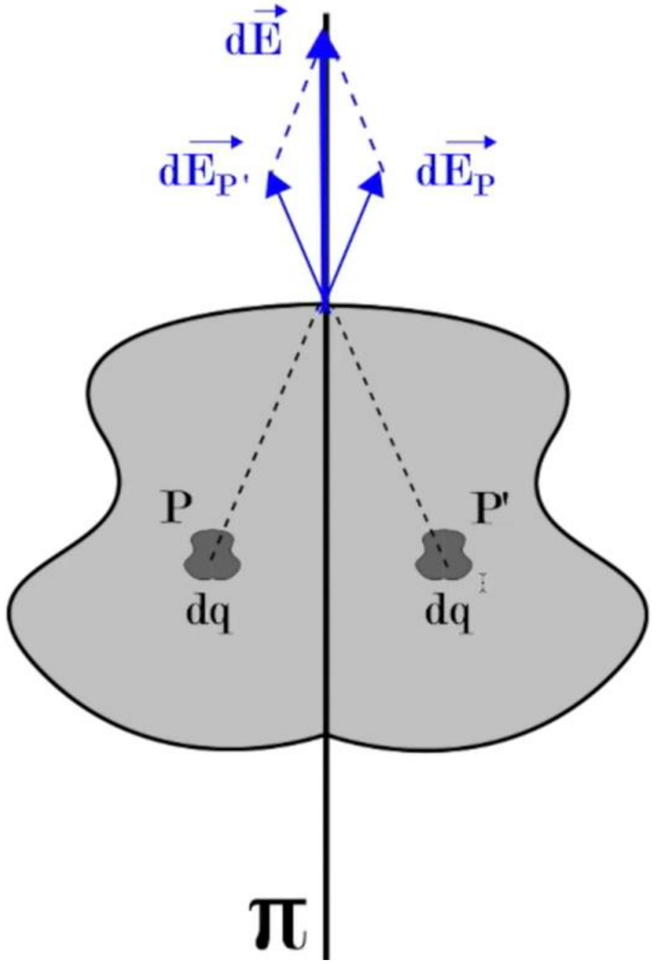
Les points M et M' doivent voir la même distribution de charges

$$\vec{E}(r,\cancel{\theta},z) = E_r(r,\cancel{\theta},z)\,\vec{u_r} + E_\theta(r,\cancel{\theta},z)\,\vec{u_\theta} + E_z(r,\cancel{\theta},z)\,\vec{u_z}$$

Symétrie

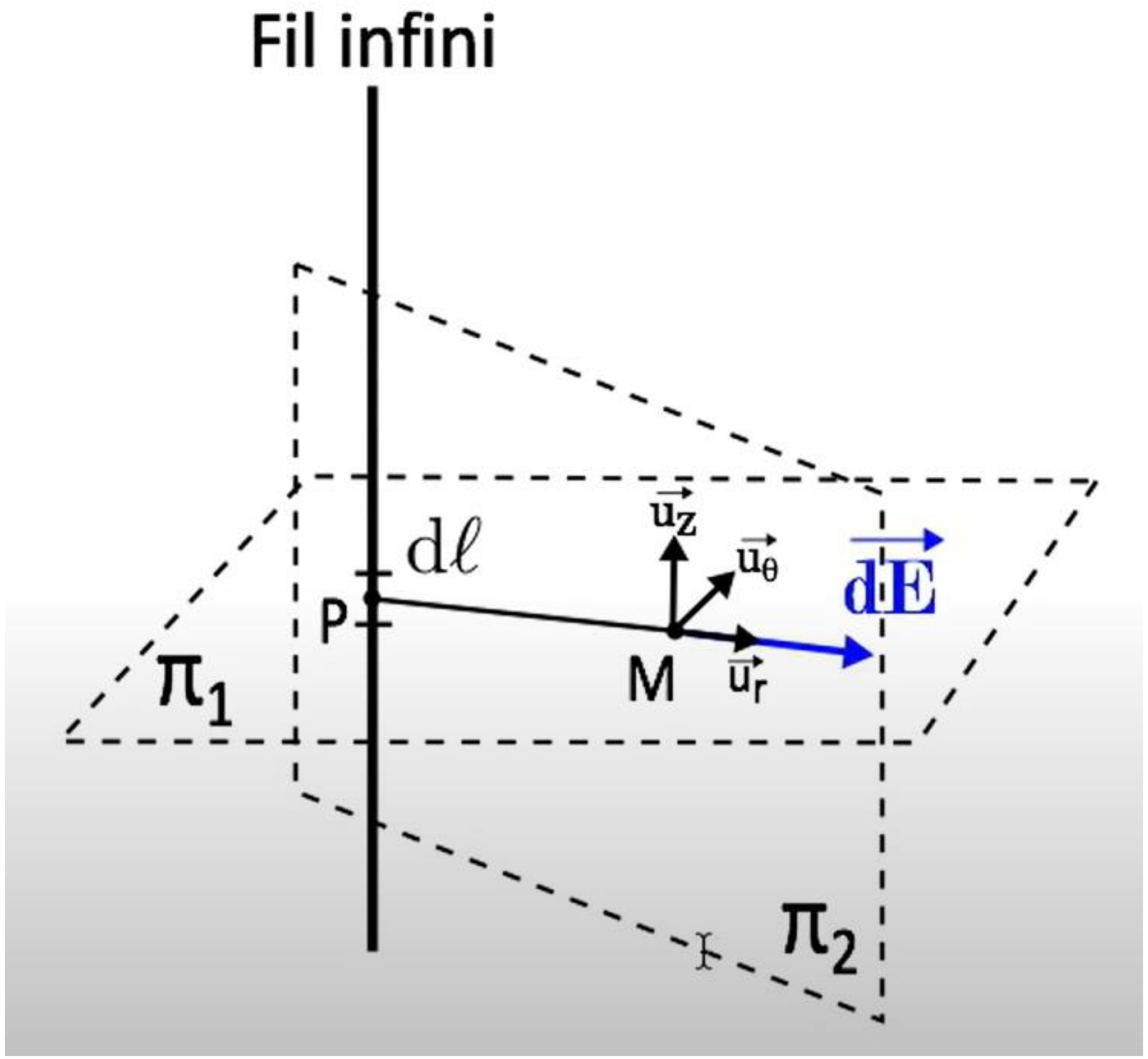
Pourquoi on cherche un plan de symétrie ?

Le champ électrique appartient au plan de symétrie.



Le plan $\pi_{1(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})}$ et le plan $\pi_{2(\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_z})}$sont plans de symétrie ,le champ appartient à ces deux plans donc à leur intersection

Soit $\vec{E} = E_r(r,\theta,z)\overrightarrow{u_r}$

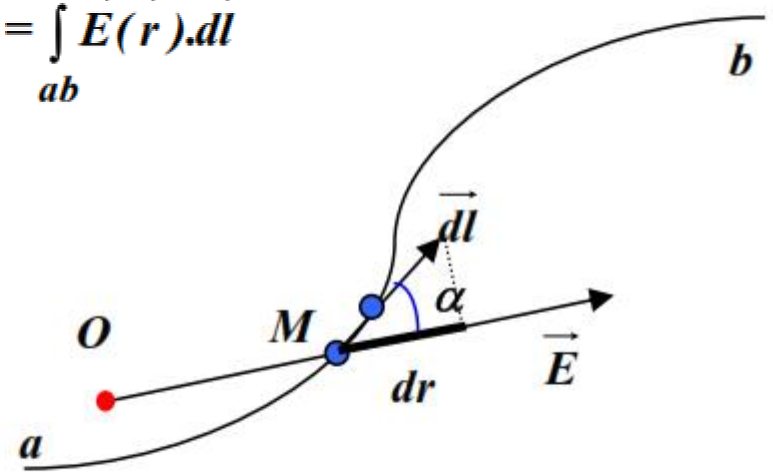


Potentiel électrique dans le vide

Le potentiel électrique (ou plus simplement **potentiel**) en un point d'un champ **électrique** correspond au travail à fournir pour transporter une charge positive unitaire depuis l'infini jusqu'à ce point (**le potentiel électrique** à l'infini étant par définition égal à 0). ... On dit que la force électrique est conservative.

Cas ou le champ est produit par une seule charge.

la circulation d'un vecteur le long d'une courbe $C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dl}$



avec $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}}$

$$\vec{E}(\vec{r}).\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}.\vec{dl}$$

$\vec{u}.\vec{dl} = dl\cos\alpha = dr$ est la projection de dl sur la direction OM.

$$C(\vec{E}/ab) = \int_{ab} E.dl.\cos\alpha = \int_{ab}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{dr}{r}\right]_A^B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

où $r_A = OA$ et $r_B = OB$.

Remarque :La circulation de E ne dépend que de A et B, elle ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

On peut écrire :

$$C(\,E\,/ab) = f(A) - f(B)$$

Cas particulier : ***AB est une courbe fermée A = B. Dans ce cas $r_A = r_B$***

$$C(\vec{E}\,/\,AB\,) = \oint_{AA} \vec{E}\,\vec{dl} = 0$$

On en déduit d'après le théorème de Stokes que : $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}$ On dit que la circulation de $\vec{E}$ ***est conservative.***

Le champ est produit par un ensemble de charges ponctuelles

Soient $\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{q_2}, \ldots, \boldsymbol{q_n}$ placées en $\boldsymbol{O_1}, \boldsymbol{O_2}, \ldots, \boldsymbol{O_n}$. En un point M de AB, ces chargent créent un champ :

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} + \cdots + \overrightarrow{E_n}$$

$$C(\vec{E}/AB) = \int_{AB} \vec{E}\,\vec{dl} = \int_{AB} \vec{E}_1\,\vec{dl} + \int_{AB} \vec{E}_2\,\vec{dl} + \ldots + \int_{AB} \vec{E}_n\,\vec{dl} = \sum_{i=1}^{n} C(\vec{E}_i/AB)$$

$$C(\vec{E}_i/AB) = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{O_iA} - \frac{1}{O_iB}\right].$$

Alors la circulation du champ total le long du AB s'écrit

$$C(\vec{E}/AB) = \sum_{i=1}^{n} C(\vec{E}_i/AB) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{O_iA} - \frac{1}{O_iB}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{O_iA} - \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{O_iB}$$

$$= \textit{fonction de } A - \textit{fonction de } B$$

On définit ainsi une fonction de points à valeur scalaire ; on la note ***V*** et on l'appelle potentiel électrique. Ainsi on a :

$$\int_{AB} \vec{E}\,\vec{dl} = V(A) - V(B)$$ ***= différence de potentiel entre A et B.***

En un point quelconque M entre A et B le potentiel s'écrit donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} + k$$

avec r_i = ***OM***

Remarque :Il est défini à une constante prés. Par convention on suppose que le potentiel à l'infini est nul $V(\infty) = 0 \Rightarrow r_i \Rightarrow \infty \Rightarrow k=0$

Une seule charge ponctuelle placée en un point O, crée donc en tout point M de l'espace un potentiel :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$ où ***r = OM.***

Relation entre le champ et le potentiel électrique

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_{y} = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_{z} = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

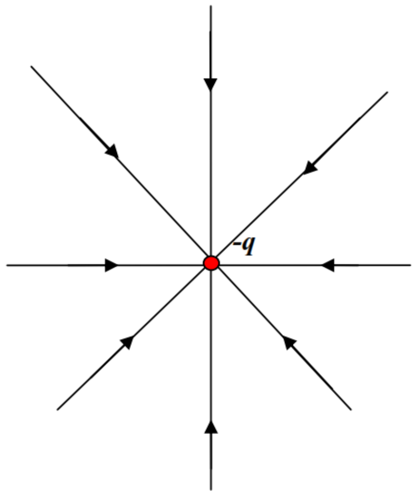
<u>En coordonnées cartésiennes</u>

$$\vec{E}\begin{cases} E_\rho = -\dfrac{\partial V}{\partial \rho} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

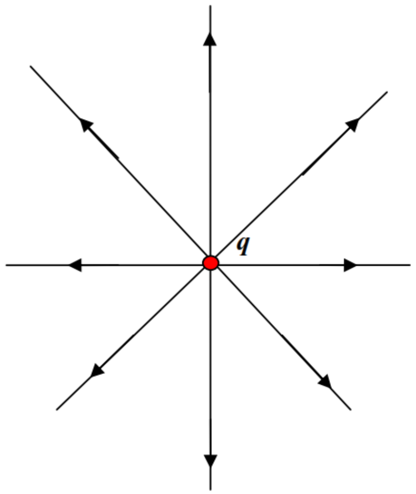
<u>En coordonnées cylindriques</u>

lignes de champ

On appelle lignes de champ , l'ensemble des courbes qui sont constamment parallèles au champ. En d'autres termes c'est ''la trajectoire de ***E*** **".**
Dans le cas d'une seule charge les lignes de champ sont des droites qui se coupent au point où est placée la charge.

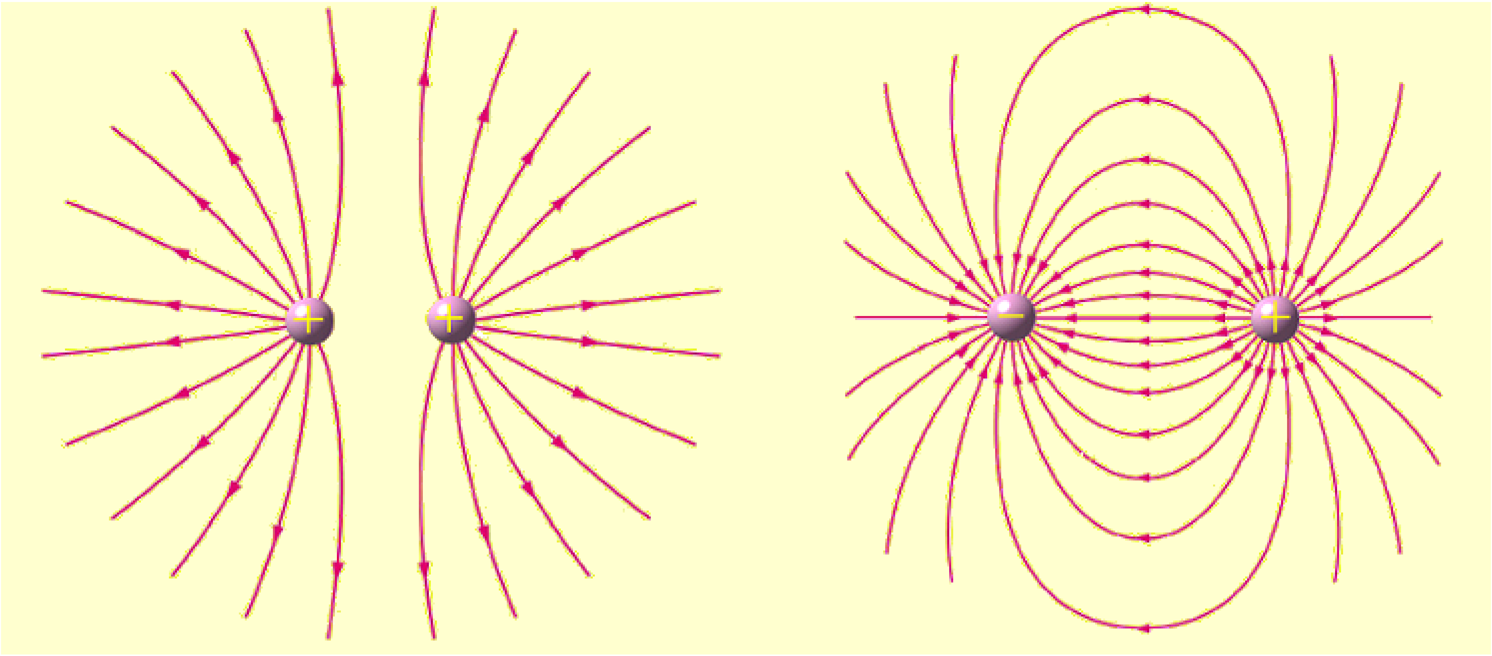


Cas d'une charge négative



Cas d'une charge positive

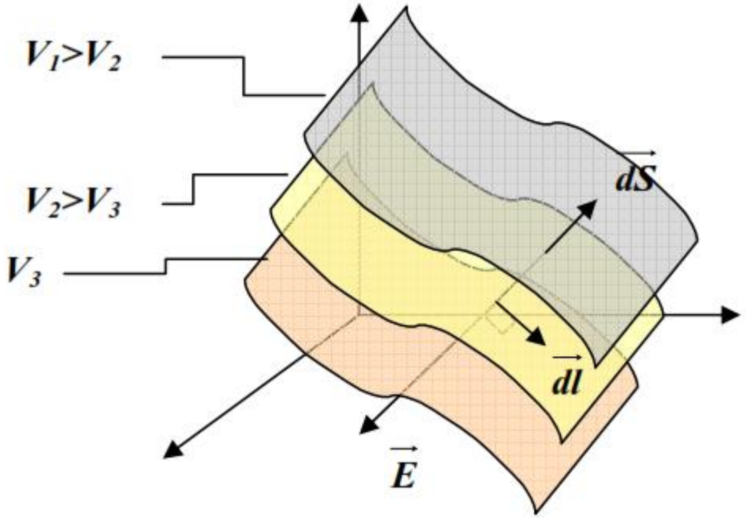
Deux configurations des lignes du champ électrostatique



Lignes de champ électrique autour de deux particules de même charges (gauche) et de charges opposées (droite).

Surface équipotentielles

Si l'on écrit V(x,y,z) = constante, on peut en déduire une équation sous la forme z = f(x,y) qui, dans le repère (X,Y,Z), serait une surface dont tous les points au même potentiel. On dit que c'est une surface équipotentielle ou encore une surface de niveau. En fait il y a plusieurs surfaces de niveau. A chaque valeur de la constante correspond une surface.



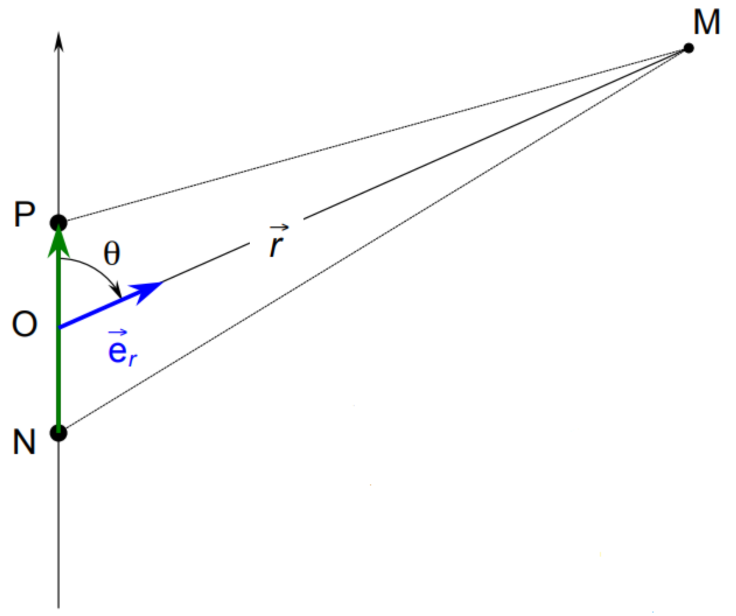
Remarque :

$dV = \overrightarrow{gradV}.\overrightarrow{dl} = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$, alors $\vec{\boldsymbol{E}} \perp \overrightarrow{\boldsymbol{dl}}$ **(dV=0).**

Le signe (-) montre que le champ se dirige vers les potentiels décroissants. Les lignes de champ sont donc toujours perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

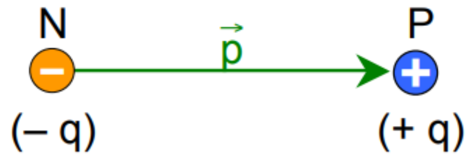
Etude du dipôle.

Un dipôle est un ensemble de deux charges électriques ponctuelles +q et –q séparées par une distance ‘’a’’ très petite devant r = OM qui est la distance du dipôle au point d’observation M.



Moment dipolaire

On appelle moment dipolaire du dipôle la grandeur $\vec{p} = q\,\overrightarrow{NP}$



Remarque: $\vec{p}$ s’exprime en C.m.

Souvent on utilise le Debye : 1 Debye $= \frac{1}{3}\ 10^{-19}$c.m

Potentiel crée par le dipôle

$$V(M) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\, r^3} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \Longrightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a\cos\theta}{r^2}$$

Champ crée par le dipôle

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

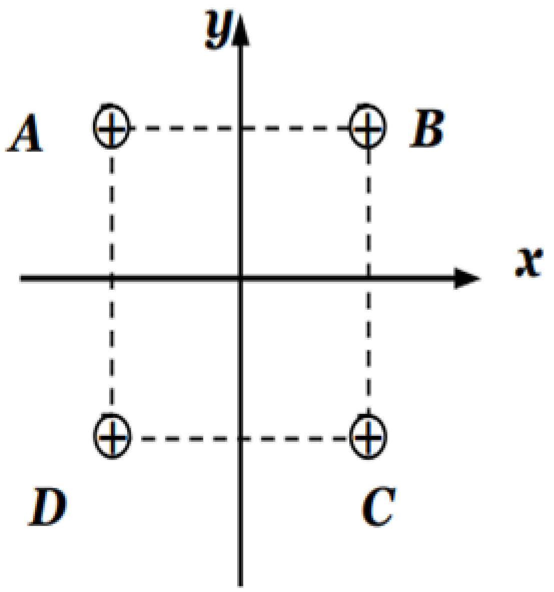
$$\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_r = \dfrac{2P\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \textit{composante radiale} \\ E_\theta = \dfrac{P\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} & \textit{composante orthoradiale} \end{cases}$$

Applications

Exercice 1:

On place dans l'ordre les charges $q_A = q = 10^{-8}\,C$, $q_B = -2q$, $q_C = 2q$ et $q_D = -q$ aux sommets A(-a, b), B(a, b), C(a, -b), et D(-a, -b), du carré ABCD



1)- Déterminer le champ électrostatique au point O, centre du carré

2)- Déterminer le potentiel électrostatique au point O.

$$\vec{E}_O = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{{r_i}^2}\vec{u}_i = \vec{E}_{A/O} + \vec{E}_{B/O} + \vec{E}_{C/O} + \vec{E}_{D/O}$$

$$\vec{E}_{A/O} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{a}}{r}\vec{\imath} - \frac{\mathrm{b}}{r}\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{E}_{B/O} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\frac{\mathrm{a}}{r}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{b}}{r}\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{E}_{C/O} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\frac{-\mathrm{a}}{r}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{b}}{r}\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{E}_{D/O} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(-\frac{\mathrm{a}}{r}\vec{\imath} - \frac{\mathrm{b}}{r}\vec{\jmath}\right)$$

$$Avec\ r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

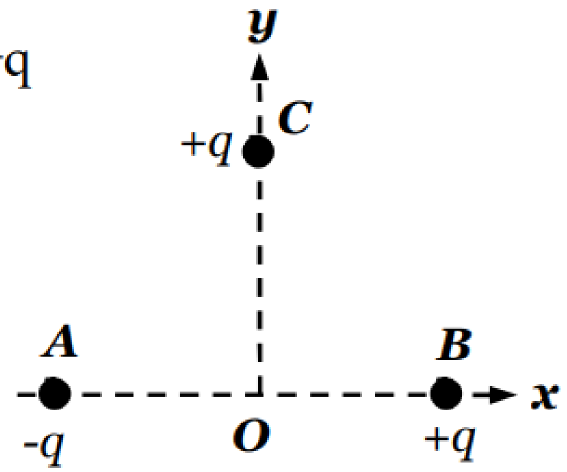
$$\vec{E}_O = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(a^2 + b^2)^{3/2}}\left((\mathrm{a} + 2\mathrm{a} - 2\mathrm{a} - \mathrm{a})\vec{\imath} + (-\mathrm{b} + 2\mathrm{b} + 2\mathrm{b} - \mathrm{b})\vec{\jmath}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\mathrm{b}}{(a^2 + b^2)^{3/2}}\vec{\jmath}$$

$$\mathrm{V}\,(\mathrm{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=\mathrm{N}}\frac{\mathrm{q_i}}{\mathrm{r_i}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathrm{q_A}}{\mathrm{r}} + \frac{\mathrm{q_B}}{\mathrm{r}} + \frac{\mathrm{q_C}}{\mathrm{r}} + \frac{\mathrm{q_D}}{\mathrm{r}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\mathrm{r}}(\mathrm{q_A} + \mathrm{q_B} + \mathrm{q_C} + \mathrm{q_D})$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + b^2)^{1/2}}(1 - 2 + 2 - 1) = 0Volt$$

Exercice 2:

On considère trois charges ponctuelles identiques $q_A = -q$, $q_B = +q$ et $q_C = +q$ placées respectivement en A(-R, 0), B(+R, 0), et C(0, R)



1)- Calculer le potentiel électrostatique au point O.

2)- Calculer le champ électrostatique au point O.

3)- Déterminer la force qui s’exerce sur une charge q' placée en O.

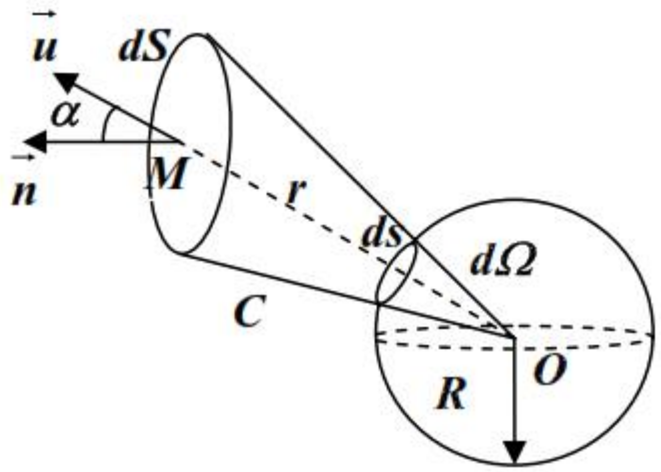
1) $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{q_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{R} + \frac{q}{R} + \frac{q}{R}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}$

2) $\vec{E}_O = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{{r_i}^2}\vec{u}_i = \vec{E}_{A/O} + \vec{E}_{B/O} + \vec{E}_{C/O} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{R^2}\vec{\imath} - \frac{q}{R^2}\vec{\imath} - \frac{q}{R^2}\vec{\jmath}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}(-2\vec{\imath} - \vec{\jmath})$

3) $\vec{F} = q_0\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{R^2}(-2\vec{\imath} - \vec{\jmath})$.

l'angle solide

dΩ *est l'angle solide sous lequel du* point *O on observe la surface* ***dS***.

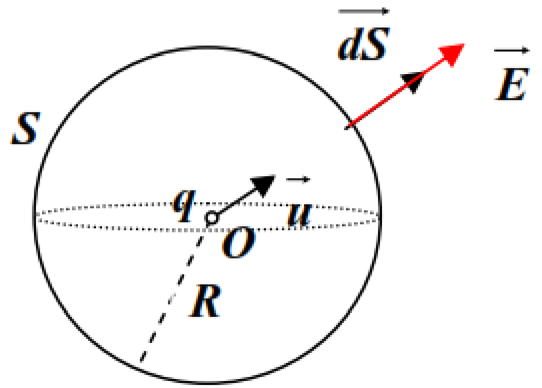


$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}\,.\,\overrightarrow{u}}{r^2} = \frac{dS\,\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{u}}{r^2} = \frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

Remarque: L'angle solide sous lequel on observe tout l'espace est la surface de la sphère de rayon 1 :

Ω= 4*π* srd.(stéradian)

Flux du champ électrique



Cas d'une seule charge

Flux de $\vec{E}$ *à travers une sphère*

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}$$

le flux du champ à travers la surface élémentaire ***dS* .** On dit que c'est un flux élémentaire:

$$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}.\vec{dS}$$

$$\vec{u}.\vec{dS} = u.dS = dS$$

$\vec{u}$ et $\vec{dS}$ sont colinéaires :

Le flux est :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \int d\Phi(\vec{E}/dS) = \iint_S \vec{E}\ \vec{dS} = \iint_S E\ \vec{u}\ \vec{dS} = \iint_S E\ dS$$

Puisque $\vec{E}$ ne dépend que de R, sa valeur sera la même partout sur S

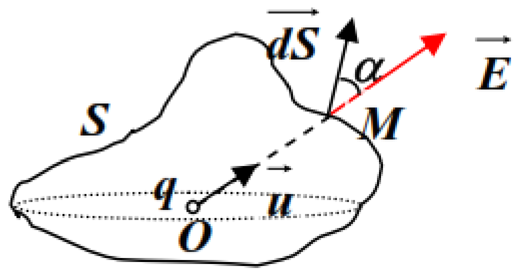
$$\Phi(\vec{E}/S) = E\iint_S dS = E\,S = E\;4\pi R^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Remarque :Le flux du champ électrique à travers une sphère est indépendant de son rayon (donc de la sphère elle-même). Il ne dépend que de la charge qui crée le champ.

Flux de E à travers une surface quelconque.

On cherche à calculer le flux du champ électrique à travers une surface quelconque *S (surface fermée). En tout* point *M de la surface tel que OM = r* :



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

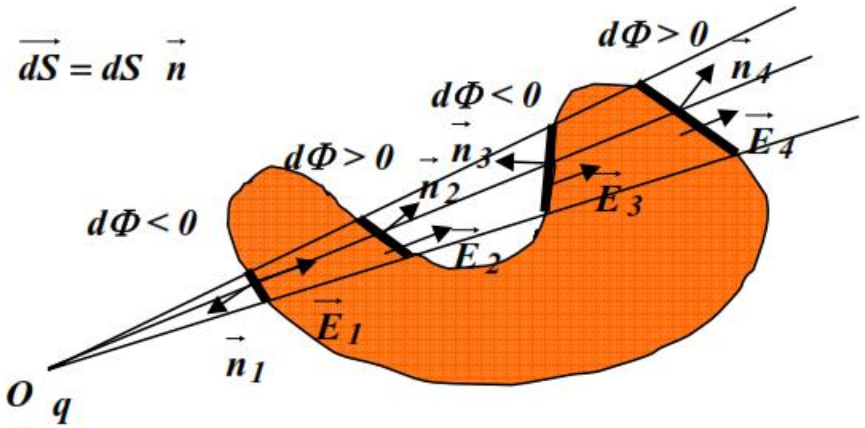
le flux élémentaire du champ à travers la surface élémentaire ***dS.***

$$d\Phi(\vec{E}/dS) = \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = E\,\vec{u}\,\overrightarrow{dS} = E\,dS\cos\alpha = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dS\cos\alpha \Rightarrow d\Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS\cos\alpha}{r^2}$$

$$d\Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi} \Rightarrow \Phi(\vec{E}/S) = \int d\Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Remarque: Le flux du champ électrique est indépendant de la surface choisie (sphère, surface quelconque, …etc.). Il ne dépend que de la charge **(q)** et du milieu (ici le vide : ε_0 =8,85 × 10^{-12} F m^{-1})

Quand la charge q est à l'extérieur de S, le nombre de surfaces élémentaires dS découpées par l'angle solide dΩ sur S est obligatoirement pair : donc dΦ total est nul => Φ = 0.

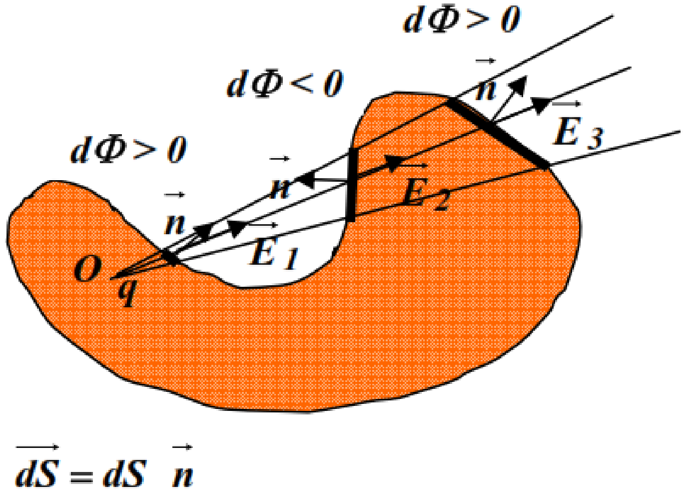


Quand q est à l'intérieur de S, le nombre de surfaces élémentaires dS découpées par l'angle solide dΩ sur S est obligatoirement impair et en plus dΦ garde la même valeur

$$d\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{d\Omega}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{\Omega_{total}}{4\pi}$$

avec

$$\Omega_{total} = 4\pi \quad \Rightarrow \quad \Phi(\vec{E}/dS) = \frac{q}{\varepsilon_0}$$



Remarque: chaque fois que la charge se trouve dans la surface fermée, le flux est non nul et chaque fois qu'elle est à l'extérieur de la surface fermée, le flux est nul.

Théorème de Gauss

Dans le cas de plusieurs charges distribuées dans l'espace, le flux du champ électrique à travers une surface fermée quelconque est la somme algébrique des flux envoyés par chacune des charges (principe de superposition).

$$\Phi(\vec{E}/S) = \oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{intérieures}$$

Distribution volumique:

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

Avec V : volume chargé contenu dans la surface fermée S.

Distribution superficielle:

$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{\Sigma} \sigma\, d\Sigma$$

Avec Σ : surface chargée contenu dans la surface fermée ***S***

Distribution linéique :

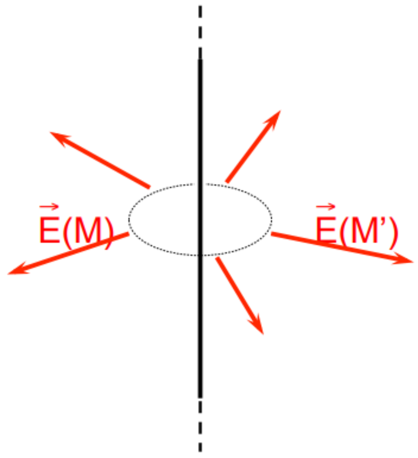
$$\oiint_{S\ fermée} \vec{E}\,\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_l \lambda\, dl$$

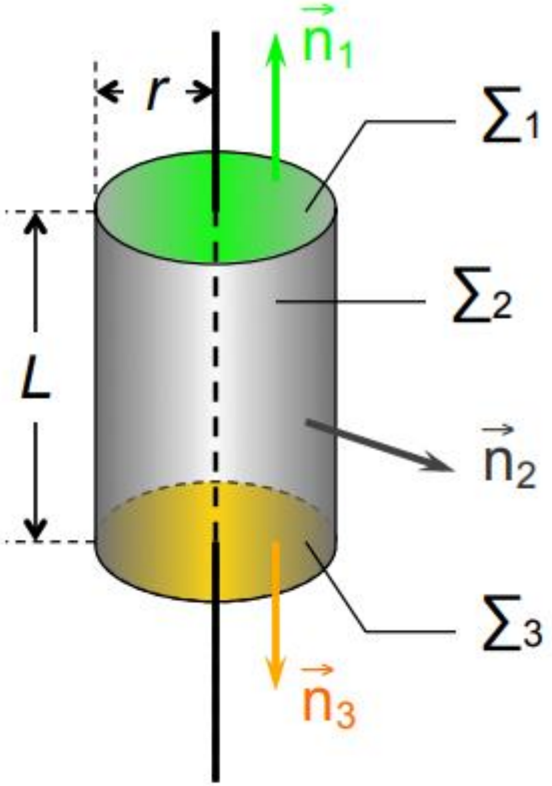
l : longueur chargée contenu dans la surface fermée S.

Application

Distribution linéique rectiligne

On considère un fil rectiligne infini chargé avec la densité linéique λ.





$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\phi = \underbrace{\iint_{\Sigma 1} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_1}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ \vec{E}(\vec{r}) \perp \vec{dS}_1}} + \iint_{\Sigma 2} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_2 + \underbrace{\iint_{\Sigma 3} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_3}_{\substack{= 0 \text{ car} \\ \vec{E}(\vec{r}) \perp \vec{dS}_3}}$$

$$\phi = \iint_{\Sigma 2} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS}_2 = E(r) \iint_{\Sigma 2} dS = 2\pi r \, L \, E(r)$$

Par ailleurs, le second membre de l'égalité est déduit de la charge totale contenue dans le cylindre défini par $\sum$:

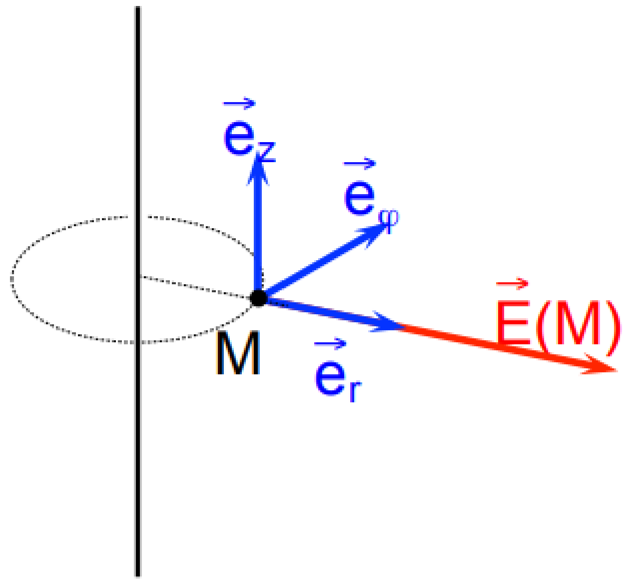
$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda\, L}{\varepsilon_0}$$

d'où l'expression de la norme du champ rayonné par un fil infini :

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}$$

Ou sous forme vectorielle :

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}\,\frac{\vec{r}}{r} = = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\, r}\,\vec{e}_r$$



On en déduit l'expression du potentiel à partir de la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z$$

Dans le cas présent, $\vec{E}(\text{r})$ n'a de composantes que selon $\vec{e_r}$,cela signifie que le potentiel ne dépend pas de ϕ et de z.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r$$

d'où l'expression du champ électrostatique:

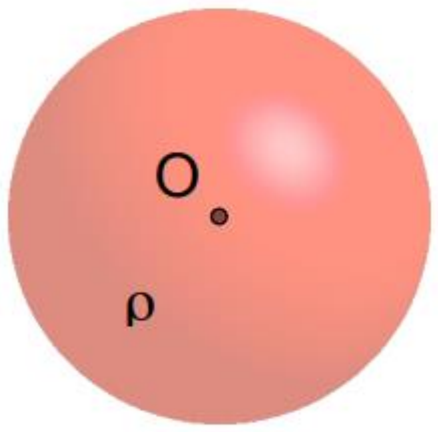
$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

et du potentiel :

$$V(r) = -\int E(r)\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\cdot \ln r + C^{te}$$

Distribution volumique à symétrie sphérique

On considère une sphère de rayon R chargée avec la densité volumique ρ uniforme.



• La distribution est invariante par rotation autour du centre.

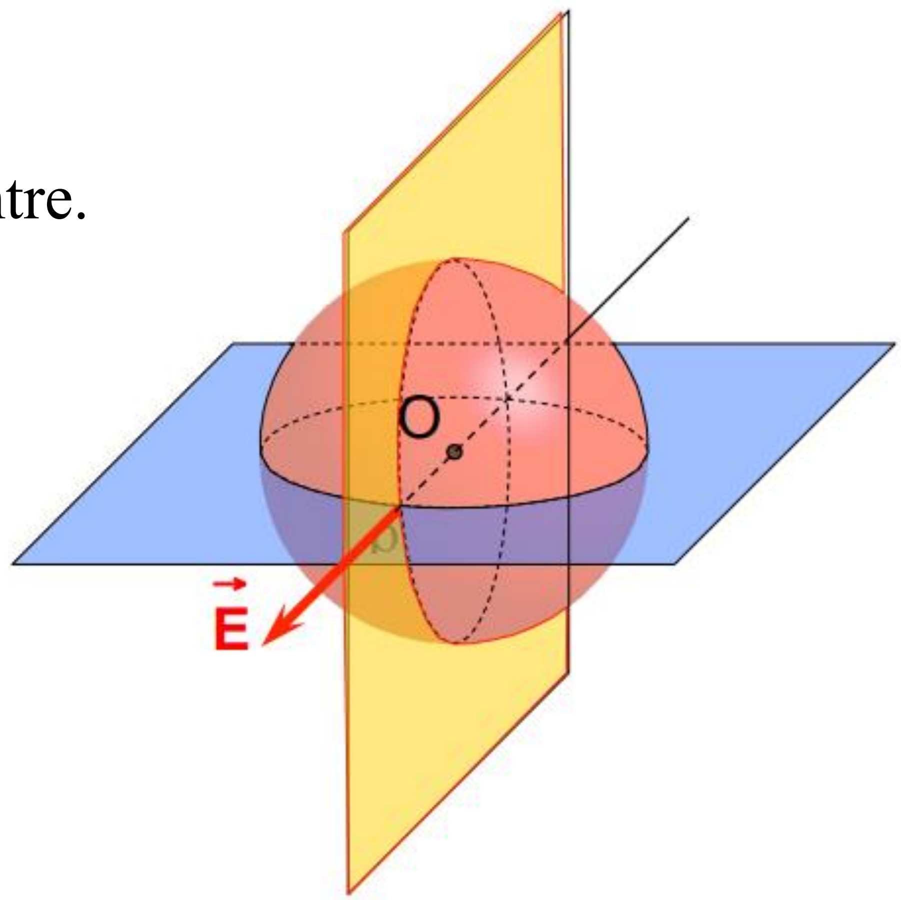
• Tout plan passant par le centre de la sphère est plan de symétrie (miroir).

• La distribution présente une symétrie sphérique.

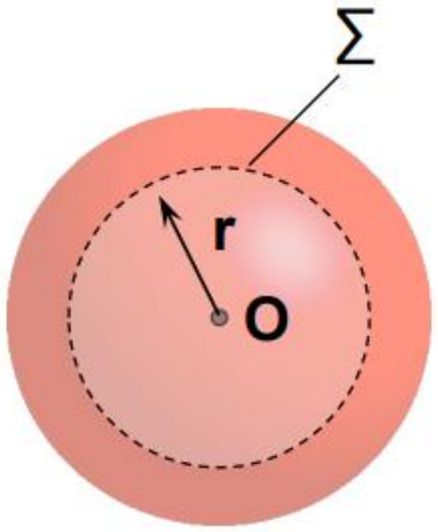
• Le champ $\vec{E}$ est parallèle à l'intersection des miroirs

• Le champ $\vec{E}$ est radial

→ coordonnées sphériques



Calcul du champ à l'intérieur de la sphère r < R



- La surface de Gauss est une surface sphérique de rayon r et centrée sur O
- En chaque point de la surface ∑, le champ $\vec{E}$(r) est perpendiculaire

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(\vec{r}).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Le premier terme s'écrit : $$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_{int}(\vec{r}).\vec{dS} = E_{int}(\vec{r}) \oiint_{\Sigma} dS = 4\pi r^2\, E_{int}(r)$$

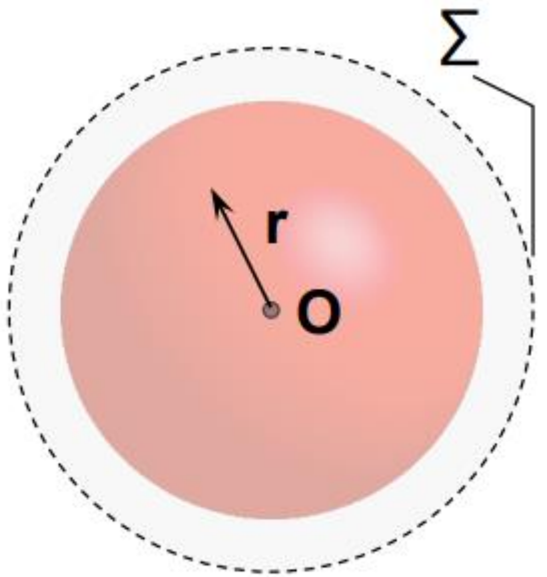
Le deuxième vaut : $$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad E_{int}(r) = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\, r$$

$$\vec{E}_{int}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\vec{e}_r$$

Calcul du champ à l'extérieur de la sphère, r > R

Le premier terme de l'égalité de Gauss s'écrit :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}_{ext}(\vec{r}).\vec{dS} = E_{ext}(\vec{r}) \oiint_{\Sigma} dS = 4\pi r^2 \, E_{ext}(r)$$



Le deuxième vaut : $\dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \rho \dfrac{4}{3} \pi \dfrac{R^3}{\varepsilon_0}$

$$E_{ext}(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

À l'extérieur de la sphère, tout se passe comme si on avait une charge ponctuelle centrée sur O.

Les conducteurs

Conducteurs et isolants

Un conducteur est un élément de la matière dont les charges peuvent se déplacer sous l'action d'un champ extérieur.

Un isolant est un élément de la matière dont les charges sont liées à chaque atome et ne sont pas libres de se déplacer même sous l'action d'un champ extérieur.

Remarque: Les charges mobiles sont des électrons dans le cas d'un métal et des ions dans le cas d'une solution d'électrolyte.

- ✓ Si l’on dépose une charge en un point d’un conducteur, elle créera un champ électrique en tous les points de celui-ci ; d’où déplacement des charges mobiles et à l’équilibre la charge sera répartie en différents points du conducteur.

- ✓ Par contre pour un isolant, il n’y a pas déplacement de charges et la charge initiale restera à l’endroit où elle a été déposée.

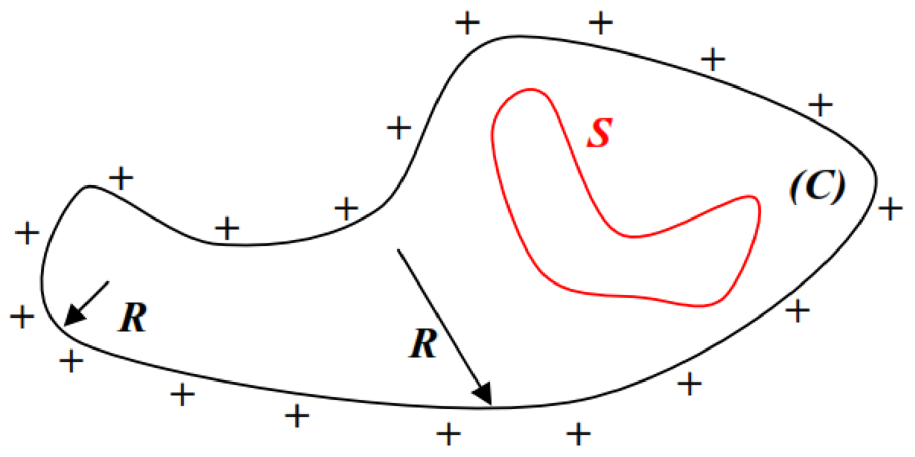
- ✓ Dans la réalité un conducteur parfait n’existe pas de même qu’un isolant parfait est un cas idéal. Il n’existe que des mauvais isolants et des mauvais conducteurs

Remarque:

Un conducteur est dit en **équilibre électrostatique lorsque toutes les charges qu’il** contient sont **immobiles.**

Propriétés d'un conducteur en équilibre.

Soit un conducteur (***C***) isolé**,** immobile et initialement neutre.



Isolé : pas d'influence entre le conducteur et les charges qui peuvent se trouver à son voisinage.

Immobile : si le conducteur n'est pas immobile ses charges ne le seront pas non plus.

Initialement neutre : sa charge totale est nulle .

On dépose une charge Q en un point de ce conducteur. A l'équilibre toutes les charges sont immobiles

$$\sum \vec{F} = \vec{0} = q\vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{E} = \vec{0} = -\overrightarrow{gradV} \;\Rightarrow\; V = cte$$

Théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E}\,\vec{dS} = 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i$$

S est une surface fermée quelconque dans le conducteur

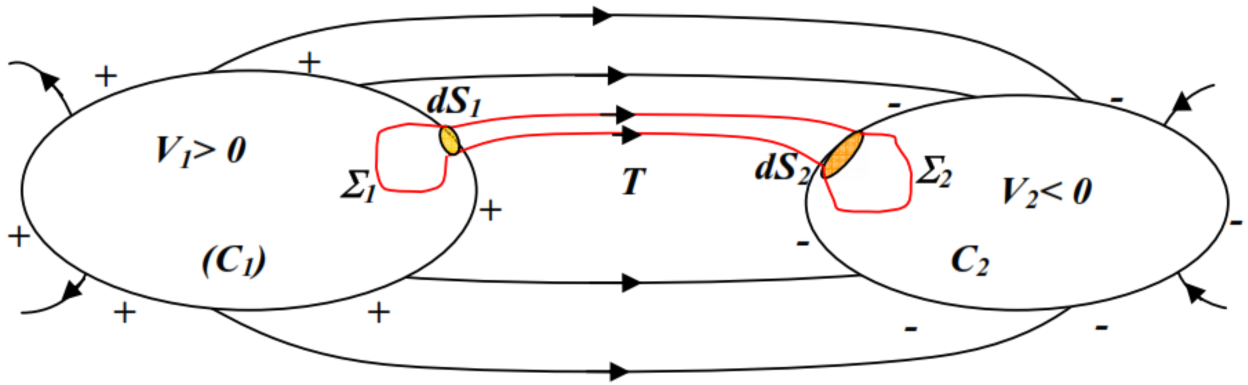
$$\sum q_i = 0 \;\Rightarrow\; \rho = 0$$

Conséquences:

- Donc la charge ne peut être que sur la surface du conducteur.
- La distribution est superficielle σ.
- Toute surface dans le conducteur est équipotentielle.
- A l'extérieur du conducteur, les lignes de champ seront donc perpendiculaires à sa surface.

Théorème des éléments correspondants

Soient deux conducteurs portant des distributions de charges opposées. Les lignes de champ auront l'allure :



$\Sigma_1 + \Sigma_2 + T = S =$ *surface fermée.*

T = tube de champ.

Il découpe sur (C_1) dS_1 *et sur* (C_2) dS_2

Soient $\boldsymbol{dq_1}$ la charge contenue dans dS_1 et $\boldsymbol{dq_2}$ celle contenue dans dS_2.

Dans C_1 et C_2 le flux de ***E est nul*** ***(E = 0)*** et à travers T le champ et le vecteur surface sont perpendiculaires.

$$\Phi(\vec{E}/S) = 0 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}(dq_1 + dq_2)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{dq_1 = -\,dq_2}$

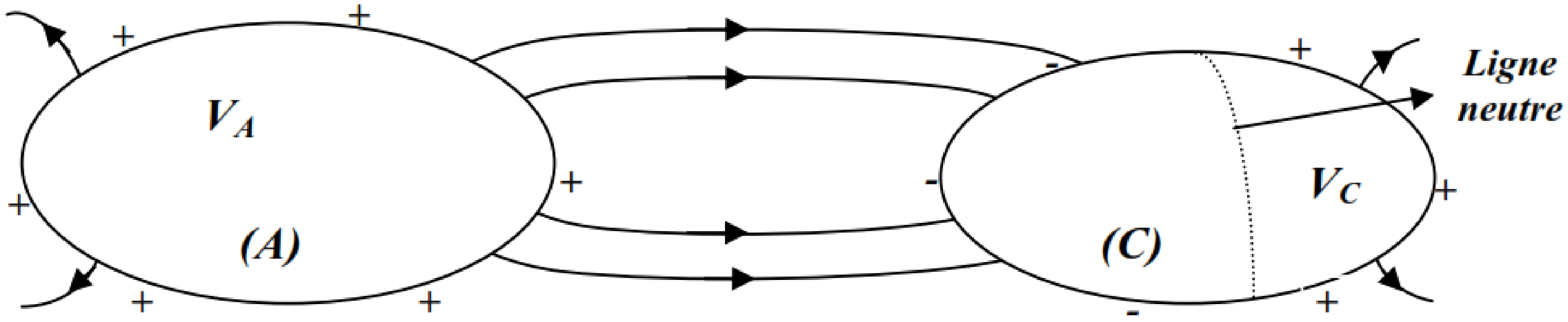
Remarques :

- Deux éléments, découpés sur deux conducteurs différents, par un même tube de champ, sont appelés éléments correspondants.
- Deux éléments correspondants portent nécessairement des charges égales en module mais de signe contraire. Ils ne peuvent jamais appartenir à un même conducteur.

Influences électrostatiques

Influence sur un conducteur isolé.

Soit un conducteur (C) initialement neutre et isolé => Q=0, V=0,
(C) contient autant de charges (+) que de charges (-).
Et soit un conducteur (A) chargé.
En approchant (C) de (A), (C) va subir électriquement des modifications.
Conséquences : On dit qu'il est *influencé*.



A cause de l'attraction coulombienne, sur la face de (C) qui regarde (A), il y a apparition de charges (–) et sur la face opposée il y a apparition de charges (+).

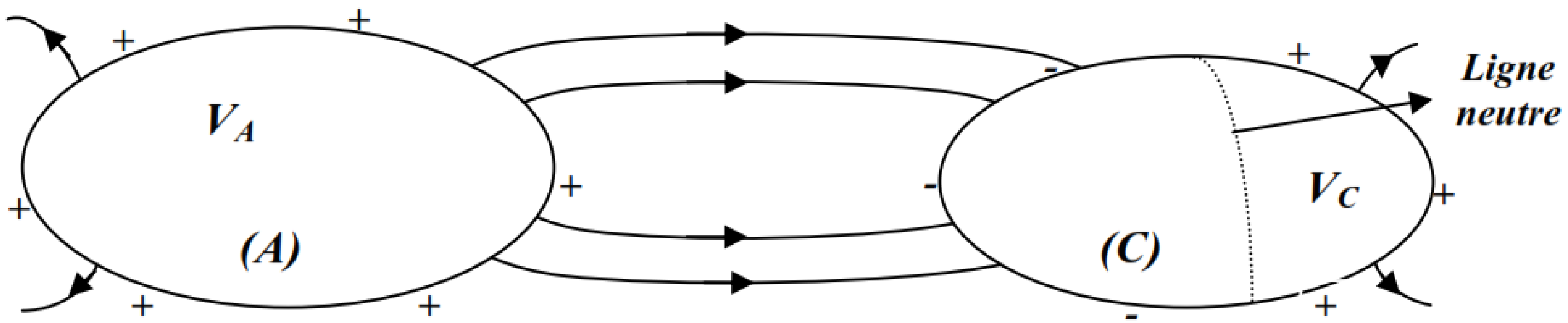
A l'équilibre:

Les lignes de champ partent de (C) vers l'infini ⟶ $V_c > V_\infty = 0$

D'où :

- Etat initial ⟶ $Q_C = 0$; $V_c = 0$,

- Etat final ⟶ $Q_c = 0$; $V_c > 0$,

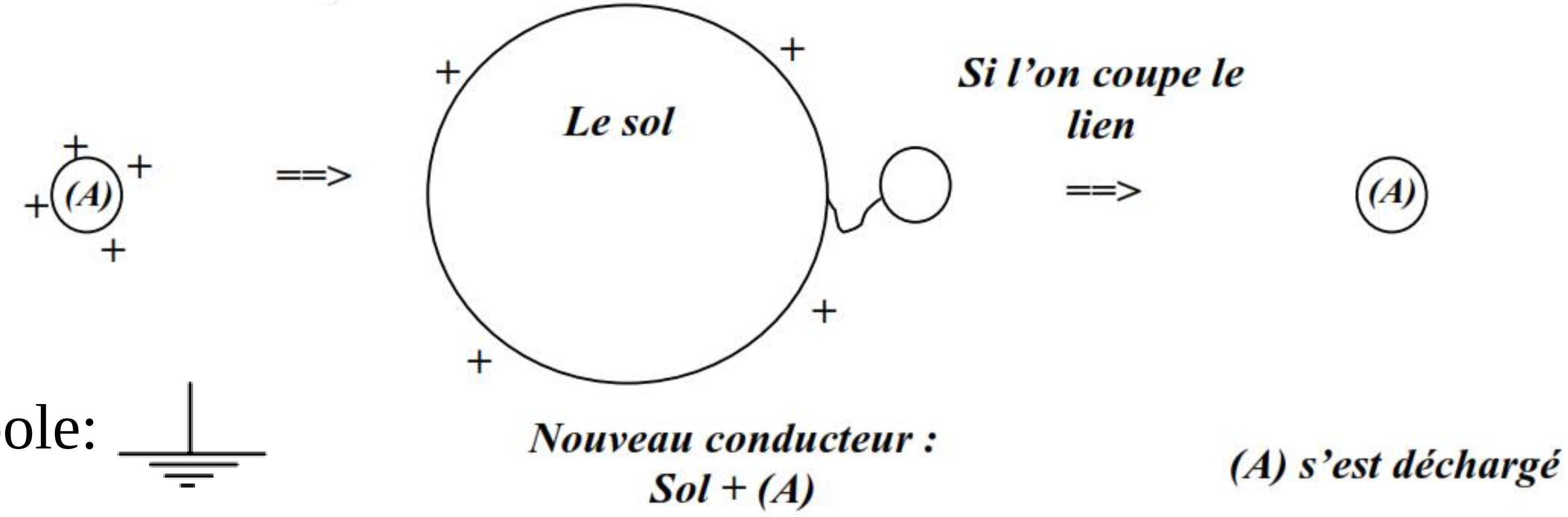


Remarque:

Le conducteur (C) après influence a gardé une charge totale nulle mais son potentiel est passé de zéro à une valeur positive.

Influence sur un conducteur relié au sol

La terre est un grand conducteur (grand réservoir de charges).
Ce conducteur est neutre car il y a autant de charges + que de charges -.
Si l'on relie un conducteur (A) chargé au sol, l'ensemble [sol + (A)] constituera un nouveau conducteur.
La charge, initialement répartie sur la surface de (A), va se répartir sur toute la surface du nouveau conducteur.
Etant donné que la surface de (A) est négligeable devant celle de la terre tout semble comme si la terre a absorbé l'ensemble de la charge de (A).



Remarque:
On schématise le sol par le symbole:

Influence totale

On dit qu'il y a influence totale chaque fois que le corps influencé entoure complètement le corps qui l'influence.

Soient (C) un conducteur creux et initialement neutre et (A) un conducteur portant la charge Q_A.

On place (A) dans (C).

A l'équilibre :

Il va y avoir apparition de la charge ($-\boldsymbol{Q_A}$) sur la face interne $\boldsymbol{S_i}$ de (C) et ($+\ \boldsymbol{Q_A}$) sur sa face externe ***Se***

Remarque :

Si (C) contenait la charge Q_C à l'état initial, sa charge sur S_e après influence serait $Q_C + Q_A$.

Si l'on relie (C) au sol toute la charge sur S_e va disparaître.

Capacité d'un conducteur seule et isolé

Soit (C) un conducteur ayant un potentiel V et une charge Q.

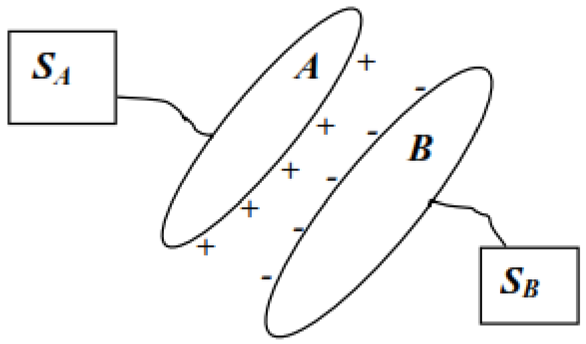
Par définition **:** la capacité du conducteur

$$C = \frac{Q}{V}$$

La capacité s'exprime en Farad (***F)***

Remarque :Le Farad est une unité très grande, souvent on utilise les sous-multiples :
picofarad (*1 pF=10* $^{-12}$ *F),*
nanofarad (1 nF=10 $^{-9}$ *F ,*
*microfarad (1*µ*F=10* $^{-6}$*F)*

Les condensateurs

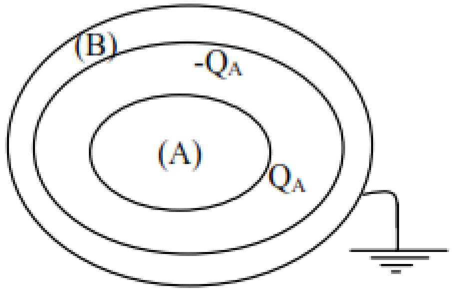


Soient deux conducteurs *A et B reliés à deux sources de charges* S_A *et* S_B.
Chaque fois qu'il y a apparition d'une charge (+) sur *A*, *il y* a apparition, par influence d'une charge (-) sur *B*.

Remarque:
L'ensemble des deux conducteurs constitue ce qu'on appelle un condensateur.
A et B sont appelés *les armatures du condensateur*.

Capacité d'un condensateur

Soient :
A : conducteur (Q_A,V_A),
B : conducteur creux, neutre et relié au sol,



Après influence il apparaît la charge $-Q_A$ sur la face interne de B.

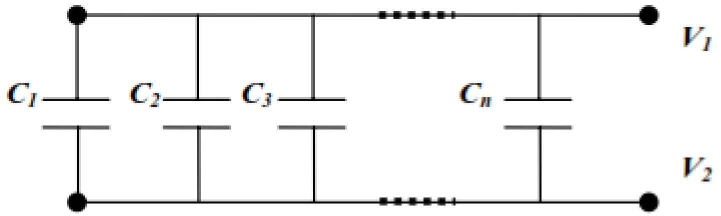
C : est dite capacité du condensateur

$$\boxed{C = \frac{Q_A}{V_A - V_B}}$$

Groupement de condensateur

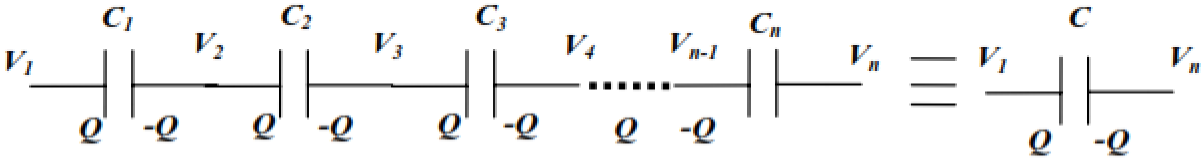
En parallèle

On schématise un condensateur par :
Les deux traits verticaux sont ses armatures.



$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

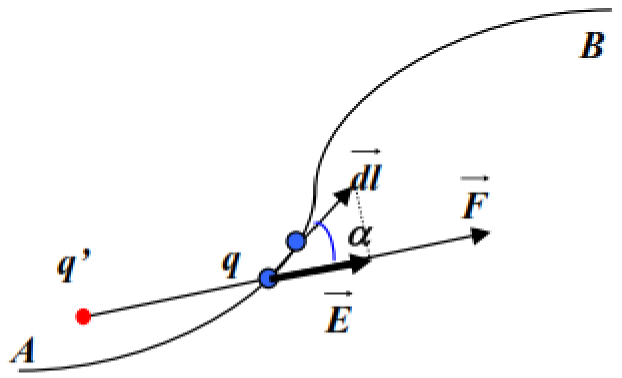
En série



$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

Energie électrostatique

Soit q une charge qui se déplacent, sous l'effet d'un champ extérieur E , de A vers B. E est crée par une autre charge q'.



Le travail nécessaire pour faire déplacer q de dl est :

$$dW = -\vec{F}\,\vec{dl} = -Fdl\cos\alpha = -qEdl\cos\alpha$$

On appelle énergie électrostatique d'une charge q soumise sous l'action d'un champ électrique, le travail qu'il faut fournir contre les forces électrostatiques pour ramener cette charge de l'infini où le potentiel est nul jusqu'à sa position actuelle où le potentiel est V.

$$W_e = qV$$

Energie d'un conducteur

Supposons que l'on charge un conducteur :
Etat initial $Q = 0 \quad V = 0$
Etat intermédiaire $q \quad v$
Etat final $Q \quad V$

Plaçons-nous à l'état intermédiaire. La charge se fait progressivement en amenant dq de l'infini jusqu'au conducteur ou le potentiel est v.
Il faut donc accomplir le travail $dW = dq\, v$

A l'état final, nous aurons accompli le travail

$$W = \int v dq = \int \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2}$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}}$$