سلسلة القبة في الرياضيات للسنة الثالثة ثانوي

سلسلة القبة

في الرياضيات

للسنة الثالثة ثانوي

إعداد :

رياض عثماني و الياس طرودي

الجمهورية الجزائرية الدمقراطية الشعبية

ثانوية القبة الجديدة للرياضيات 2015/1/ 26

المستوى 3ر المدة: ساعة

التمرين الأول (5ن)

1/ نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $14x-31y=2015......(1)$

أ/ تحقق أن المعادلة (1) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

ب/ حلل العدد 2015 إلى جداء عوامل أولية.

جـ/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (1) فان x مضاعف للعدد 31

د / استنتج حلول المعادلة (1)

2/ عين الحلول الطبيعية $(x;y)$ للمعادلة (1)

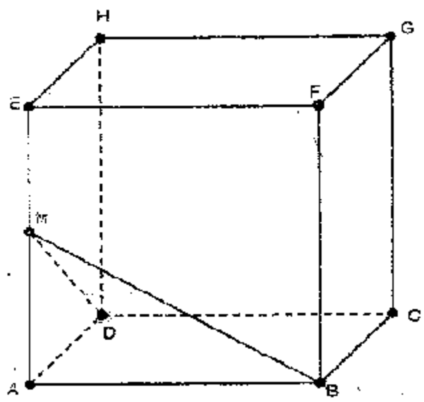
3/ عين الحلول الطبيعية $(x;y)$ للمعادلة (1) التي تحقق: $PGCD(x;y)=2015$.

التمرين الثاني:(5 ن)

ليكن $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1

ليكن a عدد حقيقي موجب تماما. لتكن M نقطة من نصف المستقيم $[AE)$

معرفة بـ : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}$



1. عين حجم رباعي الوجوه $ABDM$ بدلالة a
2. ليكن K مرجح النقط المثقلة (M,a^2) $(B,1)$ $(D,1)$

أ- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{BK}$ بدلالة $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{BD}$

ب- احسب $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج المساواة $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{MD}=0$

ج- اثبت $\overrightarrow{DK}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

د-اثبت أن النقطة K هي نقطة تقاطع الاعمدة في المثلث BDM

هـ -اثبت أن $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ و $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{MD}=0$. ما ذا نستنتج بالنسبة للمستقيم (AK)

و - بين أن المثلث BDM متساوي الساقين وأن مسا حته هي $\frac{\sqrt{a^2+2}}{2a}$ وحدة مساحة

ي- عين العدد a حتى تكون مساحة المثلث BDM هي 1 وحدة مساحة ثم احسب في هذه الحالة المسافة AK

ثانوية توفيق بوعتورة
الشعبة: رياضيات

المدة : 4 سا و 30 د
* دورة : 2015 *

بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات : 2015

الموضـــــوع الأول

التمرين الأول (04 نقط):

ينسب الفضاء الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن المجموعة $\left(P_m\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $(m+1)x-(m-1)y-(2m-1)z-1=0$ حيث $m\in\mathbb{R}$

1- برهن أن $\left(P_m\right)$ مستوي من أجل كل وسيط حقيقي m

2- بين أن جميع المستويات $\left(P_m\right)$ تتقاطع وفق مستقيم (Δ) يطلب تعين تمثيل وسيطي له

3 – ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m نقاط تقاطع $\left(P_m\right)$ مع المستقيم (d) ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1+2t \end{cases}$$

4- أوجد معادلة ديكارتية للمستوي P الذي يشمل النقطة $A(1;2;1)$ و يوازي المستوي $\left(P_0\right)$.

5- أوجد معادلة ديكارتية للمستوي Q الذي يشمل $\left(P_0\right)\cap\left(P_1\right)$ و يعامد $\left(P_2\right)$

التمرين الثاني(04 نقط):

I – ليكن z عدد مركب : علما أن $|z|^2=z\bar{z}$ برهن أن $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$

II - ينسب المستوي المركب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

نعتبر النقطتين A و B صورتا العددين 1 و 1- على الترتيب ،ليكن التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة $z\neq 1$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\dfrac{1-z}{\bar{z}-1}$

1 – لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C=-2+i$

عين $z_{C'}$ لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالتحويل f ثم برهن أن النقط A , C , C' في استقامية

2 – عين المجموعة γ مجموعة النقط M من المستوي التي صورتها بالتحويل f هي النقطة A.

3 – برهن أنه من أجل كل نقطة M تختلف عن النقطة A فإن النقطة M' تنتمي الى الدائرة (C) التي مركزها O ونصف قطرها 1

4 - برهن أنه من أجل كل عدد مركب $z\neq 1$ ، $\dfrac{z'-1}{z-1}$ عدد حقيق ، ماذا تستنتج بالنسبة للنقط A ، M و M'

التمرين الثالث(04 نقاط):

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = u_1 = 1$ و $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$

1 – برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = 2^{n+1} - 3^n$

2 – أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 2^n و 3^n على 5

3 – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3^{3n+2} + 2^{n+4} \equiv 0[5]$

4- عين باقي قسمة العدد $2012^{4n+2} - 1433^{2011}$ على 5

5 – عين قيم العدد الطبيعي n حيث : $u_n + 1 \equiv 0[5]$

التمرين الرابع(08 نقاط):

I – f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^2}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و (C_h) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $h(x) = \dfrac{1}{x}$ في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 – أدرس تغيرات الدالة f

2- عن احداثيات النقطة I نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل

3 – من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ نضع : $g(x) = 1 - x + 2\ln x$

أ - أدرس تغيرات الدالة g

ب – برهن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين 1 و β حيث $\beta \in]2,4[$

أعط حصرا للعدد β المقرب إلى 10^{-2}

جـ – ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمنحنى (C_h) ، ثم أرسم في نفس المعلم كل من (C_f) و (C_h)

II - 1 – ليكن (D) الحيز المعرف كما يلي : $\begin{cases} 1 \le x \le \beta \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

أ – أحسب $A(\beta)$ مساحة الحيز (D)

ب - برهن أن $A(\beta) = 2 - \dfrac{2}{\beta}$ ، ثم عين حصرا للعدد $A(\beta)$ المقرب إلى 10^{-2}

2 - نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$

أ – برهن أنه من أجل $n \ge 4$ لدينا : $0 \le u_n \le \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ ، عين $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

جـ - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

III - نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة : $n \ge 1$ $f_n(x) = \dfrac{1+2\ln x}{x^{2n}}$

1 – أحسب f_n' الدالة المشتقة للدالة f_n

2 – حل المعادلة $f_n'(x) = 0$ ، نسمي x_n هذا الحل عين $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

التمرين الأول : (04 نقاط)

1 - نعتبر المعادلة التفاضلية : $y' - y\ln 3 = 0 \,.........(E)$

أ- عين حلول المعادلة (E)

ب - عين الحل الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = 0$ نسمي $f(x)$ هذا الحل

2 – 1 - ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 11

ب – استنتج باقي قسمة العدد $f(2014)$ على 11

ج – من أجل كل عدد الطبيعي n نضع : $S_n = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$

، عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد S_n مضاعف للعدد 11

التمرين الثاني : (08 نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$

1 – أدرس تغيرات الدالة g

2- بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث : $\dfrac{\ln 2}{2} \prec \alpha \prec 1$

3 – استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0\,,+\infty[$

II – نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x\sqrt{e^{\left(\frac{2}{x}\right)} - 1}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- برهن أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

2 - أحسب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

3 – برهن أن : من أجل $x \in]0\,,+\infty[$ لدينا : $f'(x) = \dfrac{e^{\left(\frac{2}{x}\right)}}{\sqrt{e^{\left(\frac{2}{x}\right)} - 1}} \times g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

4 - استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم أكتب جدول تغيراتها

5 – انشئ المنحنى (C_f)

التمرين الثالث: (08 نقاط)

I - لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-1\,;1[$ كما يلي : $\begin{cases} f'(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+1 \\ f(0)=0 \end{cases}$ C_f تمثيلها البياني

1 – ادرس اتجاه تغيرات الدالة f

2 – أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى C_f عند القيمة 0

3 - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1\,;1[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-x$

أ - ادرس اتجاه تغيرات الدالة g

ب – استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1\,;1[$

4 - استنتج وضعية C_f بالنسبة للمماس (T)

5- هل للمنحنى C_f مماس يوازي المستقيم (d) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$

II – نريد تعيين دالة f تحقق الشروط التالية :

$$\begin{cases} f'(x)=-f^2(x)+2f(x) \\ f(0)=1 \\ f(x)\neq 0 \end{cases}$$ من أجل كل عدد حقيقي x .

1- من أجل كل عدد حقيقي x نضع : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

أ – بين أن الدالة g هي حلا للمعادلة التفاضلية $y'=-2y+1$ .... (E)

ب – عين حلول المعادلة (E)

2 – عين الدالة f التي تحقق الشروط السابقة

إنتــهـــى

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
المنافسة العلمية و الأدبية الولائية جزائر وسط –2015–

المستوى : السنة الثالثة رياضيات المدة : 03 ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول(06 نقاط):

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ، } B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ و } C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

1) بين أن A_n ، B_n و C_n أعداد طبيعية غير معدومة

2) احسب القاسم المشترك الأكبر لـ A_n و B_n (يمكن استعمال الموافقة بترديد 3)

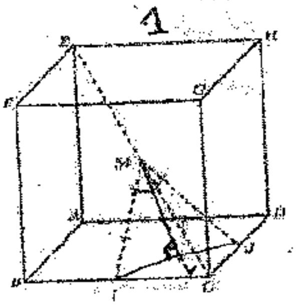
3) نضع $D_n = PGCD\left(C_n;C_{n+1}\right)$

أ. احسب D_n (يمكن استعمال الموافقة بترديد 2)

ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ويختلف عن 1 :

الأعداد C_n ، C_{n+1} و C_{n+2} أولية فيما بينها

التمرين الثاني(07 نقاط) :



$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1

لتكن I و J منتصفا $[BC]$ و $[DC]$ على الترتيب.

M نقطة كيفية من الحرف $[CE]$. (لاحظ الشكل)

ننسب الفضاء إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)$

1) أ. عين دون برهان ، إحداثيات النقط C ، E ، I و J

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[0;1]$ ، إحداثيات النقطة M هي $(1-t;1-t;t)$

2) أ. بين أن النقطتين C و E من المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[IJ]$

ب. استنتج أن المثلث MIJ متساوي الساقين رأسه الأساسي M

جـ. عبر عن IM^2 بدلالة t

3) ليكن θ قيس للزاوية $\widehat{IMJ}$ بالراديان ، حيث $\theta \in [0;\pi]$

أ. برهن أن θ يكون أعظميا إذا وفقط إذا كان $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ أعظميا .

ب . استنتج أن القيس θ يكون أعظميا إذا كان IM أصغر ما يمكن .

جـ. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بـ : $f\left(t\right)=3t^{2}-t+\dfrac{1}{4}$.

د. استنتج وجود نقطة M_0 من مجموعة النقط M من الضلع $[CE]$ بحيث يكون قيس الزاوية $\widehat{IMJ}$ أعظميا .

هـ. بين أن النقطة M_0 هي المسقط العمودي للنقطة I على الضلع $[CE]$

التمرين الثالث(08 نقاط) :

a و b عددان حقيقيان موجبان تماما حيث : $a<b$ و لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\dfrac{\ln\left(1+ax\right)}{\ln(1+bx)} & ;x\in\left]0;+\infty\right[\\ f\left(0\right)=\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

$\dfrac{\ln(1+ax)}{x}\times\dfrac{x}{\ln(1+bx)}$

و لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ : $g\left(x\right)=a\left(1+bx\right)\ln\left(1+bx\right)-b\left(1+ax\right)\ln\left(1+ax\right)$

1) أ. بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $g'\left(x\right)>0$

ب. أحسب $\lim\limits_{x\to0}g\left(x\right)$

$\dfrac{\ln(1+ax)-\ln(1)}{x-0}$

جـ. استنتج إشارة $g\left(x\right)$ على المجال $]0;+\infty[$

$\left(\ln(1+ax)\right)'(0)=\dfrac{a}{1+ax}$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$ ، فسر النتيجة بيانيا

3) أحسب $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)$ ، ماذا تستنتج ؟

4) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0=0$ على اليمين .

5) عين f' الدالة المشتقة للدالة f

6) بين أن إشارة $f'\left(x\right)$ من إشارة $g\left(x\right)$ ، استنتج تغيرات الدالة f

7) نضع $b=2a=1$ ، أرسم $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (وحدة الرسم $2cm$)

— انتهى—

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لوسط ولاية الجزائر — ثانوية الرياضيات - مخبي محند - القبة

اختبار مادة الرياضيات الفصل الثاني

السنة الثالثة ثانوي — المدة : 4 ساعات

تمرين 1 (4 نقاط)

1) أوجد x في مجموعة الأعداد الصحيحة ، حيث : $x^2+2x+6\equiv 0[7]$

2) عين قيم العدد الطبيعي b حيث العدد $A=\overline{126}$ في النظام ذي الأساس b يقبل القسمة على 7 وعلى 6

تمرين 2 (5 نقاط)

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=z^3+\left(-2+\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1-\sqrt{2}\right)z+2\sqrt{2}$

1) أ - حل المعادلة $P(z)=0$ علما أنها تقبل حلا حقيقيا α .

ب - أكتب حلول هذه المعادلة على الشكل الأسي

2) C,B,A نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب Z_A و Z_B و Z_C حلول المعادلة $P(z)=0$ حيث : $Z_A=\alpha$ و $\mathrm{Im}(Z_B)>0$ و Z_C الحل الآخر .

أ) بين أن النقطة A هي صورة النقطة B بدوران مركزه O ، عين زاوية هذا الدوران .

ب) عين سابقة النقطة C بهذا الدوران .

3) عين طويلة وعمدة العدد $\dfrac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$

4) بين أن قيس الزاوية (AO,AB) هي $\dfrac{\pi}{8}$

5) أكتب $\dfrac{Z_A-Z_B}{Z_A}$ على الشكل الجبري ثم استنتج قيمتي $\cos\dfrac{\pi}{8}$ و $\sin\dfrac{\pi}{8}$

تمرين 3 (5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر المستوي $\left(P_m\right)$ الذي معادلته :

$(m^2+3)x+4y+2mz+m^2-7m=0$ حيث m عدد حقيقي

والمستوي (φ) الذي معادلته : $x+y+4z+1=0$

و (Δ) مستقيم يشمل النقطة $A\left(1,1,1\right)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(1,3,-4\right)$.

1. عين مركبات الشعاع الناظمي $\vec{n}$ للمستوي $\left(P_m\right)$ ومركبات الشعاع الناظمي $\vec{e}$ للمستوي (φ)

2. أ) عين المجموعة K للأعداد الحقيقية m لكي يكون $\left(P_m\right)$ عموديا على (φ) .

ب) عين المجموعة L للأعداد الحقيقية m لكي يكون $\left(P_m\right)$ عموديا على (Δ) .

3. يرمز (S) لسطح الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 1

أ) عين بدلالة m المسافة δ_m بين O والمستوي (P_m) .

ب) أحسب : δ_{-2} و δ_0 و δ_1 .

استنتج وضعية الكرة (S) بالنسبة لكل مستو : (P_{-2}) و (P_0) و (P_1) .

جـ) عين المجموعة M للأعداد الحقيقية لكي يكون (P_m) مماسا لسطح الكرة (S) .

<u>تمرين 4</u> (6 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$f(x) = \left|1 + \frac{1}{x}\right|^x$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{0; -1\}$

و $f(0) = +1$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أوجد نهاية الدالة f عند $-\infty$ عند $+\infty$. ماذا تستنتج ؟

2) أدرس قابلية اشتقاق f عند 0 . فسر النتيجة هندسيا.

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أنشئ (C_f) .

بالتوفيق

Exercice N35

نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ وفق العبارة التالية: $f_k(x)=x+\dfrac{1-ke^{2x}}{1+ke^{2x}}$ حيث k عدد حقيقي موجب تماما.

نسمي (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.وحدة الطول $2cm$.

1. أحسب نهايتي الدالة f_k عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
2. أ) تحقق ان الدالة f_k هي حل للمعادلة التفاضلية : $y'=(y-x)^2$

ب) بين أن الدالة المشتقة f_k' تنعدم من أجل عدد حقيقي وحيد x_k يطلب تعينه.

ج) عيّن اتجاه تغير الدالة f_k و قدم جدول تغيراتها.

3. لتكن A_K النقطة من المنحني (C_k) ذات الفاصلة x_k

أ) أحسب ترتيب النقطة A_K.

ب) بين أن النقطة A_K هي نقطة انعطاف للمنحني (C_k).

ب) بين أن النقط A_K تنتمي الى نفس المستقيم عندما يمسح k المجال $]0;+\infty[$.

4. أ) من أجل كل عدد حقيقي x ، $f_k(x)$ يكتب بالشكلين الآتيين :

$$f_k(x)=x+1-\frac{2ke^{2x}}{1+ke^{2x}} \quad ، \quad f_k(x)=x-1+\frac{2}{1+ke^{2x}}$$

ب) بين أن المنحني (C_k) يقبل مستقيمين مقاربين (Δ_1) ، (Δ_2) معادلتاهما على الترتيب:

$y=x+1$ و $y=x-1$.

ج) أدرس وضعية المنحني (C_k) بالنسبة لكل مستقيم.

د) بين أنه توجد نقطة وحيدة من المنحني (C_k) يكون فيها معامل توجيه المماس يساوي $\dfrac{1}{2}$.

5. أ) عين قيمة العدد k حتى يمر المنحني (C_k) من مبدأ المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

ب) أنشئ المنحنيات $\left(C_{\frac{1}{4}}\right)$ ،(C_1) ،(C_3) في نفس المعلم.

6. عين دالة أصلية للدالة f_k على المجال $]-\infty;+\infty[$ و التي تنعدم من أجل $x=1$.
7. نعتبر الدالة g_k المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة: $g_k(x)=\dfrac{1-kx^2}{1+kx^2}+\ln x$

أ) بين من أجل كل عدد حقيقي x أكبر تماما من الصفر ، $g_k(x)=f_k(\ln x)$

ب) عين اتجاه تغير الدالة g_k ثم قدم جدول تغيراتها.

ثانوية سعيد حمدين	امتحان البكالوريا التجريبي لمادة الرياضيات	شعبة رياضيات	المدة : 4 سا و30د	2011-05-16

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 ن)

نعتبر المعادلة $16x-3y=4$ ....(E) ، حيث x,y عددان صحيحان.

1) - تحقق ان $(x,y)=(1,4)$ حلا لـ (E).
 - أوجد كل حلول (E).

المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z'=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}Z$.

(M_n) متتالية نقط معرفة كمايلي :

M_0 صورة لـ Z_0 حيث $Z_0=i$ ، من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_{n+1}=f(M_n)$ ، العدد المركب Z_n هو لاحقة لـ M_n.

2) مثل النقط M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 في المعلم المذكور.
3) حدد طبيعة f بذكر عناصره المميزة.
4) نضع $g=f\circ f\circ f\circ f$.
أ- حدد الطبيعة و العناصر المميزة لـ g.
ب- عرف النقطة M_{n+4} بدلالة M_n.
ج- مثل النقط M_4 ، M_5 ، M_6.
5) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $Z_n=\sqrt{2}^n e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3n\pi}{8}\right)}$.
6) P ، n عددان طبيعيان حيث $P\le n$.
أ- أعط قيما للزاوية $\left(\overrightarrow{OM_p};\overrightarrow{OM_n}\right)$ بدلالة P و n.
ب- أوجد علاقة بين P و n حتى يكون المثلث M_nOM_p قائم و مباشر.

التمرين الثاني : (4.5 ن)

نعتبر $ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 3.

I ، J ، K مرجح الجمل التالية على التوالي : $\{(E,2);(F,1)\}$ ، $\{(F,1);(B,2)\}$ ، $\{(G,2);(C,1)\}$.

(Δ) مجموعة النقط M المتساوية البعد عن كل من I ، J ، K

1) مثل المكعب المذكور ثم النقط I ، J ، K.
2) ω نقطة من (Δ) و تنتمي الى المستوى (IJK).
ماذا تمثل هذه النقطة بالنسبة للمثلث IJK.

نعتبر المعلم المتعامد و المتجانس $\left(A,\frac{1}{3}\overrightarrow{AD};\frac{1}{3}\overrightarrow{AB};\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

3) أعط إحداثيات كل من I ، J ، K.
4) علم النقطتين $P(2,0,0)$ و $Q(1,3,3)$ ثم برهن أن المستقيم (PQ) ، يعامد المستوي (IJK).
5) $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء.
أ- أثبت أن M تنتمي إلى (Δ) إذا و فقط إذا (x,y,z) هي حل لجملة معادلتين عينهما.
 - عين المجموعة (Δ).
ب- تحقق أن P و Q نقطتين من (Δ) ، ثم أنشئ (Δ).
6) أوجد شعاعا ناظميا للمستوي (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية له.
أوجد عندئذ إحداثيات ω.

<u>التمرين الثالث:</u> (3 ن)

1) m ، n عددان صحيحان و لتكن المعادلة $11n-24m=1$ ....(1).

- برر لماذا (1) تقبل حلا على الأقل.
- باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد حلا خاصا لـ (1).
- عين كل حلول المعادلة (1)

2) أ- أثبت أن $10^{P}-1$ يقسم $10^{PK}-1$ حيث P و K عددان صحيحان كيفيان.

ب- (n,m) ثنائية كيفية من الأعداد الطبيعية حلولا لـ (1).

أثبت أن : $\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=9$.

ج- أوجد عددين صحيحين x ، y يحققان : $\left(10^{11}-1\right)x-\left(10^{24}-1\right)y=9$.

3) - عين القيم الممكنة لـ $d=p\text{gcd}\left(10^{11}-1;10^{24}-1\right)$.

- استنتج عندئذ قيمة d .

<u>التمرين الرابع:</u> (7.5 ن)

I- f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x+3)-(x+1)e^{x}$.

$f(x)=(2x+3)-(x+1)e^{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب لمعلم المتعامد و المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $f'(x)$ ، $f''(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة f'

2) أحسب $f'(0)$ و استنتج إشارة $f'(x)$.

3) أدرس تغيرات الدالة f

4) بين أن (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة له.

5) أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين α و β حيث :

$0.92<\alpha<0.93$ و $-1.56<\beta<-1.55$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C).

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز من المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمات التي معادلاتها : $x=0$ ، $x=\alpha$ ، $y=2x+3$. (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال (5 أ)

ج- بين أن $A(\alpha)=\dfrac{2\alpha^{2}+3\alpha}{1+\alpha}$ ، ثم جد حصرا العدد $A(\alpha)$.

II- m عدد حقيقي غير معدوم ، f_m دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة بـ : $f_m(x)=(2x+3)-(x+1)e^{mx}$.

1) بين أن جميع المنحنيات (f_m) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيين إحداثيي كل منهما.

2) أوجد معادلة المماس للمنحني (C_m) عند النقطة التي احداثيتها $(0,2)$.

3) n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2، $f_m^{(n)}$ المشتقة من الرتبة n للدالة f_m.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ $\quad f_m^{(n)}(x)=-m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$.

بالتوفيق

بالتوفيق

- إنتهى -

ثانوية سعيد حمدين	امتحان البكلوريا التجريبي لمادة الرياضيات	شعبة رياضيات	المدة : 4 سا و 30 د	2011-05-16

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (5.5 ن)

المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط B ، C ، H ذات اللواحق : $b=5i$ ، $c=10$ ، $h=2+4i$.

- علم هذه النقط في المعلم المذكور و أكمل الشكل حسب الأسئلة اللاحقة.

1) أثبت أن H ، نقطة من (BC) .

2) أحسب $\frac{h}{h-c}$ ثم استنتج قيسا لـ $(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HO})$.

3) أحسب النسب $\frac{BH}{OH}$ ، $\frac{BO}{OC}$ ، $\frac{OH}{CH}$

- أثبت أنه يوجد تشابه مباشر S_1 يحول المثلث CHO الى المثلث OHB .
- أعط العبارة المركبة لـ S_1 و عناصره المميزة .

4) - نعتبر التشابه S_2 الذي يحول كل نقطة M ذات اللاحقة Z الى نقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$$Z'=(-1-2i)\overline{Z}+10$$

- أثبت أن S_2 هو تركيب تناظر عمودي محوره (Δ) و تشابه مباشر مركزه ω نقطة من (Δ) الذي يطلب تعيينه .

5) ما هي نسبة التشابه $S_2 \circ S_1$

- استنتج العلاقة بين مساحتي المثلثين CHO و BOC .

التمرين الثاني: (4 ن)

(U_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام : $U_n=\frac{n^2}{2^n}$ حيث $n>0$

1) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}$

أ- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n$.

ب- أثبت أنه من أجل كل $n>0$ $V_n>\frac{1}{2}$.

ج- أوجد أصغر عدد طبيعي n_0 حيث من أجل كل $n\geq n_0$: $V_n<\frac{3}{4}$.

د- استنتج أنه إذا $n\geq n_0$ فإن $U_{n+1}<\frac{3}{4}U_n$.

2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$ و $n\geq 5$ $S_n=U_5+U_6+\ldots\ldots+U_n$.

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ و $n\geq 5$: $U_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}U_5$.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}$ و $n\geq 5$: $S_n\leq\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right)U_5$.

ج- استنتج أن $S_n\leq 4U_5$.

3) أدرس اتجاه تغير (S_n) ، ثم تقاربها .

التمرين الثالث: (5.5 ن)

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1.

1) أ- أعط ممثلا للشعاع $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$.

ب- أحسب الجدائين السلميين التاليين $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}$ ؛ ماذا تستنتج ؟

ج- تحقق أن (AG) هو ناظمي لـ (BDE).

2) نعتبر I مركز ثقل المثلث BDE.

- استنتج من السؤال (1 أ) أن I هي نقطة تقاطع (AG) و المستوى (BDE) محددا موقع I على القطعة $[AG]$.

3) نعتبر الفضاء المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

أ- أكتب معادلة للمستوى (BDE).

ب- أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل H و يعامد (BDE)

ج- عين إحداثيات النقطة J نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوى (BDE).

د- استنتج المسافة بين H و (BDE).

التمرين الرابع: (9 ن)

المستوي المنسوب لمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i};\vec{j})$.

I- n عدد طبيعي غير معدوم ، f_n دالة عددية معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f_n(x)=\frac{(\ln x)^n}{x^2}$.

(C_n) تمثيلها البياني في المعلم المذكور .

1) أدرس تغيرات f_1 ، عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_1) في النقطة ذات الفاصلة 1.

2) بين أن جميع المنحنيات (C_n) تشترك في نقطتين ثابتتين عينهما ؟

3) - أحسب $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)$ (تميز حالتين n فردي و n زوجي) ، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n في حالة n فردي ثم في حالة n زوجي و شكل جدول تغيراتها في كل حالة.

4) أدرس الوضعية النسبية لـ (C_n) و (C_{n+1}).

5) أنشئ (C_1) و (C_2).

II- (U_n) متتالية عددية معرفة بـ $U_n=\int_1^e f_n(x)dx$.

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $U_1=1-\frac{2}{e}$ ، $U_{n+1}=-\frac{1}{e}+(n+1)U_n$.

2) أحسب U_2 و استنتج بذلك مساحة الحيز من المستوى المحدد بـ (C_1) و (C_2) و المستقيمين ذي معادلتين $x=1$ و $x=e$

3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n!}U_n=1-\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+.....+\frac{1}{n!}\right)$.

4) باستعمال حصرا لـ $\ln x$ لما $x\in[1,e]$ بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ $0\le U_n\le e-1$.

- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+.....+\frac{1}{n!}\right)$.

بالتوفيق

بالتوفيق

- إنتهى -

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 ن)

في الشكل المرفق (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{ln(x)}$ والمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1 / باستعمال التمثيل البياني للدالة f ، مثل على محور الفواصل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3$.

2 / أعط تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n)

3 / برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$.

4 / أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي l من المجال $[e;+\infty[$.

5 / لحساب نهاية المتتالية (u_n) اثبت أن : $f(l)=l$ ثم استنتج قيمة l .

التمرين الثاني : (05 ن)

$I)$ 1 / حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

2 / استنتج حلول المعادلة : $\left(\overline{z}+2+2\sqrt{3}i\right)^2-2\overline{z}-4\sqrt{3}i=0$ حيث $\overline{z}$ هو مرافق z

$II)$ المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ،نعتبر النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق على الترتيب: $z_A=1+\sqrt{3}i$ ، $z_B=1-\sqrt{3}i$ ، $z_C=-1+\sqrt{3}i$ و $z_D=-1+3\sqrt{3}i$

1 / أ * أوجد زاوية ونسبة التشابه المباشر f الذي مركزه B ويحول C إلى A ، ثم أعط عبارته المركبة

ب * عين إحداثيات D' صورة D بالتشابه f ، ثم استنتج أن المثلثين BCD ، BAD' متشابهين .

2 / نعتبر التحويل النقطي T الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $2z'=2\left(-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\right)z-1$

أ / أكتب العدد α حيث : $\alpha=-i\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}$ على الشكل المثلثي ثم على الشكل الأسي

ب / عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة

جـ / عين العبارة المركبة للتحويل Tof

3 / أ / بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق ; $2(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}=0$ هي دائرة مركزها Ω ذات اللاحقة 2- ويطلب تعيين نصف قطرها

ب / عين صورة الدائرة (Γ) بالتحويل Tof

التمرين الثالث: (05 ن)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، ولتكن النقط $A(2;1;1)$ ، $B(-2;1;-1)$ ، $C(0;2;1)$ ،

وليكن المستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي ; $\begin{cases}x=-2t+2\\ y=t-1 \quad .....t\in\mathbb{R}\\ z=-t+4\end{cases}$

- اختر الإجابة الصحيحة مع التعليل:

1 . المستقيم (T) الذي يشمل النقطتين A و B والمستقيم (Δ) هما :

أ / متوازيان ب / ليسا من نفس المستوي جـ / متقاطعان

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
اختبار الفترة الاولى
الشعبة: رياضيـــــــــات

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : 03 ساعات و نصف

التمرين الأول: (03 نقاط)

لكل سؤال أربعة أجوبة مقترحة أحدها – فقط – صحيح، يطلب تحديده .

1 – في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة: $x^2 + x + 3 \equiv 0\ [5]$.

(أ) لا تقبل حلولا . (ب) حلولها زوجية .

(جـ)حلولها تحقق $x \equiv 2\ [6]$ (د) حلولها تحقق $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 3[5]$.

2 –نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة التالية : $24x + 34y = 2 \ldots(1)$.

(أ) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(17k-7 ; 5-12k)$.

(ب) حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(-7k ; 5k)$.

(جـ)حلول المعادلة (1) من الشكل : $(x;y)=(34k-7 ; 5-24k)$.

(د) المعادلة (1) لا تقبل حلولا .

3– N عدد طبيعي يكتب : $\overline{421}$ في النظام ذي الأساس 5 .

العدد N يكتب في النظام ذي الأساس 6 بالشكل :

(أ) $\overline{421}$ (ب) $\overline{111}$ (جـ) $\overline{303}$ (د) $\overline{222}$.

4– باقي القسمة الإقليدية للعدد 1436^{2014} على العدد 3 هو :

(أ) 0 (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3 .

5– من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $a = n(n+2)$, $b = n+1$.

بما أن: $b^2 - a = 1$ فإن القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو :

(أ) n (ب) n+1 (جـ) 1 (د) 2 .

التمرين الثاني : (03.5 نقاط)

حل معادلة تفاضلية : نعتبر المعادلتين التفاضليتين :

$y' + y = 2(x+1)e^{-x}$ ...... (E) و $y' + y = 0$ ...... (E') .

الهدف من هذا الجزء هو حل المعادلة (E) و تعيين حلول خاصة لها .

1) بين أن الدالة ϕ المعرفة على R بـ $\phi(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$ هي حل للمعادلة (E)

2) حل المعادلة (E') .

3) بين أن : تكون الدالة u حلا للمعادلة (E') إذا و فقط إذا كانت الدالة: $u + \phi$ حلا للمعادلة (E) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية
و تحسين مستواهم

دورة: 2015

مسابقة الدخول إلى المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية و تحسين مستواهم

للالتحاق برتبة مفتش التعليم المتوسط

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة : 4 ساعات

التمرين الأول : (5نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{\cos x}-1-\frac{x^2}{2}$

1. احسب $f''(x)$.

2. عين اتجاه تغير الدالة f' على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

احسب $f'(0)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

قارن بين $\frac{1}{\cos x}$ و $1+\frac{x^2}{2}$ من أجل كل x في المجال $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

التمرين الثاني: (4نقاط)

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^4+z^3+z^2+1=0$

تعطى الحلول على الشكل المثلثي ثم على الشكل الجبري

2- استنتج قيمة : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ و $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

3 - إذا علمت أن العدد المركب Z المعرف سابقا يمكن كتابته على الشكل : $Z=\frac{z_1+z_2}{1+z_1.z_2}$ حيث $|z_1|=|z_2|=1$

اثبت عندئذ أن العدد Z عدد حقيقي

التمرين الثالث : (5نقاط)

عين الثنائيات (a,b) من $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ التي تحقق :

$$\begin{cases}2a^2+b^2=16072\\ pgcd(a,b)=14\end{cases}$$

التمرين الرابع :(6 نقاط)

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 1$

نضع : $I_n=\int_1^{e^2}\frac{(\ln x)^n}{x^2}dx$

1-احسب I_1

2- اثبت أن $I_{n+1}=-\frac{2^{n+1}}{e^2}+(n+1)I_n$

3- استنتج قيمتي I_2 و I_3

المنحني ذو المعادلة: $y=\frac{(\ln x)^2}{x}$ مع $x\in\left[1,e^2\right]$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يدور حول المحور $(O;\vec{i})$ احسب حجم الجسم المتولد عن الدوران

التمرين الأول :

نعتبر المتتاليتين u_n و v_n حيث : $u_n=\frac{1}{2^n}$ و $v_n=n\frac{\pi}{3}$.

نسمي النقطة M_n التي لاحقتها z_n حيث : $z_n=u_ne^{iv_n}$

1 – عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون z_n حقيقي

2 – المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، عين لواحق النقط : M_4,M_3,M_2,M_1,M_0

3 – أحسب أطوال أضلاع المثلث OM_nM_{n+1} بدلالة u_n

استنتج طبيعة المثلث OM_nM_{n+1}

4 – نعتبر المتتالية (α_n) المعرفة بـ : $\alpha_n=|z_{n+1}-z_n|$

أ – بين أن المتتالية هندسية

ب – أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

التمرين الثاني:

1 – نعتبر المعادلة : $ax+by=60$ .....(E) حيث $ab\neq0$ و $p\gcd(a,b)=d$

أ – عين القيم الممكنة للعدد d

ب – نفرض أن d يقسم 60 ، بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0)

2 – نضع $a=24$ و $b=36$

أ - أحسب $p\gcd(24,36)$

ب – عين الثنائية (x_0,y_0) حل خاص للمعادلة (E) ، ثم استنتج الحل العام للمعادلة (E)

جـ - استنتج الحلول التي تحقق $-10\leq x\leq10$ ، ثم استنتج من بينها التي هي مضعفات 5

التمرين الثالث :

نعتبر العدد المركب $z=e^{i\frac{2\pi}{5}}$ و النقط $D;C;B;A;I$ لواحقها على الترتيب $z^4;z^3;z^2;z;1$

1 – بين أن : $IA=AB=BC=CD$

2 – من أجل كل عدد مركب z نضع : $P(z)=z^5-1$

أ – حلل $P(z)$

ب – أحسب z^5

جـ - استنتج أن : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$

3 – بين أن : $z^3=\overline{z}^2$ و $z^4=\overline{z}$

4 – استنتج أن : $(z+\overline{z})^2+(z+\overline{z})-1=0$........$(E)$

5 – حل المعادلة (E) ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{2\pi}{5}$

6 – انشئ النقط $D;C;B;A;I$

التمرين الرابع :

1 – لتكن الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$ / $m\in\mathbb{R}^*$

نسمي (C_m) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ – بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين احداثيتها

ب – برهن أن المنحنى (C_m) يقبل نهايتين حديتين يطلب تعيين فاصلتهما

جـ - عين مجموعة النقط Ω_m حيث $\Omega_m(1-m;f_m(1-m))$

2 – نضع : $m=1$

أ – برهن أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$

ب – أدرس تغيرات الدالة f_1

جـ - أكتب معادلة المماس (T) للمنحن (C_1) عند القيمة 1-

د – أرسم كل من (T) و (C_1)

3 – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x)=(x+1)e^{-x}$

أ - أدرس تغيرات الدالة g

ب – أدرس وضعية (C_1) بالنسبة الى (C_g)

جـ - أرسم في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g)

4 – نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية : $y''+2y'+y=2e^{-x}$

أ – تحقق أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $h(x)=x^2e^{-x}$ هي حلا للمعادلة التفاضلية .

ب – استنتج دالة أصلية للدالة h

جـ - أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحنيين (C_1) و (C_g) المستقيمان ذات المعادلتين $x=1$ و $x=-1$

التمرين الأول :

تعتبر العدد المركب $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

1 – أحسب طويلة العدد $\alpha - 1$

2 – نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = \alpha^n$ نسمي M_n النقطة ذات اللاحقة z_n . أنشئ في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقط : M_4, M_3, M_2, M_1, M_0

3 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = |z_n - z_{n-1}|$

أ – برهن أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية

ب – أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

جـ - أحسب S_7 ماذا يمثل

د - أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

التمرين الثاني :

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر سطح الكرة S ذو المعادلة $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$ و المستوي (P) ذو المعادلة : $2x-2y+z-2=0$

1 – أ – عين مركز و نصف قطر سطح الكرة S

ب – حدد الوضع النسبي لـ (P) و S

2 – نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة :

$$2mx-(1-2m)y+mz+2m-1=0$$

و ليكن المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أ – بين أن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P_m)

ب – عين قيمة العدد m حتى يكون المستوي (P_m) مماسا لسطح الكرة S

التمرين الثالث :

n عدد طبيعي يكتب في النظام ذو الأساس 10 بـ :

$$n = \overline{a_p a_{p-1} \ldots a_1 a_0}^{10}$$

حيث p عدد طبيعي غير معدوم و $a_p \neq 0$

1 – أ) بين أن : $10^p \le n < 10^{p+1}$

ب) بين أن : عدد أرقام العدد n هو $[\log n]+1$

حيث : $[\,.\,]$ هو الجزء الصحيح

2 – برمز بـ $S(n)$ إلى مجموع أرقام العدد n المكتوب في النظام العشري

أ) بين أن : $1 \le s(n) \le 9(1+\log n)$

ب) بين أن : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{s(n)} = 1$

3 – نضع الآن $n = 4444^{4444}$ ، نرمز بـ A إلى مجموع أرقام n و بـ B إلى مجموع أرقام A و بـ C إلى مجموع أرقام B

أ) ما هو باقي قسمة العدد n على 9

ب) بين أن $B = 7$

التمرين الرابع :

لتكن الدالة f_m المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f_m(x) = -x + x\ln(mx) \; ; \; x \neq 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases} \qquad m \succ 0$$

تسمي (C_m) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أدرس قابلية الاشتقاق على يمين 0

2- أدرس تغيرات الدالة f_m

3 – أحسب $\lim_{x\to+\infty} \frac{f_m(x)}{x}$ فسر النتيجة هندسيا

4 – بين أن للمنحنى (C_1) مماسا (T) ميله 1-

5 – أرسم كل من (T) و (C_1)

6 - α عدد حقيقي حيث : $0 \prec \alpha \le e$

أحسب المساحة $S(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحنى (C_1) و المستقيمات ذات المعادلات $x=e\,;x=\alpha$ و $y=0$

7 - $\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha)$

8 – أثبت أنه يوجد تحويل بسيط يحول (C_1) إلى (C_λ) حيث $\lambda \succ 0$

الموضوع الثالث

التمرين الأول :

f دالة عددية معرفة على المجال $[0,2]$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

1- ادرس تغيرات الدالة .

2- برهن انه اذا كان $x\in[0,2]$ فإن $f(x)\in[0,2]$

3- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $U_0=1:U_{n+1}=f(U_n)$

و $V_0=2:V_{n+1}=f(V_n)$

أ- عين على محور الفواصل الأعداد :

U_2,U_1,U_0 و V_2,V_1,V_0

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات (U_n) و (V_n)

4- برهن بالتراجع أن $1\le U_n\le 2$ و $U_n\le U_{n+1}$

5- نتقبل أن : $1\le V_n\le 2$ و $V_{n+1}\le V_n$

برهن أن:

-* $V_{n+1}-U_{n+1}=\dfrac{V_n-U_n}{(U_n+1)(V_n+1)}$

-* $V_n-U_n\ge 0$

-* $V_{n+1}-U_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(V_n-U_n)$

$$(V_n-U_n)\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

6- استنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان .

التمرين الثاني:

نعتبرفي مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$\left(z^2-2\sqrt{3}\,z+4\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$$

أ – حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة

ب – أكتب الحلول على الشكل الأسي

2 - نعتبر النقط $D;C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=-1+i\sqrt{3}$

$z_D=\sqrt{3}+i;z_C=\sqrt{3}-i;z_B=-1-i\sqrt{3}$ على الترتيب

أ – أنشئ النقط $D;C;B;A$

ب - أكتب العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_D}$ على الشكل الجبري

جـ - برهن أن $[AC]$ و $[BD]$ متعامدان و متساويان

3 - نضع من أجل كل عدد طبيعي n:

$$z_n=\frac{z_A}{2^n}\left(\cos\frac{2n\pi}{3}+i\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$

نسمي M_n النقطة ذات اللاحقة z_n

أ – أنشئ النقط M_3,M_2,M_1

ب – نضع $u_n=|z_n|$ ، برهن أن (u_n) متتالية هندسية

جـ - أحسب بدلالة n المجموع :

$$S_n=OM_0+OM_1+\cdots+OM_n$$

د - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين الثالث :

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر سطح الكرة S ذو المعادلة $x^2+y^2+z^2+2y-2z+1=0$

و (P) المستوي ذو المعادلة : $x+2y+1=0$

1 – عين تقاطع (P) و S

2 – نسمي $S(m,k)$ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $x^2+y^2+z^2+2mx+2ky-2kz+k^2=0$

$\{(m,k)\neq(0,0)\}$

أ – بين أن $S(m,k)$ كرة يطلب تعيين قطرها و مركزها Ω

ب – عين مجموعة النقط Ω عندما يتغير m و k

التمرين الرابع :

I- u و v دالتان معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$u(x)=x-\ln(1+x)$ و $v(x)=xe^x+1$

1- أ – ادرس تغيرات كل من u و v

ب – استنتج اشارة كل من $v(x)$ و $u(x)$

2- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\ln\left(x+e^{-x}\right)$$

أ – برهن أن $f(x)=-x+\ln\left(1+xe^x\right)$

ب – ادرس تغيرات الدالة f

جـ - برهن أن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$

د – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ فسر النتيجة هندسيا

هـ - أنشئ كل من (Δ) ، (C_f) و منحنى الدالة $\ln$

II – نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$u_n=\int_0^1\ln\left(1+x^n\right)dx$$

أ – باستعمال التكامل بالتجزئة العدد u_1

ب – برهن أن : $0\le u_n\le\dfrac{1}{n+1}$

حـ - ادرس اتجاه تغيرات المتتالية ، ثم استنتج نهايتها .

الموضــوع الرابع

التمرين الأول :

أذكر إما صحة وإما خطأ ما يلي مع التبرير

1. من أجل كل عدد مركب z ، $Re(z^2) = [Re(z)]^2$.
2. من أجل كل عدد مركب z
إذا كان: $|1 + i z| = |1 - i z|$ فان : $Im(z) = 0$
3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس
من أجل كل عددين مركبين غير معدومين z و z′ اللذين صورتيهما على الترتيب M و M′ في المستوي المركب
إذا كان : $|z + z'| = |z - z'|$ فان المستقيمين (OM) و (OM′) متعامدان .

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

ليكن (P_1) ، (P_2) المستويان ذا المعادلتين الديكارتيتين على الترتيب : $-2x + y + z - 6 = 0$ و $x - 2y + 4z - 9 = 0$

1. بين أن (P_1) و (P_2) متعامدان .
2. ليكن (D) مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .
بين أن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) هو :
$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -8 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in R)$$
3. لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D). و لتكن A النقطة ذات الإحداثيات (1- ; 4- ; 9-)
أ- تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P_1) و لا إلى المستوي (P_2) .
ب- بين أن : $AM^2 = 14t^2 - 14t + 21$.
جـ - لتكن f الدالة العددية المعرفة على R بــ :
$f(t) = 2t^2 - 2t + 3$
- أدرس تغيرات الدالة f .
- من أجل أية نقطة M تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

في كل ما يأتي ، نرمز بــ I للنقطة المذكورة سابقا .

4- (Q) المستوي العمودي على (D) و المار من النقطة A .
أ- عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .
ب- برهن أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

التمرين الثالث :

لتكن الدلة f المعرفة على $]-1,+\infty[$ بالعبارة :
$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

1 – أ - ادرس تغيراتها
ب – أحسب $\lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ فسر النتيجة هندسيا
جـ - حل المعادلة $f(x) = x$
د – ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$

2 – برهن أنه إذا كان $x \in [0;1]$ فإن $f(x) \in [0;1]$

3 - برهن أنه إذا كان $x \in [0;1]$ فإن $0 \le f'(x) \le \frac{\sqrt{2}}{4}$

4 – نتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 \in [0;1]$ و
من أجل كل عدد طبيع $u_{n+1} = f(u_n)$
أ – باستعمال التكامل برهن أن :
$$0 \le (\cancel{u_{n+1} - 1}) \le \frac{\sqrt{2}}{4}(\cancel{u_n - 1}) \quad (1-u_n)$$
$1-u_{n+1}$

ب – برهن بالتراجع أن : $0 \le (\cancel{u_n - 1}) \le \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n (\cancel{u_0 - 1})$
$1-u_n$ $(1-u_0)$

جـ - استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

التمرين الرابع :

1 – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :
$$g(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$$
أ – ادرس تغيرات الدالة g
ب - برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ حلا وحيدا α على المجال $]1\,;+\infty[$ ثم استنتج حصرا للعدد α المقرب إلى 10^{-1}
جـ - استنتج اشارة $g(x)$

2 – نعتبر الدالتين f و h المعرفتان كما يلي:
$$f(x) = (2x+1)e^{-x} \quad \text{و} \quad h(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$
أ – بين أن : $f(x) - h(x) = \frac{(2x+1)g(x)}{x^2+x+1}$
ب – استنتج اشارة : $f(x) - h(x)$

3 – نتبر الدالة k المعرفة كما يلي :
$$k(x) = (-2x-3)e^{-x} - \ln(x^2+x+1)$$
أ – أحسب $k'(x)$ ما ذا تستنتج
ب – أحسب مساحة الحيز المحصور بين $\left(C_f\right)$ و $\left(C_h\right)$

تمرين01

نعتبر العدد المركب L المعرف بـ : $L=\frac{3}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

1 - أ – أكتب العدد L على الشكل الأسي

ب – حل في مجوعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2=L$

2 - z_1 و z_2 عددان مركبان معرفان كما يلي : $z_1=\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$

و $z_2=-z_1$

أ – أحسب العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^{2013}$

ب – عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left(\frac{z_1}{\sqrt{3}}\right)^{n}$ حقيقيا

3 – θ عدد حقيقي من المجال $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$ ، M نقطة من المستوي لاحقتها $z=\frac{3}{z_2}e^{i\theta}$

عين مجموعة النقط M لما يتغير θ على المجال $\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$

التمرين الثاني:

1 - عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 و على 11

2 – نعتبر في ممجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة :

(E).....$11x-7y=1$

أ – عين الثنائية $(x_0,y_0)\in\mathbb{N}^2$ حلا خاصا للمعادلة

ب – حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E)

3 – N عدد طبيعي يكتب $N=\overline{xy0001}$ في النظام ذي الأساس 5

عين جميع الثنائيات الطبيعية $(x\ ,\ y)$ التي من أجلها يكون العدد N مضاعف 77

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر المستقيم (Δ_1) المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=2k \\ y=k-2 \qquad k\in\mathbb{R} \\ z=-k \end{cases}$$

و المستويين (P_1) و (P_2) معادلتهما على الترتيب :

$x+y-z-2=0$ و $2x+y+3z=0$

1- ليكن (Δ_2) مستقيم ناتج عن تقاطع (P_1) و (P_2)

أ – بين أن (Δ_2) يمر من النقطة $A(2;-1;-1)$ و يقبل الشعاع $\vec{u}(-;5;1)$ شعاع توجيه له

ب – أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ_2)

جـ - عين تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

2 – أحسب المسافة بين النقطة $B(1;0;-2)$ و المستقيم (Δ_2)

3 – عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق : $\begin{cases} x=2f(x) \\ y=f(x)-2 \\ z=-f(x) \end{cases}$ حيث f هي الدالة المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2-(\ln x)^2}{1+(\ln x)^2}$

التمرين الرابع:

I – لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=(x+3)e^{-\frac{x}{2}}$

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 - أرسم المنحنى (C_f)

3 – برهن أن للمعادلة $f(x)=3$ حلا وحيدا α حيث :

$-2<\alpha<-\frac{3}{2}$

4 - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب العدد $I=\int_{-3}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx$

استنتج مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $x=0$, $x=-3$, $y=0$

II - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=3e^{\frac{x}{2}}-3$

1 – برهن أن المعادلة $f(x)=3$ تكافئ $g(x)=x$

2 – ادرس اتجاه تغيرات كل من g' و g على المجال $[-2\,,\alpha]$

3 – برهن أنه :

إذا كان $x\in[-2\,,\alpha]$ فإن $g(x)\in[-2\,,\alpha]$

4 - برهن أنه :

إذا كان $x\in[-2\,,\alpha]$ فإن $\frac{1}{2}\le g'(x)\le\frac{3}{4}$.

III – نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=-2$

و من أجل كل عدد الطبيعي n $u_{n+1}=g(u_n)$

1- برهن بالتراجع أن $-2\le u_n\le\alpha$

2- برهن أن : $0\le\alpha-u_{n+1}\le\frac{3}{4}(\alpha-u_n)$

3 - برهن بالتراجع أن $0\le\alpha-u_n\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$

4 – استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

تمرين01

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ النقط B,A,M_1,M لواحقها على الترتيب :

$1\,,2,\overline{z},z$

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z تختلف عن 2 النقط M' ذات اللاحقة z' و المعرف كما يلي :

$$(z\neq 2)\qquad z'=\frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$$

1 – أ - عين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C ذات اللاحقة $z_C=2+2i\sqrt{3}$ بالتحويل f

ب – برهن أن C' منتصف القطعة $[OC]$

2 - أ – أحسب العدد $(\overline{z}-2)(z'-1)$

ب– استنتج قيمة الجداء السلمي $BM'\,.\,AM_1$

جـ - أكتب $(\vec{i}\,,\overrightarrow{BM'})$ بدلالة $(\vec{i}\,,\overrightarrow{AM_1})$

3- برهن أن :

أ - $AM\cdot BM'=6$

ب - $(\vec{i}\,,\overrightarrow{BM'})=(\vec{i}\,,\overrightarrow{AM})$

4 – أنشئ النقطة D' صورة النقطة D ذات اللاحقة $2+2e^{i\frac{\pi}{6}}$

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0=-3$

و من أجل كل عدد الطبيعي n : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+3n-1$

1 – أحسب الأعداد $u_3\,,u_2\,,u_1$

2- برهن بالتراجع أن من أجل $n\geq 4$: $u_n\succ 3n-4$

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

من أجل كل عدد الطبيعي n نضع : $v_n=u_n-9n+30$

1 – برهن أن (v_n) متتالية هندسية

2- أكتب عبارة v_n بدلالة n، ثم استنتج عبارة u_n

3 – أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$

التمرين الثالث :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

(Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1;1;3)$ و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له ، (Δ') المستقيم المعرف بجملة المعادلتين :

$$\begin{cases}x+z=0\\ y=3\end{cases}$$

1 – جد تمثيلا وسيطيا لكل من (Δ) و (Δ')

2 – بين أن (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي

3 – أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ)

4 - M نقطة كيفية من المستقيم (Δ)

أ) أحسب المسافة d بين النقطة M و المستوي (P)

ب) عين إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

جـ) عين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ'') الذي يشمل النقطة A' و يوازي المستقيم (Δ)

د) عين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ') و (Δ'')

5 – نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(t)=BM^2$

أ) أكتب عبارة $f(t)$ بدلالة t

ب) بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$

جـ) تحقق أن : $d=\sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع :

من أجل كل عدد طبيعي n نعرف على المجال $]0\,;+\infty[$ الدالة f_n بالعبارة : $f_n(x)=\frac{e^x-1}{x}+n\ln x$

الجزء الأول :

دراسة الحالة الخاصة $n=0$

1- أنشئ في معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ منحنى الدالة الأسية و المماس عند القيمة 0

2- أ) استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي u لدينا : $e^u\geq u+1$

ب) استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا

$$1+(x-1)e^x\geq 0 \quad و \quad e^{-x}+x-1\geq 0$$

3 – أدرس تغيرات الدالة f_0 على المجال $]0\,;+\infty[$

4 – نسمي (C_0) التمثيل البياني للدالة f_0 في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أنشئ المنحنى (C_0) و النقطة $A(0;1)$ (وحدة الرسم $2cm$)

الجزى الثاني:

دراسة الدالة f_n من أجل $n\geq 1$

نسمي (C_n) التمثيل البياني للدالة f_n في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 – أدرس تغيرات الدالة f_n

2 – أدرس الوضع النسبي للمنحنيات (C_n) و (C_{n+1})

3 – برهن أن جميع المنحنيات (C_n) تمر من النقطة B يطلب تعيين إحداثياها

4 - ا) برهن أن للمعادلة $f_1(x)=0$ حلا وحيدا α_1 حيث $0{,}2\prec\alpha_1\prec 0{,}9$

ب) برهن أن $f_n(\alpha_1)\prec 0$

جـ) برهن أنه يوجد عدد وحيد α_n من المجال $[\alpha_1;1]$ حيث

$$f_n(\alpha_n)=0$$

5- أ) برهن أنه من أجل $n\geq 1$ لدينا $\ln(\alpha_n)\geq \frac{1-e}{n}$

ب) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)$

6 – أنشئ في نفس المعلم المنحنيين (C_1) و (C_2)

التمرين الخامس :

لتكن الدالة f_m المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة :

$$\begin{cases} f_m(x)=mx+2x\ln x \quad ; x\succ 0 \\ f_m(0)=0 \end{cases}$$

1 – أدرس قبلية الاشتقاق عند القيمة 0

2 – أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m تغيرات الدالة f_m

3 – نسمي A_m النقطة من المنحنى (C_m) التي يكون فيها المماس يوازي محور الفواصل

أ – عين بدلالة m احداثيات النقطة A_m

ب – عين مجموعة النقط A_m عندما يتغير m في $\mathbb{R}$

جـ - بين أن x_m فاصلة النقطة A_m هي متتالية هندسية

4 – I_m نقطة تقاطع المنحنى مع محور الفواصل حيث I_m تختلف عن O ، برهن أن المماس عند النقطة I_m له منحى ثابت يطلب تعيينه

5 – ارسم المنحنى (C_2)

6 - أ – برهن أن : $f_m\left(e^{-\frac{m}{2}}x\right)=e^{-\frac{m}{2}}\cdot f_0(x)$

ب - برهن أن المنحنى (C_m) هو صورة المنحنى (C_0) بتحويل بسيط يطلب تعيينه

نعتبر التحويل النقطي T_m الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقط M'ذات اللاحقة z' و المعرف كما يلي : $z'=-e^m\cdot\overline{z}$

1 – بين ان التحويل T_m هو تركيب تحويلين يطلب تعيينهما

2 – عين صورة المنحنى (C_m) بالتحويل T_m

3- (Δ)مستقيم ذو المعادلة $y=x$ ، نرمز بـ $S_{(\Delta)}$ للتناظر المحوري الذي محوره (Δ) .

عين طبيعة التحويل $T'=T_m o S_{(\Delta)}$

4 – عين المجموعة (Γ)مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $10z\cdot\overline{z}+3\left(z^2+\overline{z}^2\right)-4=0$

5 –أثبت أن المجموعة (Γ) صامدة بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج صورة المجموعة (Γ) بالتحويل T'

تمرين 01

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{2e^{2x}-2e^{x}+1}$$

1- ادرس تغيرات الدالة f ثم بين أن : $f(x)\leq 1$

2- عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}$

3- أكتب معادلة المماس عند القيمة $\ln 2$, ثم ارسم (C_f)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_{n+1}=f(\ln U_n)$ و $U_0=\frac{3}{4}$

1- بين أن : $U_{n+1}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{U_n}-1\right)^2+1}$

2- برهن بالتراجع أن : $\frac{1}{2}<U_n<1$

3- ادرس إتجاه تغيرات المتتالية (U_n) ماذا تستنتج .

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $V_n=\ln\left(\frac{1-U_n}{U_n}\right)$

1- برهن أن المتتالية (V_n) هندسية .

2- أكتب عبارة V_n بدلالة n ؛ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n$

3- عين عبارة U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

4- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$.

التمرين الثاني :

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) حيث :

$$(E)\cdots z^3+8=0$$

2-نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=\frac{1}{2}z-\frac{1+i}{2}$$

عين طبيعة و عناصر التحويل f

3- نعتبر المعادلة (E') المعرفة كما يلي :

$$(E')\qquad z^3-3(1+i)z^2+6iz+66-2i=0$$

* - برهن أنه إذا كان z' حلا للمعادلة (E) فإن z هو حلا للمعادلة (E')

*- استنتج حلول المعادلة (E')

4- B, A و C صور الأعداد -2 ; $1-i\sqrt{3}$ و $1+i\sqrt{3}$

- برهن أن النقط B, A و C تنتمي الى دائرة يطلب تعيينها

- استنتج طبيعة المثلث ABC

5- عين عبارة و طبيعة التحويل الذي مركزه C و يحول B الى A

- عين صورة الدائرة بهذا التحويل

التمرين الثالث:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقط

$D(1;1;1)$, $C(1;-1;2)$, $B(-1;2;1)$, $A(2;-1;1)$

1- أ) بين أن القط A , B و C تعين مستو

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2 – لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$

أ) أحسب إحداثيات النقطة G

ب) لتكن (γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{MD}\|$$

عين طبيعة المجموعة (γ) ، ثم أكتب معادلة ديكارتية لها

3 – بين أن (γ) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي

التمرين الرابع :

لتكن الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^2-1}{4}-2\ln x$$

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α حيث: $3<\alpha<4$

3- ارسم المنحنى (C_f)

نعتبر الدالة g المعرفة على $]3,+\infty[$ بالعبارة:

$$g(x)=\sqrt{1+8\ln x}$$

1- برهن أن المعادلة $f(x)=0$ تكافئ المعادلة $g(x)=x$

2- برهن أن $g(x)\geq 3$ و $0<g'(x)\leq\frac{4}{9}$

3- نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي : $U_0=3$ و

$$U_{n+1}=g(U_n)$$

أ- برهن بالتراجع أن $U_n\geq 3$

ب- باستعمال التكامل برهن أن $0<U_{n+1}-\alpha\leq\frac{4}{9}(U_n-\alpha)$

جـ- برهن بالتراجع أن : $0<U_n-\alpha\leq\left(\frac{4}{9}\right)^n$

$\alpha-U_n$

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

تمرين الأول :

أجب بصحيح أم خطء مع التعليل

لتكن النقط : $A(0,0,2)$ ، $B(0,4,0)$ و $C(2,0,0)$

I منتصف القطعة $[BC]$ ، H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC). G مركز ثقل المثلث ABC.

1- مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ هي المستوي (AOI)

2- مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

هي سطح كرة قطرها $[BC]$ ✓

3- حجم رباعي الوجوه $OABC$ يساوي 4

4- معادلة المستوي (ABC) هي : $2x+y+2z-4=0$ و $H\left(\frac{8}{9},\frac{4}{9},\frac{8}{9}\right)$ ✓

5- المستقيم (AG) له تمثيل وسيطي من الشكل :

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=2-2t \end{cases} \quad t\in\mathbb{R}$$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$

1- مثل على محور الواصل الأعداد u_3,u_2,u_1

2- ضع تخمين لتغيرات المتتالية (U_n)

3- برهن بالتراجع أن : $u_n\geq\sqrt{2}$. $n\geq1$

- ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n=\ln\left(\frac{u_n}{2}\right)$

1- برهن أن المتتالية (V_n) هندسية

2- أكتب عبارة V_n بدلالة n ، استنتج عبارة U_n بدلالة n

3- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

4- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n$

5- استنتج بدلالة n الجداء : $P_n=u_0\times u_1\times\cdots\times u_n$

التمرين الثالث

نعتبر كثير الحدود P المعرف كما يلي :

$$P(z)=\left(z^2+3z\right)^2+\left(3z+5\right)^2$$

1- أكتب $P(z)$ على شكل جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية

2- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $P(z)=0$

3- أكتب $P(z)$ على شكل جداء كثيري حدود من الدرجة الثانية معاملاتها أعداد حقيقية .

4- N_1 و N_2 عددان طبيعيان يكتبان $\overline{130}$ و $\overline{35}$ في النظام ذو الأساس x حيث $x>6$.

برهن أن $N_1{}^2+N_2{}^2$ هو جداء عددين طبيعيين .

التمرين الرابع

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}$$

1- ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج إشارتها .

2- بين أن للمنحنى (C_f) نقطة انعطاف

أكتب معادلة المماس عند هذه النقطة .

3- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$g(x)=f(x)-x$$

أ- ادرس تغيرات g' ثم استنتج إشارتها .

ب- ادرس تغيرات g .

جـ- عين وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$.

د- ارسم المستقيم (d) و المنحنى (C_f)

4- أحسب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى و محور الواصل و المستقيمان $x=-\ln 2$ و $x=0$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$h(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

نسمي (C_h) منحناها البياني و (S_d) التناظر المحوري بالنسبة للمستقيم (d)

1- بين أن (C_h) هو صورة (C_f) بالتحويل (S_d)

2- ارسم المنحنى (C_h) في نفس المعلم السابق .

3- أحسب $h'(x)$ ثم برهن أنه :

إذا كان $0\leq x\leq1$ فإن $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq h'(x)\leq1$

4- نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$u_n=\int_0^1 x^n\times h'(x)dx$$

*- ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

*- برهن أن : $\frac{\sqrt{2}}{2(n+1)}\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$

*- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين الأول

ينسب الفضاء الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $C\left(0,1,3\right),B\left(1,0,2\right),A\left(2,-3,-1\right)$

1- بين أن النقط C,B,A تشكل مستوي ، عين معادلة ديكارتية له .

2- من أجل كل عدد حقيقي α من المجال $\left]-\pi,\pi\right[$. نعتبر المجموعة S_α مجموعة النقط $M\left(x,y,z\right)$ من الفضاء التي تحقق :

$$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2y\sin\alpha+2z+\alpha^2+\sin^2\alpha-1=0$$

أ- عين طبيعة المجموعة S_α و عناصرها

ب- عين حسب قيم α تقاطع S_α و المستوي (ABC)

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)$ المعرفة كما يلي: $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-3$

1- برهن بالتراجع أن : $u_n=3-2^n$

استنتج تغيرات المتتالية $\left(U_n\right)$

2- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n$$

استنتج المجموع $S_n'=u_2+u_3+\cdots+u_n$

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية $\left(V_n\right)$ المعرفة كما يلي

$$v_0=\alpha \quad , \quad v_{n+1}=\frac{v_n}{3-2v_n} \quad \text{حيث :} \quad \alpha\neq\left\{0,\frac{3}{2}\right\}$$

من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $w_n=\dfrac{v_n-1}{v_n}$

1- برهن أن المتتالية $\left(w_n\right)$ هندسية

أ- أكتب عبارة w_n بدلالة n و α

ب- أستنتج عبارة V_n بدلالة n و α

2- ناقش حسب قيم α : $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

3- عين الأعداد الحقيقية z,y,x حدود متتابعة من المتتالية $\left(w_n\right)$ التي تحقق : $1998x-11y-24z=53$

التمرين الثالث

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

لتكن النقطتان A و B صورتا العددين $z_A=1-i$ و

$$z_B=7+\frac{7}{2}i$$

1- نعتبر المستقيم (d) ذو المعادلة $4x+3y=1$

عين في مجموعة الأعداد الصحيحة إحداثيات النقط M_k من المستقيم (d)

2- عين زاوية و نسبة التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول النقطة B الى M_{-1}

3- نعتبر التحويل النقطي s الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=\frac{2}{3}iz+\frac{1}{3}-\frac{5}{3}i$$

*- عين صورة النقطة A بالتحويل s

*- عين طبيعة و عناصر التحويل s

4- نسمي B_1 صورة B بالتحويل s و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم B_{n+1} صورة B_n

أ- أكتب المسافة AB_{n+1} بدلالة AB_n

ب- عين أصغر عدد طبيعي n الذي من أجله تكون النقطة B_n تنتمي الى القرص الذي مركزه A و نصف قطره 10^{-2}

جـ- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون النقط A ، B_n و B_1 في استقامية .

التمرين الرابع

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\left[0,+\infty\right[$ بالعبارة:

$$f(x)=x\ln(x+1)$$

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- اكتب معادلة المماس عند القيمة $x_0=0$

3- ارسم المنحنى $\left(C_f\right)$

4- عين الاعداد الحقيقية c,b,a حيث يكون :

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

أحسب العدد I المعرف بـ: $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{x+1}dx$

5- باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بالمنحنى و محور الفواصل و المستقيمان ذات المعادلتين $x=0$ و $x=1$

نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)$ المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n=\displaystyle\int_0^1x^n\ln(x+1)dx$

1- أدرس إتجاه تغيرات المتتالية $\left(U_n\right)$

2- برهن أن : $0\le u_n\le\dfrac{\ln 2}{n+1}$.

استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

$0\le x\le 1$

$1\le x+1\le 2$

$0\le \ln(x+1)\le \ln 2$

$x^n \le x^n$

التمرين الأول

ينسب الفضاء الى معلم متعامد و $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نسمي (S) المساحة المعرفة بالمعادلة :

$$x^2+y^2-z^2-1=0$$

1- برهن أن (S) متناظرة بالنسبة الى المستوي (xOy)

2- نعتبر النقطتان $A(3;1;-3)$ و $B(-1,1,1)$

أ- أكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

ب- برهن أن المستقيم (AB) محتوى في (S)

3- عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط الناتجة من تقاطع (S) مع المستوي الموازي للمستوي (xOy)

4- أ- ليكن (C) تقاطع (S) مع المستوي ذو المعادلة $z=68$

عين طبيعة و عناصر المجموعة (C)

ب- M نقطة من (C) فاصلتها a ترتيبها b حيث

$a<b$ و $ppcm(a,b)=440$.

أثبت أن M وحيدة

التمرين الثاني

نعتبر النقط A, B, C, D و E لواحقها على الترتيب :

$$a=2\ ;\ b=2+3i\ ;\ c=3i\ ;\ d=-\frac{5}{2}+3i$$

و $e=-\frac{5}{2}$

1- أنشيء النقط A, B, C, D و E

2- أثبت أن $OABC$ و $ABDE$ مستطيلان متشابهان

3- عين عبارة التشابه المباشر s الذي يحول النقطة O إلى A و النقطة A إلى B

4- برهن أن المستطيل $ABDE$ هو صورة المستطيل $OABC$ بالتحويل s

5- نسمي Ω مركز التشابه s ، باستعمال التركيب $s\circ s$ أثبت أن النقطة Ω تنتمي الى المستقيمان (OA) و (AD)

6- برهن أن التحويل f الذي يقبل A كنقطة صامدة و يحول النقطة O إلى النقطة B له عبارة من الشكل :

$$z'=-\frac{3}{2}i\,\overline{z}+2+3i$$

7- برهن أن التحويل f يحول $OABC$ الى $BAED$

8- برهن أن التحويل f هو تركيب تحويلين يطلب تعيين طبيعتهما و عناصرهما المميزة .

التمرين الثالث

1- أ-عين باقي قسمة العدد 6^{10} على 11

ب- عين باقي قسمة العدد 6^4 على 5

جـ- استنتج باقي قسمة العدد 6^{40} على كل من 11 و 5

د- برهن أن : $6^{40}-1\equiv 0[55]$

2- نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة :

$$(E)\ ....\ 65x-40y=1$$

أ- برهن أن المعادلة لا تقبل حلا

ب- برهن أن المعادلة $(E')\ ....\ 17x-40y=1$ تقبل على الأقل حلا

جـ- باستعمال خوارزمية إقليدس عين حلا خاصا لـ: (E')

د- عين الحل العام للمعادلة (E')

استنتج أنه يوجد عدد وحيد x_0 أصغر من 40 حيث

$$17x_0-1\equiv 0[40]$$

3- من أجل كل عدد طبيعي a برهن أن :

إذا كان : $a^{17}\equiv b[55]$ و $a^{40}\equiv 1[55]$ فإن $b^{33}\equiv a[55]$

التمرين الرابع

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathfrak{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$$

1- ادرس اتجاه تغيرات الدالة f

2- برهن أن : $e^{1-x}\leq f(x)\leq 3e^{1-x}$

استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

3- برهن أن للمعادلة $f(x)=3$ حلا وحيدا في المجال $[0\ ;\ \pi]$ عين حصرا لهذا الحل .

4- ارسم المنحنى على المجال $[0\ ;\ 4]$

5- لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بالمنحنى و محور الفواصل و المستقيمان ذات المعادلتين $x=0$ و $x=1$

نضع : $I=\int_0^1 e^{1-t}\cos t\,dt$

$$J=\int_0^1 e^{1-t}\sin t\,dt$$

باستعمال التكامل بالتجزئة برهن أن

$I=e-J-\cos 1$ و $J=I-\sin 1$

أحسب قيمة تقريبية للعدد $\mathcal{A}$.

التمرين الأول

1- باستعمال نظرية بيزو برهن على نظرية غوص

2- نريد في هذا الجزء حل الجملة

$$(S)\quad \begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$$

أ- برهن أنه توجد ثنائية (u,v) من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $19u+12v=1 \; . \; . \; . \; (E)$

ب- تحقق أن : من اجل كل ثنائية (u,v) العدد $N=13\times 12v+6\times 19u$ هو حلا للجملة (S)

جـ- ليكن n_0 حلا للجملة (S) . تحقق أن الجملة (S) تكافئ الجملة

$$(S')\quad \begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$$

د- برهن أن الجملة (S') تكافئ $n \equiv n_0[19\times 12]$

هـ- عين الثنائية (u,v) حلا للمعادلة (E) .

- أحسب قيمة N الموافقة .

و- عين مجموعة حلول الجملة (S)

3- n عدد طبيعي باقي قسمته على 12 هو 6 و باقي قسمته على 19 هو 13 ما هو باقي قسمته على 228 .

التمرين الثاني

1- ينسب المستوي المركب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقط A , B و C لواحقها على الترتيب $z_A=2+i$ ، $z_B=5+2i$ و $z_C=i$

نرمز بـ s_1 الى التناظر المحوري الذي محوره (AB)

أ- بين أن عبارة التحويل s_1 هي :

$$z'=\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i\right)\bar{z}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i\right)$$

ب- استنتج لاحقة النقطة C' نظيرة C بالنسبة الى (AB)

جـ- عين المجموعة $(\mathfrak{D})$ مجموعة النقط M صورة العدد z التي من أجلها يكون z' تخيلي .

2- برهن أن المستقيمان $(\mathfrak{D})$ و (AB) متقاطعان في النقطة Ω يطلب تعيين لاحقتها ω .

3- نرمز بـ s_2 الى التناظر المحوري الذي محوره $(\mathfrak{D})$ و بـ f التحويل النقطي المعرف بـ : $f=s_2 o s_1$.

*- عين صورة كل من Ω و C بالتحويل f

*- عين طبيعة التحويل f .

4- عين الثنائيات من الأعداد الصحيحة التي تنتمي الى $(\mathfrak{D})$

5- عين النقط من المجموعة $(\mathfrak{D})$ التي تبعد عن النقطة 0 بمسافة أقل من 9 .

التمرين الثالث

بلغ عدد أشجار غابة سنة 2010 50000 شجرة ، نرمز بـ u_n الى عدد الأشجار سنة $2010+n$.

إذا علمت أن 5% من الأشجار تحرق سنويا و أن 3000 شجرة تغرس سنويا .

1- عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n=60\times 10^3-u_n$

أ- برهن أن (v_n) متتالية هندسية .

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n . استنتج عبارة u_n

3- ما هو عدد الأشجار سنة 2015

4- أدرس اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

5- في أية سنة يتجاوز عدد أشجار الغابة 55000 شجرة .

6- أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ فسر النتيجة .

التمرين الرابع

I- نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f_n(x)=\dfrac{e^{(1-n)x}}{1+e^x}$ نسمي (C_n) تمثيلها البياني

1- ادرس تغيرات الدالة f_0

2- برهن ان النقطة $\omega\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر

3- اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_0) عند النقطة ω

4- برهن ان : $f_0(x)=f_1(-x)$

استنتج طريقة هندسية لرسم المنحنى (C_1)

5- ارسم كل من (C_0) و (C_1)

6- أحسب $f_0(x)+f_1(x)$

7- ليكن α عدد حقيقي موجب تماما أحسب العدد : $I(\alpha)=\int_0^\alpha f_0(x)dx$ ثم استنتج العدد :

$$J(\alpha)=\int_0^\alpha f_1(x)dx$$

8- احسب مساحة الحيز المحصور بالمنحنى (C_1) و المستقيمات ذات المعادلات : $x=0 \;;\; x=\alpha \;;\; y=1$

II- من اجل كل عدد طبيعي n نضع : $u_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

1- أحسب u_0 , u_1

2- برهن أن : $u_{n+1}+u_n=\dfrac{e^n-1}{ne^n}$

- احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}+u_n)$: استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

3- برهن أن : اذا كان $x\in[0,1]$ فإن : $f_n(x)\geq\dfrac{e^{-nx}}{1+e^x}$

استنتج تغيرات (u_n) .

التمرين الأول

1 -حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$(z-i)\left(z^2+\sqrt{3}\,z+1\right)=0$$

نرمز للحلين بـ z_0 ، z_1 و z_2 حيث z_0 هو التخيلي الصرف و z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب

2- اكتب z_1 على الشكل الأسي ثم بين أن $z_2=e^{i\frac{7\pi}{6}}$

3- عين قيم العدد الطبيعي n حيث $120\le n\le 150$ والتي من أجلها يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي موجب

3- ينسب المستوي المركب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. لتكن النقط A , B , C و D صور الأعداد z_0 , z_2 , z_C و z_D على الترتيب .حيث C صورة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و D النقطة التي تحقق

$$\overrightarrow{DA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

أ- بين أن النقط A , B , C في استقامية

ب- بين أن النقطة D هي مرجح النقط A , B , C المرفقة بالمعاملات α , β , 2 على الترتيب

4 – بين أن النقط A , B , C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

- انشئ الدائرة و النقط A , B , C و D

5- M نقطة من المستوي لاحقتها z ، نعتبر العدد k حيث :

$$k=\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

عين مجموعة النقط M التي تحقق : $\arg(k)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

6- عين و أنشئ المجموعة (γ) مجموعة النقط M التي تحقق :

$$\left\|\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين الثاني

ينسب الفضاء الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(0;0;4)$, $B(1;3;0)$, $C(0;3;0)$ و $D\left(0;0;-\frac{3}{2}\right)$

1 - برهن أن النقط A , B , C ليست في استقامية .
أكتب معادلة للمستوي (ABC)

2 – عين معادلة ديكارتية للمستوي $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$

3- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على (ABC) في C

4- اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') العمودي على $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$ في D

5 – بين أن (Δ) و (Δ') متقاطعان في النقطة $\omega\left(0;1;-\frac{3}{2}\right)$

6 – احسب المسافة بين النقطة ω و كل من المستويين $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$ و (ABC)

7 – لتكن (C) دائرة في المستوي (ABC) مركزها C و نصف قطرها 1 و (C') دائرة في المستوي $\left(O;\vec{i},\vec{k}\right)$ مركزها D و نصف قطرها $\frac{5}{2}$

أثبت وجود سطح كرة (S) يشمل (C) و (C') يطلب تحدد مركزها و نصف قطرها

التمرين الثالث

1 - ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 11

2 – من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$s_n=1+3+3^2+\cdots+3^n$$

أ- أحسب بدلالة n عبارة s_n

ب - عين قيم العدد الطبيعي n التيمن أجلها يكون s_n مضاعف للعدد 11

3 – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد :

$3^{15n+8}+8^{10n-7}$ هو مضاعف للعدد 11

4 - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $3^{7n-5}+2\equiv0[11]$

5 – عين قيمة العدد d حيث : $d=p\gcd\left(3^n+1;3^n-1\right)$

التمرين الرابع

f دالة معرفة على المجال $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ بالعبارة :

$$f(x)=-1+\sqrt{2x-1}$$

1- ادرس تغيرات الدالة f

- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ فسر النتيجة . ارسم المنحنى (C_f)

2- عين معادلة المنحنى (C_g) نظير (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة $y=-1$, أرسم (C_g)

3- A , B , C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $-i$, $1-2i$, $2+i$. عين طبيعة المثلث ABC

عين التشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B الى C

4- لتكن (γ) مجموعة مراكز التشابهات التي نسبتها 2 و تحول B الى C . عين المعادلة الديكارتية للمجموعة (γ)

ثم أنشئ المجموعة (γ)

5- عين النقطتين ω_1 و ω_2 من المجموعة (γ) مركزي التحاكيان اللذين يحولان B الى C .

6- ليكن (Γ) المنحنى المعرف بالمعادلة :

$$2x-(y+1)^2-1=0$$

أ- تحقق أن B تنتمي الى (Γ)

ب- عين معادلة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه S

جـ- ماهي طبيعة (Γ') ، أنشئ (Γ')

التمرين الخامس

لتكن الدالة g المعرفة على $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

1 - أدرس تغيرات الدالة g

2 – عين حسب قيم إشارة $g(x)$

f دالة معرفة على المجال كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & x\in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[\\ f(0)=0 & \end{cases}$$

1 - أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند الصفر فسر هندسيا هذه النتيجة

2 - أدرس تغيرات الدالة f

3 – ارسم المنحنى (C_f)

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $u_n=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ ،

$$w_n=\frac{v_n}{n} \quad \text{و} \quad v_n=\ln u_n$$

1 - أكتب عبارة v_n بدلالة n

2 – عين تغيرات المتتالية (v_n)

3 – بين أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n \prec 1$

4 – أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$

5 - أحسب بدلالة n المجموع $s_n=w_1+w_2+\cdots+w_n$

التمرين الاول

ينسب الفضاء الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتين $A(0,5,5)$; $B(0,0,10)$ (P) المستوي ذو المعادلة : $x=0$ و (C) الدائرة مركزها B و تشمل النقطة A

1- برهن أن المستقيم (OA) مماس للدائرة (C)

2- ليكن S سطح الكرة الناتج عن دوران الدائرة (C) حول المحور (OZ) و (Γ) المخروط الدوراني الناتج عن دوران المستقيم (OA) حول المحور (OZ)

أ ـ أكتب المعادلة الديكارتية للمخروط (Γ)

ب ـ عين تقاطع المخروط (Γ) مع سطح الكرة S

3 - لتكن النقطة $M(x,y,z)$ نقطة من المخروط (Γ) احداثياها أعداد صحيحة و غير معدومة

برهن ان x و y لايمكن أن يكونا زوجيان معا

4 - نقطع المخروط (Γ) بالمستوي (Q) ذو المعادلة $x=1$ مثل المجوعة (γ) مجموعة النقط الناتجة عن هذا التقاطع

التمرين الثاني

نعتبر التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$f(z)=z'=\frac{-iz-2}{z+1}$$

A, B, C ثلاثة نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

$$z_C=-i\ ;z_B=2i\ ;\ z_A=-1$$

1- عين لاحقة النقطة C' صورة النقطة C بالتحويل f

أكتب لاحقة C' على الشكل المثلثي

2- D' نقطة ذات اللاحقة $\frac{1}{2}$. عين لاحقة النقطة D التي صورتها بالتحويل f هي النقطة D

3- نضع : $p=|z+1|$ و $p'=|z'+i|$

برهن أن : $pp'=\sqrt{5}$

4- عين (Γ') صورة الدائرة (Γ) التي مركزها A و نصف قطرها 2 بالتحويل f.

5- من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1- نضع :

$$\omega=\frac{z-2i}{z+1}$$

أـ أعط تفسير هندسي لعمدة ω

ب- برهن أن : $z'=-i\omega$

6- عين المجموعة (Υ) مجموعة النقط M التي من اجلها يكون z' عددا حقيقيا .

7- تحقق أن النقطة D تنتمي الى (Γ) و (Υ)

التمرين الثالث

1/ أ) عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من Z^2 حلول المعادلة

$$(E):\ 8x-5y=3$$

ب) ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد ثنائية $(p;q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m=8p+1$ و $m=5q+4$

بين أن الثنائية $(p;q)$ هي حل للمعادلة (E).

واستنتج أن: $m\equiv 9[40]$

ج) عين أصغر عدد طبيعي m أكبر من 2000 .

2/ أ) أثبت أنه من أجل عدد طبيعي k لدينا: $2^{3k}\equiv 1[7]$.

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{2014} على 7 ؟

3/ ليكن a و b عددان طبيعيان أقل من أو يساوي 9 مع $a\neq 0$ ، ونعتبر العدد N حيث: $N=a\times 10^3+b$.علما أنه في النظام العشري العدد N يكتب $N=\overline{a00b}$.

نريد تعيين من ضمن هذه الأعداد الطبيعية N تلك التي تقبل القسمة على 7 .

أ) تحقق من أن: $10^3\equiv -1[7]$.

ب) استنتج الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7 في الحالة $a\equiv 2[7]$ و $b\equiv 2[7]$.

التمرين الرابع

الجزء الأول

f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}-e^{-x}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- أدرس تغيرات الدالة f

2- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند القيمة 0

3- برهن أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α حيث $\alpha\in]1,2[$

عين حصرا للعدد α المقرب إلى 10^{-1}

4- أرسم المماس (T) و المنحنى (C_f)

الجزء الثاني

من أجل كل عدد طبيع n نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f_n(x)=\dfrac{x-n}{x+n}-e^{-x}$

1 - أدرس تغيرات الدالة f_n

2 - أ ـ عين إشارة العدد $f_n(n)$

ب– برهن بالتراجع أن : $e^{n+1} > 2n+1$

جـ - استنتج اشارة $f_n(n+1)$

3 - برهن أن للمعادلة $f_n(x)=0$ حل وحيد على المجال $]n,n+1[$

نرمز لهذا الحل بـ u_n

4 – أ – تحقق أن $\dfrac{x-n}{x+n}=1-\dfrac{2n}{x+n}$

ب – برهن أن القيمة المتوسطة للدالة f_n على المجال $[0,u_n]$

تساوي $\dfrac{u_n-1+e^{-u_n}}{u_n}-2\dfrac{n}{u_n}\ln\left(\dfrac{u_n}{n}+1\right)$

التمرين الخامس

1- أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f(x)=x+1+e^{-x}$.

2 – نعتبر التحويل النقطي T_1 الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z'=(1+i)z+2$.

أ – عين طبيعة و عناصر التحويل T_1

ب – نرمز بـ Ω لمركز التحويل T_1 ، عين طبيعة المثلث $\Omega MM'$

3 - نعتبر التحويل النقطي T_2 الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z'-z_\Omega=\dfrac{1}{2}(z-z_\Omega)$ ، نضع $T=T_1oT_2$

أ - عين طبيعة و عناصر التحويل T_2 ، ثم استنتج طبيعة و عناصر التحويل T

ب – عين صورن المنحنى (C_f) بالتحويل T

4 – نعتر النقط $M_n,\ldots\ldots,M_1,M_0$ حيث من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $M_0(1;0)$ و $M_{n+1}=T(M_n)$

أ – عبر عن $\left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\|$ بدلالة n

ب - أحسب بدلالة n عبارة S_n حيث :

$$S_n=\left\|\overrightarrow{\Omega M_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{\Omega M_1}\right\|+\cdots+\left\|\overrightarrow{\Omega M_n}\right\|$$

جـ - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)$

د – عين لاحقة النقطة M_1 ، ثم أحسب المجموع :

$$\sum_{i=0}^{n}\left\|\overrightarrow{M_iM_{i+1}}\right\|$$

ثانوية بن شنوف تامر بن عكنون — السنة الثالثة ثانوي شعبتي : رياضيات و تقني رياضي

السنة الدراسية: 2014_ 2015 — المدة :3 ساعات

«اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات»

التمرين الأول: (5ن)

n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$

1) بين أن : $\text{PGCD}(2n+1, n) = 1$

2) نضع : $\alpha = n+3$ و $\beta = 2n+1$ و $\text{PGCD}(\alpha, \beta) = d$

أ) أحسب $(2\alpha-\beta)$ ثم استنتج القيم الممكنة لـ d

ب) بين أن α و β مضاعفات للعدد 5 إذا و فقط إذا كان $(n-2)$ مضاعف للعدد 5

3) نعتبر العددين a و b المعرفين بما يلي : $b = 2n^2 - n - 1$; $a = n^3 + 2n^2 - 3n$

- بين أن a و b يقبلان القسمة على $(n-1)$

4) نضع : $\text{PGCD}(n(n+3) ; 2n+1) = \delta$

أ) بين أن d يقسم δ ثم استنتج أن : $d = \delta$

ب) استنتج Δ بدلالة n حيث : $\text{PGCD}(a ; b) = \Delta$

ت) تطبيق : حدد Δ من أجل $n = 2001$ ثم من أجل $n = 2002$

التمرين الثاني: (5ن)

k عدد طبيعي غير معدوم

f_k و h_k دالتان معرفتان على المجال $]-1 ; +\infty[$ كما يلي :

$$f_k(x) = x^k . \ln(1+x)$$

$$h_k(x) = k . \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$$

1) أدرس اتجاه تغير ثم إشارة الدالة h_k

2) نضع $k = 1$

أ) أحسب $f'_1(x)$ بدلالة $h_1(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f_1 على المجال $]-1 ; +\infty[$

3) $k \in \mathbb{N}^*$

أ) برر قابلية اشتقاق الدالة f_k على المجال $]-1 ; -\infty[$ ثم أحسب $f'_k(x)$ بدلالة $h_k(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f_k على المجال $]-1 ; +\infty[$

ت) حدد نهايات الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين الثالث: (4ن)

نعتبر المعادلة التفاضلية : $x^3 y' + (x-2) y = x \,.\, e^{\frac{-1}{x^2}}$: $x \in]0 \,;\, +\infty[$ ....(E)

1) h دالة عددية معرفة على المجال $]0 \,;\, +\infty[$ بـ : $h(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

بين أن h حل للمعادلة التفاضلية : $x^3 y' + (x-2) y = 0$: $x \in]0 \,;\, +\infty[$ ......(E')

لتكن g دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال $]0 \,;\, +\infty[$ نضع $U(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

أ) بين أن g حل لـ (E) إذا و فقط إذا كان : $U'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}}$ (لاحظ أن : $U'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}}$)

ب) استنتج عبارة $g(x)$ من أجل كل $x \in]0 \,;\, +\infty[$

التمرين الرابع: (6ن)

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathscr{R}$ بما يلي :

$f(x) = x\, e^{-x}$ و $g(x) = f(x) + [f(x)]^2$

.I

1) أ) تحقق أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathscr{R}$ و أحسب $f'(x)$ من أجل كل $x \in \mathscr{R}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

2) أ) بين أن المعادلة $f(x) = \frac{-1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathscr{R}$ / $\frac{-1}{2} < \alpha < 0$

ب) بين أن المعادلة $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا β في $\mathscr{R}$ / $\frac{-3}{2} < \beta < \frac{-1}{2}$

.II

1) أ) تحقق أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathscr{R}$ و أحسب $g'(x)$

ب) أدرس تغيرات الدالة g

2) أحسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

3) شكل جدول تغيرات الدالة g

4) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) - x = x\, e^{-x}(1 + x\, e^{-x} - e^{x})$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + x\, e^{-x} \leq 1 + x \leq e^{x}$

جـ) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_g) عند النقطة ا لتي فاصلتها 0

د) حدد وضعية المنحنى (C_g) بالنسبة للمماس (T) فسر النتيجة

5) أنشئ (T) و (C_g)

30

ثانوية بن شنوف تامر بن عكنون
السنة الدراسية: 2014_2015

السنة الثالثة ثانوي شعبتي رياضيات و تقني رياضي

« الفرض الأول للثلاثي الأول في مادة الرياضيات »

التمرين الأول : (3ن)

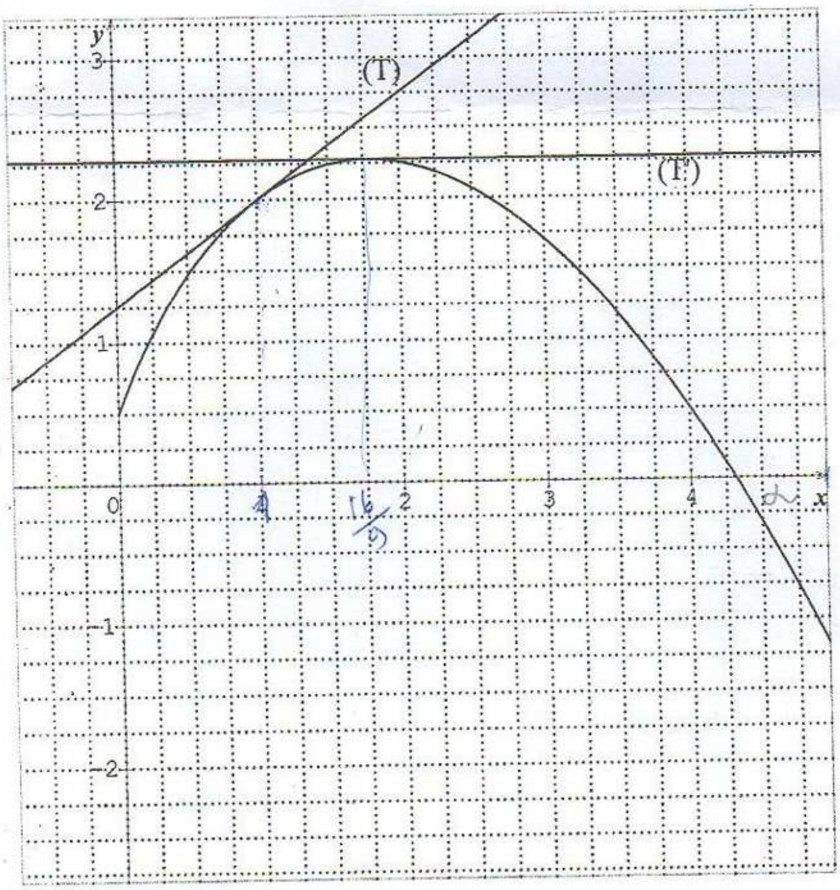
α و β عددان حقيقيان ، f دالة معرفة على $\mathcal{R}$ بـ :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \alpha x + \beta \ ; \ x \leq 2 \\ f(x) = 2x - 3 \ ; \ x > 2 \end{cases}$$

1) أوجد علاقة بين α و β بحيث تكون الدالة f مستمرة عند 2

2) أحسب $\lim_{x \to 2^<} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right)$

3) في حالة الدالة f مستمرة عند 2 ، أحسب $\lim_{x \to 2^>} \left(\frac{f(x) - f(2)}{x-2} \right)$ ثم استنتج قيمتي α و β حتى تكون الدالة f قابلة للإشتقاق عند 2

التمرين الثاني : (5ن)



الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال]0 ; 5] ، المستقيمان (T) و (T′) هما المماسان عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 1 و $\frac{16}{9}$ على الترتيب.

1) بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$ 0,5 0,25

نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال]0 ; 5] :
$f(x) = a + bx\,(2 - \sqrt{x})$ حيث a و b عددان حقيقيان نريد حسابهما .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال]0;5] :
$f'(x) = b\left(2 - \frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$ 0,5

3) باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال الأول عين a و b 0,5

4) أكتب معادلتي المماسين (T) و (T′) 0,5 2

ليكن العدد الحقيقي α فاصلة نقطة تقاطع التمثيل البياني مع حامل محور الفواصل

5) حدد إشارة كل من $f(x)$ و $f'(x)$ على المجال]0;5] 1

نضع $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$ لتكن g دالة معرفة على المجال]0 ; α[∪]α ; 5] بـ : $g(x) = \frac{1}{f^2(x)}$

6) أحسب $g'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g 0,5 0,5

7) أرسم المنحنى البياني (C_g) الممثل للدالة g في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ 0,5

التمرين الثالث : (4ن)

f دالة معرفة على المجال $\mathrm{I} = \left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ كما يلي : $f(x) = \frac{4}{\pi} x - \tan x$

1) أحسب الدوال المشتقة : f' و f'' ثم شكل جدول تغيرات الدالة f'

2) بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال I

3) حدد اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x من I : $tan\, x \leq \frac{4}{\pi} x$

ثانوية بن شنوف تامر بن عكنون
السنة الدراسية: 2014_ 2015

السنة الثالثة ثانوي شعبتي رياضيات و تقني رياضي
المدة : 1 سا

《 الفرض الثاني للثلاثي الأول في مادة الرياضيات 》

التمرين الأول : (6 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \dfrac{\ln x}{x+1} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1) حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أحسب $\lim_{x\to 0^>} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

3) بين أنه من أجل كل $x \in]0 ; +\infty[$ ، $\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln x}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}$

4) أحسب $\lim_{x\to 0^>} \frac{f(x)}{x}$ ، فسر النتيجة هندسيا .

5) من أجل كل $x \in]0 ; +\infty[$ أحسب $f'(x)$

6) شكل جدول تغيرات الدالة f

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

7) أنشئ (C_f) المنحنى البياني للدالة f

8) استنتج أنه من أجل كل $x \in]0 ; +\infty[$; $x \ln x \le (x+1) \ln (x+1)$

التمرين الثاني : (4 ن)

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E)\ldots\ldots\ y' + 2y = 2\,\frac{e^{-x}}{1+2e^{x}}$

1) تحقق أن الدالة f المعرفة على $\mathscr{R}$ بـ $f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^{x})$ حلا لـ : (E)

2) بين أن الدالة g حلا لـ (E) إذا وفقط إذا كانت $g - f$ حلا للمعادلة التفاضلية : $(E')\ldots\ y' + 2y = 0$

3) حل المعادلة التفاضلية (E') ثم استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

ثانوية بن شنوف ثامر القسم :3ر

الفرض الأول للفصل الثا ني

التمرين الاول :

نعتبر الأعداد الطبيعية x , y و z حيث : $y = \overline{131}^{x}$ و $z = \overline{101}^{x}$

1/ أحسب الجداء xyz في النظام ذي الأساس x

2/ هل يمكن كتابة $x + y + z$ في النظام ذي الأساس x ؟

3/ اذا علمت أن : $x + y + z = 50$ في النظام العشري , أحسب : $\overline{x + y + z}^{x}$ و $\overline{xyz}^{10}$

4/ نيكن $N = \overline{342\propto}^{x}$ حدد قيم $\propto$ لكي يكون العدد N قابل القسمة على :

أ/ على 5 من أجل : $x = 6$

ب/ على 12 من أجل : $x = 17$

التمرين الثاني :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط :

A $(1;0;0)$ B $(0;2;0)$ C $(0;0;2)$ $\Omega\left(\frac{1}{2};1;1\right)$

نسمي O' المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (ABC)

1/أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC)

2/ أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(O'\Omega)$

3/ حدد احداثيات النقطة O' .

4/ نعتبر سطح الكرة (S_λ) التي مركزها Ω و نصف قطرها $\lambda(\lambda > 0)$

أ/ اكتب المعادلة الديكارتية لـ (S_λ)

ب/ أوجد λ حتى يكون المستوي (ABC) مماسي لـ سطح الكرة (S_λ)

جـ/ أوجد λ بحيث يكون تقاطع المستوي (ABC) مع سطح الكرة (S_λ) : دائرة محيطة بالمثلث ABC

ثانوية : توفيق بوعتورة — إختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات — السنة : 2014-2015

الشعبة : السنة الثالثة رياضيات — المدة : 4 ساعات

تمريـــن الأول : (3 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر من 5

1 - نعتبر العددين الطبيعيين a و b حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

أ – ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7.

جـ - عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$

2 - نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث : $p=2n^2-7n-15$ و $q=n^2-7n+10$.

أ - بين أن كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب - عين تبعا لقيم n ، $PGCD(p;q)$.

تمريـــن الثاني: (2.5 نقاط)

f دالة معرفة و قابلة للإشتقاق على المجال $]0\,;+\infty[$ تحقق المعادلة التفاضلية التالية :

$$xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2 \cdots\cdots(E)$$

1 – بين أنه إذا كانت f حلا للمعادلة (E) فإن الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بالعبارة :

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ هي حلا المعادلة التفاضلية $y'=2y+8 \cdots\cdots(E')$

2 - بين أنه إذا كانت h حلا للمعادلة (E') فإن الدالة f المعرفة بـ : $f(x)=xh(x)$ هي حلا للمعادلة (E)

3 – حل المعادلة (E') ثم استنتج حلول المعادلة (E)

4- هل توجد دالة f حلا للمعادلة التفاضلية (E) بحيث يمر المنحنى (C_f) الممثل للدالة f من النقطة $A(\ln 2;0)$

تمريـــن الثالث : (5.5 نقاط)

I - لتكن الدالتين u و v المعرفتين في $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ و $v(x)=\sqrt{x^2+1}+x$

1 - أحسب $u(x)\times v(x)$ ، استنتج أن $u(x)$ و $v(x)$ من نفس الإشارة .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $u(x)$ و $v(x)$ موجبان تماما .

II- لتكن الدالة f المعرفة في $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

و C تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.(وحدة الطول : $2cm$)

1 - بين أن الدالة f فردية .

2 - بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3 - عين نهاية f عند كل من $+\infty$ وعند $-\infty$.

4 - أعط معادلة للمستقيم Δ مماس المنحني C في النقطة O .

5- أنشئ Δ و C'.

III - لتكن الدالة g المعرفة في $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

و Γ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 - أدرس شفعية الدالة g.

2 - بين أنّ الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3 - عين نهاية g عند كل من $+\infty$ وعند $-\infty$.

4 - أعط معادلة المماس للمنحنى Γ في النقطة O.

5 - أنشئ Γ.

IV - لتكن M نقطة إحداثياها $(x;y)$ و N إحداثياها $(y;x)$.

1 - بين أنّ M تنتمي إلى C إذا وفقط إذا كانت N تنتمي إلى Γ.

2 - ماذا يمكن القول عن C و Γ ؟

__تمريـــن الرابع(3 نقاط)__

1- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 11

2 – ما هو باقي قسمة العدد $4\times 69^{10n+6} + 7\times 58^{20n+13} - 8$ على 11

3 - عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $n^2 + 36^{5n}\times n + 14^{5n+3} + 5 \equiv 0[11]$

4 – أوجد الأعداد الصحيحة β التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي n :
$$\begin{cases} 80^{3n+2}\times\beta + 91^{3n+1} \equiv 0[11] \\ |\beta| \leq 20 \end{cases}$$

5 – عين الثنائيات الطبيعية (x, y) التي تحقق : $14^x + 25^y \equiv 8[11]$

__تمريـــن الخامس : (6 نقاط)__

نعتبر من أجل كل عدد حقيقي m الدالة f_m المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بالعبارة :

$$\begin{cases} f_m(x) = mx + 2x\ln x \quad ; x \succ 0 \\ f_m(0) = 0 \end{cases}$$

1 – أدرس قبلية الاشتقاق عند القيمة 0

2– أدرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m تغيرات الدالة f_m

3– نسمي A_m النقطة من المنحنى (C_m) التي يكون فيها المماس يوازي محور الفواصل

أ – عين بدلالة m احداثيات النقطة A_m

ب – عين مجموعة النقط A_m عندما يتغير m في $\mathbb{R}$

جـ - بين أن x_m فاصلة النقطة A_m هي متتالية هندسية

4– I_m نقطة تقاطع المنحنى (C_m) مع محور الفواصل حيث I_m تختلف عن O ، برهن أن المماس عند النقطة I_m له منحى ثابت يطلب تعيينه

5 – ارسم المنحنى (C_1)

6 - أ – برهن أن : $f_m\left(e^{-\frac{m}{2}}x\right) = e^{-\frac{m}{2}} \cdot f_0(x)$

ب - استنتج أن المنحنى (C_m) هو صورة المنحنى (C_0) بتحويل بسيط يطلب تعيينه

ثانوية : توفيق بوعتورة
السنة : 2015-2014

إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

الشعبة : الثالثة رياضيات
المدة : 4 ساعات

عبد القهار

تمرين الأول : (3 نقاط)

1 – حل في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة : $7x-4y=2$

2- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 15

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} 7^{7n+1}+2=0[15] \\ n\le 23 \end{cases}$

4 – برهن أنه من اجل كل عدد الطبيعي n لدينا : $7^{7n+1}+2$ مضاعف 3

5 - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} 7^{7n+1}+2=0[5] \\ n\le 23 \end{cases}$

تمرين الثاني (3 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر المستقيم (Δ_1) المعرف بالتمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=6+t \\ y=4+t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$ و المستقيم (Δ_2) المعرف بالمعادلتين الديكارتيتين $\begin{cases} x+y-6=0 \\ 2x-z-7=0 \end{cases}$

1 – أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ_2)

2 - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(0;1;1)$ و يوازي (Δ_1)

3 – عين تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

4- ما هي أقصر مسافة بين (Δ_1) و (Δ_2)

5- أكتب معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (Δ) الذي يعامد (Δ_1) و (Δ_2)

تمرين الثالث (3 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} & x\neq 1 \\ f(1)=0 \end{cases}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $4cm$)

1 – أدرس إستمرارية الدالة f عند القيمة $x_0=1$

2 - أدرس قابلية الاشتقاق للدالة f عند القيمة $x_0=1$ فسر النتيجة بيانيا

3 – أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4 – أرسم بدقة المنحنى (C_f)

تمرين الرابع : (6 نقاط)

I - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر التحويل النقطي T_α الذي يرفق بكل $M(x,y)$ النقطة

$M'(x',y')$ حيث : $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \alpha y + \frac{3}{2}\alpha + \alpha^2 \\ y' = \alpha x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\alpha - \alpha^2 \end{cases}$$

1 – بين أنه توجد نقط صامدة وحيدة ω_α

2 – عين مجموعة النقط ω_α لما يتغير α في $\mathbb{R}$

3 – بين أنه توجد نقطتين α_1 و α_2 التي من أجلها يكون التحويل T_α تقايس

4 - لتكن z لاحقة النقطة $M(x,y)$ و z' لاحقة النقطة $M'(x',y')$

أ) أكتب عبارة z' بدلالة z

ب) استنتج طبيعة و عناصر التحويلين T_0 و $T_{\frac{1}{2}}$ من أجل $\alpha = 0$ و $\alpha = \frac{1}{2}$ على الترتيب

II - نعتبر النقط $A(1;1)$ ، $B(0;1)$ و $C\left(0\,;-\frac{1}{2}\right)$

1 – عين قيم العدد الحقيقي α التي من أجلها تكون النقطة A_1 تنتمي الى المستقيم (BC) حيث : $T_\alpha(A) = A_1$

2 – نضع $\alpha = 0$ لتكن (A_n) متتالية النقط المعرفة كما يلي : $A_0 = A$ و $A_n = T_0(A_{n-1})$

أ) أحسب z_n لاحقة النقطة A_n بدلالة n

ب) أوجد موضع النقطة A_n لما n يزول إلى $+\infty$

3 – (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_n = \left|z_n\right|$

أ) برهن أن (u_n) متتالية هندسية

ب) أحسب بدلالة p : $\left\|\overrightarrow{A_pA_{p+1}}\right\|$ و $S_n = \sum_{p=0}^{n}\left\|\overrightarrow{A_pA_{p+1}}\right\|$ بدلالة n

تمرين الخامس : (5 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{(\cos x)^2}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- بين أن الدالة f دورية و دورها 2π

2 – ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v} = \pi\vec{i}$ و s التناظر المحوري بالنسبة لمحور الفواصل

أوجد العبارة التحليلية للتحويل النقطي h الذي يرفق بكل $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ حيث $h = s\circ t$

3 – بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ لدينا $f(x+\pi) = -f(x)$

4 – بين أن من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ $f'(x) = \dfrac{2\tan^2 x - \tan x + 1}{\cos x}$

5 – أ) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ثم أكتب جدول تغيراتها

ب) بين أن النقطة $\omega(0,-1)$ ليست نقطة إنعطاف

6 – أوجد معادلة المماس (Δ) عند النقطة ω

7 – مثل المنحنى (C_f) على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، ثم استنتج تمثيل لـ (C_f) على المجال $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

إنتــهـــى

ثانوية : توفيق بو عتورة | الفرض الأول للفصل الثاني في مادة | المستوى : 3 رياضي
السنة : 2015-2014 | الـريــاضيــات | المدة : 2 سا

التمرين الأول :

نعتبر في مجموعة الأعداد الصحيحة المعادلة (E) : $43x-13y=m \;......(E)$ حيث $m\in\mathbb{Z}$

1 – باستعمال خوارزمية إقليدس عين بدلالة m حلا خاصا للمعادلة (E)

2- استنتج بدلالة m الحل العام للمعادلة (E)

2- نعتبر العدد الطبيعي N الذي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}$ في النظام ذو الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta 0\lambda\lambda\lambda}$ في النظام ذو الأساس 5 عين α، β و λ

التمرين الثاني :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر المستوي (P) المعرف بتمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x=4-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}t \\ y=4+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}t \\ z=4+3k \end{cases} \quad (t,k)\in\mathbb{R}^2$$

1 - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

2 – هل المستقيم (OZ) يوازي المستوي (P)

3 - لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق :

$$\begin{cases} x=4-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \\ y=4+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\cos\alpha \\ z=4+3\sin\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

أ – بين أن (Γ) محتواة في (P)

ب – أحسب المسافة بين النقطة $A(4;4;4)$ ونقطة كيفية من المجموعة (Γ)

جـ - عين ثم أنشئ المجموعة (Γ)

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=(1-2x)e^{2x}$

1 – عين الدالة المشتقة الأولى و الثانية للدالة f

2 – نسمي $f^{(n)}$ المشتق من الرتبة n (حيث n عدد طبيعي غير معدوم)

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $f^{(n)}(x)=2^n(1-n-2x)e^{2x}$

3 – نسمي (C_n) المنحنى الممثل للدالة $f^{(n)}$ في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

$M_n(x_n, y_n)$ النقطة من المنحنى (C_n) و التي يقبل عندها (C_n) مماسا يوازي حامل محور الفواصل

أ) أحسب x_n و y_n بدلالة n

ب) بين أن M_n تنتمي الى منحنى يطلب تعيين معادلته

حـ) أثبت أن (x_n) متتالية حسابية ، عين أساسها وحدها الأول

د) أثبت أن (y_n) متتالية هندسية ، عين أساسها وحدها الأول ، أحسب نهايتها

التمرين الرابع :

ينسب المستوي المركب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $4cm$)

نعتبر النقطتين A و B حيث $z_A = 1+i$ و $z_B = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ و (C) الدائرة مركزها O و نصف قطرها 1

1 – أكتب كل من z_A و z_B على الشكل المثلثي

2 – M نقطة كيفية من الدائرة (C) لاحقتها $e^{i\alpha}$ حيث : $\alpha \in [0, +\infty[$

نعتبر الدالة f التي ترفق بكل نقطة M من الدائرة (C) العدد $f(M) = \|\overrightarrow{MA}\| \times \|\overrightarrow{MB}\|$

أ) برهن أن : $e^{i2\alpha} - 1 = 2ie^{i\alpha}\sin\alpha$

ب) برهن أن : $f(M) = \left| e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha} \right|$

جـ) استنتج أن : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

3 - أ) برهن أنه توجد نقطتان من الدائرة (C) حيث يكون $f(M)$ أصغر ما يمكن

ب) برهن أنه توجد نقطة وحيدة من الدائرة (C) حيث يكون $f(M)$ اكبر ما يمكن

وزارة التربية الوطنية

مديرية تطور الموارد البيداغوجية و التعليمية

المديرية الفرعية لترقية النخبة المدرسية و متابعتها

الدور الولائي للمنافسات العلمية و الأدبية في مرحلة التعليم الثانوي

امتحان المنافسة العلمية في مادة الرياضيات

المستوى: 3 رياضي

التمرين الأول: (4ن) 1) نعتبر في المجموعة $N^* \times N^*$ المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$ حيث:

$5xy + 7(x+y) - 65 = 0$ ....(*)

✓ تحقق أن المعادلة (*) تكافئ المعادلة $25xy + 35(x+y) + 49 = 374$

✓ عين قواسم العدد 374 ثم حل المعادلة (*)

2) Z يرمز إلى مجموعة الأعداد الصحيحة:

حل , في $Z \times Z$, المعادلة ذات المجهولين $(x;y)$ حيث: $5xy - 7(x+y) - 65 = 0$

التمرين الثاني: (6ن) f الدالة المعرفة على IR ب: $f(x) = e^x \times \cos x$. (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $-e^x \le f(x) \le e^x$

$r = \sqrt{2}$

ب- استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا عند $-\infty$ يطلب تعيينه .

$\theta \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

2) عين فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل .

3) برهن أنه من أجل كل x من IR , لدينا: $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\alpha = -\frac{\pi}{4}$

4) أ- أحسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارته على المجال: $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

ب- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ثم أرسم المنحنى (C) على نفس المجال .

5) f'' الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, لدينا: $f''(x) = -2e^x \times \sin x$

ب- (T_x) المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة x .

استنتج أنه على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ معامل توجيه (T_x) يأخذ قيمة أعظمية من أجل $x = 0$ يطلب تعيينها

ج- جد معادلة للمستقيم (T_0) و رسمه على المعلم السابق.

$y = f(x)$ ∪
$y = -f(x)$

6) أ- ليكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق: $2y^2 - e^{2x}\cos 2x - e^{2x} = 0$. بين أن: $(\Gamma) = (C) \cup (C')$ حيث (C') هو صورة (C) بتحويل نقطي يطلب تعيينه

ب- أرسم (Γ) , على المجال $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, في المعلم السابق.

التمرين الثالث: (5ن) من أجل كل عدد طبيعي P حيث: $P \geq 2$ نضع: $N_p = 1 \dots 1$ حيث 1 يظهر P مرة

1) هل الأعداد: $N_2 = 11$ و $N_3 = 111$ و $N_4 = 1111$. أعداد أولية

2) أحسب N_p ثم استنتج أن $10^p - 1$ يقبل القسمة على 9

3) علما أن من أجل كل عدد حقيقي x ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

- ✓ نفترض أن P عدد طبيعي زوجي, ونضع $P = 2q$ حيث q عدد طبيعي أكبر من 1 . برهن أن N_p يقبل القسمة على N_2
- ✓ نفترض أن P مضاعف ل: 3 ونضع $P = 3q$ حيث q عدد طبيعي أكبر من 1 . برهن أن N_p يقبل القسمة على $N_3 = 111$
- ✓ نفترض أن P ليس عدد أولي و نضع $P = kq$ (حيث k و q عددين طبيعيين أكبر من 1) . استنتج أن N_p يقبل القسمة على N_k

4) أعط الشرط اللازم حتى يكون N_p عدد أولي .هل هذا الشرط كافي ؟

التمرين الرابع: (5ن) من أجل كل عدد حقيقي k موجب تماما نعتبر الدالة f_k المعرفة على $]0,+\infty[$ ب:

$$f_k(x) = ln(e^x + kx) - x ,$$

ليكن (C_k) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس حيث: $\|\vec{\imath}\| = 5cm$ و $\|\vec{\jmath}\| = 10cm$

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ ب: $g(x) = ln(1+x) - x$

أ- ادرس اتجاه تغير الدالة g

ب - استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي موجب a $ln(1+a) \leq a$

$f = \ln e^{-x} + \ln(e^x + x)$

2) أدرس تغيرات الدالة f_1 على المجال $]0,+\infty[$

3) أ- أحسب $f'_k(x)$ و أدرس اتجاه تغير الدالة f_k على المجال $]0,+\infty[$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f_k (مع حساب نهاية f_k عند $+\infty$)

$f_k(x) \leq \ln(e+k) - 1$

$\ln\left(1+\frac{k}{e}\right) \leq \frac{k}{e}$

ج- برهن أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$

د- أوجد معادلة المماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند النقطة O

$\ln(1+a) < 0$

4) ليكن العددين p و m موجبان تماما بحيث $p < m$. أدرس الوضع النسبي ل C_p و C_m

5)أ رسم المنحنى (C_1) و (C_2) و المماسات (T_1) و (T_2) على الترتيب عند النقطة O

$(-1;0)$

6) mعدد حقيقي ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $f_1(x) = mx$

$]-\infty;\dots]$ m قيمة

التمرين 01 :

أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-2x+3}}{x}$ ، 2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2+1}\right)$

3) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x+1}\right)$ ، 4) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+x}\right)$

6) $\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)$ ، 7) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)$

8) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ ، 9) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{4x+1}-3}$

10) $\lim_{x\to0}\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}-x}$ ، 11) $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x+\pi)}{x}$

12) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}$ $=\frac{3}{2}$ ، 13) $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$ $=f'(0)$

$\frac{\sin 3x}{x-0}=f'(0)$ $=3$ $3\cos 3x$

التمرين 02 :

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}$ ، 2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{2\cos x-1}$

3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}$

التمرين03:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{2x-\sin x}{3x+1}$$

1 – عين الدالتين u و v التي من أجلها يكون :

من أجل $x\geq0$: $v(x)\leq f(x)\leq u(x)$

2 – استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

التمرين04:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$$

أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ و $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$

فسر النتائج هندسيا

التمرين05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2]\cup[-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-x+\sqrt{x^2+3x+2}$$

1 – أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

2- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-2x-\frac{3}{2}$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

التمرين 06

f دالة عددية معرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$$

1- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f)

2 – أدرس وضعية المستقيم (Δ) بالنسبة للمنحنى (C_f)

التمرين 07

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+x+1}}{x}$$

1 – بين أن من أجل $x\geq0$:

$$4x^2\leq4x^2+x+1\leq(2x+1)^2$$

2 – استنتج حصرا لـ $f(x)$

3 - استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

التمرين 08

نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x)=\frac{x(1+\sin x)}{x-\sqrt{x^2+1}}$

1 – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $x>0$

$$\frac{1}{x-\sqrt{x^2+1}}<-2x$$

2 – استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)\leq-4x^2$

3- استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

الاستاذ : بن حبيلس الـــــدوال العــــدديـــــة السنة الدراسية : 2014 - 2015

تمرين 01 :

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=x^3+3x+8$$

1 ادرس تغيرات الدالة g

2- برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث $-1.6\prec\alpha\prec-1.5$

3- استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^3-4}{x^2+1}$$

1 – عين الاعداد الحقيقية d,c,b,a التى من اجلها يكون لدينا

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

2 – ادرس تغيرات الدالة f

3 – نسمي C_f منحنى الدالة f في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ – برهن أن للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته

ب – ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم (Δ)

4 – هل للمنحنى مماس يوازي المستقيم (Δ)

5 – برهن ان $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$. عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

6 - أنشيء المنحنى C_f

تمرين 02 :

I - نعتبر كثير الحدود $P(x)$ المعرف كما يلي :

$P(x)=x^4-4x^3+7x^2-4x$ أحسب $P(1)$ ثم حلل $P(x)$. عين اشارة $P(x)$

II - لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$$

1 – عين الاعداد الحقيقية c,b,a حيث تكون :

$$f(x)=ax+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$$

2 – أدرس تغيرات الدالة f . برهن ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته .

3 – ادرس وضعية C_f بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ)

4 – اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى C_f عند القيمة -1

5 – ارسم المماس (T) و المنحنى C_f

6 – ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

تمرين 03 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$f(x)=x+1-\frac{x}{x^2+1}$ نسمي C_f منحناها البياني في معلم متعامد و متجانس

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 – برهن ان للمعادلة $f(x)=0$ حلا α في المجال $]-2,-1[$. عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1}

3 - اكتب معادلة المماسان للمنحنى C_f عند القيمتين 1 و -1

4 – برهن ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (Δ) .

ادرس وضعية C_f بالنسبة الى (Δ)

5 – برهن ان النقطة $I(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f

6 – برهن ان للمنحنى نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها .

ارسم المماسين و المنحنى C_f

7 – ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

8 – نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x)=|f(x)|$. فسر كيف يمكن رسم منحناها باستعمال االمنحنى C_f ارسم المنحنى الممثل للدالة g

تمرين 04 :

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{2x^3+9x^2+12x+4}{(x+1)^2}$$

1 – عين الاعداد الحقيقية c,b,a التي من اجلها تكتب g(x) على الشكل : $g(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$

2 – احسب g'(x) ثم تحقق ان :

$$g'(x)=\frac{2(x+2)(x^2+x+1)}{(x+1)^3}$$

3 – ادرس تغيرات الدالة g . احسب g(-0.5) , ثم استنتج اشارة g(x) .

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي :

$$f(x)=x^2+5x+\frac{1}{x+1}$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f . بين ان المنحنى C_f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $-6\prec\alpha\prec-5$

2 – اكتب معادلة المماس عند القيمة -3 .

3 - بين ان للمنحنى C_f نقطة انعطاف

4– عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1} . ارسم المماس و المنحنى C_f

5- ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(x^2+5x)(x+1)-mx=m-1$

تمرين 05 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{x^2+x+1}$$

1 – عين الاعداد القيقية d,c,b,a حيث يكون لدينا :

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

2 – ادرس تغيرات الدالة f . برهن ان المنحنى C_f يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيينن معادلته .

3 – ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) . اكتب معادلة المماس الموازي للمستقيم (Δ) .

4 – بين ان النقطة $I(-\frac{1}{2},-\frac{9}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f

5 – بين ان للمنحنى نقطة انعطاف . ارسم المماس و C_f

6 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

تمرين 06 :

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=x^3-3x-4$$

1 – ادرس تغيرات الدالة g . برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا α في المجال $[2,3]$,

2 - عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1}

3 – استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-1,1\}$

بالعبارة : $$f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$$

1 – عين الاعداد الحقيقية d,c,b,a حيث يكون لدينا :

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2-1}$$

2 – برهن أن من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ لدينا : $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(x^2-1)^2}$. استنتج تغيرات الدالة f

3 – برهن ان $f(\alpha)=\frac{3\alpha+4}{2}$ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 – برهن ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب تعيين معادلته . ادرس وضعية C_f بالنسبة للمستقيم (Δ)

5 - اكتب معادلة المماس الموازي للمستقيم (Δ).

6 - ارسم المماس و المحنى C_f

7 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $x^3-mx^2+m+2=0$

x^2

تمرين 07:

I – لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$. f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$$

1 - برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x)\succ 0$

II – من اجل كل عدد حقيقي x نضع : $g(x)=x.f(x)$

نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة g

1 - ادرس تغيرات الدالة g و الفروع اللانهائية للمنحنى (C)

2 - اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) عند القيمة $x_0=0$

3 - ارسم المنحنى (C) في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

4 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $g(x)=x+m$

تمرين08:

I - نعتبر الدالة f_m ذات المتغير الحقيقي x المعرفة كما يلي :

$f_m(x)=\frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+m}$. نسمي C_m تمثيلها البياني

1 – عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m مجموعة تعريف الدالة

2 – بين ان جميع المنحنيات C_m تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيين احداثياها

3 – عين m حتى يشمل المنحى C_m النقطة $A(3,-2)$

نفرض في هذا الجزء ان $m=1$

1 – ادرس تغيرات الدالة f_1 , عين المستقيمات القاربة , اكتب معادلة المماس عند القيمة 1-

2 – ارسم المماس و المنحنى C_1 .

3 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي k عدد و اشارة حلول المعادلة : $(k-1)x^2-2(k+1)x+k+7=0$

II - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{1\}$ بالعبارة :

$g(x)=\frac{x^2+2x-7}{|x-1|(x-1)}$ نسمي (γ) منحناها البياني

1 – اكتب عبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2 – فسر كيف يمكن رسم المنحنى (γ) انطلاقا من المنحنى C_1 . ارسم المنحنى (γ) في نفس المعلم السابق .

تمرين 09 :

لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$

1 – عين مجموعة تعريف الدالة f , ثم ادرس تغيراتها

2 – احسب: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ اعط تفسير هندسي

3 – أكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0

4 – ارسم المنحنى المنحنى الممثل للدالة f

5 – لتكن E مجموعة النقط $M(x,y)$ التي تحقق :

$$. (x-1).x^2+(x+1).y^2=0$$

*- بين ان المجموعة E هي اتحاد منحنايين يطلب تعيين معادلتهما . انشيء المجموعة E في نفس المعلم السابق

التمرين10

f دالة معرفة على المجال $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$ نسمي (C_f) تمثيلها البياني

1- أدرس قابلية الإشتقاق عند القيمتين 0 و 4- ، فسر النتيجة

2- أدرس تغيرات الدالة f

3- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(2x+3)\right)$. ماذا تستنتج

4- أرسم المنحنى (C_f)

5- لتكن الدالة g المعرفة على $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x}$ ، نسمي (C_g) تمثيلها البياني

برهن ان المنحنيين (C_g) و (C_f) متناظران بالنسبة للنقطة $\omega(-2,-1)$

6- عين المجموعة (Υ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $y^2-2y(x+1)-2x+1=0$

7 - أنشئ المجموعة (Υ).

التمرين11

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=2x-\sqrt{1+x^2}$$

1- أدرس إتجاه تغيرات الدالة g

2- أثبت أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α يطلب تعيينه

3- استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$ ، نسمي (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}} .$$

- استنتج إتجاه تغيرات الدالة f أكتب جدول تغيراتها .

3- نعتبر المستقيمان (d) و (d') معادلاتهما على الترتيب $y=x$ و $y=-3x$.

أثبت أن المستقيمان (d) و (d') هما مقاربان مائلان للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$ على الترتيب

4- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d')

5- أنشئ بدقة المنحنى (C_f)

التمرين12:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{2\}$ بالعبارة :

$f(x)=\dfrac{-3x^2+4x}{(x-2)^2}$ ، نسمي C_f تمثيلها البياني .

1 – ادرس تغيرات الدالة f , ثم عين المستقيمات المقاربة

2 – بين ان المنحنى C_f يقطع المستقيم المقارب الافقي في نقطة يطلب تعيين احداثياها

3 – بين ان للمنحنى نقطة انعطاف , عين تقاطع المنحنى مع المحورين , ثم ارسم المنحنى C_f

4 – ليكن المستقيم (d_m) ذو المعادلة $y=m.x$ ، حيث $m\neq 0$

أ – ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى C_f مع المستقيم (d_m)

ب – لتكن S مجموعة قيم العدد الحقيقي m التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع المنحنى C_f في ثلاثة نقط M_2,M_1,M_0 عين قيم m من المجموعة S حيث تكون فواصل النقط M_2,M_1,M_0 تشكل ثلاثة حدود متتابعة من متتالية حسابية

التمرين13

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بالعبارة

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$$

1 – برهن أن الدالة f دالة زوجية

2 – أدرس تغيرات الدالة f

3 – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ، فسر النتيجة .

4 – أنشئ على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ المنحنى (C_f)

5 - لتكن (Υ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$x^2(y^2-x^2)-y^2=0$$

أ- بين أنه إذا كانت النقطة $M(x,y)$ تنتمي على المجموعة (Υ) فإن النقط $M_1(x,-y)$ ، $M_2(-x,-y)$ و $M_3(-x,y)$ تنتمي الى المجموعة (Υ) ، ماذا تستنتج .

ب – برهن أن المجموعة (Υ) هي إتحاد المنحنى (C_f) الممثل للدالة f و المنحنى (Υ) الممثل للدالة g يطلب تعيين عبارتها .

جـ - أنشئ المجموعة (Υ).

6 – لتكن النقط D, C, B, A النقط الحدية للمنحنى (Υ) ، ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ علل إجابتك

التمرين 01:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$$

1 – أكتب $f(x)$ على الشكل : $f(x)=a\cos(x-\theta)$

2 –بين أن دالة f دورية دورها 2π

3 – أدرس تغيراتها على المجال $[0;2\pi[$

4 – ارسم المحنى (C_f)

التمرين 02:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=1+2\cos x+\cos 2x$$

1 - بين أن دالة f دورية دورها 2π

2 – برهن أن f دالة زوجية

3 - أدرس تغيراتها على المجال $[0;\pi]$ ثم استنتج جدول تغيراتها على المجال $[-\pi;\pi]$

4 - ارسم المحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$ ، ثم فسر كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$

التمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x$$

1 - بين أن دالة f دورية دورها π

2 - أدرس تغيراتها على المجال $[0;\pi]$

3 – حل المعادلة $f(x)=0$

4 - ارسم المحنى (C_f) على المجال $[0;\pi]$، ثم فسر كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$

التمرين 04:

نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}\sin x+1}$

1 –- عين مجموعة تعريف الدالة f

2 - بين أن دالة f دورية دورها 2π

3 - أدرس تغيراتها على المجال $[0;2\pi[$

4 – برهن أن المستقيم ذو المعادلة $x=\dfrac{\pi}{2}$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f)

5 - اكتب معادلة المماس (T) عند القيمة π

6 - ارسم المحنى (C_f)

التمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$f(x)=(1+\cos x)\sin x$$

1 - بين أن دالة f دورية دورها 2π

2 – برهن أن الدالة f دالة فردية

3 - أدرس تغيراتها على المجال $[0;\pi]$ ثم استنتج جدول تغيراتها على المجال $[-\pi;\pi]$

4- حل في المجال $[0;\pi]$ المعادلة $f(x)=0$

5 - ارسم المحنى (C_f) على المجال $[-\pi;\pi]$ ، ثم فسر كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) على $\mathbb{R}$

التمرين 06:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x-\cos x$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 - أ) برهن أن الدالة f دورية ذات الدور 2π

ب) برهن أن محور التراتيب هو محور تناظر للمنحى

2 - أ) عين الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f

ب) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$f'(x)=\sin x(1-2\cos x)$$

جـ) أدرس اشارة $f'(x)$ على المجال $[0\ ,\ \pi]$

3 - أ) أكتب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0\ ,\ \pi]$

ب) أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[0\ ,\ \pi]$

جـ) فسر كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) على المجال $[-\pi\ ,\ \pi]$ ، ثم على $\mathbb{R}$

تمرين 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=1-x+e^{2x}-e^{x}$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 - بين ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته ، ثم ادرس وضعية المنحنى C_f بالسبة للمستقيم (Δ)

3 –بين ان للمنحنى مماس (T) يوازي (Δ). اكتب معادالته

4 – بين ان للمنحنى نقطة انعطاف , ثم ارسم المماس و المنحنى

5 – ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=-x+m$

تمرين 02:

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=(3-2x)e^{x}+2$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g.

2 - بين ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث : $1.68<\alpha<1.69$

3 - استنتج اشارة $g(x)$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{e^{x}+4x-1}{e^{x}+1}$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 - بين ان : $f(\alpha)=4\alpha-5$ عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

3 – برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=4x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f الممثل للدالة f

4 – ادرس وضعية C_f بالنسبة الى المستقيم (d)

5 – اكتب معادلة المماس للمنحنى C_f عند القيمة $x_0=0$

6 – ارسم المماس و المنحنى C_f

7 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $me^{x}-4x+m+2=0$

تمرين 03 :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$بالعبارة :

$$g(x)=(ax+b)e^{-x}+1$$

1 – عين العددين الحقيقيين b,a حتى تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي الى المنحنى C_g و معامل توجيه المماس عندها يساوي $e-$

2 – ادرس تغيرات الدالة g , بين ان المنحنى C_g يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها , اكتب معادلة المماس عندها .

3 - ارسم المماس و المنحنى في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

4 - لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=g(x^2)$

دون حساب عبارة $f(x)$, احسب $f'(x)$, ثم اكتب جدول تغيرات الدالة f

تمرين 04 :

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=+x-e^{-x}$$

1- أدرس تغيرات الدالة g

2- استنتج اشارة $g(x)$

II- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^{2}+1+e^{-x}$$

نسمي C_f منحنا ها في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1 – برهن ان : $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x}}{x^{2}}=+\infty$

2 - ادرس تغيرات الدالة f , عين الفروع اللانهائية

3- بين ان للمنحنى C_f نقطة انعطاف ω . اكتب معادلة المماس عند النقطة ω

4 – بين ان المنحنى C_f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $1<\alpha<2$

5 – ارسم المماس و المنحنى C_f

6 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=mx+2$

تمرين 05 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x+\frac{2}{e^{x}+1}$

. نسمي C_f منحنا ها في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 - بين ان للمنحنى مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتهما .

3 – برهن ان النقطة $A(0,1)$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f اكتب معادلة المماس عند النقطة A

4 - بين ان المنحنى C_f يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $-2<\alpha<-1$

5 - بين ان للمنحنى C_f نقطة انعطاف . ارسم المنحنى C_f

تمرين 06:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{(4x+9)e^{x}-4x}{9(1-e^{x})}$$

نسمي C_f منحنا ها في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1 – تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$$f(x)=-\frac{4}{9}x+\frac{e^{x}}{1-e^{x}} \quad \text{و} \quad f(x)=-\frac{4}{9}x-1+\frac{1}{1-e^{x}}$$

2 – ادرس تغيرات الدالة f

3 - بين ان للمنحنى ثلاثة مستقيمات مقاربة .

4 – ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقينان المقاربان

5– برهن ان النقطة $A(0,-\frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f

6 – اكتب معادلة المماس عند القيمة $x_0=1$. ارسم المماس و المنحنى C_f

7 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $(4x+9+9m)e^x-4x-9m=0$

8 - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $g(x)=f(|x|)$

فسر كيف يمكن رسم المنحنى C_g الممثل للدالة g انطلاقا من المنحنى C_f . ارسم C_g في نفس المعلم السابق .

تمرين 07:

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x)=x+2-e^x$

1 – ادرس تغيرات الدالة g .

2 - برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث :

$1,14<\alpha<1,15$

3 – استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{1+xe^x}$$

نسمي C_f منحنا ها في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1 – برهن انه من اجل كل عدد حقيقي $x\in]0,+\infty[$ لدينا :

$$f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(1+xe^x)^2}$$

2 – ادرس تغيرات الدالة f

3 - برهن ان $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 – اكتب معادلة المماس (T) عند القيمة 0

5 – نعتبر الدالة u المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بالعبارة :

$u(x)=(1-x)e^x-1$

- ادرس تغيرات الدالة u ثم استنتج اشارة $u(x)$

6 – عين وضعية المنحنى بالنسبة للمماس . ارسم المماس (T) و المنحنى C_f

تمرين 08:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 – بين ان المنحنى C_f يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياها

- 3 - اكتب معادلة المماس عند هذه النقطة

4 – برهن ان نقطة الانعطاف هي مركز تناظر للمنحنى C_f

5 – احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+3))$. ماذا تستنتج ؟

6 – بين ان للمعادلة $f(x)=0$ حلا α حيث :

$-2,77<\alpha<-2,76$. ارسم المنحنى C_f

7 - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(-x)$

أ - دون حساب عبارة $g(x)$, احسب $g'(x)$

ب - استنتج اشارة $g'(x)$.

جـ - فسر كيف يمكن رسم منحناها C_g انطلاقا من المنحنى C_f . ارسم المنحنى C_g في نفس المعلم

تمرين 09:

I - g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x)=(1-x)e^x+1$.

1 – ادرس اتجاه تغيرات الدالة g . برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $1,27<\alpha<1,28$

2 – استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x}{e^x+1}+2 .$$

نسمي C_f منحنا ها في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1 – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. فسر النتيجة

2 – برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $-\infty$

3 – برهن ان اشارة $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$. استنتج تغيرات الدالة f

4 – برهن انه يوجد عددان حقيقيان p و q حيث يكون $f(\alpha)=p\alpha+q$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5 – ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة الى المستقيم (d)

6- ارسم المنحنى C_f

تمرين10

I - g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$g(x)=(x+2)e^{x-1}-1$

1 - ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

2 - برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $0,20<\alpha<0,21$ ، ثم استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=x^2e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f .

2 - برهن ان : $f(\alpha)=\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$

3 – لتكن الدالة h المعرفة على المجال $[0,1]$ بالعبارة :

$$h(x)=\frac{-x^3}{2(x+2)}$$

عين اتجاه تغيرات الدالة h , ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 – عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع المحورين

5 - ارسم المنحنى C_f .

تمرين 11:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{e^x}{(x+1)^2}$$

1 – احسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-1} f(x)$. ماذا تستنتج ؟

2 – احسب $f'(x)$. ثم برهن ان اشارة $f'(x)$ هي من اشارة $\frac{x-1}{x+1}$. استنتج تغيرات الدالة f .

3 – اكتب معادلة المماس عند القيمة 0 .

4 – بين ان للمعادلة $f(x)=1$ حلا α على المجال $[1;10]$. عين حصرا للعدد α

5 – ارسم المماس و المستقيم ذو المعادلة $y=1$ و المنحنى

تمرين 12 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=x+\ln 4+\frac{2}{e^x+1}$$

1 –احسب النهايات عند $(+\infty)$، $(-\infty)$

2 – احسب $f(x)+f(-x)$ ماذا تستنتج ؟

3 - ادرس تغيرات الدالة f

4 – برهن ان للمعادلة $f(x)=m$ حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ ثم عين حصرا للعدد α حلا للمعادلة $f(x)=3$ المقرب الى 10^{-1}

5 – عين قيمة العدد m التي من اجلها يكون $-\alpha$ حلا للمعادلة $f(x)=m$

6 – تحقق انه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$$f(x)=x+2+\ln 4-\frac{2e^x}{e^x+1}$$

7 - برهن ان للمنحنى مستقيمان مقاربان مائلان (d) و (d') ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة الى (d) و (d')

8 - ارسم المنحنى C_f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 13 :

I - g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=(-x+2)e^x-1$$

1 - ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

2 – أحسب : $g(-2), g(0), g(1), g(2)$. ثم برهن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين α و β حيث : $\alpha\prec\beta$

3- عين حصرا للعددين α و β المقرب الى 10^{-1}

4 – استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة بالعبارة : $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$

1 – برهن انه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $e^x-x\succ 0$ استنتج مجموعة تعريف الدالة f

2 - ادرس تغيرات الدالة f . برهن ان $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ استنتج حصرا لكل من $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

3- ارسم المنحنى C_f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 14:

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}(1-x)e^{2x}$$

1 – احسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. استنتج ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (d) بجوار $-\infty$

2- أدرس وضعية C_f بالنسبة الى المستقيم (d) .

3– نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$u(x)=1+(1-2x)e^{2x}$$

أ- ادرس تغيرات الدالة u .

ب - برهن ان للمعادلة $u(x)=0$ حلا α على المجال $[0,1]$

جـ - عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1} .

د - استنتج اشارة $u(x)$

4 – احسب $f'(x)$. تحقق ان اشارة $f'(x)$ هي من اشارة $u(x)$, استنتج تغيرات الدالة f .

5 - ارسم المنحنى C_f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

II- نسمي (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x\to e^x$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

1 – انشيء في معلم آخر كل من (Γ) و (d)

2 – ليكن t عدد حقيقي نسمي M_t نقطة من المنحنى (Γ) ذات الفاصلة t المماس للمنحنى (Γ) في النقطة M_t يقطع محور الفواصل في النقطة N_t.

عين احداثيات النقطة N_t بدلالة t

3 – نعتبر النقطة P_t من المستقيم (d) ذات الفاصلة t , و G_t مركز المسافات المتساوية للنقط M_t,N_t,P_t,O

أ- انشيء النقط M_{-2},N_{-2},P_{-2} و G_{-2} .

ب – عين بدلالة t احداثيات النقطة G_t.

جـ عين مجموعة النقط G_t عندما يتغير t في $\mathbb{R}$.

تمرين15 :

I - g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=e^x+x+1$$

1 - ادرس اتجاه تغيرات الدالة g .

2 - برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α في المجال $[-1,28,-1,27]$ ، استنتج اشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{xe^x}{e^x+1}$$

1 – برهن ان اشارة $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$.

2 - استنتج تغيرات الدالة f

3 – برهن ان $f(\alpha)=\alpha+1$ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 – اكتب معادلة المماس (T) عند القيمة 0 . ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة الى المماس (T)

5- برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل . ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة الى المستقيم (d)

6 – ارسم (T) , (d) و C_f

تمرين 16:

I - نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$y'-2y=2(e^{2x}-1)$$

1 – برهن ان الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $u(x)=2xe^{2x}+1$ هي حلا للمعادلة (E).

2 – نضع $y=u+v$. برهن انه تكون y حلا للمعادلة (E) اذا كانت v حلا للمعادلة $y'-2y=0$ ....(E')

أ- عين حلول المعادلة (E')

ب – استنتج حلول المعادلة (E) .

جـ - عين على الخصوص الحل الذى ينعدم من اجل $x=0$ نسمي $g(x)$ هذا الحل .

II- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=(2x-1)e^{2x}+1$$

1 – ادرس تغيرات الدالة g

2 – استنتج اشارة $g(x)$

III - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{x}$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 – برهن ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلته .

3- ارسم المنحنى C_f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 17:

I - نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$y'-2y=0$$

1 – عين حلول المعادلة .

2 - a و b عددان حقيقيان و u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$u(x)=(ax+b)e^x$$

أ – عين العددين a و b حتى تكون الدالة u حلا للمعادلة (E') المعرفة كما يلي : $y'-2y=xe^x$

ب – برهن انه تكون v حلا للمعادلة (E) اذا كانت $u+v$ حلا للمعادلة (E').

جـ - استنتج حلول المعادلة (E') . عين الحل الذي ينعدم من اجل $x=0$

II- g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=2e^x-x-2$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلين احدهما معدوم و الثاني α حيث : $-1,6\prec\alpha\prec-1,5$

3 – استنتج اشارة $g(x)$.

III - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 - برهن ان $f(\alpha)=-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$.

3 - عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 - ارسم المنحنى C_f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 18:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=2e^x+2x-7$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث : $0,94\prec\alpha\prec0,95$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=(2x-5)(1-e^{-x})$$

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 - برهن ان $f(\alpha)=\frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$

3 – لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ بالعبارة : $h(x)=\frac{(2x-5)^2}{2x-7}$

أ - ادرس اتجاه تغيرات الدالة h .

ب - استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

جـ - استنتج اشارة $f(x)$.

4 – برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=2x-5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنجنى C_f بجوار $+\infty$.

5 – ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم (d) .

6 - ارسم المنحنى C_f في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

III - من اجل كل عدد طبيعي n , (n> 3) نعتبر النقط: A_n نقطة من محور الفواصل فاصلتها n , B_n نقطة من المستقيم (d) , و C_n نقطة من المنحنى C_f . نعتبر العدد الحقيقي U_n المعرف كما يلي : $U_n=\frac{C_nB_n}{A_nB_n}$.

1 – برهن ان : $U_n=\frac{2n-5-f(n)}{2n-5}$

2 – عين طبيعة المتتالية (U_n) . احسب $\lim_{x\to\infty}U_n$.

تمرين 19 :

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=x+e^{-x}$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g

2 - استنتج اشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=(x-1)(e^{x}+1)$$

نسمي C_f منحناها في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- ادرس تغيرات الدالة f

2- برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة : $y=x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f بجوار $-\infty$

3- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم (d) .

4- بين ان للمنحنى نقطة انعطاف A يطلب تعيين احداثياتها . اكتب معادلة المماس في النقطة A .

5- بين ان للمنحنى مماس (T) يوازي المستقيم (d) يطلب كتابة معادلته .

6- ارسم االمماسين و المنحنى

7 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$.

تمرين 20 :

نعتبر الدالة f_m المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث $m \succ 0$ بالعبارة :

$$f_m(x)=x+\frac{1-me^{x}}{1+me^{x}}$$

1 – برهن ان f_m هي حلا للمعادلة : $2y'-(y-x)^2-1=0$

2 – استنتج عبارة $f'_m(x)$ بدلالة f(x)

3 - ادرس تغيرات الدالة f_m

4 - نسمي C_m منحناها في معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ – برهن ان : $f_m(x)=x+1-\frac{2me^{x}}{1+me^{x}}$ و

$$f_m(x)=x-1+\frac{2}{1+me^{x}}$$

ب- عين قيم العدد الحقيقي m التي من اجلها يشمل المنحنى C_m النقطتين O(0,0) و A(1,1)

جـ - برهن ان للمنحنى مستقيمان مقاربان (d) و (d')

د – ادرس وضعية المنحنى بالنسبة الى كل من (d) و (d')

4 – نضع $m=1$

أ – برهن ان f_1 دالة فردية

ب – استنتج تغيراتها

جـ - ارسم المنحنى C_1 .

تمرين 21 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ بالعبارة :

$$f(x)=(2+\cos x)e^{1-x}$$

1- ادرس اتجاه تغيرات الدالة f

2- برهن أن : $e^{1-x}\le f(x)\le 3e^{1-x}$

استنتج $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3- برهن أن للمعادلة $f(x)=3$ حلا وحيدا في المجال $[0\,;\,\pi]$ عين حصرا لهذا الحل .

4- ارسم المنحنى على المجال $[0\,;\,4]$

تمرين 22 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ بالعبارة :

$$f(x)=e^{-x}\sin x$$

1 – برهن أن : $-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$

2 – أحسب $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ ثم استنتج أن للمنحنى مستقيم مقارب

3 – بين أن : $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

4 – ادرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

5 - ارسم المنحنى على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

6 – انشئ في نفس المعلم السابق كل من المنحنى (C_1) الممثل للدالة $g(x)=-e^{-x}$ و المنحنى (C_2) الممثل للدالة $h(x)=e^{-x}$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

7 – عين بيانيا احداثيات النقط المشتركة بين:

أ - (C_f) و محور الفواصل

ب - (C_f) و (C_1)

ج - (C_f) و (C_2)

تمرين 23 :

I - لتكن الدالة f المعرفة على $\Re$ بالعبارة : $f(x)=e^{x}\cos x$

1 – برهن أن : $-e^{x}\le f(x)\le e^{x}$

2 – أحسب $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ثم استنتج أن للمنحنى مستقيم مقارب

3 – عين فواصل نقط تقاطع المنحنى مع حامل محور الفواصل

4 – بين أنه من أجل $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right]$ لدينا :

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

5 - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right]$

6 – أكتب معادلة المماس عند القيمة 0

7 - ارسم المنحنى على المجال $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,+\frac{\pi}{2}\right]$

8 – بين أن للمعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ حلا وحيدا في المجال α على المجال $\left[0\,;\,+\frac{\pi}{2}\right]$ عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1}

تمرين 24 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=1-x\left(1+e^{x^2-1}\right)$$

نسمي $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\right)$.

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 – أحسب $f(x)+f(-x)$ ، ثم فسر هندسيا النتيجة

3 – أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند النقطة $A(0;1)$

4 - بين أن المستقيم (Δ) الذي معامل توجيهه 4- و يمر من النقطة $B(0;3)$ هو مماس للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند نقطة يطلب تعيين احداثييها .

5 – بين أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α حيث : $e^{\alpha^2-1}=\dfrac{1}{\alpha}-1$ ، ثم استنتج أن : $0,6<\alpha<0,7$

6 – ارسم كل من (T) ، (Δ) و $\left(C_f\right)$

تمرين 25 :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f\left(x\right)=\dfrac{x^2e^x}{1+xe^x}$.

(C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- من أجل كل عدد حقيقي x نضع: $g\left(x\right)=1+xe^x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة g واستنتج أن $g\left(x\right)>0$

2- من أجل كل عدد حقيقي x نضع: $h\left(x\right)=x+2+xe^x$.

أ- ادرس تغيرات الدالة h .

ب- بين أن للمعادلة: $h\left(x\right)=0$ حل وحيد α حيث $-1,69<\alpha<-1,68$.

جـ استنتج إشارة $h\left(x\right)$ على $\mathbb{R}$.

3- أ- احسب $f'\left(x\right)$ وبين أن $f'\left(x\right)=\dfrac{xe^xh\left(x\right)}{\left(1+xe^x\right)^2}$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f .

جـ احسب $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-x\right]$ ، ماذا تستنتج ؟

د- جد حصرا للعدد $f\left(\alpha\right)$.

4- أ- مثل المنحنى (C) ومستقيميه المقاربين .

تمرين 26 :

I - نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=1-(x^2-2x+2)e^{-x}$$

1 – برهن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-x}=0$

2 - أحسب نهايتي الدالة g على أطراف مجموعة تعريفها

3 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة g ثم عين جدول تغيراتها

4 - ا - بيّن أن المعادلة : $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $\left]0,35;0,36\right[$

ب - حدد إشارة $g\left(x\right)$ على $\mathbb{R}$

II - f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f\left(x\right)=x-1+(x^2+2)e^{-x}$$

$\left(\zeta_f\right)$ منحناها البياني في معلم متعامد ومتجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$

1 - أدرس تغيرات الدالة f

2 - بين أنّ : $f\left(\alpha\right)=\alpha(1+2e^{-\alpha})$

3 - أ - تأكد أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=x-1$ مقارب لـ $\left(\zeta_f\right)$ بجوار $+\infty$

ب - أدرس الوضع النسبي لـ $\left(\zeta_f\right)$ و (Δ)

4 - أعط معادلة المستقيم (T) المماس لـ $\left(\zeta_f\right)$ في النقطة التي فاصلتها 0

5 - ارسم على $\left[0;+\infty\right[$: $\left(\zeta_f\right)$ ، (Δ) و (T)

تمرين 27 :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g\left(x\right)=(3-x)e^x-3$$

1- ادرس تغيرات الدالة g

2- برهن أن للمعادلة $g\left(x\right)=0$ حلين أحدهما معدوم و الثاني α حيث : $2,8<\alpha<2,9$

3- استنتج اشارة $g\left(x\right)$

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة:

$$\begin{cases}f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{e^x-1} & x\neq 0\\ f\left(0\right)=0\end{cases}$$

1- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة $x=0$

أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $\left(C_f\right)$ عند القيمة $x=0$

2- برهن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ ، أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)$

3- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا :

$$f'\left(x\right)=\frac{x^2}{\left(e^x-1\right)^2}\times g\left(x\right)$$

أ- استنتج اتجاه تغيرات الدالة f

ب- أكتب جدول تغيراتها

4- بين أن : $f\left(\alpha\right)=\alpha^2(3-\alpha)$. استنتج حصرا للعدد $f\left(\alpha\right)$

5- أنشئ كل من المماس (T) و المنحنى $\left(C_f\right)$

التمرين 01 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة كما يلي :

$$(E)......y'-2y-1=0$$

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل

أ – المعادلة (E) تقبل دالة تآلفية كحلا لها

ب - g دالة موجبة على $\mathbb{R}$. إذا كانت g حلا للمعادلة (E) فإن g متزايدة

التمرين 02 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة كما يلي :

$$(E)........ 2y'+y=x^2+2x-2$$

1 – عين دالة g كثير حدود من الدرجة الثانية حلا للمعادلة التفاضلية (E)

2 – برهن أنه إذا كانت f حلا للمعادلة (E) فإن $f-g$ هي حلا للمعادلة : $2y'+y=0$ ....(E')

3 - أ) عين حلول المعادلة (E')

ب) عين حلول المعادلة (E)

جـ) استنتج الحل الذي ينعدم من أجل $x=0$

التمرين 03 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة كما يلي :

$$(E)........ y'-2y=2\left(e^{2x}-1\right)$$

1 – برهن أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $h(x)=2xe^{2x}+1$ هي حلا للمعادلة (E)

2 – لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g=u+h$

برهن أنه إذا كانت g حلا للمعادلة (E) فإن u هي حلا للمعادلة : $y'-2y=0$ ....(E')

3 - أ) عين حلول المعادلة (E')

ب) عين حلول المعادلة (E)

جـ) استنتج الحل الذي ينعدم من أجل $x=0$

نسمي هذا الحل $g(x)$

التمرين 04 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $(E)........ y-y'=\dfrac{e^x}{x^2}$

1 - برهن أن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$ هي حلا للمعادلة (E)

2 – برهن أنه إذا كانت f حلا للمعادلة (E) فإن $f-h$ هي حلا للمعادلة : $y-y'=0$ ....(E')

3 - أ) عين حلول المعادلة (E')

ب) عين حلول المعادلة (E)

التمرين 05 :

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة كما يلي :

$$(E)........ y'+y=2(x+1)e^{-x}$$

1 - برهن أن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $h(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$ هي حلا للمعادلة (E)

2 - برهن أنه إذا كانت f حلا للمعادلة (E) فإن $f-h$ هي حلا للمعادلة : $y'+y=0$ ....(E')

3 - أ) عين حلول المعادلة (E')

ب) عين حلول المعادلة (E)

جـ) استنتج الحل الذي يحقق $f'(0)=0$

التمرين 06 :

I- نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة على $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ كما يلي :

$$(E)........ y'+y(1+\tan x)=\cos x$$

1 – من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left]-\dfrac{\pi}{2};+\dfrac{\pi}{2}\right[$ نضع : $f(x)=g(x)\cdot\cos x$

بين أنه تكون الدالة f حلا للمعادلة (E) إذا و فقط إذا كانت الدالة g حلا للمعادلة التفاضلية :

$$(E')........ y'+y=1$$

2 - أ) عين حلول المعادلة (E')

ب) عين حلول المعادلة (E)

جـ) استنتج الحل الذي ينعدم من أجل $x=0$

II- نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=e^{-x}\cos x$

1 – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

2- ادرس تغيرات الدالة h على المجال $[0,2\pi]$

3 – عين احداثيات نقاط تقاطع المنحنى C_h مع محور الفواصل أرسم Ch

4 – عين تقاطع المنحنى C_h مع منحنى الدالتين $x\mapsto e^{-x}$ و $x\mapsto -e^{-x}$

تمرين01 :

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :
$g(x)=x-3+\ln x$

1 – ادرس تغيرات الدالة g . ثم برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $]2,2;2,3[$.

2 – استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0,+\infty[$ بالعبارة :
$f(x)=(1-\frac{1}{x})(\ln x-2)$

1 – ادرس تغيرات الدالة f . برهن ان $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$.
استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

2 – عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع حامل محور الفواصل

3 – ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 02:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :
$g(x)=\frac{2e-x}{x}-\ln x$

1 - ادرس تغيرات الدالة g.

2 - احسب $g(e)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re^*$ بالعبارة :
$f(x)=(2e-|x|)(\ln|x|)$

1 – برهن ان الدالة f دالة زوجية

2 - ادرس تغيرات الدالة f .

3 - عين احداثيات نقط تقاطع المنحنى C_f مع حامل محور الفواصل

4 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{0;1\}$ بالعبارة :
$f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$

1 – ادرس تغيرات الدالة f

2 – برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب مائل

3 – ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم (d)

4 – برهن ان النقطة $I(\frac{1}{2};-\frac{1}{4})$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f
. اكتب معادلة المماس عند النقطة I

5 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6 – ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=-\frac{1}{2}x+m$

تمرين 04:

I - ليكن كثير الحدود $P(x)$ المعرف كما يلي :
$P(x)=3x^3-x-2$

1 - احسب $P(1)$,ثم حلل $P(x)$.

2 - استنتج اشارة كثير الحدود $P(x)$

II - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :
$g(x)=x^3-x+1-2\ln x$

1 - ادرس تغيرات الدالة g

2 - استنتج اشارة $g(x)$.

III - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة
$f(x)=x+1+\frac{x+\ln x}{x^2}$

1 - ادرس تغيرات الدالة f

2 – برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f .

3 – برهن ان المستقيم (d) يقطع المنحنى C_f في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $0,56<\alpha<0,57$
- استنتج وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم (d) .

4 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 05:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2,+\infty[$ بالعبارة :
$f(x)=1+x\ln(x+2)$.

1 – احسب كلا من $f'(x)$ و $f''(x)$

2 – عين اشارة $f''(x)$. ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة f' .

3 - برهن ان للمعادلة $f'(x)=0$ حلا α من المجال $]-0,6;-0,5+[$ ثم استنتج اشارة $f'(x)$

4 - ادرس تغيرات الدالة f . ثم برهن أن : $f(\alpha)=\frac{-\alpha^2+\alpha+2}{\alpha+2}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

5 - برهن ان للمنحنى C_f مماسين يمرّان بالمبدأ يطلب كتابة معادلتهما .

6 – ارسم المماسين و المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين06:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بالعبارة :

$$g(x)=x^2+2x-\ln(x+1)^2$$

1 - ادرس تغيراتها

2 - استنتج اشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\Re-\{-1\}$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{x^2+x+2\ln|x+1|}{x+1}$$

1 – عين العددين α و β حتى تكون :

$$f(x)=\alpha x+\beta\frac{\ln|x+1|}{x+1}$$

2 - ادرس تغيرات الدالة f

3 – برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f .

- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة (d) .

4 - برهن ان للمنحنى C_f مماسين يوازيان المستقيم (d) .
يطلب كتابة معادلتهما .

5 - برهن ان النقطة $I(-1;-1)$ هي مركز تناظر للمنحنى C_f

6 - ارسم المماسين و المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

7 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

تمرين 07:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=x^2-2\ln x$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g

2 - استنتج اشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1+\ln x}{x}$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f .

2 - برهن ان المستقيم (d) ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى C_f .

- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة (d) .

3 – برهن ان المنحنى C_f يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $0,34<\alpha<0,35$

4 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تمرين 08:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\Re$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{e^x}{1+2e^x}-\ln(1+2e^x)$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g

2 - استنتج اشارة $g(x)$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بالعبارة :

$$f(x)=e^{-2x}\ln(1+2e^x)$$

1 – احسب $f'(x)$ ثم بين ان اشارة $f'(x)$ هي من اشارة $g(x)$

2 – احسب كل من : $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3 – اكتب جدول تغيرات الدالة f

4 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

III - نعتبر المعادلة التفاضلية (E) المعرفة كما يلي:

$$y'+2y=\frac{2e^{-x}}{1+2e^x}$$

1 – تحقق ان الدالة f هي حلا للمعادلة (E)

2 – برهن انه تكون الدالة h حلا للمعادلة (E) اذا كانت الدالة h-f حلا للمعادلة (E′) المعرفة كما يلي : $y'+2y=0$

* - عين حلول المعادلة (E′)

* - استنتج حلول المعادلة (E) .

تمرين 09:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=x+1-(2x+1)\ln x$$

1 – احسب كل من $g'(x)$ و $g''(x)$

2 – عين اتجاه تغيرات الدالة g' ثم استنتج اشارة $g'(x)$

3 – ادرس تغيرات الدالة g . ثم برهن انه توجد قيمة وحيدة α على المجال $]0,+\infty[$ حيث $g(\alpha)=0$

عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1}

4 - استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2+x}$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f . ثم برهن أن : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}$

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

2 – اكتب معادلة المماس عند القيمة 1

3 – ارسم المماس و المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين10:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=2x-(x-1)\ln(x-1)$$

1 – ادرس تغيرات الدالة g . ثم برهن ان للمعادلة $g(x)=0$. حلا وحيدا α من المجال $]e+1;e^3+1[$

2 - استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{\ln(x^2-1)}{x}$$

1 – احسب $f'(x)$ ثم بين ان اشارة $f'(x)$ هي من اشارة $g(x^2)$

2 – ادرس تغيرات الدالة f ثم استنتج اشارة $f(x)$

III - نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة

$$h(x)=f(e^x)$$

1 – احسب كل من $\lim_{x\to+\infty}h(x)$ و $\lim_{x\to0}h(x)$

2- ادرس اتجاه تغيرات الدالة h

3 – بين انه من اجل كل عدد حقيقي موجب لدينا : $h(x)\le\frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

4 - ارسم المنحنى C_f (تأخذ $\alpha=10$)

تمرين11:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$\begin{cases} g(x)=x-(x+1)\ln(x+1);\ x>-1 \\ g(-1)=-1 \end{cases}$$

1 – ادرس قابلية الاشتقاق عند القيمة -1 .
اعط تفسير هندسي لهذه النتيجة .

2 - ادرس تغيرات الدالة g ثم استنتج اشارة $g(x)$

II -نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re$ بالعبارة :

$$f(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)$$

1 – برهن انه من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\frac{g(e^x)}{e^x(e^x+1)}$. استنتج اشارة $f'(x)$

2 - احسب كل من : $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

اكتب جدول تغيرات الدالة f

3 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 12:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\Re$ بالعبارة :

$$g(x)=(x+1)e^x+1$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g

2 - استنتج اشارة $g(x)$.

II -نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re-\{-1\}$ بالعبارة :

$$f(x)=e^x-1+\ln|x+1|$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f

2- اكتب معادلة المماس (T) عند القيمة 0

3- اجل كل عدد حقيقي x نضع $h(x)=(x+1)^2e^x-1$

أ - ادرس تغيرات الدالة h

ب – احسب $h(0)$ ثم استنتج اشارة $h(x)$

4 – بين ان للمنحنى C_f نقطة انعطاف

5 - ارسم المماس و المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

6 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x)=mx$

تمرين 13:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .

2 - احسب $g(1)$ و استنتج اشارة $g(x)$.

II -نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=1-x+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

1 – احسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

2 - ادرس تغيرات الدالة f

3 – برهن ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (d) يطلب تعيين معادلته . ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة (d).

4 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

III -نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي :

$$U_0=\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad U_{n+1}=\frac{\ln U_n}{\sqrt{U_n}}+1$$

1 – برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_n>1$

2 – عين اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

3 – استنتج ان المتتالية متقاربة عين نهايتها .

تمرين 14:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\Re^*$ بالعبارة :

$$g(x)=2x^3-1+2\ln|x|$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g . ثم برهن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $]0,8;0,9[$

2 - استنتج اشارة $g(x)$

II -نعتبر الدالة f المعرفة على $\Re^*$ كما يلي :

$$f(x)=2x-\frac{\ln|x|}{x^2}$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f . ثم برهن أن : $f(\alpha)=\frac{6\alpha^3-1}{2\alpha^2}$

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

2– برهن ان للمنحنى C_f مستقيم مقارب مائل (d) يطلب تعيين معادلته . ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة (d).

3- ارسم المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 15:

I - لتكن الدالة g المعرفة على $\Re^*$ بالعبارة :

$$g(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$$

1 –برهن ان g دالة زوجية

2 - ادرس تغيرات الدالة g . ثم برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $]0,5;0,6[$

3 - استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على R بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right); x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1 – برهن ان f دالة فردية

2- ادرس قابلية الاشتقاق عند القيمة 0

3- ادرس تغيرات الدالة f اكتب عبارة $f(\alpha)$ دون رمز $\ln$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 - ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $4cm$

تمرين 16:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=x-1+2\ln x$$

1 - ادرس تغيرات الدالة g .احسب $g(1)$. استنتج اشارة $g(x)$

2 – برهن انه : اذا كان $0<x<1$ فان $0<g\left(\frac{1}{x}\right)$.

و اذا كان $x>1$ فان $g\left(\frac{1}{x}\right)<0$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x)=x-x^2\ln x \; : x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1 – ادرس قابلية الاشتقاق على يمين العدد 0 . فسر النتيجة .

2 – برهن ان : $f'(x)=x.g\left(\frac{1}{x}\right)$, استنتج اشارة $f'(x)$

3 – ادرس تغيرات الدالة f . ثم برهن ان المعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $]1,75;2[$

4- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$

5 – ارسم المستقيم (d) و المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

تمرين 17:

لتكن الدالة f المعرفة على $\Re^*$ بالعبارة : $f(x)=3\frac{\ln|x|}{\sqrt{|x|}}$

1- برهن ان f دالة زوجية

2 - ادرس تغيرات الدالة f

3- عين معادلة المماسات للمنحنى C_f التي تشمل المبدأ O

4 - لتكن الدالة g المعرفة كما يلي : $g(x)=|f(x)|$

أ - برهن ان g دالة زوجية

ب – ادرس قابلية الاشتقاق عند القيمتين 1 و 1- . فسر النتيجة .

جـ - فسر كيف يمكن رسم المنحنى C_g انطلاقا من المنحنى C_f .

د - ارسم كل من C_f و C_g في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

5- ليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=mx$

ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المنحنى C_g مع المستقيم (Δ)

تمرين 18:

I -لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=-xe+1-2\ln x$$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2 - برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $]0,6;0,7[$

3 - استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{xe+\ln x}{x^2}$$

1 - ادرس تغيرات الدالة f . ثم برهن أن : $f(\alpha)=\frac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$

2 - استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3- ارسم المنحنى C_f في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

تمرين 19:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{2x}{x+1}-\ln(x+1)$$

1- ادرس تغيرات الدالة f ثم برهن ان للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا α من المجال $]3;4[$.

2 – عين حصرا للعدد α المقرب الى 10^{-1} .

3 – ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى

4- برهن ان للمنحنى نقطة انعطاف I يطلب تعيين احداثياتها .

اكتب معادلة المماس عند النقطة I ,ثم معادلة المماس عند القيمة 0

5- ارسم المماسين و المنحنى في مستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس (وحدة الطول 4 cm)

تمرين20:

I – لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة :

$g(x)=x^2+\ln x^2-1$

1 – أدرس اتجاه تغيرات الدالة g

2 – أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II – نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة

$$f(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)\ln x$$

1- بين أن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$

استنتج اتجاه تغيراتها ، شكل جدول تغيراتها

2- نسمي (δ) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto \ln x$

أ - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى (δ)

ب – أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}\ln x$ ، ماذا تستنتج ؟

جـ - ارسم كل من (C_f) و (δ)

التمرين 21:

I – نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بالعبارة

$f(x)=1+\ln(2x-1)$

1 – أدرس اتجاه تغيرات الدالة f

2 – عين فاصلة النقطة التي يكون فيها المماس للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (d) دو المعادلة $y=x$

3– أثبت أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :

$f(x)=\ln(x+a)+b$

4– فسر كيف يمكن رسم المنحنى (C_f) انطلاقا من (C) منحنى الدالة $\ln$

5- ارسم (C) و (C_f)

II - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ بالعبارة :

$g(x)=f(x)-x$

1– ادرس تغيرات الدالة g

2- أحسب $g(1)$ ثم بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث : $2<\alpha<3$

3- استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

4– عين وضعية (C_f) بالنسبة الى (d)

III – نسمي المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$

كما يلي : $u_n=f\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$

1– عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون

$u_n=1+2\ln 3-3\ln 2$

2– احسب بدلالة n المجموع :

$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$

التمرين 22:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة :

$g(x)=x-1-2\ln x$

1 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة g

2 - أحسب $g(1)$ ثم بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث : $3,5<\alpha<3,6$

- استنتج اشارة $g(x)$ و اشارة $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x & : x>0\\ f(0)=0\end{cases}$$

1 – أحسب $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$ فسر النتيجة هندسيا

2 – بين أن $f'(x)=xg\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ، استنتج تغيرات f

3 – بن أن : $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)=\dfrac{\alpha-1}{2\alpha^2}$

استنتج حصرا للعدد $f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$

4 - ارسم (C_f) على المجال $[0\,;3]$

التمرين 23:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة :

$g(x)=x^2+a+b\ln x$

1 – عين العددين a و b علما أن التمثيل البياني للدالة g يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4

2 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة g

3 - بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا α على المجال $]0\,,+\infty[$ ، استنتج إشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=x-2-\frac{2\ln x}{x}$$

1 - أدرس تغيرات الدالة f

2– بين أن المستقيم (d) دو المعادلة : $y=x-2$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f)

- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (d)

3– بين أن للمنحنى (C_f) مماس (T) يوازي (d) أكتب معادلته

4– بين أن للمعادلة $f(x)=0$ حلين x_1 و x_2

حيث: $0,6<x_1<0,7$ و $2,7<x_2<2,8$

5 – ارسم كلا من (d) ، (T) و (C_f)

5 – ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حول المعادلة : $(m+2)x+2\ln x=0$

التمرين 24:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$$

1 - أدرس تغيرات الدالة g

2 - أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$$

1 – أ – بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ب – تحقق أن : $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to0}f(x)$

2 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، شكل جدول تغيراتها

3– ارسم المنحنى (C_f)

التمرين 25:

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln(x+1)$$

1 - أدرس تغيرات الدالة g

2 - بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث : $0,5<\alpha<1$ ، استنتج اشارة $g(x)$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=2e^{-x}\ln(x+1)$$

1 – أحسب $\lim_{x\to-1}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثم فسر هندسيا النتائج

2 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، شكل جدول تغيراتها

3– برهن أن : $f(\alpha)=\frac{-2e^{-\alpha}}{\alpha+1}$ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 - ارسم المنحنى (C_f)

التمرين 26

I - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)-1}{x+1}$$

1 - أدرس تغيرات الدالة g

2 - بين أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا α حيث : $0,7<\alpha<0,8$

3 - استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=1-x+x\ln(x+1)$$

1 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة f

2 – بين أن : $f(\alpha)=1-\frac{\alpha^2}{\alpha+1}$

استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3 – عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند القيمة

4 - ارسم (T) و (C_f)

5 - ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حول المعادلة : $x\ln(x+1)=m-1$

التمرين 27:

I - g الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{1}{x}-\ln x .$$

1 – أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2 – بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,7<\alpha<1,8$.

3 – استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II - نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=(x-1)(1-\ln x)$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1 – بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0,+\infty[$ فإن : $f'(x)=g(x)$.

2– أدرس تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3– برهن أن: $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4 – أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

5 – أ/ عيّن نقطتي تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

ب/ أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (T) و المنحني (C_f) .

التمرين 28

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$$

1- أدرس تغيرات الدالة g

2- أثبت أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث :

$$\frac{7}{4} < \alpha < 2$$

3- استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} \quad ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نسمي (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة $2cm$

1- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة 0

2- أكتب معادلة للمماس (T) عند القيمة 0

3- أ- برهن أن الدالة f دالة فردية

ب- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي موجب لدينا :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

جـ أدرس تغيرات الدالة f على المجال $]0 ; +\infty[$

د- برهن أن $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

4- برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$\ln(x^2+1) - x^2 \leq 0$. (يمكن دراسة اتجاه تغيرات الدالة : $x \to \ln(x^2+1) - x^2$). استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T)

- ماذا تمثل النقطة O بالنسبة للمنحنى (C_f)

5- أنشئ كل من المنحنى (C_f) و المماس (T) على $\mathbb{R}$

التمرين 29:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

1- ادرس تغيرات الدالة g

2- برهن ان للمعادلة $g(x)=0$ حلا α في المجال $]1 ; 2[$

3- استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بالعبارة :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}$$

نسمي (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد الوحدة على محور الفواصل $2cm$ وعلى محور التراتيب $4cm$

1- أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $(+\infty)$. فسر هندسيا النتائج

2- برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$$

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- بين أن : $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

5- ارسم المحنى (C_f)

التمرين 30:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x) = \frac{1}{x+1} - \ln(x+1)$$

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2 - برهن أن للمعادلة $g(x)=0$ حلا وحيدا α حيث

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1$$

3 - استنتج اشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x) = 2e^{-x}\ln(x+1)$$

نسمي (C_f) منحناها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. فسر هندسيا النتائج

2- أحسب $f'(x)$ ، ثم برهن أن اشارتها من اشارة $g(x)$

3- استنتج إتجاه تغيرات الدالة f ، أكتب جدول تغيراتها .

4 -برهن أن $f(\alpha) = \dfrac{-2e^{-\alpha}}{\alpha+1}$ ، عين حصرا للعدد $f(\alpha)$

5 -أرسم المنحنى (C_f)

6 - من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع :

$$h(n) = e^n f(n) + \ln n^2$$

أ - أكتب بدلالة n عبارة $h(n)$

أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = h(1) + h(2) + \cdots + h(n)$

التمرين 31

I – نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=2(\ln x)^2-\ln x-3$$

1 - أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ،
ثم فسر هندسيا النتائج

2 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، شكل جدول تغيراتها

3 - أكتب معادلة للمماس (T) عند القيمة $e^{\frac{5}{4}}$

4 - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=f(x)-\left(4e^{-\frac{5}{4}}x-\frac{41}{8}\right)$$

أ - بين أن $g'(x)=\frac{4\ln x-1}{x}-4e^{-\frac{5}{4}}$ ، ثم أحسب $g''(x)$

ب - أدرس اتجاه تغيرات الدالة g' على المجال $]0\,;+\infty[$

جـ - استنتج إشارة $g'(x)$

د – أكتب جدول تغيرات الدالة g على المجال $]0\,;+\infty[$

هـ - أحسب $g\left(e^{\frac{5}{4}}\right)$ ، استنتج إشارة $g(x)$

5 – أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T)

6- حل كل من المعادلة $f(x)=0$ و المتراجحة $f(x)\succ 0$

7 - أنشئ كل من المنحنى (C_f) و المماس (T)

التمرين 32:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$$

1 - حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$

2 - أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

3– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي لدينا :

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}$$

4 - أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، شكل جدول تغيراتها

5 - لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{1}{2}e^x-\frac{9}{2}e^{-x}$$

أ – أحسب من أجل كل عدد حقيقي عبارة $(g\circ f)(x)$.

ب – استنتج التكافؤ التالي :

$(M(x,y)\in(C_f))$ يكافئ $(M'(y,x)\in(C_g))$

التمرين 33:

I - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=\ln(x+1)-x$$

1 - أدرس تغيرات الدالة g

1 – استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب a لدينا :

$$\ln(a+1)\le a$$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0\,;+\infty[$ بالعبارة :

$$\ln\left(e^x+x\right)-x$$

1 – برهن أن : $f(x)=\ln\left(1+\frac{x}{e^x}\right)$

استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2 – أدرس اتجاه تغيرات الدالة f ، شكل جدول تغيراتها

III - نعتبر الدالة f_k المعرفة على المجال $]0\,;+\infty[$ بالعبارة

$f_k(x)=\ln\left(e^x+kx\right)-x$ حيث $k\in]0\,;+\infty[$

1 – برهن أن $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$

استنتج $\lim_{x\to+\infty} f_k(x)$

2 – أدرس اتجاه تغيرات الدالة f_k ، شكل جدول تغيراتها

3 – برهن أن من أجل كل عدد حقيقي موجب لدينا :

$$f_k(x)\le\frac{k}{e}$$

4 - أكتب معادلة للمماس (T_k) للمنحنى (C_k) عند القيمة 0

5 – m و p عددان حقيقيان موجبان تماما حيث $m\succ p$.

أدرس وضعية المنحنى (C_m) بالنسبة للمنحنى (C_p)

6 – أنشئ كل من المنحنيين (C_1) و (C_2) و المماسان الموافقان لهما

الأستاذ : بن حبيلس — الدوال الأصلية والحساب التكاملي — السنة الدراسية 2014 - 2015

تمرين01:

عين الدوال الأصلية F للدالة f على المجال I :

1 $f(x)=\dfrac{3x-3}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$ ، $I=\mathbb{R}$

2 $f(x)=x^3\left(x^4+1\right)^3$ ، $I=\mathbb{R}$

3 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}\left(\ln(x-1)\right)^2$ ، $I=]1,+\infty[$

4 $f(x)=3x+1-\dfrac{3}{(2x+1)^2}$ ، $I=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$

5 $f(x)=\sqrt{2x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{3x-1}}$ ، $I=\left]\dfrac{1}{3},+\infty\right[$

6 $f(x)=\dfrac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x}}$ ، $I=]-\infty\ ,\ 2[$

7 $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ ، $I=]1,+\infty[$

8 $f(x)=\tan x-\dfrac{e^x}{e^x+2}$ ، $I=\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right[$

9 $f(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}-2$ ، $I=\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right]$

تمرين02:

أحسب التكاملات التالية

$$\int_0^1 x^2e^{x^3-1}dx \quad ، \quad \int_0^1(x+2)\left(x^2+4x-5\right)^3dx$$

$$\int_0^\pi \sin 2x\,dx \quad ، \quad \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx \quad ; \quad \int_1^e\frac{(\ln x)^2}{x}dx$$

$$\int_0^1\frac{1}{e^x+1}dx \quad ، \quad \int_1^2\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2x+1}\right)dx$$

تمرين03

باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب كل من :

$$\int_0^1 xe^{1-x}dx \quad ، \quad \int_0^\pi x\cos x\,dx$$

$$\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx \quad ، \quad \int_1^2\ln(x+2)\,dx$$

$$\int_1^e x^n\ln x\,dx \quad ، \quad \int_0^4\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$$

$$\int_0^1\frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx \quad ، \quad \int_{-\ln 2}^0 e^x\ln\left(e^x+1\right)dx$$

تمرين04

1 – عين الأعداد الحقيقية a , b , c التي من أجلها تكون

$$\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$

2 - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_0^1 x\ln(x+1)\,dx$

تمرين05

1 - لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة :

$$g(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}$$

عين الأعداد الحقيقية a , b , c التي من أجلها تكون

$$g(x)=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}\frac{c}{x-1}$$

عين دالة أصلية للدالة g

2 – لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]1,+\infty[$ بالعبارة :

$$f(x)=\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

أوجد الدالة F الدالة الأصلية للدالة f

3 – باستعمال نتيجة السؤال السابق أحسب $A=\int_2^3\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}dx$

تمرين06

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعتبر المتتالية (U_n)

المعرفة كما يلي : $u_n=\int_0^3(3-x)^ne^x\,dx$

1 - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب u_1

2 - باستعمال التكامل بالتجزئة عين علاقة بين u_n و u_{n+1}

3 – أ - عين العددين الحقيقيين α و β حيث :

$$2x^2-15x+27=\alpha(3-x)^2+\beta(3-x)$$

ب – استنتج قيمة العدد : $I=\int_0^3\left(2x^2-15x+27\right)e^x\,dx$

تمرين07

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (U_n)

المعرفة كما يلي : $u_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{e^x+1}dx$

1 – أ - أحسب u_1 و u_1+u_0

ب - استنتج u_0

2 – عين إتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

3 – بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$ لدينا :

$$\frac{e^{nx}}{e+1} \le \frac{e^{nx}}{e^x+1} \le \frac{e^{nx}}{2}$$

استنتج حصرا لـ u_n

4 – عين نهاية المتتالية (U_n)

تمرين08

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (U_n)

المعرفة كما يلي : $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \cdot \sin x \, dx$

1 - باستعمال التكامل بالتجزئة مرتين أحسب بدلالة n u_n

2 – برهن أن المتتالية هندسية

3 – أحسب بدلالة المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

4 – أحسب $\lim_{n\to+\infty} S_n$

تمرين09

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (U_n) :

المعرفة كما يلي : $u_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1 - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب u_1

2 - عين إتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

3 - باستعمال التكامل بالتجزئة عين علاقة بين u_n و u_{n+1}

① سؤال 3+e

② سؤال 3+إشارة U_{n+1}

4 - برهن أن : $\frac{e^2}{n+3} \le u_n \le \frac{e^2}{n+1}$

استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين10

1 – نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;1]$ بالعبارة :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$$

أ – احسب $f'(x)$

ب – احسب العدد $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

2 – نعتبر العددين $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$

و $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\, dx$

أ – دون حساب العددين I و K بين أن

$$J + 2I = K$$

ب - باستعمال التكامل بالتجزئة عين علاقة بين K و J

جـ - استنتج قيمة كل من K و J

تمرين11

1- أحسب بدلالة x المجموع $1+x+x^2+x^3$

2 – بين أن : $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{1+x}$

3 – أدرس تغيرات الدوال f ، g و h المعرفة على $[0\,;1]$ بـ

$g(x) = x - 1 + e^{-x}$ ، $f(x) = e^{-x}$ و

$$h(x) = x - 1 - \frac{x^2}{2} + e^{-x}$$

4 – برهن أن : من أجل $x \ne 1$ لدينا $1 - x \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2}$

استنتج حصرا لـ e^{-x^2} في المجال $[0\,;1]$ $x = X^e$

5 – استنتج أن $1 - x \le \frac{e^{-x^2}}{1+x} \le 1 - x + \frac{x^4}{2(x+1)}$

تكامل من ②

6 – برهن أن $\frac{1}{2} \le \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \le \frac{5}{24} + \frac{\ln 2}{2}$

التمرين 01 :

عين $p\gcd(a,b)$ في كل حالة من الحالات التالية :

1) $a=315$ ، $b=117$ ، 2) $a=5145$ ، $b=4410$

3) $a=1380$ ، $b=972$ ، 4) $a=792$ ، $b=456$

التمرين 02 :

1- عين $d=p\gcd(182,126)$

2- أوجد عددين صحيحين α و β حيث يكون :

$$182\alpha+126\beta=d$$

التمرين 03 :

n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام . عين قيمة العدد الطبيعي n إذا علمت أن باقي قسمة كل من العددين 21685 و 33509 على n هو 37 و 53 على الترتيب

التمرين 04 :

1 – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n+3$ و $2n^2+7n+4$ أوليان فيما بينهما

2 - من أجل كل عدد طبيعي k نضع :

$a=2\times3^{k+1}+18$ و $b=2\times3^{2(k+1)}+14\times3^{k+1}+24$

أحسب $p\gcd(a,b)$

التمرين 05 :

عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

1) $\begin{cases}a+b=72\\ p\gcd(a,b)=9\end{cases}$ ، 2) $\begin{cases}a+b=360\\ p\gcd(a,b)=18\end{cases}$

3) $\begin{cases}a\times b=6480\\ p\gcd(a,b)=18\end{cases}$ ، 4) $\begin{cases}a\times b=350\\ p\gcd(a,b)=5\end{cases}$

5) $\begin{cases}a^2-b^2=600\\ p\gcd(a,b)=5\end{cases}$

التمرين 06:

1- أثبت أنه إذا كان x و y أوليان فيما بينهما فإن العددين $3x+4y$ و $4x+5y$ أوليان فيما بينهما

2 - عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$$\begin{cases}(3a+4b)(4a+5b)=1989\\ p\gcd(a,b)=3\end{cases}$$

التمرين 07

a و b عددان طبيعيان غير معدومين نضع :

$x=7a-5b$ و $y=4a-3b$

1 – برهن أن : $p\gcd(a,b)=p\gcd(x,y)$

2- عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$$\begin{cases}(7\alpha-5\beta)(4\alpha-3\beta)=1300\\ p\gcd(\alpha,\beta)=5\end{cases}$$

التمرين 08:

1- أحسب $p\gcd(33082,21406)$

2- عين العدد الطبيعي n المحصور بين 500 و 1000 إذا علمت أن باقي قسمة كل من العددين 3311 و 21448 على n هو 29 و 42 على الترتيب

3 – n عدد طبيعي مضاعف للعدد 3 $(n=3p)$

أ) بين أن العددين $2n+1$ و 3 أوليان فيما بينهما

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k العدد $k(3k+1)$ يقبل القسمة على 2

جـ) نضع $a=\dfrac{n(n+1)}{2}$ و $b=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

برهن أن : $p\gcd(a,b)=\dfrac{p(3p+1)}{2}$

التمرين 09:

من أجل كل عدد طبيعي n يختلف عن 1 نضع :

$a=3n+5$ و $b=n-1$

1 – عين القيم الممكنة لـ $p\gcd(a,b)$

2- عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد b قاسما للعدد a

3 – عين حسب قيم n القيم الممكنة لـ $p\gcd(a,b)$

التمرين 10:

1 - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n العدد $3n^3-11n+48$ يقبل القسمة على العدد $n+3$

2 - a,b و c ثلاثة أعداد طبيعية غير معدومة

برهن أن : $p\gcd(a,b)=p\gcd(bc-a\ ,\ b)$

3- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 لدينا : $p\gcd(3n^3-11n,n+3)=p\gcd(48\ ,\ n+3)$

4- عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $n+3$ قاسما للعدد $3n^3-11n$

التمرين 11:

1- أثبت أنه إذا كان x و y أوليان فيما بينهما فإن العدد $s=x+y$ أولي مع كل من x و y

2 – نضع $p=xy$ ، برهن أن s و p أوليان فيما بينهما

3- برهن أن s و p من شفعيتين مختلفتين

4 - عين الثنائيات (a,b) من الأعداد الطبيعية التي تحقق :

$\begin{cases}a+b=84\\ ab=d^3\end{cases}$ حيث $d=p\gcd(a,b)$

تمرين01:

1-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$19^{6n+3}+26^{6n+4}+54^{6n+1}+1\equiv 0[7]$$

3- عين قيم العدد الطبيعي n حيث :

$$19^{6n+3}+26^{6n+4}-4n^2+1\equiv 0[7]$$

تمرين02:

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 11 ثم استنتج باقي قسمة العدد 2000^{1996} على 11

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$9^{55n+2}-4\equiv 0[11]$$

3- عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون العدد $9^{5n+2}+n^2-5$ مضاعف للعدد 11

تمرين03:

1-ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 7

2- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد $3^{6n+1}+45^{7n+1}$ مضاعفا للعدد 7

تمرين04:

ليكن العدد الطبيعي A_n المعرف من اجل كل عدد طبيعي n بالعبارة : $A_n=1+(n-1).2^n$

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 7

2- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون :

$$\begin{cases} n-1\equiv 0[3] \\ A_n-1\equiv 0[7] \end{cases}$$

تمرين05:

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العددين 2^n و 5^n على 7

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$163^{158}-3.257^{531}+15^{108}+6^{51}\equiv 0[7]$$

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد

$$2\times 19^{n-1}+4\times 19^{18n+10}-12^{18n+8}\equiv 0[7]$$

4- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد 5^n+2^n مضاعفا للعدد 7

تمرين06:

1-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+3$ مضاعفا للعدد 7

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد

$$26^{6n+5}+2\times 47^{12n+2}+5n\equiv 0[7]$$

تمرين07:

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من 3^n و 5^n على 16

2- عين باقي قسمة العدد $2^{1992}+3^{1993}+5^{1995}+6^{1996}$ على 16

3- عين جميع الثنائيات (x,y) من الأعداد الطبيعية التي من اجلها يكون العدد : $3^x+5^y\equiv 0[16]$

تمرين08:

1-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 4^n على 7

2- استنتج باقي قسمة العدد $3\times 11^{3n-1}-3^{2004}$ على 7

3- عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون العدد $6^{n^2+n+1}+18^{n+1}$ مضاعفا للعدد 7

4- c و b,a ثلاثة أعداد طبيعية غير معدومة تشكل بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية . برهن أن العدد: $4^a\times 4^b\times 4^c-1$ يقبل القسمة على 7

تمرين09:

1 - ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 63 .

2- نضع من اجل كل عدد طبيعي n .

$$X_n=4^{3n}+4^{3n+1}+4^{3n+2}-84$$

$$Y_n=2+2^2+2^3+\dots+2^{n+1}$$

أ- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $X_n\equiv 0[63]$ ثم برهن أن X_n مضاعف للعدد 252

ب- عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون :

$$\begin{cases} X_n\equiv n[7] \\ Y_n\equiv 0[63] \end{cases}$$

تمرين10:

1- ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 7

2- استنتج باقي قسمة العدد 2005^{2007} على 7

3- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$n\times 3^{2n}+3n\equiv 0[4]$$

4- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد $n\times 3^{2n}+3n$ يقبل القسمة على 28.

تمرين11:

1 ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 9^n على 13

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$$12^{2n}+9^{3n+1}+3^{3n-2}\equiv 0[13]$$

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون :

$$22^{3n+2}+2\times 35^{6n+2}+5n\equiv 0[13]$$

4- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون :

$$\begin{cases} n+7\equiv 0[13] \\ 9^n+10\equiv 0[13] \end{cases}$$

تمرين12:

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9

نضع $A=2005^{2005}$ عين باقي قسمة العدد A على 9

2- ليكن N عدد طبيعي نسمي S مجموع ارقامه

برهن أن : $N\equiv S[9]$

استنتج أنه يكون N يقبل القسمة على 9 اذا كان S يقبل القسمة على 9

3- نفرض أن : B هومجموع ارقام A

C هومجموع ارقام B

D هومجموع ارقام C

أ- برهن أن : $A\equiv D[9]$

ب- علما أن: $2005<10000$. برهن أن عدد أرقام العدد A أقل من 8020 رقم استنتج أن $B\le 72180$

جـ - برهن أن : $C\le 45$

4- باستعمال الأعداد الطبيعية الاقل من 45 استنتج قيمة D

تمرين13:

1- ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 10

* استنتج باقي قسمة العدد : $63\times 9^{2015}-7^{1432}$ على 10

2- برهن أن : $3n\times 9^n+7^{2n+1}\equiv(n-1)\times 3^{2n}[10]$

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد $3n\times 9^n+7^{2n+1}$ مضاعف للعدد 10.

تمرين14:

1- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 13

استنتج باقي قسمة العدد 1981^{1401} على 13

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$5\times 25^{2n+1}+3\times 5^{4n+1}-10\equiv 0[13]$

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون لدينا :

$$\begin{cases}18^{4n}+31^{4n-1}+2n\equiv 0[13]\\ 10\le n\le 40\end{cases}$$

تمرين15:

1- ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على11. استنتج باقي قسمة العدد 1983^{1999} على 11

2- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

$10\times 3^{5n+1}+1411^{5n+2}+1983^{5n-2}\equiv 0[11]$

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون لدينا :

$1411^{5n+2}+1983^{5n+3}+2n^2+6\equiv 0[11]$

تمرين16:

من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر العدد : $\alpha_n=2^{n+1}+1$

1 – تحقق أن : $\alpha_{n+1}=2\alpha_n-1$ و استنتج أن α_n و α_{n+1} أوليان فيما بينهما

2 – نعتبر العدد β_n حيث : $\beta_n-2\alpha_n=3$

ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين α_n ، β_n

3 - أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على 3

4 - عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون : $\beta_n\equiv 0[3]$

5 - عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون α_n و β_n أوليان فيما بينهما

تمرين17 :

من اجل كل عدد طبيعي n نضع :

$A_n=2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$

1 – تحقق أن $4\equiv -3[7]$ ثم بين ان : $A_3\equiv 6[7]$

2 - ناقش حسب قيم n بواقي قسمة العدد 3^n و 2^n على7

3 – بين أنه إذا كان n فرديا فإن : A_n+1 يقبل القسمة على 7

استنتج باقي قسمة العدد A_{2014} على 7

تمرين18:

1 – برهن أنه من أجل من اجل كل عدد طبيعي n العدد $3^{3n}-1$ يقبل القسمة على 13

2 – استنتج أنه من أجل من اجل كل عدد طبيعي n يقبل كل من العددين $3^{3n+1}-3$ و $3^{3n+2}-9$ القسمة على 13

3 - ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على13

استنتج باقي قسمة العدد 2005^{2014} على 13

4 - من أجل كل عدد طبيعي p نضع : $A_p=3^p+3^{2p}+3^{3p}$

أ- عين باقي قسمة العدد A_p على 13 من اجل $p=3n$ و $p=3n+2$

ب- برهن أنه إذا كان $p=3n+1$ فإن A_p يقبل القسمة على 13

5 - نعتبر العددان الطبيعيان a و b المكتوبان في النظام ذي الأساس 3 كمايلي : $a=\overline{1001001000}$ و $b=\overline{1000100010000}$

أ – تحقق ان العددين a و b يكتبان على الشكل A_p في النظام العشري

ب - عين باقي قسمة العددين a و b على 13

تمرين19:

نسمي (S) الجملة التالية : $\begin{cases}x\equiv 3[15]\\ x\equiv 6[7]\end{cases}$ حيث x عدد صحيح.

1 – بين أن العدد 153 حل للجملة (S)

2 – حل الجملة (S)

3 - يريد مكتبي وضع عدد من الكتب في علب ، فإذا استعمل علبا تتسع لـ 15 كتابا يبقى لديه 3 كتب ، و إذا استعمل علب تتسع لـ 7 كتب يبقى لديه 6 كتب .

إذا علمت أن عدد الكتب التي بحوزته محصور بين 500 و 600 كتابا ، ما هو عدد هذه الكتب؟

تمرين01:

1-حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $9x-7y=3$

2 - - اذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة عين قيم $PGCD(x,y)$

3- نضع $d=PGCD(x,y)$ و $m=PPCM(x,y)$

عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة التي تحقق :

$d=3; m=1242$

تمرين02

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x-7y=13$ ......(1)

1- عين الثنائيات (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) و التي تحقق :

$4x_0-y_0=11$

2- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة(1)

3- عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (1) و التي تحقق :

$PGCD(x,y)=13$

تمرين03:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-6y=3$ ...... (E)

1- أثبت انه اذا كان x و y حلول المعادلة (E) فان x مضاعف للعدد 3.

2- استنتج حلا خاصا (x_0,y_0)، ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

3- نضع $d=PGCD(x,y)$

أ- عين القيم الممكنة للعدد d

ب- عين الثنائيات (x,y) من الاعداد الطبيعية حلول المعادلة (E) حيث x أولي مع y .

4- عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) التي تحقق

$x^2-y^2<56$

تمرين04:

a و b عددان طبيعيان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

نضع : $a=11n+3$ و $b=13n-1$

1- بين أن القاسم المشترك للعددين a و b هو قاسم للعدد 50

2- حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $50x-11y=3$

3- استنتج قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون :

$PGCD(a,b)=50$

تمرين05:

1- احسب $PGCD(580,1885)$

2- α عدد صحيح .نعتبر المعادلة : $1885x-580y=\alpha$

عين قيم α حتى يكون للمعادلة حلا في $\mathbb{Z}^2$

3- نضع $\alpha=1305$

أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $1885x-580y=1305$

ب- أوجد الثنائيات (x,y) حيث يكون x قاسم العددy

تمرين06:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x-11y=5$ ......(1)

1- بين أن المعادلة (1) تكافئ المعادلة : $3x-5\equiv 0[11]$..(2)

2- أ- عين حلول المعادلة (2) .

ب- استنتج حلول المعادلة (1)

3- نضع $d=PGCD(x,y)$. حيث (x,y)حلول المعادلة(1) .عين القيم الممكنة للعدد d

4- عين الثنائيات (x,y)من الاعداد الطبيعية حلول المعادلة(1) التي من اجلها يكون $d=5$

تمرين 07:

x و y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

1- برهن أن $x+y$ أولي مع xy

2- α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما .

عين α و β حتى يكون : $15\alpha^2-229\alpha=30\beta$.

3- عين الثنائيات (x,y) الاولية فيما بينها و التي تحقق :

$15(x^2+y^2)=229(x+y)$

تمرين08:

1- أثبت أن 993 أولي مع 170

2- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $993x-170y=143$ ..... (1)

أ- عين الثنائيات (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) و التي تحقق :

$x_0+y_0=6$

ب- عين الحل العام للمعادلة (1) .

3- أوجد أصغر عدد طبيعي حيث يكون باقي قسمته على 1986 هو 15 و باقي قسمته على 340 هو 301

تمرين 09:

1- a و b عددين طبيعيين . نضع $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

عين الثنائيات (a,b) التي تحقق: $d+m=b+9$

2- أ- حلل العدد 319 الى جداء عوامل أولية .

ب- برهن أنه اذا كان x أولي مع y فان $3x+5y$ أولي مع $x+2y$

جـ- عين الثنائيات (a,b) التي تحقق :

$$\begin{cases}(3a+5b)(a+2b)=1276\\ a\times b=2m\end{cases}$$

تمرين 10:

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x+5y=65$ .... (1)

أ- بين أنه اذا كان (x,y) حلا للمعادلة (1) فان x مضاعف للعدد5

ب- استنتج حلول المعادلة (1) .

2-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9

3- عين قيم العدد الطبيعي n التي من [illegible] :

[illegible] $7^{\dots}\equiv 0[\dots]$

تمرين11:

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x+5y=1$ ..... (1)

أ- عين الثنائية (x_0,y_0) حلا خاصا للمعادلة (1)

ب- استنتج الحل العام للمعادلة (1).

2- N عدد طبيعي a و b عددان صحيحان حيث :

$$\begin{cases} N=8a+1 \\ N=5b+2 \end{cases}$$

عين باقي قسمة العدد N على 40

3- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $8x+5y=100$

4- دخلت مجموعة من الرجال و النساء الى مطعم صرف كل رجل 8€ و صرفت كل امرأة 5€

ما هو عدد الرجال و النساء اذا علمت أن المجموعة ككل قد صرفت 100€ .

تمرين 12:

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x+7y=79$ ...... (1)

أ- عين الثنائيات (x_0,y_0) حلا للمعادلة (1) و التي تحقق :

$$x_0+y_0{}^2=13$$

ب- استنتج حلول المعادلة (1)

جـ- استنتج الثنائيات الطبيعية (x,y) حلول المعادلة (1)

2- a و b عددين طبيعيين . نضع $d=PGCD(a,b)$ و $m=PPCM(a,b)$.

* عين الثنائيات (a,b) التي تحقق : $7a+6b=79d$ و $m=840$

تمرين 13:

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $11x-24y=1$ .... (1)

أ- برهن أن للمعادلة (1) حلول .

ب- باستعمال خوارزمية اقليدس عين حلا خاصا .

جـ- استنتج حلول المعادلة (1)

2- برهن أن 9 هو قاسم مشترك للعددين $1-10^{11}$ و $1-10^{24}$

3- لتكن الثنائيات الطبيعية (x,y) حلول المعادلة (1) .

برهن أن :

أ- $(10^{11x}-1)-10\times(10^{24y}-1)=9$

ب- العدد $1-10^{11}$ يقسم العدد $(10^{11n}-1)$

جـ- العدد $1-10^{24}$ يقسم العدد $(10^{24n}-1)$

4- استنتج أنه يوجد عددين صحيحان l و k حيث :

$$(10^{11}-1)k-(10^{24}-1)l=9$$

استنتج قيمة $PGCD(10^{24}-1,10^{11}-1)$ $(1;3;9)=$

تمرين14:

باحث في عام الفلك لاحظ يوم J_0 كوكب A الذي يظهر دوريا كل 105 يوم . 6 أيام بعد ظهور الكوكب A لاحظ كوكبا اخر B الذي يظهر دوريا كل 81 يوم . نسمي J_1 اليوم الذي يظهر فيه الكوكبان معا .

1 - نسمي u و v عدد الدورات التي يقوم بها A و B بين J_0 و J_1.

بين أن : $35u-27v=2$ ..... (1)

2- عين الثنائيات (x_0,y_0) حلا خاصا للمعادلة (1)

استنتج الحل العام للمعادلة (1).

3- عين الثنائية (u,v) التي تسمح بتعيين J_1

4- ما هو عدد الايام بين J_0 و J_1

5- إداعلمت أن J_0 هو يوم الثلاثاء 07/12/1999 .

فما هو تاريخ J_1

6- إدا لم يكن هذا الباحث في الموعد يوم J_1 فما هو عدد الآيام الذي ينتظرها هذا الباحث لملاحظة الكوكبان معا مرة أخرى.

تمرين15:

1- نقبل أن العدد 1999 هو عدد أولي . a و b عددين طبيعيين عين الثنائيات (a,b) التي تحقق :

$$\begin{cases} a+b=11994 \\ PGCD(a,b)=1999 \end{cases}$$

2- نعتبر في $\mathbb{N}$ المعادلة (E) المعرفة كما يلي :

$n^2-Sn+11994=0$ حيث $S\in\mathbb{N}$

أ- هل يمكن تعيين عدد طبيعي Sحيث يكون العدد 3 حلا للمعادلة (E). إدا كان الجواب بنعم فما هو الحل الثاني .

ب- هل يمكن تعيين عدد طبيعي Sحيث يكون العدد 5 حلا للمعادلة (E)

جـ- برهن أن كل عدد طبيعي nحلا للمعادلة (E) هو قاسم للعدد 11994 .

د- استنتج جميع قيم العدد الطبيعي S التي من اجلها يكون للمعادلة (E)حلين طبيعيين.

تمرين 16:

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $48x+35y=1$

أ- عين الثنائيات (x_0,y_0) حلا خاصا للمعادلة

ب- استنتج الحل العام للمعادلة .

2- ينسب الفضاء الى معلم متعامد و متجانس . نعتبر الشعاع $\vec{u}(48,35,24)$ و النقطة $A(-11,35,-13)$

أ- عين طبيعة و معادلة المجموعة (Π) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=0$

ب- ليكن المستقيم (D)تقاطع (Π) مع المستوي ذو المعادلة $z=16$. عين جميع النقط من المستقيم (D) التي إحداثياتها أعداد صحيحة من المجال $[-100;100]$.

جـ- استنتج النقطة التي احداثياها صحيحة ,والقريبة من المبدأ.

تمرين17:

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $1-2^{3n}$ يقبل القسمة على 7.

- استنتج أن: $2-2^{3n+1}$ و $4-2^{3n+2}$ يقبلان القسمة على 7

2- ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 7.

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$

أ - ما هو باقي قسمة A_p على 7 إدا كان $p=3n$

ب- برهن أن A_p يقبل القسمة على7 إذا كان $p = 3n + 1$

جـ - ادرس الحالة التي يكون $p = 3n + 2$

4- نعتبر العددان الصحيحان a و b المكتوبان في النظام الثنائي

كما يلي : $a = \overline{1001001000}$ و $b = \overline{1000100010000}$

تحقق أن العددان هما من الشكل A_p. هل يقبلان القسمة على 7؟

تمرين 18:

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $a_n = 4\times 10^n - 1$

$b_n = 2\times 10^n - 1$ و $c_n = 2\times 10^n + 1$

1- أ- أحسب كل من : $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ و c_3

ب- ما هو عدد أرقام a_n و c_n في الكتابة العشرية .

جـ- برهن أن a_n و c_n يقبلان القسمة على3.

د- برهن أن b_3 عدد أولي.

هـ- برهن أن : $b_n \times c_n = a_{2n}$. أكتب a_6 على شكل جداء عددان اوليان

و- برهن أن $PGCD(b_n;c_n) = PGCD(c_n;2)$

استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما .

2-- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $b_3x + c_3y = 1$

أ- برهن أن للمعادلة حلول

ب- باستعمال جوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة

جـ- استنتج الحل العام .

تمرين 19:

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $6x + 7y = 57$ ..... (E)

1- عين الثنائية (α,β) التي تحقق : $6\alpha + 7\beta = 1$

استنتج حل خاص للمعادلة (E)

2- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

3- ينسب الفضاء الى معلم متعامد و متجانس.نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة $6x + 7y + 8z - 57 = 0$

ليكن المستقيم (D)تقاطع (P) مع المستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

*- بين انه توجد نقطة وحيدة من (D) إحداثياها طبيعية .

4- $M(x,y,z)$ نقطة من (D)حيث x,y,z أعداد طبيعية

بين أن y عدد فردي.

5- نضع : $y = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي.

أ- عين باقي قسمة العدد $(k+z)$ على 3

ب- p عدد طبيعي حيث $3p = k + z - 1$.برهن أن : $x + k + 4p = 7$. استنتج القيم الممكنة للعدد p

جـ- استنتج النقط M من (P) ذات الاحداثيات الطبيعية .

تمرين 20:

1- حلل العدد 275 الى جداء عوامل أولية . ثم عين قواسم 275

2- أوجد الاعداد الطبيعية التي مربع كل منها يقسم العدد 275

3- برهن أنه اذا كان a أولي مع b فإن $(a+b)^2$ أولي مع ab

4- نضع : $d = PGCD(a,b)$ و $m = PPCM(a,b)$

- عين الثنائيات (a,b) التي تحقق : $6(a+b)^2 = 275m$

* - عين الثنائيات (a,b) التي تحقق: $\begin{cases} d + m = 156 \\ m = d^2 \end{cases}$

تمرين21:

نعتبر المعادلة : $78x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 14 = 0$ ..... (E)

حيث x عدد ناطق و $(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^2$

1- نضع : $x = \dfrac{14}{39}$

أ- برهن أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة :

$14\alpha + 39\beta = 1129$ ..... (F)

ب- باستعمال جوارزمية إقليدس عين حلا خاصا للمعادلة (F)

جـ- عين الحل العام للمعادلة (F)

د- استنتج اصغر ثنائية (α,β) من الاعداد الطبيعية و التي تحقق المعادلة (F)

2- عين قواسم كل من 14 و 78 .

نضع : $x = \dfrac{a}{b}$.

أ- برهن أنه إذا كان a أولي مع b فإن a يقسم 14 و b يقسم 78

ب- استنتج الحلول الغير الصحيحة للمعادلة (E)

تمرين 22:

1- x عدد طبيعي. حلل العدد $x^4 + 4$ الى جداء عاملين من الدرجة الثانية.

2- n عدد طبيعي غير معدوم .عين قيمة العدد n التي من أجلها يكون $n^4 + 4$ عدد أولي .

3- من أجل كل عدد طبيعي n أكبر [redacted] 1 نضع:

$A = n^2 - 2n + 2$ و $B = n^2 + 2n + 2$ و

$d = PGCD(A,B)$

أ- برهن أن $n^4 + 4$ ليس أولي

ب- برهن أن كل قاسم مشترك للعددين A و B هو قاسم للعدد $4n$

4- نفرض أن n عدد فردي

أ- برهن أن A و B عددان فرديان

ب- برهن أن A و B عددان أولين فيما بينهما

5- نفرض أن n عدد زوجي.

أ- برهن أن 4 لا يقسم A.

ب- برهن أن d عدد زوجي

جـ- استنتج أن $d = 2$

تمرين 23:

1- أوجد $PGCD(225,180)$

2- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $225x - 180y = 90$

3- عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة و التي تحقق :

$$|x - y + 1| < 2$$

4- a و b عددان طبيعيان يكتبان على الترتيب $\overline{52}$ و $\overline{252}$ في النظام ذو الأساس α . $\overline{44}$ و $\overline{206}$ في النظام ذو الأساس β .عين a و b في النظام العشري.

تمرين 24:

1 - نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $7x+65y=2099 \quad \ldots\ldots(1)$

أ - أثبت انه اذا كان x و y حلول المعادلة (1) فان y مضاعف للعدد 7.

ب – حل المعادلة (1)

2 - ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 2^n على 9

3 – عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n}+3n+2$ القسمة على 9

4 – نضع من أجل كل عدد الطبيعي n ، $u_n=2^{6n}-1$

أ – تحقق أن u_n تقبل القسمة على 9 .

ب - حل المعادلة : $(7u_1)x+(u_2)y=126567 \quad \ldots\ldots(2)$

جـ - عين الثنائية $(x_0;y_0)$ من الأعداد الطبيعية حلا للمعادلة (2) و التي تحقق $y_0\geq 25$

تمرين 25:

1 – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $13x-7y=-1 \ldots(E)$

2 – عين الأعداد الصحيحة a التي تحقق : $\begin{cases} a\equiv -1[7] \\ a\equiv 0[13] \end{cases}$

3 - ناقش حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 9^n على 7 و 13

4 – ليكن العدد الطبيعي b المكتوب في النظام ذي الأساس 9 كما يلي : $\overline{\alpha 00\beta 086}$ (α و β عددان طبيعيان حيث $\alpha\neq 0$)

5 – عين α و β حتى يكون العدد b يقبل القسمة على 91

تمرين 26:

(u_n) متتالية حسابية متزايدة حدودها أعداد طبيعية تحقق :

$$\begin{cases} u_4=15 \\ m+d=42 \end{cases} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} m=ppcm(u_3;u_5) \\ d=p\gcd(u_3;u_5) \end{cases}$$

1 – عين الحدين u_3 و u_5 ثم استنتج u_0

2 – أكتب u_n بدلالة n . هل العدد 2014 هو حد من حدود (u_n)

3 – عين الحد الذي ابتداء منه يكون مجموع 5 حدود متتابعة من (u_n) يساوي 10080

4 – استنتج بدلالة n المجموع : $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$

الأستاذ : بن حبيلس **الهندســـــة في الفضـــــاء** السنة الدراسية 2014-2015

تمرين 01:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة $x+2y-z+7=0$ و النقط : $C(-1,-2,2)$, $B(3,2,0)$, $A(2,0,1)$

1- بين ان النقط C,B,A ليست في استقامية . أكتب معادلة المستوي (ABC)

2- بين أن المستويين (ABC)و (P) متعامدان ثم عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقاطع (ABC)و (P)

3- أحسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ)

4- ليكن G مرجح الجملة : $\{(A,1);(B,\alpha);(C,\beta)\}$ حيث $\alpha+\beta+1\neq 0$. عين α حتى ينتمي G الى المستقيم (Δ)

تمرين 02:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبرالنقط $C(2,1,3)$ و $B(0,2,1)$, $A(1,0,2)$.

1 - (P)مستوي ذو المعادلة : $x-z+1=0$

أ- بين ان المستوي (P)هو المستوي (ABC) .

- ب- ماهي طبيعة المثلث ABC

2- بين ان النقطة $D(2,3,4)$ لا تنتمي الى المستوي (ABC).

عين طبيعة رباعي الوجوه $ABCD$

3- أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC). ماهو حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

تمرين 03:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.نعتبر

النقط : $D(1,-1,1);C(3,0,-2);B(1,-2,4);A(2,3,-1)$ و المستوي (P) ذو المعادلة : $2x-y+2z+1=0$

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل .

1- النقط C,B,A ليست في استقامية .

2- معادلة المستوي (ABC) هي: $25x-6y-z-33=0$

3- المستقيم (CD) عمودي على المستوي (P).

4- النقطة $H(1,1,-1)$ هي مسقط النقطة B على المستوي (P).

تمرين 04:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$نعتبر

النقط: $C(-1,0,1);B(-1,1,-3);A(0,2,1)$

1- اكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها C و تشمل A

2- ليكن (d) مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=-\lambda-1 \\ y=2\lambda+1 \\ z=2\lambda-3 \end{cases} \quad : \quad \lambda\in\Re$$

أكتب معادلة المستوي (P) الذي يشمل C و يعامد المستقيم (d)

احسب المسافة بين C و (d). ماهي وضعية (d) بالنسبة الى (S)

تمرين 05:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط: $D(2,1,0);C(1,-1,2);B(1,0,-3);A(-2,0,1)$

1- هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان.

2- بين ان النقط C,B,A تعين مستوي , اكتب معادلته .

3- أعط تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)

4- عين بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

5- ليكن (S) سطح الكرة التي مركزها Dو نصف قطرها $\sqrt{2}$ عين تقاطع سطح الكرة (S)مع المستوي $(O;\vec{i},\vec{j})$

تمرين 06:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتان : $B(-1,1,-2);A(1,-1,2)$

1- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

2- نعتبر المستوي (P) ذو المعادلة : $x-y+2z+6=0$ و Q مستوي يشمل النقطة A و يعامد المستقيم (AB).

*- أكتب معادلة المستوي Q.

*- تحقق ان المستوي (P)يشمل B ويوازي المستوي Q

3- ليكن (S) سطح الكرة التي مركزها B و نصف قطرها 4

*- اكتب معادلة سطح الكرة (S) .

*-عين العدد الحقيقي α حتى تكون النقطة $C(0,\alpha,1)$ تنتمي الى سطح الكرة (S).

تمرين 07:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستويان $(P_2);(P_1)$ معادلتهما على الترتيب :

$2x+2y-z-5=0$ و $2x-y+2z-5=0$

1- برهن ان $(P_2);(P_1)$ متعامدان

2- لتكن النقطة $A(1,2,-1)$ من الفضاء .

أ- عين d_1 بعد النقطة A عن المستوي (P_1)

ب- عين d_2 بعد النقطة A عن المستوي (P_2)

جـ- استنتج d_3 بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) تقاطع المستويان

د- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

3- لتكن M نقطة من (Δ) .عين احداثيات النقطة Mحتى تكون المسافة AM اصغر ما يمكن .

تمرين 08

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر المستويان $(P_2);(P_1)$ معادلتهما على الترتيب :

$x-2y+4z-9=0$ و $-2x+y+z-6=0$

بين . أن المستقيم (AB) و(d) ليس من نفس مستوي
نعين المستوي (P) الذي يشمل (AB) ويوازي (d)

1 - برهن ان $(P_1);(P_2)$ متعامدان . ثم عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) تقطع المستويان (P_1) و (P_2)

2- لتكن M نقطة من (Δ), و $A(-9,-4,-1)$.

أ- تحقق ان النقطة A لاتنتمي الى المستويان (P_1) و (P_2)

ب- عبر عن AM^2 بدلالة الوسيط

جـ- ماهي النقطة M التي تجعل المسافة AM اصغر ما يمكن

تمرين09

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(2,1,3);B(-3,-1,7);C(3,2,4)$.

1- هل النقط A,B,C في استقامية .

2- ليكن (d) مستقيم معرف بالتمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x=2t-7 \\ y=-3t \\ z=t+4 \end{cases} \quad t\in\mathfrak{R}$$

أ- بين ان المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC)

ب- اكتب معادلة المستوي (ABC).

3- لتكن نقطة G تقاطع المستقيم والمستوي (ABC).

أ- بين ان G هي مرجح الجملة : $\{(A;-2),(B;-1),(C,2)\}$

ب- عين طبيعة و عناصر المجموعة (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

تمرين 10:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(1,2,2);B(3,2,1);C(1,3,3)$.

1 - بين ان النقط A,B,C تعين مستوي , اكتب معادلته .

2- نعتبر المستويان $(P_1);(P_2)$ معادلتهما على الترتيب :

$x-2y+2z-1=0$ و $x-3y+2z+2=0$

أ- برهن ان $(P_1);(P_2)$ متقاطعان, نسمي (d) تقاطعهما

ب-تاكد ان النقطة C تنتمي الى المستقيم (d)

جـ-بين ان الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو شعاع توجيه المستقيم (d)

د- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)

3- - لتكن M نقطة من (d). عين احداثيات النقطة M حتى يكون الشعاع $\overrightarrow{AM}$ يعامد الشعاع $\vec{u}$

استنتج المسافة بين A و المستقيم (d) .

تمرين11:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقطتان : $A(2,1,8);B(0,2,-1)$ و (d) مستقيم معرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{حيث } t\in\mathfrak{R}$$

1- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

أ- بين ان الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P)

ب- اكتب معادلة المستوي (P)

جـ- بين ان المسافة بين النقطة M من (d) و المستوي (P) مستقلة عن موضع النقطة M

د- عين التمثيل الوسيطي لمستقيم تقاطع المستوي (P)و المستوي (yoz)

تمرين12

نعتبرفي الفضاء المنسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, المستويين (P_1) ذو المعادلة $x+2y-z-2=0$ و (P_2) المعرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases} \quad \text{حيث } (\alpha,\beta)\in\mathfrak{R}^2$$

1- أكتب معادلة للمستوي (P_2)

2- بين أن المتويين (P_1) و (P_2) متعامدان

3- $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء.

أ- عين d_1 بعد النقطة A عن المستوي (P_1)

ب- عين d_2 بعد النقطة A عن المستوي (P_2)

جـ- استنتج d_3 بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) تقطع المستويان

د- عين التمثيل الوسيطي بدلالة λ للمستقيم (Δ)

4- لتكن M نقطة من (Δ), عبر عن AM^2 بدلالة الوسيط λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و المستقيم (Δ)

تمرين 13

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(3,2,6);B(1,2,4);C(4,-2,5)$

1- بين ان النقط A,B و C تشكل مستوي .

أكتب معادلة المستوي (ABC) .

2- بين ان المثلث ABC قائم.

3- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)الذي يشمل المبدأ O و يعامد المستوي (ABC)

4- لتكن النقطة K المسقط العمودي للمبدأ O على المستوي (ABC) . أحسب الطول OK

(RAMMUS)

5- احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

6- لتكن G مرجح الجملة : $\{(O,3);(A,1);(B,1);(C,1)\}$

و I مركز ثقل المثلث ABC.

أ- بين ان النقطة G تنتمي الى المستقيم (OI) .

ب- عين المسافة بين النقطة G و المستوي (ABC)

7- لتكن (Γ) مجموعة النقط Mمن الفضاء التي تحقق : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$

أ- عين طبيعة وعناصر المجوعة (Γ)

ب- ما هي مجموعة النقط المشتركة بين (Γ)والمستوي (ABC)

تمرين 14:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس. $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$A(1,-2,4)$ نقطة من الفضاء و (P) مستوي ذو المعادلة : $2x-3y+z+2=0$

1- اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) الذي يشمل A و يعامد (P).

2- عين احداثيات النقطة B تقاطع (d) مع (P)

3- اكتب معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها A و تمس المستوي (P)

4- عين احداثيات النقطتين C و D تقاطع (S) مع المستقيم (OZ)

5- عين احداثيات مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

تمرين 15:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

لتكن النقطتان : $B(10,0,10);A(8,0,8)$ و المستقيم (d) المعرف بالتمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x=3t-5 \\ y=2t+1 \\ z=-2t \end{cases} \quad : \quad t\in\Re$$

1- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

برهن ان (AB) و (d) لاينتميان الى نفس المستوي

2- ليكن (P) مستوي يشمل (AB) و يوازي (d).

أ- برهن ان الشعاع $\vec{n}(2,-2,1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

ب- عين المعادلة الديكارتية للمستوي (P).

جـ- بين ان المسافة بين النقطة M من (d) و المستوي (P) مستقلة عن موضع النقطة M

د- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم المعروف بتقاطع المستوي (P) مع المستوي (xoy)

3- لبكن سطح الكرة (S) المماس للمستوي (P) في النقطة $C(10,1,6)$. Ω مركز سطح الكرة يبعد عن المستوي (P) بـ 6 أكتب معادلة سطح الكرة (S)

تمرين16:

الفضاء منسوب الى معام متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط : $B(0,0,15);A(3,0,10)$ و $C(0,20,0)$

1- عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB).

ثم برهن ان المستقيم (AB) يقطع محور الفواصل في النقطة $E(9,0,0)$.

2- لتكن النقطة H المسقط العمودي للنقطة O في المثلث OBC

أ- برهن ان المستقيم (BC) يعامد المستوي (OEH)

ب- استنتج ان (EH) هو ارتفاع في المثلث EBC

جـ- عين معادلة ديكارتية للمستويين (OEH) و (ABC).

د- برهن أن للجملة : $\begin{cases} x=0 \\ 4y-3z=0 \\ 20x+9y+12z-180=0 \end{cases}$

حل وحيد . ماذا يمثل هذا الحل

3- احسب المسافة OH ثم استنتج أن $EH=15$

استنتج مساحة المثلث EBC :

4- احسب بعد النقطة 0 عن المستوي (ABC).

التمرين 17:

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

المستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(2;-5;2)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناضمي له (Q) المستوي ذو المعادلة $x+2y-2=0$

1 – عين معادلة ديكارتية للممستوي (P)

2 – بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدين

3 – عين تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) ، تقاطع المستويين (P) و (Q)

4 – لتكن النقطة $K(3;3;3)$. أحسب بطريقتين المسافة d بين النقطة K و المستقيم (Δ)

التمرين 18:

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(P) المستوي دو المعادلة $-4x-3y+1=0$ و (D) المستقيم الدي تمتيله الوسيطي هو

$$\begin{cases} x=k \\ y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}k \\ z=-\frac{3}{4}+\frac{3}{3}k \end{cases} \quad ,k\in\mathbb{R}$$

1 – تحقق أن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

2 - أ) عين تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) الدي يشمل النقطة $A(1,1,0)$ و $\vec{u}(4;1;3)$ شعاع توجيه له

ب) عين إحداثيات نقطة تقاطع (D) و (Δ)

3 - بين أن : $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الدي يشمل (D) و (Δ)

4- $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

أ) أحسب المسافة بين M و كل من (P) و (Q)

ب) أثبت أن مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المتساوية المساقة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2)

يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما

5 – عين مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي إحداثياها حلول الجملة الآتية

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

التمرين 19:

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط A,B,C و D حيث : $C(2;8;-4)$ و $\overrightarrow{AD}(1;5;2)$, $\overrightarrow{BD}(0;7;3)$, $\overrightarrow{CD}(1;-3;7)$

1 – بين أن النقط A,B,D تعين مستويا

2 – بين أن المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD)

3 - I المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

أ - بين أن المستقيم (AB) يعامد المستوي (CDI)

ب - عين معادلة للمستوي (CDI) و اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ج) استنتج إحداثيات النقطة I

4 – احسب الأطوال AB, CD, DI و استنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين 20:

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط : $A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2)$

1 – بين أن النقط A,B,C ليست في استقامية

2 - عين معادلة للمستوي (ABC)

3 - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)

4 - (P) المستوي دو المعادلة : $2x+2y+z-2=0$

أ – بين أن (P) و (ABC) متقاطعان

ب – بين أن (P) يشمل B و C ، مادا تستنتج ؟

5 – عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين 21:

الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $A(-1,2,1), B(2,1,3), C(0,-1,2)$

و (P) مجموعة النقط M التي تحقق : $AM=BM$

1 – عين طبيعة المجموعة (P) ، أكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (P)

2- عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الدي يشمل A و يوازي (P)

3 - أ - عين تمثيلا و سيطيا للمستقيم (Δ) الدي يشمل النقطة C و يعامد (P)

ب – عين إحداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (Δ)

جـ - أحسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

4 – عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (Π) الدي يشمل المستقيم (AC) و يعامد (P)، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

التمرين 22:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. (P) المستوي ذو المعادلة :

$8x+14y-z-37=0$.

A ، B و C النقط التي إحداثياتها على الترتيب :

$(1;2;-1)$ ، $(3;1;1)$ و $(-2;4;3)$.

أ) تحقق أن النقط A ، B و C تعرف مستويا.

ب) تحقق أن هذا المستوي هو (P).

2) أ) بين أن المثلث ABC قائم.

ب) اكتب جملة معادلات وسيطية للمستقيم (Δ) المار من المبدأ ويعامد المستوي (P).

ج) احسب البعد OK ،حيث K المسقط العمودي للنقطة O على (P).

د) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

3) S جملة النقط المثقلة حيث :

$S=\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

أ - تحقق أن لهذه الجملة مرجحا نرمز له بالرمز G.

ب - عين وضعية G على المستقيم (OI) حيث I مركز ثقل المثلث ABC.

تمرين01:

نعتبر في $\mathbb{C}$ الأعداد المركبة التالية :

$z'=3+i\sqrt{3}\ ,\ z=(3+\sqrt{3})+i(-3+\sqrt{3})$

و $z''=\dfrac{z}{z'}$

1- أكتب z'' على الشكل الجبري

2- عين طويلة و عمدة كل من z'' و z'

3- استنتج طويلة و عمدة z

4- احسب قيمة كل من $\sin\dfrac{\pi}{12}$ و $\cos\dfrac{\pi}{12}$

5- أحسب z^{2014}

تمرين02:

نعتبر في$\mathbb{C}$ العدد $P(z)$ المعرف كما يلي :

$P(z)=|z|^2-3(z+\bar{z})+2iz+6-6i$

1- أكتب $P(z)$ على الشكل $a+ib$

2- عين المجموعة Φ مجموعة النقط M صورة العدد z التي من أجلها يكون $P(z)$ حقيقي.

3- عين المجموعة Γ مجموعة النقط M صورة العدد z التي من أجلها يكون $P(z)$ تخيلي.

4- حل في$\mathbb{C}$المعادلة : $P(z)=0$, نسمي z_1 و z_2 حلول المعادلة حيث $|z_1|<|z_2|$

5- أكتب z_2 على الشكل المثلثي . ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $z_2{}^n$ حقيقي .

تمرين 03:

ليكن z و L عددان مركبان معرفان كما يلي : $z=x+iy$

و $L=\left(2+\dfrac{3}{2}i\right)z-\dfrac{5}{2}i\bar{z}$

1- أكتب L على الشكل الجبري .

2- ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- عين المجموعة Γ مجموعة النقط M صورة العدد z التي من أجلها يكون الجزء الحقيقي للعدد L يساوي $|z|^2$

أي: $\mathrm{Re}l(L)=|z|^2$

ب- عين المجموعة γ مجموعة النقط M صورة العدد z التي من أجلها يكون $|L|=\sqrt{5}$

جـ- أنشئ كل من Γ و γ .

3- عين الأعداد المركبة التي صورها تنتمي الى Γ و γ

تمرين04:

1 - نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

أ – تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$

ب – عين كثير الحدود $Q(z)$ حيث:

$P(z)=(z-6)\times Q(z)$

جـ - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2 - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

A,B,Cنقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب

$z_C=3-i\sqrt{3}\ \ ,\ z_B=3+i\sqrt{3}\ \ ;\ z_A=6$

أ – اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي

ب – اكتب العدد $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي

جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC.

تمرين05:

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$P(z)=z^3-6z^2+12z-16$

1-أحسب $P(4)$. ثم عين كثير الحدود $Q(z)$ حيث:

$P(z)=(z-4)\times Q(z)$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$. نرمز بـ z_0 الى الحل الحقيقي، z_1 الحل الذي جزءه التخيلي موجب و z_2 الحل الاخر

* أكتب z_1 و z_2 علىالشكل المثلثي

3- ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $A;B$ و C صور الأعداد z_0 ، z_1 و z_2 علىالترتيب . ما هي طبيعة المثلث ABC

4- عين مجموعة النقط M صورة العدد z التي تحقق :

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_0}\right|=1$$

تمرين06:

من أجل كل عدد مركب z نضع : $P(z)=z^4-1$

1- حلل $P(z)$ الى جداء أربعة عوامل من الدرجة الأولى

2- حل في$\mathbb{C}$المعادلة : $P(z)=0$. استنتج حلول المعادلة

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$$

3- ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ تأخد الوحدة $5cm$. أنشئ النقط $A;B$ و C صور الأعداد

$z_3=\dfrac{-1+3i}{5}$ و $z_2=\dfrac{-1-3i}{5}$ ، $z_1=-2$

4- بين أن النقط $A;B$ و C تقع على دائرة يطلب تعيينها .

5- أنشئ النقطة D صورة العدد $z_4=-\dfrac{1}{2}$.

6- ليكن العدد المركب $k=\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$

أ- أكتب العدد k على الشكل الجبري .

ب- عين قيمة $\dfrac{CA}{CD}$ و قيمة الزاوية $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})$

تمرين 07:

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$2z^2-\left[1+i(2+\sqrt{3})\right]z+i-\sqrt{3}=0$$

1- برهن أن للمعادلة حل تخيلي z_0. استنتج الحل الثاني z_1

2- أحسب طويلة و عمدة z_1

3- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$z_1^{6n+1}+z_0^{4n+1}=\frac{1}{2}\left[1+i(2+\sqrt{3})\right]$$

تمرين 08:

نعتبر في $\mathbb{C}$ الأعداد المركبة التالية : $z_A=1+2i$

$z_D=1-2i$ و $z_C=1+\sqrt{3}-i$ ؛ $z_B=1+\sqrt{3}+i$

1- نضع $k=\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_B}$. أكتب k على الشكل الجبري

عين طويلته و عمدة له . استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

2-برهن أن النقط $C;B;A$ و D تقع على دائرة يطلب تعيينها

3- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos\theta=0$$

أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة

ب – برهن أن صور الحلول تنتمي الى نفس الدائرة السابقة

تمرين 09:

I - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ و D صور الأعداد : $z_A=3$

$z_D=1-i$ و $z_C=-2+3i$ ؛ $z_B=4i$

1- أنشئ النقط $C;B;A$ و D

2- عين طبيعة الرباعي $ABCD$

II- نعتبر في$\mathbb{C}$ المعادلتين :

$Z^2-(1+3i)z-6+9i=0$ .... (1)

$z^2-(1+3i)z+4+4i=0$ .... (2)

1- برهن أن للمعادلة (1) حل حقيقي و أن للمعادلة (2) حل تخيلي

2- حل في$\mathbb{C}$ المعادلة :

$$(Z^2-(1+3i)z-6+9i)(z^2-(1+3i)z+4+4i)=0$$

نسمي z_0 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب . أكتب z_0 على الشكل المثلثي .

3- عين قيم العدد الطبيعي n حتى تكون النقطة M_n ذات اللاحقة ${z_0}^n$ تنتمي الى المستقيم ذو المعادلة $y=x$

4 - لتكن الدالة f التي ترفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=z^2-(1+3i)z-6+9i$$

أ- نضع : $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$

أكتب x' و y' بدلالة x و y

ب- عين المجموعة (T) مجموعة النقط M التي من اجلها تكون M' نقطة من محور التراتيب .

تمرين 10:

1- من أجل كل عدد مركب z نضع :

$$P(z)=z^4-10z^3+38z^2-90z+261$$

أ- برهن أن للمعادلة $P(z)=0$ حلين تخيليان .

ب- عين العددين α و β حيث يكون :

$$P(z)=(z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta)$$

جـ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2- ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أنشئ النقط $C;B;A$ و D صور الأعداد : $a=3i$

$d=5-2i$ و $c=5+2i$ ؛ $b=-3i$

3- عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة

$$\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$$

4- عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=10$$

تمرين 11

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P المعرف كما يلي :

$$P(z)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$$

1- برهن أن للمعادلة $P(z)=0$ حلين مترافقين .

2- أحسب $P(i\sqrt{3})$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

3- ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- أنشئ النقط $C;B;A$ و D صور الأعداد : $i\sqrt{3}$, $-i\sqrt{3}$, $3+2i\sqrt{3}$ و $3-2i\sqrt{3}$

ب- برهن أن النقط $C;B;A$ و D تقع على دائرة يطلب تعيينها

4- لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة الى المبدأ . برهن أن :

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

استنتج طبيعة المثلث BEC

تمرين 12:

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P المعرف كما يلي :

$$P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2- نضع : $z_1=1+i$ و $z_2=1-\sqrt{3}i$

أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي

ب- أكتب $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

3- عين قيم العدد الطبيعي n حيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي

أحسب قيمة العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{452}$

تمرين13:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$

*- أكتب الحلين على الشكل الأسي

2- نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $1-i\sqrt{3}$ ؛ $1+i\sqrt{3}$ و $\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

أ- عين طبيعة المثلث ABC

ب- عين طويلة و عمدة العدد k حيث : $k=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$

جـ- أحسب k^3 و k^6 ثم استنتج أن k^{3n} عدد حقيقي

تمرين14:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $z^2+z-2iz-2i$ عددا حقيقيا .

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلتين :

$(z^2-4z+3)(z^2-6z+13)=0$ .... (1)

$z^2+4\bar{z}-4=0$ .... (2)

3- من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1 نضع :

$$L=\frac{z-1+i}{z-1}$$

أ- أكتب L على الشكل الجبري

ب- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون L تخيلي صرف.

جـ- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|L|=1$

تمرين 15:

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+8\sqrt{3}z+64=0$

2- لتكن النقطتان A و B صورتا العددين : $-4\sqrt{3}-4i$ و $-4\sqrt{3}+4i$ على الترتيب .ما هي طبيعة المثلث OAB

3- لتكن D نقطة ذات اللاحقة $2i$ و G مرجح الجملة :

$\{(O;-1),(B;1),(D;1)\}$

أ- أحسب لاحقة النقطة G

ب- عين طبيعة الرباعي $OBGD$

4- نعتبر العدد المركب k حيث : $k=\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}$ و

$z_C=\sqrt{3}+i$

أ- أكتب k على الشكل الجبري

ب- استنتج طبيعة المثلث AGC.

تمرين 16:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_1=1$ ؛ $z_2=i$ و $z_3=1+i$ على الترتيب .

1- أحسب طويلة و عمدة z_2 و z_3

- بين أن العدد : $(2z_1+z_2)\times z_3^{2007}$ هو عدد حقيقي.

3- عين أحداثيات النقط G مرجح الجملة :

$\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

4- ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m مجموعة النقط M صورة العدد z التي تحقق : $AM^2-BM^2+CM^2=m$

تمرين17:

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2-2i\sqrt{3}z-4)=0$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة . نسمي z_0 الحل الحقيقي ؛ z_1 الحل الذي جزؤه الحقيقي سالب و z_2 الحل الآخر.

2- أحسب طويلة و عمدة كل من z_1 و z_2

3- أحسب z_1^2 ثم z_1^3

- برهن أن : $z_1^{3n+2}=-2^{3n+1}\times z_2$

4- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون z_2^n عددا حقيقي.

تمرين18:

نعتبر في $\mathbb{C}$ العددين : $z_1=-\sqrt{3}-i$ و $z_2=-1-i$

1- عين طويلة و عمدة العدد : $\frac{z_1\times z_2}{2\sqrt{2}}$

- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون $\left(\frac{z_1\times z_2}{2\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقي صرف .

2- نضع : $a=\frac{1}{2}z_1$ ؛ $b=\frac{z_2}{\sqrt{2}}$ و $L=\frac{a+b}{1+ab}$

أ- أحسب طويلة كل من a و b

ب- أحسب $\bar{L}$ بدلالة a و b ماذا تستنتج .

تمرين19:

1 – عين العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث :

$$\begin{cases}2z_1+3z_2=9-2i\\3z_1-z_2=8+8i\end{cases}$$

2 - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط B,A و Ω التي لواحقها : $z_A=3+2i$

$z_\Omega=1-2i$; $z_B=-3$

أ – أحسب العدد $\frac{z_B-z_\Omega}{z_A-z_\Omega}$

ب – عين طبيعة المثلث ΩAB

3 – لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C=2(z_\Omega-z_A)+z_A$

أ – عين عبارة z_C

ب – عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة :

$\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$

ج – عين طبيعة الرباعي $ABCD$

4 – عين طبيعة و عناصر المجموعة مجموعة النقط M صورة العدد z التي تحقق : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=4\sqrt{5}$

التمرين 20 :

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P المعرف كما يلي :

$$P(z)=z^3-3z^2+3z-9$$

1 - حلل $P(z)$ ، ثم حل المعادلة $P(z)=0$

2 - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=3$ ،

$z_C=-i\sqrt{3}$ و $z_B=i\sqrt{3}$

- ما هي طبيعة المثلث ABC

3 - نعتبر النقط F,E,D صور الأعداد : $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_F=1-i\sqrt{3}$ و $z_E=z_De^{i\frac{\pi}{3}}$

أ – احسب $\frac{z_F}{z_E}$ و استنتج أن (OE) و (OF) متعامدان

ب – عين لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا

التمرين 21 :

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=1+i$ ،

$z_C=2iz_A+6+3i$ و $z_B=3i$

1 – اكتب على الشكل الأسي z_A و z_B

2 – عين لاحقة النقطة C ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

3 – لتكن النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$

أ – عين لاحقة النقطة D

ب – ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$

4 – لتكن نقطة M من المستوي تختلف عن B و D و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها

$\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

أ– تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي الى (Δ)

ب – أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$

جـ - عين طبيعة المجموعة (Δ)

التمرين 22

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ :

$$P(z)=2z^3+14z^2+41z+68$$

1- أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z :

$$P(z)=(z+4)(az^2+bz+c)$$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

3- نرمز بـ z_1 ، z_2 و z_3 إلى جذور $P(z)$ حيث z_1 حقيقي و $Im(z_2)>0$ ، نسمي A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب z_1 ، z_2 و z_3 في المستوي المركب .

أ – أكتب العدد $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي . ما ذا تستنتج بالنسبة للمثلث ABC ؟

ب – عين النقطتين D و E بحيث يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .

التمرين 23 :

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود P المعرف كما يلي :

$$P(z)=z^3-12z^2+48z-128$$

1 – احسب $P(8)$ ثم حلل $P(z)$

2 - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

3 – ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=2-2i\sqrt{3}$

$z_C=8$ و $z_B=2+2i\sqrt{3}$

أ – احسب العدد $K=\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$

ب - استنتج طبيعة المثلث ABC

4 – أ - عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة :

$$\{(A,|z_A|);(B,|z_B|);(C,|z_C|)\}$$

ب – حدد مجموعة النقط M التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$

التمرين 24:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=1-2i$ ،

$z_C=1$ و $z_B=-2+2i$

لتكن الدائرة (C) التي قطرها $[AB]$

1 – عين لاحقة النقطة Ω مركز الدائرة (C) و نصف قطرها r

2 - D نقطة ذات اللاحقة $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$

أكتب z_D على الشكل الجبري ، ثم بين أن النقطة D تنتمي الى الدائرة

3 – لتكن النقطة E من الدائرة (C) ذات اللاحقة z_E بحيث :

$$\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\frac{\pi}{4}$$

أ – عين طويلة و عمدة العدد : $z_E+\frac{1}{2}$

ب – استنتج أن : $z_E=\frac{5\sqrt{2}-2}{4}+\frac{5\sqrt{2}}{4}i$

التمرين 25:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=1-4i$ ،

$z_C=1-2i$ و $z_B=-1-2i$

1 – علم النقط A ; B و C

2- أكتب العدد $Z=\frac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري

Suite 248

- عين احداثيات النقطة D مرجح الجملة :

$$\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$$

* - برهن ان الرباعي $ABCD$ مربع .

4- عين و انشئ المجموعة (Γ_1) مجموعة M النقط التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

5- عين و انشئ المجموعة (Γ_2) مجموعة M النقط التي تحقق:

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$$

التمرين 25:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=1-4i$ ،

$z_C=1-2i$ و $z_B=-1-2i$

1- علم النقط A ; B و C

2- أكتب العدد $Z=\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_B}$ على الشكل الجبري

ما هي طبيعة المثلث ABC

3 - D نقطة ذات اللاحقة $z_D=2z_C-z_A$ و G مرجح الجملة $\{(D;1),(B;-1),(A;1)\}$

عين طبيعة الرباعي $ABDG$

4 - عين و انشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}\right\|$

5 - عين و انشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=1$

التمرين 26:

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

L العدد المركب المعرف كما يلي : $L=\dfrac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$

1 - أكتب العدد L على الشكل الجبري

2 – بين أن : $L^{12}+1=0$ ، ثم أحسب :

$$\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}$$

3 - n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي أثبت أن :

$$L^{4n}+L^{4p}=0$$

4 - A و B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=5+3i$ و $z_B=5-3i$. و النقطة A' ذات اللاحقة

$$z_{A'}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\left(z_A-z_B\right)+z_B$$

عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA'

التمرين 27:

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$\left(z^2+2z+4\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$$

2 - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ و D صور الأعداد : $z_A=\sqrt{3}+i$

$z_B=\sqrt{3}-i$ ، $z_C=-1-i\sqrt{3}$ و $z_D=-1+i\sqrt{3}$

أ – أكتب كلا من z_A , z_B , z_C و z_D على الشكل الأسي

ب – أحسب العدد $\dfrac{z_D-z_B}{z_A-z_C}$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان

3 - z_n العدد المركب الذي طويلته $\dfrac{1}{2^n}$ و عمدته $\dfrac{2\pi}{3}n$ حيث n عدد طبيعي و L_n العدد المركب المعرف بـ : $L_n=z_D\times z_n$

أكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري

4 - (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n=|L_n|$

أ – أثبت أن (u_n) متتالية هندسية

ب- M_0 , M_1 , ... , M_n صور الأعداد المركبة L_0 , L_1 , ... , L_n على الترتيب .

أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث :

$$S_n=\left\|\overrightarrow{OM_0}\right\|+\left\|\overrightarrow{OM_1}\right\|+\ldots+\left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$$

جـ - أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

التمرين 28:

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$2z^2+6z+17=0$$

2 - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد :

$$z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i\ ,\ z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i\ ,\ z_A=-4$$

- أكتب العدد $Z=\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الجبري

ما هي طبيعة المثلث ABC

3 - أ) عين z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E حتى يكون الرباعي مربع مركزه A

ب) عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث :

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$$

3 - (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات الاحقة z حيث :

$$\arg\left(z+4\right)=\frac{\pi}{4}$$

أ) تحقق أن النقطة B تنتمي الى المجموعة (Γ)

ب) عين المجموعة (Γ)

تمرين **29:**

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$4z^2+\left[1+\sqrt{3}-(7+\sqrt{3})i\right]z-3-\sqrt{3}-(1+\sqrt{3})i=0$$

1- تحقق ان i هو حل لهذه المعادلة . استنتج الحل الثاني z_1

- عين طويلة و عمدة العدد z_1

2- ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نضع $z_2=-iz_1$. نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد i ؛ z_1 و z_2 على الترتيب .

أ- أحسب طويلة و عمدة z_2 .

ب-إستنتج طبيعة المثلث OBC

جـ- برهن أن النقط $C;B;A$ في استقامية

تمرين **30:**

1 - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$z^2+2\sqrt{3}\,z+4=0$$

2 – ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة حيث $\operatorname{Im}(z_1)\succ 0$ أكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل المثلثي ، ثم $\frac{z_1}{z_2}$ على السكل الأسي

3 - أ) أحسب $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{2010}$

ب) عين العدد الطبيعي n حتي يكون العدد $(z_2)^n$ تخيلي

4 - ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط $C;B;A$ (النقطة C هي نظيرة A بالنسبة للمبدأ) لواحقها على الترتيب z_1 , z_2 , z_3

أ) عين طويلة و عمدة العدد $\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$

ب) ما هي طبيعة المثلث ABC

جـ) أكتب معادلة الدائرة المحيطة به

تمرين **31:**

ينسب المستوي الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^3+8=0$

1 – أ) عين الأعداد الحقيقية a , b , c حيث :

$$z^3+8=(z+2)(az^2+bz+c)$$

ب) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة

2 - نعتبر النقط $C;B;A$ صور الأعداد : $z_A=2$ ،

$z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=1+i\sqrt{3}$

أ) عين طبيعة المثلث ABC

ب) بين أن العدد $\left(\frac{z_C}{z_B}\right)^{2013}$ هو عدد حقيقي

ج) عين العدد الطبيعي n حتي يكون العدد $\left(\frac{z_C}{z_B}\right)^{n}$ حقيقي

3 - عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات الاحقة z

حيث: $z=z_A+2e^{i\theta}$ (حيث $\theta\in\mathbb{R}$)

تمرين01:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقطتان A و B صورتا العددين $z_1=5+5i$ و $z_2=-3+2i$ على الترتيب .

1- عين عبارة التحويل الذي يحول A الى B و $C(6,0)$ الى 0 إستنتج طبيعته و عناصره .

2- نسمي ω مركز هذا التحويل . ما هي طبيعة المثلث $AB\omega$

تمرين 02:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقطتان A و B صورتا العددين $z_1=3-2i$ و $z_2=-1+6i$ على الترتيب

لتكن ω نقطة من محور الفواصل ؛ R الدوران الذي مركزه ω و الذي يحول A الى B عين احداثيات النقطة ω

تمرين 03:

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$

نسمي z_1 الحل الذي جزوه التخيلي موجب و z_2 الحل الثاني

2- عين طويلة و عمدة كل من : z_1 ؛ z_2 و $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$

3- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقط : B,A و C صور الاعداد $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ؛ $\sqrt{2}(1+i)$ و $\sqrt{2}(1-i)$ على الترتيب .

أ- عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته 3-

ب- عين لاحقة النقطة E صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه 0 و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

جـ- أكتب العدد $L=\frac{z_D-z_B}{z_E-z_B}$ على الشكل الجبري , ثم أحسب طويلة و عمدة العدد L

4- لتكن النقطة I منتصف القطعة $[DE]$ و النقطة F نظيرة B بالنسبة الى I . ما هي طبيعة الرباعي $BDFE$

تمرين04:

ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

1- ليكن كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي:

$$P(z)=z^3-4z^2+6z-4=0$$

أ- أحسب $P(2)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$

2 - نسمي z_1 و z_2 حلي المعادلة $P(z)=0$ حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 الحل الثاني.

نعتبر النقط B,A و C صور الاعداد z_1 ؛ z_2 و 2 .

نسمي I منتصف القطعة $[AB]$ و R الدوران الذي مركزه 0 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين النقطة B' صورة B بالدوران R .

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OACB$

3- نعتبر في المستوي التحويل النقطي f الذي يرفق بكل نقطة M تختلف عن C النقطة M' ذات الاحقة z' حيث :

$$f(z)=z'=\frac{z-1-i}{z-2}$$

أ- عين صورة كل من A و B بالتحويل f

ب- عين احداثيات النقطة D التي تحقق : $f(D)=C$

جـ ما هي المسافة الممثلة بالعددين: $|z-2|$ و $|z-1-i|$

د- إستنتج أنه إذا كانت M نقطة من محور القطعة $[AC]$ فإن M' تنتمي الى دائرة يطلب تعيينها .

تمرين05:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقط B,A و C صور الاعداد :

$$z_1=(3\sqrt{3}-2)+(5+2\sqrt{3})i$$
$$z_2=(-\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$$
$$z_3=(1-4\sqrt{3})-(4+\sqrt{3})i$$

1- ليكن R الدوران الذي مركزه 0 و زاويته $-2\frac{\pi}{3}$

أ- عين عبارة الدوران

ب- عين النقط C',B',A' صور النقط C,B,A بالدوران R.

جـ- أنشئ النقط C',B',A' ثم استنتج وضعية النقط C,B,A

2- أحسب $z_1-z_2+z_3$. أعط تفسير هندسي لهذه النتيجة .

3- لتكن (Υ) مجموعة النقط M التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

عين طبيعة المجموعة (Υ).

تمرين06:

ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط C,B,A و D صور الاعداد : $1+2i$ ؛ $5+2i$ ؛ $1+4i$ و $2-i$

1- عين عبارة و عناصر التشابه المباشر S الذي يحول A الى B و C الى D

2- لتكن النقطة $M_0(0,3)$.

نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S(M_n)$.

نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي : $V_n = \left\| \overrightarrow{\omega M_n} \right\|$

حيث ω هي مركز التشابه المباشر S

أ- أكتب عبارة V_n بدلالة n

ب- عين طبيعة المتتالية (V_n)

جـ- أحسب $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

تمرين 07:

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي:

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16$$

1- أحسب $P(4)$

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$. نسمي z_0, z_1 و z_2 حلول المعادلة حيث z_0 هو الحل الحقيقي , z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 الحل الأخر .

3- ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C صور الاعداد z_0, z_1 و z_2 على الترتيب .

أ- عين طبيعة المثلث ABC

ب- عين احداثيات النقطة I صورة $k(-\sqrt{3},1)$ بالدوران الذي مركزه 0 و زاويته $\frac{\pi}{3}$

جـ- عين احداثيات النقطة I' صورة $k(-\sqrt{3},1)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{OB}$.

د- برهن أن (OC) يعامد (OI)

4- لتكن D نقطة من المستوي حيث يكون الرباعي $COID$ متوازي أضلاع .

أ- برهن أن $COID$ هو مربع

ب- استنتج احداثيات النقطة D

جـ- عين طبيعة المثلث $OI'D$

تمرين 08:

1- أحسب $(1+i)^6$

2- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 8i = 0$ ...... (E)

استنتج من السؤال 1 أحد حلول المعادلة (E)، ثم عين الحل الثاني

3- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3 + 8i = 0$ ...... (E')

استنتج من السؤال 1 أحد حلول المعادلة (E')

4- لتكن النقطة A ذات اللاحقة $2i$ ، و r الدوران الذي مركزه 0 و زاويته $2\frac{\pi}{3}$

أ- عين اللاحقة b للنقطة B صورة A بالدوران r و اللاحقة c للنقطة C صورة B بالدوران r.

ب- برهن أن b و c هما حلي المعادلة (E')

5- ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

أ- أنشئ النقط A, B, C

ب- ما هي طبيعة المثلث ABC

تمرين09

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي:

$$P(z) = z^3 - 2(1+i)z^2 + 2(1+2i)z - 4i$$

1- أحسب $P(2i)$

2- عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث يكون :

$$P(z) = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

*- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$

*- أكتب الحلول على الشكل الأسي

3- ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

نعتبر النقطتان A, B صورتا العددين : $z_A = 1+i$ و $z_B = 2i$. من اجل كل عدد مركب z يختلف عن z_A نضع :

$$Z' = \frac{z - 2i}{z - 1 - i}$$

أ- عين المجموعة (E) مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z' تخيلي صرف .برهن أن : $B \in (E)$

أنشئ المجموعة (E)

ب- عين المجموعة (F) مجموعة النقط M التي من اجلها يكون $|Z'| = 1$. أنشئ المجموعة (F)

4- ليكن r الدوران الذي مركزه $\omega(\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

النقطة I' صورة $I\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ بالدوران r .

أ- عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r. و لاحقة

ب- عين صورة كل من (E) و (F) بالدوران r .

تمرين10:

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث : $|z_1| < |z_2|$

أحسب العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2014}$

2- ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس

نعتبر النقط A, B و C لواحقها على الترتيب : $1، z_1، z_2$

ليكن Z العدد المركب حيث : $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$

أ – أكتب Z على الشكل الأسي و المثلثي

ب- استنتج أنه يوجد تحويل نقطي يحول B الى C يطلب تعيين طبيعته و عناصره

تمرين11

ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط A, B و C صور الأعداد : $4+i$ ، $4-i$ و $-i$ على الترتيب .

1- أنشئ النقط A, B و C

2- ليكن r الدوران الذي مركزه $\Omega(2,0)$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عين احداثيات النقطة S صورة A بالدوران r .

ب- برهن ان النقط C , B, A و S تنتمي الى دائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها و رسمها .

3- بكل نقطة M تختلف عن Ω نرفق النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :
$$Z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$$

أ- عين لواحق النقط C', B', A'

ب- تحقق ان النقط C', B', A' تنتمي الى دائرة مركزها P ذات اللاحقة i

جـ- اكتب $|Z'-i|$ بدلالة z

4- لتكن M نقطة ذات اللاحقة z تنتمي الى الدائرة $(\mathcal{C})$

أ- برهن ان : $|Z'-i| = 2\sqrt{5}$

ب- استنتج مجموعة النقط M'

تمرين 12:

ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط B, A و C لواحقها على الترتيب :

$-1+i\sqrt{3}$ ، $-1-i\sqrt{3}$ و 2 .

1- أنشئ النقط A, B و C

2- أكتب العدد $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ على الشكل الأسي

- استنتج طبيعة المثلث ABC

- عين مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

3- عين المجموعة (F) مجموعة النقط M التي من اجلها يكون $2(z+z)+zz=0$. أنشئ المجموعة (F)

4- r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

أ- عين صور النقطتان B,A بالدوران r .

ب- عين صورة المجموعة (F) بالدوران r .

تمرين 13:

نعتبر النقطتين A و B صورتا العددين $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$

1- أكتب عبارة التحويل (S) الذي مركزه O و يحول A الى B ثم استنتج طبيعته و عناصره .

2- نعتبر متتالية النقط (A_n) المعرفة كما يلي : $A_0 = A$ و $A_{n+1} = S(A_n)$ نرمز بـ z_n الى لاحقة A_n

أ- أنشئ النقط A_2, A_1, A_0

ب- عين بدلالة n عبارة z_n . أكتب z_n على الشكل الأسي .

3- نضع من اجل كل عدد طبيعي n :
$$U_0 = A_0A_1 \quad \text{و} \quad U_n = A_nA_{n+1}$$

أ- بين ان (U_n) متتالية هندسية .

ب- اكتب بدلالة n عبارة U_n

جـ- احسب بدلالة n المجموع :
$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots\cdots + U_n$$

تمرين 14:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :
$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

2- لتكن النقط K ، L ، M التي لواحقها على الترتيب:
$$z_K = 1+i \text{ ، } z_L = 1-i \text{ ، } z_M = -i\sqrt{3}$$

علم هذه النقاط في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$؛(الوحدة هي $4cm$).

3- أ) تحقق أن z_N لاحقة النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة L هي: $2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$:

ب - نعتبر الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث:
$$r(M) = A \text{ و } r(N) = C$$

عين اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و C على الترتيب.

جـ - نعتبر الانسحاب t، لاحقة شعاعه $2i$ حيث:

$t(M) = D$ و $t(N) = B$ عين اللاحقتين z_D و z_B للنقطتين D و B على الترتيب.

4- أ- بين أن النقطة K منتصف القطعة المستقيمة $[DB]$ هي منتصف القطعة المستقيمة $[AC]$

ب -احسب $\frac{z_C-z_K}{z_B-z_K}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

تمرين15:

نعتبر النقطتين A و B صورتا العددين: $z_A = 1+i$ و $z_B = 3i$

1- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي .

2- ليكن (S) التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث :
$$z' = 2iz + 6 + 3i$$

أ- عين طبيعة و عناصر التحويل S .

ب- عين لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل S

جـ- ما هي طبيعة المثلث ABC

3- عين لاحقة النقطة D مرجح الجملة :
$$\{(A;2),(B;-2),(C;2)\}$$

*- ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$

4- نسمي (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي من اجلها يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ عددا حقيقيا موجبا .

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $6+3i$ تنتمي الى المجموعة (Γ) .

ب- أعط تفسير هندسي لعمدة العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$.

جـ- استنتج المجموعة (Γ) .

تمرين 16 :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة z' و المعرف كما يلي :

$$f(z)=z'=\frac{1+i}{2}z$$

1- عين طبيعة و عناصر التحويل f

2- نعتبر المتتالية النقطية (A_n) المعرفة كما يلي :

$A_{n+1}=f(A_n)$ و $A_0(2,0)$

نسمي z_n لاحقة النقطة A_n

أ- أنشئ النقط : A_3,A_2,A_1,A_0

ب- عين بدلالة n و z_0 عبارة z_n .

جـ- أكتب z_n على الشكل الأسي.

3- نضع من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n=|z_n|$

أ- برهن ان (U_n) متتالية هندسية

ب- أكتب عبارة U_n بدلالة n

4- أحسب $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OA_nA_{n+1}

5- احسب بدلالة n المجموع :

$$S_n=A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_nA_{n+1}$$

تمرين 17:

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة z' و المعرف كما يلي :

$$f(z)=z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}\times z$$

1- عين طبيعة و عناصر التحويل f

2- نعتبر المتتالية النقطية (A_n) المعرفة كما يلي:

$A_{n+1}=f(A_n)$ و $z_0=i$ حيث z_0 صورة العدد A_0

أ- أنشئ النقط : A_3,A_2,A_1,A_0

ب- عين بدلالة n و z_0 عبارة z_n .

3- n و p عددان طبيعيان . برهن أنه تكون A_n منطبقة على A_p إذا كان n-p مضعف للعدد 12 .

4- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $12x-5y=3$.

استنتج قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها تكون A_n تنتمي الى نصف المستقيم $[OX)$

تمرين 18:

ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة :

$$z^2-2\sqrt{3}\,z+4=0$$

ب) نضع $a=\sqrt{3}+i$ ؛ و $b=\sqrt{3}-i$

أكتب الأعداد على الشكل الأسي ، ثم أنشئ النقطتان A و B صورتا العددين a و b

2 – أ) ليكن الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$

عين العدد a' لاحقة A' صورة A بالدوران r ، ثم أنشئ النقطة A'.

ب) ليكن h التحاكي الذي مركزه O و نسبته $-\frac{3}{2}$

عين العدد b' لاحقة B' صورة B بالتحاكي ، ثم أنشئ النقطة B'

3 – لتكن C مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $OA'B'$ و R نصف قطرها . نرمز بـ c الى لاحقة النقطة C.

أ) برهن أن : $c\overline{c}=R^2$ و $(c-2i)(\overline{c}+2i)=R^2$

و $\left(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i\right)\left(\overline{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right)=R^2$

ب) استنتج أن : $c-\overline{c}=2i$ و $c+\overline{c}=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$

جـ) استنتج لاحقة النقطة C و قيمة العدد R

تمرين 19:

ينسب المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 – مثل النقط I,J,H,A,B,C,D لواحقها على الترتيب

$$z_I=1, z_J=i, z_H=1+i, z_A=2$$

$$z_B=\frac{3}{2}i, z_C=2i, z_D=-\frac{3}{2}$$

2 – لتكن E نظيرة B بالنسبة لـ H . المستقيم الذي يشمل C و العمودي على (AE) و المستقيم الذي يشمل D و يوازي المستقيم (OC) يتقاطعان في F

عين لاحقة النقطة F ثم أنشئ F و E

3 – برهن أن المثلثان OAB و OCF متقايسان

نعتبر التحويل النقطي f المعرف كما يلي : $z'=-i\overline{z}+2i$

1 – عين صور النقط O,A,B بالتحويل f

2 - أ) ما هي طبيعة التحويل f . هل f تقايس

ب) عين مجموعة النقط الصامدة بالتحويل f

ج) هل f تناظر محوري

3 – نعتبر الإنسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{IJ}$ عين العبارة المركبة لكل من الإنسحاب t و تحويله العكسي t^{-1}

4 – نضع $s=f\circ t^{-1}$

أ) عين العبارة المركبة للتحويل s

ب) عين صورة كل من النقطتين I و J

جـ) استنتج طبيعة التحويل s

د) استنتج أن التحويل s هو تركيب تحويلين يطلب تعيينهما

تمرين01:

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0=\frac{5}{2}$ و من

أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+2$

1- أ- ارسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ و المنحنى (d) الممثل للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=\frac{2}{3}x+2$.

ب- مثل على محور الفواصل و بدون حسا ب الحدود U_4 و U_3,U_2,U_1,U_0 .

جـ- ضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها .

2- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n\le 6$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

جـ- هل هي متقاربة ؟ برر اجابتك

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n=U_n-6$

أ- برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

ب- أكتب عبارة كل من V_n و U_n بدلالة n

4 - أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=V_0+V_1+\cdots\cdots+V_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S_n=U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n$

تمرين02:

f دالة عددية معرفة على المجال $[0\,;+\infty[$ بالعبارة $f(x)=\frac{x+2}{2x+1}$ (d) المستقيم ذو المعادلة $y=x$

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1– أ رسم المنحنى و المستقيم (d)، ثم مثل الحدود u_3,u_2,u_1,u_0 على محور الفواصل دون حسابها .

ضع تخمينا حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n)

2 – نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

أ – برهن أن متتالية (v_n) هندسية

ب - أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n

جـ - أحسب بدلالة n المجموع :

$$S_n=v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$$

د - أحسب بدلالة n الجداء :

$$P_n=v_0\times v_1\times v_2\times\cdots\times v_n$$

تمرين03:

1- f دالة عددية معرة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة :

$f(x)=\sqrt{3x+4}$

أ- ادرس تغيرات الدالة

ب- ارسم المنحنى C_f والمستقيم (d) ذو المعدلة $y=x$

2- (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$U_{n+1}=\sqrt{3U_n+4}$ و $U_0=0$

أ- مثل على محور الفواصل الأعداد: U_2,U_1,U_0

ببرهن بالتراجع أن : $U_n\le 4$

جـ- ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (U_n)

3- برهن أن : $4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$

4- برهن أن : $4-U_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

استنتج $\lim U_n$ لما $n\to+\infty$

تمرين04

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\frac{x}{\ln x}$

1- أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to 1^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة.

2- لتكن (u_n)المتتالية المعرفة بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n

أ) أرسم المنحنى (C) الممثل للدالة f والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ ، ثم أنشئ النقطتين M_1 و M_2 من المستقيم (D)اللتين فاصلتيهما u_1 و u_2 على الترتيب .

ب) اعط تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n) .

جـ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n\ge e$.

د) بين أنّ المتتالية (u_n) تتقارب نحو عدد حقيقي ℓ من المجال $[e;+\infty[$

3- نتذكر أنّ الدالة معرفة على المجال $]1;+\infty[$.

بدراسة نهاية المتتالية (u_n)، اثبت أنّ $f(\ell)=\ell$.

استنتج قيمة ℓ

تمرين 05

1- f دالة عددية معرة على المجال $[1,5]$ بالعبارة :

$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$

أ- ادرس تغيرات الدالة

ب- ارسم المنحنى C_f والمستقيم (d) ذو المعادلة $y=x$

2- (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$U_{n+1}=f(U_n) \quad \text{و} \quad U_0=5$$

أ- مثل على محور الفواصل الأعداد: U_2, U_1, U_0

ب- برهن بالتراجع أن : $U_n \geq \sqrt{5}$

جـ- ادرس اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

ماذا تستنتج بالنسبة الى تقارب (U_n)

4- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$(U_{n+1}-\sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)(U_n-\sqrt{5})$$

5- برهن بالتراجع أن : $(U_n-\sqrt{5}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (5-\sqrt{5})$

استنتج $\lim U_n$ لما $n \to +\infty$

تمرين06:

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $U_n=\frac{n^2}{2^n}$

1- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}$

أ- برهن أن $\lim V_n=\frac{1}{2}$ لما $n \to +\infty$

ب- برهن أن $V_n>\frac{1}{2}$

جـ- عين أصغر عدد طبيعي N حيث :

إذا كان $n \geq N$ فإن $V_n<\frac{3}{4}$

د- استنتج أنه : إذا كان $n \geq N$ فإن $U_{n+1}<\frac{3}{4}U_n$

2- من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 5 نضع :

$$S_n=U_5+U_6+\cdots+U_n$$

أ- برهن بالتراجع أنه :

إذا كان $n \geq 5$ فإن $U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5} \times U_5$

ب- برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 5

$$S_n \leq \left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}\right] \times U_5$$

جـ- استنتج أن : $S_n \leq 4 \times U_5$

د- برهن ان المتتالية (S_n) متزايدة . استنتج أنها متقاربة .

تمرين07:

1- برهن انه من اجل كل عدد حقيقي موجب x لدينا :

$$x-\frac{1}{2}x^2 \leq \ln(x+1) \leq x$$

2- (U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$U_{n+1}=U_n(1+\frac{1}{2^{n+1}}) \quad \text{و} \quad U_0=\frac{3}{2}$$

يرهن بالتراجع ان : $U_n>0$

3- يرهن بالتراجع ان:

$$\ln U_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

4- من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع:

$$S'_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{4^n} \quad \text{و} \quad S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

برهن أن : $S_n-\frac{1}{2}S'_n \leq \ln U_n \leq S_n$

5- أحسب بدلالة n كل من S_n و S'_n

استنتج $\lim S_n$ و $\lim S'_n$ لما $n \to +\infty$

6- ادرس اتجاه تغيرات (U_n)

استنتج انها متقاربة

عين $\lim U_n$ لما $n \to +\infty$

تمرين08

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $U_0=2$ و

$U_{n+1}=2aU_n+3$ حيث : $0<a<\frac{1}{2}$

1- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $V_n=U_n+\frac{3}{2a-1}$

برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

هل هي متقاربة ؟ علل اجابتك .

2- أكتب بدلالة a و n عبارة الحد العام V_n و U_n

3- أحسب بدلالة a $\lim U_n$ لما $n \to +\infty$

استنتج قيمة العدد a التي من اجلها تكون $\lim U_n=4$

4- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=V_0+V_1+\cdots\cdots+V_n$

ثم استنتج بدلالة n المجموع : $S_n=U_0+U_1+\cdots\cdots+U_n$

تمرين09:

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_1+2u_2+u_3=32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3=216 \end{cases}$$

1 – أحسب u_2 ثم أساسها q، استنتج u_1

2 - أكتب عبارة u_n بدلالة n

3 - أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2\cdots+u_n$

4- عين العدد الطبيعي n حيث : $S_n=728$:

5 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$\begin{cases} v_1 = 2 \;\; ; \; v_{n+1} = \dfrac{3}{2}v_n + u_n \\ w_n = \dfrac{v_n}{u_n} - \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

أ – برهن أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

ب - أكتب عبارة w_n بدلالة n ثم استنتج عبارة v_n

تمرين10:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0 = \frac{13}{4} \;\; ; \; u_{n+1} = 3 + \sqrt{u_n - 3}$$

برهن

1 نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 4$

2- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^{\,2} + 7u_n - 12}{\sqrt{u_n - 3} + u_n - 3}$$

استنتج أن (u_n) متزايدة تماما . هل هي متقاربة ؟

3 – (V_n) متتالية معرفة كما يلي $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ - برهن أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n

4 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$$p_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3)(u_2 - 3) \times \ldots \times (u_n - 3)$$

أكتب p_n بدلالة n ، ثم بين أن $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \dfrac{1}{16}$

تمرين11

نعتبر المتتاليتان (U_n) و (V_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 1 : U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3} \\ V_0 = 2 : V_{n+1} = \dfrac{U_n + 4V_n}{5} \end{cases}$$

1- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n = V_n - U_n$

أ- برهن أن (W_n) متتالية هندسية .

ب- عبر عن W_n بدلالة n

جـ- ادرس اتجاه تغيرات المتتاليتين (U_n) و (V_n)

د- بين أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان .

2- من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $t_n = 3U_n + 10V_n$

أ- أثبت أن (t_n) متتالية ثابتة ؛ عين قيمة هذا الثابت .

ب- عين علاقة بين U_n و W_n .

جـ- أحسب $\lim U_n$ و $\lim V_n$ لما $n \to +\infty$

تمرين12

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_{n+1} = u_n(u_n - 1) + 1 \;\;\; ; \;\; u_0 = 2$$

1 – لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (U_n)

أ- ادرس تغيرات الدالة f

ب – برهن أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x$

هو مماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;1)$

جـ - ارسم المنحنى C_f والمستقيم (d)

د - مثل على محور الفواصل الأعداد: U_0, U_1, U_2

2 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 1$

3 – أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة ، استنتج نهايتها

4 – نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$b_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n) \quad و \quad a_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_n - 1)$$

أثبت أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) متجاورتان

تمرين13

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $u_n = \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

1 – أثبت أن : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)}$ ، ثم استنتج أن : $u_n > 1$

2 – ادرس إتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

3- بين أنها متقاربة ، أحسب نهايتها

4 – ليكن الجداء p_n المعرف كما يلي : $p_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n$

برهن بالتراجع أنه من أجل $n \neq 0$ لدينا : $p_n = \dfrac{2n+2}{n+2}$

5 - نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = \ln u_n$

عبر بدلالة p_n عن S_n حيث : $S_n = v_1 + v_2 \cdots + v_n$

ثم أحسب نهاية S_n لما n يؤول إلى $+\infty$

تمرين14:

α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما يحققان :

$\alpha(\alpha^2 - 19) = 35\beta$ حيث $\alpha > \beta$

عين α و β

(U_n) متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية ، حدها الأول U_0 و أساسها q حيث $U_0 < q$ معرفة كما يلي :

$$35U_0^{\,2} + 19U_1 - U_0 q^3 = 0$$

أ- عين U_0 و q

ب- أحسب المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

جـ- عين قيمة العدد الطبيعي n حيث : $S_n \equiv 0[30]$

تمرين 15

1- U_0 و r عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما . (U_n) متتالية حسابية تحقق : $U_0^{\,2} = U_{10} - U_1$

عين U_0 و r .

2- علما أن $U_0 > r$ أحسب بدلالة n. المجموع :

$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

3- أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = U_0 \times U_1 \times \cdots \times U_n$

عين قيمة العدد الطبيعي k حيث يكون : $2P_k = 23!$

4- ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^n على5

5- استنتج قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون : $2S_n \equiv 3^k\ [5]$

تمرين 16

(U_n) متتالية حسابية متزايدة حدودها أعداد طبيعية نضع:

$\mu = PPCM(U_1, U_3)$ و $d = PGCD(U_1, U_3)$

1- عين U_3, U_2, U_1 علما أن : $\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 = 45 \\ d + \mu = 42 \end{cases}$

2- أحسب المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

3- عين العدد الطبيعي n حيث : $S_n = 117$

تمرين17

α و β عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما يحققان :

$\beta(\beta^3 - 1) = 28\alpha^2$. عين α و β .

e, d, c, b, a خمسة أعداد طبيعية غير معدومة تشكل حدود متتابعة من متتالية هندسية أساسها q أولي مع a حيث :

$e - b = 28a^3$

عين اساسها ثم استنتج قيمة كل من e, d, c, b, a

Interessant

تمرين18

(U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$U_{n+1} = 5U_n - 6$ و $U_0 = 14$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$U_{n+2} \equiv U_n\ [4]$

استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا:

$U_{2k+1} \equiv 0[4]$ و $U_{2k} \equiv 2[4]$

2- برهن بالتراجع أن: $2U_n = 5^{n+2} + 3$

*- برهن أن : $2U_n \equiv 28[100]$

3- عين الرقمين الآخرين في الكتابة العشرية للعدد U_n وذلك حسب قيم n

4- أحسب $PPCM(U_{n+1}, U_n)$

PGCD

2

تمرين19

1- β, α عددان طبيعيان . برهن أن إذا كان α أولي مع β فإن α^2 أولي مع β

2- a و b عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما . عين العددين a و b إذا علمت أن : $a^2(a^2 - 23) = 700b$

3 - (u_n) متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية ، أساسها r أولي مع حدها الأول u_0 حيث :

$700r^3 - u_0{}^4 r^2 + 23u_1{}^2 = 0$

أ – أحسب u_0 و r

ب - من أجل كل عدد طبيعي n نضع :

$s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

جـ - عين قيم العدد الطبيعي n التيمن أجلها يكون s_n مضاعف للعدد 7

تمرين 20

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $u_0 = 3$ و

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 2n + \frac{5}{3}$$

1- أحسب u_3, u_2, u_1

2 - من أجل كل عدد طبيعي n نضع $v_n = u_n + \alpha n + \beta$

عين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية استنتج أساسها و حدها الأول

3 - أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n

4 - أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots\cdots + u_n$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية وادي الطاقة — السنة الدراسية: 2014-2015

المدة: 3 ساعة — المستوى : 3 رياضيات

اختبار الثلاثي الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول:

حل في R^2 الجملة : $\begin{cases} x^2+(1-e^y)x+2e^y=0 \\ e^y-x+3=\dfrac{x^2+x}{x-1} \end{cases}$

التمرين الثاني:

f دالة معرفة على R بالعبارة: $\begin{cases} f(x)=xe^{1-|x|} & ; x<1 \\ f(x)=\sqrt{x}\ln(ex) & ; x\geq 1 \end{cases}$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{I},\vec{J})$

1) أ) بين ان f مستمرة على R و فسر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ) تحقق انه انه من اجل كل $]0;1[$ لدينا : $\dfrac{xe^{1-x}-1}{x-1}=1-x\left(\dfrac{e^{1-x}-1}{1-x}\right)$

ب) بين ان $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{3}{2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=0$. ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) أ) بين ان f قابلة للاشتقاق عند 0 .

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

ج) حدد إشارة $[f(x)-ex]$ من اجل كل x من $]-1;1[$. ماذا تستنتج.

4) أ) احسب $f'(x)$ على كل المجالات : $]1;+\infty[$, $]0;1[$, $]-\infty;0[$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f .

5) بين ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها سالبة تماما يطلب تعيين احداثييها.

6) F دالة معرفة على $[1;+\infty[$ ب : $F(x)=\dfrac{2}{9}x\sqrt{x}(1+3\ln x)$

7) بين انه من اجل كل x من $[1;+\infty[$: $F'(x)=f(x)$

التمرين الثالث:

f دالة معرفة على I بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||		||	$-$	0	$+$	
$f(x)$			$-\sqrt{3}+\ln(2-\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{I},\vec{J})$ حيث: $\|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = 2$

1)علما ان f دالة فردية

ا) عين إشارة $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير f على I.

ب) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$. ثم بين $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

ج) اتمم جدول تغيرات الدالة f السابق.

2)نقبل ان (D) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل ل (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$.

- ارسم (D) و (C_f) . ناخذ $\sqrt{3} \approx 1,7$ و $f\left(\sqrt{3}\right) \approx 3$.

3) اذا كانت عبارة f من الشكل $f(x) = ax + b + \ln\left(c + \dfrac{2}{x-1}\right)$

-باستعمال نتائج الجدول أعلاه بين ان $a = 1$ و $b = 0$ و $c = 1$.

4) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $x - \dfrac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0$.

5) g دالة معرفة على $]1;+\infty[$ ب $g(x) = \ln\left(f(x)\right)$. استنتج جدول تغيرات الدالة g.

$M(\sqrt{3}; f(\sqrt{3}))$

$M'(-\sqrt{3}; -f(\sqrt{3}))$

وفقكم الله "أستاذ المادة: عيساوي"

التمرين الثالث : (3 نقطة)

I/ الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(2,-3,-1)$ ، $B(1,0,2)$ و $C(0,1,3)$.

1. أ) بين أن النقط A, B و C تعين مستوى

ب) عين معادلة ديكارتية للمستوى (P) الذي يشمل النقط A, B, C

2. من اجل كل عدد حقيقي α من المجال $]-\pi,\pi[$ نعتبر المجموعة (S_α) مجموعة النقط M التي احداثياتها (x,y,z)

تحقق المعادلة : $x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha+2y\sin\alpha+2z=0$

أ) بين ان $(S\alpha)$ سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω_α و نصف قطرها r

ب) عين حسب قيم α ، تقاطع سطح الكرة (S_α) و المستوى (P)

ج) في حالة (P) مماس لسطح الكرة (S_α) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل Ω_α و عمودي على المستوى (P)

ثم استنتج احداثيات نقطة تقاطع (P) و (S_α) .

التمرين الرابع : (6 نقطة)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(o;\vec{u},\vec{v}\right)$. (الوحدة $2cm$)

I. 1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2+4z+8=0$ ؛ تعطى الحلول على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

2. A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما : $a=2-2i$ ، $b=-a$

أ) عين النقطتين A و B على أن يتم الشكل في سياق التمرين .

ب) عين c لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج) نسمي D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$. بين أن لاحقة D هي : $d=2-6i$. علم النقطتين : C, D ، ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

3. α عدد حقيقي غير معدوم ، نسمي G_α مرجح الجملة المثقلة : $\{(A,1),(B,-1),(C,\alpha)\}$

أ) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{CG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$.

ب) نسمي مجموعة النقط G_α لما يمسح α المجموعة R^* و أنشئ هذه المجموعة . ما هي قيمة α لكي تنطبق G_α على D .

4) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=4$

II/ m عدد حقيقي .نعتبر التحويل النقطي T_m للمستوي في نفسه الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة z بالنقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z'=(m+i)z+m-1-i$.

أ/ 1. هل يمكن إختيار قيمة لـ m بحيث يكون T_m إنسحاب .

2. عين العدد الحقيقي m بحيث يكون T_m دوران يطلب تعيين مركزه و زاويته .

ب/ في كل ما يلي نضع $m=1$

1. أ/ عين لاحقة النقطة الصامدة ω بالتحويل T_1 .

ب/ من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1 أحسب $\frac{Z'-1}{Z-1}$ ثم أعط تفسيرا هندسيا لطويلة و عمدة العدد $\frac{Z'-1}{Z-1}$.

- أثبت أن T_1 تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة .

جـ/ أثبت أنه من أجل كل عدد مركب Z : $Z'-Z=i(Z-1)$.

- إستنتج أنه إذا كانت M تختلف عن ω فإن المثلث $\omega MM'$ قائم في M و متساوي الساقين .

2. نعرف في المستوي متتالية النقط (M_n) كما يلي : $\begin{cases} M_0=O \\ M_1=T_1(M_0) \end{cases}$

و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $M_n=T_1(M_{n-1})$

أ/ عين في المستوي النقط : M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 .

ب/ من أجل كل عدد طبيعي n نضع $U_n=\omega M_n$. بين أن المتتالية (U_n) متتالية هندسية . هل هي متقاربة ؟

بالتوفيق .

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$

لتكن النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=1-i$ و $z_B=-2-4i$

1) - عين زاوية ونسبة التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول B الى $C(2;-2)$.

- استنتج الشكل الاسي للعدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

2) ليكن s التحويل النقطي في المستوي الذي بكل نقطة M لاحقتها z يرفق النقطة M' لاحقتها z'

حيث $z'=\frac{1}{3}iz+\frac{2}{3}-\frac{4}{3}i$

أ) عين صورة النقطة A بالتحويل s , ثم اعط الطبيعة والعناصر المميزة له .

نسمي B_1 لاحقتها z_1 صورة B بالتحويل s ومن اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم , B_{n+1} لاحقتها z_{n+1}

هي صورة B_n لاحقتها z_n بالتحويل s .

و نعتبر العدد المركب α_n المعرف ب : $\alpha_n=\dfrac{z_n-z_A}{z_B-z_A}$ ونعرف من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) بالشكل: $u_n=|\alpha_n|$ و $v_n=\arg(\alpha_n)$.

ب) اكتب الطول AB_{n+1} بدلالة الطول AB_n

ج) ما طبيعة كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟ اكتب كل من u_n و v_n بدلالة n

د) احسب نهاية (u_n)

ه) ابتداءا من اية مرتبة n , النقطة B_n تنتمي الى القرص الذي مركزه A ونصف قطره 10^{-2}؟

و) عين مجموعة الاعداد الطبيعية n بحيث تكون النقط A , B_1 , B_n في استقامية .

by

Arslan Gauss

Recullier par : Ilyèss TROUDI.