B I R 1 A 0 3 B A C 2 0 1 4

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2014

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط: $A\left(2;1;-1\right)$، $B\left(-1;2;4\right)$، $C\left(0;-2;3\right)$ و $D\left(1;1;-2\right)$ والمستوي (P) المعرف بالمعادلة الديكارتية: $2x-y+2z+1=0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1) النقط A، B و C تعين مستويا.
2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)
3) $x-2y-z-1=0$ هي معادلة للمستوي (ACD)
4) $\begin{cases}x=2t\\ y=-2+3t\\ z=3-4t\end{cases}$ ؛ $t\in\mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AC)
5) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) تساوي $\frac{3}{2}$
6) النقطة $E\left(-2;-1;1\right)$ هي المسقط العمودي للنقطة C على (P)
7) سطح الكرة ذات المركز D و نصف القطر $\frac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$

2) A، B، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لاحقاتها على الترتيب:
$z_A=1+2i$ ، $z_B=1+\sqrt{3}+i$ ، $z_C=1-\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$

أ) بين أن: $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC)

ب) تحقق أن: $\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B-z_D}{2}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

3) أ) بين أن: $\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$

استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاويته.

ب) بين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

ج) استنتج إنشاء للرباعي $ABCD$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I) نعتبر المعادلة (E): $2013x - 1962y = 54$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) احسب $PGCD(2013,1962)$

ب) استنتج أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا .

ج) بيّن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$

د) استنتج حلاً خاصا (x_0,y_0) حيث $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E)

2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث (x,y) حل للمعادلة (E)

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d؟

ب) عيّن قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a,b) = 18$

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1) ادرس تغيرات الدالة g

2) بيّن أنّ للمعادلة: $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث $-1{,}2 < \alpha < -1{,}1$ و $1{,}8 < \beta < 1{,}9$

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا .

2) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$ واستنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$

4) احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f)

5) λ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1

أ) احسب بدلالة λ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^{\lambda} [f(x) - 1]\, dx$

ب) احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$

الموضـــوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب: $a=-2+6i$ و $b=-1+2i$

1) اكتب العدد المركب $1+i$ على شكل أسي .

2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$

أ) D النقطة ذات اللاحقة d حيث $d=2i$، جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S . ماذا تستنتج؟

ب) بيّن أن: $z'-d=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$ واستنتج طبيعة وعناصر التحويل S

3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x+5y=11$

أ) تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

ب) M'_0 صورة M_0 بالتحويل S. بيّن أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان.

4) x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$. عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين، حيث M' هي صورة M بالتحويل S

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x^2}{x+4}$. (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ كما هو مبين في الشكل أدناه.

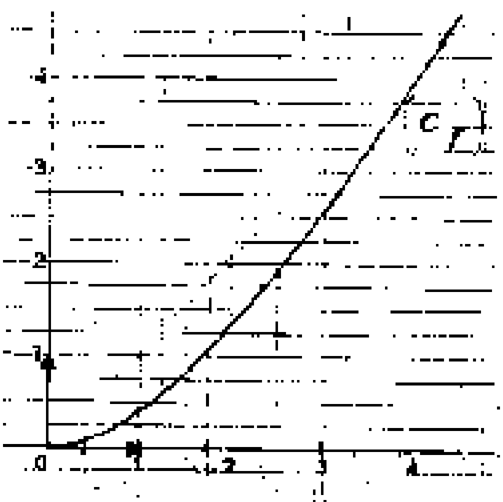
1) بيّن أن الدالة f متزايدة تماما.

2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $U_0=3$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1}=f(U_n)$

(Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$

أ) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثّل، على حامل محور الفواصل، الحدود: U_0، U_1، U_2، U_3 و U_4 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.



3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le U_n\le 3$

ب) بيّن أن المتتالية (U_n) متناقصة.

ج) استنتج أن (U_n) متقاربة.

4) أ) ادرس إشارة العدد $7U_{n+1}-6U_n$ واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le U_{n+1}\le\frac{6}{7}U_n$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le U_n\le 3\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

للفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A\,(1;1;3)$ و $\vec{u}\,(1;2;-2)$ شعاع توجيه له . (Δ') المستقيم المعرف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1) جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ')

2) بيّن أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') و يوازي (Δ). بيّن أن معادلة المستوي (P) هي: $2x+y+2z-3=0$

4) $M(1+t;1+2t;3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$. احسب d المسافة بين M والمستوي (P)

5) أ) عيّن إحداثيات النقطة A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A' ويوازي (Δ)

ب) بيّن أنّ (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1;3;-1)$

6) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t)=BM^2$

أ) بيّن أنّ: $f(t)=9t^2-24t+20$

ب) بيّن أنّ f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$

جـ) تحقق أن $d=\sqrt{f(t_0)}$

التمرين الرابع: (05.5 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

أ) ادرس تغيرات الدالة f

ب) اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e (حيث e أساس اللوغاريتم النيبيري).

جـ) عيّن فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0;e^2]$

2) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1-\ln x$

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) ادرس تغيرات الدالة g

ب) عيّن الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0;e^2]$

3) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$

أ) احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$

ب) احسب العدد: $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]\,dx$