أفريل 2015

ما يجب أن أعرفه حتى أقول : إني استوعبت هذا الدرس

1 – يجب أن أعرف كيفية إيجاد المعادلة التفاضلية التي تخضع لها الشحنة q عند تفريغ مكثفة في دارة R L C ومناقشة دورية وعدم دورية q (t) حسب قيم R .

2 – يجب أن أعرف أن الدارة LC مثالية ، أي أن الطاقة لا تضيع فيها ، وأعرف كيفية استنتاج العبارات اللحظية لكل من q ، u_c ، i في هذه الدارة

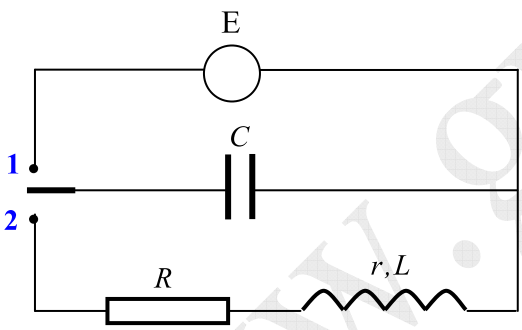
الدرس

1 - الدارة الكهربائية RLC

ماذا نريد في هذا الدرس ؟

- **نشحن مكثفة بالطريقة المعروفة في الوحدة الثالثة ، ثم نفرّغها في دارة تحتوي على ناقل أومي ووشيعة ونتابع تطور التوتر بين طرفي المكثفة وشحنتها والتيار المار في الدارة .**
- **نخزّن طاقة في وشيعة (طاقة مغناطيسية) ثم نفرّغها في دارة تحتوي على هذه الوشيعة ومكثفة وناقل أومي .**

حالة تفريغ المكثفة



تُشحن المكثفة عند وصل البادلة للنقطة (1)

تُفرّغ المكثفة في الناقل الأومي والوشيعة عند وصل البادلة للنقطة (2) عند اللحظة $t=0$.

الطاقة المخزّنة في المكثفة في هذه اللحظة هي : $E_C = \frac{1}{2}CE^2$

تُفرّغ هذه الطاقة على شكل :

- طاقة مغناطيسية في الوشيعة : $E_L = \frac{1}{2}LI^2$
- طاقة ضائعة بفعل جول في R و r

المعادلة التفاضلية لتغير التوتر بين طرفي المكثفة

حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا : $u_C + Ri + ri + L\frac{di}{dt} = 0$

$\frac{q}{C} + (R+r)\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$ ، لأن $i = \frac{dq}{dt}$

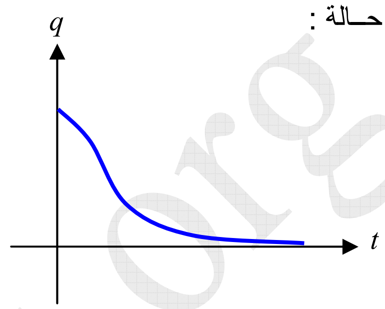
بوضع $(R+r) = R_0$ ، نكتب $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R_0}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0$ (1)

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها خارج البرنامج .

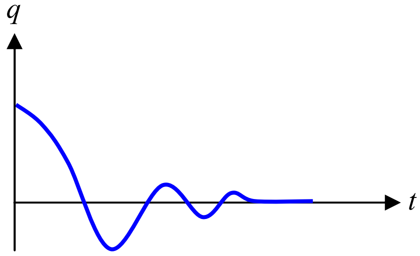
نسمّي المقاومة الحرجة للدارة R_C ، حيث $R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ (تُقبل بدون برهان)

مثلا $L = 10\ mH$ ، $C = 0{,}4\ \mu F$ ، نحسب المقاومة الحرجة نجدها $R_C = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2\sqrt{\dfrac{0{,}010}{0{,}4\times 10^{-6}}} = 316\Omega$

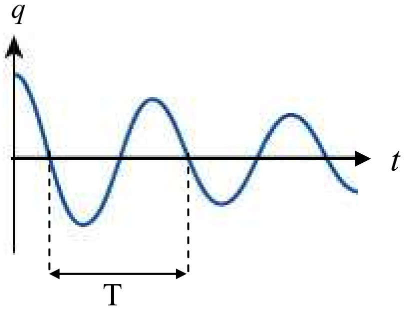
نعطي لمقاومة الدارة ثلاث قيم مختلفة : $R = 30\ \Omega$ ، $R = 150\ \Omega$ ، $R = 400\ \Omega$ ونمثل $q(t)$ من أجل كل حــالة :



تخامد سريع وعدم اهتزاز
$R = 400\ \Omega$



اهتزازات متخامدة لا دورية
$R = 150\ \Omega$



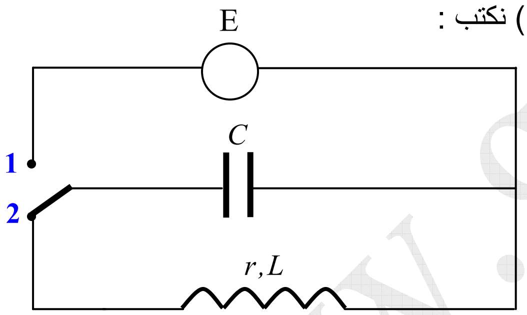
اهتزازات متخامدة شبه دورية
$R = 30\ \Omega$
شبه الدور : $T \approx T_0$

التخامد ناتج عن ضياع الطاقة في النواقل الأومية ومقاومة الوشيعة

2 - الاهتزازات الحرة غير المتخامدة (الدارة المثالية LC)

نستعمل وشيعة مقاومتها صغيرة جدا حتى يمكن إهمال الطاقة الضائعة بفعل جول في الدارة أمام الطاقة التي تخزّنها المكثفة .

2 – 1 - المعادلة التفاضلية أثناء التفريغ : بوضع $R = 0$ في المعادلة التفاضلية (1) نكتب :



$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (2)$$

هذه المعادلة التفاضلية حلها من الشكل : $q = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (3)

باشتقاق المعادلة (3) مرتين ومطابقتها مع المعادلة التفاضلية نجد :

النبض الذاتي : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ ، ولدينا $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ ، وبالتالي تكون عبارة الدور الذاتي : $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

التواتر الذاتي : $N_0 = \dfrac{1}{T_0}$ ، النبض الذاتي $\omega_0 = 2\pi N_0$

2 – 2 - المقادير اللحظية q ، i ، u_C

$$q = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$i = \frac{dq}{dt} = -\,Q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{Q_0}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = E\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

2 – 3 - الشروط الابتدائية

نعتبر $t=0$ لحظة وضع البادلة على الوضعية (2) ، أي لحظة بدأ التفريغ .

يكون في هذه اللحظة :

$$i=0$$
$$E_C=\frac{1}{2}CE^2=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$$
$$E_L=0$$

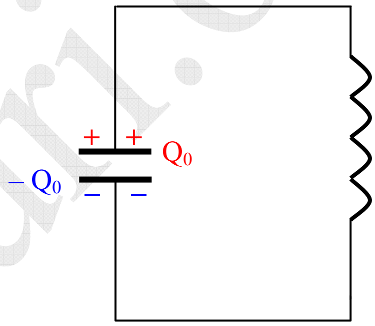
نحدد الصفحة في اللحظة $t=0$ (φ) كالتالي : عندما $t=0$ تكون الشحنة في المكثفة عظمى ، أي $q=Q_0$.

نعوض في المعادلة (3) : $Q_0=Q_0\cos\varphi$ ، وبالتالي $\varphi=0$

نعتبر لاحقا $\varphi=0$ حسب الشروط المُشار لها سابقا .

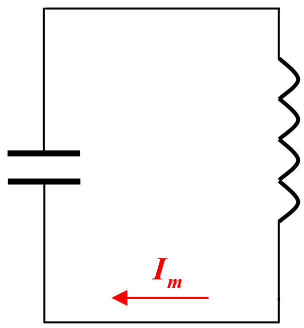
2 – 4 - ماذا يحدث لما نضع البادلة على الوضعية (2) ؟

$t=0$



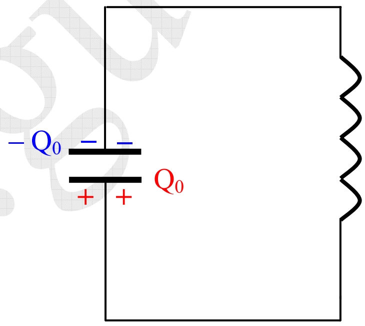
$q=Q_0$
$u_C=E$
$i=0$
$E_C=\frac{1}{2}CE^2$
$E_L=0$

$t=\frac{T_0}{4}$



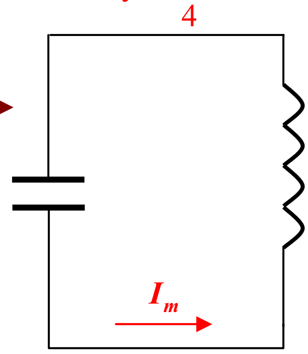
$q=0$
$u_C=0$
$i=I_m$
$E_C=0$
$E_L=\frac{1}{2}LI_m^2$

$t=\frac{T_0}{2}$



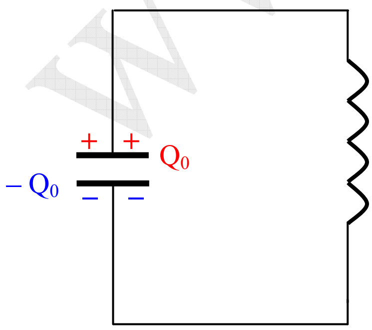
$|q|=Q_0$
$|u_C|=E$
$i=0$
$E_C=\frac{1}{2}CE^2$
$E_L=0$

$t=\frac{3T_0}{4}$



$q=0$
$u_C=0$
$i=I_m$
$E_C=0$
$E_L=\frac{1}{2}LI_m^2$

$t=T_0$



$q=Q_0$
$u_C=E$
$i=0$
$E_C=\frac{1}{2}CE^2$
$E_L=0$

تعقيبات

- تُفرّغ المكثفة بعد مدة قدرها $\frac{T_0}{4}$

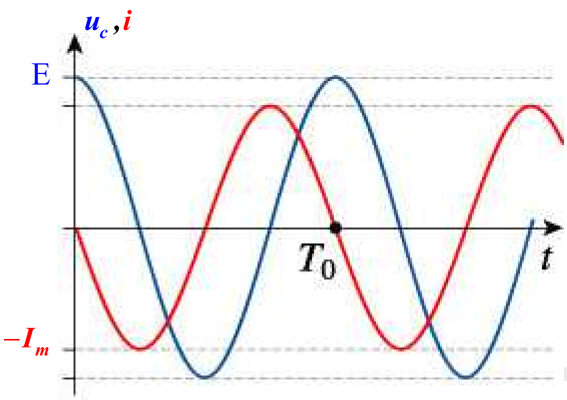
- دور التفريغ هو $T=\frac{T_0}{2}$ ، لأن الزمن اللازم لكي تعود شحنة المكثفة $|q|=Q_0$ هو نصف الدور الذاتي T_0 .

- يحدث التبادل في الطاقة بين الوشيعة والمكثفة بمرور الزمن دوريا ، ومن هذا جئنا بالاسم : **اهتزازات كهربائية**

2 – 5 - تمثيل التوتر بين طرفي المكثفة وشدة التيار الكهربائي في الدارة بدلالة الزمن

تمثيل شحنة المكثفة يماثل تمثيل التوتر بين طرفيها .

الفرق فقط في القيمة العظمى ، وهي Q_0 بدل E .



صورة مأخوذة من وثائق Hatier (بتصرّف)

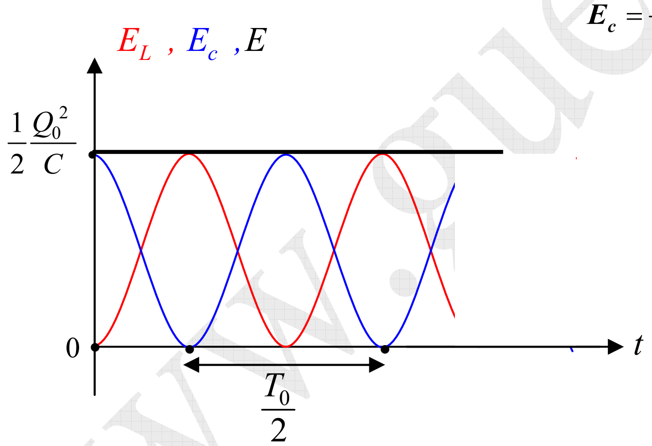
2 – 6 - الطاقة الكلية في الدارة

الطاقة المخزنة في المكثفة : $E_c=\frac{q^2}{2C}=\frac{1}{2C}Q_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$

تتحول هذه الطاقة للوشيعة دون ضياع لتصبح :

$$E_L=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}LQ_0^2\,\omega_0\sin^2(\omega_0 t+\varphi)$$

الطاقة الكلية هي : $E=E_c=E_L=\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}=\frac{1}{2}LI_{max}^2$



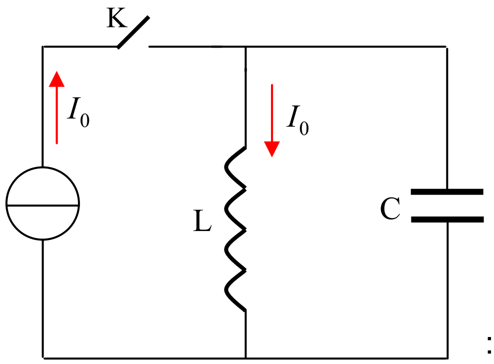
2 – 7 - نثبت أن دور التفريغ هو نصف الدور الذاتي

لدينا الطاقة المخزنة في المكثفة في اللحظة $t=0$ هي $E_C=\frac{1}{2}Cu_C^2=\frac{1}{2}CE^2\cos^2\frac{2\pi}{T_0}t$

لدينا : $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ ، وبالتالي $E_C=\frac{1}{4}CE^2+\frac{1}{4}CE^2\cos\frac{4\pi}{T_0}t$

$$E_C=\frac{1}{4}CE^2+\frac{1}{4}CE^2\cos\left(\frac{2\pi}{\frac{T_0}{2}}\right)t$$ ، ومنه $\boldsymbol{T=\frac{T_0}{2}}$

حالة تفريغ الوشيعة (شحن المكثفة)



نستعمل في هذه الحالة وشيعة مهملة المقاومة مربوطة مع مكثفة سعتها C .

نغذّي الدارة بمولد للتيار (I_0 ثابت) .

عندما نغلق القاطعة يسلك التيار أقصر طريق (أسهل طريق) ، وبالتالي يمر في الوشيعة .

(لا تظن أن هذه الدارة قصيرة .. لا .. لأن المولد للتيار وليس للتوتر)

إذن عند غلق القاطعة تكون شدّة التيار في الوشيعة $i = I_0$ وفرق الكمون بين طرفيها :

$u = ri + L\dfrac{di}{dt} = 0\times i + L\times 0 = 0$ ، وحسب قانون جمع التوترات فإن التوتر بين طرفي المكثفة $u_C = 0$.

أثناء مرور التيار في الوشيعة تتخزّن فيها طاقة مغناطيسية $E_L = \dfrac{1}{2}LI_0^2$

نفتح القاطعة في اللحظة $t = 0$ ، فتشرع الطاقة في التحوّل من الوشيعة إلى المكثفة .

حسب قانون جمع التوتّرات فإن : $L\dfrac{di}{dt} + u_C = 0$ ، أي $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q = 0$ ، وهذه معادلة تفاضلية حلها من الشكل :

$$(1) \qquad q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(2) \qquad u_C = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$(3) \qquad i = -Q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

الشروط الإبتدائية : عند اللحظة $t = 0$ يكون $u_C = 0$ $q = 0$ ، $i = I_0$

بهذه الشروط نحدد قيمة φ ، بحيث نعوّض في المعادلة (1) مثلا : $0 = Q_0 \cos\varphi$ ، ومنه نجد قيمتين ، هما

$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ، $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

من أجل اختيار القيمة الموافقة نعوّض في عبارة الشدة : $I_0 = -\,Q_0\omega_0 \sin\varphi$

يجب أن تكون $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ حتى تكون الشدة موجبة .