المجال 1 المضاعفات والقواسم

I – مهما يكن العددين a ، b الناطقين، حيث: $b\neq 0$.
b قاسم لـ a نقول أن $a/_b$ عدد ناطق.

نقول:
* b يقسم العدد a.
* a مضاعف للعدد b.
* a يقبل القسمة على b.
* مهما يكن العدد الناطق a حيث: $a\times 1=1$

II – القاسم المشترك الأكبر لعددين ناطقين غير معدومين، هو العدد الناطق الغير معدوم،(أكبر قاسم مشترك للعددين a،b في آن واحد). ونكتب $PGCD\ (a;b)$ أي $PGCD$ دائما يكون أكبر من أو يساوي الواحد.وإذا كان: $PGCD(a;b)=1$، نقول عن العددين $a;b$ عددان أوليان فيما بينهما ونستنتج أن $PGCD$ لعددين ناطقين a و b يقسم كذلك الفرق بينهما.

لحساب $PGCD$ لعددين ناطقين غير معدومين تستعمل خوارزمية إقليدس (القسمة الإقليدية)، أي نقسم العدد الأكبر على العدد الأصغر منه ثم العدد الأصغر الناتج على باقي القسمة الإقليدية وهكذا حتى نتحصل على الباقي صفر.

III – الكسور الغير قابلة للاختزال :

كسر غير قابل للاختزال لا يمكن اختزاله (لا يقبل) معنى ذلك أن $a/_b$ غير قابل للاختزال لأن a وb عددان أوليان فيما بينهما أي $PGCD(a;b)=1$.

– للحصول على كسر مختزل نقسم كلا من البسط والمقام على $PGCD$ لهما.

تمرين نموذجي

1) أنقل و أكمل الجدول الآتي بـ: (نعم) أو(لا)

	2	3	5
4410 يقبل القسمة على			
1575 يقبل القسمة على			

2) من خلال الجدول . هل العددان 4410 و 1575 أوليان فيما بينهما ؟ (برر جوابك)

3) احسب $PGCD(4410; 1575)$

الحل :

1)

	2	3	5
4410 يقبل القسمة على	نعم	نعم	نعم
1575 يقبل القسمة على	لا	نعم	نعم

2) العددان 4410 و 1575 ليس اوليان فيما بينهما (لانها يقبلان اكبر من قاسم واحد)

3)
$a = 4410 ; b = 1575 ; a - b = 2835$,
$PGCD(4410;1575) = PGCD(1575;2835)$

$a = 2835 ; b = 1575 ; a - b = 1260$,
$PGCD(2835;1575) = PGCD(1575;1260)$

$a = 1575 ; b = 1260 ; a - b = 315$,
$PGCD(1575;1260) = PGCD(1260;315)$

$a = 1260 ; b = 315 ; a - b = 945$,
$PGCD(1260;315) = PGCD(315;945)$

$a = 945 ; b = 315 ; a - b = 630$,
$PGCD(945;315) = PGCD(315;630)$

$a = 630 ; b = 315 ; a - b = 315$,
$PGCD(630;315) = PGCD(315;315)$

$PGCD(4410;1575) = 315.$

المجال 2 الجذور التربيعية

I – تعريف الجذر التربيعي لعدد ناطق موجب:
الجذر التربيعي لعدد ناطق موجب نكتب $\sqrt{a}$ حيث :

$$\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a=\left(\sqrt{a}\right)^2$$

قائمة المربعات التامة:

$\sqrt{0}=0\ ;\sqrt{1}=1;\ \sqrt{4}=2;\ \sqrt{9}=3;\ \sqrt{16}=4$

$\sqrt{25}=5;\sqrt{36}=6;\sqrt{49}=7;\sqrt{64}=8;\sqrt{100}=10$

$\sqrt{121}=11;\sqrt{144}=12;\sqrt{225}=15$

II – الحسابات:
* جذر لمربع: من أجل a أكبر من أو يساوي 0 فإن : $\sqrt{a}^2=a$
* جداء العددين: مهما يكن العددان الناطقان الموجبان a و b فإن: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$
* التبسيط : مثال : $\sqrt{300}=\sqrt{100\times 3}=\sqrt{100}\times\sqrt{3}=10\sqrt{3}$
* القسمة: مهما يكن العددان الموجبان a ، b حيث $b\neq 0$ فإن:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

III – بإستعمال طريقة التوزيع:
مثال 1 :

$$\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$$
$$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\approx 3,6\neq\sqrt{25}$$
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$$

أي : لا نستطيع أن نبسطها.

مثال 2: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$

مثال 3: $3\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\times\sqrt{2}+\sqrt{2\times 4}=3\times\sqrt{2}+2\times\sqrt{2}$
$=(3+2)\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

تمرين نموذجي

لتكن ثلاثة نقاط O ، U و I حيث الأطوال:
$OU=\sqrt{343}$ ، $OI=\sqrt{700}$ ، $UI=\sqrt{63}$
هل النقاط O ، U و I على استقامة واحدة ؟ برر.

الحل :

حتى تكون على استقامة واحدة: $UI+OU=OI$
ومنه $\sqrt{343}+\sqrt{63}=\sqrt{700}$ أي على استقامة واحدة.

المجال 4 الجداءات الشهيرة

I) مربع مجموع عددين، مربع فرق عددين، الفرق بين مربعين.
مربع مجموع: مهما تكن a و b فإن:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

مربع العدد الأول — ضعف جداءهما — مربع العدد الثاني

II) مربع فرق عددين: مهما يكن a، b فإن:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

III– فرق بين مربعين: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

IV– التحليل (كتابة العبارة على شكل جداء)

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2=(b-a)^2$$

باستعمال العامل المشترك : مهما تكن a، b وc

$$a\times b+a\times c=a\times(b+c)$$

عامل مشترك

تمرين نموذجي

لتكن العبارة الجبرية الآتية :
$E=(3x+5)(2x-1)+9x^2-25$

1. انشر وبسط العبارة E ؟
2. حلل العبارة $9x^2-25$ ثم استنتج تحليلا للعبارة E؟
3. حل المعادلة : $(3x+5)(5x-6)=0$

الحل :

$E=(3x+5)(2x-1)+9x^2-25$

1. انشر وبسط العبارة E

$E=(3x+5)(2x-1)+9x^2-25$
$=6x^2-3x+10x-5+9x^2-25$
$=15x^2+7x-30$

2. تحليل العبارة

$9x^2-25=(3x)^2-5^2=(3x-5)(3x+5)$

المجال 3

نظرية طاليس

I- تذكرة: في مثلث:

ABC مثلث كيفي، M من الضلع $[AB]$، N من الضلع $[AC]$.

حيث: $(MN)//(BC)$.

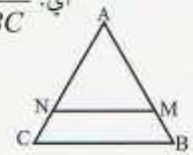
النتيجة: أضلاع مثلث AMN متناسبة مع أضلاع المثلث ABC:

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$

المعطيات النهائية:

إذا وجد:

* A,M,B في استقامية أي: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

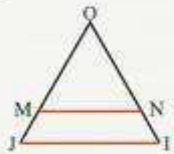


* A,N,C في استقامية

مثال: إذا وجدت النقط O,M,J في استقامية وO,N,I في استقامية كذلك وبنفس الترتيب.

ولدينا: $\frac{OM}{OJ}=\frac{ON}{OI}$

أي حسب النظرية العكسية لطاليس نستنتج $(MN)//(IJ)$.



المجال 5

النسب المثلثية

I- هناك ثلاثة علاقات مثلثية أساسية مهما كانت الزاوية α الحادة.

$$\cos\alpha=\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}}$$

$$\sin\alpha=\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}}\ ;\ \tan\alpha=\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول المجاور}}$$

II- العلاقة بين النسب المثلثية

مهما تكن الزاوية α الحادة:

$$(\cos\alpha)^2+(\sin\alpha)^2=1$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

وكذلك: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

حالات خاصة:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير موجود

تمرين نموذجي 1

1) أنشئ مثلثا حيث $IJ = 4,8\ cm\ ;\ JK = 8\ cm$

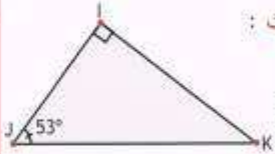
$KI = 6,4\ cm$.

2) برهن أنّ المثلث IJK قائم.

3) احسب قيس الزاوية $\widehat{IJK}$ بالتدوير إلى الدرجة.

الحل:

1) إنشاء مثلث IJK حيث:



$IJ = 4,8\ cm$

$JK = 8\ cm$;

و $KI = 6,4\ cm$

2) برهان أنّ المثلث IJK قائم:

$KI^2 = 6,4^2 = 40;96\ ;\ JK^2 = 8^2 = 64$

$IJ^2 = 4,8^2 = 23,04$;

ومنه: $64 = 40,96 + 23,03$

أي: $JK^2 = IJ^2 + IK^2$

فحسب نظرية فيثاغورث، المثلث IJK قائم في I.

3) حساب قيس الزاوية $\widehat{IJK}$ بالتدوير إلى الدرجة.

بفرض α قيس الزاوية $\widehat{IJK}$

فإنّ: $\sin\alpha=\frac{IK}{JK}=\frac{6.4}{8}=0.8$

لدينا: $\sin 53° \approx 0,798\ ;\ \sin 54° \approx 0,809$.

فقيس $\widehat{IJK}$ هو حوالي $53°$. أو باستعمال الآلة.

تمرين نموذجي 2

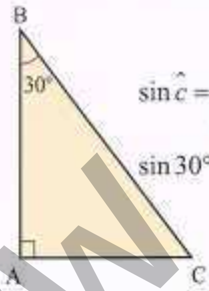
مثلث قائم في A حيث $AB = 3\ cm$ و $\hat{ACB} = 30°$

1/ أحسب BC

2/ بيّن أنّ $AC = 3\sqrt{3}$

3/ أحسب $\cos\hat{ABC}$ و $\sin\hat{ACB}$. ماذا تلاحظ؟

الحل:



$$\sin\hat{c}=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{BC}$$

$$\sin 30°=\frac{1}{2}\ ،\ \frac{1}{2}=\frac{3}{BC}\ ،\ BC=6$$

باستعمال فيثاغورث نجد: $AC=3\sqrt{3}$

$$\cos\widehat{ABC}=\frac{1}{2}$$

$$\sin\widehat{ACB}=\frac{1}{2}\ ،\ \cos\widehat{ABC}=\sin\widehat{ACB}$$

المجال 8

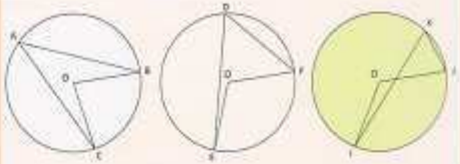
الزوايا الموجودة داخل دائرة

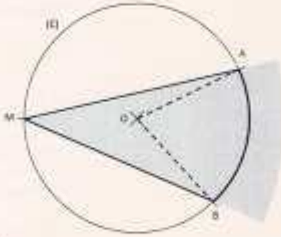
I- إذا وقع رأس زاوية على محيط الدائرة نسميها زاوية محيطية وتحصر قوس معطى.

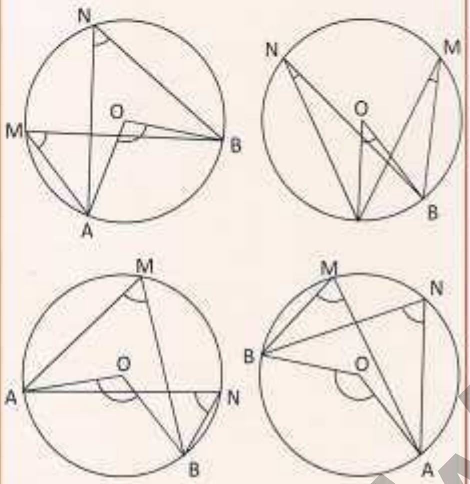
II- إذا وقع رأس زاوية على مركزها نسميها زاوية مركزية، وتحصر قوس معطى.

خاصية ❶: زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس متساويتان.

خاصية ❷: زاويتان أحدهما محيطية والأخرى مركزية تحصران نفس القوس (نقول أن المحيطية نصف المركزية).







الاعداد الطبيعية والاعداد الناطق

- العددان الأوليان فيما بينهما هما العددان قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 أي PGCD = 1 .
- الكسر الغير قابل للاختزال هو الكسر بسطه ومقامه أوليان فيما بينهما .
- لإيجاد القاسم المشترك الأكبر نتبع أحد الطرق التالية:
  1. نبحث عن جميع القواسم المشتركة ونأخذ أكبرها .
  2. عملية الطرح المتتالية .
  3. القسمة الإقليدية .

الحساب على الجذور

- حل المعادلة $x^2 = b$ حيث b عدد طبيعي :

1. إذا كان $b \rangle 0$ فإن للمعادلة $x^2 = b$ حلين مختلفين هما : $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$.
2. اذا كان $b = 0$ فإن للمعادلة $x^2 = b$ حلا واحدا هو : 0 .
3. اذا كان $b \langle 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$ ليس لها حل .

خـــــــــــواص :

- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$.
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.
- $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$.

مـــــلاحظات :

- $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.
- $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.
- لجعل مقام النسبة $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا نضرب كلا من البسط المقام في المرافق أي: نضرب a و $\sqrt{b}$ في العدد $\sqrt{b}$

الحساب الحرفي

- $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
- $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

المعادلات من الدرجة الاولى بمجهول واحد

- $ax + b = 0$ معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد .
- حل المعادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هو إيجاد مجموعة حلولها أي الأعداد التي تحقق المساواة.
- لحل المسألة يجب :
  1. قراءة نص المسألة وفهمها وتحديد المعطيات .
  2. اختيار المجهول .
  3. ترجمة المعطيات وكتابتها في صيغة المعادلة .
  4. القيام بحل المعادلة .

المتراجحات

- كل عبارة من الشكل: $ax + b \langle 0$ ، $ax + b \rangle 0$ ، $ax + b \leq 0$ ، $ax + b \geq 0$ تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد.

- حل المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجهول حتى تكون المتباينة صحيحة

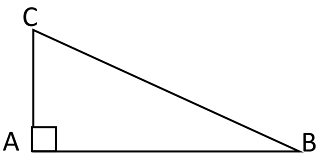
الدوال الخطية والتالفية

- كل دالة تكتب على شكل : $f(x) = ax$ تسمى دالة خطية وتمثيلها البياني عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ.
- كل دالة تكتب على شكل : $f(x) = ax + b$ تسمى دالة تألفية وتمثيلها البياني عبارة عن خط مستقيم لا يمر بالمبدأ.
- النسب المئوية :
- حساب $P\%$ معناه : $\dfrac{P}{100}$.
- زيادة x بـــ $P\%$ معناه : $x.\left(1 + \dfrac{P}{100}\right)$.
- انخفاض x بـــ $P\%$ معناه : $x.\left(1 - \dfrac{P}{100}\right)$.

جملة معادلتين

- جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y هي جملة من الشكل: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
- حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y هو إيجاد الثنائية (x, y) التي تحقق المعادلتين في آن واحد.
- لحل الجملة جبريا نتبع أحد الطرق:
  - طريقة التعويض.
  - طريقة الجمع.
- طريقة الجمع و التعويض.
- يمكن حل الجملة بيانيا وذلك بإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين (إحداثياتها).

حساب المثلثات



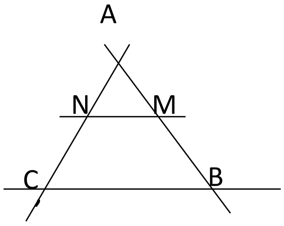
- جيب تمام وجيب وظل زاوية حادة :
- $\tan \hat{B} = \dfrac{AC}{AB}$. أي المقابل على المجاور.
- $\sin \hat{B} = \dfrac{CA}{BC}$. أي المقابل على الوتر.
- $\cos \hat{B} = \dfrac{BA}{BC}$. أي المجاور على الوتر.
- خواص :
  - $\cos x^2 + \sin x^2 = 1$.
  - $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
  - مثلث قائم في A فإن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (خاصية فيثاغورس).

خاصية طالس وعكسها

D, D' مستقيمان متقاطعان في النقطة

♦ إذا كان (BC) // (MN) فإن : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$

♦ إذا كان $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$ فإن (BC) // (MN) .



المحيط والمساحة

	المحيط (P)	المساحة (S)	ملاحظة
المربع	$P=4C$	$S=C\times C$	C طول ضلع المربع
المستطيل	$P=2(L+l)$	$S=L\times l$	L طول و l عرض المستطيل
المثلث	$P=B+H+l$	$S=\frac{B\times h}{2}$	B قاعدة و h ارتفاع المثلث
شبه المنحرف		$S=\frac{(B+b)\times h}{2}$	B القاعدة الكبرى b القاعدة الصغرى
القرص	$P=2\pi R$	$S=\pi R^2$	R نصف القطر

الحجم والمساحة الجانبية

	الحجم (V)	المساحة (S)	ملاحظة
المكعب	$V=C^3$	$S=6C^2$	C طول ضلع المكعب
متوازي المستطيلات	$V=L\times l\times h$	$S=P\times h$	P محيط القاعدة
الموشور القائم	$V=B\times h$	$S=P\times h$	B مساحة القاعدة
الكرة	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$	$S=\pi R^2$	
القرص	$P=2\pi R$	$S=\pi R^2$	R نصف القطر
الهرم	$V=\frac{1}{3}B\times h$		
المخروط	$V=\frac{1}{3}R^2\times h$		

المعالم

♦ في معلم، نعتبر النقطتين $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

❖ إحداثيات شعاع: $\vec{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

❖ إحداثيات منتصف قطعة : M منتصف القطعة $[AB]$ يعني : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.

❖ طول قطعة مستقيم : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

تنظيم معطيات

♦ التكرار المجمع المتزايد : في سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا، التكرار المجمع المتزايد لقيمة يحصل عليه بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم السابقة لها.

♦ التكرار المجمع المتناقص: في سلسلة إحصائية مرتبة ترتيبا تصاعديا، التكرار المجمع المتناقص لقيمة يحصل عليه بجمع تكرار هذه القيمة وتكرار القيم الأكبر منها.

♦ التكرار النسبي المجمع المتزايد والمتناقص:

❖ التكرار النسبي المجمع المتزايد = التكرار المجمع المتزايد على التكرار الكلي .

❖ التكرار النسبي المجمع المتناقص = التكرار المجمع المتناقص على التكرار الكلي .

♦ الوسط الحسابي لسلسلة : $\bar{x}$

❖ الوسط الحسابي لسلسلة إحصائية هو مجموع قيم هذه السلسلة على عدد قيمها.

❖ الوسط الحسابي المتوازن لسلسلة إحصائية هو مجموع جداءات قيمها بتكراراتها على مجموع معاملات التكرارات.

♦ الوسيط :

❖ إذا كان عدد قيم السلسلة فردي، الوسيط هو القيمة التي تتوسط السلسلة بعد ترتيبها.

❖ إذا كان عدد قيم السلسلة زوجي، الوسيط هو المتوسط الحسابي للقيمتين اللتان تقعان في الرتبتان : $\frac{N}{2}$ و $\frac{N}{2}+1$ حيث N عدد قيم السلسلة.

❖ إذا كانت السلسلة مجمعة في فئات نبحث عن الفئة التي تنتمي إليها القيمة الوسطية.

♦ المدى: مدى سلسلة إحصائية هو الفرق بين أكبر قيمة و أصغر قيمة لها .