الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2009

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

x عدد طبيعي أكبر من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل $A=\overline{5566}$

1) أ- انشر العبارة $(5x^2+6)(x+1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x و y إذا علمت أن $A=(5x^2+6)(2+2y)$.

ب- احسب x و y إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12 ، ثم اكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري.

2) أ- عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584.

ب- عين الأعداد الطبيعية a و b حيث $a>b$ التي تحقق:

$$\begin{cases} a+b=32 \\ a^2+b^2=584 \end{cases}$$

تمرين 2: (5 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات في آن واحد.

أ- احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب- احسب احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3) نسحب من الكيس في آن واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الإعادة (الإرجاع).

احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.

تمرين 3: (5 نقاط)

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(0,2,-1)$ والمستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=-2+3t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases} \quad \text{حيث} \quad t\in\mathbb{R}$$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

أثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي.

2) نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي المستقيم (D).

أ - بين أن الشعاع $\vec{n}(1,5,1)$ عمودي على المستوي (P).

ب - اكتب معادلة للمستوي (P).

ج - بين أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M.

د - عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz).

تمرين 4: (6 نقاط)

1) نعرف الدالة العددية f على المجال $[1,5]$ بالعبارة: $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)$.

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

الوحدة على المحورين $3\,cm$.

أ- ادرس تغيرات الدالة f

ب- أنشئ المنحنى البياني (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ في نفس المعلم

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $U_0=5$ و بالعبارة:

$$U_{n+1}=\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{5}{U_n}\right)$$

أ- أحسب U_1 ، U_2

ب- استعمل المنحنى (C) والمستقيم (Δ) لتمثيل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 على محور الفواصل.

3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n\geqslant\sqrt{5}$.

ب- بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n)؟

4) أ- برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإن: $\left(U_{n+1}-\sqrt{5}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(U_n-\sqrt{5}\right)$

ب- استنتج أن $\left(U_n-\sqrt{5}\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(U_0-\sqrt{5}\right)$. ما هي $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$ ؟

الموضوع الثاني

تمرين 1: (4 نقاط)

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن 1 العدد المركب $f(z)$ حيث: $f(z)=\frac{z-i}{z-1}$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(45+45i)f(z)=23+45i-2z$

2) لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

أ- عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عدداً حقيقياً سالباً تماماً.

ب- احسب العدد المركب z_0 بحيث: $|f(z_0)|=1$ و $\arg(f(z_0))=\frac{3\pi}{2}$.

3) في المستوي المركب نعتبر النقط A، B و C صور الأعداد المركبة 1 ، i و z_0 على الترتيب.

أ- ما نوع المثلث ABC ؟

ب- عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) و استنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

تمرين 2: (5 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0=0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=3U_n+2n-1$.

(V_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $V_n=U_n-\alpha n+\beta$ حيث α و β عددان حقيقيان

1) عيّن α و β بحيث تكون المتتالية (V_n) متتالية هندسية، يطلب حساب أساسها وحدّها الأوّل .

2) احسب كلا من V_n و U_n بدلالة n.

3) احسب المجموعين S و S' حيث: $S=V_0+V_1+V_2+...+V_n$ و $S'=U_0+U_1+U_2+...+U_n$.

4) أ- عيّن حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5 .

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها U_n مضاعفا للعدد 5 .

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، المستويين (P_1) و(P_2) حيث

$x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1)

و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$; $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2).

1) اكتب معادلة للمستوي (P_2).

2) عيّن شعاعاً ناظمياً $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعاً ناظمياً $\vec{n_2}$ للمستوي (P_2).

3) بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان.

4) أ- $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء، عيّن المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) ثمّ المسافة d_2 بين A و (P_2).

ب- استنتج المسافة d_3 بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2).

5) أ- عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) حيث λ عدد حقيقي.

ب- M نقطة كيفية من (Δ) ، احسب MA^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و (Δ) .

تمرين 4: (7 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$.

(C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة f .

2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$.

ب- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و (D).

3) أ- بيّن أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3<x_0<1,4$.

ب- عين معادلة (Δ) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب.

جـ- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم.

4) أوجد الدالة الأصلية للدالة f والتي تنعدم من أجل القيمة 0 للمتغير x .

5) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.

(C_g) منحنى الدالة g في المعلم السابق.

- بيّن كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x)=m^2$.