مراجعة عامة في الرياضيات تحضيرا لبكالوريا 2011 « السلسلة 5 »
إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (Bac Polynésie juin 2008)

1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2-6z+13=0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a=3-2i$ ، $b=3+2i$ و $c=4i$ على الترتيب .

أ- علم النقط A ، B و C .

ب- أثبت أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

جـ- عيّن لاحقة النقطة Ω ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$.

3) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=12$

4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . يرمز β إلى الجزء التخيلي للاحقة M . نسمي N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- بيّن أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$.

ب- كيف نختار β بحيث تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

تمرين 2 : (Bac Polynésie juin 2008)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(1;2;3)$ ، $B(0;1;4)$ ، $C(-1;-3;2)$ ، $D(4;-2;5)$ والشعاع $\vec{n}(2;-1;1)$.

1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

ب- بيّن أن $\vec{n}(2;-1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

جـ- عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

2) ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=2-2t \\ y=-1+t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4-t \end{cases}$

- بيّن أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC).

3) لتكن E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

- بيّن أن النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABC .

تمرين 3 : (بكالوريا الجزائر 2008 . الشعبة : تسيير واقتصاد)

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=\alpha \quad ; (\alpha\in\mathbb{R}) \\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n-\frac{8}{9} \quad ; \quad (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha=-\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) في كل ما يلي $\alpha=2$ ، ونعرّف المتتالية العددية (v_n) كما يلي : $v_n=u_n+\frac{8}{3}$

أ- احسب u_1 و u_2 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .

جـ- اكتب عبارة u_n بدلالة n . واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

تمرين 4 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية . الدورة العادية)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$

1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$.

ب- بيّن أن g متناقصة على $]0;2]$ ومتزايدة على $[2;+\infty[$.

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من المجال $]0;+\infty[$ (لاحظ أن $g(2)>0$) .

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$ ، (c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$. نذكر أن : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$)

ب- استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ وأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ (لاحظ أن : $f(x)=x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$) .

جـ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثم استنتج أن المنحني (c) يقبل ، بجوار $+\infty$ ، فرعا مكافئا اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

د- بيّن أن المنحني (c) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

3) أ- بيّن أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ وبيّن أن f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

جـ- بيّن أن $y=x$ هي معادلة لمماس المنحني (c) في النقطة التي فاصلتها 1 .

4) بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وأن $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$.

5) أنشئ (Δ) و (c) (نقبل أن $I(e;e-1)$ نقطة انعطاف للمنحني (c)) .

6) أ- بيّن أن $H:x\mapsto x\ln x-x$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$ ثم بيّن أن $\int_1^e \ln x\,dx=1$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بيّن أن : $\int_1^e (\ln x)^2\,dx=e-2$.

جـ- احسب مساحة حيّز المستوي المحصور بين المنحني (c) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.