# سلسلة سبل التألق في الرياضيات

**الوحدة الثانية:الدوال الآسية BAC 2017 إعداد الأستاذ محمد حاقة King**

## هدف الحصة : التمكن من حساب نهاية ومشتق أي دالة آسية

**التمرين الأول** : أحسب مشتق ونهايات الدالة $f$ في كل حالة مما يلي

| $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|
| | $(2x+1)e^{x}-1 \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $x-(x+1)e^{-x} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $e^{x}-ex-1 \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $\dfrac{2x+2}{e^{x}+2} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $(1-x)e^{-x}-x-2 \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $\dfrac{x}{x+e^{-x}} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $\dfrac{e^{x}+4x-1}{e^{x}+1} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $(2x-4)e^{\frac{1}{2}x}+2-x \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $-x+(x^{2}+3x+2)e^{-x} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{2}{e^{x}+1} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $\dfrac{(x+1)e^{x}+x+2}{e^{x}+1} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $\dfrac{4e^{x}+2}{e^{x}+1} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $\dfrac{x^{2}e^{x}}{e^{x}-x} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $1-2x-e^{2x-2} \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $xe^{2x+2}-x+1 \ ,D=\mathbb{R}$ |
| | $2x+3-(x+1)e^{x} \ ,D=\mathbb{R}$ |

| | |
|---|---|
| $(x-1)e^{\frac{1}{x}}\ ,D=\mathbb{R}$ | |
| $f(x)=\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}-x}\ ,D=\mathbb{R}$ | |
| $\dfrac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}\ ,D=\mathbb{R}-\{1\}$ | |
| $\dfrac{3xe^{x}-3x-4}{3(e^{x}-1)}\ ,D=\mathbb{R}^{*}$ | |
| $x-1+\dfrac{4}{e^{x}+1}\ ,D=\mathbb{R}$ | |
| $(-x-1)e^{-x}+1\ ,D=\mathbb{R}$ | |
| $x+\dfrac{2}{1+e^{x}}\ ,D=\mathbb{R}$ | |
| $x-\dfrac{1}{e^{x}-1}\ ,D=\mathbb{R}^{*}$ | |
| $xe^{\frac{1}{x}}\ ,D=\mathbb{R}^{*}$ | |
| $x.(1-e^{x})^{2}\ ,D=\mathbb{R}$ | |
| $(x-2)^{2}.e^{x}\ ,D=\mathbb{R}$ | |

## التمرين الثاني

نعتبر الدالتان $f$ و $g$ المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(1-x)e^{-x}-x-2$ ، $g(x)=x-e^{x}-2$

❖ بّين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$ فان : $f'(x)=e^{-x}g(x)$

## التمرين الثالث

نعتبر الدالتان $f$ و $g$ المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+(x^{2}+3x+2)e^{-x}$ ، $g(x)=1+(x^{2}+x-1)e^{-x}$

❖ بّين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$ فان : $f'(x)=-g(x)$

## التمرين الرابع

نعتبر الدالتان $f$ و $g$ المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{2x+2}-x+1$ ، $g(x)=1-2x-e^{2x-2}$

❖ بّين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}$ فان : $f'(x)=e^{2x+2}g(-x)$

# إنمـــا الأعمـــال العظيمـــة هـــي أعمـــال صغيـــرة كتب لهـــا الاستمرار

# ملخص تفصيلي ومبسط للدوال الآسية

➊**تعريف** : توجد دالة وحيدة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق : $f'(x) = f(x)$

و $f(0) = 1$ تسمى هذه الدالة بالدالة الآسية ذات الأساس $e$ ونرمز لها بالرمز: $f : x \to e^x$

حيث $e$ عدد حقيقي ثابت قيمته التقريبية $e \approx 2,71$

➋**خواص ونتائج** : من أجل كل عددين حقيقيين $x$ و $y$ و $n$ عدد صحيح كيفي

*/ $e^{x+y} = e^x \times e^y$    */ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$    */ $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

*/ $(e^x)^n = e^{nx}$    */ $e^0 = 1$    */ $(e^x)' = e^x$

*/ $e^x > 0$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ تعميم $e^\Delta > 0$ معناه ($e^\Delta \neq$ سالب)

*/ $e^x = e^y$ معناه $x = y$ */ $e^x < e^y$ معناه $x < y$ */ $e^x > e^y$ معناه $x > y$

*/ $e^x = a$ يكافئ $x = \ln a$ حيث $a$ عدد حقيقي موجب تماما

➌**النهايات الشهيرة**

| الحالة الخاصة | الحالة العامة |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ | $e^{+\infty} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ | $e^{-\infty} = 0$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$ |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} x.e^x = 0^-$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n.e^x = 0$ |
| $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ **وأيضا** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{ax}-1}{x} = a$ | $\lim\limits_{u\to0} \dfrac{e^u-1}{u} = 1$ |

➌**قانون الاشتقاق** : $f(x) = e^{g(x)}$

إذا كانت $g$ قابلة للاشتقاق على مجال $I$ فان؛ $f'(x) = (e^{g(x)})' = g'(x).e^{g(x)}$

*/ **ملاحظة**: تبقى قواعد الاشتقاق المعروفة سابقا صحيحة حسب شكل الدالة المعطاة

## ❹ دراسة إشارة بعض العبارات الآسية

*/ **أولا**: [ $e^{\Delta}\times$ (دالة) ] هنا الإشارة من إشارة الدالة

*/ **ثانيا**: في كلّ ما يلي ، ترمز $a$، $b$، $c$، $\alpha$، $\beta$ إلى أعداد حقيقيّة

*/ **ثالثا**: **طريقة لدراسة إشارة عبارة من الشكل** $a.e^{\alpha x+\beta}+b$ **حيث** $a.\alpha\neq 0$

- إذا كان $a$ و $b$ موجبان فان $a.e^{\alpha x+\beta}+b>0$
- إذا كان $a$ و $b$ سالبان فان $a.e^{\alpha x+\beta}+b<0$
- إذا كان $a$ و $b$ مختلفين في الإشارة أي $a.b<0$

فان للمعادلة حل $x_0$ يمكن إيجاده بكل بساطة ( نتمرن على ذلك خلال التمارين) والإشارة تستنتج في جدول بالكيفية التالية:

| | | |
|---|---|---|
| | $x_0$ | |
| $a.e^{\alpha x+\beta}+b$ | عكس إشارة $a.\alpha$ \| | حسب إشارة $a.\alpha$ |

*/ **رابعا** :**طريقة لدراسة إشارة عبارة من الشكل** $ae^{2x}+be^{x}+c$ **حيث** $a.b.c\neq 0$

لدراسة إشارة العبارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ على $\mathbb{R}$ ، نقوم بما يلي

**الخطوة الأولى**: نضع $e^{x}=X$ ، فتصبح العبارة من الشكل $a.X^{2}+b.X+c$

**الخطوة الثانية**: عيّن قيم $X$ التي تعدمها، إنْ قبلت حل طبعا

**الخطوة الثالثة**: نستنتج قيم $x$ وفي الأخير،نشكّل جدولا ندرس فيه إشارة العبارة،مستخدمين القواعد المعروفة لإشارة كثيرات الحدود من الدرجة الثانية.

*/ **ملاحظة**: للعبارة $ae^{2x}+be^{x}+c$ تحليل من الشكل $a(e^{x}-X_1)(e^{x}-X_2)$ حيث $X_1$ و $X_2$ حلي المعادلة $a.X^{2}+b.X+c$

# الجهد المتواصل وليس الذكاء أو القوة هو مفتاح إطلاق قدراتنا الكامنة