الدوال العددية

♦النهايات

❶ $a\times\infty=\infty \quad si\ a\neq 0$ ❷ $\infty\times\infty=\infty$

❸ $\frac{\infty}{a}=\infty$ ❹ $\frac{a}{0}=\infty \quad si \quad a\neq 0$ ❺ $\frac{a}{\infty}=0$

❻ $\infty\times\infty=\infty$ ❼ $\sqrt{+\infty}=+\infty$ ❽ $\frac{\infty}{0}=\infty$

❾ $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$ ليست حالة عدم التعيين.

إذا كانت النهاية من اليمين ومن اليسار غير متساويتين فإن النهاية المطلوبة غير موجودة

حالات عدم التعين أربعة و هي :

❶ $(+\infty-\infty)$ حالة الجمع ❷ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

❸ $\frac{0^{\pm}}{0^{\pm}}$ ❹ $0^{\pm}\times(\pm\infty)$

طرق التخلص من حالات عدم التعيين

❶ للتخلص من حالات عدم التعيين لما $x\to\pm\infty$

♦نستخدم نهاية الحد الأعلى درجة حالة كثيرات الحدود و نهاية الحد الأعلى درجة على الحد الأعلى درجة في المقام حالة الدالة الناطقة

♦نلجأ إلى إخراج عامل مشترك

♦نضرب في المرافق حالة الدوال الصماء مع عدم نسيان $\sqrt{x^2}=|x|$

للتخلص من حالات عدم التعيين لما $x\to a$

♦نستخدم التحليل و ذلك بالقسمة على $(x-a)$

♦نضرب في المرافق حالة الدوال الصماء

♦إذا علمنا أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة $x_0=\alpha$ فإننا نستنتج أن :

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)$$

♦مبرهنة الحصر: إذا كانت : $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ و كانت $\lim_{x\to a}h(x)=\ell$ و $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ فإن :

$$\lim_{x\to a}f(x)=\ell$$

♦مبرهنة الحد من الأسفل : إذا كانت $f(x)\geq g(x)$ و كانت $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$

فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$

♦ إذا كانت $f(x)\leq g(x)$ و كانت $\lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$

المستقيمات المقاربة

♦يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y=b$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) إذا كانت :

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b$ أو $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$

♦يكون المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=\alpha$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) إذا كانت :

$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ >}}|f(x)|=+\infty$ أو

$\lim_{\substack{x\to\alpha\\ <}}|f(x)|=+\infty$ أو $\lim_{x\to\alpha}|f(x)|=+\infty$

♦ لكي نبرهن أن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل معادلته : $y=ax+b$ يكفي أن نبرهن أن $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

أو $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

♦ إذا لاحظنا أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

أو $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ فإننا نستنتج أن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ عندما $x\to+\infty$

أو $x\to-\infty$

♦لكي نبرهن أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متقاربين يكفي أن نبرهن أن :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)-g(x)=0$ أو

$\lim_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=0$

♦لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم

المقارب المائل للدرس إشارة الفرق
$$\left[f(x)-(ax+b)\right]$$

الاستمرارية

♦ تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا كانت :
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

♦ تكون الدالة f مستمرة عند x_0 على اليمين إذا كانت : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x)=f(x_0)$

♦ تكون الدالة f مستمرة عند x_0 على اليسار إذا كانت : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x)=f(x_0)$

♦ تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا وفقط إذا كانت مستمرة على اليمين وعلى اليسار

♦ تكون الدالة f مستمرة على المجال I إذا كانت مستمرة عند كل قيمة منه

♦ إن الدالة $x\mapsto ax^n$ مستمرة على $\mathbb{R}$

♦ إن الدالة $x\mapsto |x|$ مستمرة على $\mathbb{R}$

♦ إن الدالة $x\mapsto \sin(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$

♦ إن الدالة $x\mapsto \cos(x)$ مستمرة على $\mathbb{R}$

♦ إن الدالة $x\mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $[0;+\infty[$

♦ إن الدالة $x\mapsto \frac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]-\infty;0[$ وعلى المجال $]0;+\infty[$

♦ إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال I فهذا يعني أنه يمكن رسم منحناها (C_f) دون رفع القلم

♦ صورة مجال وفق دالة مستمرة هو مجال

♦ صورة المجال $[a;b]$ وفق دالة مستمرة و متزايدة هو المجال $[f(a);f(b)]$

♦ صورة المجال $[a;b]$ وفق دالة مستمرة و متناقصة هو المجال $[f(b);f(a)]$

♦ إذا كانت الدالتين: f و g مستمرتين على المجال I فإن الدالة : $f+g$ مستمرة على المجال I و كذلك الدالة $f\times g$

♦ حتى تكون الدالة $\frac{g}{f}$ مستمرة على المجال I هو أن تكون هذه الدالة معرفة على هذا المجال وتكون f و g مستمرتين على المجال I

♦ مركب دالتين مستمرتين هي دالة مستمرة على كل مجال من مجالات تعريفها.

♦ كل دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$

♦ كل دالة ناطقة مستمرة على كل مجال من D_f

♦ مبرهنة القيم المتوسطة : إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال $[a;b]$ و كان k عدد حقيقي ثابت محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a;b]$ يحقق : $f(c)=k$ بمعنى أن المعادلة : $f(x)=k$ تقبل على الأقل حل c من المجال $[a;b]$

♦ إذا كانت الدالة f رتيبة تماما يكون الحل c وحيد

الاشتقاقية

♦ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 إذا كانت $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$

♦ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 إذا كانت $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

♦ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 على اليمين إذا كانت :
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ >}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_D$$

♦ تكون الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 على اليسار إذا كانت :
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell_G$$

♦ تكون الدالة f قابلة الاشتقاق من أجل x_0 إذا وفقط قبلت نفس العدد المشتق من اليمين و اليسار

♦ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 فإن منحناها البياني (C_f)يقبل مماسا عند نقطته ذات الفاصلة x_0 معامل توجيهه $f'(x_0)$ معادلته :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

x_0 تسمى فاصلة نقطة التماس

$f(x_0)$ هي ترتيبة نقطة التماس

$f'(x_0)$ هو معامل توجيه المماس (ميل الماس)

♦ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 على اليمين فإن منحناها البياني (C_f)يقبل نصف مماس على اليمين عند نقطته ذات الفاصلة x_0 معامل توجيهه ℓ_D معادلته :

$$y = \ell_D(x - x_0) + f(x_0) \ ; x \geq x_0$$

♦ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 على اليسار فإن منحناها البياني (C_f)يقبل نصف مماس على اليسار عند نقطته ذات الفاصلة x_0 معامل توجيهه ℓ_G معادلته

$$y = \ell_G(x - x_0) + f(x_0) \ ; x \leq x_0$$

♦ إذا كانت : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$

فإن (C_f)يقبل مماسا يوازي محور التراتيب عند نقطته ذات الفاصلة x_0 معادلته $x = x_0$

♦ إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0على اليمين و على اليسار بحيث $\ell_D \neq \ell_G$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند x_0

و (C_f)يقبل نصفي مماسين أحدهما على اليمين معامل توجيهه ℓ_Dو الآخر على اليسار معامل توجيهه ℓ_G .[أي $A\left(x_0 ; f(x_0)\right)$ نقطة زاوية]

♦مبرهنة : إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق من أجل x_0 فهي بالضرورة مستمرة من أجل x_0 و العكس ليس بالضرورة صحيح .

مثال : الدالة : $x \mapsto |x|$ و $x_0 = 0$

فهي مستمرة عند 0 و غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 0$

♦تكون الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل قيمة منه

♦ مركز التناظر : تكون النقطة $\omega\left(\alpha ; \beta\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) إذا تحقق مايلي :

❶ لكل x من D_f يكون $(2\alpha - x)$من D_f

❷ $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

♦ محور التناظر : يكون المستقيم $(\Delta): x = \alpha$

❶ لكل x من D_f يكون $(2\alpha - x)$من D_f

❷ $f(2\alpha - x) = f(x)$

♦جدول مشتقات الدوال المرجعية

الدالة	المشتقة	ملاحظات
y^n	$n y^{n-1} \times y'$	$n \in \mathbb{Q}^*$
$\sqrt{y}$	$\frac{1}{2\sqrt{y}} \times y'$	$y \in]0;+\infty[$
$\sin y$	$y' \times \cos y$	$y \in \mathbb{R}$
$\cos y$	$-y' \times \sin y$	$y \in \mathbb{R}$
$\tan y$	$\frac{1}{\cos^2 y} \times y'$	$\cos y \neq 0$
$\cot an\, y$	$\frac{-1}{\sin^2 y} \times y'$	$\sin y \neq 0$
e^y	$e^y \times y'$	$y \in \mathbb{R}$
$\ln y$	$\frac{y'}{y}$	$y > 0$
a^y	$a^y \times y' \ln a$	$y \in \mathbb{R}$
$\ln\lvert y\rvert$	$\frac{y'}{y}$	$y \in \mathbb{R}^*$

♦تسمى معادلة تفاضلية كل معادلة يكون المجهول فيها هو دالة و تحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة .مثل : $y' = 2x - 1$ ، $y' = 2y$

♦ تسمى حل معادلة تفاضلية على مجال I كل دالة معرفة على هذا المجال و تحقق طرفي هذه المعادلة

المعادلة	حلها العام
$y' = a y$	$y = k e^{ax} \ ; \ k \in \mathbb{R}$
$y' = a y + b$	$y = k e^{ax} - \frac{b}{a} \ ; \ a \neq 0$
$y'' = -\alpha^2 y$	$y = a \sin(\alpha x) + b \cos(\alpha x)$

♦ **الدالة الأسية**: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و التي تحقق

$$\begin{cases} f'(x)=f(x) & \forall x\in\mathbb{R}\\ f(0)=1\end{cases}$$ بالدالة الأسية النيبرية

و نرمز لها بالرمز exp و منه لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\exp(x)=e^x$

و لها الخواص التالية:

❶ الدالة الأسية هي دالة معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R} \quad (e^x)'=e^x$

❷ $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ❸ $e^y=e^x \Leftrightarrow y=x$

❹ $y>x \Leftrightarrow e^y>e^x$ ❺ $y<x \Leftrightarrow e^y<e^x$

❻ $e^{x+y}=e^x\times e^y$ ❼ $\left(e^x\right)^n=e^{nx}$

❽ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ ❾ $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$

❿ $e^y=x \Leftrightarrow y=\ln x$ ♠ $e^{\ln x}=x$

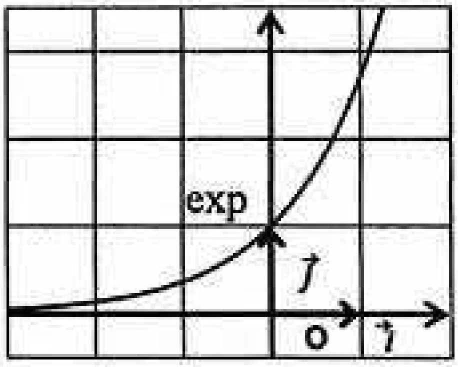
♣ $e\approx 2.718281828$

♦ النهايات المرجعية

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ ❷ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ ❸ $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ❺ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}=1$

❻ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ ❼ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$



x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
exp	$0 \nearrow +\infty$

♦ **الدالة اللوغارتمية**

إن الدالة اللوغارتمية هي الدالة العكسية للدالة exp

❶ الدالة الوغارتمية هي دالة معرفة و مستمرة و قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ و أن: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

و لها الخواص التالية ❷ $\ln(x\times y)=\ln x+\ln y$

❸ $\ln y=\ln x \Leftrightarrow y=x$

❹ $y>x \Leftrightarrow \ln y>\ln x$

❺ $\ln y=\ln x \Leftrightarrow y=x$ ❻ $\ln\left(x^n\right)=n\ln x$

❼ $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ ❽ $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

❾ $\ln x=a \Leftrightarrow x=e^a$ ❿ $\ln e^x=x$

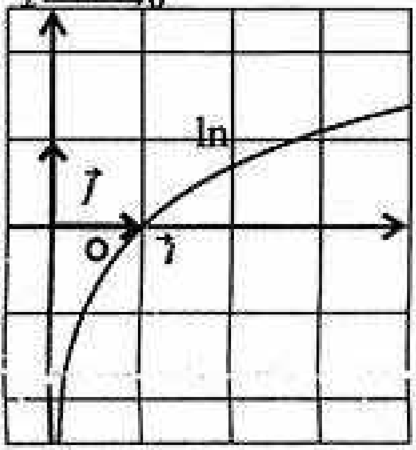
♦ النهايات المرجعية

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$ ❷ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} \ln x=-\infty$

❸ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x\ln x=0$ ❹ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}=0$

❺ $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ ❻ $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} x^n\ln x=0$

❼ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x}=0$



x	0 $\quad$ $+\infty$
ln	$\Vert$ $-\infty \nearrow +\infty$

♦ نقطة الانعطاف : $\left(x_0\,;f\left(x_0\right)\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى $\left(C_f\right)$ إذا تحقق مايلي:

❶ $f''\left(x_0\right)=0$ و❷ $f''(x)$ تغير إشارتها عند x_0

♦ نقطة الانعطاف هي نقطة يكون فيها المماس قاطعا المنحنى

♦ إذا كانت $f\left(x_0\right)$ قيمة حدية محلية للدالة f في المجال I و كانت قابلة للاشتقاق على المجال I فإن $f'\left(x_0\right)=0$ و العكس ليس بالضرورة صحيح

♦ إذا كانت $f'\left(x_0\right)=0$ و كانت $f'(x)$ تنعدم من أجل x_0 مغيرة إشارتها من $(+)$ إلى $(-)$ فإن $f\left(x_0\right)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f

♦ ❶ $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ ❷ $x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{p}$

♦ ❸ $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ ❹ $a^x=e^{x\ln a}$

ملخص الهندسة الفضائية

يكن $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ و $\vec{v}(\alpha';\beta';\gamma')$ شعاعين غير معدومين معًا من الفضاء المنسوب لمعلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ...

01 الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ معطى بـ: ❶ $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos(\vec{u};\vec{v})$

❷ $\vec{u}.\vec{v}=\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'$ ❸ $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$

02 لكي نبرهن أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين يكفي أن نبرهن أنه يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث: $\vec{v}=k\vec{u}$ بمعنى آخر نبين أن: $\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}$ بشرط أن يكون $\alpha\neq 0$ و $\beta\neq 0$ و $\gamma\neq 0$ ..

03 لكي نبرهن أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير متوازيين يكفي أن نبرهن أن: $\frac{\beta'}{\beta}\neq\frac{\alpha'}{\alpha}$ أو $\frac{\gamma'}{\gamma}\neq\frac{\alpha'}{\alpha}$ أو $\frac{\beta'}{\beta}\neq\frac{\gamma'}{\gamma}$

04 لكي نبرهن أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين يكفي أن نبرهن أن $\vec{u}.\vec{v}=0$ بمعنى آخر .... $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$

05 ... لكي نبرهن أن النقط: A , B , C في استقامية يكفي أن نبرهن أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متوازيين ..

06 طويلة الشعاع $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ هي: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$

07 المسافة بين $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$ هي: $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

08 احداثيات I منتصف القطعة $[AB]$ هي: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

أيار

09 المعادلات الوسيطة للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(x_0;y_0;z_0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ هي: ..

$$\begin{cases}x=\alpha t+x_0\\ y=\beta t+y_0\\ z=\gamma t+z_0\end{cases}$$

10 لكي نبرهن أن النقطة $M(a;b;c)$ تنتمي الى المستقيم (Δ) .... يكفي أن نبرهن أن الجملة المقابلة (I) لها حل وحيد t من $\mathbb{R}$.

$$(I)\begin{cases}a=\alpha t+x_0\\ b=\beta t+y_0\\ c=\gamma t+z_0\end{cases}$$

11 كل مستقيم في الفضاء له عدد غير منته من أشعة التوجيه .

12 كل شعاع غير معدوم يوازي شعاع التوجيه هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم .

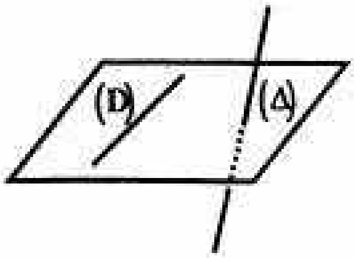
13 كل مستقيم في الفضاء له ثلاث معادلات وسيطية ذات وسيط واحد , و له معادلتين ديكارتيتين .

14 يتوازى مستقيمان في الفضاء إذا توازى شعاعي توجيههما و يتعامدان إذا تعامد شعاعي توجيههما

15 لكي نبرهن أن المستقيمين (D) و (Δ) متوازيين يكفي أن نبرهن أن $\vec{u}_{(\Delta)}\,/\!/\,\vec{u}_{(D)}$ ثم

نختار نقطة A من المستقيم (D) و نبرهن أنها لا تنتمي إلى المستقيم (Δ)

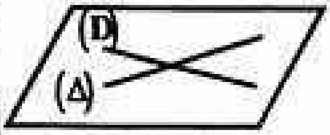
16 لكي نبرهن أن المستقيمين (D) و (Δ) منطبقين يكفي أن نبرهن أن $\vec{u}_{(\Delta)} // \vec{u}_{(D)}$ ثم نختار نقطة A من المستقيم (D) و نبرهن أنها تنتمي إلى المستقيم (Δ)



17 لكي نبرهن أن المستقيمين (D) و (Δ) اللذين تمثيلهما الوسيطي

$$(D)\left(x=\alpha t+a;y=\beta t+b;z=\gamma t+c\right)$$

و $(\Delta)\left(x=\alpha' k+a';y=\beta' k+b';z=\gamma' k+c'\right)$



متقاطعين يكفي أن نبرهن أن الجملة:

$\left(\alpha' k+a'=\alpha t+a;\beta' k+b'=\beta t+b;\gamma' k+c'=\gamma t+c\right)$ لها حل وحيد

18 لكي نبرهن أن المستقيمين (D) و (Δ) لا ينتميان إلى نفس المستوي يكفي أن نبرهن أن (D) و (Δ) غير متوازيين و غير متقاطعين.

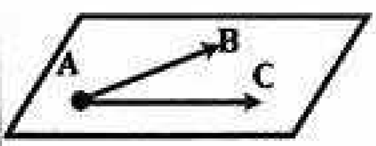
19 لكي نبرهن أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) يكفي أن نتحقق أن: $H \in (\Delta)$ و $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}_{(\Delta)}$

20 كل مستقيمين من الفضاء إما هما متوازيين وإما منطبقين و إما متقاطعين وإما ليسا من نفس المستوي

21 إذا كانت النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة $A\left(x_1;y_1;z_1\right)$ على المستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي $(\Delta)\left(x=\alpha t+a;y=\beta t+b;z=\gamma t+c\right)$ فإن: $H\left(\alpha t_0+a;\beta t_0+b;\gamma t_0+c\right)$

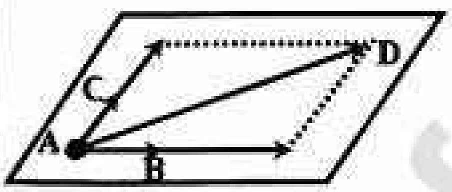
و نتعين قيمة t_0 بحل المعادلة $\overrightarrow{AH}.\vec{u}_{(\Delta)}=0$ ثم نعين إحداثيات H.

22 يتعين المستوي إما بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة وإما بمستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم وإما بمستقيمين متمايزين متقاطعين أو متوازيين



23 كل ثلاث نقط A، B و C ليست في استقامية تعين مستو وحيد يشملها

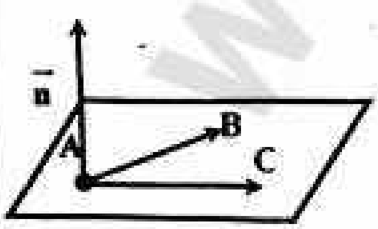
24 لكي نبرهن أن النقط A، B و C تعين مستوي يكفي أن نبرهن أنها ليست في استقامية.



25 لكي نبرهن أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس المستوي يكفي إيجاد عددين حقيقيين α و β بحيث يكون $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

26 لكي نبين أن النقط A، B و C تعين المستوي (p) المعطاة معادلة ديكارتية له يكفي التحقق من أن النقط A، B و C ليست في استقامية و كل واحدة منها تحقق معادلة هذا المستوي (p)

27 معادلة للمستوي (p) المار من النقطة $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$ و شعاع ناظمه $\vec{\eta}\left(a;b;c\right)$ هي $ax+by+cz+d=0$ حيث: $d=-\left(ax_0+by_0+cz_0\right)$ (لأن $A\in(p)$)



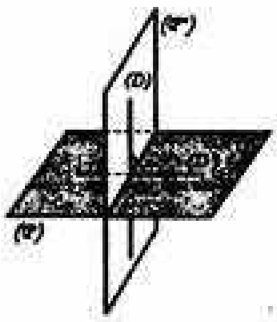
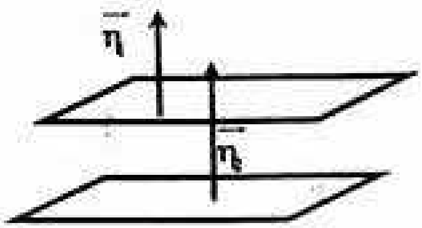
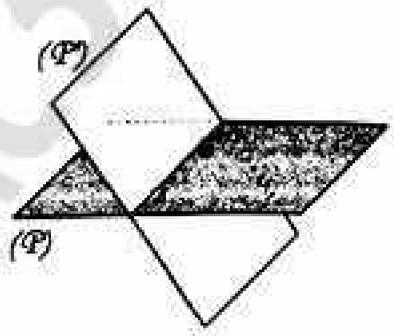
28 لكي نبرهن أن الشعاع $\vec{\eta}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) يكفي التحقق أن النقط A، B و C ليست في استقامية و نبين أن $\vec{\eta}$ عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

29 إنّ المستوي الذي معادلته $ax+by+cz+d=0$ له شعاع ناظمي من الشكل $\vec{\eta}\left(a\,;b\,;c\right)$

30 لكي نبرهن أن المستويين (p_1) و (p_2) متوازيين يكفي أن نبرهن أنّ $\vec{\eta_2}//\vec{\eta_1}$

31 لكي نبرهن أن المستويين (p_1) و (p_2) متعامدين يكفي أن نبرهن أنّ $\vec{\eta_2}\perp\vec{\eta_1}$

32 لكي نبرهن أن المستويين (p_1) و (p_2) متقاطعين يكفي أن نبرهن أنّ $\vec{\eta_1}$ و $\vec{\eta_2}$ غير متوازيين

33 مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$ هي مستوي (P) يشمل A و $\vec{\eta}$ شعاع ناظمي له.

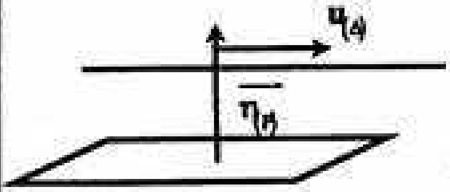
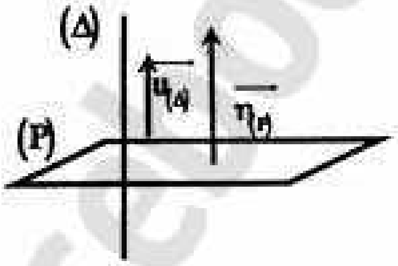
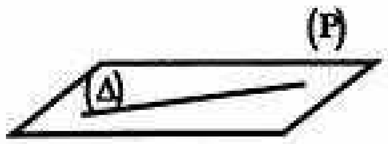
34 نعين معادلة المستوي الذي يمر من النقط A، B و C. نفرض أنّ $\vec{\eta}\left(a;b;c\right)$ شعاع ناظمي له

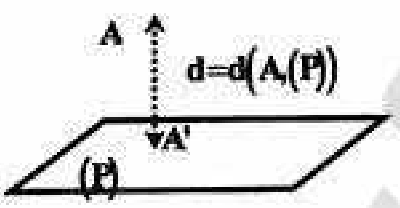
وذلك بأخذ $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0$ ثم نعين المركبات $\vec{\eta}\left(a;b;c\right)$ ثم معادلة المستوي.

35 لكي نبرهن أنّ المستقيم (Δ) يوازي المستوي (P) يكفي أن نتحقق أنّ $\vec{u}(\Delta)\perp\vec{\eta}_{(P)}$

36 لكي نبرهن أنّ المستقيم (Δ) يعامد المستوي (P) يكفي أن نتحقق أنّ $\vec{u}(\Delta)//\vec{\eta}_{(P)}$

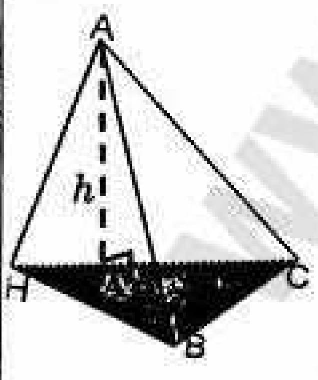
37 لكي نبرهن أنّ المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P) يكفي أن نتحقق أنّ كل نقطة من المستقيم (Δ) تحقق معادلة المستوي (P).



38 بعد النقطة $A\left(x_0\,;y_0\,;z_0\right)$ عن المستوي (P) ذو المعادلة:

$ax+by+cz+d=0$ هو $$d\left(A,(P)\right)=\frac{\left|a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



39 لكي نبرهن أن الرباعي $ABCD$ رباعي وجوه يكفي أن نبرهن أنّ (ABC) مستوي و $D\notin(ABC)$.

40 حجم الرباعي $ABCD$ هو

$$v=\frac{1}{3}A_{ABC}\times d\left(D,(ABC)\right)=\frac{1}{3}A_{DBC}\times d\left(A,(DBC)\right)=\frac{1}{3}A_{ADB}\times d\left(C,(ADB)\right)$$

41 لكي نبرهن أنّ A هي نقطة من المستقيم (Δ) الناتج من تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) يكفي أن نتحقق أنّ $A\in(P_1)$ و $A\in(P_2)$

42 لكي نبرهن أن $\overrightarrow{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) الناتج من تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) يكفي أن نحقق أن $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\eta_1}$ و $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{\eta_2}$

43 لكي نبرهن أن (Δ) هو المستقيم الناتج من تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) يكفي أن نحقق أن $(\Delta)\subset(P_1)$ و $(\Delta)\subset(P_2)$

44 لتعيين المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) نعين المعادلات الوسيطية للمستقيم (D) المار من A و شعاع توجيهه ناظم المستوي (P) ثم نعين نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (D) فتكون المسقط العمودي المطلوب.

44 لكي نبرهن أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) يكفي أن نحقق أن: $\overrightarrow{AH} // \overrightarrow{\eta}_{(P)}$ و $H \in (P)$.

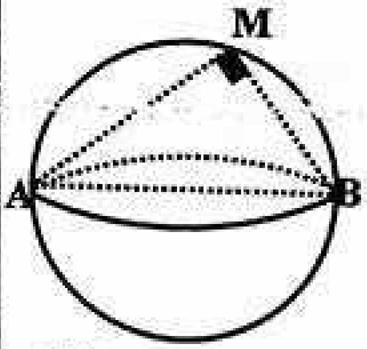
45 معادلة السطح الكروي (S) الذي مركزه $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ و نصف قطره r هي:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

46 مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ هي سطح كروي قطره $[AB]$

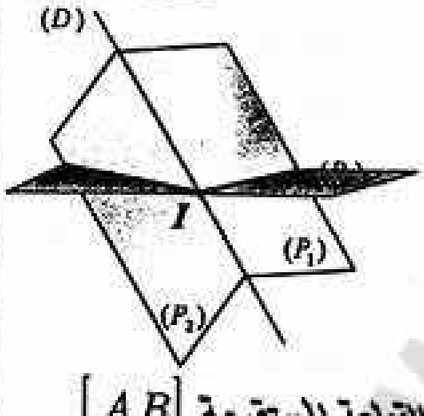
47 لدراسة وضعية السطح الكروي (S) الذي مركزه $\Omega(x_0;y_0;z_0)$ و نصف قطره r بالنسبة للمستوي (P) ذو المعادلة: $ax+by+cz+d=0$ حسب $d(\omega,P)$ فنميز الحالات التالية:

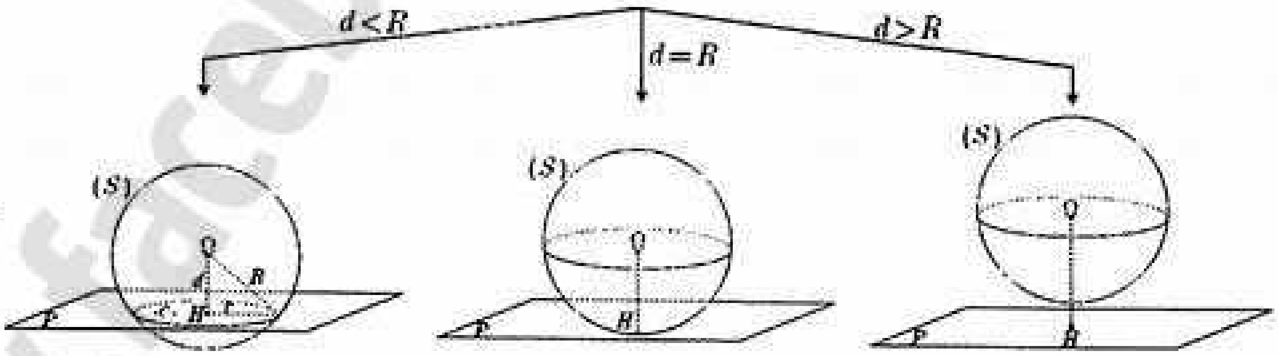
❶ إذا كان $d<r$ فإن المستوي يقطع السطح الكروي وفق دائرة مركزها H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (P) و نصف قطرها $r'=\sqrt{r^2-d^2}$



❷ إذا كان $d=r$ فإن المستوي يمس السطح الكروي في النقطة H المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوي (P).

❸ إذا كان $d>r$ فإن المستوي و السطح الكروي منفصلان.





48 مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $MA=MB$ هي المستوي (P) محور القطعة المستقيمة $[AB]$

49 مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $MA=m$ هي

❶ سطح كروي مركزه النقطة A و نصف قطرها m لما $m>0$

❷ مجموعة خالية عندما $m<0$ ❸ المجموعة الأحادية $\{A\}$ عندما $m=0$

50 مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $MA=AB$ هي سطح الكرة التي مركزها A و تشمل B.

51 لتعيين تقاطع ثلاث مستويات $[(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)]=[(P_1)\cap(P_2)]\cap(P_3)=(\Delta)\cap(P_3)$

ملخص الأعداد المركبة

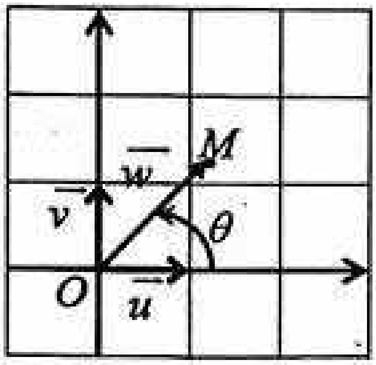
◆ نسمي عدد مركب كل عدد z معطى بـ: $z=x+iy$. حيث $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$

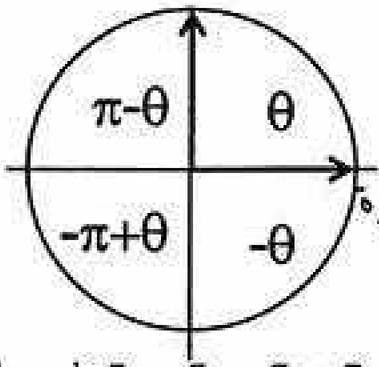
◆ الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد z. نرمز بالرمز $\mathbb{C}$ إلى مجموعة الأعداد المركبة

يسمى x بالجزء الحقيقي للعدد z و نرمز له بـ $\mathrm{Re}(z)$ و يسمى y بالجزء التخيلي له و نرمز له بـ $\mathrm{Im}(z)$

◆ z عدد حقيقي يكافئ $\mathrm{Im}(z)=0$ ◆ z تخيلي بحت (صرف) يكافئ $\mathrm{Re}(z)=0$

◆ التمثيل الهندسي لعدد مركب ◆





كل عدد مركب z: $z=x+iy$

❶ يمكن تمثيله بالنقطة $M(x;y)$ و التي تسمى صورة العدد z و يسمى العدد z بلاحقة النقطة $M(x;y)$

❷ يمكن تمثيله بالشعاع $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ و الذي يسمى صورة العدد z و يسمى العدد z بلاحقة بالشعاع $\overline{w}$

لتكن A, B, C, ω, G نقط من المستوي لواحقها $z_A, z_B, z_C, z_\omega, z_G$ على الترتيب.

❶ لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ ❷ لاحقة ω منتصف القطعة $[AB]$ هي $z_\omega=\dfrac{z_A+z_B}{2}$

❸ لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ معطى بـ $z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

◆ المرافق لعدد مركب ◆

◆ مرافق العدد $z=x+yi$ هو العدد $\overline{z}$ المعرف بـ $\overline{z}=x-iy$ و الذي له الخواص التالية:

❶ $\overline{\overline{z}}=z$ ❷ $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ ❸ $\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$ ❹ $\overline{z^n}=\overline{z}^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ◆ $z\times\overline{z}=x^2+y^2$

❺ $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\overline{z}}$ ❻ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ❼ $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ ❽ $z-\overline{z}=2i\mathrm{Im}(z)$ ❾ z حقيقي يكافئ $\overline{z}=z$

❿ z تخيلي بحت يكافئ $\overline{z}=-z$ ◆ صورة z و صورة $\overline{z}$ متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل

◆ طويلة عدد مركب ◆

طويلة العدد المركب z هي طويلة الشعاع $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ صورة z و نرمز لها بالرمز $|z|$ و التي لها الخواص التالية:

❶ $|z|=|x+yi|=\sqrt{x^2+y^2}$ و $|z|=MO$ و $|z-z_A|=MA$ ❷ $|z_B-z_A|=AB$ ❸ $|\overline{z}|=|z|$

❹ $|z+z'|\le|z|+|z'|$ ❺ $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$ ❻ $z\times\overline{z}=|z|^2$ ❼ $|z\times z'|=|z|\times|z'|$ $|z^n|=|z|^n : n\in\mathbb{N}$

$|z|=1$ يكافئ ❽ $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ ❾ $\left|\dfrac{1}{z}\right|=\dfrac{1}{|z|}$ ❿ $\left|\dfrac{z}{z'}\right|=\dfrac{|z|}{|z'|}$

◆ عمدة عدد مركب غير معدوم ◆

عمدة العدد المركب الغير معدوم z الذي صورته الشعاع $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ هي قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM})$

: التي نرمز لها بالرمز $\arg(z)$ و منه $\arg(z)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})$. نكتب اختصارا $\arg(z)=\theta+2k\pi;k\in\mathbb{Z}$

: $\arg(z)=\theta$ أو $\arg(z)\equiv\theta[2\pi]$ و لها الخواص التالية:

❶ العدد المركب المعدوم ليس له عمدة ❷ $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$

❸ $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$ ❹ $\arg(z^n)=n\arg(z)\forall n\in\mathbb{N}$ ❺ $\arg\left(\frac{1}{z}\right)=-\arg(z)$

❻ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ ❼ $\arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})$ ❽ $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

❾ z عدد حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg(z)=0+2k\pi$ ❿ z عدد حقيقي سالب تماما يكافئ $\arg(z)=\pi+2k\pi$

◆ z عدد حقيقي غير معدوم يكافئ $\arg(z)=k\pi$ ◆ z عدد تخيلي بحت غير معدوم يكافئ $\arg(z)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

◆ الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم ◆

z عدد مركب غير معدوم طويلته r و عمدته θ. يسمى الشكل: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ بالشكل المثلثي للعدد z

حيث $r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\cos\theta=\frac{x}{r}$ و $\sin\theta=\frac{y}{r}$ و العكس $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$

كما يسمى الشكل: $z=re^{i\theta}$ بالشكل الأسي للعدد z و له الخواص التالية: ❶ $e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$

إذا كان $z_1=r_1e^{i\theta_1}$ و $z_2=r_2e^{i\theta_2}$ فإن: ❷ $\bar{z}=\overline{re^{i\theta}}=r\overline{e^{i\theta}}=re^{-i\theta}$ ❸ $z_1.z_2=r_1.r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

❹ $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$ ❺ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ ❻ $z^n=r^ne^{in\theta}\ \forall n\in\mathbb{Z}$

❼ قانون موافر: $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta);\forall n\in\mathbb{Z}$

◆ لكي نبرهن أن العدد المركب L حقيقي يكفي أن نبرهن أن:

❶ $\mathrm{Im}(L)=0$ أو ❷ $\bar{L}=L$ أو ❸ $\arg(L)=k\pi$

◆ لكي نبرهن أن العدد المركب L تخيلي بحت يكفي أن نبرهن أن:

❶ $\mathrm{Re}(L)=0$ أو ❷ $\bar{L}=-L$ أو ❸ $\arg(L)=\frac{\pi}{2}+k\pi$

◆ إذا كان $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ فإننا نستنتج أن: $AB=AC$

◆ إذا كان $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{2}$ فإننا نستنتج أن (AC) و (AB) متعامدان

◆ إذا كان العدد $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$ حقيقي فإننا نستنتج أن النقط A, B, C في استقامية

◆ إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i$ فإننا نستنتج أن المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين

◆ إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$ فإننا نستنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

◆ إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ عدد تخيلي بحت غير معدوم فإننا نستنتج أن المثلث ABC قائم في A.

◆ إذا كان $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}$ عدد حقيقي غير معدوم فإننا نستنتج أن (CD) و (AB) متوازيان

◆إذا كان $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ عدد تخيلي بحت غير معدوم فإننا نستنتج أنّ (CD) و (AB) متعامدان

◆ قانون أولر: $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

◆لكي نبرهن أنّ الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع يكفي أن نبين أنّ $(z_B - z_A = z_C - z_D)$
أو (نبيّن أنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$ هما نفس المنتصف)

◆لكي نبرهن أنّ الرباعي $ABCD$ مستطيل يكفي أن نبين أنّ ($z_B - z_A = z_C - z_D$
و $\arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$) أو (نبيّن أنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان و متقايسان)

◆لكي نبرهن أنّ الرباعي $ABCD$ معين يكفي أن نبين أنّ ($z_B - z_A = z_C - z_D$ و $AB = AD$)
أو (نبيّن أنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان و متعامدان)

◆لكي نبرهن أنّ الرباعي $ABCD$ مربع يكفي أن نبين أنّ ($z_B - z_A = z_C - z_D$ و $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \pm i$)

أو (نبيّن أنّ القطرين $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان و متقايسان و متعامدان)

◆ التحويلات النقطية ◆

◆ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$ هو تحويل نقطي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث يكون $\overrightarrow{MM'} = \vec{w}$. عبارته المركبة هي : $z' = 1z + z_{\vec{w}}$. ❶ العناصر المميزة للانسحاب هي الشعاع $\vec{w}$ ❷ الانسحاب تحويل نقطي يحفظ الأطوال. ❸ الانسحاب تحويل نقطي يحفظ الاستقامية ❹ الانسحاب تحويل نقطي يحول الدائرة (C) التي مركزها A و نصف قطرها r إلى الدائرة (C') التي مركزها A' صورة A و نصف قطرها $r' = r$

◆ التحاكي الذي مركزه ω و نسبته العدد الحقيقي الغير معدوم k هو تحويل نقطي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث يكون : $\overrightarrow{wM'} = k\overrightarrow{wM}$. عبارته المركبة : $z' - z_\omega = k(z - z_\omega)$ ❶ العناصر المميزة للتحاكي هي المركز ω و النسبة k ❷ التحاكي هو تحويل نقطي لا يحفظ الأطوال إلاّ في حالة $|k| = 1$.
❸ التحاكي هو تحويل نقطي يحفظ الاستقامية ❹ التحاكي تحويل نقطي يحول الدائرة (C) التي مركزها A و نصف قطرها r إلى الدائرة (C') التي مركزها A' صورة A و نصف قطرها $r' = |k|r$

◆ الدوران الذي مركزه ω و قيس زاويته θ هو تحويل نقطي يحول النقطة ω إلى نفسها و يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث يكون : $wM' = wM$ و $\left(\overrightarrow{wM}, \overrightarrow{wM'}\right) = \theta$ عبارته المركبة : $z' - z_\omega = e^{\theta i}(z - z_\omega)$.
❶ العناصر المميزة للدوران هي المركز ω وقيس الزاوية θ. ❶ الدوران تحويل نقطي يحفظ الأطوال
❶ الدوران تحويل نقطي يحفظ الاستقامية. ❶ الدوران تحويل نقطي يحول الدائرة (C) التي مركزها A و نصف قطرها r إلى الدائرة (C') التي مركزها A' صورة A و نصف قطرها $r' = r$

◆ التشابه المباشر الذي مركزه ω ونسبته العدد الحقيقي الموجب تماما k و قيس زاويته θ هو تحويل نقطي يحول النقطة ω إلى نفسها و يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث يكون : $wM' = k \times wM$ و $\left(\overrightarrow{wM}, \overrightarrow{wM'}\right) = \theta$ عبارته المركبة : $z' - z_\omega = k.e^{\theta i}(z - z_\omega)$. ❶ العناصر المميزة للتشابه هي المركز ω و النسبة k وقيس الزاوية θ. ❷ التشابه المباشر هو تحويل نقطي لا يحفظ الأطوال إلاّ في حالة $k = 1$. ❸ التشابه المباشر هو تحويل نقطي يحفظ الاستقامية ❹ التشابه المباشر هو تحويل نقطي يحول الدائرة (C) التي مركزها A و نصف قطرها r إلى

الدائرة (C') التي مركزها A' صورة A و نصف قطرها $r'=kr$

◆ طبيعة التحويل : $z'=\alpha z+\beta$ ◆

❶ لما $\alpha=1$ فإن التحويل T انسحاب شعاعه $\vec{w}$ ذات اللاحقة $z_{\vec{w}}=\beta$

❷ لما $\alpha\in\mathbb{R}-\{1,0\}$ فإن التحويل T تحاكي نسبته $k=\alpha$ مركزه النقطة الصامدة ω: $z_\omega=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

❸ لما α عدد مركب ليس حقيقي طويلته 1 $(|\alpha|=1)$ فإن التحويل T دوران قيس زاويته $\theta=\arg(\alpha)$
مركزه النقطة الصامدة ω: $z_\omega=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

❹ لما α عدد مركب ليس حقيقي طويلته تختلف عن 1 $(|\alpha|\neq 1)$ فإن التحويل T تشابه مباشر نسبته $k=|\alpha|$
قيس زاويته $\theta=\arg(\alpha)$ و مركزه النقطة الصامدة ω: $z_\omega=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$

◆ مجموعات النقط ◆

❶ مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $|z|=5$ هي الدائرة التي مركزها النقطة O ونصف قطرها $r=5$

❷ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون : $|z-z_A|=2$ هي الدائرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $r=2$

❸ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون : $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=9$ هي الدائرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $r=3$ لأن : $(z-z_A)\overline{(z-z_A)}=|z-z_A|^2$

❹ مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$ هي المستقيم (Δ) محور القطعة $[AB]$

❺ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون : $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ هي نصف المستقيم $]OA)$ حيث $z_A=1+i$

❻ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون : $\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$ هي المستقيم (OA) باستثناء النقطة O

❼ مجموعة النقط M من المستوي والتي يكون من أجلها $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ عدد حقيقيا سالبا تماما هي $]AB[$

❽ مجموعة النقط M من المستوي بحيث يكون : $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ عدد حقيقيا موجبا تماما هي $(AB)-[AB]$

❾ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون من أجلها $\dfrac{z-z_B}{z-z_A}$ تخيلي بحت غير معدوم هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

❿ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون من أجلها $z-z_A=ke^{\frac{\pi}{4}i}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}$ هي المستقيم الذي يشمل النقطة A و شعاع توجيهه $\vec{u}$ حيث $z_{\vec{u}}=1+i$

⓫ إن المجموعة (γ) للنقط M من المستوي و التي لاحقتها z بحيث يكون من أجلها $z-z_A=2e^{\theta i}$ عند θ يمسح $\mathbb{R}$ هي الدائرة التي مركزها النقطة A و نصف قطرها $r=2$

ملخص المتتاليات العددية

♦ المتتالية العددية هي كل دالة u يكون فيها المتغير عدد طبيعي n

♦ نرمز إلى صورة العدد n وفق المتتالية u بالرمز u_n بدلا من $u(n)$.

♦ نرمز للمتتالية بـ (u_n) أو بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بدلا من الرمز u.

♦ العدد الحقيقي u_n يسمى بالحد العام للمتتالية (u_n).

♦ الأعداد الحقيقية u_0 ، u_1 ، u_2 ، .... ، u_n تسمى حدود المتتالية.

♦ لكي نبرهن أنّ العدد الحقيقي α حد من حدود المتتالية يكفي أن نبرهن أنّ للمعادلة $u_n=\alpha$ حل على الأقل حل n_0 في $\mathbb{N}$

♦ لكي نبرهن أنّ المتتالية (u_n) ثابتة يكفي أن نبرهن أنه لكل n من $\mathbb{N}$ فإنّ $u_{n+1}=u_n=u_0$

♦ تكون المتتالية (u_n) محدودة إذا وجد عددين حقيقيين m و M بحيث يكون $m\le u_n\le M$ لكل n من $\mathbb{N}$

♦ تكون المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M بحيث يكون $u_n\le M$ لكل n من $\mathbb{N}$

♦ تكون المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m بحيث يكون $u_n\ge m$ لكل n من $\mathbb{N}$

♦ تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما إذا كان : $u_n<u_{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$ وهذا يعني أن: $m<n\Rightarrow u_m<u_n$

♦ تكون المتتالية (u_n) متناقصة تماما إذا كان : $u_n>u_{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$ وهذا يعني أن: $m<n\Rightarrow u_m>u_n$

♦ تكون المتتالية (u_n) رتيبة تماما إذا كانت متناقصة تماما أو متزايدة تماما

♦ لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس في غالب الأحيان إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$

♦ نقول عن المتتالية (u_n) أنها متقاربة إذا كانت : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ حيث ℓ عدد ثابت $(\ell\ne\pm\infty)$

♦ نقول عن المتتالية (u_n) أنها متباعدة إذا لم تكن متقاربة أي في حالة ما تكون $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ أو لها أكثر من نهاية أو ليس لها نهاية.

♦ لكي نبرهن أن المتتالية (u_n) متقاربة يكفي أن نتحقق أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ أو نبيّن أنها متزايدة و محدودة من الأعلى أو نتحقق أنّها متناقصة و محدودة من الأسفل

♦ إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فهي تملك نهاية وحيدة بمعنى أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$

◆ المتتالية الحسابية ◆

◆ نسمي متتالية حسابية ذات الأساس r (r ثابت) كل متتالية (u_n) تحقق : $u_{n+1}=u_n+r$ لكل n من $\mathbb{N}$

◆ إذا كان $r=0$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة و إذا كان $r>0$ تكون (u_n) متزايدة تماما و إذا كان $r<0$ تكون المتتالية (u_n) متناقصة تماما

◆ إذا كان $u_2-u_1\neq u_1-u_0$ فإن المتتالية ليست حسابية

◆ الحد العام للمتتالية الحسابية معطى بـ $u_n=u_0+nr$ أو $u_n=u_1+(n-1)r$

و في الحالة العامة معطى بـ: $u_n=u_p+(n-p)r$

◆ إن المتتالية التي حدها العام $u_n=an+b$ هي متتالية حسابية أساسها $r=a$ و حدها الأول $u_0=b$

◆ تكون المتتالية (u_n) حسابية إذا كان $u_n+u_{n+2}=2u_{n+1}$

◆ لكي نبرهن أن الأعداد a,b,c تشكل بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متتالية حسابية يكفي أن نتحقق أن $a+c=2b$ أو $a+b+c=3b$

◆ $u_0+u_1+.....+u_n=\frac{(n+1)}{2}(u_0+u_n)$ و في الحالة العامة: $u_p+u_{p+1}+.....+u_n=\frac{(n-p+1)}{2}(u_p+u_n)$

المجموع S يساوي عدد الحدود مضروب في نصف مجموع الحد الأول و الحد الأخير .

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

◆ المتتالية الهندسية ◆

◆ نسمي متتالية هندسية ذات الأساس q (q ثابت) كل متتالية (u_n) تحقق : $u_{n+1}=q\,u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

◆ إذا كان $\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$ فإن المتتالية ليست هندسية .

◆ إن المتتالية التي حدها العام $u_n=a\,b^n$ هي متتالية هندسية أساسها $q=b$ وحدها الأول $u_0=a$

◆ الحد العام للمتتالية الهندسية معطى بـ: $u_n=u_0\,q^n$ أو $u_n=u_1\,q^{n-1}$ و بشكل عام $u_n=u_p\,q^{n-p}$

- إذا كان $q>1$ و $u_0>0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) متزايدة تماما .
- إذا كان $q>1$ و $u_0<0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) متناقصة تماما

• إذا كان $0<q<1$ و $u_0>0$ فإن المتالية الهندسية (u_n) متناقصة تماما .

• إذا كان $0<q<1$ و $u_0<0$ فإن المتالية الهندسية (u_n) متزايدة تماما .

$a>1$	$a=1$	$-1<a<1$	$a\leq -1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=+\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$	ليس لها نهاية

◆ تكون المتالية الهندسية متقاربة في حالة $-1<q\leq 1$ أو في حالة $u_0=0$

◆ تكون المتالية (u_n) هندسية إذا كان $u_n\times u_{n+2}=u_{n+1}^2$

◆ لكي نبرهن أن الأعداد a , b , c تشكل بهذا الترتيب حدود متعاقبة من متالية هندسية يكفي أن نتحقق $a\times c=b^2$ أو $a\times b\times c=b^3$

◆ $u_0+u_1+.....+u_n=u_0\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}=u_0\dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ في حالة $q\neq 1$

$u_0+u_1+.....+u_n=(n+1)u_0$ في الحالة التي يكون فيها $q=1$

◆ في الحالة العامة: $u_p+u_{p+1}+.....+u_n=u_p\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}=u_p\dfrac{q^{n-p+1}-1}{q-1}$ في حالة $q\neq 1$

◆ $u_p+u_{p+1}+.....+u_n=(n-p+1)u_p$ في الحالة التي يكون فيها $q=1$

◆ إذا كانت (u_n) متالية هندسية كل حدودها موجبة تماما فإن : $(\ln u_n)$ هي متالية حسابية أساسها $r=\ln q$

◆ إذا كانت (u_n) متالية هندسية كل حدودها غير معدومة فإن : $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ هي متالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{q}$

◆ إذا كانت (u_n) متالية هندسية فإن : (u_n^2) هي متالية هندسية أساسها q^2

◆ نقول أن (u_n) و (v_n) أنهما متجاورتين إذا كانت إحداهما متناقصة و الأخرى متزايدة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$

◆ إذا كانت المتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين فهما متقاربتان و لهما نفس النهاية ℓ

◆ نسمي متالية تراجعية كل متالية يرجع فيها حساب أي حد إلى الحدود التي سبقت معرفتها و التي تعطى بالحد الأول u_0 و بعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1}=f(u_n)$

◆ لكي نبرهن أن المتالية (u_n) معرفة نبرهن أن : $\forall n\in N$, $u_n\in D_f$ و أن : $f(D_f)=I_f\subseteq D_f$

◆ عندما تكون الدالة المرفقة f متزايدة تماما و $u_1-u_0>0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما

◆ عندما تكون الدالة المرفقة f متزايدة تماما و $u_1-u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماما

◆ عندما تكون الدالة المرفقة f متناقصة تماما فإن المتتالية (u_n) ليست رتيبة يعني أنها ليست متناقصة و ليست متزايدة ◆ إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها ℓ هي حل للمعادلة $f(\ell)=\ell$

◆ إذا كانت المتتالية (u_n) متقاربة فهي تملك نهاية وحيدة.

◆ البرهان بالتراجع ◆

البرهان بالتراجع هو نوع من البراهين الرياضياتية لكنه يصح استخدامه فقط للتحقق من صحة الخاصيات التي يكون فيها المتغير عدد طبيعي . للتحقق من صحة الخاصية $p(n)$ نتحقق من المراحل الثلاثة التالية

❶ المرحلة الابتدائية: نتحقق أن $p(n)$ محققة من أجل n_0 حيث n_0 أصغر عدد طبيعي من المجموعة التي عرّفت عليها $p(n)$.

❷ المرحلة الوراثية: نبرهن صحة الاستلزام $p(n)\Rightarrow p(n+1)$. أي نبرهن أنه إذا كانت $p(n)$ صحيحة حتى الرتبة n فإنه بالضرورة تكون $p(n+1)$ صحيحة

[باستخدام العكس النقيض يمكن إثبات $\overline{p(n+1)}\Rightarrow\overline{p(n)}$].

❸ الخلاصة : من المرحلتين ❶ و ❷ نستنتج أن $p(n)$ صحيحة

لكي نبرهن أن المتتالية (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية يكفي أن نتحقق أن :

$$u_2-u_1\neq u_1-u_0 \text{ و } \frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$$

◆ إذا برهنّا بالتراجع أن " $u_n\leq a$ فإننا نستنتج أن " المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد a

◆ إذا برهنّا بالتراجع أن " $u_n\geq a$ فإننا نستنتج أن " المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد a

◆ مبرهنة الحصر : (u_n) ، (v_n) و (w_n) ثلاث متتاليات عددية و ℓ عدد حقيقي .

◆ إذا كانت $\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell$ و $\lim_{n\to+\infty} w_n=\ell$ و إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $v_n\leq u_n\leq w_n$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$

◆ إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\geq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

◆ إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $u_n\leq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=-\infty$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty$.

◆ إذا كان ابتداءً من عدد طبيعي n_0 ، $|u_n-\ell|\leq v_n$ و $\lim_{n\to+\infty} v_n=0$ فإن $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

ملخص في الدوال الأصلية

◆ نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F تقبل الاشتقاق على I و تحقق $F'(x)=f(x)$

F دالة أصلية للدالة f على المجال I $\Leftrightarrow$ $F'(x)=f(x)$ لكل x من المجال I

◆ كل دالة مستمرة على المجال I تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال

◆ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإنّ مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على المجال I هي مجموعة الدوال من الشكل $G(x)=F(x)+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

◆ لكل دالة مستمرة على المجال I دالة أصلية وحيدة تأخذ قيمة معينة α من أجل قيمة معلومة من المجال I

◆ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I و كانت G دالة أصلية للدالة g على المجال I فإنّ الدالة $(G+F)$ هي دالة أصلية للدالة $(f+g)$ على المجال I

◆ إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإنّ الدالة (λF) هي دالة أصلية للدالة (λf) على I

◆ a و b عددان حقيقيان من المجال I. f دالة مستمرة على I و F دالة أصلية كيفية لها على هذا المجال يسمى العدد الحقيقي $\left[F(b)-F(a)\right]$ التكامل من a إلى b للدالة f ونرمز له بـ: $\int_a^b f(x)dx$

خواص التكامل المحدود: f و g دالتين مستمرتين على المجال I، a، b و c أعداد حقيقية من I، $k\in\mathbb{R}$

خاصية ❶ $\int_a^a f(x)dx=0$

خاصية ❷ $\int_a^b k f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

خاصية ❸ $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

خاصية ❺ $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

خاصية ❹ $\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$ (علاقة شال في التكامل المحدود)

خاصية ❻ إذا كان من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $f(x)\geq 0$ فإن: $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

خاصية ❼ إذا كان من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $f(x) \le g(x)$ فإن : $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

القيمة المتوسطة : القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

خاصية ❽ إذا كان من أجل كل x من المجال $[a;b]$، $m \le f(x) \le M$ فإن :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

التكامل بالتجزئة : $\int_a^b [f'(x).g(x)]dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b [f(x).g'(x)]dx$

خاصية ❾ إذا كانت الدالة f مستمرة على المجال I فإن" دالتها الأصلية التي تنعدم من أجل القيمة $x = a$ هي

الدالة F المعرفة على I كما يلي : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

المساحة : إن مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما

: $x = a$ و $x = b$ هي $A = \left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u_A$

الحجم : إن حجم المجسم الناتج من دوران المنحنى (C_f) حول محور الفواصل دورة كاملة في

مجال $[a;b]$ هو $V = \left(\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right)u_V$

❶ $\int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right) - 0 = \frac{4}{3}$

❷ $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = 0$

❸ $\int_{-3}^2 2x\,dx = [x^2]_{-3}^2 = (2)^2 - (-3)^2 = 4 - 9 = -5$

القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل

الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحنى (C) بين a و b.

الدالة f	الدالة الأصلية F	ملاحظات
$f(x)=a$	$F(x)=ax+c$	على $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n : n\neq -1$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c$	على $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x+c$	على $\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\tan x+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-c\tan x+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=u'(x)\times(u(x))^n$	$F(x)=\dfrac{(u(x))^{n+1}}{n+1}+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=u'(x)\times u(x)$	$F(x)=\dfrac{(u(x))^2}{2}+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x)=\ln\lvert u(x)\rvert+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=u'(x)e^{u(x)}$	$F(x)=e^{u(x)}+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x)=2\sqrt{u(x)}+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$F(x)=-\dfrac{1}{u(x)}+c$	على كل مجال تكون فيه الدالة f مستمرة
$f(x)=\cos(\alpha x+\beta)$	$F(x)=\dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta)+c$	على $\mathbb{R}$
$f(x)=\sin(\alpha x+\beta)$	$F(x)=-\dfrac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)+c$	على $\mathbb{R}$
$f(x)=e^{\alpha x+\beta}$	$F(x)=\dfrac{1}{\alpha}e^{\alpha x+\beta}+c$	على $\mathbb{R}$

ملخص في الاحتمالات

◆**القاعدة الأساسية للعد:** نعتبر تجربة تتطلب p اختيار $(p\in\mathbb{N}^*)$

إذا كان الاختيار الأول يتم إجراؤه بعدد n_1 طريقة مختلفة و الاختيار الثاني يتم إجراؤه بعدد n_2 طريقة مختلفة و... و كان الاختيار الأخير p يتم إجراؤه بعدد n_p طريقة مختلفة فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء هذه التجربة بالترتيب المذكور هو الجداء: $n_1\times n_2\times n_3\times...\times n_p$

◆**أصلي مجموعة منتهية:** لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها n.

يسمى العدد n أصلي المجموعة A و نرمز له $card(A)$ يعني $card(A)=n$

$card(\phi)=0$ و $card(\{0,1,2\})=3$

◆ نقبل دون برهان النتيجة التالية: إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين بحيث $A\cap B=\phi$ فإن:

$$card(A\cup B)=card(A)+card(B)$$

◆ في الحالة العامة: $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$

◆ لتكن A مجموعة جزئية من مجموعة منتهية E

متمم المجموعة A بالنسبة للمجموعة E هي المجموعة التي نرمز لها بالرمز: $\overline{A}$ و المعرفة كما يلي:

$A\cup\overline{A}=E$ و $A\cap\overline{A}=\phi$ $\overline{A}=\{x\in E/x\notin A\}$

◆ $card(\overline{A})=card(E)-card(A)$

◆ $card(A\times B)=card(A)\times card(B)$

◆ **رمز المضروب:** نستخدم في أحيان كثيرة في الرياضيات جداء الأعداد الطبيعية من 1 إلى n

نرمز إلى هذا الجداء بالرمز $n!$ و يقرأ n عاملي.

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$ كما نقبل اصطلاحا أن: $0!=1$ $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

$n!=n\times(n-1)!$

◆ لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n

نسمي قائمة ذات r عنصر من المجموعة A كل عنصر من الشكل $(x_1,x_2,x_3,...,x_r)$ حيث:

$x_1,x_2,x_3,....,x_r$ عناصر كيفية من المجموعة A

◆ إن عدد قوائم المجموعة A مأخوذة r في كل مرة معطى بـ: $A_n^r=n^r$

(عندما يتم تشكيل القائمة يسمح تكرار العنصر و يهم الترتيب)

◆ لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n و r عدد طبيعي حيث $0\le r\le n$

نسمي ترتيبة ذات r عنصر من عناصر المجموعة A كل قائمة ذات r عنصر من المجموعة A بحيث تكون هذه العناصر مختلفة مثنى مثنى بمعنى أنه لا يسمح بتكرار العنصر

◆ إن عدد ترتيبات المجموعة A مأخوذة r في كل مرة معطى بـ: $A_n^r=n\times(n-1)\times...(n-r+1)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

◆ لتكن A مجموعة غير خالية عدد عناصرها n

نسمي تبديلة لعناصر A كل ترتيبة لعناصر A يكون فيها $r=n$

◆ إن عدد تباديل المجموعة A معطى بـ: $P_n = A_n^n = n!$

◆ تسمى توفيقة ذات r عنصر لمجموعة غير خالية A عدد عناصرها n كل مجموعة جزئية من A يكون عدد عناصرها r

◆ إن عدد توفيقات المجموعة A مأخوذة r في كل مرة معطى بـ: $C_n^r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

◆ **بعض أنواع السحب:**

نوع السحب	عدد السحبات الممكنة	الترتيب	التكرار
في آن واحد	C_n^r	غير مهم	غير مسموح
على التوالي مع الإرجاع	n^r	مهم	مسموح
على التوالي دون إرجاع	A_n^r	مهم	غير مسموح

◆ **خواص الأعداد** C_n^r

$C_n^0 = 1$ ، $C_n^n = 1$ $C_n^1 = n$ ، $C_n^{n-1} = n$ ، $C_n^{n-r} = C_n^r$ ، $C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$

◆ **مثلث باسكال :**

n \ p	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1	$C_{n-1}^{r} + C_{n-1}^{r-1}$			
3	1	3	3	1		C_n^r	
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	[illegible]	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

إن قيم العمود الثاني كلها تساوي 1

وذلك تطبيقا للخاصية $C_n^0 = 1$

إن قيم قطر المثلث كلها تساوي 1

وذلك تطبيقا للخاصية $C_n^n = 1$

بقية قيم المثلث نتحصل عليها بتطبيق الخاصية $C_n^{r-1} + C_n^r = C_{n+1}^r$

◆ دستور ثنائي الحد نيوتن : $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n$

◆ تسمى تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن أن نجزم بصفة قطعية نتيجتها قبل إنجازها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة لها

◆ **مصطلحات الاحتمالات:** بالقيام بتجربة عشوائية نحصل على نتيجة معينة من بين نتائج ممكنة

◆ إن جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة العشوائية تسمى مجموعة الإمكانيات أو المجموعة الشاملة و نرمز لها بالرمز Ω

◆ كل مجموعة جزئية من المجموعة Ω تسمى حادثة أو حادث

◆ كل حادث مكون من عنصر واحد يسمى حادث ابتدائي

◆ الجزء الفارغ $\phi \subset \Omega$ يسمى الحادث المستحيل لانه لايتحقق ابدا ◆ الجزء Ω يسمى الحادث المؤكد

◆ نقول عن الحادث A انه تحقق اذا انتهت التجربة و كانت نتيجتها عنصر من المجموعة A

◆ الحادث المضاد للحادث A هو الحادث العاكس له و نرمز له بالرمز $\overline{A}$ و الذي يتحقق عندما لايتحقق A

◆ نقول عن الحدثين A و B انهما متنافيان (غير منسجمين) اذا كان: $A \cap B = \phi$

◆ الفضاءات الاحتمالية ◆

◆ لتكن Ω مجموعة منتهية نسمي احتمالا على Ω كل دالة p معرفة على مجموعة اجزاء المجموعة Ω و التي تأخذ قيمها في المجال $[0;1]$ و تحقق الشرطان التاليين:

❶ $p(\Omega)=1$ ❷ اذا كان: $A \cap B = \phi$ فان: اذا كان: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

◆ **خواص :** مهما كان الحدثان A و B من Ω

❶ $p(\phi)=0$ ❷ $0 \leq p(A) \leq 1$ ❸ اذا كان: $A \subset B$ فان: $p(A) \leq p(B)$

❹ $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ ❺ $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$ ❻ $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B)$

❼ مهما كان الحدثان A و B من Ω: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

◆ إذا كانت جميع الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال في تجربة عشوائية Ω فانه لكل حادث A من Ω. فان:

$$\frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر المجموعة A}}{\text{عدد عناصر المجموعة }\Omega} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة للمجموعة A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = p(A)$$

◆ ليكن A و B حادثين مرتبطين بنفس التجربة العشوائية بحيث $p(A) \neq 0$

الاحتمال الشرطي لوقوع الحادثة B علما ان الحادث A قد وقع هو العدد الحقيقي الموجب

$$p_A(B) = p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\text{عدد عناصر المجموعة } (A \cap B)}{\text{عدد عناصر المجموعة } A}$$

◆ نقول عن الحادثين A و B انهما مستقلان اذا كان وقوع احدهما او عدم وقوعه لايؤثر على وقوع او عدم وقوع الآخر بمعنى آخر ان: $p(B/A) = p(B)$

اي ان استقلال A و B معناه ان احتمال A و B هو جداء احتماليهما

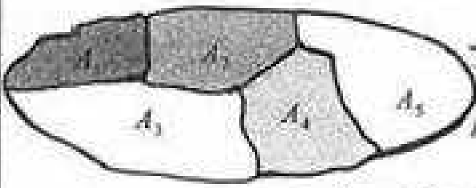
◆ إذا كانت $p(A)\neq 0$ و $p(B)\neq 0$ فإن: $p(A\cap B)=p(B/A)\times p(A)=p(A/B)\times p(B)$

◆ نقول أن الحوادث A_1، A_2، ...، و A_n تشكل تجزئة للمجموعة E عندما تكون هذه الحوادث متنافية مثنى مثنى و اتحادها هو E و كلها ليست خالية

◆ A حادثة احتمالها غير معدوم، $\overline{A}$ حادثتها العكسية. A و $\overline{A}$ تشكل تجزئة لـ E

◆ B حادثة من E إذن الحادثتان $B\cap A$ و $B\cap\overline{A}$ متنافيتين و $(B\cap A)\cup(B\cap\overline{A})=B$

و بالتالي $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})=p(B/A)\times p(A)+p(B/\overline{A})\times p(\overline{A})$



◆ إذا كانت الحوادث A_1، A_2، ... و A_n تشكل تجزئة للمجموعة E فإن:
$p(B)=p_{A_1}(B)\times p(A_1)+p_{A_2}(B)\times p(A_2)+....+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$

◆ المتغير عشوائي X هو دالة عددية معرفة على مجموعة المخارج E و مزودة باحتمال p

نسمي x_1، x_2، ... و x_n القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X و التي نرمز لها بالرمز $X(\Omega)=\{x_1,x_2,....,x_n\}$

قانون احتمال متغير عشوائي هو الدالة f التي ترفق بكل عنصر x_i من المجموعة $X(\Omega)$ باحتمال الحدث
$f(x_i)=p(X=x_i)=p_i$

يتم تحديد قانون احتمال متغير عشوائي بتحديد مجموعة قيم X ثم كتابة النتائج في جدول يسمى جدول قانون احتمال المتغير العشوائي

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p_i=p(x=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

◆ الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو العدد $E(X)$ المعطى بـ $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

◆ التباين لقانون احتمال هو العدد $V(X)$ حيث $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

◆ الانحراف المعياري هو $\delta(X)=\sqrt{V(X)}$

◆ X و Y متغيرات عشوائيات معرفان على نفس الوضعية و a عدد حقيقي

◆ لدينا $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ و $E(aX)=aE(X)$

◆ X متغير عشوائي و a و b عددان حقيقيان لدينا: ❶ $E(X+a)=E(X)+a$
❷ $V(aX)=a^2V(X)$ ❸ $\delta(aX)=|a|\delta(X)$ ❹ $V(X+a)=V(X)$ ❺ $\delta(X+a)=\delta(X)$