

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 03.5 نقطة )

( $u_n$ ) متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$  و  $u_1 = 2$  و  $u_0 = 1$

المتتالية ( $v_n$ ) معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = u_{n+1} - u_n$

(1) أحسب  $v_0$  و  $v_1$ .

(2) برهن أن ( $v_n$ ) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

(3) أ) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$ :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $u_n = \frac{3}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n \right) + 1$

ج) بين أن ( $u_n$ ) متقاربة.

التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

$P(Z)$  كثير حدود حيث:  $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$  و  $Z$  عدد مركب

(1) حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $P(Z) = 0$ .

(2) نضع:  $Z_1 = 1 + i$  ؛  $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ) أكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  على الشكل الأسّي.

ب) أكتب  $\frac{Z_1}{Z_2}$  على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي.

ج) استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

(3) أ) عدد طبيعي. عين قيم  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^n$  حقيقيا.

ب) احسب قيمة العدد  $\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)^{456}$ .

التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

نعتبر النقط :  $C(2;1;3)$  ،  $B(0;2;1)$  ،  $A(1;0;2)$

(1)  $(P)$  مستو معادلة له من الشكل  $x - z + 1 = 0$  .

(أ) بين أن المستوي  $(P)$  هو المستوي  $(ABC)$  .

(ب) ما طبيعة المثلث  $ABC$  .

(2) (أ) تحقق من أن النقطة  $D(2;3;4) \notin (ABC)$  .

(ب) ما طبيعة  $ABCD$  .

(3) (أ) أحسب المسافة بين  $D$  و المستوي  $(ABC)$  .

(ب) أحسب حجم  $ABCD$  .

التمرين الرابع: ( 07.5 نقطة )

(I)  $f$  دالة معرفة على  $I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$  بـ:  $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$

( $c_f$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

(1) (أ) أحسب نهايات  $f$  عند الحدود المفتوحة لـ  $I$

(ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات  $f$  شكل جدول تغيراتها.

(2)  $g$  دالة معرفة المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$

( $c_g$ ) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

(أ) أحسب نهاية  $g$  عند  $+\infty$  .

(ب) تحقق من أن ( $c_g$ ) يقبل مستقيما مقاربا مائلاً  $(\Delta)$

عند  $+\infty$  يطلب تعيين معادلة له.

(ج) أدرس تغيرات  $g$  .

(II)  $k$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:  $k(x) = |x| + \frac{4}{x+1}$

(1) (أ) أحسب  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ،  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{k(h) - k(0)}{h}$  ماذا تستنتج ؟

(ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

(2) أكتب معادلتَي المماسين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  عند النقطة التي فاصلتها  $x_0 = 0$  .

(3) أرسم  $(\Delta_1)$  ،  $(\Delta_2)$  و  $(C_k)$  .

(4) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى  $(C_k)$  و المستقيمتين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  :

$$x = -\frac{1}{2}, x = \frac{1}{2}, y = 0$$

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر النقط:

$$D(1; -1; -2) ; C(3; 0; -2) ; B(1; -2; 4) ; A(2; 3; -1)$$

و ليكن  $(\pi)$  المستوي المعرف بمعادلته الديكارية :  $2x - y + 2z + 1 = 0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية:

1. النقط A ، B ، C في استقامية.
2.  $(ABD)$  مستوي معادلة ديكارتية له :  $25x - 6y - z - 33 = 0$
3. المستقيم  $(CD)$  عمودي على المستوي  $(\pi)$ .
4. المسقط العمودي للنقطة B على  $(\pi)$  هو النقطة  $H(1; 1; -1)$

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة:  $z^2 - 2z + 4 = 0$

2. نسمي  $z_1$  ؛  $z_2$  حلي هذه المعادلة.

(أ) أكتب العددين  $z_1$  و  $z_2$  على الشكل الأسّي.

(ب) A ، B ، C هي النقط من المستوي التي لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = \frac{1}{2}(5 + i\sqrt{3}) ; z_B = 1 + i\sqrt{3} ; z_A = 1 - i\sqrt{3}$$

(  $i^2 = -1$  يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق  $i^2 = -1$  )

أحسب الأطوال AB ، AC ، BC ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ج) جد الطويلة و عمدة للعدد المركب Z حيث :  $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$

(د) أحسب  $z^3$  و  $z^6$  ثم استنتج أن  $z^{3k}$  عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

$(u_n)$  متتالية هندسية متزايدة تماماً حدها الأول  $u_1$  و أساسها q حيث:  $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$

1. (أ) أحسب  $u_2$  و الأساس q لهذه المتتالية و استنتج الحد الأول  $u_1$ .

(ب) أكتب عبارة الحد العام  $u_n$  بدلالة n .

(ج) أحسب  $S_n$  حيث:  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  بدلالة n ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون:

$$S_n = 728$$

2.  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  كما يلي:

$$v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \quad \text{و} \quad v_1 = 2$$

(أ) أحسب  $v_2$  و  $v_3$ .

(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم:  $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$ .

بين أن  $(w_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$ .

(ج) أكتب  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $v_n$  بدلالة  $n$ .

### التمرين الرابع: (07 نقاط)

#### الجزء الأول:

$h$  دالة عددية معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

1. أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ .

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ .

و استنتج اتجاه تغير الدالة  $h$  ثم أنجز جدول تغيراتها.

3. أحسب  $h(0)$  و استنتج إشارة  $h(x)$  حسب قيم  $x$ .

**الجزء الثاني:** لتكن  $f$  دالة معرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ .

نسمي  $(C_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{0}; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. (أ) أحسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ثم فسر هذه النتيجة بيانياً.

(ب) باستخدام النتيجة  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ .

(ج) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(د) أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$  و استنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

(هـ) أدرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بين أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$ :  $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$  ثم شكل جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3. بين أن المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم ذو المعادلة  $y=2$  عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. أرسم  $(C_f)$ .

5. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(C_f)$  و المستقيمتان التي معادلاتها:

$$y = x - 1 \quad \text{و} \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 1.$$