التمرين الأوّل☹

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. أُدرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيراتها.
2. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

ب ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-2x+2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ ـ حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ ـ أثبت أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

ب ـ أنشئ (Δ) و (C_f).

الحل☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} g(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} -2x^2+2=2$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \ln x=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(-2x+\frac{2}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=-\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-4x-\frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ و $-\frac{1}{x}<0$ عندئذ $g'(x)<0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$		$-$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

$$g(1)=2(1)^2+2-\ln 1=0$$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

من أجل $x \in]0;1[$ ، $g(x) > 0$

من أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $g(x) < 0$

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = \dfrac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ **.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$$

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{-1+\ln x}{x} = -\infty$ عندئذ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{-1+\ln x}{x} - 2x + 2e = -\infty$

ب - تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-2x + 2e) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$f(x) - y = \dfrac{-1+\ln x}{x}$ لدينا $x > 0$ ومنه إشارة $f(x) - y$ هي نفس إشارة $-1+\ln x$.

$f(x) - y = 0$ يكافئ $-1+\ln x = 0$ ويكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f(x) - y > 0$ يكافئ $-1+\ln x > 0$ ويكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

x	0		e		$+\infty$
$f(x) - y$	||	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	||	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $B(e;0)$	(C_f) فوق (Δ)	

2. أ - تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - (-1+\ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty;1[$ ، $f'(x) > 0$ ؛ ومن أجل $x \in]1;+\infty[$ ، $f'(x) < 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-\infty;1]$ ومتناقصة تماما على $[1;+\infty[$.

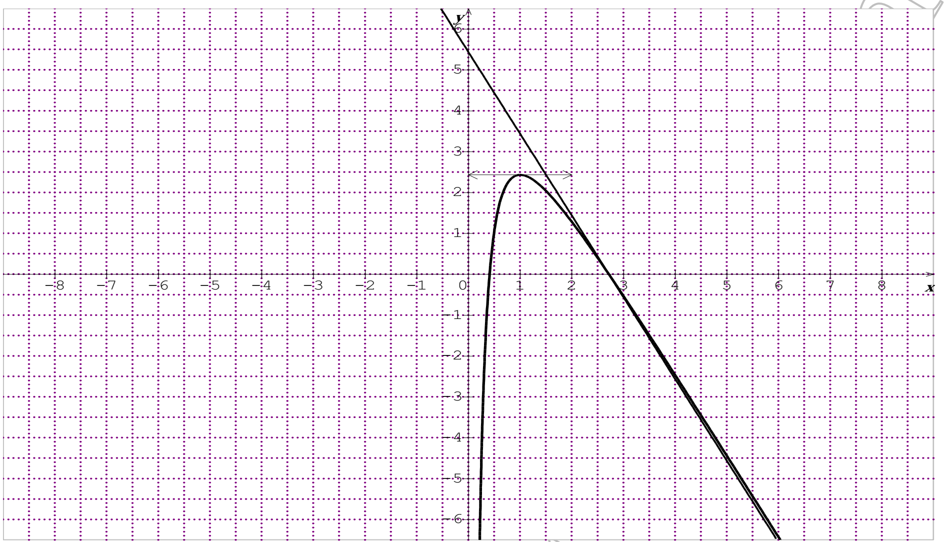
جدول تغيّرات الدالة f .

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2e-3$	↘	$-\infty$

3. أ ـ إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وخاصة على المجال $[0,4;0,5]$ ولدينا $f(0,4)\approx -0,15$ و $f(0,5)\approx 1,04$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(x_1)=0$ وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب ـ رسم (Δ) و (C_f).



<u>التمرين الثاني</u>☹

I ـ لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1. ادرس تغيّرات الدالة g واحسب $g(1)$.

2. استنتج انّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II ـ f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

ب ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

جـ ـ حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D).

2. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ ـ بيّن أنّه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f)، مواز للمستقيم (D).

ب - اكتب معادلة (Δ).

جـ - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2}<\alpha<1$

د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f).

هـ - ناقش بيانيا، حسب قيّم العدد الحقيقي m، عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

<u>الحل</u>☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x^2+2-2\ln(x)$

1.ادرس تغيّرات الدالة g واحسب $g(1)$.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+2=2$ عندئذ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x^2+2-2\ln x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(x+\frac{2}{x}-2\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$$

$g'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}$ لدينا $x>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة x^2-1

x	0		1		$+\infty$
x^2-1	||	$-$	0	$+$	

$g(1)=1+2+2\ln 1=3$

جدول تغيرات الدالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

2. استنتاج انّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $g(x)>0$.

بما أنّ 3 هي قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0;+\infty[$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $g(x)\geq 3$ وبالتالي $g(x)>0$.

II - f دالة عددية معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+\frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}=0$ فيكون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{2\ln x}{x}=+\infty$

ولدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{2\ln x}{x}=-\infty$ فيكون $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x+\frac{2\ln x}{x}=-\infty$

ب ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0$ إذن المنحنى (C_f) له مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=x$ في جوار $+\infty$.

جـ ـ تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

لدينا $f(x)-x=\dfrac{2\ln x}{x}$ ؛ إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $\ln x$.

$f(x)-x=0$ يكافئ $\ln x=0$ أي $x=1$

$f(x)-x>0$ يكافئ $\ln x>0$ ويكافئ $x>1$

$f(x)-x<0$ يكافئ $\ln x<0$ ويكافئ $0<x<1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

2.أ ـ تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1+2\left[\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}\right]=1+\frac{2-2\ln x}{x^2}=\frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f.

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $g(x)>0$ و $x^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3.أ ـ تبيين أنّه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f)، مواز للمستقيم (Δ).

(T) يوازي (Δ) يعني $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $\dfrac{g(x_0)}{{x_0}^2}=1$ ويكافئ ${x_0}^2+2-2\ln x_0={x_0}^2$ ويكافئ $\ln x_0=1$ أي $x_0=e$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا لـ(Δ) في النقطة التي إحداثيتيها $\left(e;e+\dfrac{2}{e}\right)$.

aziz_mus1@hotmail.fr

ب ـ كتابة معادلة (Δ).

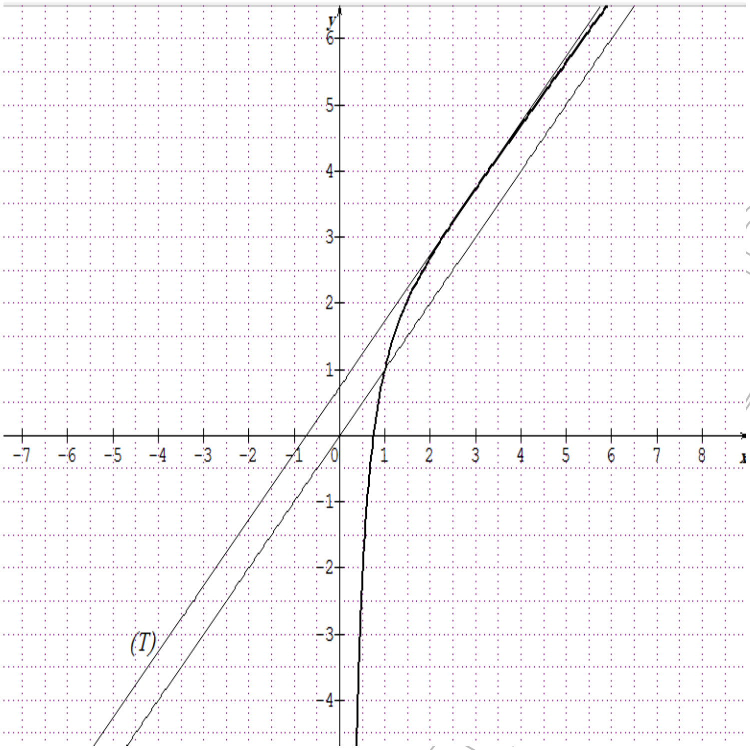
$y=f'(e)(x-e)+f(e)$ ومنه $y=(x-e)+e+\frac{2}{e}$ أي $y=x+\frac{2}{e}$.

جـ ـ تبيين أنّ المنحنى (C_f) **يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها** α **حيث** $\frac{1}{2}<\alpha<1$

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ وبالخصوص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5)\approx -2,27$ ، $f(1)=1$

أي $f(0,5)\times f(1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5<\alpha<1$

د ـ رسم المستقيمين (Δ) **و** (T) **والمنحنى** (C_f).



هـ ـ المناقشة بيانيا، حسب قيّم العدد الحقيقي m،

عدد حلول المعادلة : $mx-2\ln(x)=0$.

$mx-2\ln(x)=0$ تكافئ $mx=2\ln(x)$

وتكافئ $m=\frac{2\ln(x)}{x}$ وتكافئ

$x+m=x+\frac{2\ln(x)}{x}$ أي $f(x)=x+m$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=x+m$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m\le 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلا واحدا.

إذا كان $0<m<\frac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m>\frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا.

حذار: قيم m لاعلاقة لها بمجموعة تعريف الدالة f.

التمرين الثالث☹

I- h دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

2. بيّن أنّه، من أجل x من $]-1;+\infty[$: $h'(x)=\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات h.

3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيّم x.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

II- f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ ـ احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ب ـ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، برهن أنّ: $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

جـ ـ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

د ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f).

هـ ـ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2.بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات f.

3.بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4.ارسم (C_f).

الحل☺

I- h دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $h(x)=x^2+2x+\ln(x+1)$.

1.**حساب** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} h(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x=-1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+2x=+\infty$

2.**تبيين أنّه، من أجل كل** x **من** $]-1;+\infty[$ **:** $h'(x)=\dfrac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

$$h'(x)=2(x+1)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1}=\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1;+\infty[$ ، $h'(x)>0$ وعليه الدالة h متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

جدول تغيّرات h**.**

x	-1 0 $+\infty$
$h'(x)$	$+$ $+$
$h(x)$	$-\infty$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

3.**حساب** $h(0)$

$$h(0)=0^2+2(0)+\ln(0+1)=0$$

aziz_mus1@hotmail.fr

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيّم x.

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	$\|\|$ $-$	0	$+$

II- f دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ ـ **حساب** $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ **وفسّر النتيجة بيانيا.**

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} \ln(x+1)=-\infty$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x+1=0^+$

ومنه $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$.

ب ـ باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ ، **برهن أنّ:** $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$.

نضع $u=e^t$ عندئذ $t=\ln u$ إذا كان t يئول إلى $+\infty$ فإنّ u يئول إلى $+\infty$.

ومنه $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u}{\ln u}=+\infty$ وعليه $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{u}{\ln u}}=0$

جـ ـ استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=+\infty$

د ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]$ **واستنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى** (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ؛ إذن يوجد مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) معادلته $y=x-1$

هـ ـ دراسة وضعية المنحنى (C_f) **بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.**

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$.

لدينا $f(x)-y=\dfrac{-\ln(x+1)}{x+1}$ ؛ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ ومنه إشارة $f(x)-y$ هي نفس إشارة $-\ln(x+1)$.

$f(x)-y=0$ يكافئ $-\ln(x+1)=0$ ويكافئ $\ln(x+1)=0$ ويكافئ $x+1=1$ أي $x=0$

$f(x)-y>0$ يكافئ $-\ln(x+1)>0$ ويكافئ $\ln(x+1)<0$ ويكافئ $0<x+1<1$ أي $-1<x<0$

$f(x)-y<0$ يكافئ $-\ln(x+1)<0$ ويكافئ $\ln(x+1)>0$ ويكافئ $x+1>1$ أي $x>0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0;-1)$	(C_f) تحت (Δ)	

2.تبيين أنّه، من أجل كل x **من** $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x+1}(x+1)-\ln(x+1)}{(x+1)^2}\right]=1-\frac{1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-1+\ln(x+1)}{(x+1)^2}=\frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $h(x)$.

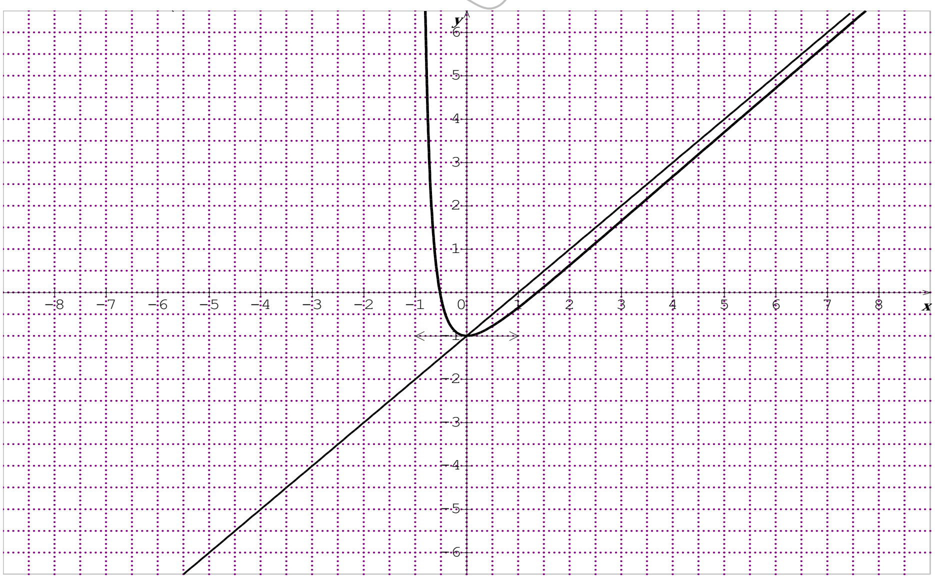
جدول تغيّرات f **.**

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

3.تبيين أنّ المنحنى (C_f) **يقطع المستقيم ذو المعادلة** $y=2$ **عند نقطة فاصلتها محصورة بين** $3,3$ **و** $3,4$**.**

الدالة f مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ بالتالي هي مستمرة على المجال $[3,3;3,4]$ ولدينا $f(3,3)\approx 1,96$ و $f(3,4)\approx 2,06$ أي $f(3,3)<2<f(3,4)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]3,3;3,4[$ بحيث $f(\alpha)=2$ أي (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y=2$ عند نقطة فاصلتها α محصورة بين $3,3$ و $3,4$.

4.رسم (C_f)**.**



aziz_mus1@hotmail.fr
سر النجاح أن تكون مخلصاً لأهدافك

التمرين الرابع☹

I- g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدل تغيراتها.

2. أ **)**بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II- f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.

ب) عبّر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ واستنتج تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2. بيّن أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4. ارسم (Δ) و (C_f).

5. ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

III- h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)، ثمّ ارسم (C_h).

الحل☺

I- g هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=1+x^2-2x^2\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدالة g، ثمّ شكل جدل تغيراتها.

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=1$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x^2\ln x=0$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 1+x^2=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{x^2}+1-2\ln x\right)=-\infty$$

$$g'(x)=2x-2\left(2x\ln x+\frac{1}{x}.x^2\right)=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$، $-4x<0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x\in]0;1[$، $\ln x<0$ ومنه $g'(x)>0$

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $\ln x>0$ ومنه $g'(x)<0$

بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;1]$ و متناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$

aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيرات الدّالة g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| 1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

2. أ)تبيين أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل على المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<2$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0;1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]1;2]$ و $0\notin]1;2]$ إذن على المجال $]0;1]$ ، $g(x)\neq 0$.

ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]-\infty;2]$ و $0\in]-\infty;2]$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$؛ وبما أنّ $g(1,5)\approx 1,42$ و $g(2)\approx -0,55$ أي $g(1,5)\times g(2)<0$ فإنّ $1,5<\alpha<2$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

II- f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1)أ) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} x^2+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\times\dfrac{x}{x^2+1}=0$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$.

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2+1)-2x\ln x}{(x^2+1)^2}=\frac{\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x}}{(x^2+1)^2}=\frac{(x^2+1)-2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}=\frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$$

واستنتاج تغيرات الدالة f

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x(x^2+1)^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

.2 تبيين أنّ $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha=0$ أي $\ln\alpha=\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{\ln\alpha}{\alpha^2+1}=\dfrac{\dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha^2+1}{2\alpha^2\left(\alpha^2+1\right)}=\dfrac{1}{2\alpha^2}$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

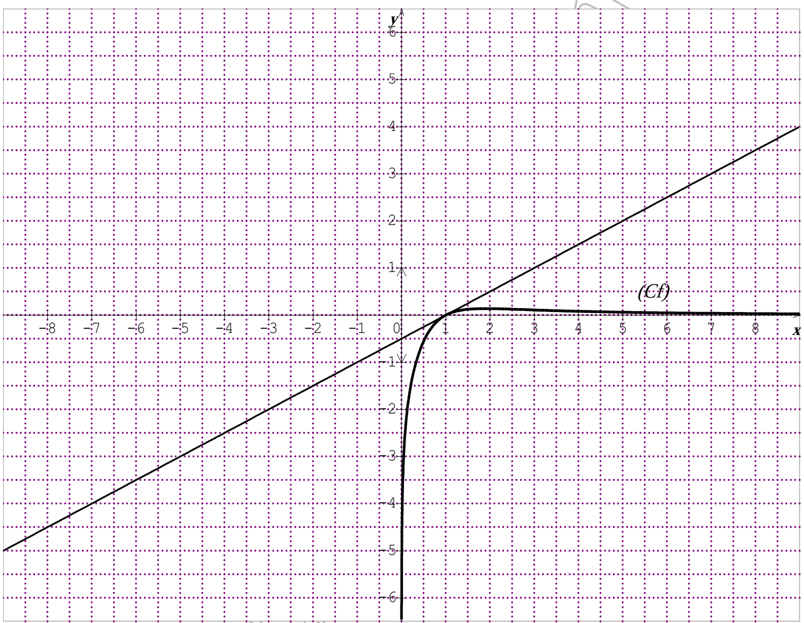
لدينا $1{,}5<\alpha<2$ معناه $2{,}25<\alpha^2<4$ ويكافئ $4{,}5<2\alpha^2<8$ ويكافئ $\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2\alpha^2}<\dfrac{1}{4{,}5}$ أي

$0{,}12<f(\alpha)<0{,}23$

.3 كتابة معادلة المماس (Δ) **للمنحنى** (C_f) **عند النقطة ذات الفاصلة** 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=\dfrac{1}{2}(x-1)$ أي $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

.4 رسم (Δ) **و** (C_f).



.5 المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، **عدد حلول المعادلة:** $f(x)=\dfrac{1}{2}x+m$.

إذا كان $m<-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m=-\dfrac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $m>-\dfrac{1}{2}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

III- h هي الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{|\ln x|}{x^2+1}$

شرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f)،

لدينا $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}; \ln x \geq 0 \\ h(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2+1}; \ln x \leq 0 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} h(x)=f(x); x\in[1;+\infty[\\ h(x)=-f(x); x\in]0;1] \end{cases}$.

إذن في المجال $[1;+\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)

وفي المجال $]0;1]$، (C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

التمرين الخامس☹

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدةالطول $2cm$

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ و فسّر النتيجتين بيانيا.

ب ـ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

جـ ـ ادرس اتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها.

2. أ ـ بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها.

ب ـ اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

3. ارسم (Δ)، (D) و (C).

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x=x$.

الحل☺

f الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. وحدةالطول $2cm$

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\ln x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x=0^+$.

تفسير النتيجتين بيانيا.

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ فإنّ (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل)

و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب)

ب ـ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

جـ ـ دراسة اتجاه تغيّر الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ معناه $1-\ln x=0$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ معناه $1-\ln x>0$ ويكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ معناه $1-\ln x<0$ ويكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

2. أ ـ تبيين أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثييها.

$$f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\frac{-1-2+2\ln x}{x^3}=\frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $x^3>0$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $-3+2\ln x$.

$f''(x)=0$ معناه $-3+2\ln x=0$ وتكافئ $\ln x=\frac{3}{2}$ أي $x=\sqrt{e^3}$

$f''(x)>0$ معناه $-3+2\ln x>0$ و تكافئ $\ln x>\frac{3}{2}$ أي $x>\sqrt{e^3}$

x	0		$\sqrt{e^3}$		$+\infty$
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\sqrt{e^3}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e^3}$ ومنه النقطة $E\left(\sqrt{e^3};f\left(\sqrt{e^3}\right)\right)$ هي نقطة انعطاف للمنحني (C).

جـ ـ كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O.

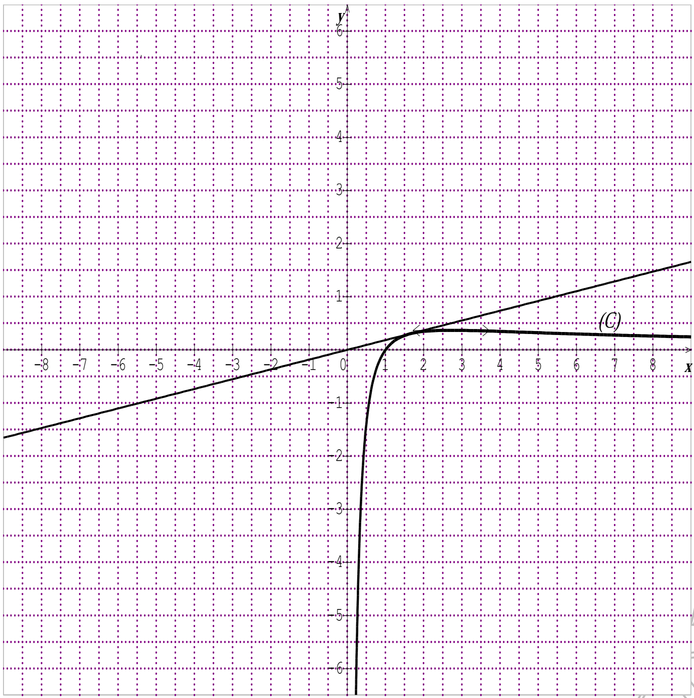
معادلة المماس من الشكل $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$O\in(D)$ معناه $0=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}\right)+\frac{\ln x_0}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-1+2\ln x_0}{x_0}=0$

aziz_mus1@hotmail.fr

وتكافئ $\ln x_0 = \frac{1}{2}$ أي $x_0 = \sqrt{e}$

إذن معادلة المماس هي $y = f'\left(\sqrt{e}\right)x$ أي $y = \frac{1}{2e}x$



3. رسم (D) و (C).

4. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

$m^x = x$ تكافئ $\ln m^x = \ln x$ وتكافئ $x \ln m = \ln x$

وتكافئ $\ln m = \frac{\ln x}{x}$ أي $f(x) = \ln m$

إذا كان $0 < m \le 1$ فإنّ $\ln m \le 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا وحيدا.

إذا كان $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلين متمايزين

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $\ln m = \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل حلا مضاعفا.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإنّ $\ln m > \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.

التمرين السادس☹

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g.
2. احسب $g(1)$ ثمّ استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

II) الدّالة العدديـــة f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ ـ احسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

   ب ـ احسب $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

2. أ ـ بيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإنّ $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f.

   ب ـ شكل جدول تغيّرات الدّالة f.

3. أ ـ بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

   ب ـ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

4. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتيها.
5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f).

aziz_mus1@hotmail.fr

الحل☺

I) الدّالة العددية g معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=1-x^2-\ln x$.

1. دراسة اتجاه تغيّر الدّالة g.

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=-2x-\dfrac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$، $g'(x)<0$ وبالتالي الدّالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

2. حساب $g(1)$ **واستنتاج تبعا لقيم** x **إشارة** $g(x)$.

$g(1)=1-1^2-\ln 1=0$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) الدّالة العدديــة f معرّفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-1-\dfrac{\ln x}{x}$

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$.

ب ـ حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=+\infty$.

تفسير النتيجة هندسيا.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

2. أ ـ تبيين أنّه من أجل كل x **من** $]0;+\infty[$ **فإنّ** $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=1-\left[\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}\right]=\frac{x^2-1+\ln x}{x^2}=\frac{-g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x\in]0;1[$، $g(x)>0$ ومنه $f'(x)<0$.

ومن أجل $x\in]1;+\infty[$، $g(x)<0$ ومنه $f'(x)>0$

إذن الدّالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدّالة f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

aziz_mus1@hotmail.fr

3. أ ـ تبيين أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln x}{x}=0$ ومنه المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب ـ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

لدينا $f(x)-(x-1)=\dfrac{-\ln x}{x}$ ومنه إشارة $f(x)-(x-1)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

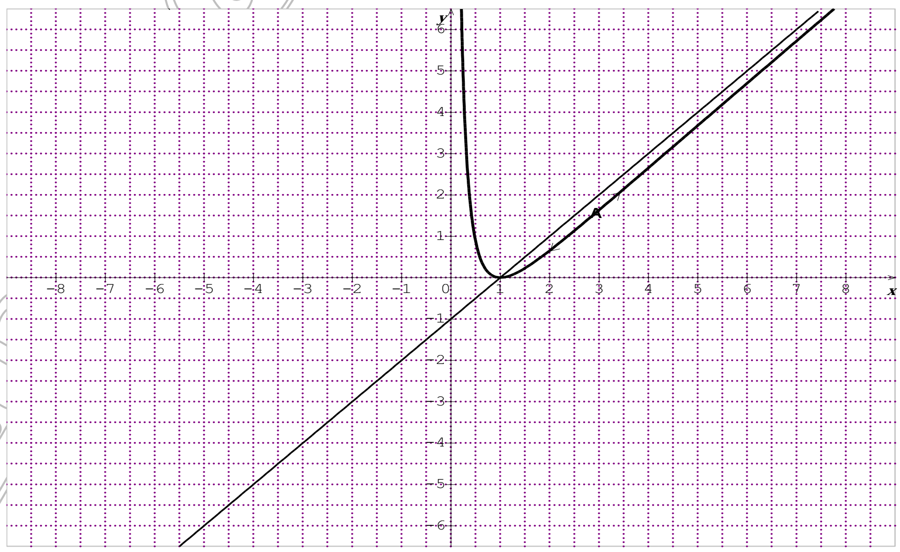
x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	‖	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$	(C_f) تحت (D)	

4. تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x-1-\dfrac{1}{e}$ يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتيها.

$f'(x_0)=1$ تعني $\dfrac{-g(x)}{x^2}=1$ ويكافئ $x^2-1+\ln x=x^2$ ويكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$

ولدينا $f(e)=e-1-\dfrac{1}{e}$ و $y=e-1-\dfrac{1}{e}$ إذن المستقيم (Δ) يمسّ المنحنى (C_f) في النقطة $A\left(e;e-1-\dfrac{1}{e}\right)$

5. رسم (Δ)، (D) و (C_f).



التمرين السابع☹

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثمّ شكل جدول تغيراتها.

2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

3) أنشئ (T) و (C_f).

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ب) أنشئ المنحنى (C_h) إعتمادا على المنحنى (C_f).

جـ) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

الحل☺

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+\dfrac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) حساب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=-\infty$

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{2\ln x}{x}=1$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=0$ (محور التراتيب).

ولدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=1$ بجوار $+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $x^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x)=0$ تعني $1-\ln x=0$ يكافئ $\ln x=1$ أي $x=e$.

$f'(x)>0$ تعني $1-\ln x>0$ يكافئ $\ln x<1$ أي $0<x<e$

$f'(x)<0$ تعني $1-\ln x<0$ يكافئ $\ln x>1$ أي $x>e$.

إذن الدّالة f متزايدة تماما على $]0;e]$ ومتناقصة تماما على $[e;+\infty[$.

aziz_mus1@hotmail.fr

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{2}{e}$	$\searrow$	1

2) أ)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y=1$.

لدينا $f(x)-1=\dfrac{2\ln x}{x}$

$f(x)-1=0$ معناه $\dfrac{2\ln x}{x}=0$ تكافئ $\ln x=0$ أي $x=1$.

$f(x)-1>0$ معناه $\dfrac{2\ln x}{x}>0$ تكافئ $\ln x>0$ أي $x>1$

$f(x)-1<0$ معناه $\dfrac{2\ln x}{x}<0$ تكافئ $\ln x<0$ أي $0<x<1$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-1$		$-$	0	$+$	
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	(C_f) فوق (Δ)	

ب)كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=2(x-1)+1$ أي $(T): y=2x-1$

جـ)تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا α، حيث $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0;1[$ فهي مستمرة على المجال $\left[e^{-0,4};e^{-0,3}\right]$ ولدينا $f\left(e^{-0,4}\right)\approx-0,19$، $f\left(e^{-0,3}\right)\approx 0,19$ أي $f\left(e^{-0,4}\right)\times f\left(e^{-0,4}\right)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $\left]e^{-0,4};e^{-0,3}\right[$ بحيث $f(\alpha)=0$ وبما أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $]0;1[$ فإنّ α وحيد .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي: $h(x)=1+\dfrac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

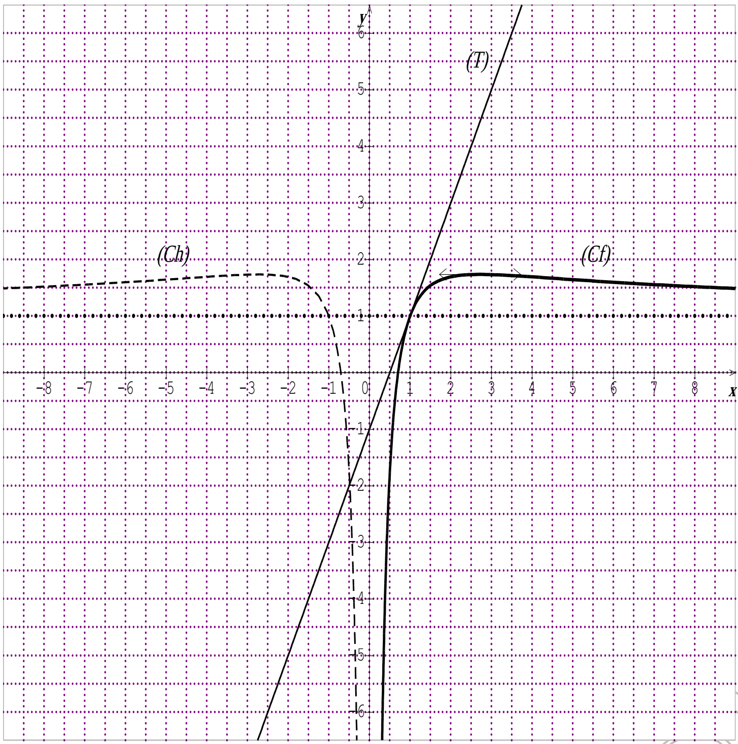
أ) تبيين أنّه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x)-h(-x)=0$. ماذا تستنتج ؟

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x)-h(-x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}-1-\frac{2\ln|-x|}{|-x|}=\frac{2\ln|x|}{|x|}-\frac{2\ln|x|}{|x|}=0$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$

ولدينا $h(x)-h(-x)=0$ ومنه $h(x)=h(-x)$ إذن الدّالة h زوجية.



ب) الرسم

ج) المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m،

عدد حلول المعادلة: $\ln x^2=(m-1)|x|$.

$\ln x^2=(m-1)|x|$ تكافئ $m=\dfrac{\ln x^2}{|x|}+1$ تكافئ

$m=\dfrac{2\ln|x|}{|x|}+1$ أي $h(x)=m$.

حلول المعادلة إن وُجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_h) والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y=m$.

إذا كان $m\leq 1$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $1<m<1+\dfrac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m=1+\dfrac{2}{e}$ فإنّ المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

$m>1+\dfrac{2}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

<u>التمرين الثامن</u>☹

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.
2. برهن أنّ الدّالة f زوجية.
3. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.
5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.
6. ارسم (Δ)، (Δ') و (C_f).
7. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

- استنتج اتجاه تغيّر الدالة g.

ب - شكّل جدول تغيّرات الدالة g.

الحل☺

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

$\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. تبيين أنّه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)$.

لدينا $f(x)=\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{-x}\right)=f(x)=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}\left(e^{x}+1\right)$

$$=\frac{1}{2}x+\ln e^{-x}+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$=\frac{1}{2}x-x+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

$$=-\frac{1}{2}x+\ln\left(e^{x}+1\right)$$

2. إثبات أنّ الدّالة f زوجية.

من أجل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ و لدينا $f(-x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=f(x)$ ومنه الدالة f زوجية.

3. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}x+\ln\left(1+e^{x}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{2}x=+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(-x)=\lim_{t\to-\infty}f(t)=+\infty$$

4. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f .

$$f'(x)=\frac{-1}{2}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{-1-e^{x}+2e^{x}}{2\left(e^{x}+1\right)}=\frac{e^{x}-1}{2\left(e^{x}+1\right)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $2\left(e^{x}+1\right)>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $e^{x}-1$.

$f'(x)=0$ تعني $e^{x}-1=0$ ويكافئ $e^{x}=1$ أي $x=0$

$f'(x)>0$ تعني $e^{x}-1>0$ ويكافئ $e^{x}>1$ أي $x>0$

$f'(x)<0$ تعني $e^{x}-1<0$ ويكافئ $e^{x}<1$ أي $x<0$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

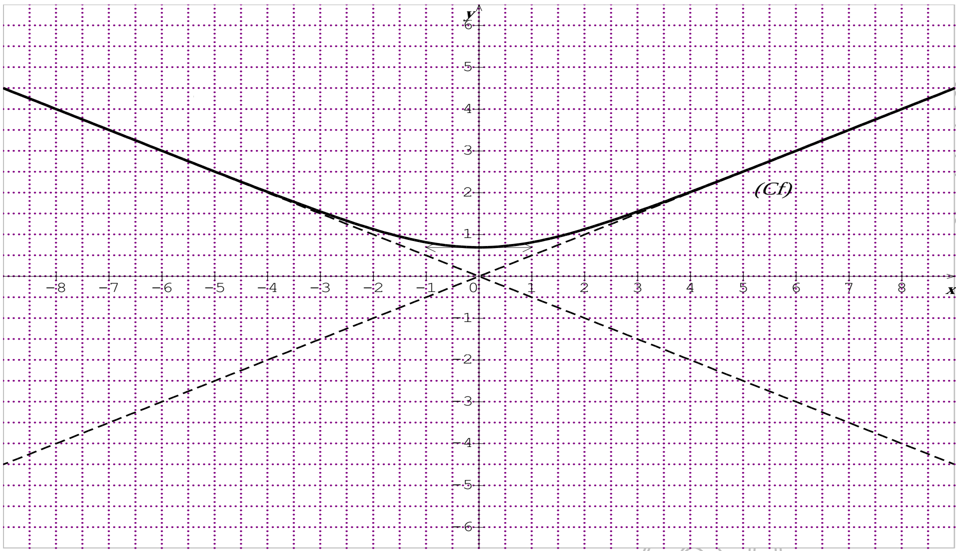
aziz_mus1@hotmail.fr

5.إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

لدينا $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^{-x})=0 = \lim_{x\to+\infty} f(x)-\frac{1}{2}x$ إذن للمنحني (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=\frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x\to-\infty} \ln(1+e^{x})=0 = \lim_{x\to-\infty} f(x)-\left(-\frac{1}{2}x\right)$ إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته $y=-\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.

6.رسم (Δ)،(Δ') و (C_f).



7. نعتبر الدالة g المعرّفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ ـ التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;+\infty[$، $g(x)=f(\ln x)$.

لدينا $g(x)=\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\ln x=-\frac{1}{2}\ln x+\ln\left(e^{\ln x}+1\right)=f(\ln x)$

ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدالة g.

نلاحظ أنّ الدالة g هي مركب الدّالة $\ln$ متبوعة بالدّالة f $(g=f\circ\ln)$

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية $\ln$ متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0;+\infty[$ والدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ إذن للدالتين نفس الإتجاه وبالتالي تركيبهما يكون دالة متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$.

ب ـ جدول تغيّرات الدالة g.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\ln 2$ ↗	$+\infty$

<u>التمرين التاسع</u>☹

I- الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) ادرس تغيّرات الدالة g، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

2) استنتج أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1)أ) احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2)أ)بيّن أنّه، من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

جـ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أن $0<\alpha<0,5$.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f) .

جـ) عيّن بيانيا قيّم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

<u>الحل</u>☺

I- g الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+2x+4-2\ln(x+1)$

1) دراسة تغيّرات الدالة g .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x+4-2\ln(x+1)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} 2\ln(x+1)=-\infty$ و

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} x^2+2x+4=3$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+1\left(\frac{x^2+2x+4}{x+1}-2\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right)=+\infty$$

الدّالة g تقبل الإشتقاق على $]-1;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x^2+4x}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$

من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$ ، $x+1>0$ و $x+2>0$ ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة x .

إذن الدّالة g متناقصة تماما على المجال $]-1;0]$ ومتزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

aziz_mus1@hotmail.fr

جدول تغيّرات الدّالة g .

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

2) استنتاج أنّه، من أجل كل x **من المجال** $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)\geq 4$ وبالتالي $g(x)>0$.

II- f الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1)أ) حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$.

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty \text{ ومنه } \lim_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=\lim_{x \xrightarrow{>} -1} x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$$

تفسير النتيجة بيانيا.

لدينا $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)=-\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$.

ب) حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=x-\frac{1}{x+1}+\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=+\infty \text{ لأنّ } \lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x+1)}{x+1}=0 \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

2)أ) تبيين أنّه، من أجل كل x **من المجال** $]-1;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، **حيث** f' **هي مشتقة الدالة** f .

$$f'(x)=1-\frac{\frac{-2}{x+1}(x+1)-1+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=1-\frac{-3+2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب)دراسة اتجاه تغيّر الدالة f **على المجال** $]-1;+\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(x)>0$ و $(x+1)^2>0$ إذن $f'(x)>0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f.

x	-1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

جـ) تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$، ثمّ التحقق أن $0<\alpha<0,5$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;+\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;+\infty[$ وبما أنّ $f(0)\times f(0,5)<0$ فإنّ $0<\alpha<0,5$.

3) أ)تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{x+1}+2\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}=0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب)دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

لدينا $f(x)-x=-\dfrac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\dfrac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$ ومنه إشارة $f(x)-x$ هي من نفس إشارة $2\ln(x+1)-1$

$f(x)-x=0$ معناه $2\ln(x+1)-1=0$ وتكافئ $\ln(x+1)=\dfrac{1}{2}$ أي $x=\sqrt{e}-1$

$f(x)-x>0$ معناه $2\ln(x+1)-1>0$ وتكافئ $\ln(x+1)>\dfrac{1}{2}$ أي $x>\sqrt{e}-1$

x	-1	$\sqrt{e}-1$	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياها $(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1)$.

4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{e^3}}$، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0.

أ)حساب x_0.

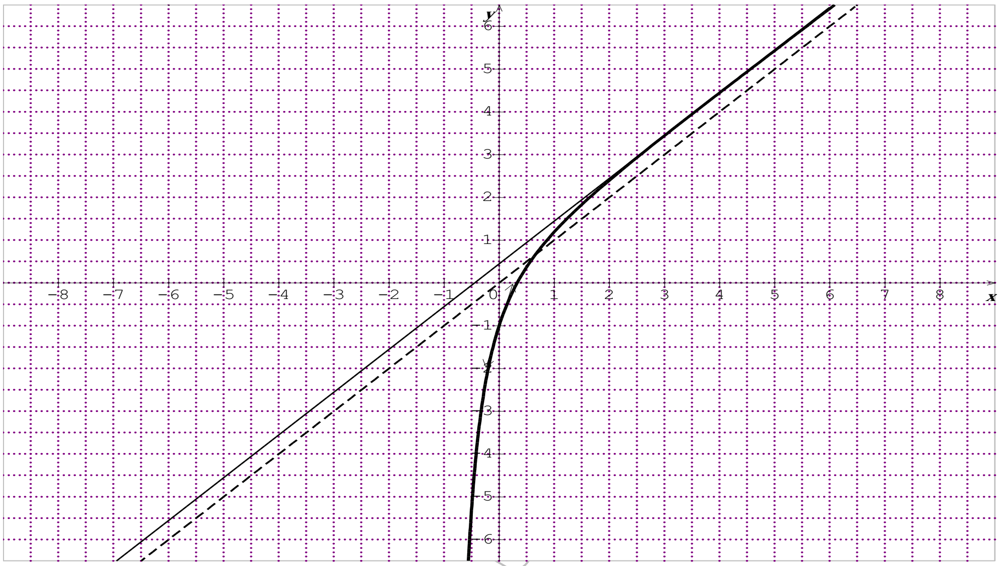
المستقيم (T)ميلة يساوي 1 ومنه $f'(x_0)=1$.

$f'(x_0)=1$ معناه $\dfrac{g(x_0)}{(x_0+1)^2}=1$ تكافئ $x_0^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)=x_0^2+2x_0+1$ وتكافئ $\ln(x_0+1)=\dfrac{3}{2}$

أي $x_0=e^{\frac{3}{2}}-1$

Mostefai A/Elaziz
aziz_mus1@hotmail.fr

ب)رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى (C_f).



جـ)تعيين بيانيا قيّم الوسيط الحقيقي m، بحيث تقبل المعادلة $f(x)=x+m$ حلّين متمايزين.

المعادلة $f(x)=x+m$ تقبل حلّين متمايزين من أجل قيّم m من المجال $\left]0;\frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$.

<u>التمرين العاشر</u>☹

I ـ لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. ادرس تغيّرات الدّالة g ثم شكل جدول تغيّراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
3. تحقق أنّ $g(1)=1$ وبيّن أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخرا α حيث $0,1<\alpha<0,3$.

II ـ لتكن الدّالة f المعرّفة على كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا.
ب ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.
2. أ ـ بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=g(x)$.
ب ـ استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.
جـ ـ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.
د ـ عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.
3. أ ـ أثبت أنّ $f(x)=x\left[g(x)-x+1\right]$ ، ثم احسب $f(\alpha)$.
ب ـ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
4. أثبت أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1،يطلب كتابة معادلة كل منهما.

5. ارسم (T) ، (T') والمنحني (C_f).

الحل☺

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=2x-1-\ln x$

1. دراسة تغيّرات الدّالة g

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x)=\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x-1-\ln x=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا: $g'(x)=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}$

إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $2x-1$ لأنّ $x>0$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

الدّالة g متناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ و متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$.

جدول تغيّرات الدالة g.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

لدينا الدّالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ $g(x)\geq \ln 2$

وبالتالي $g(x)>0$.

3. التحقق أنّ $g(1)=1$

$g(1)=2(1)-1-\ln 1=1$

تبيين أنّ المعادلة $g(x)=1$ تقبل حلا آخرا α حيث $0{,}1<\alpha<0{,}3$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ وبالخصوص على المجال $[0{,}1;0{,}3]$ ولدينا $g(0{,}1)\approx 1{,}5$ ، $g(0{,}3)\approx 0{,}8$ أي $g(0{,}3)<1<g(0{,}1)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0{,}1;0{,}3[$ بحيث $g(\alpha)=1$.

II - لتكن الدّالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x^2-x\ln x$ و $f(0)=0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ ـ حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} \dfrac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \frac{x^2 - x\ln x}{x} = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الإشتقاق على يمين 0 ومنحناها البياني (C_f) له نصف مماس موازٍ لمحور التراتيب

ب ـ **حساب** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ ـ تبيين أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x **من المجال** $]0;+\infty[$ **:** $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x}.x\right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب ـ استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f.

من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$

جـ ـ بيّن أنّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف ω **يطلب تعيينها.**

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$.

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f''(x)$ تنعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من إشارتها ومنه النقطة $\omega\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

د ـ تعيين دون حساب $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ **وفسّر النتيجة بيانيا.**

الدالة f تقبل الإشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالأخص عند α ولدينا:

$\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$ ؛ وتفسير ذلك وجود مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها α ميله يساوي 1.

3. أ ـ إثبات أنّ $f(x) = x\left[g(x) - x + 1\right]$ ،

$$f(x) = x^2 - x\ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x\left[g(x) - x + 1\right]$$

حساب $f(\alpha)$.

$f(\alpha)=\alpha\left[g(\alpha)-\alpha+1\right]=\alpha(1-\alpha+1)=\alpha(2-\alpha)$.

ب ـ حصرا لـ $f(\alpha)$.

$0,1<\alpha<0,3$ معناه $-0,3<-\alpha<-0,1$ يكافئ $1,7<2-\alpha<1,9$

ومنه $1,7\times 0,1<\alpha(2-\alpha)<1,9\times 0,3$ أي $0,17<f(\alpha)<0,57$.

4. إثبات أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1.

$f'(x_0)=1$ يكافئ $g(x_0)=1$ ومنه $x_0=1$ أو $x_0=\alpha$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1 عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و α .

كتابة معادلة كل منهما.

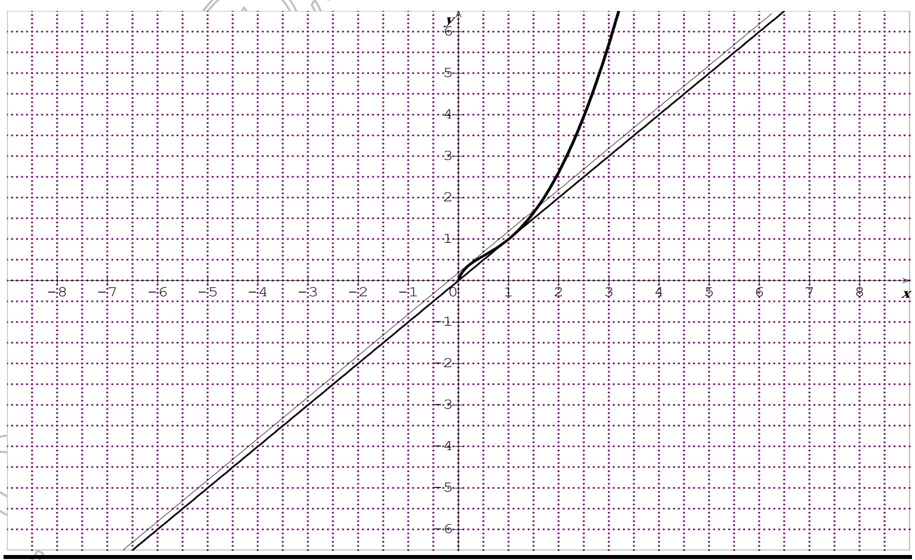
معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ومنه $y=(x-1)+1$ أي $(T):y=x$

معادلة المماس (T') عند النقطة ذات الفاصلة α.

$y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$ ومنه $y=(x-\alpha)+\alpha(2-\alpha)$ أي $(T'):y=x-\alpha^2+\alpha$.

5. رسم (T) ، (T') والمنحني (C_f).



<u>التمرين الحادي عشر</u> ☹

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. ادرس تغيّرات الدالة f .
2. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta):y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.
3. احسب $f(-x)+f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-0,71;-0,70[$

5. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلةالمماس (T).

6. أُرسم المماس (T) والمنحنى (C_f).

7. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x)=mx+1$

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\dfrac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.

ب) دون دراسة تغيّرات h، أُرسم (C_h)، علل ذلك.

الحل☺

لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=1-\dfrac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. **دراسة تغيّرات الدالة** f .

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1-\frac{2\ln -x}{x}=\lim_{t\to+\infty} 1+\frac{2\ln t}{t}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2\ln x}{x}=1$$

لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$

و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x^2=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\ln x^2}{x}=-\infty$ إذن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1-\dfrac{\ln x^2}{x}=+\infty$.

$$f'(x)=-\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x-\ln x^2}{x^2}=\frac{\ln x^2-2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2-2$.

$f'(x)=0$ معناه $\ln x^2-2=0$ ويكافئ $\ln x^2=2$ ويكافئ $x^2=e^2$ أي $x=e$ أو $x=-e$

$f'(x)>0$ معناه $\ln x^2-2>0$ ويكافئ $\ln x^2>2$ ويكافئ $x^2>e^2$ أي $x>e$ أو $x<-e$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	

الدّالة f متزايدة على كل من $]-\infty;-e]$ و $[e;+\infty[$ ومتناقصة على كل من $[-e;0[$ و $]0;e]$.

جدول تغيّرات الدّالة f.

x	$-\infty$		$-e$		0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\frac{e+2}{e}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\frac{e-2}{e}$	$\nearrow$	1

2. إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $(\Delta): y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

$f(x)=1$ معناه $1-\frac{\ln x^2}{x}=1$ يكافئ $\ln x^2=0$ ويكافئ $x^2=1$ أي $x=1$ أو $x=-1$

إذن $(C_f)\cap(\Delta)=\{A(1;1),B(-1;1)\}$

3. حساب $f(-x)+f(x)$.

$$f(-x)+f(x)=1-\frac{\ln(-x)^2}{-x}+1-\frac{\ln x^2}{x}=2+\frac{\ln x^2}{x}-\frac{\ln x^2}{x}=2$$

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$ ولدينا $f(-x)+f(x)=2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,71;-0,70[$

الدّالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[-0,71;-0,70]$ ولدينا $f(-0,71)\approx 0,04$ ، $f(-0,70)\approx -0,02$ أي $f(-0,71)\times f(-0,70)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α في المجال $]-0,71;-0,70[$ بحيث $f(\alpha)=0$.

5. إثبات أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في نقطتين.

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$A(0;1)\in(T)$ معناه $1=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$ وتكافئ $-x_0\left(\frac{\ln x_0^2-2}{x_0^2}\right)+1-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=1$

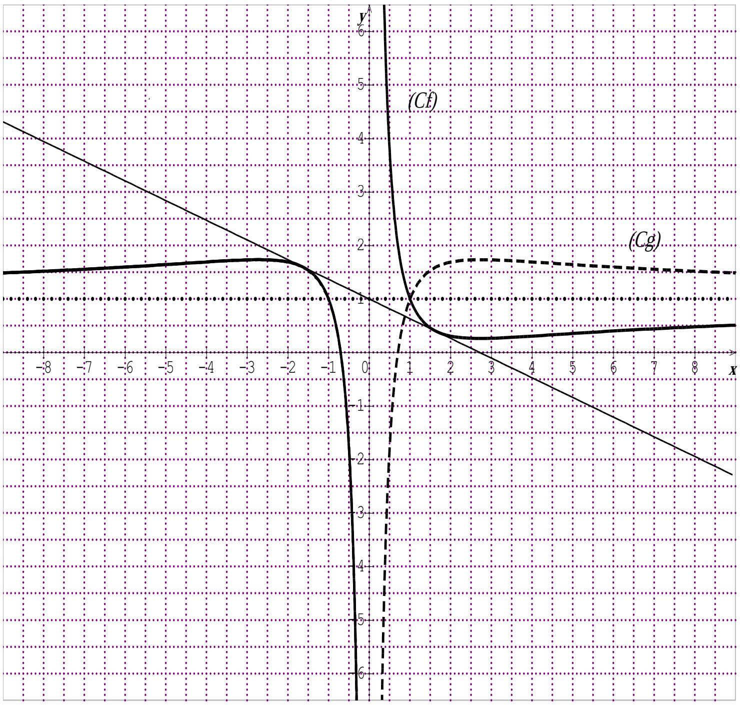
وتكافئ $\left(\frac{-\ln x_0^2+2}{x_0}\right)-\frac{\ln x_0^2}{x_0}=0$ وتكافئ $\frac{-2\ln x_0^2+2}{x_0}=0$ وتكافئ $\ln x_0^2=1$ ومنه $x_0^2=e$

أي $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$ ولدينا $f'(\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ و $f'(-\sqrt{e})=-\frac{1}{e}$ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسّ المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e};f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e};f(-\sqrt{e}))$.

كتابة معادلةالمماس (T).

$y=f'(\sqrt{e})(x-\sqrt{e})+f(\sqrt{e})$ ومنه $y=\frac{-1}{e}x+1$.

aziz_mus1@hotmail.fr



6. **رسم المماس (T) والمنحنى (C_f).**

7. **المناقشة بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:** $f(x)=mx+1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y=mx+1$.

إذا كان $m<-\frac{1}{e}$ فإنّ المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m=-\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e}<m<0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m\geq 0$ فإنّ المعادلة تقبل حلين.

8. h الدالة العددية للمتغيّر الحقيقي x حيث: $h(x)=1+\frac{\ln x^2}{|x|}$.

أ) تبيين أنّ h دالة زوجية.

من أجل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا $-x\in\mathbb{R}^*$.

ولدينا $h(-x)=1+\frac{\ln(-x)^2}{|-x|}=1+\frac{\ln x^2}{|x|}=h(x)$

$$\begin{cases} h(x)=1+\frac{\ln x^2}{x};x>0 \\ h(x)=1+\frac{\ln x^2}{-x};x<0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} h(x)=f(-x);x>0 \\ h(x)=f(x);x<0 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty;0[$ وبما أنّ h زوجية فإنّ (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب.

<u>التمرين الثاني عشر</u>☹

I) الدّالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.
3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.
4. بيّن أنّ المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياها.