الدوال

1- الدوال الأسية

أ- النهايات

* $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$
* $\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$
* $\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x}} = 0$
* $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1$

مثال

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x} - x}{e^{x} - 1} = \text{ح-ع-ت}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^{x}}\left(1 - \frac{x}{e^{x}}\right)}{\cancel{e^{x}}\left(1 - \frac{1}{e^{x}}\right)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cancel{\frac{x}{e^{x}}}}{1 - \cancel{\frac{x}{e^{x}}}} = \frac{1}{1} = 1$$

ملاحظة:

كي نجتنب حالة عدم تعيين أخرج e عامل مشترك أو أخرج x عاملا مشتركا في بعض الحالات.

ب- خواص

1) $e^{0} = 1$

2) $e^{\ln x} = x$

3) $e^{x} = 2 \iff x = \ln 2$

4) $e^{x} = -3$ (مستحيل)، $e^{x} > 0$

ج- الاشتقاق

* $f(x) = e^{3x+1}$

$f'(x) = 3e^{3x+1}$

* $g(x) = x e^{x}$

$g'(x) = 1e^{x} + e^{x}(x)$

$= (1 + x) e^{x}$

2- الدوال اللوغاريتمية

أ- النهايات

* $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$
* $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

مثال

1) $\lim_{x \to +\infty} (2x - \ln x) = \text{ح-ع-ت}$

$= \lim_{x \to +\infty} \cancel{x}\left(2 - \cancel{\frac{\ln x}{x}}\right) = +\infty$

2) $\lim_{x \to -1^{+}} \left[\frac{3}{\cancel{x+1}} + \ln(\cancel{x+1})\right] = \text{ح-ع-ت}$

$= \lim_{x \to -1^{+}} \frac{1}{\cancel{x+1}} \left[3 + (\cancel{x+1}) \ln(x+1)\right] = +\infty$

ملاحظة:

لكي نجتنب حالة عدم تعيين عند ∞ نخرج ما داخل الـ $\ln$ عاملا مشتركا أما إذا كانت حالة عدم تعيين عند عدد أخرج مقلوب ما داخل الـ $\ln$ عاملا مشتركا، تبقى ملاحظة نسبية.

ملاحظة خطيرة :

رد بالك دير هما حالة عدم تعيين : $\frac{0}{\infty}=0$ ، $\frac{\infty}{0}=\infty$

$\frac{A}{\infty}=0$ ، $\frac{A}{0}=\infty$

④- خواص :

1)- $\ln 1 = 0$

2)- $\ln e^{x} = x$

3)- $\ln x = 2$ يكافئ : $x = e^{2}$

4)- $\ln x = -3$ يكافئ : $x = e^{-3}$

⑤- الاشتقاق :

• $f(x)=\ln(3x+1)$

$f'(x)=\frac{3}{3x+1}$

• $g(x)=x\ln x$

$g'(x)=1\ln x+\frac{1}{x}x$

$=\ln x+1$

③- الحوايس اللي لازم تعرفها

①- اثبات $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل بجوار ∞ :

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$$

②- الوضعية :

• $f(x)-(ax+b)<0$

C_f تحت (Δ).

• $f(x)-(ax+b)>0$

C_f فوق (Δ).

مثال :

$f(x)=x+2+\frac{\ln x}{x}$

اثبات أن : $y=x+2$ مستقيم مقارب مائل :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

الوضعية :

$f(x)-(x+2)=\frac{\ln x}{x}$

$\ln x=0$ يكافئ :

$\boxed{x=1}$

x	0	1	$+\infty$
$f-y$	$-$	0	$+$
الوضعية	C_f تحت (Δ)	تقاطع	C_f فوق (Δ)

ملاحظة :

$0<x<1$ يعني : $\ln x<0$

$x>1$ يعني : $\ln x>0$

③- المستقيم المقارب العمودي :

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

$x=a$ مستقيم مقارب عمودي

بجوار a ، نجده في مجموعة التعريف وهو العدد غير المعرف فيه الدالة

$$\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$$

$x=0$ م.م عمودي

④- المستقيم المقارب الأفقي:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = a$

$y=a$ مستقيم مقارب أفقي بجوار ∞

نجدوه في النهايات:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$y=0$ م.م أفقي

⑤- معادلة المماس عند x_0:

$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

مثال: $x_0=-2$.

$f(x)=x^2+6x-1$

$f'(x)=2x+6$.

$f(-2)=-9$ ، $f'(-2)=2$

$y=f'(-2)(x-(-2))+f(-2)$

$y=2(x+2)-9$

$\boxed{y=2x-5}$

⑥- نقطة الانعطاف:

$f''(x)=0$ $\quad (x_0 , f(x_0))$

مثال: $f(x)=x^3+3x^2-1$.

$f'(x)=3x^2+6x$

$f''(x)=6x+6$.

نحل $f''(x)=0$

$6x+6=0$ أي $x=-1$

$W(-1, f(-1))$ أي $W(-1,1)$

⑦- نقطة تقاطع C_f مع المحورين:

أ- مع محور الفواصل:

$f(x)=0$

$(x_0 , 0)$

ب- مع محور التراتيب:

$f(0)=?$ ، $(0, y_0)$

⑧- التناظر:

أ- مركز تناظر:

$W(\alpha,\beta)$

$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

مثال: ليكن لدينا:

$f(4-x)+f(x)=6$

نستنتج: $W(2,3)$

ب- محور تناظر: $x=\alpha$

$f(2\alpha-x)=f(x)$.

⑨- الانسحاب:

$g(x)=f(x+a)+b$

C_g صورة C_f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{-a}{b}$ ، $f(x)=e^x$

$g(x)=e^{x+2}+3$

C_g صورة C_f بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{-2}{3}$

⑩- عقاييس المعاملات: a, b, c

مثال: ليكن لدينا أوجد a ، b ، c علما أن C_f يشمل $A(2,3)$ ويقبل مماس عند A معامل توجيهه 4 و يشمل ذروة أي قيمة حدية هي $B(-1,2)$ ، ويشمل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند الفاصلة 5

الحل: $f(2)=3$ يشمل A

$f'(2)=4$ يقبل مماس عند A .

الذروة : $(-1\ ،\ 2)$

$f(-1) = 2$ } يشملها C_f .

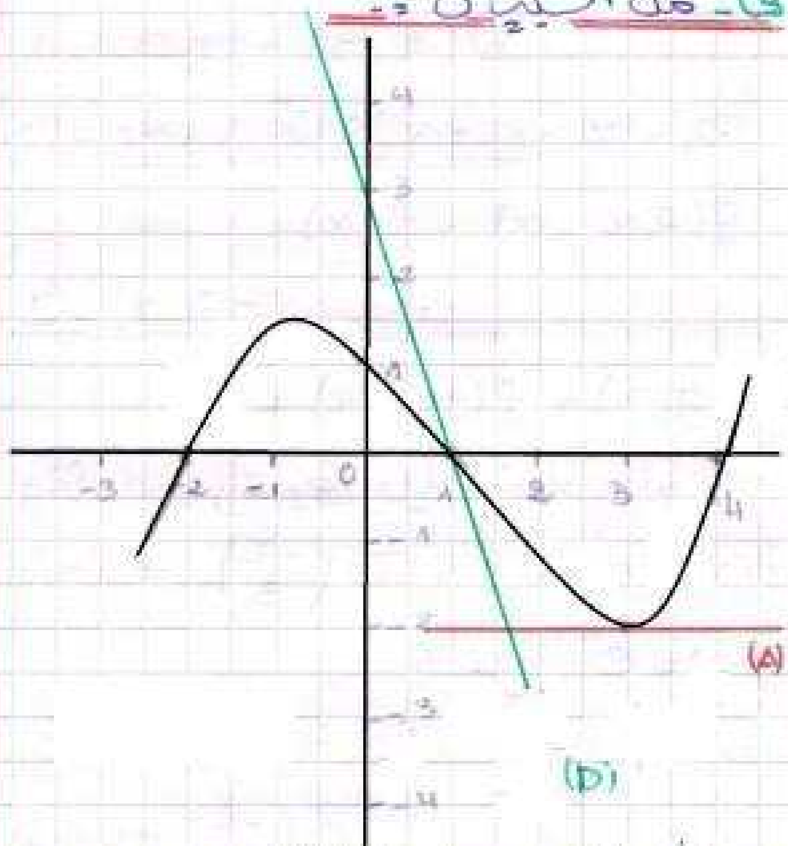
$f'(-1) = 0$ } وتنعدم المشتقة .

مماسا أفقي $f'(5) = 0$

② - إذا أعطاك العبارة وقالك جيب a ، b ، c وحد المقامات و طابق

"بلاما تزيدوا تفصلوا"

③ - من البيان :-



و C_f يقبل مماسا (Δ) عند $x = 3$ ،

و تقبل مماسا (D) عند 1

جيب من البيان : $f'(3)$ ، $f(1)$ ، $f'(1)$

المماس موازي لمحور الفواصل: $f'(3) = 0$

$f(1) = 0$

نخرج نقطتين ينوت بيهم المماس (D)

$A(0,3)$ ، $B(1,0)$

قيمة $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3-0}{0-1} = -3.$$

⑪ - الوسيط m :-

1) $f(x) = m$

نرسم مستقيمات أفقية موازية لمحور الفواصل و تقاطعهم مع الدالة هي الحلول.

2) $f(x) = m + 2$

نفس المناقشة السابقة

$$0 < m + 2 < 3$$

$$-2 < m < 1$$

3) $f(x) = x + m$

نجيب المستقيمات لي يكونو في معامل التوجيه $y = x + m$

$y = x + 2$

مطابقة : $m = 2$ ، $m > 2$ ، $m < 2$

⑫ - الاستمرارية :-

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$ مستمرة عند 2

* كل دالة مستمرة على مجال تعريفها.

⑬ - الإشتقاق :- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

أو : $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

مثال :- $f(x) = \ln x$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$$

* قابلة للاشتقاق عند 1

$f'(1) = 1$ و تقبل مماسا عند 1

14 - الدوال الأصلية

1)- $f(x) = 2x^3 + 5x - 1$

$F(x) = \frac{2x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} - x + C$

2)- $f(x) = \frac{3}{3x-1}$

$F(x) = \ln(3x-1) + C$

3)- $f(x) = e^{2x-1}$

$F(x) = \frac{1}{2} e^{2x-1}$

4)- $f(x) = 2(2x-1)^7$

$F(x) = \frac{(2x-1)^8}{8} + C$

15 - المعادلات التفاضلية:

$y' = ay \Longrightarrow f(x) = Ce^{ax}$

$y' = ay + b \Longrightarrow f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$

مثال:- $y' - 2y = xe^{x}$ ...... ①

① - أوجد a ، b حتى تكون $u(x)$

حل لـ ①:

$u(x) = (ax+b)e^{x}$

عوض: $u' - 2u = xe^{x}$

طابق نجد: $a = -1$

$b = -1$

$u(x) = (-x-1)e^{x}$

② - حل المعادلة (2):

$y' - 2y = 0$ ...... ②

$y' = 2y \rightarrow y(x) = Ce^{2x}$

③ - حلول (1) هي: $y + u$

$f(x) = u(x) + y(x)$

$f(x) = (-x-1)e^{x} + Ce^{2x}$

الحل الخاص: $f(0) = 2$

$(-0-1)e^{0} + Ce^{0} = 2$

$\boxed{C = 3}$

$\boxed{f(x) = (-x-1)e^{x} + 3e^{2x}}$

بالتوفيق للجميع

الهندسة الفضائية

1. المسافة بين نقطتين :-

$A(1,0,-1)$ ، $B(2,2,3)$

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2+(3+1)^2}=\sqrt{21}$$

2. المسافة بين نقطة ومستوي :-

$A(1,1,-2)$

$(P): 2x-3y+4z+5=0$

$$d(A,P)=\frac{|2(1)-3(1)+4(-2)+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+(4)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{29}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{29}}$$

3. أ. التوازي :-

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}$ ، $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

نقول أن $\vec{u} \parallel \vec{v}$ إذا كان $\vec{u}=k\vec{v}$:

$$\frac{2}{1}=\frac{-4}{-2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

إذن متوازيان $\Rightarrow \vec{u}=2\vec{v}$.

ب. التعامد :-

$\vec{u}(2,1,0)$ ، $\vec{v}(2,-4,1)$

نقول أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان

$\vec{v}\cdot\vec{u}=0$

$2(2)-4(1)+1(0)=0$

ومنه متعامدان.

ملاحظة :-

1- كل شعاعان غير متوازيان فهما متقاطعان.

2- نقول على أن النقط A ، B ، C تعين مستوي أو ليست على استقامة واحدة يكفي أن تثبت أن $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا (غير متوازيان)

4- معادلة ديكارتية لمستوي :-

أ- يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له :

$A(1,2,3)$ ، $\vec{n}(3,2,-2)$

$ax+by+cz+d=0$

$3x+2y-2z+d=0$

نعوض A لإيجاد d :

$3(1)+2(2)-2(3)+d=0$

$\boxed{d=-1}$

$(P): 3x+2y-2z-1=0$

ب- يشمل A ، B ، C :-

$A(1,1,1)$ ، $B(2,3,4)$ ، $C(-1,2,4)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظمي ، $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ شعاعي توجيه لـ (P) :

$\vec{n}\perp\vec{AB}$ ، $\vec{n}\perp\vec{AC}$ يعني : $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{AC}=0\end{cases}$

$$\begin{cases}a+2b+3c=0\\ -2a+b+3c=0\end{cases}$$

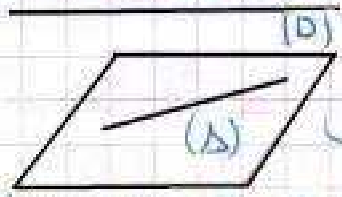
افرض a أو b أو c وساويها بـ 1

ثم أكمل نفس خطوات المستوي تاع (P) السابقة.

ج- يشمل A ويعامد مستقيم (Δ) :-

ديرو في بالكم بلي $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) هو $\vec{n}$ تاع المستوي وعندك النقطة A ، واش قاعد تستنى !!!

هـ- مستوي يحوي (Δ) ويوازي (D):



$\vec{u}_D$ و $\vec{u}_\Delta$ شعاعي توجيه لـ (P)، نجيب بيهم الناظمي وافرض قيمة لـ (t) في (Δ) نجد نقطة يفوت بيها (Δ) أي يفوت بيها (P) ثم أكمل الخطوات

و- تمثيل وسيطي لمستوي:

$A(-3,2,5)$، $\vec{v}(3,-2,1)$

$\vec{u}(1,2,4)$. نفرض: $M \in (P)$

$$\vec{AM} = t\vec{v} + K\vec{u}$$

$$(P)\begin{cases} x = 3t + K - 3 \\ y = -2t + 2K + 2 \\ z = t + 4K + 5 \end{cases}$$

$(t, k) \in \mathbb{R}$

6- تمثيل وسيطي لمستقيم (Δ):

أ- يشمل A و $\vec{u}$ توجيها له:

$A(1,-2,3)$، $\vec{u}(4,5,-6)$

نفرض $M \in (\Delta)$ وإذن: $\vec{AM} = t\vec{u}$

$$(\Delta)\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 5t - 2 \\ z = -6t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ب- يشمل A و B:

دير في بالك $\vec{AB}$ هو نفسه $\vec{u}$ وعندك زوج نقاط A أو B عوض واحدة فيهم وسكر فمك !!!

ج- يشمل A ويعامد مستوي (P):

ما تبقاوش نعاودو، عندك $\vec{n}$ نتاع المستوي هو نفسه $\vec{u}$ نتاع المستقيم وعندك A، أدبا توكل على ربي.

7- معادلة الكرة (S):

أ- مركزها $W(1,2,-3)$ ونصف قطرها (2):

$M \in (S)$، $WM = r$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 2^2 = 4$$

ب- علم قطرها [AB]:

$\vec{AM} \perp \vec{BM}$

أي: $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

8- الأوضاع النسبية:

أ- الوضع النسبي لمستقيم ومستوي:

نكتب التمثيل الوسيطي لـ (Δ) في معادلة المستوي (P).

① إذا لقيت قيمة لـ (t) يعني تقاطع في نقطة.

② إذا لقيت تناقض أي مثلا $3=0$، يعني التقاطع مجموعة خالية.

③ إذا لقيتها محققة مثلا $0=0$، نقول أن المستقيم (Δ) محتوى في المستوي (P).

ب- الوضع النسبي لمستقيم وكرة (S):

عوض (Δ) في (S) تجيك معادلة من الدرجة الثانية بدلالة الوسيط t

① $\Delta < 0$ لا توجد تقاطع.

② $\Delta > 0$ تقاطع في نقطتين.

③ $\Delta = 0$ مستقيم مماس لـ (S).

ج - الوضع النسبي لمستوي و كرة (S):

نحسب المسافة بين مركز الكرة (S) والمستوي (P):

① - اذا لقيت المسافة أكبر من نصف القطر نقول أنه لا يوجد تقاطع.

② - اذا لقيت المسافة تساوي نصف القطر نقول مماس في نقطة.

③ - واذا كانت أصغر من نصف القطر تقاطع في دائرة. $R^2 = r^2 + d^2$

$r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ، r: نصف قطر الدائرة

د - مستقيمان من نفس المستوي أو ليسا من نفس المستوي:

① - اذا كان (D) // (Δ) نقول هما من نفس المستوي.

② - اذا كانا غير متوازيان نساويهم مع بعضاهم:

$x = x$ (1)

(Δ) (2) $y = y$ (D)

$z = z$ (3)

من المعادلة (1) و (2) نخرج قيمة t و k ونعوضهم في المعادلة (3).

* اذا كانت محققة من نفس المستوي

* اذا كانت موش محققة موش من نفس المستوي.

⑨ - تعامد بين المستوي والمستقيم:

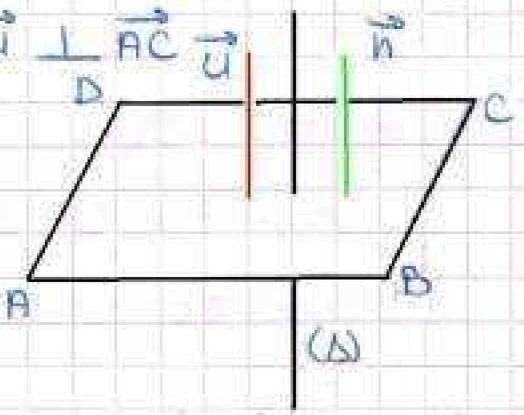
$\vec{n} \parallel \vec{u}$ يعني (Δ) ⊥ (P)

$\vec{n} \perp \vec{u}$ يعني (Δ) // (P)

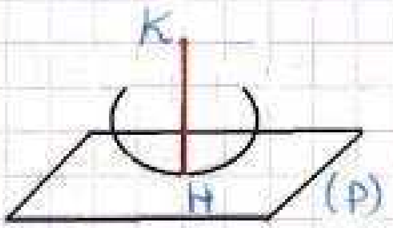
اذا قالك بين أن (Δ) يعامد المستوي (ABC).

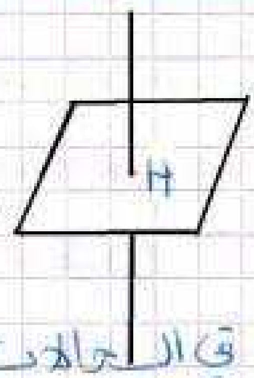
إما أن نثبت أن: $\vec{u}_{\Delta} \parallel \vec{n}_{ABC}$

أو نثبت أن: $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{AB} \\ \vec{u} \perp \vec{AC} \end{cases}$



⑩ - ايجاد إحداثيات H المسقط العمودي وتقاطع مستقيم مع مستوي ونقطة تماس مستوي مع كرة (S):





في الحالات الثلاث نجيب تمثيل وسيطي للمستقيم ونعوض في المستوي نجد قيمة لـ (t) ثم نعوضها في (Δ) نلقى النقطة H

دير في بالك (Δ) ⊥ (P)

$\vec{n}$ هو نفسه $\vec{u}$ وأكهوا؟!!

⑪ - المسافة بين نقطة ومستقيم:

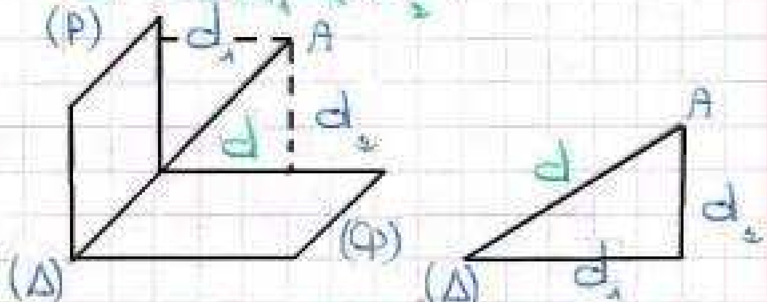
أ - اذا كان: $(\Delta) = (P) \cap (Q)$

$(P) \perp (Q)$

حسب نظرية المعلم فيثاغورس:

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}$$



ب- إذا ما عندكش المستويات:

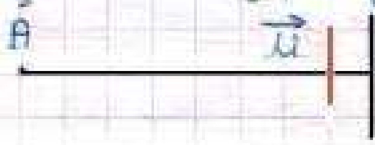
ط1:

$M(t+1, 2t, -t)$

$A(2, 5, -1)$

$$(\Delta)\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أكتب الشعاع $\vec{AM}$ بدلالة t حيث



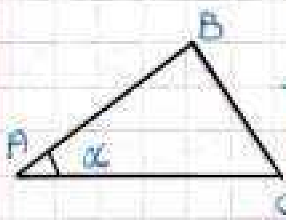
M أي $\vec{u} \perp \vec{AM}$

$\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

تلقى قيمة t عوضها في (Δ) تلقى M ومنه المسافة هي الطول AM

ط2: أكتب الطول AM تجيك دالة تاع جذر بدلالة t اشتقها والقيمة الحدية هي المسافة

مساحة مثلث:



$S_{ABC} = \frac{1}{2} . AB . AC . \sin\alpha$

إذا كان: $\alpha = 90$ يعني:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$$

حجم رباعي الوجوه DABC:

(ABC) ⊥ (AD)

$$V = \frac{S_{ABC} \times AD}{3}$$

مجموعات النقط:

أ) $GM = 3$

مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها 3.

ب) $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$

سطح كرة قطرها [AB].

ج) $\vec{GM} \cdot \vec{BC} = 0$

مجموعة النقط M هي مستوي يشمل G و $\vec{BC}$ ناظمي له.

د) $AM = BM$

مجموعة النقط M هي مستوي محور القطعة [AB]

بالتوفيق للجميع

الأعداد المركبة

1- الطويلة : $|z|$. $i^2=-1$

$z = 2 + 3i$

$|z| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

ألمو نشوفو ندخل في الطويلة

$z = 1 + \sqrt{3}\, i$

$|z| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2}. \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases} \qquad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

الشكل الأسي : $z = 2 e^{\frac{\pi}{3} i}$

الشكل المثلثي : $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$

ملاحظة : "احفظ"

$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866$ ، $\frac{1}{2} = 0{,}5$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}707$

باش تجيك ساهلة الانتقال من الشكل الأسي والمثلثي الى الجبري

$z = 2 e^{\frac{3\pi}{4} i}$

لدينا : $z = 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right].$

$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\frac{3\times180}{4} = -0{,}707 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{3\times180}{4} = 0{,}707 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

إذن : $z = 2\left[\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right]$

$z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

2- تقايس الشكل :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

أ- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha i$ } α سالب الزاوية $\frac{-\pi}{2}$. α موجب الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

1- إذا كانت $\alpha = 1$ أو $\alpha = -1$ نقول ABC قائم في A ومتساوي الساقين

2- إذا كانت $\alpha \neq 1$ أو $\alpha \neq -1$ نقول ABC قائم في A فقط .

ب) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ABC مثلث متقايس الأضلاع

ج) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$

α عدد حقيقي نقول أن C، B، A على استقامة واحدة أي : $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$

د) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$

نكتب $z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)$

نقول يوجد تحويل نقطي مركزه A و يحول B الى C و طبيعته حسب العدد α .

ملاحظة : $\boxed{\frac{z_B - z_A}{z_C - z_D} = \pm 1}$

* يعني ABCD متوازي أضلاع $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
* ABDC - - - - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

3- التفسير الهندسي للعمدة و الطويلة :

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha$

$\frac{|AC|}{|AB|} = |\alpha|$ أي $AC = |\alpha| AB$

$\arg(\alpha) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

4- دستور موافر :

$$\boxed{z^n = |z|^n \left[\cos n\theta + i \sin n\theta\right]}$$

1- z^n حقيقي : يعني التخيلي معدوم $\sin n\theta = 0$ ، أي $n\theta = k\pi$

ع- z^n تخيلي : يعني الحقيقي معدوم

$\cos n\theta = 0$ أي : $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$

ⓖ- التحويلات النقطية :

$$\boxed{z' = \alpha z + \beta}$$

ثم بعد ذلك أوجد C صورة B بالتحويل النقطي الذي مركزه A (دير في بالك بلي z في مكان z')

الكتابة المباشرة :

$$z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)$$

إذا قالك جيب العبارة المركبة

$$z_C = \alpha z_B + \beta$$

$$z_A = \alpha z_A + \beta$$

بالطرح

حل الجملة وخرج α و β.

إذا عطاك دوران مركزه O

يعني : $\boxed{\beta = 0}$ وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

متنساش "$|\alpha| = 1$" أي :

$$\alpha = 1 e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

واكتبها α على الشكل الجبري

إذا جبيت

$$\boxed{z' = \alpha z + \beta}$$

α عدد مركب	α عدد حقيقي
$|\alpha| = 1$ دوران	$\alpha = 1$ انسحاب شعاعه β
$|\alpha| \neq 1$ التشابه المباشر	$\alpha \neq 1$ تحاكي

عناصره هي :

$|\alpha|$ نسبته.

$\arg(\alpha)$ زاويته.

مركزه : $z_w = \frac{\beta}{1-\alpha}$

ⓖ- المرجح G $\{(A,1),(B,-1),(C,3)\}$

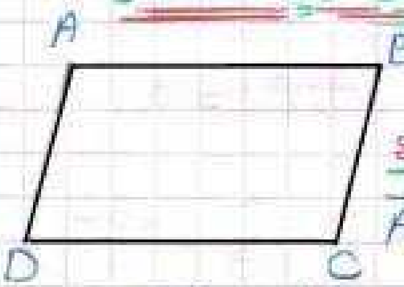
$$z_G = \frac{1z_A - z_B + 3z_C}{1 - 1 + 3}$$

إذا كان G مركز مثلث ABC

هذا المعاملات : 1، 1، 1

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

ⓩ- طبيعة الرباعيات :



قطران $\vec{DB}$، $\vec{AC}$

أ- متوازي أضلاع : $\vec{AB} = \vec{DC}$

$$z_B - z_A = z_C - z_D.$$

ب- مستطيل : القطران $\vec{AC}$ و $\vec{AD}$ متساويان ومتناصفان وموش متعامدان. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

ج- مربع : القطران $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ متساويان ومتناصفان ومتعامدان. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

د- معين : القطران $\vec{AC}$ و $\vec{BD}$ غير متساويان ومتناصفان ومتعامدان. $\vec{AB} = \vec{DC}$.

ملاحظة :

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

و $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha i$

إذا كان :

أ)- **دوران**
- $\frac{\pi}{2}$ = مربع
- $\frac{\pi}{2} \neq$ معين

ب)- **تشابه**
- $\frac{\pi}{2}$ = مستطيل
- $\frac{\pi}{2} \neq$ متوازي أضلاع

4)- **المثلثات**: أحسب الأطوال

$AB = AC = BC$ متقايس الأضلاع

$AB^2 + AC^2 = BC^2$ قائم في A إذا كان

$AB = AC$ نزيد لهم متساوي الساقين

5)- **مجموعات النقط**:

أ- $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}\| = 12$

دخل المرجح G: $3MG = 12$

$MG = 4$

دائرة مركزها G و $r = 4$.

(ياو رانا في الأعداد المركبة رد بالك تقولي سطح كرة).

ب- $\vec{GM} \cdot \vec{AB} = 0$

مستقيم يشمل G والعمودي على (AB)

ج- $|z - z_A| = |z - z_B|$

$AM = BM$ مستقيم محور القطعة $[AB]$.

د- $\arg(z - z_A) = \frac{\pi}{4}$ نصف مستقيم $[AM)$ مبدؤه النقطة A.

المتتاليات

1-

المتتالية الهندسية	المتتالية الحسابية
$U_5 = U_3 \cdot q^2$	$U_5 = U_3 + 2r$
$(5-3) = 2$	$(5-3) = 2$
$U_n = U_p \cdot q^{n-p}$	$U_n = U_p + (n-p)r$
$U_1 \times U_3 = U_2^2$	$U_1 + U_3 = 2U_2$
إذا كانت عندك جملة معادلتين عوضها في معادلة الضرب.	إذا كانت عندك جملة معادلتين عوضها في معادلة الجمع
$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$	$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
عدد الحدود: $n - 0 + 1$	عدد الحدود: $n - 0 + 1$
$= U_0 \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$	$= \dfrac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$

2- البرهان بالتراجع:

$U_0 = 4$

$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 1$

برهن بالتراجع: $U_n > 2$

أولا: نثبت صحة الشرط الابتدائي

$U_0 = 4$ ، $4 > 2$

إذن محقق.

ثانيا: نفرض $U_n > 2$ صحيحة ونبرهن صحة U_{n+1}

أي نبرهن أن $U_{n+1} > 2$

ننطلق من: $U_n > 2$

نضرب الطرفين في $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} U_n > 2 \cdot \frac{1}{2}$

نضيف 1 للطرفين:

$\frac{1}{2} U_n + 1 > 1 + 1$

$U_{n+1} > 2$

إذن صحيحة ومنه: $U_n > 2$ صحيحة.

ملاحظة:

كل استنتاج يأتي بعد البرهان بالتراجع نقول أن (U_n) محدودة من الأعلى أو من الأسفل.

أ- $U_n > 2$ محدودة من الأسفل بـ 2

ب- $U_n < 2$ محدودة من الأعلى بـ 2.

3- اتجاه التغير:

متناقصة $U_{n+1} - U_n < 0$

متزايدة $U_{n+1} - U_n > 0$

المثال السابق:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n + 1 - U_n$

$= -\frac{1}{2} U_n + 1$

$= -\frac{1}{2}\left[U_n + \frac{1}{-\frac{1}{2}}\right]$

$= -\frac{1}{2}\left[U_n - 2\right]$

نقول بما أن: $U_n > 2$

$U_n - 2 > 0$

نضرب في $-\frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2}(U_n - 2) < 0$

$u_{n+1} = \boxed{\frac{2}{3}} u_n + 2$

$\frac{2}{3}$ أساس المتتالية (v_n)

البرهان:

$v_n = u_n - 6$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$

$v_{n+1} = \frac{2}{3} u_n + 2 - 6$

$v_{n+1} = \frac{2}{3} u_n - 4$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}\left[u_n - \frac{4 \times 3}{2}\right]$

$v_{n+1} = \frac{2}{3}\left[u_n - 6\right]$

$v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$.

هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

8- عفسة الجملة:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = K \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = K' \end{cases}$$

أ- إذا كانت هندسية:

الوسط الهندسي: $u_1 \times u_3 = u_2^2$

نعوضها في معادلة الضرب نلقى قيمة لـ u_2.

$u_2^3 = K$

$u_2 = \sqrt[3]{K}$

الأساس q: ألكتب:

$u_3 = u_2 \cdot q$.

$u_1 = \frac{u_2}{q}$.

عوض قيمة u_3 و u_1 بدلالة u_2 و الأساس في معادلة الجمع نجيك معادلة من الدرجة (2):

حلها بالمميز: $aq^2 + bq + c = 0$

خذ الأساس:

① - $0 < q < 1$ إذا قالك متناقصة

مثلا: $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$

② - $q > 1$ إذا قالك متزايدة

مثلا: 2 ، 4 ، $\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{3}$

ب- إذا كانت حسابية:

الوسط الحسابي: $u_1 + u_3 = 2u_2$

عوضها في معادلة الجمع تلقى قيمة u_2.

الأساس r:

ألكتب:

$u_3 = u_2 + r$

$u_1 = u_2 - r$

عوض قيمة u_3 و u_1 بدلالة u_2 و r في معادلة الضرب. نجيك معادلة من الدرجة الثانية:

$ar^2 + br + c = 0$

خذ الأساس:

① $r < 0$ إذا قالك متناقصة

-2 ، -3 ، $-\frac{5}{2}$.

② $r > 0$ إذا قالك متزايدة

2 ، 3 ، $\frac{5}{2}$ ، $\frac{7}{4}$.

9- عفسة المجموع:

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

(v_n) هندسية طبق قانون المجموع

* إذا كانت ع

$u_n = v_n + 3$

$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

إذن: $u_n = v_n + 3$

$S'_n = S_n + 3\underbrace{(n+1)}_{\text{عدد الحدود}}$

* إذا كانت ع

$K_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

قم بتربيع الحد الأول والأساس واحسب المجموع

$K'_n = v_0^3 + v_1^3 + \dots v_n^3$

$K''_n = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots \frac{1}{v_n}$

* نفس الطريقة نتاع K'_n تكعب الحد الأول و الأساس وفي K''_n اقلب الحد الأول والأساس

« وهكذا هو..!؟ »

عصام معروف

بالتوفيق للجميع