الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات

المدة : 04 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين

لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحوّل A إلى B

ثمّ عيّن زاويته ونسبته.

2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0=A$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n.

أ) أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2.

ب) برهن أنّ: $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1).

3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدّها الأول u_0 وأساسها q.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين 2: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن النقط $A(0,2,1)$، $B(-1,1,-3)$، $C(1,0,-1)$.

1. أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A.

2. ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$$ حيث λ عدد حقيقي.

أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D)

ب) أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D).

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S؟

تمرين 3:(5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x-21y=78$

1) أ- بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 5[7]$

استنتج حلول المعادلة(E).

2) أ- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- عيّن الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

تمرين 4:(6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة على المحورين $2cm$).

1) احسب $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا.

- ادرس تغيّرات الدالة f .

- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (C).

- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$.

2) نعرّف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي:

$$\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$$

أ - باستعمال (D) و (C)، مثّل الحدود U_0، U_1، U_2 على محور الفواصل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2\leqslant U_n\leqslant 5$ و $U_{n+1}>U_n$.

ب- استنتج أنّ (U_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

تمرين 1: (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$$

1) بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

4) اكتب الحلول على الشكل الأسي.

5) لتكن A و B و C و D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ و $-1+i$ و $\frac{-m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي. عيّن m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+1$

1 - احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 - (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $V_n=U_n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .
- استنتج عبارة U_n بدلالة n .
- احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3 - (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $W_n=\frac{2}{3}n-\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- احسب المجموع S حيث : $S=W_0+W_1+W_2+...+W_n$.

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيمين (Δ) و (Δ')

المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين:

$\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = 2+\frac{1}{2}\lambda \quad ; \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2-2\lambda \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 6+\alpha \\ y = 1-2\alpha \quad ; \ \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 5+\alpha \end{cases}$ على الترتيب .

1 – بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2 – M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .

أ) عين إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

ب) احسب الطول MN .

3– عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

4– احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

تمرين 4: (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = x-1+\frac{4}{e^x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 – بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

– اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3– احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

– استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

4– بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77 ; -2,76[$.

– احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيميه المقاربين.

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = -x+3-\frac{4}{e^x+1}$. C_g منحنى الدالة g .

1– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) = f(-x)$.

– استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2– أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g) .