الجزء الأول - ثنائي القطب RC

حسب الطبعة الجديدة المصادق عليها من طرف المعهد الوطني للبحث في التربية

التمرين 01

سعة المكثفة الأولى : $C_1 = \dfrac{Q}{U_1} = \dfrac{3\times10^{-5}}{6} = 0,5\times10^{-5}\ F$

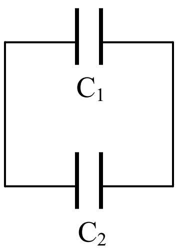
التوتر بين طرفي المكثفة الثانية : $U_2 = \dfrac{Q}{C_2} = \dfrac{3\times10^{-5}}{10^{-6}} = 30\ V$

التمرين 02

1 – شحنة المكثفة الأولى : $Q_1 = C_1U = 2\times10^{-6}\times100 = 2\times10^{-4}\ C$

بعد ربط المكثفتين على التفرع تتوزع الشحنة Q_1 عليهما حسب سعة كل واحدة .

السعة المكافئة لهما هي $C = C_1 + C_2 = 2 + 0,5 = 2,5\ \mu F$



2 - التوتر بين طرفي كل مكثفة هو التوتر بين طرفي المكثفة المكافئة ، أي :

$$U' = \frac{Q_1}{C} = \frac{2\times10^{-4}}{2,5\times10^{-6}} = 80\ V$$

التمرين 03

المولد المستعمل في هذه الدارة هو مولد للتيار ، أي أن التيار طيلة عملية الشحن يبقى ثابتا من أجل توتر بين طرفيه أقل من قيمة مسجلة على المولد .

1 - العلاقة بين u و t :

لدينا الشحنة المتوضعة على لبوسي المكثفة في اللحظة t هي $q = I\,t$ (1)

ولدينا العلاقة بين التوتر والشحنة : $u = \dfrac{q}{C}$ (2)

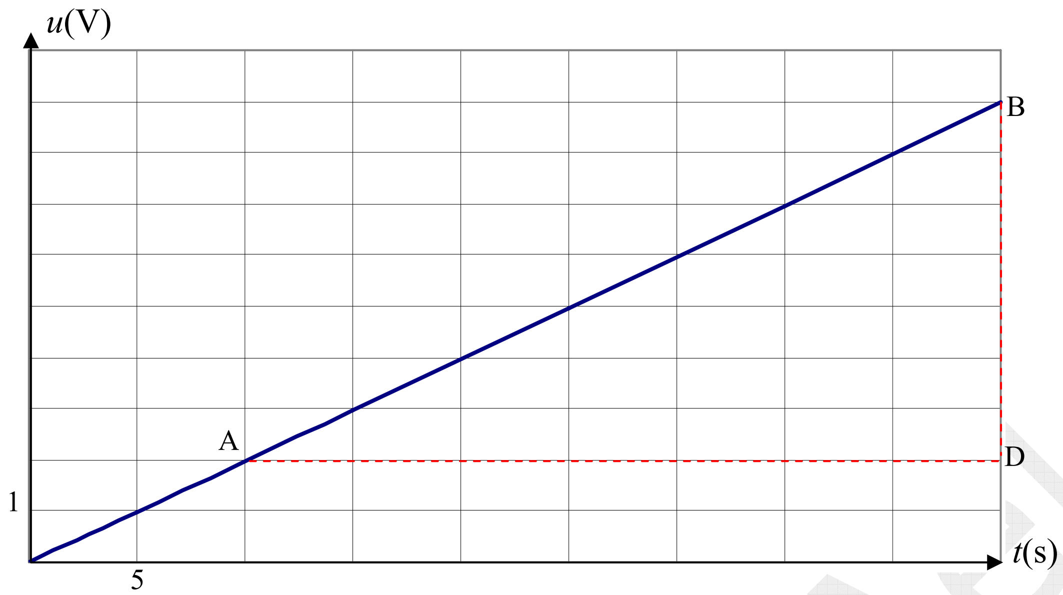
من العلاقتين (1) و (2) نستنتج العلاقة المطلوبة : $\boldsymbol{u = \dfrac{I}{C}\,t}$

ملاحظة : يجب الانتباه إلى عدم الخلط بين هذه الحالة والحالة التي نستعمل فيها مولدا للتوتر ، حيث أن في هذه الحالة الأخيرة يتغير التوتر حسب دالة أسية في النظام الانتقالي ، ثم يصبح ثابتا مهما كان الزمن في النظام الدائم . أما في الحالة التي يتطرق لها هذا التمرين فإن التوتر يتناسب مع الزمن حسب علاقة خطية .

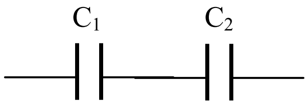
2 - رسم البيان :

ميل البيان هو النسبة $\dfrac{I}{C}$

من البيان : $\dfrac{I}{C} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{7}{7\times5} = 0,2\ V.s^{-1}$ ، ومنه : $C = \dfrac{I}{0,2} = \dfrac{20\times10^{-6}}{0,2} = 10^{-4}\ F$



التمرين 04



1 – سعة المكثفة المكافئة : $C = \frac{C_1\ C_2}{C_1 + C_2} = \frac{1\times 2}{1+2} = \frac{2}{3}\ F$

2 – التوتر بين طرفي كل مكثفة : بما أن المكثفتين مربوطتان عل التسلسل فإن $Q_1 = Q_2 = Q$

$U_1 = \frac{Q}{C_1}$ (1) ، $U_2 = \frac{Q}{C_2}$ (2) . بتقسيم العلاقتين (1) و (2) طرفا لطرف نجد :

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{C_2}{C_1} = 2$ ، وبالتالي $U_1 = 2\ U_2$ (3)

بما أن المكثفتين مربوطتان على التسلسل ، فإن $U_1 + U_2 = 300$ (4)

من المعادلتين (3) و (4) نستنتج : $U_2 = 100\ V$ ، $U_1 = 200\ V$

3 – نحسب شحنة المكثفة المكافئة $Q = C\ U = \frac{2}{3}\times 10^{-6}\times 300 = 2\times 10^{-4}\ C$

$Q_1 = Q_2 = Q = 2\times 10^{-4}\ C$ ، أو نحسبهما بواسطة العلاقتين (1) و (2)

التمرين 05

1 - نبحث عن طريقة ربط بسيطة وغير مكلفة (نستعمل فيها أقل عدد من المكثفات) .

نستعمل تجميعا من المكثفات عددها n_1 بربطها على التفرع ، ثم نربط على التسلسل عددا n_2 من هذه التجميعات .

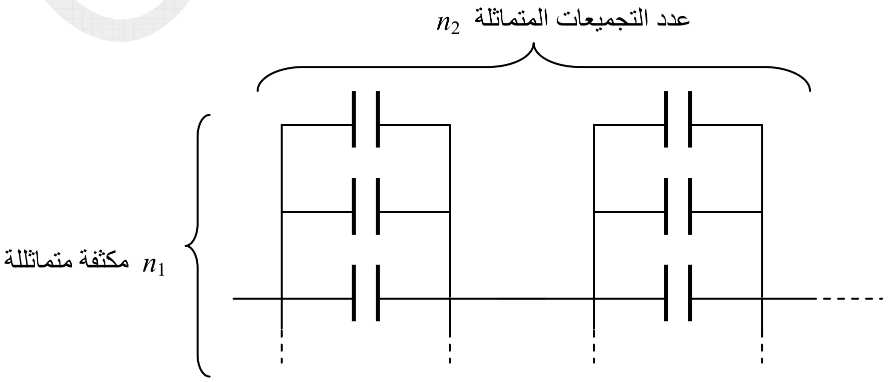
السعة المكافئة في تجميع واحد هي :

$C' = n_1\ C_1$ (1)

السعة المكافئة لكل التجميعات هي :

$\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} + ... = n_2 \frac{1}{C'}$ (2)

نعوّض عبارة C' من العلاقة (1) في العلاقة (2) ونجد :



$n_1 = n_2 \dfrac{C}{C_1}$ ، وبالتالي : $n_1 = 50\ n_2$

من أجل $n_2 = 1$ ، فإن $n_1 = 50$

من أجل $n_2 = 2$ ، فإن $n_1 = 100$ وهكذا ...

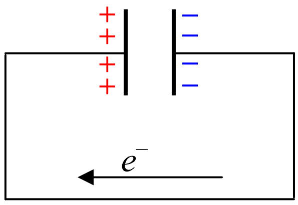
2 - أبسط تركيب هو الموافق للحالة الأولى ، أي 50 مكثفة كلها على التفرع .

3 - أ) شحنة المكثفة المكافئة : $Q = C\,U = 5\ 10^{-3} \times 40 = 0{,}2\ C$

ب) المكثفات متماثلة ، إذن شحنة كل واحدة هي : $Q' = \dfrac{Q}{n_1} = \dfrac{0{,}2}{50} = 4\times10^{-3}\ C$

التمرين 06

1 – يمكن إفراغ المكثفة بالوصل بين لبوسيها بواسطة ناقل ، فإن كل الإلكترونات تعود إلى أماكنها من اللبوس السالب إلى الموجب ، فيحدث توازن كهربائي وتنعدم شحنتا اللبوسين ، فتصبح المكثفة فارغة .



تفريغ المكثفة

2 - أ) لدينا $q = I\,t$ شدة التيار ثابتة (المولد المستعمل هو مولد للتيار) ، وبالتالي :

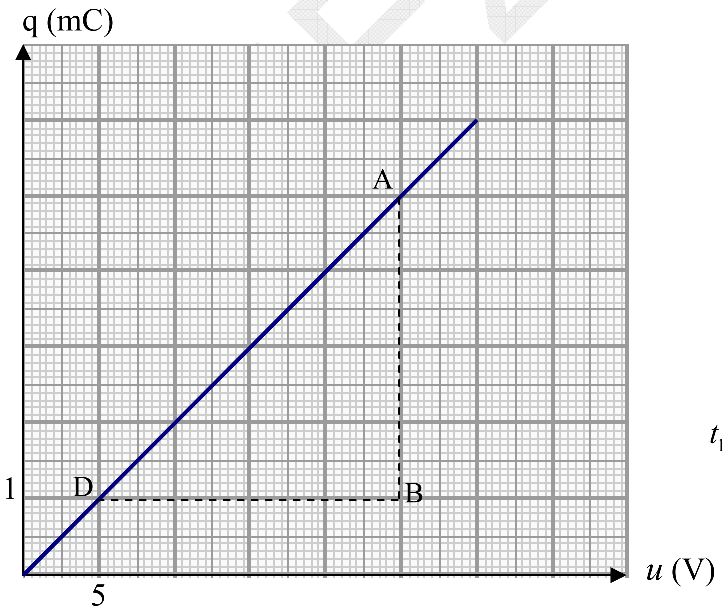
$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = I = \frac{dq}{dt}$$

ب) بعد زمن قدره $t = 4\ mn = 240\ s$ تكون $q = I\,t = 0{,}2 \times 10^{-3} \times 240 = 4{,}8 \times 10^{-2}\ C$

التوتر الكهربائي بين اللبوسين $u = \dfrac{q}{C} = \dfrac{4{,}8\times10^{-2}}{3{,}2\times10^{-3}} = 15\ V$

3 - الزمن الأعظم للشحن : لدينا $q = I\,t$ أي $C\,u = I\,t$ وبالتالي : $t = \dfrac{Cu}{I} = \dfrac{3{,}2\times10^{-3}\times40}{0{,}2\times10^{-3}} = 640\ s$

التمرين 07



1 – العلاقة التجريبية : $q = a\,u$

العلاقة النظرية : $q = C\,u$

بمطابقة العلاقتين نجد ميل البيان هو سعة المكثفة C

$$C = \frac{AB}{BD} = \frac{4\times10^{-3}}{5\times4} = 2\times10^{-4}\ F$$

2 – من البيان لدينا القيمة $u_1 = 15\ V$ توافق شحنة قدرها

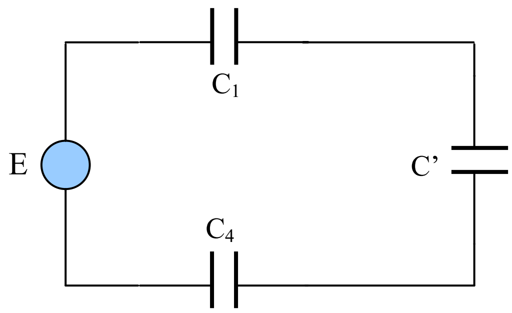
$q_1 = 3 \times 10^{-3}\ C$

من العلاقة $q_1 = I\,t_1$ نستخرج $t_1 = \dfrac{q_1}{I} = \dfrac{3\times10^{-3}}{15\times10^{-6}} = 200\ s$

3 - $u_1 = \dfrac{q_1}{C}$ ، $u_2 = \dfrac{q_2}{C}$ نستنتج :

$\dfrac{u_1}{u_2} = \dfrac{q_1}{q_2} = \dfrac{It_1}{It_2} = \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{15}{30}$ ، وبالتالي $t_2 = 2\,t_1$

التمرين 08



1 – سعة المكثفة المكافئة : لدينا C_2 و C_3 على التفرع ، إذن سعتهما المكافئة :

$$C' = C_3 + C_2 = 1,5 + 0,5 = 2\ \mu F$$

بتعويض هاتين المكثفتين بمكافئتهما نحصل على الدارة المقابلة .

لدينا الآن 3 مكثفات موصولة على التسلسل ، سعتها المكافئة هي C ، حيث :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C'}$$ ، وبالتطبيق العددي نجد $C = 0,8\ \mu F$

2 – شحنة المكثفة المكافئة : $Q = C\,U = 0,8 \times 10^{-6} \times 100 = 8 \times 10^{-5}\ C$

3 – شحنة كل مكثفة : بما أن C_1 و C_4 و C' كلها على التسلسل ، إذن شحناتها متساوية ، أي :

$$Q_1 = Q_4 = Q' = 8 \times 10^{-5}\ C$$

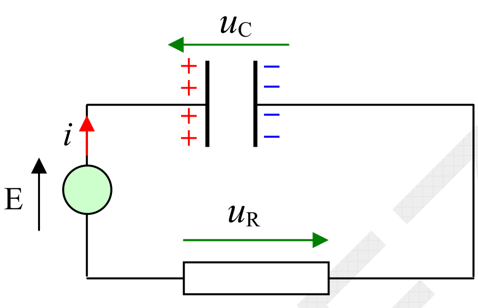
بما أن C_2 و C_3 على التفرّع ، إذن مجموع شحنتيهما يساوي شحنة C' ، أي : $Q_2 + Q_3 = 8 \times 10^{-5}$ (1)

التوتران بين طرفيهما متساويان $U_2 = U_3$ لأنهما على التفرّع ، أي $\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3}$ (2)

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج : $Q_2 + \frac{C_3}{C_2} Q_2 = 8 \times 10^{-5}$

$Q_2 + \frac{1,5}{0,5} Q_2 = 8 \times 10^{-5}$ ، ومنه $Q_2 = 2 \times 10^{-5}\ C$. بالتعويض في (1) أو (2) نجد $Q_3 = 6 \times 10^{-5}\ C$

التمرين 09



الأجوبة 1 – 2 – 3

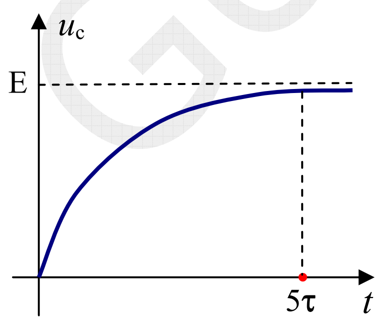
4 - حسب قانون جمع التوترات لدينا $E = u_R + u_C = R\,i + u_C$

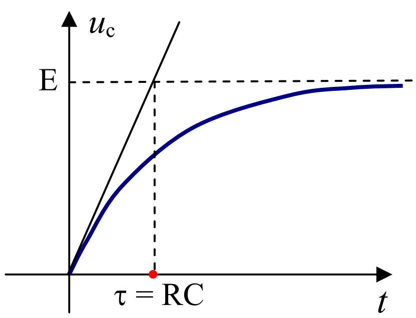
$E = u_C + R\frac{dq}{dt} = u_C + RC\frac{du_C}{dt}$ ، وبتقسيم طرفي المعادلة على RC

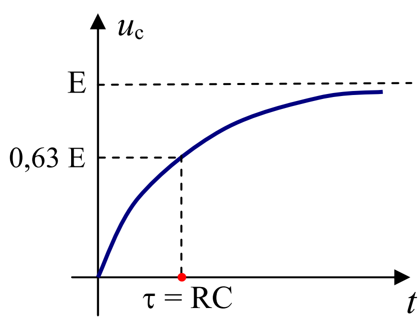
نكتب المعادلة التي يخضع لها التوتر بين طرفي المكثفة : $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$

أو المعادلة التفاضلية التي تخضع لها الشحنة الكهربائية في لبوسي المكثفة : $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E}{R}$

5 – الطرق الثلاثة لتحديد ثابت الزمن بيانيا : نأخذ مثلا $u_C = f(t)$

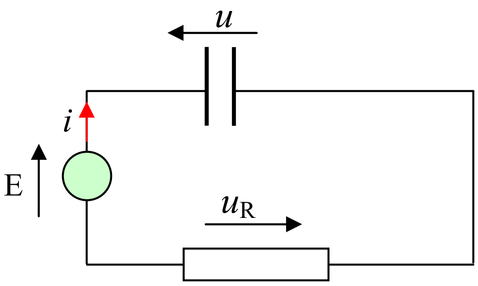






6 - $C = \frac{\tau}{R} = \frac{3}{6000} = 0,5 \times 10^{-3}\ F$

التمرين 10



حسب قانون جمع التوترات فإن : $E = R\,i + u$ ، ومنه $i = \dfrac{E-u}{R}$ (1)

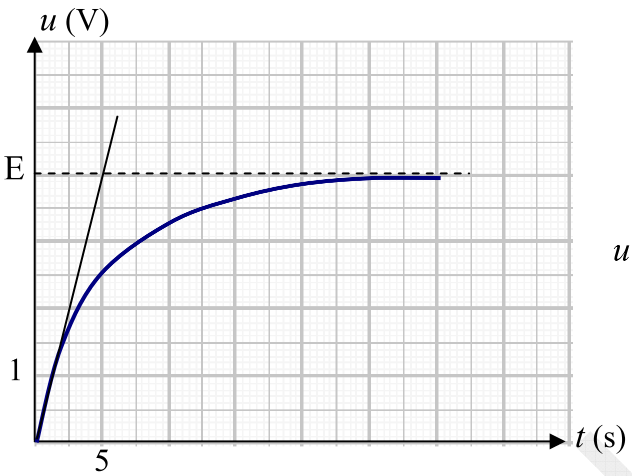
2 - من البيان نستنتج $E = 4\ V$ ، وهي أكبر قيمة لـ u (بداية النظام الدائم) .

نستخرج من البيان قيم u الموافقة للأزمنة المسجّلة على الجدول ، ثم باستعمال العلاقة (1) نحسب شدة التيار الموافقة لكل لحظة .

مثلا : من أجل $t = 0$ لدينا من البيان $u = 0$ ، وبالتالي : $i = \dfrac{E-0}{R} = \dfrac{4}{20\times10^{3}} = 2\times10^{-4}\ A$ ، وهكذا ..

الجدول :

t (s)	0	5	10	15	20	25
$i \times 10^{-4}$ (A)	2,00	0,75	0,31	0,12	0,06	0,00



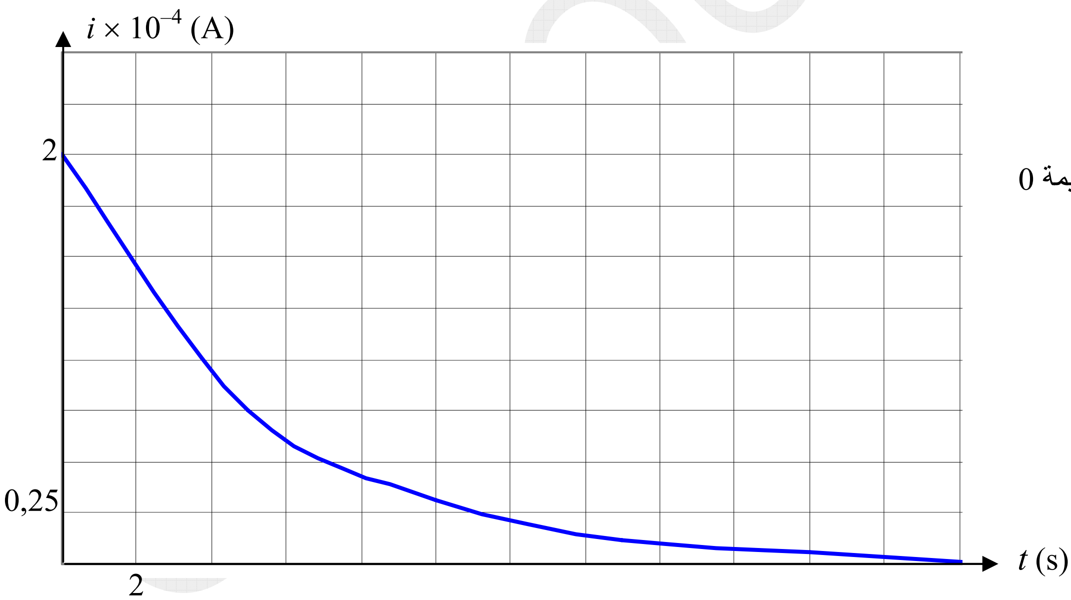
3 – ثابت الزمن هو فاصلة تقاطع مماس البيان مع المستقيم الأفقي $u = E$

نستنتج $\tau = 5\ s$

4 - نستنتج قيمة السعة من عبارة ثابت الزمن $\tau = RC$:

$$C = \frac{\tau}{R} = \frac{5}{20\times10^{3}} = 2,5\times10^{-4}\ F$$

5 – رسم البيان $i = f(t)$:

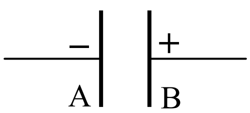


6 - تتناقص شدة التيار من أعظم قيمة $I = 2\times10^{-4}\ A$ نحو القيمة 0

يحدث هذا خلال فترة الشحن .

التمرين 11

1 – الشحنة الكلية للمكثفة $Q = 0$ ، أي $Q_A + Q_B = 0$ ، ومنه : $Q_B = -Q_A = +1,2\ mC$ (mC : ميلي كولون)

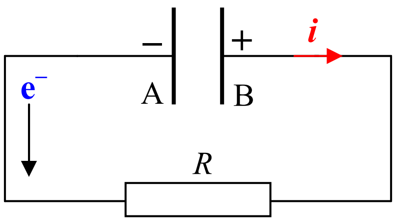


2 - لدينا حسب إشارتي اللبوسين : $U_{BA} > 0$ ، إذن $U_{AB} < 0$

3 -

- عندما نربط المكثفة تتفرغ في الناقل الأومي بحيث تنتقل الإلكترونات من اللبوس A نحو B

- جهة التيار الانتقالي عكس جهة حركة الإلكترونات وعكس الجهة الاصطلاحية للتيار (جهة تيار الشحن) .



- لدينا العلاقة : $ln\, u_{BA} = -\,50\,t + 1{,}61$ (1)

تصحيح : في هذه العلاقة نكتب u_{BA} وليس u_{AB} (لوغاريتم عدد سالب غير معرّف)

نعلم أن عبارة التوتر بين طرفي المكثفة خلال التفريغ هي $u_{BA} = u_c = E\, e^{-\frac{1}{RC}t}$ (2)

بادخال اللوغاريتم النيبيري على طرفي العلاقة (2) :

$$ln\, u_{BA} = ln\, E - \frac{1}{RC}t$$

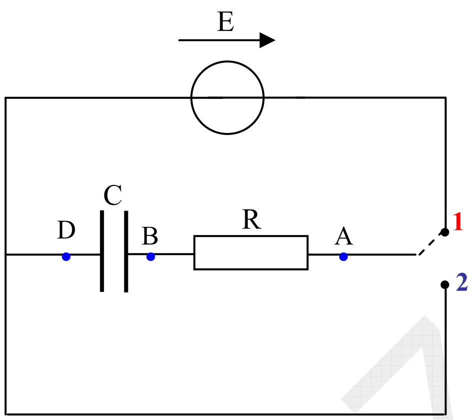
$$ln\, u_{BA} = -\frac{1}{RC}t + ln\, E \quad (3)$$

بمطابقة العلاقتين (1) و (3) ، نكتب : $\frac{1}{RC} = 50 \Rightarrow RC = \frac{1}{50} = 0{,}02\ s = \tau$

$$ln\, E = 1{,}61 \Rightarrow E = e^{1{,}61} = 5\ V$$

التمرين 12

1 - أ) حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين طرفي ثـنـائي القطب RC :



$$E = u_{AB} + u_{BD} = R\,i + u_{BD}$$

$$E = u_{BD} + RC\,\frac{du_{BD}}{dt}$$

المعادلة التفاضلية هي $\frac{du_{BD}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{BD} = \frac{E}{RC}$ (1)

ب) لدينا : $u_{BD} = E + a\,e^{-bt}$ (2)

نعوّض في المعادلة التفاضلية (1)

$$-abe^{-bt} + \frac{1}{RC}\left(E + a\,e^{-bt}\right) = \frac{E}{RC}$$

$$-abe^{-bt} + \frac{E}{RC} + \frac{1}{RC}a\,e^{-bt} = \frac{E}{RC} \quad \text{أو} \quad a\,e^{-bt}\left(\frac{1}{RC} - b\right) + \frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$$

إذا كان $b = \frac{1}{RC}$ نجد $\frac{E}{RC} = \frac{E}{RC}$ ، وهي محققة ، إذن حل المعادلة التفاضلية (1) هو من الشكل : $u_{BD} = E + a\,e^{-bt}$.

جـ) من الشروط الإبتدائية ، عند $t = 0$ يكون $u_{BD} = 0$. نعوض في العلاقة (2) : $0 = E + a\,e^{0} \Rightarrow a = -E$

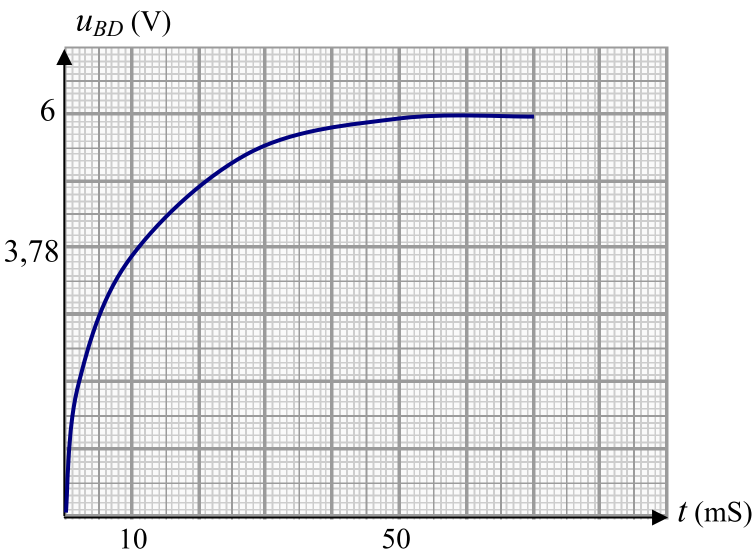
2 – تكملة الجدول : عبارة التوتر بين طرفي المكثفة : $u_{BD} = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$

$t = 0 \Rightarrow u_{BD} = 0$

$t = \tau \Rightarrow u_{BD} = E\,(1 - e^{-1}) = 3{,}78\ V$

$t = 5\,\tau \Rightarrow u_{BD} = E\,(1 - e^{-5}) \approx 6\ V$

t (s)	0	τ	5 τ
u_{BD}	0	3,78	6



3 – تمثيل البيان $u_{BD} = f(t)$

لدينا $\tau = RC = 10^5 \times 0,1 \times 10^{-6} = 0,01\ s$

4 - أ) عند وضع البادلة في الوضع 2 تُفرّغ المكثفة في الناقل الأومي وتُنفق الطاقة الكهربائية التي كانت مخزّنة فيها على شكل حرارة بفعل جول في الناقل الأومي .

ب) الطاقة المخزّنة هي : $E_C = \frac{1}{2} C u^2$ ، حيث $u = E$. $E_C = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 10^{-6} \times 6^2 = 1,8 \times 10^{-6}\ J$

التمرين 13

1 - حسب قانون جمع التوترات : $u_R + u_C = 0$

$$R\,i + u_C = 0$$

$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ ، وبتقسيم طرفي هذه المعادلة على R نكتب : $\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} q = 0$ (1)

2 - إن حل هذه المعادلة التفاضلية يكون من الشكل $q = Ae^{\alpha t} + B$ (2)

حيث : A ، B ، α عبارة عن ثوابت .

لكي نحدّد قيمتي B ، α نعوّض في المعادلة (1) : $q = Ae^{\alpha t} + B$ و $\frac{dq}{dt} = A\alpha e^{\alpha t}$ ، ونكتب بذلك :

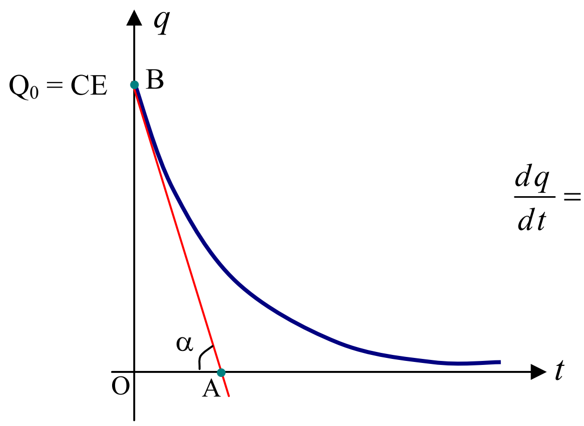
$$A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t} + B\right) = 0$$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = 0 \qquad (3)$$

حتى تكون المعادلة (3) محققة يجب أن يكون $\alpha = -\frac{1}{RC}$ و $B = 0$

نستنتج A من المعادلة (2) ، حيث تكون عند اللحظة $t = 0$ شحنة المكثفة $q = Q_0$.

بالتعويض : $Q_0 = Ae^0 + B$ ، وبالتالي $A = Q_0$. ومنه عبارة q : $\boldsymbol{q = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}}$



3 - ميل المماس عند النقطة (0 ; CE) هو مشتق العلاقة q (t) عند $t = 0$

كذلك ميل المماس هندسيا هو : $tg\alpha = -\dfrac{OB}{OA} = -\dfrac{CE}{OA}$ (4)

مشتق q (t) هو $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{1}{RC}t} = -\dfrac{CE}{RC}\, e^{-\frac{1}{RC}t} = -\dfrac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}t}$

وعند $t = 0$ يكون المشتق : $\dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{E}{R}\, e^{-\frac{1}{RC}\times 0} = -\dfrac{E}{R}$ (5)

بالمساواة بين العلاقتين (4) و (5) نكتب :

$-\dfrac{CE}{OA} = -\dfrac{E}{R}$ ، ومنه : OA = RC ، إذن فاصلة النقطة A هي : $\boldsymbol{t = \tau}$

4 – من البيان لدينا τ = 20 ms (تقاطع المماس للبيان في المبدأ مع محور الزمن)

5 – من عبارة ثابت الزمن لدينا : $C = \dfrac{\tau}{R} = \dfrac{20\times10^{-3}}{10^5} = 2\times10^{-7}\ F = 0{,}2\ \mu F$

6 – عند اللحظة $t = 0$ تكون الشحنة $q = Q_0 = C\,E = 0{,}2 \times 5 \times 10^{-3} = 10^{-6}$ C

عند اللحظة $t = 5\ \tau$ تكون الشحنة $q = Q_0 \times e^{-5} = 10^{-6} \times 6{,}7 \times 10^{-3} = 6{,}7$ ηC ، وذلك بالتعويض في عبارة q

7 - عبارة شدة التيار هي $i = \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$

ولدينا من البيان $E = \dfrac{Q_0}{C} = \dfrac{10^{-6}}{0{,}2\times10^{-6}} = 5V$

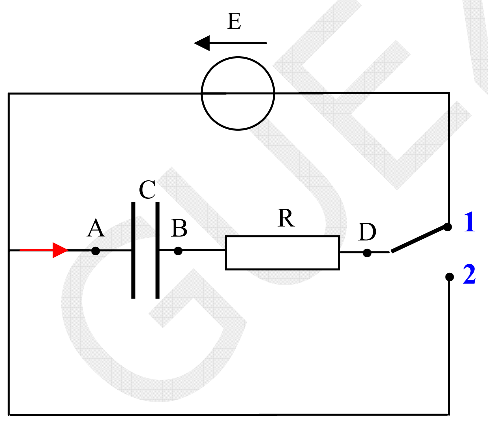
$t = 0 \Rightarrow i = -\,50\ \mu$ A

$t = 5\ \tau \Rightarrow i = -\,0{,}33\ \mu$ A

إشارة i تتبع للجهة الاصطلاحية للتيار

التمرين 14

1 – المعادلة التفاضلية التي يخضع لها التوتر u_{AB}



أ) حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين A و D : $E = u_{AB} + u_{BD}$

$$E = u_{AB} + RC\,\frac{du_{AB}}{dt}$$

بتقسيم طرفي المعادلة على RC ، نكتب : $\dfrac{du_{AB}}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_{AB} = \dfrac{E}{RC}$ (1)

ب) لدينا حل هذه المعادلة هو $u_{AB} = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ (2)

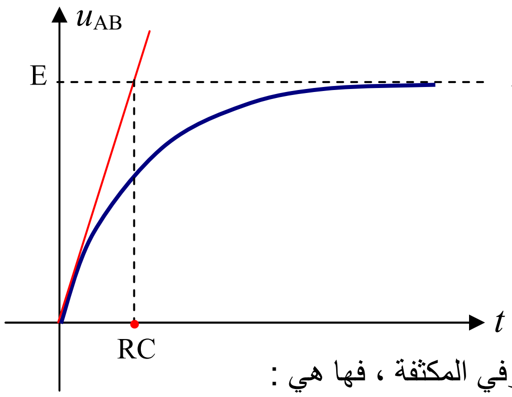
نتحقق من ذلك بالتعويض في المعادلة (1) :

$$-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC}\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right) = \frac{E}{RC}$$

$$-\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{E}{RC} + \frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{E}{RC}$$

ومنه $\frac{E}{RC}=\frac{E}{RC}$ ، إذن المعادلة محققة ، ومنه حل المعادلة التفاضلية (1) هو المعدلة (2) .

جـ) تمثيل كيفي لـ $u_{AB} = f(t) = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$ (انظر للشكل) .



د) دلالة تقاطع المماس في المبدأ للبيان مع المستقيم $u_{AB} = E$ هو ثابت الزمن τ

هـ) $\tau = RC = 10 \times 10^{3} \times 0,5 \times 10^{-6} = 5,0 \times 10^{-3}$ s

و) عند $t = 0$ يكون : $u_{AB} = E\,(1-1) = 0$

عند $t = 5\,\tau$ يكون : $u_{AB} = E\left(1-\frac{1}{e^{5}}\right) \approx 100\ V$

2 - أ) إذا كان المقصود هو المعادلة التفاضلية التي يخضع لها التوتر بين طرفي المكثفة ، فها هي :

المكثفة تُفرّغ في هذه الحالة :

حسب قانون جمع التوترات يكون لدينا التوتر بين A و D : $0 = u_{AB} + u_R$

$$0 = u_{AB} + RC\,\frac{du_{AB}}{dt}$$

بتقسيم طرفي المعادلة على RC ، نكتب : $\frac{du_{AB}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{AB} = 0$

هذه معادلة تفاضلية حلها من الشكل : $u_c = Ae^{\alpha t} + B$ (4)

من (3) و (4) نكتب : $A\alpha e^{\alpha t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha t} + B\right) = 0$

$$Ae^{\alpha t}\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right) + \frac{B}{RC} = 0$$

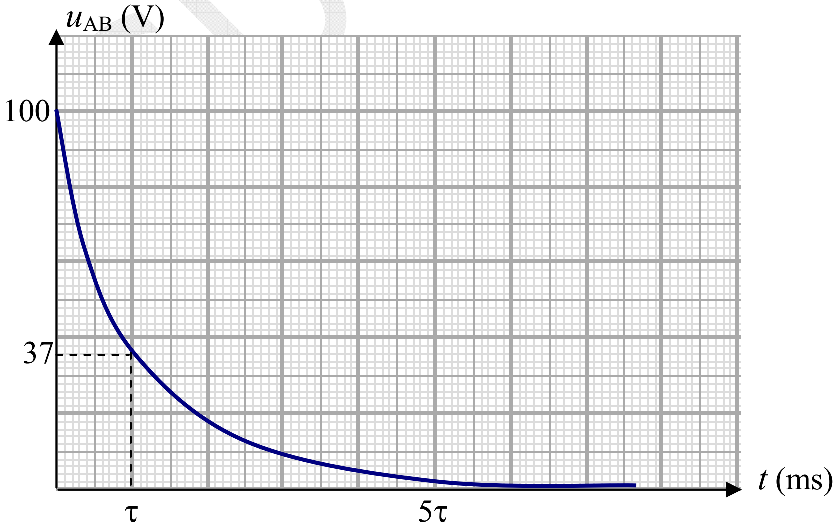
حتى تكون هذه المعادلة محققة يجب أن يكون : $\alpha = -\frac{1}{RC}$ و $B = 0$

من الشروط الابتدائية ، عند $t = 0$ يكون $u_c = E$ ، وبالتعويض في (4) نجد $A = E$

$$\boldsymbol{u_{AB} = E\,e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

ب)

t (s)	u_{AB} (V)
0	E = 100
τ	0,37 E = 37
5 τ	$6,7 \times 10^{-3}$ E = 0,67
∞	0



التمرين 15

1 – شحنة المكثفة : لدينا $Q = C\,U$ (1)

الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_c = \frac{1}{2} Q U$ (2)

بتعويض عبارة U من العلاقة (1) في العلاقة (2) نجد $E_c = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ ، ومنه :

$$Q = \sqrt{2E_c C} = \sqrt{2 \times 1{,}5 \times 2 \times 10^{-3}} = 7{,}7 \times 10^{-2}\ C$$

2 – التوتر بين طرفي المكثفة : $U = \frac{Q}{C} = \frac{7{,}7 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{-3}} = 38{,}5\ V$

التمرين 16

1 - $E_c = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \times 4 \times 10^{-3} \times 12 = 24 \times 10^{-3} J$

2 – لدينا $Q = C\,U$ ، فإذا ضاعفنا السعة يصبح لدينا $Q' = 2\,C\,U$ ، وبالتالي $Q' = 2\,Q$.

ولدينا : $E'_c = \frac{1}{2} Q' U = \frac{1}{2} \times 2 Q U = Q U = 2E_c$ ، وبالتالي الطاقة تتضاعف كذلك وتصبح $E'_c = 48 \times 10^{-3}$ J

3 – عندما نفرّغ المكثفة يتطور التوتر بين طرفيها حسب العلاقة : $u_c = E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$

وتكون حينئذ الطاقة المخزنة في الوشيعة $E_c = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{1}{2} C \left(E\ e^{-\frac{1}{RC}t} \right)^2$

$$E_c = \frac{1}{2} C E^2 e^{-\frac{2}{RC}t} = \frac{1}{2} Q_0 \times \frac{Q_0}{C}\ e^{-\frac{2}{RC}t}$$

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}\ e^{-\frac{2}{\tau}t}}$$

4 – عند اللحظة $t = \tau$ ، تكون الطاقة المخزنة في الوشيعة (الطاقة الباقية)

$$E_c = \frac{1}{2}\frac{Q_0^{\,2}}{C}\ e^{-2} = \frac{1}{2}\frac{\left(4 \times 10^{-3}\right)^2}{\frac{4 \times 10^{-3}}{12}} e^{-2} = \frac{24 \times 10^{-3}}{e^2} = 3{,}26 \times 10^{-3} J$$

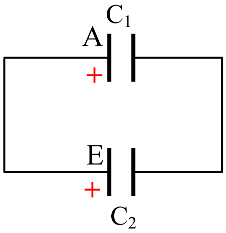
التمرين 17

1 – الطاقة المخزنة في المكثفة : $E_C = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2}\left(3{,}3 \times 10^{-6}\right) \times (24)^2 = 9{,}5 \times 10^{-4}\ J$

2 - أ) العلاقة بين q_A , q'_A , q'_E :

الشحنة تتوزع على المكثفتين حسب سعتيهما ، أي أن : $q_A = q'_E + q'_A$

ب) المكثفتان على التفرع ، إذن التوتران بين طرفيهما متساويان : $U_1 = U_2$



ومنه العلاقة المطلوبة : $\frac{q'_A}{C_1} = \frac{q'_E}{C_2}$

3 – لدينا : $q_A = C_1\,U = 3{,}3 \times 10^{-6} \times 24 = 7{,}92 \times 10^{-5}\ C$

$$q'_E + q'_A = 7{,}92\times10^{-5} \qquad (1)$$

لدينا جملة معادلتين ذات مجهولين ، هما $q'_E\ ,\ q'_A$

$$\frac{q'_A}{C_1} = \frac{q'_E}{C_2} \qquad (2)$$

من العادلة (2) نستنتج $q'_A = \dfrac{C_1}{C_2} q'_E = \dfrac{3{,}3}{2{,}2} q'_E = 1{,}5 q'_E \qquad (3)$

بالتعويض في (1) : $q'_E + 1{,}5\ q'_E = 7{,}92\times10^{-5} \Rightarrow q'_E = 3{,}17\times10^{-5}\ C$

بالتعويض في (3) نجد $q'_A = 4{,}75\times10^{-5}\ C$.

4 – الطاقة المخزّنة في المكثفتين بعد ربطهما : (شحنة المكثفة المكافئة هي q_A) $\quad E_c = \dfrac{1}{2} q_A U \qquad (4)$

نحسب التوتر بين طرفي كل مكثفة ، والذي هو التوتر بين طرفي المكثّفة المكافئة ، $U_1 = U_2 = \dfrac{q'_A}{C_1} = \dfrac{4{,}71\times10^{-5}}{3{,}3\times10^{-6}} = 14{,}3\ V$

بالتعويض في (4) : $E'_c = \dfrac{1}{2}\times 7{,}92\times10^{-5}\times14{,}3 = 5{,}66\times10^{-4}\ J$

5 – أ) هذا الفرق في الطاقة تحوّل إلى حرارة بفعل جول في أسلاك الوصل .

ب) كمية الطاقة الضائعة : $\Delta E = (9{,}5 - 5{,}66)\times10^{-4} = 3{,}84\times10^{-4}\ J$

للمزيد :

ليكن U_1 التوتر بين طرفي المكثفة الأولى (المشحونة) و C_1 سعتها . إن الطاقة المخزّنة فيها هي $E_{c1} = \dfrac{1}{2} C_1 U_1^{\,2}$

عندما نربط هذه المكثفة مع المكثفة الثانية التي سعتها C_1 تتوزع شحنة المكثفة الأولى بين المكثفتين بحيث تكون شحنة المكثفة الأولى هي نفسها شحنة المكثفة المكافئة للمكثفتين ، والتي سعتها هي $C_{éq} = C_1 + C_2$ (المكثفتان موصولتان على التفرّع) .

وبالتالي : $C_1 U_1 = (C_1 + C_2) U$ ، حيث U هو التوتر بين طرفي المكثّفة المكافئة .

من هذه العلاقة نستنتج $U = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2} U_1$.

الطاقة المخزنة في المكثفة المكافئة هي $E_{c2} = \dfrac{1}{2} C_{éq} U^2 = \dfrac{1}{2}(C_1 + C_2)\dfrac{C_1^{\,2}}{(C_1+C_2)^2} U_1^{\,2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1^{\,2}}{(C_1+C_2)} U_1^{\,2}$

الطاقة الضائعة هي : $E_{c1} - E_{c2} = \dfrac{1}{2} C_1 U_1^{\,2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{C_1^{\,2}}{(C_1+C_2)} U_1^{\,2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{C_2 C_1}{(C_1+C_2)} U_1^{\,2}$

الآن نبحث عن هذا الضياع بطريقة أخرى ، وهي أن في المدة القصيرة dt تضيع في الأسلاك الطاقة dE ، حيث نعلم أن $dE = Ri^2 dt \qquad (1)$

حيث R هي مقاومة الدارة (بالنسبة لهذه الحالة R هي مقاومة الأسلاك) .

إن التيار الذي يمر في الدارة عند ربط المكثفتين هو $i = \dfrac{U_1}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

لكي نجد الطاقة الضائعة في الأسلاك نقوم بمكاملة العلاقة (1) ، حيث t يتغير من الصفر إلى ∞

$$E=\int_0^{\infty} R\left(\frac{U_1}{R}\right)^2 e^{-\frac{2}{\tau}t}dt=\frac{U_1{}^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2}{\tau}t}dt=-\frac{U_1{}^2}{R}\times\frac{\tau}{2}\left[0-1\right]=\frac{1}{2}\frac{U_1{}^2}{R}\tau$$

ثابت الزمن لهذه الدارة هو $\tau=R\,\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$ ، وبالتعويض في عبارة E نجد : $E=\dfrac{1}{2}\dfrac{C_1C_2}{(C_1+C_2)}U_1{}^2$

هذه الطاقة هي نفس الطاقة الموجودة أعلاه .

الاستطاعة المتوسطة المصروفة خلال المدة الزمنية $t=5\tau$ هي $P=\dfrac{E}{5\tau}=\dfrac{1}{2}\dfrac{U_1{}^2}{R}\times\dfrac{\tau}{5\tau}=\dfrac{U_1{}^2}{10R}$.

في هذه العلاقة الأخيرة لما تكون قيمة R صغيرة جدا نحصل على استطاعة كبيرة جدا تؤدّي أحيانا إلى تخريب الأجهزة الكهربائية ، لهذا يًنصح بعدم القيام بمثل هذا الربط المقترح في التمرين .