الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية　　　　　　　　　　　　الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي　　　　　　　　　　　　دورة: **جوان 2012**

**الشعبة: رياضيات**

---

**اختبار في مادة: الرياضيات**　　　　　　　　　　　　**المدة: 04 ساعات ونصف**

---

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:**

**الموضوع الأول**

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$: $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. $A$ ، $B$ و $C$ نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$.

أ- اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: $z_A$ ، $z_B$ و $\frac{z_A}{z_B}$.

ب- عيّن لاحقة كل من $A'$ ، $B'$ و $C'$ صور النقط $A$ ، $B$ و $C$ على الترتيب بالدوران الذي مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

جـ- بيّن أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3) نسمي $(\Delta)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

أ- بيّن أن $(\Delta)$ هو محور الفواصل.

ب- بيّن أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2011x-1432y=31$ ... (1).

أ- أثبت أن العدد 2011 أولي.

ب- باستعمال خوارزمية إقليدس، عيّن حلا خاصا $(x_0,y_0)$ للمعادلة (1)، ثم حل المعادلة (1).

2) أ- عيّن، حسب قيم العدد الطبيعي $n$، باقي القسمة الإقليدية للعدد $2^n$ على 7، ثم جد باقي القسمة الإقليدية للعدد $2011^{1432^{2012}}$ على 7.

ب- عيّن قيم العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون: $2010^n+2011^n+1432^n\equiv 0[7]$.

3) $N$ عدد طبيعي يكتب $\overline{2\gamma\alpha\beta}$ في نظام التعداد الذي أساسه 9 حيث: $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية متزايدة تماما و $(\beta,\gamma)$ حل للمعادلة (1).

عيّن $\alpha$ ، $\beta$ و $\gamma$، ثم اكتب $N$ في النظام العشري.

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقط $A(3;0;0)$، $B(0;4;0)$ و $C(2;2;2)$.

1) بيّن أن النقط $A$، $B$، $C$ ليست في استقامية وأن الشعاع $\vec{n}(4;3;-1)$ عمودي على كل من الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(P)$ الذي يشمل النقط $A$، $B$، $C$.

3) أ- بيّن أنّ: $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P')$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$،

ب- بيّن أنّ: $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي $(P")$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $AM=CM$.

جـ- بيّن أن $(P')$ و $(P")$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

4) احسب إحداثيات النقطة $\omega$ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث $ABC$.

**التمرين الرابع: (08 نقاط)**

$I$) $g$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2-xe^x$.

1) ادرس تغيرات الدالة $g$، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$، ثم تحقق أن: $0{,}8<\alpha<0{,}9$.

3) عيّن، حسب قيم $x$، إشارة $g(x)$.

$II$) $f$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$.

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، (وحدة الطول $2cm$).

1) بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بيّن أن المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(C_f)$.

3) ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta')$ و $(\Delta)$، حيث $(\Delta)$ هو المستقيم ذو المعادلة $y=x$.

4) أ- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$، $f'(x)=\frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

ب- بيّن أن: $f(\alpha)=\alpha$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

5) ارسم $(\Delta)$، $(\Delta')$ و $(C_f)$.

6- ناقش، بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$، عدد حلول المعادلة $f(x)=f(m)$.

$III$) $(U_n)$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$: $U_{n+1}=f(U_n)$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$، $0<U_n<\alpha$.

2) باستعمال $(\Delta)$ و $(C_f)$ مثّل على محور الفواصل الحدود: $U_0$، $U_1$ و $U_2$، ثم خمّن اتجاه تغير $(U_n)$.

3) برهن أن المتتالية $(U_n)$ متقاربة، ثم احسب نهايتها.

# <u>الموضوع الثاني</u>

**التمرين الأول: (04 نقاط)**

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية: $(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$ .

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2i$ و $z_D=\overline{z_C}$ .

بيّن أن النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ تنتمي إلى دائرة $(\gamma)$ يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط $A$ ، $B$ ، $C$ و $D$ .

3) نرمز بـــ $z_E$ إلى لاحقة النقطة $E$ نظيرة النقطة $B$ بالنسبة إلى المبدأ $O$ .

أ- بيّن أن: $\dfrac{z_A-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ .

ب- بيّن أن النقطة $A$ هي صورة النقطة $E$ بدوران $R$ مركزه $C$ يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث $AEC$ .

د- $H$ هو التحاكي الذي مركزه $O$ ونسبته 2.

- عيّن طبيعة التحويل $RoH$ وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة $(\gamma)$ بالتحويل $RoH$ .

**التمرين الثاني: (04 نقاط)**

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$ .

1) بيّن أن النقط $A$ ، $B$ و $C$ تعين مستويا $(P_1)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

2) $(P_2)$ المستوي الذي: $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له.

بيّن أن $(P_1)$ و $(P_2)$ يتقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

3) بيّن أن النقطة $O$ هي مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;1),(C;-1)\}$ .

4) أ- عيّن $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$ .

ب- احسب إحداثيات $D$ و $E$ نقطتي تقاطع $(S)$ و $(\Delta)$ .

جـ- ما هي طبيعة المثلث $ODE$؟ ثم استنتج المسافة بين $O$ و $(\Delta)$ .

**التمرين الثالث: (04 نقاط)**

$(u_n)$ هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 16$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 6u_n - 9$.

1) أ- احسب بواقي قسمة كل من الحدود $u_0$ ، $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ على 7.

ب- خمن قيمة للعدد $a$ و قيمة للعدد $b$ بحيث: $u_{2k} \equiv a\,[7]$ و $u_{2k+1} \equiv b\,[7]$.

2) أ- برهن أنه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+2} \equiv u_n\,[7]$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $k$ ، $u_{2k} \equiv 2\,[7]$ ، ثم استنتج أن: $u_{2k+1} \equiv 3\,[7]$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $v_n = u_n - \frac{9}{5}$.

أ- بيّن أن المتتالية $(v_n)$ هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- احسب، بدلالة $n$ ، كلا من: $u_n$ و $S_n$ حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

**<u>التمرين الرابع:</u> (08 نقاط)**

I) $g$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ كما يلي: $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ .

1) ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2) بيّن أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ يحقق: $-0,8 < \alpha < -0,7$ .

3) عيّن، حسب قيم $x$ ، إشارة $g(x)$ .

4) $h$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$ .

أ- احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$ .

ب- عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $h$.

II) $f$ هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x+1)} \;;\; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ ،

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أن الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة لـ $(T)$ مماس $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0.

2) أ- بيّن انه من اجل كل $x$ من $]-1;0[ \cup ]0;3[$ ، $f'(x) = \frac{x\,g(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$.

ب- بيّن أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$ .

جـ- احسب: $f(3)$ و $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

3) أ- بيّن أنه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;3[$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$ .

ب- ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى المماس $(T)$ .

4) عيّن معادلة للمستقيم $(T')$ الموازي للمماس $(T)$ والذي يتقاطع مع $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 3.

5) ارسم $(T)$ ، $(T')$ و $(C_f)$ .

6) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$ .