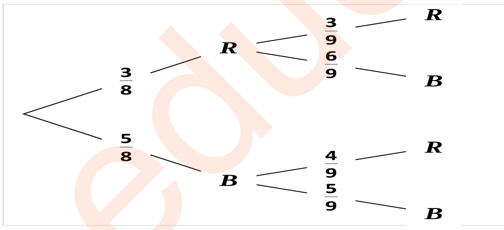
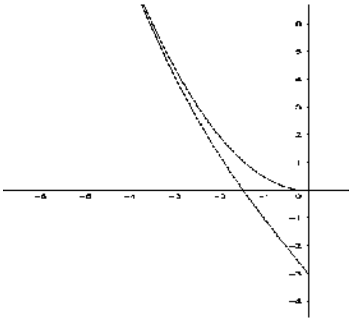
العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)
مجموعة	مجزأة	
		التّمرين الأول: (04 نقاط)
0.75	2×0.25 0.25	1) أ. لدينا: $f'(x)=\frac{40}{(9-x)^2}$ ومنه f متزايدة تمامًا على $[1;4]$. ب. من أجل: $x\in[1;4]$ يكون $f(x)\in[f(1);f(4)]$
1.25	2×0.25 2×0.25 0.25	2) أ. البرهان بالتّراجع. ب. لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{(u_n-1)(u_n-4)}{9-u_n}$ ونجد أنّ (u_n) متناقصة تمامًا. الاستنتاج: (u_n) متناقصة تمامًا و محدودة من الأسفل فهي متقاربة.
1.25	2×0.25 2×0.25 0.25	3) أ. لدينا: $v_{n+1}=\frac{5}{8}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{8}$ و $v_0=-\frac{1}{2}$. ب. عبارة v_n و عبارة u_n : $v_n=\frac{-1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^n$ ، $u_n=\frac{4\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+2}$. حساب: $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$
0.75	0.75	4). نجد: $S_n=\frac{-1}{8}\left(5^{n+1}-1\right)$
		التّمرين الثاني: (04 نقاط)
1.25	0.25x5	1) شجرة الاحتمالات: 
0.5	0.5	2) احتمال أن يوجد في الصّندوق 7 كريات بيضاء: $\frac{3}{8}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{8}$
0.75	0.75	3) احتمال أن يوجد في الصّندوق 4 كريات حمراء على الأقل: $1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$
1.50	0.5 0.75 0.25	4) أ . تبرير أنّ قيّم المتغير العشوائي X هي: 5 ، 6 و 7 ب. تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي. $\begin{array}{c\|c\|c\|c} x_i & 5 & 6 & 7 \\ \hline P(X=x_i) & \frac{25}{72} & \frac{38}{72} & \frac{9}{72} \end{array}$ $E(X)=\frac{52}{9}$
		التّمرين الثالث: (05 نقاط)
0.75	0.75	1) لدينا: $3a-2b=1$ ، إذن حسب بيزو a و b أوليان فيما بينهما
1.5	0.75 0.75	2) لدينا: ($\alpha\|a$ و $\alpha\|c$) ومنه: $\alpha\|(4c-3a)$ أي $\alpha\|5$. $\alpha=5$ معناه ($a\equiv0[5]$ و $c\equiv0[5]$) أي $n\equiv1[5]$ ومنه $n=5k+1$ ، $k\in\mathbb{N}$

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
3) أ . إثبات أنّ α يقسم β . لدينا $(\alpha\|a$ و $\alpha\|c)$ ومنه $(\alpha\|a$ و $\alpha\|bc)$ وبالتّالي $\alpha\|p\gcd(a,bc)$ أي $\alpha\|\beta$ ب. إثبات أنّ β و b أوليان فيما بينهما: نفرض أنّ d قاسم مشترك لـ β و b $(d\|b$ و $d\|\beta)$ ومنه $(\alpha\|b$ و $d\|a)$ وبالتّالي $d\|p\gcd(a,b)$ أي: $d=1$ **ملاحظة**: يمكن استعمال مبرهنة بيزو استنتاج أنّ: $\alpha=\beta$: $(\beta\|bc$ و $\beta\wedge b=1)$ ومنه $(\beta\|c$ و $\beta\|a)$ وعليه $\beta\|\alpha$ $(\beta\|\alpha$ و $\alpha\|\beta)$ معناه $\alpha=\beta$	0.5 0.5 0.5	1.5
4) أ . لدينا : $A=(n-1)(4n+1)$ و $B=(n-1)bc$ إذن كلاً من A و B مضاعف لـ $(n-1)$ ب. لدينا $d=PGCD(A,B)$ ومنه $d=(n-1)PGCD(a,bc)$ ومنه $d=(n-1)\beta=(n-1)\alpha$ وعليه من أجل $\alpha=1$: $d=n-1$ ، من أجل $\alpha=5$: $d=5n-5$	0.5 0.25x3	1.25
التّمرين الرابع : (07 نقاط)		
I) من أجل $x\in]-\infty;0]$: $h(x)\le 0$ و $g(x)<0$	0.25×2	0.5
II) 1) أ. من أجل كل x من $]-\infty;0]$: $$f'(x)=x(e^x+1)+(-2e^x)=h(x)+g(x)$$ ب. f متناقصة تمامًا على المجال $]-\infty;0]$.	0.5+0.25 0.5	1.25
2) نجد: $f(0)=-3$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^x-3e^x+\frac{1}{2}x^2)=+\infty$ جدول التّغيرات	0.25×2 0.5	1
3) f مستمرة ومتناقصة تمامًا على المجال $]-\infty;0]$ وتأخذ قيمها في $[-3;+\infty[$ ومنه $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]-\infty;0]$. التّحقق أن $\alpha\in]-1,5;-1,4[$: $f(-1,5)\simeq 0,121$ ، $f(-1,4)\simeq -0,105$	0.75 0.25	1
4) أ . نجد: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-\frac{1}{2}x^2)=0$ ، إذن: (P) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ب. من أجل كل x من $]-\infty;0]$: $f(x)-\frac{1}{2}x^2=(x-3)e^x$ ومنه $f(x)-\frac{1}{2}x^2<0$ وبالتالي (C_f) أسفل (P) على المجال $]-\infty;0]$	0.5×2 0.5+0.25	1.75

عناصر الإجابة (الموضوع الأوّل)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
جـ. إنشاء (P) و (C_f) : 	0.25 0.5	0.75
5) المناقشة البيانية وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\left\|f(x)\right\| = e^m$ في $]-\infty\,;0]$ من أجل $m \leq \ln 3$ المعادلة تقبل حلّين مختلفين. من أجل $m > \ln 3$ المعادلة تقبل حلّ واحد	0.25×3	0.75

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الأول: (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) $(x;y)=(5k-1;3k-1)$ حيث $k\in Z$</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2) أ) بواقي القسمة الاقليدية للعدد 9^n على 7
$(k\in\mathbb{N})$
<table>
<tr><td>n</td><td>$3k$</td><td>$3k+1$</td><td>$3k+2$</td></tr>
<tr><td>باقي القسمة</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr>
</table>
ب) بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 11
$(k'\in\mathbb{N})$
<table>
<tr><td>n</td><td>$5k'$</td><td>$5k'+1$</td><td>$5k'+2$</td><td>$5k'+3$</td><td>$5k'+4$</td></tr>
<tr><td>باقي القسمة</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td><td>3</td></tr>
</table></td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3) بما أن 7 و 11 أوليان فيما بينهما فإنّ:
$\begin{cases}14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[7]\\14\times4^n+11\times9^n-4\equiv0[11]\end{cases}$ يعني $\begin{cases}11\times9^n-4\equiv0[7]\\14\times4^n-4\equiv0[11]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}9^n\equiv1[7]\\4^n\equiv5[7]\end{cases}$
أي: $n=3\alpha=5\beta+2$ ومنه $3\alpha-5\beta=2$ (α ، β عددان طبيعيان)
$n=15p-3$ ومنه $(\alpha;\beta)=(5p-1;3p-1)$. حيث $(p\in\mathbb{N}^*)$</td><td>0.25×3
0.25</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4) أ. $S_n=4\left(4^{15n}-1\right)+\frac{9}{2}\left(9^{15n}-1\right)$.
ب. إثبات أنّ S_n مضاعف للعدد 77 .
$S_n\equiv0[77]$ يعني $2S_n\equiv0[77]$ أي
$8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)_n\equiv0[77]$ أي $\begin{cases}8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[7]\\8\left(4^{15n}-1\right)+9\left(9^{15n}-1\right)\equiv0[11]\end{cases}$
$\begin{cases}4^{15n}-1\equiv0[7]\\9^{15n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ أي $\begin{cases}\left(4^3\right)^{5n}-1\equiv0[7]\\\left(9^5\right)^{3n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ أي $\begin{cases}(1)^{5n}-1\equiv0[7]\\(1)^{3n}-1\equiv0[11]\end{cases}$ محققة دوما</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="3">التّمرين الثاني: (04 نقاط)</td></tr>
<tr><td>1) أ . $P(A)=\frac{n^2-n+14}{(n+5)(n+6)}$ ، $P(B)=\frac{n^2-n+2}{n^2-n+14}$
ب. $P(A)=\frac{17}{55}$ يعني $n=5$</td><td>0.5×2
0.5</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>2) أ . بعد الحساب نجد قيم المتغيّر العشوائي X : $-\frac{1}{2}$ ، 0 ، $\frac{1}{4}$ ، 1.
ب. $P(X=0)=\frac{C_3^1\times C_8^1+C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{27}{55}$</td><td>0.5
0.5</td><td>1</td></tr>
</table>

عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)	العلامة مجزأة	العلامة مجموعة
جـ. قانون احتمال X $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c} x_i & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \hline p(X=x_i) & \frac{12}{55} & \frac{27}{55} & \frac{1}{55} & \frac{15}{55} \end{array}$ $E(X)=\frac{37}{220}$	1 0.5	1.5
التّمرين الثالث: (05 نقاط)		
1) أ . $w_0=4$ ، $w_1=4(6\alpha-1)$ ب. $w_{n+1}=(6\alpha-1)w_n$: (w_n) متتالية هندسية أساسها $(6\alpha-1)$. جـ. $w_n=4(6\alpha-1)^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=0$ يعني $-1<6\alpha-1\le 1$ ومنه $0<\alpha\le\frac{1}{3}$.	2×0.25 0.5 0.5 0.5	2
2) أ . $u_{n+1}-u_n=-(3\alpha-1)w_n$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تمامًا . $v_{n+1}-v_n=(3\alpha-1)w_n$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تمامًا. ب. بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تمامًا و المتتالية (v_n) متناقصة تمامًا و $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$ فإنهما متجاورتان وبالتالي متقاربتان نحو نفس النّهاية ℓ.	0.5 0.5 0.5 0.25	1.75
3) لدينا $u_{n+1}-u_n=-(3\alpha-1)w_n$ و $v_{n+1}-v_n=(3\alpha-1)w_n$ إذا $u_{n+1}+v_{n+1}=u_n+v_n=u_0+v_0=2$ استنتاج قيمة ℓ: $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=2$ ومنه $\ell=1$	0.5 0.25	0.75
4) نجد: $S=2021-\frac{(6\alpha-1)^{2021}-1}{3\alpha-1}$.	0.5	0.5
التّمرين الرابع: (07 نقاط)		
1) أ . $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. (مع التّبرير) اثبات أنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$. ب. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{9x^2+1}}$. جـ. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)>0$ ، إذن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. جدول تغيّرات الدالة f .	2×0.25 0.25 0.5 0.25 0.25	1.75
2) أ . تبيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ب. تبيان أنّ من أجل كل $x\ge 0$ ، $g'(x)=\frac{-9x^2+8}{\left(\sqrt{9x^2+1}\right)\left(3+\sqrt{9x^2+1}\right)}$	0.5 0.5	1

<table>
<tr><th rowspan="2">عناصر الإجابة (الموضوع الثّاني)</th><th colspan="2">العلامة</th></tr>
<tr><th>مجزأة</th><th>مجموعة</th></tr>
<tr><td>

جـ. إشارة $g'(x)$ هي من إشارة $(-9x^2+8)$.

x	0 $\qquad$ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

g متزايدة تماما على $\left[0;\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$

جدول تغيّرات الدّالة g

</td><td>0.25
0.25
0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

3) أ. g مستمرة ورتيبة تماما على $\left]\frac{2\sqrt{2}}{3};+\infty\right[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;g\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

. التّحقق من أنّ $2,83<\alpha<2,84$: $g(0.83)\approx 0.001$ و $g(0.84)\approx -0.005$

ب. استنتاج إشارة $g(x)$:

x	0 $\qquad$ α $\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	0 $\quad$ $+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

جـ. الوضع النّسبي : (C_f) فوق (Δ) على المجال $]0;\alpha[$

(C_f) تحت (Δ) على المجال $]\alpha;+\infty[$

(C_f) و (Δ) متقاطعان في نقطتين فاصلتاهما 0 و α

</td><td>0.5
0.25
0.25
0.5</td><td>1.5</td></tr>
<tr><td>

4) أ. لدينا $k(x)=\ln 6+\ln x$ إذن (γ) هو صورة المنحني الممثل للدّالة $x\mapsto \ln x$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\,(0;\ln 6)$.

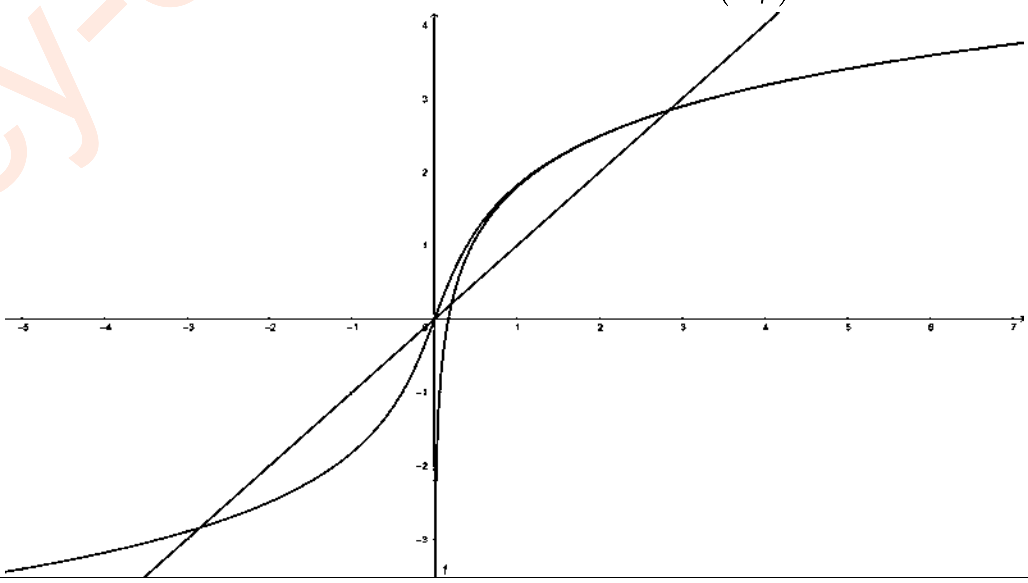
ب. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-k(x)\right)=0$. نستنتج أنّ (γ) منحنى مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

</td><td>0.25
2×0.25</td><td>0.75</td></tr>
<tr><td>

5. أ. إثبات أنّ الدّالة f فردية.

ب. رسم كل من (γ)،على المجال $]0;+\infty[$ و رسم (C_f) و (Δ) على المجال $[0;+\infty[$.

استنتاج الرسم للمنحني (C_f) على $\mathbb{R}$.



</td><td>0.25
3×0.25
0.25</td><td>1.25</td></tr>
</table>