الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان **2013**

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المـــدة: **04** سا و **30** د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(3;-2;-1\right)$ ، $B\left(5;-3;2\right)$ ، $C\left(2;3;2\right)$ و $D\left(1;-5;-2\right)$.

1) بيّن أنّ النقط A و B و C تعين مستويا، نرمز له بالرمز (P).

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2;1;-1\right)$ ناظمي للمستوي (P)، ثمّ جد معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و يعامد (P) .

ب) عين إحداثيات النقطة E ، المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) .

4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB)، و λ العدد الحقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\overrightarrow{AB}$.

أ) بيّن أنّ : $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$.

ب) استنتج العدد الحقيقي λ و إحداثيات النقطة H، ثمّ المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB).

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A و B و C لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4$ و $z_B=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}i$ و $z_C=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}i$.

– احسب الطويلة وعمدة للعدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) أ) عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتّى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .

ب) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$.

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي، ذات اللاحقة z حيث : $\arg\left(z+4\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

– تحقّق أنّ النقطة B تنتمي إلى (Γ_2)، ثمّ عيّن المجموعة (Γ_2) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي:

$u_0 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}}{e}}$.

(v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{2}\ln u_n + \frac{1}{2}$.

1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب حدها الأول.

2) اكتب v_n بدلالة n ، ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع S_n ؛ حيث: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to -\infty} S_n$

4) احسب بدلالة n الجداء P_n ؛ حيث: $p_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدّالة g معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1;+\infty[$.

2) بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن:

$$\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II - الدّالة f معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أثبت أنّه، من أجل كل x من $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

3) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها .

4) بيّن أنّ: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) مثّل المنحنى (C_f) على المجال $]-1;2]$.

III- (Γ) المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1) أثبت أنّ المسافة AM تعطى بالعبارة $AM = \sqrt{f(x)}$.

2) الدّالة k معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ) بيّن أنّ للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1;+\infty[$.

ب) عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ)، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

جـ) بيّن أنّ: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقطة)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين $A\left(2;-5;4\right)$ و $B\left(3;-4;6\right)$

و المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $(t\in\mathbb{R})$; $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=4+t \end{cases}$.

1- أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B .

ب) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .

2- (P) المستوي الذي يشمل (D) و يوازي (Δ) .

- برهن أنّ $\vec{n}(3;1;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، ثمّ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P).

3- M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D) .

أ) عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D).

ب) احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P).

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(z+5-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A و B و C النقط التي لاحقاتها على الترتيب $z_A=-1-i\sqrt{3}$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى B .

- جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثمّ عيّن العناصر المميزة له .

3) أ) عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\left\{(A;2),(B;-1),(C;1)\right\}$.

ب) اكتب العدد المركب $\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABD .

جـ) عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$

التمرين الثالث: (03.5 نقطة)

x و y عددان صحيحان و (E) المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $11x+7y=1$.

1) أ) عيّن $(x_0;y_0)$ حل المعادلة (E) الذي يحقق: $x_0+y_0=-1$.

ب) استنتج حلول المعادلة (E).

2) a و b عددان طبيعيان و S العدد الذي يحقق: $\begin{cases} S=11a+1 \\ S=7b+2 \end{cases}$.

أ) بيّن أنّ $(a;-b)$ حل للمعادلة (E).

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد S على 77؟

3) n عدد طبيعي باقي قسمته على 11 هو 1 وباقي قسمته على 7 هو 2 .

عيّن أكبر قيمة للعدد n حتى يكون $n < 2013$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I- الدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x$.

1) ادرس تغيرات g.

2) بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x : $1+(x-1)e^x \geq 0$.

II - الدّالة f معرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} \; ; \; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

1 - أ) بيّن أنّ f مستمرة على $[0;+\infty[$.

ب) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2- أ) تحقّق أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{1+(x-1)e^x}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

III- n عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ f_n الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f_n(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} + n\ln x$.

و (C_n) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1- ادرس اتجاه تغير الدالة f_n على $]0;+\infty[$.

2- احسب $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$.

3- ادرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

4- بيّن أنّ جميع المنحنيات تمر من نقطة ثابتة B يطلب تعيين إحداثيتيها.

5- أ) بيّن أنّه، يوجد عدد حقيقي وحيد α_1 من $]0,3\,;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$.

ب) بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1) < 0$ ، ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

6- أ) بالاعتماد على الجزء II ؛ بيّن أنّه، من أجل كل x من $]0;1]$: $\dfrac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$.

ب) استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$: $\ln(\alpha_n) \geq \dfrac{1-e}{n}$ ، ثمّ $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$.

جـ) جد نهاية المتتالية (α_n).