الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : تقني رياضي

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 04 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (4 نقاط)

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (*) المعرفة كما يلي:

$$Z^3+(2-4i)Z^2-(6+9i)Z+9(-1+i)=0 \quad \ldots \quad (*)$$

1/ بيّن أن $Z_0=3i$ هو حل للمعادلة (*)

2/ حل، في $\mathbb{C}$، المعادلة (*) ثم أكتب حلولها Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الشكل الأسي حيث $|Z_1|<|Z_2|$.

3/ لتكن A ، B ، C صور الحلول Z_0 ، Z_1 ، Z_2 على الترتيب في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$.

4/ عين المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$

بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم أنشئ (E).

5/ تحقق أنّ النقط O ، B و G في استقامية ثمّ عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O ويحوّل B إلى G محددا عناصره المميزة.

تمرين 2: (5 نقاط)

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

$A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء.

1/ برهن أن النقط A ، B ، C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية.

2/ نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين :

$$(P_1):\ x-2y+2z-1=0$$

$$(P_2):\ x-3y+2z+2=0$$

بيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ).

3/ بيّن أنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ).

4/ بيّن أنّ الشعاع $\vec{u}(2,0,-1)$ هو أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ).

5/ استنتج أنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو الجملة:

$$\begin{cases} x=2k+1 \\ y=3 \\ z=-k+3 \end{cases}$$

حيث $(k\in\mathbb{R})$

6/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) ، أوجد قيمة الوسيط k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ متعامدين، ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ).

تمرين 3: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;2]$ بالعبارة $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}$

1/ أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;2]$

ب- أنشئ (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.
(الوحدة على المحورين $4cm$)

ج- برهن أنه إذا كان $x\in[0;2]$ فإن $f(x)\in[0;2]$.

2/ نعرّف المتتالية العددية (U_n) على $\mathbb{N}$ كالآتي : $\begin{cases}U_0=0\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

أ - برّر وجود المتتالية (U_n). احسب الحدين U_1 و U_2

ب - مثّل الحدود U_0 ، U_1 و U_2 على محور الفواصل وذلك بالاستعانة بالمنحنى (C) والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$.

ج - ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (U_n) و تقاربها انطلاقا من التمثيل السابق.

3/ أ - برهن بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ : $0\leqslant U_n\leqslant\sqrt{3}$.

ب - برهن أنه مهما يكن العدد الطبيعي n فإنّ : $U_{n+1}>U_n$.
ماذا تستنتج بالنسبة إلى تقارب (U_n) ؟

ج – تحقق أنّ: $U_{n+1}-\sqrt{3}\leqslant\dfrac{2-\sqrt{3}}{U_n+2}(U_n-\sqrt{3})$ من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم.

عيّن عددا حقيقيا k من $]0;1[$ بحيث: $|U_{n+1}-\sqrt{3}|\leqslant k|U_n-\sqrt{3}|$

بيّن أنّه من أجل $n\in\mathbb{N}^*$: $|U_n-\sqrt{3}|\leqslant k^n|U_0-\sqrt{3}|$. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$.

تمرين 4: (4 نقاط)

n عدد طبيعي أكبر من 5.

1/ a و b عددان طبيعيان حيث $a=n-2$ و $b=2n+3$

أ - ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب - بيّن أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا وفقط إذا كان $n+5$ مضاعفا للعدد 7 .

ج – عيّن قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a;b)=7$

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث :

$$p=2n^2-7n-15 \quad \text{و} \quad q=n^2-7n+10$$

أ - بيّن أنّ كل من العددين p و q يقبل القسمة على $n-5$.

ب - عيّن تبعا لقيم n وبدلالة n ، $PGCD(p;q)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (I) .... $4x-9y=319$.

1) – تأكد أن الثنائية $(82 , 1)$ حل للمعادلة (I).

– حل المعادلة (I).

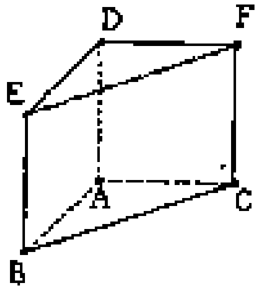
2) عين الثنائيات (a , b) الصحيحة،حلول المعادلة : (II) .... $4a^2-9b^2=319$

3) استنتج الثنائيات (x_0 , y_0) حلول المعادلة (I) بحيث x_0 و y_0 مربعين تامين.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A والمتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$ مربعان متقايسان طول ضلع كل منهما r حيث $r\in\mathbb{R}_+^*$.

(انظر الشكل)



1) يرمز I إلى منتصف $[AD]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$. بيّن أنّ G مرجح الجملة $\{(A;2),(B;1),(C;1),(D;2),(E;1),(F;1)\}$ هو منتصف $[IJ]$

2) ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد المتجانس $(A;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})$.

– عين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F .

– عين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق :

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي.

أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

اكتب الحلين على الشكل الأسي.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين.

عين θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

1) f الدالة العددية المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=\dfrac{x^2+5}{x+2}$.

C_f منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(وحدة الأطوال $2cm$)

أ – احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

ب – ادرس اتجاه تغيّر f ثمّ شكل جدول تغيراتها.

ج – بيّن أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى C_f ثم ارسم C_f و (D).

د – بيّن أنّ صورة المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$ محتواة في المجال $\left[1;\dfrac{5}{2}\right]$

2) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بحدّها الأول $U_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1}=f(U_n)$.

أ – باستخدام C_f و المستقيم ذي المعادلة $y=x$ ، مثل U_0 و U_1 و U_2 على حامل محور الفواصل (ox).

ب – خمّن اتجاه تغيّر وتقارب المتتالية (U_n).

ج – بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1\leqslant U_n\leqslant\dfrac{5}{2}$ و أن المتتالية (U_n)متزايدة .

د – استنتج أنّ (U_n) متقاربة و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} Un$.