GUEZOURI Aek – lycée Maraval - Oran

حسب الطبعة الجديدة للكتاب

التمرين 15

السرعة : $v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$ ، $T=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ ، $E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{r}$ ، حيث M : كتلة الكوكب الجاذب ، m كتلة القمر الصناعي ، G : الثابت الكوني . (ارجع للدرس)

التمرين 16

$$T=2\pi\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$$

التمرين 17

المسافة $r_A = 7330$ km هي المسافة بين مركز الأرض وأبعد نقطة من مدار القمر الصناعي .

المسافة $r_p = 6610$ km هي المسافة بين مركز الأرض وأقرب نقطة من مدار القمر الصناعي .

الدور : $T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_T}}$ (1)

حيث $a=\frac{r_A+r_P}{2}=\frac{7330+6610}{2}=6970\ km$

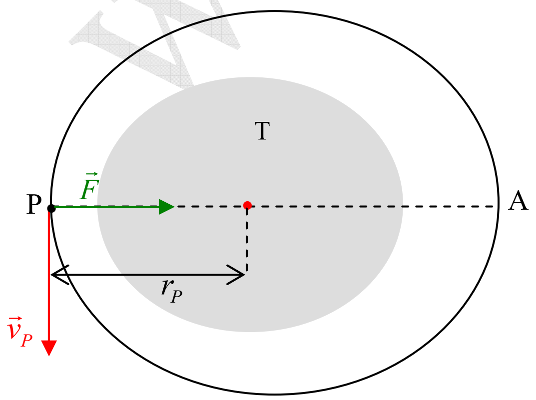
يمكن حساب الدور بهذه العلاقة ، ويمكن أن نجد عبارة أخرى للدور كما يلي :

على سطح الأرض تكون قوّة التجاذب بين القمر الصناعي والأرض $F=G\frac{mM_T}{R_T^2}$ ، حيث أن F هي قوة ثقل القمر الصناعي على سطح الأرض ، ومنه : $F = m\,g_0$ ، حيث g_0 هو تسارع الجاذبية الأرضية على سطح الأرض .

بالتعويض نجد : $g_0=\frac{GM_T}{R_T^2}$ ، ومنه : $GM_T=g_0R_T^2$. وبالتعويض في العلاقة (1) نجد $T=\frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{a^3}{g_0}}$

تطبيق عددي : $T=\frac{6,28}{64\times10^5}\sqrt{\frac{(6970\times10^3)^3}{9,81}}=96,1\ mn$

السرعة في أدنى نقطة من المدار :

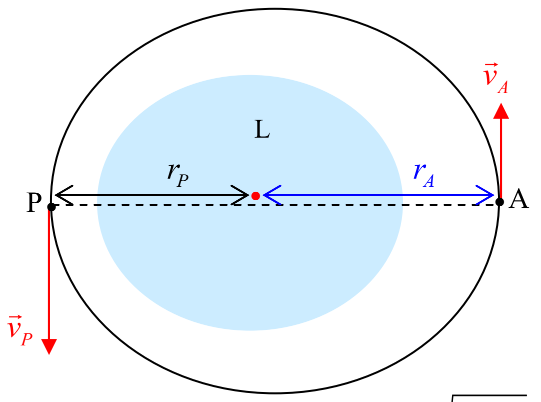


في النقطة P تكون قوّة التجاذب بين القمر الصناعي والأرض : $F=G\frac{mM}{r_P^2}$ (2)

وحسب القانون الثاني لنيوتن ، فإن هذه القوة هي $F=m\frac{v_P^2}{r_P}$ (3)

بالمساواة بين (2) و (3) $v_P=\sqrt{\frac{GM}{r_P}}=R_T\sqrt{\frac{g_0}{r_P}}$.

تطبيق عددي : $v_P = 64\times10^5\sqrt{\dfrac{9,81}{6610\times10^3}}$ ، $v_P = 2,16\times10^3\ km/h$



التمرين 18

نصف قطر القمر $R_L = 1728$ km

$r_P = R_L + 100 = 1728 + 100 = 1828$ km

$r_A = R_L + 125 = 1728 + 125 = 1853$ km

قيمة g_0 على سطح القمر $1,6\, m/s^2$

1 – السرعة العظمى : $v_P = \sqrt{\dfrac{GM_L}{r_P}} = R_L\sqrt{\dfrac{g_{0,L}}{r_P}} = 1728\times10^3\sqrt{\dfrac{1,63}{1828\times10^3}} = 5874\ km/h$

– السرعة الصغرى : $v_A = \sqrt{\dfrac{GM_L}{r_A}} = R_L\sqrt{\dfrac{g_{0,L}}{r_A}} = 1728\times10^3\sqrt{\dfrac{1,63}{1853\times10^3}} = 5834\ km/h$

2 – الدور : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{GM_L}}$ ، ولدينا $a = R_L + \dfrac{h_A + h_P}{2} = 1840,5\ km$ ، $GM_L = R_L^2\, g_{0,L}$.

$T = \dfrac{2\pi}{R_L}\sqrt{\dfrac{a^3}{g_{0,L}}} = \dfrac{6,28}{1728\times10^3}\sqrt{\dfrac{\left(1840,5\times10^3\right)^3}{1,63}}$ ، T = 118,5 mn

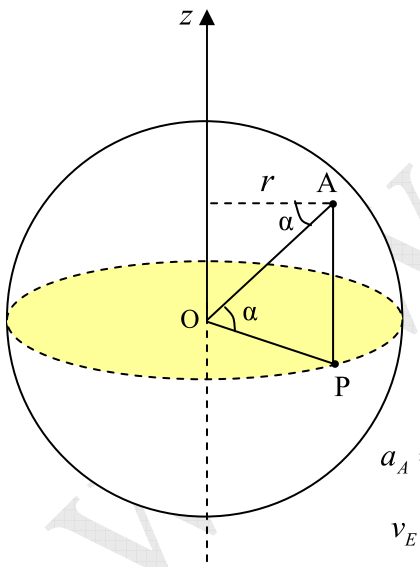
التمرين 19

1 - النقطة A تنتمي لسطح الأرض ، أي أن $OA = R_T$

النقطة A تدور حول المحور Oz صانعة دائرة نصف قطرها r ، حيث $r = R_T\cos\alpha$

تدور النقطة A بنفس السرعة الزاوية للأرض :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28}{23\times3600 + 56\times60 + 4} = \frac{6,28}{86164} = 7,28\times10^{-5}\, rd.s^{-1}$$



2 - أ) السرعة الخطية للنقطة A :

$$v_A = \omega\, r = \omega\, R_T\cos\alpha = 7,28\times10^{-5}\times6,4\times10^6\cos\alpha = 465,9\cos\alpha$$

تسارع النقطة A هو تسارع ناظمي لأن حركتها دائرية منتظمة .

$$a_A = a_n = \omega^2\ r = \omega^2 R_T\cos\alpha = \left(7,28\times10^{-5}\right)^2\times6,4\times10^6\cos\alpha = 3,39\times10^{-2}\cos\alpha$$

ب) عند خط الإستواء $\alpha = 0$ ، وبالتالي : $v_E = 465,9\cos0 = 465,9\, m/s \approx 1677\ km/h$

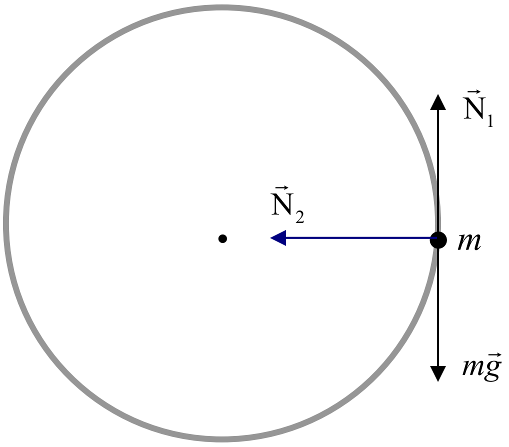
$a_E = 3,39\times10^{-2}\, rd/s^2$

جـ) عند أحد القطبين $r = 0$ ، وبالتالي $v_N = 0$ ، $a_N = 0$

د) عند خط الاستواء $\dfrac{g}{a_E} = \dfrac{9,8}{3,39\times10^{-2}} = 112$

التمرين 20

القوة $\vec{N}_2$ هي القوة التي يضغط بها مسند الكرسي على ظهر المرأة ، وهي القوة المكافئة لقوة الطرد المركزي التي تخضع لها المرأة



عندما تدور العجلة . $N_2 = m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R$ (1)

لدينا $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi N$ ، حيث N هو التواتر $(N = \dfrac{1}{T})$

التواتر هو عدد الدورات في الثانية أي $N = \dfrac{5}{60}\ tr/s$ ، وبالتالي :

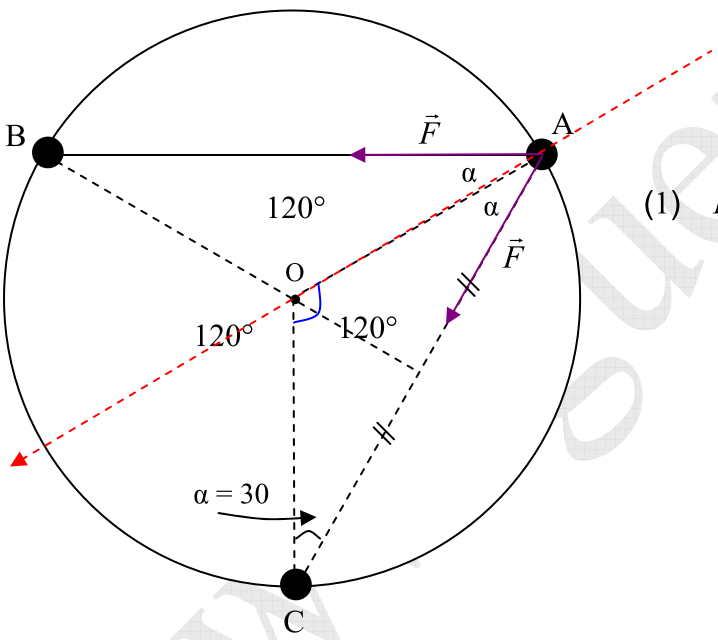
$$\omega = 2\pi\frac{5}{60} = 0{,}52\ rd/s$$

بالتعويض في العلاقة (1) : $N_2 = 60 \times (0{,}52)^2 \times 8 \approx 130 N$

القوة $\vec{N}_2$ هي القوة المكافئة لثقل المرأة ، ومنه $N_2 = P = m\,g = 60 \times 9{,}81 = 588{,}6\ N$

محصلة هاتين القوتين : $F = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{(588{,}6)^2 + (130)^2} = 602{,}8 N$

التمرين 21



نحسب المسافة بين كل نجمين ، فمثلا بين النجمين A و C :

$$AC = r\cos\alpha + r\cos\alpha = 2r\cos\alpha = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

قوة التجاذب بين هذين النجمين هي : $F = G\dfrac{m^2}{(r\sqrt{3})^2} = G\dfrac{m^2}{3r^2}$ (1)

بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى نطبّق القانون الثاني لنيوتن :

$\vec{F} + \vec{F} = m\vec{a}$ ، ثم نسقط على المحور الناظمي لمعلم فريني :

$F\cos\alpha + F\cos\alpha = ma_n$ ، وبالتالي :

$2F\cos 30 = m\dfrac{v^2}{r} = m\omega^2 r$ ، وبتعويض F من العبارة (1)

$2G\dfrac{m^2}{3r^2}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = m\omega^2 r$ ، ومنه : $\omega^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\dfrac{Gm}{r^3} = \dfrac{Gm}{\sqrt{3}\,r^3}$

في العلاقة المعطاة في الكتاب : المقصود r وليس R .

التمرين 22

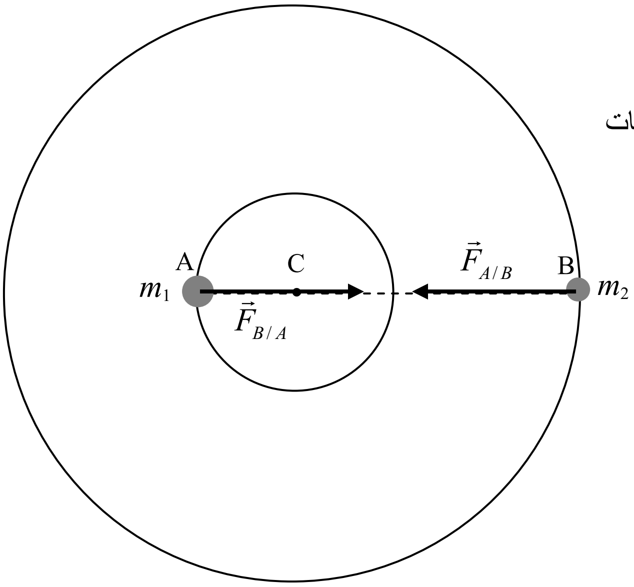
لدينا الكتلة الحجميّة للقمر $\rho = \dfrac{M_L}{V_L}$ ، دور القمر الصناعي : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_L+h)^3}{GM_L}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{3(R_L+h)^3}{4\pi G R_L^3\,\rho}}$

ومنه : $\rho = \dfrac{3\pi(R_L+h)^3}{G{R_L}^3.T^2} \approx 3334\ kg/m^3$

التمرين 23

1 – بإهمال تأثيرات الكواكب الأخرى والتأثير الثقالي يكون كل نجم خاضعا لقوة $F_{A/B} = F_{B/A}$

$\vec{F}_{B/A} = m_1\,\vec{a}'_n$ ، $\vec{F}_{A/B} = m_2\,\vec{a}_n$



2 - النجمان يدوران حول مركز كتلتيهما .

نحدّد أولا مركز الكتلة ، والمسمى كذلك مركز الثقل ، والمكافئ في الرياضيات لمركز الأبعاد المتناسبة (المرجح) .

يوجد مركز الكتلة على القطعة المستقيمة AB الواصلة بين مركزي النجمين .

نفرض أن مركز الكتلة يبعد على عن النقطة A بالمسافة x . إذن

$m_1\, x = m_2\left(r_1 + r_2 - x\right)$ (قانون مركز الكتلة)

ومنه : $x = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\left(r_1 + r_2\right)$

قوة التجاذب بين النجمين هي : $F_{A/B} = F_{B/A} = G\dfrac{m_1 m_2}{\left(r_1 + r_2\right)^2}$

بالنسبة للنجم A مثلا : $G\dfrac{m_1 m_2}{\left(r_1 + r_2\right)^2} = m_1\dfrac{v_1^2}{x} = \dfrac{m_1 v_1^2}{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\left(r_1 + r_2\right)}$ (1)

من جهة أخرى لدينا $v_1^2 = \omega^2 x^2 = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 \times \left(\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\left(r_1 + r_2\right)\right)^2$ (2)

بتعويض عبارة v_1^2 من العلاقة (2) في العلاقة (1) نجد : $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G\left(m_1 + m_2\right)}\left(r_1 + r_2\right)^3$ ، وهو القانون الثالث لكبلر .

3 – يمكن بواسطة الملاحظات والقياسات الفلكية أن نقيس r_1 ، r_2 ، T ، وبالتالي نستنتج مجموع كتلتي النجمين .

التمرين 24

حسب القانون الثالث لكبلر : $\dfrac{T_1^2}{r_1^3} = \dfrac{T_2^2}{r_2^3}$ ، ومنه $\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{r_1^3}{r_2^3} = \dfrac{(238020)^3}{(377400)^3} = 0,25$ ، ومنه $\dfrac{T_1}{T_2} = 0,5$ ، أي $T_2 = 2\,T_1$

التمرين 25

1 - القوّة المؤثرة على القمر الصناعي هي قوّة تجاذبه مع الأرض ، وهي قوة متجهة نحو مركز الأرض ، إذن تسارعه متجه نحو مركز الأرض ، وبالتالي هو تسارع ناظمي ، إذن حركة القمر الصناعي دائرية منتظمة .

2 - قوّة الجذب بين القمر الصناعي والأرض $F = G\dfrac{mM_T}{\left(R+H\right)^2} = m\dfrac{v^2}{\left(R+H\right)}$ (1)

لدينا $v^2 = \omega^2\left(R+H\right)^2 = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2\left(R+H\right)^2$. وبالتعويض في (1) : $\dfrac{4\pi^2}{T^2}\left(R+H\right)^2 = \dfrac{GM_T}{R+H}$ ، ومنه :

$$\frac{(R+H)^3}{T^2}=\frac{GM_T}{4\pi^2}=Cst$$ (Cst معناه ثابت) .

ثابت التناسب في القانون الثالث لكبلر هو $K=\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{GM_T}$.

3 - أ) يتميز القمر ميتيوسات بدوره الذي يساوي الدور اليومي للأرض (86146 s) ، أي أنه يبقى دائما مستقرا فوق نقطة من سطح الأرض على خط الإستواء ، لأنه يدور شرقا ، أي في نفس جهة دوران الأرض .

ب) يسمى هذا النوع من الأقمار الصناعية الأقمار المستقرة أرضيا .

جـ) يمثّل الدور 23 h 56 mn 4 s دور الأرض اليومي أي الزمن اللازم لمرور ين متعاقبين لنقطة من سطح الأرض مقابلا لنجم ثابت .

د) يمكن أن نحسب زمن دورة كاملة للأرض حول نفسها (الدور اليومي) ، ويمكن أن نحسب زمن دورة كاملة للأرض حول الشمس ، ثم نقسم هذا الزمن على عدد الدورات التي قامت بها الأرض حول نفسها أثناء دورانها حول الشمس ، فنجد أن هناك فرقا بين المدتين . نعلم أن الأرض تدور حول نفسها في نفس الجهة التي تدور فيها حول الشمس ، فأثناء هذا الدوران وخلال 365,25 يوم شمسي تنجز الأرض دورة زيادة بالنسبة للنجوم الثابتة وبالتالي يكون الدور اليومي $T=86400\times\frac{365,12}{366,25}=86164s$

إذن ليس 24 h .

4 - **كوسموس** : $\frac{(R+H)^3}{T^2}=\frac{\left((6400+19100)\times10^3\right)^3}{(40440)^2}\approx10^{13}$

مير : $\frac{(R+H)^3}{T^2}=\frac{\left((6400+500)\times10^3\right)^3}{(5700)^2}\approx10^{13}$

ميتيوسـات : $\frac{(R+H)^3}{T^2}=\frac{\left((6400+35800)\times10^3\right)^3}{(86160)^2}\approx10^{13}$

5 - $\frac{GM_T}{4\pi^2}=10^{13}$ ، ومنه $M_T=\frac{4\pi^2\times10^{13}}{G}=\frac{40\times10^{13}}{6,67\times10^{-11}}=6\times10^{24}\,kg$

التمرين 26

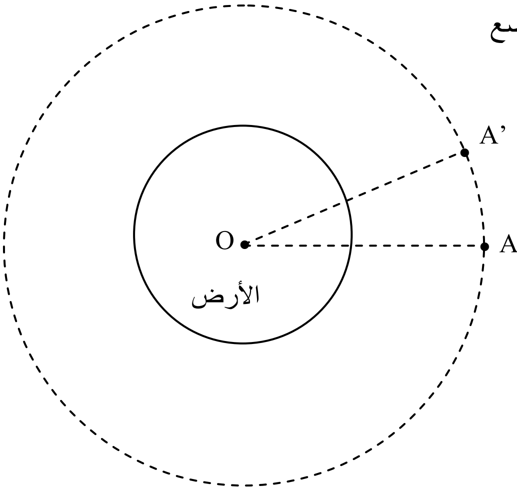
I -

1 - السرعة : $v_s=\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+H}}=\sqrt{\frac{6,67\times10^{-11}\times5,97\times10^{24}}{6800\times10^3}}$ ، $v_s=27360\ km/h$

2 – الدور : $T_s=2\pi\sqrt{\frac{(R+H)^3}{GM_T}}=6,28\sqrt{\frac{(68\times10^5)^3}{6,67\times10^{-11}\times5,97\times10^{24}}}$ ، $T_s=92,7\ mn$

3 - بما أن القمر الصناعي يدور نحو الشرق ، فإنه يدور في نفس جهة دوران الأرض .

نعتبر النقطة A هي النقطة التي يمر بها القمر الصناعي في اللحظة $t = 0$ ، هذه النقطة واقعة على الشاقول المار بالنقطة 'A من سطح الأرض على خط الإستواء .



عندما يصبح القمر الصناعي للمرة الأولى فوق النقطة A التي تكون قد انتقلت إلى الوضع 'A يكون حينذاك القمر الصناعي قد أنجز دورة زيادة عن عدد دورات الأرض (الأرض أنجزت جزءا من الدورة والقمر الصناعي أنجز نفس الجزء زائد دورة ، إذن الفرق هو دورة)

ليكن t_1 هي المدة التي استغرقها القمر الصناعي حينذاك ، إذن :

$$t_1 = (n+1)T_s \qquad (1)$$

وبالنسبة للأرض : $t_1 = nT$ (2)

حيث T هو دور الأرض حول نفسها . n : عدد الدورات

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج $n = \dfrac{T_s}{T - T_s}$ ، وبالتعويض في العلاقة (2) مثلا ، نجد

$t_1 = T\dfrac{T_s}{T - T_s} = 1440 \times \dfrac{92,7}{1440 - 92,7} = 99\ mn$ ، وهو المجال الزمني الذي يفصل بين مرورين متتاليين للقمر الصناعي فوق نفس النقطة .

II –

1 - في كل دورة ينقص ارتفاع القمر الصناعي عن الأرض بـ $\dfrac{1}{1000}$ من قيمة الارتفاع الذي قبله ، إذن بالنسبة للارتفاع

$h_0 = 400\ km$ والارتفاع الذي يليه (أي بعد دورة واحدة) h_1 يمكن أن نكتب العلاقة من الآن $h_1 = h_0 - \dfrac{h_0}{1000}$

من العلاقة $h_1 = h_0 \times \dfrac{999}{1000}$ ، نستنتج أن الارتفاعات عبارة عن حدود متتالية هندسية أساسها $1 - \dfrac{1}{1000} = 0,999$ ، وحدها الأول

$h_0 = 400\ km$ ، حيث $h_n = h_0 \times \left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n$ و $h_{n+1} = h_n \times \left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)$ ، وهي العلاقة المطلوبة .

3 - لدينا $h_n = h_0 \times \left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n$. نحسب قيمة n (عدد دورات القمر الصناعي) من أجل $h_n \approx 100\ km$

$100 = 400(0,999)^n$ ، ومنه $n = \dfrac{ln0,25}{ln0,999} \approx 1386$ ($h = 100$ km ليس حدا لهذه المتتالية ، لكنه قريب من أحد الحدود)