الدوال العددية

أسئلة وأجوبتها

$(O;I,J)$ معلم متعامد ومتجانس للمستوي حاملا محوريه $(x'x)$ ، $(y'y)$.

f دالة عددية معرفة على مجال I حيث: $I =]c\,,+\infty[$ و (C) تمثيلها البياني.

(Δ) مستقيم معرف بالمعادلة $y = \alpha x + \beta$ مع: α ، β عددان حقيقيان.

قابلية اشتقاق دالة

سؤال1: بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق في القيمة a

الإجابة: نبين أن $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(a)}{h}$ حقيقية

سؤال2: بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I

الإجابة: نستعمل قابلية اشتقاق الدوال المرجعية على المجال I والعمليات على الدوال المشتقة.

اتجاه التغير

سؤال3: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال I

إجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $f'(x) > 0$.

سؤال4: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
بين أن الدالة f متناقصة تماما على المجال I

إجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $f'(x) < 0$.

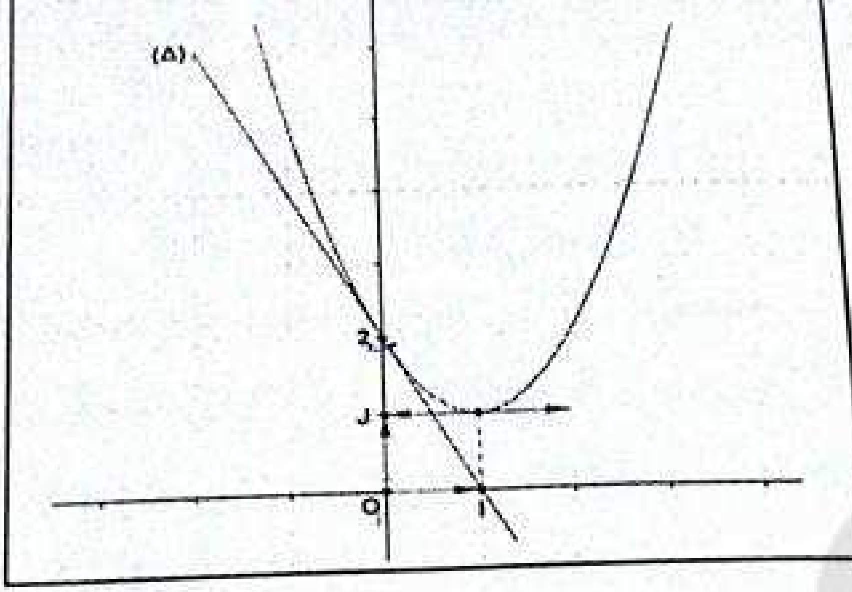
سؤال5: f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
بين أن الدالة f ثابتة على المجال I

إجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I : $f'(x) = 0$.

سؤال6: أدرس اتجاه تغير الدالة f

الإجابة: نحسب $f'(x)$ ثم نشكل جدول إشارتها على المجال I ونستنتج اتجاه التغير

سؤال7: التمثيل البياني التالي لدالة عددية f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، (Δ) مماس منحنى الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.



بقراء بيانية حدد:

1) قيمة كل من العددين $f'(1)$ ، $f'(0)$.

2) إشارة $f'(x)$

الإجابة: 1) معادلة مماس منحنى الدالة f عند النقطة:

- ذات الفاصلة 1 هي $y = 1$ ومنه: $f'(1) = 0$
- ذات الفاصلة 0 هي $y = -2x + 2$ ومنه: $f'(0) = -2$

2) بقراءة بيانية الدالة f

- متناقصة على المجال $]-\infty , 1]$ ومنه: $f'(x) \leq 0$ على هذا المجال
- متزايدة على المجال $[1 , +\infty[$ ومنه: $f'(x) \geq 0$ على هذا المجال

سؤال8: بين أن الدالة f مستمرة عند القيمة a

الإجابة: نبين أن: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

سؤال9: f دالة قابلة للاشتقاق في القيمة a.

احسب $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ثم أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة.

الإجابة: $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

منحنى الدالة f يقبل في النقطة ذات الفاصلة a مماسا ميله $f'(a)$.

سؤال10: بين أن الدالة f مستمرة على المجال I

الإجابة: نستعمل استمرار الدوال المرجعية على المجال I والعمليات على الدوال المستمرة.

• $f''(x_0)=0$ و $f''(x)$ تغير إشارتها بجوار x_0

فإن: النقطة التي فاصلتها x_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C)

• A مركز تناظر للمنحنى (C) و A تنتمي إلى المنحنى (C)

فإن: النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى (C)

تفكيك دالة

سؤال48: فكك الدالة h المعرفة على المجال I بالشكل: $h(x)=f(ax+b)$

الإجابة: لدينا: $h(x)=f(x)o(ax+b)$ ومنه:

الدالة h مركب من الدالة التآلفية u حيث $u(x)=ax+b$ والدالة f بهذا الترتيب.

سؤال49: فكك الدالة h المعرفة على المجال I حيث: $h(x)=f^n(x)$

الإجابة: لدينا: $h(x)=x^n o f$

ومنه: الدالة h مركب من الدالة f والدالة v حيث $v(x)=x^n$ بهذا الترتيب.

الدوال الأصلية لدالة

سؤال50: بين أن الدالة F دالة أصلية الدالة f على المجال I

الإجابة: نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I: $F'(x)=f(x)$

سؤال51: بين أن F ، H دالتان أصليتان للدالة f على المجال I

الإجابة: نبين أن الفرق $F(x)-H(x)$ ثابت من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I

سؤال52: f دالة مستمرة على مجال I و a عنصر من المجال I.
حدد F الدالة الأصلية للدالة f على المجال I التي تنعدم من أجل القيمة a للمتغير

الإجابة: الدالة F معرفة على المجال I بالشكل: $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

سؤال53: u ، v دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I ، نفرض u' ، v' مستمرتان على هذا المجال و a ، b عددان حقيقيان من المجال I.

استعمل المكاملة بالتجزئة لتحسب $k=\int_a^b u(t)\times v'(t)\,dt$

الإجابة: $k=\left[u(t)\times v(t)\right]_a^b-\int_a^b u'(t)\times v(t)\,dt$

حساب المساحات

سؤال54: أحسب S مساحة الحيز تحت المنحنى (C) بين العددين a ، b

الإجابة: نفرض $a<b$ ، ونفرض F دالة أصلية للدالة f فيكون:

$S=\int_a^b f(x)\,dx$ ومنه: $S=\left[F(x)\right]_a^b$ إذن: $S=\left[F(b)-F(a)\right]u.a$

سؤال40: m وسيط حقيقي.

ادرس بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=mx+b$

الإجابة: الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم المعرف بالمعادلة $y=mx+b$.

رسم منحنيات انطلاقا من منحن (C) ممثل لدالة f

سؤال41: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x)=|f(x)|$

الإجابة: إذا كان المنحنى (C):

- فوق محور الفواصل أي: $f(x)\geq 0$ فإن: (C_h) ينطبق على المنحنى (C).
- تحت محور الفواصل أي: $f(x)\leq 0$ فإن: (C_h) هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور الفواصل.

سؤال42: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x)=f(|x|)$

الإجابة:
- إذا كان: $x\geq 0$ فإن: (C_h) ينطبق على المنحنى (C).
- إذا كان: $x\leq 0$ فإن: (C_h) هو نظير المنحنى (C) بالنسبة إلى محور التراتيب.

سؤال43: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x)=-f(-x)$

الإجابة: نحصل المنحنى (C_h) انطلاقا من المنحنى (C) بالتناظر بالنسبة إلى المبدأ O

سؤال44: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h حيث: $h(x)=f(-x)$

الإجابة: نحصل على المنحنى (C_h) انطلاقا المنحنى (C) بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.

سؤال45: انطلاقا من المنحنى (C) أرسم (C_h) منحنى الدالة h المعرفة بالعبارة:

$h(x)=f(x+a)+b$

الإجابة: نحصل على المنحنى (C_h) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a\,,\,b)$

نقط الانعطاف

سؤال46: بين أن النقطة A ذات الفاصلة a نقطة انعطاف للمنحنى (C)

الإجابة: نبين أن مماس المنحنى (C) في النقطة A يخترق المنحنى (C)

سؤال47: بين أنه توجد نقطة انعطاف للمنحنى (C)

الإجابة: نذكر أنه إذا كان:

- $f'(x_0)=0$ و $f'(x)$ لا تغير إشارتها بجوار x_0

فإن: النقطة التي فاصلتها x_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C)

مماسات منحنى

سؤال11: اكتب معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة a

الإجابة: إذا كانت الدالة f

- قابلة للإشتقاق في a فإن: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
- غير قابلة للإشتقاق في a (مشتق لا نهائي) فإن: $x = a$

سؤال12: كم عدد مماسات المنحنى (C) التي توازي محور الفواصل $(x'x)$ ؟.

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول المعادلة $f'(x) = 0$ في المجال I

سؤال13: كم عدد مماسات المنحنى (C) التي توازي المستقيم (Δ) (أو التي ميلها α) ؟.

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول المعادلة $f'(x) = \alpha$ في المجال I

سؤال14: كم عدد مماسات المنحنى (C) التي تعامد المستقيم (Δ) ؟.

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول المعادلة $\alpha \times f'(x) = -1$ في المجال I

سؤال15: كم عدد مماسات المنحنى (C) التي تشمل النقطة $A(x_0 , y_0)$ ؟.

الإجابة: عدد المماسات هو عدد حلول $y_0 = f'(\alpha)(x_0-\alpha) + f(\alpha)$ في المجال I

سؤال16: بين أن المستقيم (Δ) يمس المنحنى (C) في نقطة A يطلب تحديد فاصلتها.

الإجابة: فاصلة النقطة A هي حل الجملة $\begin{cases} f'(x) = \alpha \\ f(x) - xf'(x) = \beta \end{cases}$ في المجال I .

عناصر تناظر منحنى

سؤال17: برهن أن الدالة f زوجية

الإجابة: نبين أن:

- المجال I متناظر بالنسبة إلى العدد 0
- $f(-x) = f(x)$

سؤال18: برهن أن الدالة f فردية

الإجابة: نبين أن:

- المجال I متناظر بالنسبة إلى العدد 0
- $f(-x) + f(x) = 0$

سؤال19: برهن أن الدالة f دورية

الإجابة: نبين أنه يوجد عدد حقيقي p بحيث:

- العدد $x + p$ ينتمي إلى المجال I
- $f(x+p) = f(x)$

الإجابة: نبين أن:

- الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a , b]$
- العدد λ محصور بين العددين $f(a)$ ، $f(b)$

سؤال35: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x)=2-x+2e^{-x}$

α هو حل المعادلة $f(x)=0$ على المجال $]2.2 , 2.3[$

بين ان $f'(\alpha)=1-\alpha$ ثم حدد حصرا للعدد $f'(\alpha)$

الإجابة: لدينا: $f(\alpha)=0$ ومنه: $2e^{-\alpha}=\alpha-2$

لدينا: $f'(x)=-1-2e^{-x}$ ومنه: $f'(\alpha)=-1-2e^{-\alpha}$

ومنه: $f'(\alpha)=-1-(\alpha-2)$ إذن: $f'(\alpha)=1-\alpha$

لدينا: $2.2<\alpha<2.3$ ومنه: $-2.3<-\alpha<-2.2$ إذن: $-1.3<f'(\alpha)<-1.2$

إشارة عبارة على مجال

سؤال36: بين أن الدالة f موجبة على المجال $[a,b]$

الإجابة: نطبق إحدى النتيجتين التاليتين:

- $f(a)\geq 0$ و f متزايدة على المجال $[a,b]$
- $f(b)\geq 0$ و f متناقصة على المجال $[a,b]$

سؤال37: بين أن الدالة f سالبة على المجال $[a,b]$

الإجابة: نطبق إحدى النتيجتين التاليتين:

- $f(b)\leq 0$ و f متزايدة على المجال $[a,b]$
- $f(a)\leq 0$ و f متناقصة على المجال $[a,b]$

الدراسة البيانية للمعادلات من الشكل $f(x)=ax+b$

سؤال38: أدرس بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$

الإجابة: الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم ذو المعادلة $y=m$

سؤال39: m وسيط حقيقي.

ادرس بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=ax+m$

الإجابة: الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم المعرف بالمعادلة $y=ax+m$

سؤال55: أحسب S مساحة الحيز المحدد بمنحنيي الدالتين f ، h والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = a$ ، $x = b$.

الإجابة: نفرض $a < b$ فيكون: $S = \int_a^b |f(x) - h(x)|\,dx$

القيمة المتوسطة دالة

سؤال56: f دالة مستمرة على مجال $[a , b]$.

أحسب m القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a , b]$

الإجابة: العدد m يعطى بالعلاقة: $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

حساب الحجوم

سؤال57: أحسب V حجم مجسم الدوران الذي يولده دوران منحنى دالة f حول محور الفواصل دورة كاملة على مجال $[a, b]$.

الإجابة: الحجم V يعطى بالعلاقة: $V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$

المعادلات التفاضلية

سؤال58: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' = a y$

الإجابة: الحلول هي: $y = ke^{ax}$ مع: k عدد حقيقي

سؤال59: حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

الإجابة: الحلول هي: $y = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ مع: k عدد حقيقي

سؤال60: α عدد حقيقي غير معدوم.

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y'' = -\alpha^2 y$

الإجابة: الحلول هي $y = a\cos\alpha x + b\sin\alpha x$

مع: a ، b عددان حقيقيان ثابتان.

المستقيمات المقاربة

سؤال25: فسر بيانيا $\lim\limits_{x \to c} |f(x)| = +\infty$

الإجابة: المستقيم المعرف بالمعادلة $x = c$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

سؤال26: فسر بيانيا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$.

الإجابة: المستقيم المعرف بالمعادلة $y = \beta$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

سؤال27: بين أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

الإجابة: نبين أن $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (\alpha x + \beta)] = 0$

سؤال28: فسر بيانيا $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = \beta$.

الإجابة: المستقيم المعرف بالمعادلة $y = \alpha x + \beta$ مقارب مائل للمنحنى (C)

الأوضاع النسبية

سؤال29: أدرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

الإجابة: نشكل جدول إشارة العبارة $f(x) - (\alpha x + \beta)$ ثم نستنتج الوضع النسبي

سؤال30: حدد احداثيات نقاط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ)

الإجابة: نبحث عن حلول المعادلة $f(x) = \alpha x + \beta$ في المجال I

سؤال31: حدد احداثيات نقاط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل $(x'x)$

الإجابة: نضع: $y = 0$ ولتحديد x نحل في المجال I المعادلة $f(x) = 0$

سؤال32: حدد احداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع محور التراتيب $(y'y)$

الإجابة: إذا كانت الدالة f معرفة عند القيمة 0

نضع: $x = 0$ فيكون $y = f(0)$ ومنه: احداثيا نقطة التقاطع هما: $(0, f(0))$.

المعادلات من الشكل $f(x) = \lambda$

سؤال33: بين أن المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a , b[$

الإجابة: نبين أن:

- الدالة f مستمرة على المجال $[a , b]$
- العدد λ محصور بين العددين $f(a)$ ، $f(b)$

سؤال34: بين أن المعادلة $f(x) = \lambda$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a , b[$

سؤال20: A نقطة احداثياها (a, b) في المعلم $(O; I, J)$

اكتب معادلة المنحنى (C) في المعلم $(A; I, J)$

الإجابة: نعلم أن دساتير التغيير لمعلم هي $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$

لدينا: $y = f(x)$ ومنه: $y' + b = f(x' + a)$

سؤال21: برهن أن النقطة $A(a\ ,\ b)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

الإجابة: نستعمل إحدى الطريقتين التاليتين

طريقة (1): نبين أن:

- العدد $2a - x$ ينتمي إلى المجال I. (المجال I متناظر بالنسبة للعدد a)
- $f(2a - x) + f(x) = 2b$

طريقة (2):

- نكتب معادلة المنحنى (C) في المعلم $(A; I, J)$
- نبين أن الدالة الناتجة فردية

سؤال22: برهن أن المستقيم المعرف بالمعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى (C)

الإجابة: نستعمل إحدى الطريقتين التاليتين

طريقة (1): نبين أن

- العدد $2a - x$ ينتمي إلى المجال I. (المجال I متناظر بالنسبة للعدد a)
- $f(2a - x) = f(x)$

طريقة (2):

- نكتب معادلة المنحنى (C) في المعلم الذي مبدؤه $A(a, f(a))$
- نبين أن الدالة الناتجة زوجية

سؤال23: بين أن: $f(a - x) + f(x) = b$ ثم فسر النتيجة بيانيا

الإجابة: النقطة $A\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

سؤال24: بين أن: $f(a - x) = f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا

الإجابة: $x = \frac{a}{2}$ معادلة محور تناظر للمنحنى (C)