الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة: جوان 2015

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B حيث: $z_A=1-i$ و $z_B=3+3i$.

1) أ) اكتب z_A ، z_B على الشكل الأسي .

ب) n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

جـ) z عدد مركب حيث: $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ؛ احسب طويلة العدد z وعمدة له ، ثم اكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري.

د) استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) أ) احسب اللاحقة z_C للنقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$، واستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) احسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\left\{(A;-1),(B;1),(C;1)\right\}$، ثمّ بيّن أنّ $ABDC$ مربع .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(1;2;2\right)$، $B\left(2;0;2\right)$، $C\left(-2;3;7\right)$

والمستوي $(\mathcal{P})$ المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=2+\beta\\y=-1-3\alpha-\beta\\z=-\alpha\end{cases}$ α و β وسيطان حقيقيان.

1) أ) بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب) تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(2;1;1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثمّ اكتب معادلة ديكارتية له .

2) أ) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$ ، ثمّ بيّن أنّ المستويين $(\mathcal{P})$ و (ABC) متعامدان .

ب) بيّن أنّ تقاطع $(\mathcal{P})$ و (ABC) هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases}x=5+4t\\y=-4-7t\,;(t\in\mathbb{R})\\z=-t\end{cases}$.

3) أ) عيّن إحداثيات النقطة H مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;1),(C;-1)\right\}$.

ب) احسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ).

4) لتكن $(\mathcal{P}')$ مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\vec{u}=0$ ($\vec{u}$ هو شعاع توجيه (Δ)).

أ) بيّن أن المجموعة $(\mathcal{P}')$ هي مستوٍ يطلب تعيين عناصره المميزة، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له.

ب) بيّن أن المستويات الثلاثة $(\mathcal{P})$، (ABC) و $(\mathcal{P}')$ تتقاطع في نقطة واحدة E، ثمّ عيّن إحداثيات E .

ج) احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ) .

التمرين الثالث: (03.5 نقطة)

1) أ) عيّن ، حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية للعدد 8^n على 13.

ب) استنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد $3-2014^{2037}+42\times138^{2015}$ على 13 .

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $(5n+1)\times64^n-5^{2n+3}\equiv(5n+6)8^{2n}[13]$.

ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n حتى يكون: $(5n+1)\times64^n-5^{2n+3}\equiv0[13]$.

التمرين الرابع: (07.5 نقطة)

I) h الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=(x+2)^2+2-2\ln(x+2)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}h(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة h ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها .

3) استنتج أنه من أجل كل x من $]-2;+\infty[$ ، $h(x)>0$.

II) f الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x+2}\ln(x+2)$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$(وحدة الطول $1cm$).

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2}f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل x من المجال $]-2;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{h(x)}{(x+2)^2}$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-2;+\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4) أ) اثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثييها.

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f) .

ج) احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y=0$ ، $x=-1$ و $x=1$.

III) g الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=|x+1|+\dfrac{2}{x+2}\left|\ln(x+2)\right|$

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة إلى g؟

2) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

3) انطلاقا من المنحنى (C_f) ارسم المنحى (C_g) الممثل للدالة g في نفس المعلم السابق.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطتين $A(2;3;1)$ ، $B(1;2;-2)$

و (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases};\ (t\in\mathbb{R})$.

1) أ) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1;2;-2)$ شعاع توجيه له .

ب) عيّن إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ) .

2) $(\mathcal{P})$ المستوي المعيّن بالمستقيمين (D) و (Δ) .

بيّن أنّ $\vec{n}(2;-2;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي $(\mathcal{P})$، ثمّ استنتج معادلة ديكارتية له .

3) أ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{Q})$ الذي يشمل النقطة B ويعامد المستقيم (Δ).

ب) عيّن إحداثيات النقطة E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ).

جـ) احسب المسافة بين النقطة B والمستقيم (Δ).

د) احسب مساحة المثلث BEC.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2-4(\sin\theta)z+4=0...(\text{I})$.

حيث θ وسيط حقيقي.

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2. اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

3) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$.

أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري، ثمّ على الشكل الأسي. واستنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) استنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاوية له.

جـ) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثمّ حدّد طبيعة الرباعي $ABDC$.

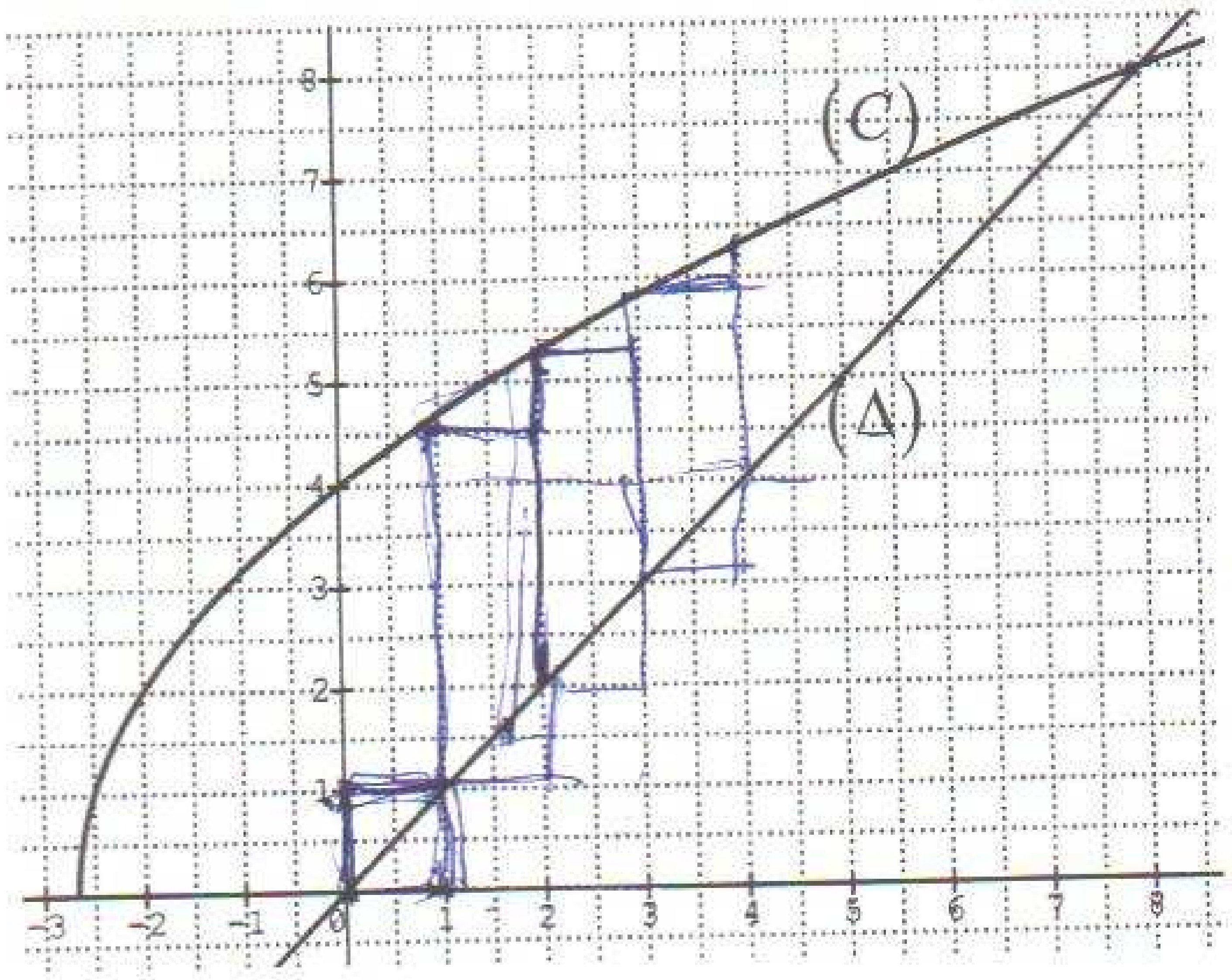
4) أ) عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z\neq z_B$.

ب) عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا مع $z\neq z_B$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{6u_n+16}$

1) h الدالة المعرفة على المجال $\left[-\frac{8}{3};+\infty\right[$ بما يلي: $h(x)=\sqrt{6x+16}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس و (Δ) المستقيم ذو معادلة $y=x$ (أنظر الشكل في الصفحة الموالية).



أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثّل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء).

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر (u_n) وتقاربها.

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$0 \le u_n < 8$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{(8-u_n)(u_n+2)}{\sqrt{6u_n+16}+u_n}$.

جـ) استنتج اتجاه تغيّر (u_n).

3) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_{n+1} \le \dfrac{1}{2}(8-u_n)$.

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 8 - u_n \le 8\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $g(x) = (x+2)e^x - 2$.

1) احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثمّ شكل جدول تغيراتها .

3) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$.

(C_f) المنحنى الممثّل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) بيّن أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -g(x)$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة f .

جـ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$
ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

3) أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $0,92 < \alpha < 0,93$ و $-1,56 < \beta < -1,55$.

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) على المجال $\left]-\infty ; \dfrac{3}{2}\right]$

4) أ) بيّن أنّ الدالة: $x \mapsto xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ ، $x = \alpha$ (حيث α هي القيمة المعرفة في السؤال 3) أ)).

جـ) جد حصرا للعدد A .