الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

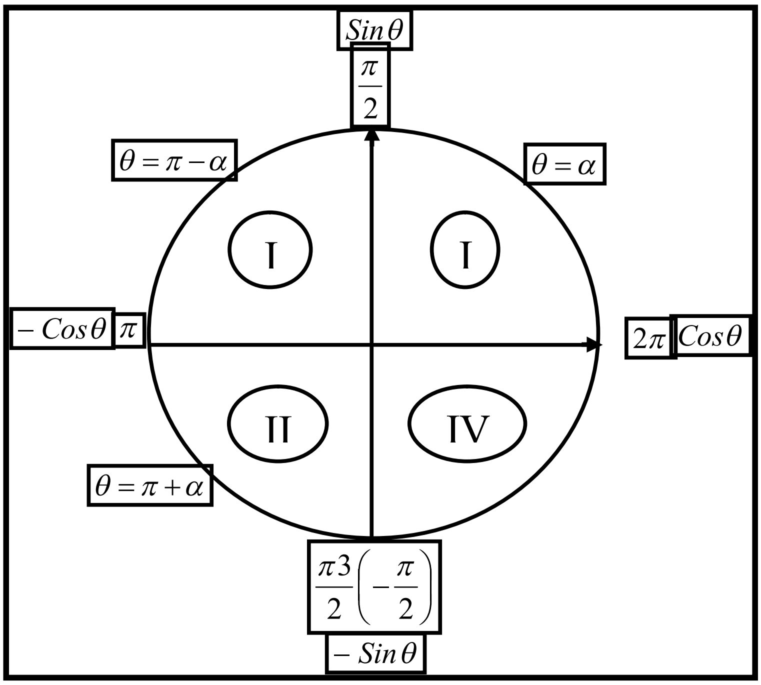
- وزارة التربية الوطنية –

BAC 2017

سلسلة ـ سبل التألق ـ في الرياضيات

ملخص شامل في رحاب الأعداد المركبة

- موجه إلى جميع الشعب العلمية -



إنما الأعمال العظيمة هي أعمال صغيرة كتب لها الاستمرار

الأستاذ : محمد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة القبة القديمة -الجزائر- ENS -

ثانوية عبد العزيز الشريف - الوادي -

مارس 2017

أولا: دلـــيـل الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

☒ كل عدد z يكتب بصورة وحيدة على الشكل: $\boxed{z = x + iy}$

حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2 = -1$

☒ تسمى الكتابة: $\boxed{z = x + iy}$ **الشكل الجبري** للعدد المركب z

☒ يسمى x الجزء الحقيقي لـــــ z ونرمز له بــــ: $\text{Re}(z) = x$

☒ يسمى y الجزء التخيلي لـــــ z ونرمز له بــــ: $\text{Im}(z) = y$

☒ أ/ إذا كان : $\text{Im}(z) = 0$ ، فان $z = x$ ونقول أن: z **حقيقي**

ب/ إذا كان: $\text{Re}(z) = 0$ ، فان $z = y$ ونقول أن: z **تخيلي صرف (بحت)**

ج/ إذا كان: $z = 0$ ، فإن العدد 0 هو في آن واحد حقيقي و تخيلي صرف

ملحوظة: 0 هو العدد المركب الوحيد الذي يحقق هذه الميزة

☒ **مرافق عدد مركب:**

مرافق العدد المركب: $\boxed{z = x + iy}$ هو العدد المركب: $\boxed{\overline{z} = x - iy}$

(نغيّر إلاّ في إشارة الجزء التخيّلي)

☒ **خواص المرافق:**

1/ $\overline{\overline{z}} = z$ 2/ $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ 3/ $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

4/ $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$ 5/ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ ، $z_2 \neq 0$ 6/ $\overline{k.z} = k.\overline{z}$ ، $k \in \mathbb{R}$

7/ $\overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}$ ، $k \in \mathbb{R}$ و $z \neq 0$ 8/ $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$ ، $n \in \mathbb{Z}$

☒ **نتـائج:** ليكن z عدد مركب حيث: $z = x + iy$

1/ $z + \overline{z} = 2x$ 2/ $z - \overline{z} = 2yi$ 3/ $\overline{z}.z = x^2 + y^2$

4/ z حقيقي يكافئ $\overline{z} = z$ 5/ z تخيلي صرف يكافئ $\overline{z} = -z$

☒ **طويلة وعمدة عدد مركب:**

من أجل كل عدد مركب غير معدوم $z = x + iy$ لدينا: r طويلة z و $\arg(z)$ عمدة z حيث:

/1 $\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$ /2 $\boxed{\arg(z) = \theta = \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta = ... + 2k\pi}$

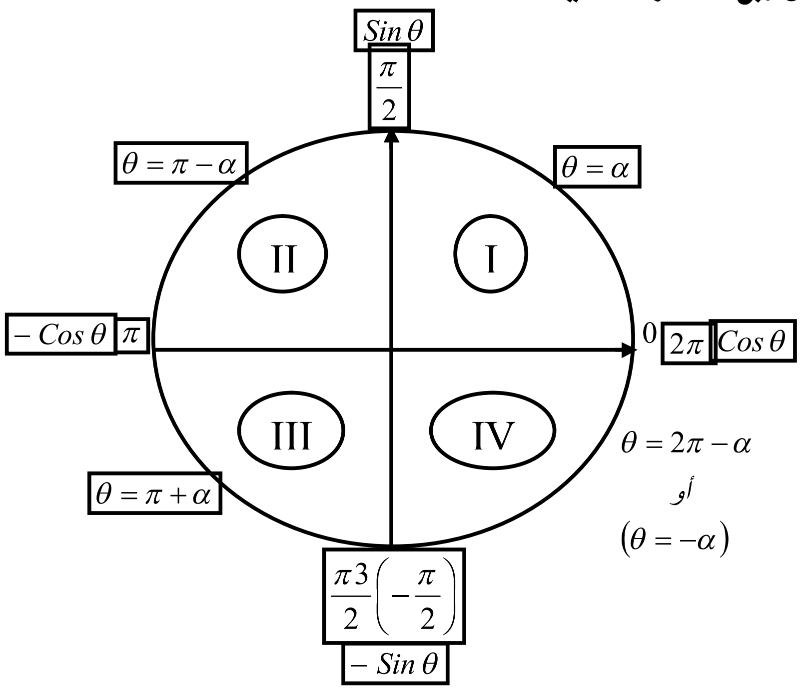
☒ **الشكل الـمثلثي وَالآسي لِعدد مركب** z :

الشكل الـجبري	الشكل الـمثلثي	الشكل الآسي
$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$

ما يجب معرفته وعدم نسيانه للانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والآسي

☒ **البحث عن عمدة عدد مركب** (الدائرة المثلثية + جدول الزوايا الشهيرة):

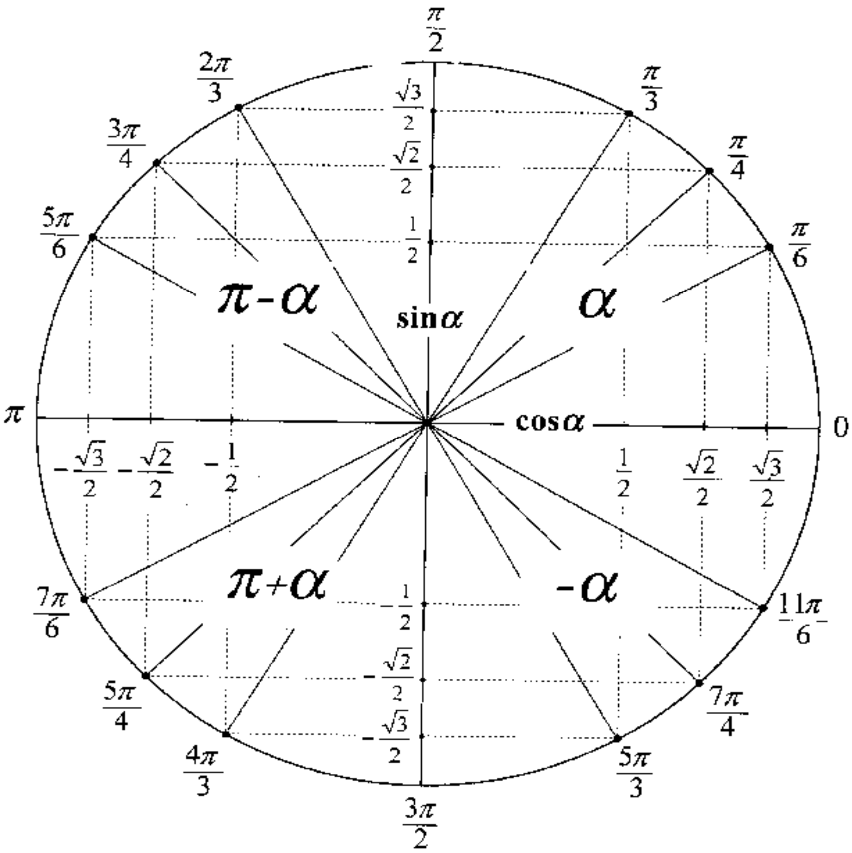
أولاً: ميزة كل ربع الدائرة المثلثية:



ثانياً: النسب المثلثية لأقياس الزوايا الشهيرة التي تستعملها لحساب العمدة.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$	π
$Cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1
$Sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0

☒ الدائــرة المثلثية



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$
$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

☒ علاقات مثلثية مهمة

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta \qquad \cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \qquad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \qquad \sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$$

☒ **خواص العمدة:**

1/ $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$ 2/ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$

3/ $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$ 4/ $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

5/ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ 6/ $\arg(z^n) = n.\arg(z) + 2k\pi$ حيث n من $\mathbb{Z}$

☒ **خواص الطويلة:** z_1 و z_2 **عددان مركبان غير معدومين**

1/ $|z| = |\bar{z}| = |-z|$ 2/ $\left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$ 3/ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ 4/ $|z_1^n| = |z_1|^n$

ملحوظة هامة جدا: $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$ وأيضا: $|z_1 - z_2| \neq |z_1| - |z_2|$

والصواب: $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$ و $\boxed{|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|}$

☒ **دستور موافر (MOIVER):**

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{n\theta i} = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

العد الفردي يكافئ الزاوية π **يعني:** $\pi = \pi \times$**عدد فردي**

العدد الزوجي يكافئ الزاوية 0 يعني: $0 = \pi \times$**عدد زوجي**

لدينا: $z^n = [r^n , n\theta] = r^n e^{in\theta}$

z^n **حقيقي**	z^n **حقيقي موجب**	z^n **حقيقي سالب**	z^n **تخيلي صرف**
$n\theta = k\pi$	$n\theta = (2k)\pi$	$n\theta = (2k+1)\pi$	$n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

☒ **التحويل من الشكل الآسي إلى الشكل الجبري في حالات خاصة:**

الشكل الآسي	**الشكل الجبري**
$e^{2\pi i}$	1
$e^{\pi i}$	-1
$e^{\frac{\pi}{2}i}$	i
$e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$	$-i$

ومنه

الشكل الآسي	**الشكل الجبري**
$ke^{2\pi i}$	k
$ke^{\pi i}$	$-k$
$ke^{\frac{\pi}{2}i}$	ki
$ke^{-\frac{\pi}{2}i}$	$-ki$

☒ **هـــام جـــداً:** $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1/ قيس الزاوية $\frac{\pi}{n}$ صورته من **الربع الأول**

2/ قيس الزاوية من الشكل $\frac{(n-1)\pi}{n}$ صورته تقع في **الربع الثاني**

3/ قيس الزاوية من الشكل $\frac{(n+1)\pi}{n}$ صورته تقع في **الربع الثالث**

4/ قيس الزاوية من الشكل $-\frac{\pi}{n}$ صورته تقع في **الربع الرابع**

ثانيا: دلـــيل هـــــــنــــــدســــة الأعداد المركبة

1ـ دليل التفسيرات الهندسية المختلفة للأعداد المركبة

الـــمفهوم الهندسي	التفسير الهندسي بالأعداد الـمركبة (الكتابة المركبة)
الطـــــول (مســــافة) AB	$AB = \lvert Z_B - Z_A \rvert$
لاحقة الشـــعـــاع $\overrightarrow{AB}$	$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$
لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$	$Z_G = \frac{\alpha\, Z_A + \beta\, Z_B + \gamma\, Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC	$Z_H = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$
لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$
لاحقة النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى C	$Z_C = \frac{Z_A + Z_B}{2} \Rightarrow Z_B = 2Z_C - Z_A$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل	$Z_M = x + i\,y \Rightarrow Z_{M'} = \overline{Z}_M = x - i\,y$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور التراتيب	$Z_M = x + i\,y \Rightarrow Z_{M'} = -x + i\,y$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمبدأ المعلم	$Z_M = x + i\,y \Rightarrow Z_{M'} = -x - i\,y$
قيـــاس الـــزاوية الـــموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)$
النقاط C,B,A على استقامة واحدة $\left(\left(\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}\right)\right)$	$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} =$ عدداً حقيقياً
الشـــعـــاعين $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ متعامدان $\left(\left(\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}\right)\right)$	$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} =$ عدداً تخيلياً صرفاً
طويلة النسبة $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$	$\left\lvert\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right\rvert = \frac{AB}{AC}$

ملاحظات مهمة

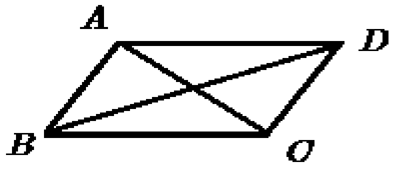
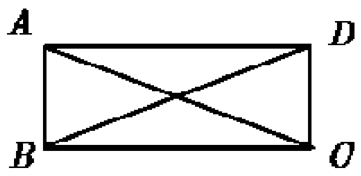
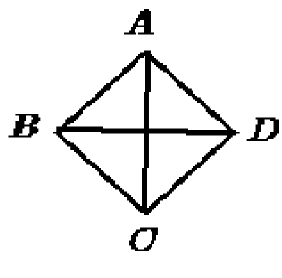
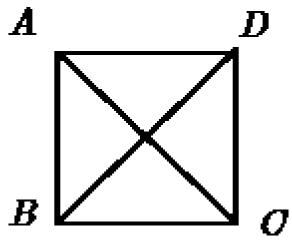
- ☒ معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث القائم، يكون الوتر قطرا لهذه الدائرة ومنه مركزها هو منتصف الوتر ونصف قطرها هو طول الوتر على 2

- ☒ معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع، مركز ثقل المثلث هو مركز الدائرة ونصف قطرها هو بعد المركز عن أحد رؤوس المثلث

- ☒ إذا كان $r = \left|z_D\right| = \left|z_C\right| = \left|z_B\right| = \left|z_A\right|$ فان النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها r

- ☒ إذا كان $r = \left|Z_D - Z_\omega\right| = \left|Z_C - Z_\omega\right| = \left|Z_B - Z_\omega\right| = \left|Z_A - Z_\omega\right|$ فان النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ ω ونصف قطرها r

2ـ دليل التعرف على طبيعة رباعي الأضلاع

طرق الإثبات / نوع الرباعي	الطريقة (1) للإثبات	الطريقة (2) للإثبات
$ABCD$ متوازي أضلاع 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ معناه: $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$	القطران متناصفان $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$
$ABCD$ مستطيل 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متعامدان أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$	القطران متناصفان ومتساويان أي: $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$ $AC = BD$ معناه $\left\|Z_C - Z_A\right\| = \left\|Z_D - Z_B\right\|$
$ABCD$ معين 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متساويان أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = AD$	القطران متناصفان ومتعامدان أي: $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$ $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ معناه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$
$ABCD$ مربع 	شعاعان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متساويان ومتعامدان أي: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ و $AB = AD$	القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان أي $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$ و $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ معناه $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ و $AC = BD$ معناه $\left\|Z_C - Z_A\right\| = \left\|Z_D - Z_B\right\|$

3ـ التفسير الهندسي لطويلة وعمدة النسبة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$

التفسير الهندسي للطويلة: (1) $\boxed{AB = AC} \Rightarrow \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1$

التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai$ حيث $a \in \mathbb{R}^* - \{-1,1\}$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = |a| \neq 1$

و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , a < 0 \end{cases}$

التفسير الهندسي للطويلة: (1) $\boxed{AB \neq AC} \Rightarrow \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = |a| \neq 1$

التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , a < 0 \end{cases}}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC قائم في A

☒ إذا كان $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ فان $\left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

التفسير الهندسي للطويلة: (1) $\boxed{AB = AC} \Rightarrow \left|\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1$

التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$ ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

☒ إذا كان $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \left[1;\theta\right]$ حيث: $\theta \neq \left\{\pm\dfrac{\pi}{2};\pm\dfrac{\pi}{3}\right\}$ فان $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = 1$

و $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \theta + 2k\pi$

التفسير الهندسي للطويلة: (1) $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right| = \dfrac{\left|z_B - z_A\right|}{\left|z_C - z_A\right|} = \dfrac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC}$

التفسير الهندسي للعمدة: $\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

ومنه (2) $\boxed{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right) = \theta + 2k\pi}$

نستنتج من (1) و(2) أن المثلث ABC متساوي الساقين

4- دليل مجموعات النقط M في المستوي المركب

A ، B و M ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z حيث $M \neq A$ و $M \neq B$

☒ $(E) : MA = k > 0$ **مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها** $r = k$

☒ $(E) : \left|z - z_A\right| = \left|z - z_B\right|$ **مجموعة النقط M هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة** $\left[AB\right]$ **ملحوظة :** $\left|z - z_A\right| = \left|z - z_B\right| \Rightarrow MA = MB$

☒ $(E) : \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ **مجموعة النقط M هي دائرة قطرها** $\left[AB\right]$

☒ $(E) : \arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ **مجموعة النقط M هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A باستثناء A بالترميز :** $(E) : \left[AB\right) - \left\{A\right\}$

☒ $(E) : \arg(z - z_A) = \theta + k\pi$ **مجموعة النقط M هي مستقيم باستثناء** A **بالترميز :** $(E) : \left(AB\right) - \left\{A\right\}$

☒ $\dfrac{z_B - z}{z_A - z}$ **عددا حقيقيا : معناه** $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = \left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right) = k\pi$

مجموعة النقط M **هي المستقيم** (AB) **باستثناء النقطة** A

بالترميز $(E):(AB)-\{A\}$

☒ $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا حقيقيا موجبا: معناه** $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=2k\pi$

مجموعة النقط M **هي المستقيم** (AB) **باستثناء القطعة المستقيمة** $]AB[$

بالترميز $(E):(AB)-]AB[$

☒ $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا حقيقيا موجبا: معناه** $\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\pi+2k\pi$

مجموعة النقط M **هي القطعة المستقيمة** $[AB]$ **باستثناء النقطة** A

بالترميز $(E):[AB]-\{A\}$

☒ $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف معناه:**

$$\boxed{\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\ -\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$$

مجموعة النقط M **هي دائرة قطرها** $[AB]$ **باستثناء النقطة** A

☒ $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف (جزؤه التخيلي موجب) معناه:**

$$\boxed{\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$$

مجموعة النقط M **هي نصف دائرة قطرها** $[AB]$ **باستثناء النقطة** A **بحيث يكون** MAB **في الاتجاه المباشر**

☒ $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ **عددا تخيليا صرف (جزؤه التخيلي سالب) معناه:**

$$\boxed{\arg\left(\dfrac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\left(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi}$$

مجموعة النقط M **هي نصف دائرة قطرها** $[AB]$ **باستثناء النقطة** A **بحيث يكون** MAB **في الاتجاه غير المباشر**

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث k عدد حقيقي موجب تمام (معلوم) و θ يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}$

لدينا $z=z_A+ke^{i\theta}\Leftarrow \left|z-z_A\right|=\left|ke^{i\theta}\right|$ ومنه $AM=k$

مجموعة النقط M **هي دائرة لاحقة مركزها** z_A **ونصف قطرها** k

☒ $z=z_A+ke^{i\theta}$ حيث k يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}$ و θ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z = z_A + ke^{i\theta} \Leftarrow z - z_A = ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overline{AM}} = ke^{i\theta}$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة z_A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \theta$

☒ $z = z_A + ke^{i\theta}$ حيث k يتغير (يمسح) في $\mathbb{R}_+$ و θ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z = z_A + ke^{i\theta} \Leftarrow z - z_A = ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overline{AM}} = ke^{i\theta}$ أي $\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right) = \theta$

مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة ذات اللاحقة z_A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $\left(\vec{u};\vec{v}\right) = \theta$

5ـ دليل المرجح في المستوي المركب

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C

☒ لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC هي: $z_H = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$

☒ لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\right\}$

هي $\boxed{z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

2°) **<u>كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل:</u>** $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM}$

<u>علمًا أن:</u> $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد : $\boxed{\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}}$

- **<u>التعميم</u>** $\overrightarrow{\text{M المرّجح}}$×(مجموع المعاملات)

- **<u>ملاحظة:</u>** إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فلا يوجد مرّجح للنقط A ، B و C ويكون الشعاع:

$\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتًا مستقلا عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

3°) **<u>كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل</u>** $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد

$$\boxed{\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2}$$

• **التعميم**: اجعل مكان Mنقطة المرّجح + $[$ المرّجح M $]^2$ ×(مجموع المعاملات)

6ـ دليـل التحويـلات النقطيـة

F : تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

$$F:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$$
$$M(z)\longrightarrow M'(z')$$

مع $z'=az+b$ ، a و b عددان مركبان و $a\neq 0$

1) كيفية التعرف على التحويل النقطي واستخراج عناصره المميزة

✍ إذا كان $a=1$ فان F انسحاب لاحقة شعاعه $z_{\vec{u}}=b$

✍ إذا كان $a\neq 1$ و $a\in\mathbb{R}$ فان F تحاكي نسبته a ولاحقة مركزه $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$

✍ إذا كان $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$ فان F دوران زاويته $\theta=\arg(a)$ ولاحقة مركزه

$$z_\omega=\frac{b}{1-a}$$

✍ إذا كان $a\in\mathbb{C}$ و $|a|\neq 1$ فان F تشابه مباشر زاويته $\theta=\arg(a)$

ولاحقة مركزه $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$ ونسبته $|a|$

2) في حالة الشكل المركب (الصيغة المبسطة) : $(z'-z_\omega)=a(z-z_\omega)$

✍ $(z'-z_\omega)=k(z-z_\omega)$ تحاكي نسبته k ولاحقة مركزه z_ω

✍ $(z'-z_\omega)=e^{i\theta}(z-z_\omega)$ دوران زاويته θ ولاحقة مركزه z_ω

✍ $(z'-z_\omega)=ke^{i\theta}(z-z_\omega)$ تشابه مباشر زاويته θ ولاحقة مركزه z_ω ونسبته k

3) أوجد التحويل F الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D

نحل الجملة : $\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_D = az_C + b & (2) \end{cases}$ بضرب الثانية في (-1) والجمع نجد $a = \dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$

نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

4) أوجد التحويل F الذي يحول A إلى B ومركزه C

نحل الجملة : $\begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_C = az_C + b & (2) \end{cases}$ بضرب الثانية في (-1) والجمع نجد $a = \dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$

نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

5) استنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل

إذا كان: $a = \dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ فان $z_B - z_A = a\left(z_C - z_A\right)$ وهذا يعني أن B صورة C بالتحويل الذي مركزه A ، نعرف طبيعة التحويل من خلال a

---

ختاما أقول

وهكذا لكل بداية نهاية ، وخير العمل ما حسن آخره وخير الكلام ما قل ودل وبعد هذا الجهد المتواضع أتمنى أن أكون موفقا في سردي للعناصر السابقة سردا لا ملل فيه ولا تقصير موضحا ما كان يشكل عائقا أمام طلبتي الأعزاء لهذه الوحدة الجديدة عليكم والممتعة أكيد ، وفقني الله وإياكم لما فيه صالحنا جميعا

حكمة أعجبتني

تعلم من الأمس ، عِش من أجل اليوم وتطلع إلى الغد الأمر المهم هو ألا تتوقف عن التساؤل

مـــا أروع عقلا يستهــدي ، يســأل ، يتأمــل ، يتفكــر