

ملخص بسيط في مادة الرياضيات



أهـدء

أهـدي هـذا العمل المتواضع إلى روح أبي الطاهرة
والى أرواح موتى المسلمين الطاهرين وكما أهـديه
لطلبة النهـائي والمتمثل في طرق بسيطة في
فهم مادة الرياضيات التي تعد من ضمن المواد
التي ينفر منها بعض الطلبة ولعل هذه الطرق
تساعدك على تذوق مادة الرياضيات و أتمنى
لكم التوفيق والنـجـاح في

شـهـادة البـكالوريا

هـذا الملخص موجّه للتلميذ وليس للأستاذ

لكم مني خالص التقدير والاحترام

الفهرس :

الدوال.....01

الهندسة الفضائية.....07

الأعداد المركبة.....11

المتتاليات العددية.....14

الاحتمالات.....18

ناجحون بإذن الله

2. الدوال اللوغاريتمية :

1. عفايس نتائج النهايات :

دير في بالك هذو الصوالح نتائج النهايات صحيحة

$$\begin{array}{l|l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 & \end{array}$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2x - 1) &= \text{ح.ع.ك} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 2 - \frac{1}{x} \right) &= +\infty (-2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{4}{x+2} + \ln(x+2) \right) &= \text{ح.ع.ك} \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} (4 + (x+2) \ln(x+2)) &= +\infty (4) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

ملاحظة بيناتنا :

كي نيك حالت عدم التعيين عند ∞ اخرج مداخل ال \ln عاملا مشتركا اما اذا كانت حالة عدم التعيين عند عدد اخرج مقلوب مداخل ال \ln عاملا مشتركا وتبقى ملاحظة نسب

2. عفايس نتائج الاشتقاق :

- 1) $\ln 1 = 0$
- 2) $\ln e^x = x$
- 3) $\ln x = 2$ يك افغ $x = e^2$
- 4) $\ln x = -2$ يك افغ $x = e^{-2}$

3. الاشتقاق :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(5x+2) \\ f'(x) &= \frac{5}{5x+2} \\ g(x) &= 2x \ln x \\ g'(x) &= 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2 \ln x + 2 \end{aligned}$$

الدوال

1. الدوال الأسية :

1. عفايس نتائج النهايات :

دير في بالك هذو الصوالح نتائج النهايات صحيحة

$$\begin{array}{l|l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 & \end{array}$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x + 1) &= +\infty - \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) &= +\infty \end{aligned}$$

لان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

ملاحظة بيناتنا :

كي نيك حالت عدم التعيين اخرج e^x عاملا مشتركا او اخرج x عاملا مشتركا في بعض الحالات

2. عفايس نتائج الاشتقاق :

- 1) $e^0 = 1$
- 2) $e^{\ln x} = x$
- 3) $e^x = 2$ يك افغ $x = \ln 2$
- 4) $e^x = -2$ مستحيل

3. الاشتقاق :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{5x+1} \\ f'(x) &= 5e^{5x+1} \\ g(x) &= 2xe^{3x+1} \\ g'(x) &= 2e^{3x+1} + 6xe^{3x+1} \\ g'(x) &= (2 + 6x)e^{3x+1} \end{aligned}$$

ملحوظة:

كفي يكون $\ln x < 0$ يعني ان $0 < x < 1$

كفي يكون $\ln x > 0$ يعني ان $x > 1$

3. المستقيم المقارب العمودي وإثباته:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

نقول في هذه الحالة ان $x = a$ هو مستقيم عمودي

مقارب عمودي وتلقاه في مجموعة التعريف وهو

العدد موش معرفت فيه الدالة بينا اتنا

مثال: $f(x) = \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

اذن $x = 0$ هو مستقيم مقارب عمودي

4. المستقيم المقارب الافقي وإثباته:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$$

نقول في هذه الحالة ان $y = a$ هو مستقيم

مقارب افقي وتلقاه في النهاية كفي نجري رايح

نحسب النهاية عند ∞ بينا اتنا

$$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2 + \frac{\ln x}{x} \right] = 2$$

اذن $y = 2$ هو مستقيم مقارب افقي

5. معادلتهم اساس:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x) = x^2 + 7x + 5$$

احسب المماس عند $x_0 = -2$

$$f'(x) = 2x + 7$$

$$y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$$

$$y = 3(x + 2) - 5 = 3x + 1$$

إذا قالك احسب المماس عند $y_0 = -2$ في هذه

الحالة لازمك نحوس على x_0 روح حل المعادلت

ملاحظة خطيرة:

رد بالك ديرهم حالات عدم التعيين

$$\frac{\infty}{0} = \infty \quad \frac{0}{\infty} = 0$$

$$\frac{A}{0} = \infty \quad \frac{A}{\infty} = 0$$

3. لعف ايسن اللي لازم تعرفها:

1. إثبات $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب

مائل بجوار ∞ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

2. الوضعية النسبية بين المستقيم والدالة:

لازمك تدرس إشارة الفرق

$$f(x) - (ax + b) < 0 \quad (c_f) \text{ تحت } (\Delta)$$

$$f(x) - (ax + b) > 0 \quad (c_f) \text{ فوق } (\Delta)$$

$$f(x) = x - 2 + \frac{\ln x}{x}$$

- اثبت ان $y = x - 2$ هو مستقيم مقارب

مائل بجوار $+\infty$ نطبق القانون

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + \frac{\ln x}{x} - (x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

ومنت $y = x - 2$ هو مستقيم مقارب مائل

- ادرس الوضعية النسبية

نقوم بدراسة إشارة الفرق شوف معايا

$$f(x) - (x - 2) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\ln x = 0 \quad \text{افغ} \quad x = 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - (x - 2)$	-	0	+
الوضعية	$(c_f) \text{ تحت } (\Delta)$ / $(c_f) \text{ فوق } (\Delta)$ / $(c_f) \text{ تقاطع } (\Delta)$		

مثال : شرح كيفية إنشاء (c_g) انطلاقاً من (c_f)
 $f(x) = \ln x$ و $g(x) = \ln(x+2) + 3$
 (c_g) صورة (c_f) بالانسحاب الى _____
 شعاع _____ $\vec{v}(-2; 3)$

10. عفايس المعاملات : a و b و c
 1. c_f يملك اوجد المعاملات a و b و c ويقلل
 بلي (c_f) يشمل النقطة مثلا $A(4; -2)$ ويقبل
 مماس عند A معامل توجيهه 6 ويشمل ذروة
 او قيمة حديت هي $B(3; 5)$ ولديت مماسا موازيا
 لمحور الفواصل اي افقي عند الفاصلت -1..
 شوفه معايا واش تكتب :

$f(4) = -2$... معناه يشمل النقطة $A(4; -2)$
 $f'(4) = 6$... معناه يقبل مماسا عند النقطة A

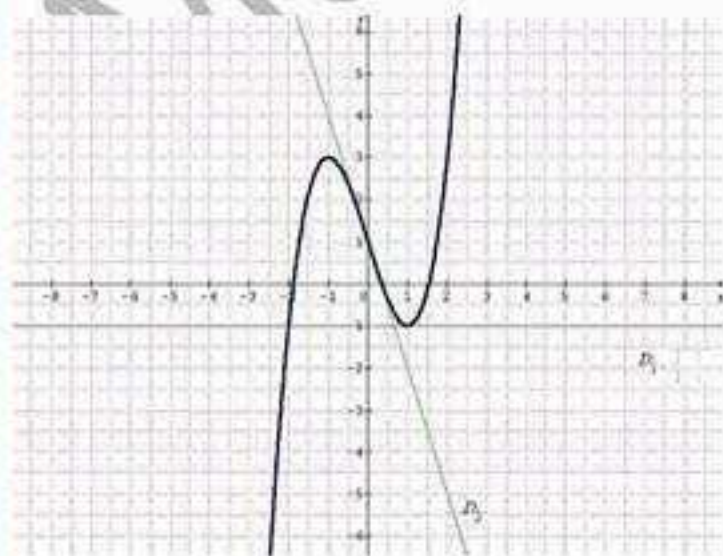
الذروة $B(3; 5)$ فيها زوج معادلات تشملها الدالت
 وتعدم المشتق $f(3) = 5$ و $f'(3) = 0$

$f'(-1) = 0$... معناه يقبل مماسا افقي عند -1

2. c_f يعطيك العبارة ويقولك جيب a و b و c
 هيا بين توخذ المقامات وتطابق مكله نريدو نفصلو

3. c_f يعطيك بيان ويقولك (c_f) يقبل مماسا D_1
 عند الفاصلت 1 ويقبل مماسا D_2 عند الفاصلت 0
 ويقلل عين من البيان :

$f(2)$ و $f'(1)$ و $f'(0)$ كما هو موضّع هنا



$f(x) = -2$ كي تلقى x_0 هذيك الساع
 احسب المماس عند x_0 .. \vec{v} كما هو
 6. نقطة الانعطاف :

$f''(x) = 0$ نجد النقطة $\omega(x_0, f(x_0))$

مثال : $f(x) = x^3 + 6x^2 - 11$
 نحسب المشتق الاول $f'(x) = 3x^2 + 12x$
 نحسب المشتق الثاني $f''(x) = 6x + 12$
 $f''(x) = 0$ كافى $6x + 12 = 0$
 كافى $x = -2$

$\omega(-2, f(-2))$ اذن $\omega(-2, 5)$
 والمشتق الثاني اني يغير اشارته عند ω
 ملحوظة : اذا انعدم المشتق الاول عند ω ولم

يغير اشارته فنقول ان ω هي نقطة انعطاف
 7. نقاط تقاطع المنحنى c_f مع المحورين :

ا. مع محور الفواصل : ساوي الدالت بالصفر
 $f(x) = 0$ تلقى قيم x لي تقطع فيها

ب. مع محور الترتيب : عوض x بالصفر في الدالت
 $f(0) = y_0$ تلقى قيمة y_0 لي تقطع فيها

8. التناظر :

ا. مركز تناظر : $\omega(\alpha, \beta)$
 $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$

مثال : مثلا كون $f(6-x) + f(x)$ نحسب وتلقى النتيجة

مثلا تساوي 8 قولو نستنتج بلي النقطة $\omega(3, 4)$
 هي مركز تناظر

ب. محور تناظر : $x = \alpha$
 $f(2\alpha - x) = f(x)$

9. الانسداد :

$g(x) = f(x+a) + b$
 في هذه احوال نقول (c_g) صورة (c_f) بالانسحاب
 الذي شعاع $\vec{v}(-a; b)$

ب. $f(x) = m + 1$ كي تكون عندك

تبقى نفس المناقشة السابقة روح للـ
السابقة ونفصلهم 1 مثلا $-1 < m + 1 < 3$
نقص 1 للأطراف تصبح $-2 < m < 2$

ج. $f(x) = x + m$ كي تكون عندك

روح جيب المستقيمات لي كيفو في معامل التوجيه

مثلا تلقى كايين مستقيم معادلنو $y = x + 2$

ومنبعد دير مطابقة $y = x + m$ و $y = x + 2$

ودير $m = 2$ و $m < 2$ و $m > 2$ فقط تكون

المناقشة ماثلة كيما المستقيم $y = x + 2$

13. الاشتقاق اريث :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

نقول في هذه الحالة ان f مستمرة عند 2

كل دالة مستمرة على مجال تعبر فها

14. الاشتقاق ا :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

اخدم بالقانون لي يعجبك اظهم التفسير الهندسي

للاشتقاق هو ان الدالة تقبل مماس عند x_0

او تقبل نصفه مماس هالك عارف القيمة المطلقة

15. الدوال الاصلية ايت :

$$Ax^{n+1} + c \text{ الدالة الاصلية هي } \frac{Ax^{n+1}}{n+1} + c$$

$$x^2 + 7 \text{ الاصلية هي } \frac{1}{3}x^3 + 7x + c$$

و c هو عدد ثابت يمكن حسابه

$$\ln f + c \text{ الدالة الاصلية هي } \frac{f}{f'}$$

$$\ln(3x + 2) + c \text{ الاصلية هي } \frac{3}{3x+2}$$

$$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c \text{ الدالة الاصلية هي } \frac{1}{a}e^{ax+b}$$

$$\frac{1}{5}e^{5x+1} + c \text{ الاصلية هي } \frac{1}{5}e^{5x+1}$$

$$\frac{f^{n+1}}{n+1} + c \text{ الدالة الاصلية هي } f^n$$

$$\frac{1}{3}(5x + 2)^3 + c \text{ الاصلية هي } 5(5x + 2)^2$$

بما ان المماس D_1 موازي لمحور الفواصل عند 1

فان المشتق عند 1 معدوم يعني $f'(1) = 0$

نحسب ميل المماس D_2 نختار نقطتين يفوت بينهم

فلاحظ $A(0; 1)$ و $B(1; -2)$ فنقوم باكساب

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 1}{1 - 0} = -3$$

ومن $f(2) = 3$ و $f'(0) = -3$

11. القيمة المطلقة والتناظرات :

$$g(x) = |f(x)| \text{ كي يفلك}$$

روح للمنحنى (C_f) اكره لي فوق محور الفواصل عاود

ارسمو ولي تحت محور الفواصل طلعاو لفوق ديرلو

تناظر بالنسبة لمحور الفواصل ييك منحنى (C_g)

$$g(x) = f(|x|) \text{ كي يفلك}$$

روح للمنحنى (C_f) اكره لي $x > 0$ عاود ارسومو وزيد

هو نفس اكره ديرلو تناظر بالنسبة لمحور الترتيب

ييك منحنى (C_g) لانها دالة زوجية

$$g(x) = -f(x) \text{ كي يفلك}$$

روح لمنحنى (C_f) اكره لي فوق محور الفواصل ارسومو

لتحت ولي تحت محور الفواصل ارسومو لفوق ديرهم

تناظر بالنسبة لمحور الفواصل ييك منحنى (C_g)

$$g(x) = f(-x) \text{ كي يفلك}$$

روح لمنحنى (C_f) اكره لي $x > 0$ ارسومو في اكره

تناوع $x < 0$ واكره تناوع $x < 0$ ارسومو في اكره

تناوع $x > 0$ ديرهم تناظر بالنسبة لمحور الترتيب

ييك منحنى الـ دالة (C_g)

ايا خلاص فيها براك ا

12. الوسيط ط m :

$$f(x) = m \text{ كي تكون عندك}$$

في هذه الحالة ارسوم مستقيمات ذو المعادلات

$y = m$ وتكون موازية لمحور الفواصل يعني افقية

وتقاطعهم مع الدالة هذيك هي اكلـ

مثال: انظر المنحنى لي في الصفحة رقم 3

$-1 < m < 3$ هناك ثلاث تقاطعات

يعني ثلاث حلـ

هـ. قانون التكامل بالتجزئة ما ننسوهش

$$\int f' \cdot g dx = f \cdot g - \int g \cdot f' dx$$

باه نحسب بالتكامل بالتجزئة لازمك تقسم الدالة إلى دالتين اطلعهم اسهل طريقة للحساب هو انجزه لي دالتة الاصلية تجيك ساهلتة هولي ديرو المشتق

مثال: نحسب التكامل $2x \ln x$ امل

نورماطوا $2x$ هي لي دالتها الاصلية نجينا ساهلتة مالا هي لي نديروها المشتق $\frac{1}{x}$ وفي معايا

$$f'(x) = 2x \dots\dots\dots f(x) = x^2$$

$$g(x) = \ln x \dots\dots\dots g'(x) = \frac{1}{x}$$

هيا نعوض $\frac{1}{x}$ واهم في القانون

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int \frac{1}{x} x^2 dx$$

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int x dx$$

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + c$$

ومنته الدالة الاصلية نتاع $2x \ln x$

$$x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + c$$

ولي ما فاهمنيش بروح يدير رقيت شرعية عند كاش طالب ملـيح..... بالشقاء .

16. حساب مساحة خيز بالتكامل امل:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

كي يقلك احسب مساحة اكبر لي يحصر الدالة

$$f(x) = x^2 \text{ والمستقيم } y = x - 1$$

والمستقيمين $x = 1$ و $x = 2$ من الإنشاء نلاحظ

المنحنى نتاع الدالة مربع فوق المستقيم يعني نديرو

الدالة ناقص المستقيم والناتج نحسبوه بالتكامل ناعو

شوف معايا عارفك مـفـهمنيش

$$S = \int_1^2 (f(x) - y) dx =$$

$$S = \int_1^2 (x^2 - (x - 1)) dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x$$

نعوضو بالـ 2 ومبعد نقصوه النتيجة ناعـ 1 شوف

$$S = \left(\frac{1}{3} 2^3 - \frac{1}{2} 2^2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} 1^3 - \frac{1}{2} 1^2 + 1 \right)$$

$$S = \frac{11}{3} \text{ us}$$

بعد احساب اضرب النتيجة في وحدة الرسم

17. المعادلات التفاضلية

نقترح اكل هو $f(x)$ يعني حلوها عبارة عن دالة

$$y' = ay \text{ الشكل 1.}$$

$$f(x) = ce^{ax} \text{ و } y' = ay \text{ اكل هو}$$

$$f(x) = ce^{2x} \text{ و } y' = 2y \text{ اكل هو}$$

$$y' = ay + b \text{ الشكل 2.}$$

$$f(x) = ce^{ax} - \frac{b}{a} \text{ و } y' = ay + b \text{ اكل هو}$$

$$f(x) = ce^{2x} - \frac{3}{2} \text{ و } y' = 2y + 3 \text{ اكل هو}$$

مثال: الهدف هو حل المعادلة (1)

$$y' - 2y = (x - 3)e^x \dots\dots\dots (1).$$

1. اوجد a و b حتى تكون $u(x) = (ax + b)e^x$

خلال المعادلة (1) نعوض ونطابق فقط

$$u' - 2u = (x - 3)e^x$$

روح اشتق u وزيدها $-2u$ وعوض هـما في

المعادلة وطـابقهما مع الطرف الآخر رايـح تلقى

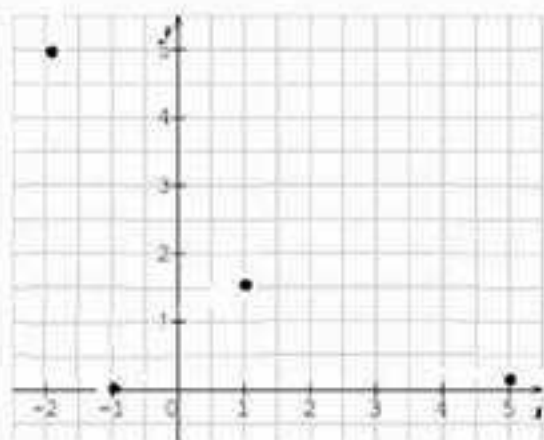
$$b = 2 \text{ و } a = -1$$

$$u(x) = (-x + 2)e^x \text{ إذن}$$

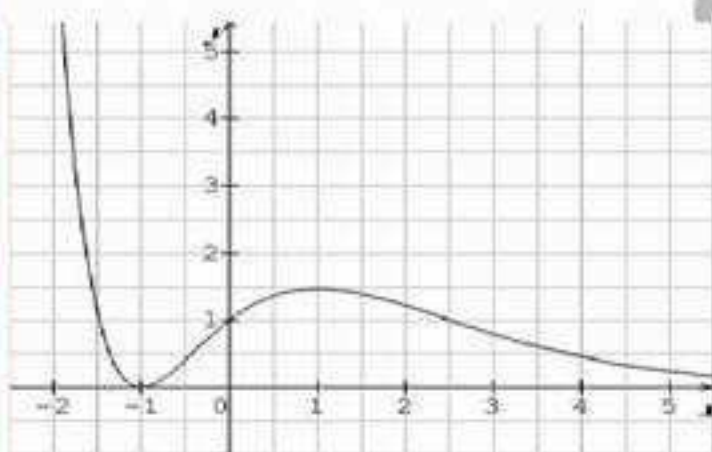
$$y' - 2y = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$y' = 2y \text{ إذن اكل هو } y(x) = ce^{2x}$$

تفـاهمنا نكتبوها هـا $(-2; 5)$ يعني $+\infty$
نبدلـوها نديروها 5 ومنبعد يهبط المنحنى الى
النقطة $(-1; 0)$ ومنبعد يزيد يطلع $(1; 3/2)$
ومنبعد يهبط في الاخير الى $(-2; 5)$. روح علم
النقطة في المعلم كيما هـا شوف النقطة السوداء



منبعد نوصلو بين النقط بأكتانت شوف كيفاه يولي



سر النجاج

هو المحافظـة على الصلوات ففي
سجودك ارفع مشاكلك وهمومك الى

رب السماوات

تفكر ربك في الرخاء يتفكر في الشدة

3. نعتبر حلول (1) هي $y + u$ اذن استنتاج

$$f(x) = y(x) + u(x)$$

$$f(x) = ce^{2x} + (-x + 2)e^x$$

4. استنتج اكل اخاص حيث $f(0) = 5$

$$f(0) = ce^0 + (-0 + 2)e^0 = 5$$

ومنـه $c = 3$

ومنـه حلول (1) هي

$$f(x) = 3e^{2x} + (-x + 2)e^x$$

تـحـب تـزيد تبسطها اخرج e^x املا مشتركا

$$f(x) = (3e^x - x + 2)e^x$$

18. كيفيت رسم منحنى الدالة :

عندنا جدول تغيرات حبينا نرسمو منو منحنى الدالة

تـبـ معايا واشـن رايحين نديرو

x	-2	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	0	$\frac{3}{2}$	0

نرسمو معلم ونعينو عليه احداتيات النقط شوف

معايلي فوق جدول التغيرات الي راها في خانة

نناـع x هـذوك عبارة على فواصل ولي راها لتحـك

في كـانـة نناـع $f(x)$ عبارة على ترتيبات بـمعنى

هـذيك -2 ترتيبـة ناعها $+\infty$ والـ -1 ترتيبـتها

0 ومنبعد عندنا 1 ترتيبـة 3/2 والاخرة $+\infty$

ترتيبـتها 0 اخطوة المهمـة حنا حبينا هـذيك $+\infty$

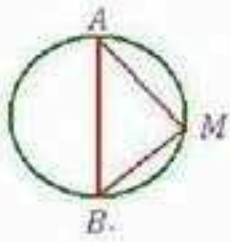
نديروها شغل عدد حقيقي يساوي 5 ولا 8 كيما

تـحـب انـك مثـلا في هـذا المـثال نديروها تساوي 5 باه

نسهلو العملية هـي

المنحنى يبدأ من $(-2; +\infty)$ و هي كيما

ب. عندك قطر HA مثلا هو $[AB]$:



لازم تكون $M \in (S)$

في هذه الحالة بولي

الشعاان \overrightarrow{AM} و \overrightarrow{BM}

متعامدان اي

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$$

إذا حببت احسب

المركز W وهو منتصف القطعة $[AB]$ واحسب
الطول AB واقسمو على 2 هو نصف القطر وادعم
بالقانون الأول

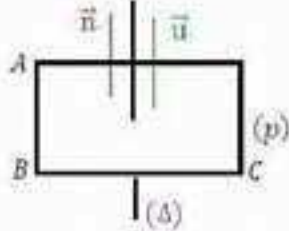
8. عفايس المستوي و المستقيم:

$\vec{u} \parallel \vec{n}$ يعني $(\Delta) \perp (p)$

$\vec{u} \perp \vec{n}$ يعني $(\Delta) \parallel (p)$

وإذا قالك بين ان المستقيم (Δ) يعامد المستوي

(ABC) شوف معايا



اثبت ان الناطمي \vec{n}

تتاع المستوي يوازي

\vec{u} التوجيه تتاع

المستقيم او اثبت

بلي \vec{u} التوجيه تتاع المستقيم يعامد \overrightarrow{AC} و \overrightarrow{AB}

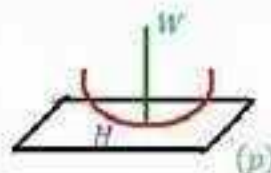
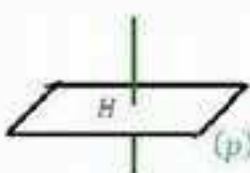
شعاعي توجيه تتاع

المستوي... اسعد لي إذا كسر تلك راسك

9. إحداثيات المسقط العمودي او تقاطع

مستقيم ومستوي او نقطت تماس سطح

كرة مع مستوي:



في أشكال الثلاث نجيبو تمثيل وسيطي للمستقيم

روح حبب بيلكم الناطمي \vec{n} ومنبعد افرض قيمت
للوسيط t وعوضها في المستقيم (Δ) تلقى نقطت
يفوت بيلها (Δ) ويريد يفوت بيلها المستوي (p) ايا
كمل أخطوات بيلك السم اطف

5. تمثيل وسيطي مستوي:

لازم يكون عندك زوج اشعة توجيه ونقطت
مثلا $\vec{u}(2; 3; -2)$ و $\vec{v}(1; 2; 5)$ و $A(-1; 7; 4)$
نقولو نفرض ان $M \in (p)$ ومنبعد نكتب

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + k\vec{v}$$

$$(t \in \mathbb{R})(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2t + k - 1 \\ y = 3t + 2k + 7 \\ z = -2t + 5k + 4 \end{cases}$$

6. تمثيل وسيطي مستقيم:

ا. يشمل A و \vec{u} توجيه هالت:

لازم يكون عندك شعاع توجيه ونقطت مثلا
 $\vec{u}(5; 3; -2)$ و $A(3; -2; 4)$ ايا نقولو نفرض ان
 $M \in (\Delta)$ ومنبعد نكتب $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$$(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -2t + 4 \end{cases}$$

ب. يشمل النقطتين A و B :

دير في بالك بلي \overrightarrow{AB} هو نفسه \vec{u} شعاع توجيه
المستقيم (Δ) وعندك زوج نقاط A و B عوض
واحدة فيهم وربيع عوضلك الايام أكلوة
ج. يشمل A ويعامد مستوي (p) :

منبقاوش نعاودو في الهدرة عندك الشعاع الناطمي
 \vec{n} تتاع (p) يعتبر شعاع توجيه المستقيم (Δ)
وعندك النقطت A ايا توكل على ربي

7. معادلت سطح كرة (S) :

إذا كان عندك المركز و القطر رالك ديرت لافير
ا. مركزها W ونصف قطرها R :

لازم تكون $M \in (S)$ ولازم نغلو بلي $WM = R$

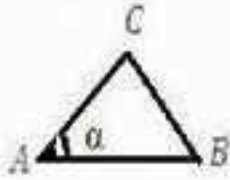
نفرض المركز $W(5; 3; -7)$ ونصف القطر $R = 2$

$$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2 = 2^2 = 4$$

2. الطريقة الثانية : هنا لازمك تكتب ديجا اكتب
الطول AM بدلالة t تجيك دالت نتاع جذر روع
اشتغلها والقيمة اكرية هي المسافة بين A
و (Δ) ... اسمع متقول كنى واحد عليها بيناتنا

11. مساحة مثلث ABC :

إذا كان المثلث كفي ABC
وعندك زاوية من زواياه
طبق القانون



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$$

اما إذا كان $\alpha = 90^\circ$ فان المثلث يصبح قائما يكفي
ان نكتب $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC$

12. حجم رباعي الوجوه $DABC$:

مساحة القاعدة وهي مساحة المثلث في الارتفاع
و يكون عمودي على المثلث نقسمهم على 3
نفرض ان AD عمودي على المثلث ABC اذن

$$V_{DABC} = \frac{S_{ABC} \cdot AD}{3}$$

13. الأوضاع النسبية :

أ. الوضع النسبي مستقيم ومستوي :

نعوض التمثيل الوسيط للمستقيم في المعادلات
الديكارتية للمستوي

1. إذا لقيت قيمة للوسيط t معناه يتقاطع في
نقطة تقدر تروح تجيب

2. إذا لقيت تناقض مثلا تجيك $3 = 0$ باين بلي
مايتقاطعوش وتقاطعهم مجموعة خالية

3. إذا لقيت ان المعادلات محققة دوما مثلا تجيك

$0 = 0$ يعني ان المستقيم محتوي في المستوي او

نقول بلي هو احد مستقيمات المستوي

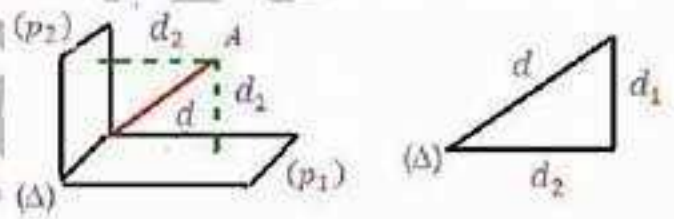
4. روع اقر العنوان 8 عفايس المستقيم والمستوي

ونعوضه في معادلات المستوي (p) نلقاو قيمة
 t ومنبعد نعوض t في التمثيل الوسيط نتاع
المستقيم نلقاو النقطة H لازمك دير في بالك بلي
المستقيم يعامد المستوي معناه الناطمي نتاع
المستوي هو التوجيه نتاع المستقيم.... هكا هو

10. المسافة بين نقطة ومستقيم :

هنا لازمك تخط راسك معايا قول بسم الله
أ. إذا كان المستويان متعامدان ومتقاطعان
وفوق مستقيم

حسب نظرية الشيع فيثاغورث $d^2 = d_1^2 + d_2^2$



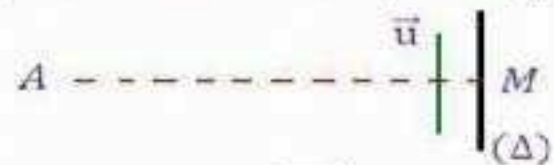
حيث ان d_1 هي المسافة بين A والمستوي (p_1)
و d_2 هي المسافة بين A والمستوي (p_2) و ان d
هي المسافة بين A والمستقيم (Δ)

ب. إذا كان معندكش المستويان :

1. الطريقة الاولى : روع اكتب المستقيم على شكل
نقطة M شوف معايا وتعلم واش راح نديرو

$$\begin{cases} x = 5t + 3 \\ y = 3t \\ z = -2t + 4 \end{cases} \quad (\Delta)$$

يعني تولي M هكا $M(5t + 3; 3t; -2t + 4)$



راك تشوف الشعاع \overrightarrow{AM} يعامد شعاع \vec{u} توجيه
المستقيم (Δ) مالا روع اكتب الشعاع \overrightarrow{AM} بدلالة

t ومنبعد طبق قانون التعامد $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ تلقى
قيمة الوسيط t ومنبعد عوض t في النقطة M
تلقى النقطة M ومنه المسافة هي الطول AM

14. مجموع انك النقط :

اغلبينهم عندهم علاقت بالمرجع و ياخيلولي موش
فاهم المرجع بصح ساهلت منك افش

1. إذا لقيك $GM = 3$

نقولو مجموعك النقط M هي سطح كرة مركزها G
ونصف قطرها 3

2. إذا لقيك $\overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$

نقولو مجموعك النقط M هي سطح كرة قطرها $[AB]$
3. إذا لقيك $\overline{GM} \cdot \overline{AB} = 0$

نقولو مجموعك النقط M هي مستوي الذي يشمل
النقط G والشعاع \overline{AB} ناظمي على
3. إذا لقيك $AM = BM$

نقولو مجموعك النقط M هي مستوي الذي هو
محور القطعة $[AB]$ او نقول هو المستوي الذي
يشمل منتصف $[AB]$ والشعاع \overline{AB} ناظمي له
ايا كان فكمنتي مبروك عليك الباك

الثقت بالنفس بعد التوكل على الله
مطلوب شرعا ،

فالمسلم يتعين عليه ان يحسن الظن
بالله تعالى

وان يتفائل لنفسه اخير والنجاح
دائماً

ويسعى باستمرار في سبيل الارتقاء
لتحصيل الكمالات

ج. الوضع النسبي لمستقيم و سطح كرة:

ياخيلولي لي نسي الامير Δ لازماتو عقوبت في حق طاط
نعوضو التمثيل الوسيط للمستقيم في معادلت
سطح كرة نجينا معادلت من الدرجة الثانية بدلات

الوسيط t نحسبها بالامير Δ الامير نتاع بكري

1. إذا لقيك الامير $\Delta < 0$ لا يوجد تقاطع

2. إذا لقيك الامير $\Delta = 0$ نقولو بلي المستقيم

يمس سطح الكرة في نقطة واحدة

3. إذا لقيك الامير $\Delta > 0$ باين تقاطع في نقطتين

تقدر تروح تحسبهم منكسر ليش راسي من فضلك

ج. الوضع النسبي لمستوي و سطح كرة:

نحسب المسافات بين المستوي ومركز سطح الكرة

1. إذا لقيك المسافة اكبر من نصف القطر معناه

مكانش تقاطع اي تقاطعهم مجموعت عالب

2. إذا لقيك المسافة تساوي نصف القطر معناه

تماس اي المستوي يمس سطح الكرة

3. إذا لقيك المسافة اصغر من نصف القطر معناه

المستوي يقطع سطح الكرة في دائرة

د. مستقيم مان من نفس المستوي او

ليس من نفس المستوي:

1. إذا كان المستقيمان متوازيان فلهما من نفس

المستوي هذه دبرها في بالك صدك

2. إذا كان موش متوازيان هنا فيها حالتين

نروحو نساويهم مع بعض

$$x = x \quad \text{.. (1)}$$

$$(D) \quad y = y \quad \text{.. (2)} \quad (\Delta)$$

$$z = z \quad \text{.. (3)}$$

راهم عندك ثلاث معادلات من المعادلتين

(1) و (2) جيب قيمت الوسيطين t و k

وعوضهم في المعادلت (3)

- إذا كانت محققت نقولو من نفس المستوي

- موش محققت موش من نفس المستوي

4. الشكل الأسّي :

كي نحسب الطويلة والعمدة طبق $Z = |Z|e^{i\theta}$
 العدد المركب السابق $Z = -1 + \sqrt{3}i$ طويته 2
 وعمدته $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ نعوض في القانون يصبح
 $Z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$ متقوليشت برك هذه صعيبت

5. الشكل المثلثي :

كيفه عوه طبق القانون هذا
 $Z = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta)$
 من المثل السابق $Z = -1 + \sqrt{3}i$ عندك الطويلة
 والعمدة طبق $Z = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

6. الشكل الجبري :

هذا راهو مكتوب كتابت جبريت $Z = -1 + \sqrt{3}i$
 المثل شكل كيفاه نروح من الأسّي والمثلثي إلى الجبري
 دير في بالك هذو $\frac{1}{2} = 0.5$ و $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$ هذو الروايا الشهيرة باه نجينا ساهلت
 الانتقال من الأسّي والمثلثي إلى الجبري شوف المثل
 $Z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$
 $Z = 2(-0.5 + i0.866)$
 $Z = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + \sqrt{3}i$

7. عفايس الشكل $a = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$:

1. إذا كان $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = ai$

a سالب فإن الراوية $-\frac{\pi}{2}$
 a موجب فإن الراوية $\frac{\pi}{2}$

1. إذا كانت $a = 1$ أو $a = -1$ في هذه أكانت
 نقول أن المثلث ABC قائم في B و متساوي الساقين
 2. إذا كانت $a \neq 1$ و $a \neq -1$ في هذه أكانت
 نقول أن المثلث ABC قائم في B ف

الأعداد المركبة

ماعليش دخل في راسك بلي $i^2 = -1$

1. طويلة عدد مركب $|Z|$:

ليكن العدد المركب $Z = -4 + 3i$
 $|Z| = \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{25} = 5$
 اطونسيو دخل i في الطويلة رالك دير كـ ارثت

2. عمدة عدد مركب $\theta = \arg(Z)$:

علا بالي بيلك نكره $\sin \theta$ و $\cos \theta$ اصبر معاربا
 لازمك تعرفه تحسب الطويلة باه تحسب العمدة
 مثال : ليكن العدد المركب $Z = -1 + \sqrt{3}i$

نحسبو الطويلة نجينا
 $|Z| = \sqrt{4} = 2$
 $\begin{cases} \cos \theta = \frac{-1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$
 من الدائرة المثلثية الربع

لي \cos سالب و \sin موجب هو الربع الثاني يعني
 هي الراوية $\frac{\pi}{3}$ في الربع الثاني ولي $\pi - \frac{\pi}{3}$
 نعطيالك عفاست مليحت شوف كيفاه تعرف

الروايا الشهيرة $Z = x + yi$

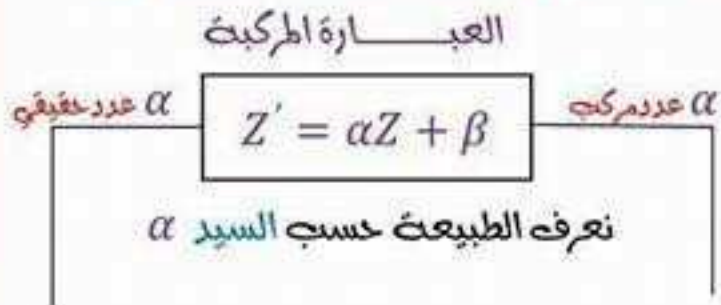
$x > y$ يعني الراوية $\frac{\pi}{6}$ مثلا $Z = \sqrt{3} + 1i$
 $x < y$ يعني الراوية $\frac{\pi}{3}$ مثلا $Z = 1 + \sqrt{3}i$
 $x = y$ يعني الراوية $\frac{\pi}{4}$ مثلا $Z = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$
 $x = 0$ يعني الراوية $\frac{\pi}{2}$ مثلا $Z = \sqrt{3}i$

اما الإشارة تدل على الربع روج لدائرة المثلثية
 كيما ديرنا المثلث السابق عرفنا الراوية والربع وحسبنا

3. مرافق عدد مركب \bar{Z} :

$Z = 4\sqrt{3} + 4i$ مرافقه $\bar{Z} = 4\sqrt{3} - 4i$
 املهم اعكس إشارة الجزء التخيلي

10. التحويلات النقطية:



$|\alpha| = 1$ دوران $\alpha = 1$ انسحاب

$|\alpha| \neq 1$ تشابه مباشر $\alpha \neq 1$ تحاكي

العناصر المهمة لتحويلات:

1. نسبته هي $|\alpha|$ بالنسبة لدوران والتشابه

اما بالنسبة لتحاكي والانسحاب النسبة هي α

2. الزاوية هي $\arg(\alpha)$

3. المركز هو w حيث $Z_w = \frac{\beta}{1-\alpha}$

ملاحظة: المركز w هو النقطة الصامدة يعني

تحويلها هو نفسها معناه $Z_w = \alpha Z_w + \beta$

كيفية إيجاد Z_c حيث C صورة A بالتحويل

النقطي الذي مركزه B (دير في بالك بلي Z_c تحي في

بلاصة Z') اكتب مباشرة اكملت

$$Z_c = \alpha Z_A + \beta$$

$$Z_B = \alpha Z_B + \beta$$

$$Z_c - Z_B = \alpha(Z_A - Z_B)$$

إذا عطاك مثلا دوران وقالك مركزه O دير في بالك

بلي $\beta = 0$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ متنساش بلي $|\alpha| = 1$ اي

العبارة المركبة بالشكل الاسي هي $Z' = 1e^{i\frac{\pi}{2}}Z$

وإذا حبيت نكتبها على الشكل أكبري $Z' = iZ$

11. المرجع G : $\{(A, -1)(B, 2)(C, 2)\}$

$$Z_G = \frac{-Z_A + 2Z_B + 2Z_C}{-1 + 2 + 2}$$

إذا قالك مركز ثقل مثلث هم المعاملات 1.1.1

$$\text{ب. إذا كان } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

باين المثلث ABC متقايس الاضلاع

$$\text{ج. إذا كان } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$$

إذا لقيك a عدد حقيقي يعني ان النقط C, B, A

على استقامة واحدة يعني $\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BC}$

$$\text{د. إذا كان } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$$

نقدرو نكتبوه من الشكل $Z_A - Z_B = a(Z_C - Z_B)$

نقولو يوجد تحويل نقطي وطبيعته حسب السيد a

$$\text{ملحوظة: } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = \pm 1$$

تلغاه 1 نقولو $ABDC$ متوازي اضلاع $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$

تلغاه -1 نقولو $ABCD$ متوازي اضلاع $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

8. تفسير الهندسي لشكل $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$

$$1. \text{الطوليت: } |BA| = a|BC|$$

$$2. \text{العمدة: } \arg(a) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$$

9. دستور موافق:

$$Z^n = |Z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ساعات بقلك اوجد قيمته n حتى يكون:

يكون Z^n حقيقي صفا: يعني $\sin n\theta = 0$

وهذا يكافئ $n\theta = k\pi$ ومنبعد جيب قيمته n

إذا كان k زوجي يولي Z^n حقيقي موجب

إذا كان k فردي يولي Z^n حقيقي سالب

يكون Z^n تخيلي صفا: يعني $\cos n\theta = 0$

وهذا يكافئ $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنبعد جيب n

إذا كان k زوجي يولي Z^n تخيلي موجب

إذا كان k فردي يولي Z^n تخيلي سالب

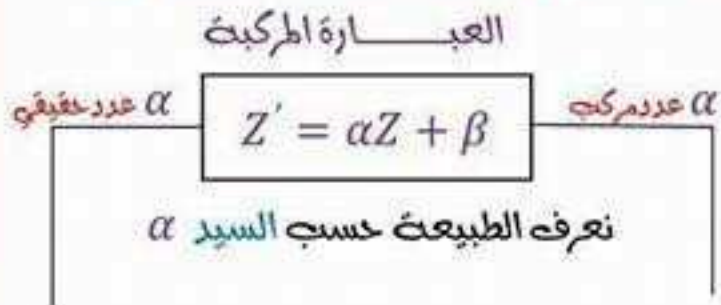
متنساش بلي n عدد طبيعي يعني k يكون طبيعي

$$\text{ساعات بقلك احسب مثلا: } Z = 2e^{\frac{2016\pi i}{3}}$$

$$Z = 2e^{\frac{2016\pi i}{3}} = 2(\cos \frac{2016\pi}{3} + i \sin \frac{2016\pi}{3})$$

$$Z = 2(1 + i0) = 2$$

10. التحويلات النقطية:



$|\alpha| = 1$ دوران $\alpha = 1$ انسحاب

$|\alpha| \neq 1$ تشابه مباشر $\alpha \neq 1$ تحاكي

العناصر المهمة لتحويلات:

1. نسبته هي $|\alpha|$ بالنسبة لدوران والتشابه

اما بالنسبة لتحاكي والانسحاب النسبة هي α

2. الزاوية هي $\arg(\alpha)$

3. المركز هو W حيث $Z_W = \frac{\beta}{1-\alpha}$

ملاحظة: المركز W هو النقطة الصامدة يعني

تحويلها هو نفسها معناه $Z_W = \alpha Z_W + \beta$

كيفية إيجاد Z_C حيث C صورة A بالتحويل

النقطي الذي مركزه B (دير في بالك بلي Z_C تحي في

بلاصة Z') اكتب مباشرة اكملت

$$Z_C = \alpha Z_A + \beta$$

$$Z_B = \alpha Z_B + \beta$$

$$Z_C - Z_B = \alpha(Z_A - Z_B)$$

إذا عطاك مثلا دوران وقالك مركزه O دير في بالك

بلي $\beta = 0$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ متنساش بلي $|\alpha| = 1$ اي

العبارة المركبة بالشكل الاسي هي $Z' = 1e^{i\frac{\pi}{2}}Z$

وإذا حبيت نكتبها على الشكل أكبري $Z' = iZ$

11. المرجع G : $\{(A, -1)(B, 2)(C, 2)\}$

$$Z_G = \frac{-Z_A + 2Z_B + 2Z_C}{-1 + 2 + 2}$$

إذا قالك مركز ثقل مثلث هم المعاملات 1.1.1

$$\text{ب. إذا كان } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = +\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

باين المثلث ABC متقايس الاضلاع

$$\text{ج. إذا كان } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$$

إذا لقيك a عدد حقيقي يعني ان النقط C, B, A

على استقامة واحدة يعني $\overrightarrow{BA} = a\overrightarrow{BC}$

$$\text{د. إذا كان } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$$

نقدرو نكتبوه من الشكل $Z_A - Z_B = a(Z_C - Z_B)$

نقولو يوجد تحويل نقطي وطبيعته حسب السيد a

$$\text{ملحوظة: } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = \pm 1$$

تلقاه 1 نقولو $ABDC$ متوازي اضلاع $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$

تلقاه -1 نقولو $ABCD$ متوازي اضلاع $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

8. تفسير الهندسي لشكل $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = a$

$$1. \text{ الطوليت: } |BA| = a|BC|$$

$$2. \text{ العمدة: } \arg(a) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$$

9. دستور موافق:

$$Z^n = |Z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

ساعات بقلك اوجد قيمته n حتى يكون:

يكون Z^n حقيقي صفا: يعني $\sin n\theta = 0$

وهذا يكافئ $n\theta = k\pi$ ومنبعد جيب قيمته n

إذا كان k زوجي يولي Z^n حقيقي موجب

إذا كان k فردي يولي Z^n حقيقي سالب

يكون Z^n تخيلي صفا: يعني $\cos n\theta = 0$

وهذا يكافئ $n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنبعد جيب n

إذا كان k زوجي يولي Z^n تخيلي موجب

إذا كان k فردي يولي Z^n تخيلي سالب

متنساش بلي n عدد طبيعي يعني k يكون طبيعي

$$\text{ساعات بقلك احسب مثلا: } Z = 2e^{\frac{2016\pi i}{3}}$$

$$Z = 2e^{\frac{2016\pi i}{3}} = 2(\cos \frac{2016\pi}{3} + i \sin \frac{2016\pi}{3})$$

$$Z = 2(1 + i0) = 2$$

وإذا كان $AB^2 + AC^2 = BC^2$ نقولو ان
المثلث ABC قائم في A وإذا كان $AB = AC$ زيد
متساوي الساقين

14. مجموعات النقط:

1. إذا لقيت $GM = 3$

نقولو مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G
ونصف قطرها 3 .. (ياو رانا في الاعداد المركبة
رد بالك تقو) ول سطح كرة

2. إذا لقيت $AM \cdot BM = 0$

نقولو مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[AB]$
3. إذا لقيت $GM \cdot AB = 0$

نقولو مجموعة النقط M هي مستقيم الذي يشمل
النقط G والشعاع AB ناظمي عليه

4. إذا لقيت $|Z - Z_A| = |Z - Z_B|$

يعني $AM = BM$ نقولو مجموعة النقط M هي
مستقيم الذي هو محور القطعت $[AB]$ او نقول
هو المستقيم الذي يشمل منتصف $[AB]$ والشعاع
 AB عمودي عليه

5. إذا لقيت $arg(Z - Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

نصف مستقيم (AM) مبدؤه النقط A

6. إذا لقيت $Z - Z_A = 2e^{i\theta}$

هنا الطول ثابت وهو 2 ولكن الزاوية متغيرة يعني
رأع رسمنا دائرة مركزها A ونصف قطرها 2

.....

اكثرنا من الصلاة والسلام على النبي

المختار يفتح الله عليكم ابواب رحمت

ويشرح صدوركم ويزيل همومكم ويرفع

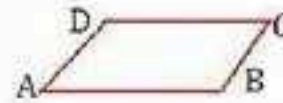
مقامكم إلى الدرجات العلى والمنازل

الشريفة

12. طبيعة الرباعيات:

ليكن الرباعي $ABCD$

حيث قطراه $[AC]$ و $[BD]$



ا. متوازي اضلاع:

يكفي ان تثبت ان القطران متناصص فان

او $\overline{AB} = \overline{DC}$ يعني $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$

ب. مستطيل: لازم يكون فيه $\overline{AB} = \overline{DC}$

اما ان تثبت ان القطران $[AC]$ و $[BD]$ متساويان

وموش متعامدان او $AB \neq BC$ وزيد متعامدان

ج. المربع: لازم يكون فيه $\overline{AB} = \overline{DC}$

اما ان تثبت ان القطران $[AC]$ و $[BD]$ متساويان

ومتعامدان او $AB = BC$ وزيد متعامدان

د. المربع: لازم يكون فيه $\overline{AB} = \overline{DC}$

اما ان تثبت ان القطران $[AC]$ و $[BD]$ متساويان

ومتساويان ومتعامدان او $AB = BC$ وزيد

موش متعامدان

ملاحظت: كي يكون عندك $\overline{AB} = \overline{DC}$ وزيد

عندك هذا الشكل $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D} = ai$

نقدر نعرف الرباعي من طبيعة التحويل النقطي

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

الدوران:

$$\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

التشابه المباشر:

$$\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$$

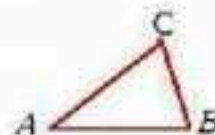
متوازي اضلاع

13. المثلثات:

احسب الأطوال $AB = AC = BC$

باين نقول ان المثلث ABC

متقايس الاضلاع



امثلة اليات العددية

دير هذو العفايس في راسك عزيزي

المتتالية اكراسية

$$v_5 = v_2 + 3r$$

$$(5 - 2) = 3$$

اذن القانـون

$$v_n = v_p + (n - p)r$$

المتتالية الهندسية

$$v_5 = v_2 \cdot q^3$$

$$(5 - 2) = 3$$

اذن القانـون

$$v_n = v_p \cdot q^{n-p}$$

$$v_1 + v_3 = 2v_2$$

إذا كانت عندك

ثملت معادلتين عوضها

في معادلة اجمع

$$v_1 \cdot v_3 = v_2^2$$

إذا كانت عندك

ثملت معادلتين عوضها

في معادلة الضرب

المجموع

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$n - 0 + 1 = n + 1 \quad \text{عدد الحدود}$$

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (v_0 + v_n)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} (v_0 + v_n)$$

$$S_n = v_0 \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

1. البرهان بالتراجع:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

برهن بالتراجع ان $u_n > 2$

اولا نثبت صحة الشرط الابتدائي $u_0 = 3$ ولدينا

$3 > 2$ ومنه محقق اذن صحيحة

ثانيا نفرض ان $u_n > 2$ ونبرهن صحة u_{n+1}

اي نبرهـ ن ان $u_{n+1} > 2$

نديرو عفتة نتاع اكر نطلق من $u_n > 2$

$$\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{2}2 \dots \dots \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}u_n + 1 > 1 + 1 \dots \dots 1$$

اذن تصيح $u_{n+1} > 2 \dots \dots$ ومنه صحيحة

اذن $u_n > 2$ صحيحة مهما يكن n طبيعي

ملحوظة:

كل استنتاج ياتي بعد البرهان بالتراجع نقول بلي

(u_n) محدودة من الاسفل او الاعلى شوف كيفاه

$u_n > 2$ هنا نقول محدودة من الاسفل بـ 2

$u_n < 2$ هنا نقول محدودة من الاعلى بـ 2

2. اتجاه التغير:

متناقص $u_{n+1} - u_n < 0$

متزايدة $u_{n+1} - u_n > 0$

مثال السابق:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$$

نخرج $-\frac{1}{2}$ عـ املا مشتركاً فيصبح الفرق

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$$

شوف نديرو اكر ونعرفوه موجب او سالب

نقولو لدينا $u_n > 2$

نضيف العدد -2 لطرفيـ نـ

$$u_n - 2 > 0$$

نضرب في العدد $-\frac{1}{2}$ وراك عارف يتغير الاتجاه

$$-\frac{1}{2}(u_n - 2) < 0$$

اذن $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقص

5. كيفية إثبات متتالية هندسية:

$$v_{n+1} = v_n \cdot q$$

ننطلق من v_{n+1} لنصل الى $v_n \cdot q$ وفي هذه الحالة

نقول ان (v_n) هندسية واساسها q

مثال 1: اثبت $v_n = e^{2n+1}$ هندسية

نضع في بلاصة n نضع $n+1$ فتصبح

$$v_{n+1} = e^{2(n+1)+1}$$

$$v_{n+1} = e^{2n+2+1}$$

نحافظ على $2n+1$ والعدد 2 أجدد نخرجوه

$$v_{n+1} = e^2 \cdot e^{2n+1} = e^2 \cdot v_n$$

ومن هنا هندسية واساسها e^2

مثال 2: سوف شكل آخر في إثبات الهندسية

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

اثبت ان $v_n = u_n - 6$ متتالية هندسية

نقدر نعرف الاساس قبل ماتبدأ نبرهن وهو العدد

لي مضروب في u_n اللي هو $\frac{2}{3}$ عليها بينا اتنا

نفس الطريقة ننطلق من v_{n+1} لنصل الى $v_n \cdot q$

$$v_n = u_n - 6$$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6$$

نعوض u_{n+1} بقيمتها فيكون عندنا

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 = \frac{2}{3}u_n - 4$$

نخرج $\frac{2}{3}$ املا مشتركاً فيصبح لدينا

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - 6)$$

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$$

اذن هندسية اساسها $\frac{2}{3}$

وتقدر دير الطريقة نتاع القسمة $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$

دير راسلك انتك حر دير الطريقة لي تعجبك

3. التَقَارِبُ:

1. إذا لقيت (u_n) متناقصة ومحدودة من

الاسفل نقول ان (u_n) متقاربة

2. إذا لقيت (u_n) متزايدة ومحدودة من

الاعلى نقول ان (u_n) متقاربة

3. النهاية: روح لعبارة أكد العام

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

u_n هي عبارة أكد العام

عكسها الى L : روح للعبارة التراجعية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

مثال السابق: نحسب النهاية L

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$$

بمان لديها نفس النهاية نروحو نديرو عكسها الى L

$$L = \frac{1}{2}L + 1$$

$$L - \frac{1}{2}L = 1$$

$$\frac{1}{2}L = 1 \quad L = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

وهو العدد لي تلقاه في البرهان بالتقارب

ملاحظة:

كل استنتاج يبي بعد حساب نهاية عبارة

أكد العام يقصد به التَقَارِبُ

4. المتتالية الثابتة:

$$u_0 = u_1 = u_2 = \dots = u_n = u_{n+1}$$

اي ان:

$$u_{n+1} - u_n = 0$$

2. إذا قالك متزايدة $q > 1$ الأساس

مثلا 2 أو 3 أو $\frac{3}{2}$ أو $\frac{4}{3}$ أو

ج. إذا كانت المتتالية حسابية:

الوسط الحسابي: $v_1 + v_3 = 2v_2$

عوضها في المعادلة (1) نتاج أجمع تلقى v_2

$$v_1 + v_2 + v_3 = v_2 + 2v_2 = k$$

$$3v_2 = k \text{ يكافئ } v_2 = \frac{k}{3}$$

ب. r بحسب الأساس

نكتب v_1 و v_3 بدلالة v_2

$$v_3 = v_2 + (3 - 2)r = v_2 + r$$

$$v_1 = v_2 + (1 - 2)r = v_2 - r$$

نعوض قيمته كل من v_1 و v_3 بدلالة v_2 و r

في المعادلة (2) و بمان v_2 عندك قيمتها يبقى

المجهول هو r بعد التعويض نكتب معادلة من

$$ar^2 + br + c = 0 \text{ الدرجة الثانية}$$

بعد ما نفتحها بالميز يكون زوج قيم لـ r

خذ الأساس r :

1. إذا قالك متناقصة $r < 0$ السالب

مثلا -2 أو -3 أو $-\frac{1}{4}$ أو $-\frac{5}{4}$ أو

2. إذا قالك متزايدة $r > 0$ الموجب

مثلا 2 أو 3 أو $\frac{1}{4}$ أو $\frac{5}{4}$ أو

..... نتمنى إن شاء الله فكمونوني

8. متتاليتان متجاورتان:

نقول على أن (v_n) و (u_n) متتاليتان متجاورتان

إذا كانت إحداها متزايدة والآخرى متناقصة

وهما نفس النهاية يعني

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \text{ أي}$$

6. كيفية إثبات متتالية حسابية:

$$v_{n+1} - v_n = r$$

مثال: اثبت $v_n = 2n + 1$ حسابية

بحسب v_{n+1} وندير الفرق بينها وبين v_n إذن

$$v_{n+1} = 2(n + 1) + 1 = 2n + 3$$

نطبق القانون

$$v_{n+1} - v_n = 2n + 3 - (2n + 1)$$

$$v_{n+1} - v_n = 3 - 1 = 2$$

ومن هنا حسبنا اثبت أساسها 2

7. عكس أجمع لـ:

$$(1) \dots \dots v_1 + v_2 + v_3 = k$$

$$(2) \dots \dots v_1 \times v_2 \times v_3 = k'$$

ا. إذا كانت المتتالية هندسية:

الوسط الهندسي: $v_1 \times v_3 = v_2^2$

عوضها في المعادلة (2) نتاج الضرب تلقى v_2

$$v_1 \times v_2 \times v_3 = v_2 \times v_2^2 = k'$$

$$v_2^3 = k' \text{ يكافئ } v_2 = \sqrt[3]{k'}$$

ب. q بحسب الأساس

نكتب v_1 و v_3 بدلالة v_2

$$v_3 = v_2 q^{3-2} = v_2 q^1$$

$$v_1 = v_2 q^{1-2} = v_2 q^{-1} = \frac{v_2}{q}$$

نعوض قيمته كل من v_1 و v_3 بدلالة v_2 و q في

المعادلة (1) و بمان v_2 عندك قيمتها يبقى

المجهول هو q بعد التعويض نكتب معادلة من

$$aq^2 + bq + c = 0 \text{ الدرجة الثانية}$$

بعد ما نفتحها بالميز يكون زوج قيم لـ q

خذ الأساس q :

1. إذا قالك متناقصة $0 < q < 1$ الأساس

مثلا $\frac{3}{4}$ أو $\frac{1}{4}$ أو $\frac{1}{2}$ أو $\frac{2}{3}$ أو

النجاح

1. تريد ان تكون مبدعاً في هذه الحياة؟؟ اول خطوة هي الاحتكاك بالناجحين و استمع لأفكارهم و خاورهم هذه اول خطوة للنجاح
2. بعضنا ينجح بذكائه وبعضنا ينجح بغباء الآخرين
3. إذا عرفنا كيف فشلنا نفهم كيف ننجح
4. إن النجاح لا يحتاج إلى اقدام بل إلى إقدام
5. المطابقة و النجاح توأمان الاولى مسالت نوعيت و الثاني مسالت وقت
6. النجاح هو الانتقال من فشل إلى فشل دون ان نفقد الأمل
7. أخوف من أي محاولة جديدة طريق حتمي للفشل
8. عليك ان تتعلم قواعد اللعبة أولاً ، ثم عليك ان تتعلم كيف تلعب افضل من الآخرين
9. فشل من حولك لا يعني بالضرورة فشلك ، لكن لا تتوقع منهم مساعدتك على النجاح
10. من الملاحظ ان الناجح هو من احسن استغلال الوقت ، في حين ضيعت غيره
11. الناجحون يقدرون على النجاح لأنهم يعتقدون انهم يقدرون
12. اعزم وكذا فإن مضيت فلا تقف ... واصر وثابر فالنجاح محقق إن شاء الله

9. عفايس المجمع وع:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

(v_n) متتالية هندسية طبق قانون المجموع

$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

إذا كانت : لتكن المتتالية (u_n) المعروفة بالعبارة

$$u_n = v_n + 3$$

بحسب المجموع S_n' دلالت n

$$S_n' = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

بأن $u_n = v_n + 3$

$$S_n' = S_n + 3(n+1)$$

عدد الحدود

إذا كانت : ليكن المجموع k_n حيث (v_n) هندسية

$$k_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$

قم بتربيع أحد الأول والاساس وطبق نفس القانون

$$k_n = v_0^2 \frac{q^{2(n+1)} - 1}{q^2 - 1}$$

نفس الشيء بالنسبة للمجموع L_n وع

$$L_n = v_0^3 + v_1^3 + v_2^3 + \dots + v_n^3$$

قم بتكعب أحد الأول والاساس

$$L_n = v_0^3 \frac{q^{3(n+1)} - 1}{q^3 - 1}$$

نفس الشيء بالنسبة للمجموع T_n وع

$$T_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \dots + \frac{1}{v_n}$$

قم بقسمة أحد الأول والاساس

$$T_n = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{q} - 1}$$

.....

بطريقة أخرى نحسب $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} - \frac{6}{9} = \frac{7-6}{9} = \frac{1}{9}$$

كوايج لي لازم تعرفه

العاملية والترتيبة والتبدلية والقائمة والتوفيقية

1. العاملية:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times n$$

مثال احسب عاملية 5!

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$0! = 1 \text{ و } 1! = 1 \text{ متنساش}$$

2. الترتيبية:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

مثلا باه نحسب A_5^2

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$$

متنساش

$$A_1^1 = 1 \text{ و } A_1^0 = 1$$

3. التوفيقية:

شوف كيفاه نحسب توتو

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثلا باه نحسب C_5^2

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{120}{24} = 5$$

متنساش

$$C_n^1 = n \text{ و } C_n^n = C_n^0 = 1$$

4. التبدلية:

$$A_n^n = n!$$

هذا هو القانون

5. القائمة:

$$n^p$$

هذا هو القانون

الاختـمالـات

كبي يعطيك مجموعتين ويقلك w هي المجموعة الكلية و A هي المجموعة الجزئية و تمثل الأعداد الزوجية و B هي مجموعة جزئية من w

$$w = \{1.2.3.4.5.6.7.8.9\}$$

$$A = \{2.4.6.8\}$$

$$B = \{7.8.9\}$$

احسب الاحتمالات التالية : $P(A)$ و $P(B)$ و

$$P(A \cap B) \text{ و } P(A \cup B) \text{ و } \overline{P(A)}$$

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{\text{عدد عناصر } B}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$\overline{P(A)}$ يمثل الاحتمال العكسي لـ $P(A)$

$$\overline{P(A)} = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

بطريقة أخرى يعني مجموعة \bar{A} هي عكس الأعداد الزوجية وهي الأعداد الفردية $\bar{A} = \{1.3.5.7.9\}$

$$\overline{P(A)} = \frac{\text{عدد عناصر } \bar{A}}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{5}{9}$$

نروحو نحسب المجموعتين $A \cap B$ و $A \cup B$

$$A \cap B = \{8\}$$

$$A \cup B = \{2.4.6.8.7.9\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap B}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cup B}{\text{عدد عناصر } w} = \frac{6}{9}$$

الامل الرياضي هو تضرب كل حالة من الحالات لي حسبتهم من قانون الاحتمال في المتغير X ناعها

$$\sum_{i=0}^{i=3} X_i P_i = 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3)$$

$$= 0 \frac{35}{220} + 1 \frac{105}{220} + 2 \frac{70}{220} + 3 \frac{10}{220}$$

$$= \frac{0}{220} + \frac{105}{220} + \frac{140}{220} + \frac{30}{220} = \frac{275}{220}$$

9. تمرين ثاني ايسط من الاول :

صندوق به 12 كرت 5 حمراء و 3 صفراء و 4 سوداء
نسحب 3 كرات على التوالي بدون ارجاع
- ماهو عدد السحبات الممكنة
- ماهو احتمال ظهور 3 كرات حمراء فقط
- ماهو احتمال ظهور كرت سوداء على الأقل
- ماهو احتمال ظهور كرتين صفراء على الاكثر

الإجابة

نفس الخدمة نتاع مقبيل غير نخدمو بالترتيب

عدد السحبات الممكنة $A_{12}^3 = 1320$

$$P(A) = \frac{A_5^3}{220} = \frac{60}{1320}$$

$$A(B) = \frac{A_4^1 A_8^2 + A_4^2 A_8^1 + A_4^3 A_8^0}{1320} = \frac{344}{1320}$$

$$A(C) = \frac{A_3^2 A_9^1 + A_3^1 A_9^2 + A_3^0 A_9^3}{220} = \frac{774}{1320}$$

إن أصبت فممن الله

و إن أخطأت فمن نفسي والشيطان

ناجحون بإذن الله

$C_4^1 C_8^2$ يعني واحدة سوداء وكرتين نهرو زوج

$C_4^1 C_8^2$ يعني زوج سوداء وكرتين نهرو وحدة

$C_4^1 C_8^2$ ثلاث سوداء وكرتين مانهرو والو

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_8^2 + C_4^2 C_8^1 + C_4^3 C_8^0}{220} = \frac{164}{220}$$

- احتمال كرتين صفراء على الاكثر
يعني يا زوج يا وحدة بإمكانش نفس الخدمة

$$P(C) = \frac{C_3^2 C_9^1 + C_3^1 C_9^2 + C_3^0 C_9^3}{220} = \frac{219}{220}$$

- ماهو احتمال ظهور كرتين حمراء و كرت سوداء

$$P(D) = \frac{C_5^2 C_4^1}{220} = \frac{40}{220}$$

قيم X الممكنة $X = \{0, 1, 2, 3\}$

قانون الاحتمال هو تضرب كل حالة ونقسمها على الحالات الممكنة

$$P(x=0) = \frac{C_5^0 C_7^3}{220} = \frac{1 \times 35}{220} = \frac{35}{220}$$

$$P(x=1) = \frac{C_5^1 C_7^2}{220} = \frac{5 \times 21}{220} = \frac{105}{220}$$

$$P(x=2) = \frac{C_5^2 C_7^1}{220} = \frac{10 \times 7}{220} = \frac{70}{220}$$

$$P(x=3) = \frac{C_5^3 C_7^0}{220} = \frac{10 \times 1}{220} = \frac{10}{220}$$

باه نتحقق من حساباتك صديقت قانون الاحتمال

كي تجمعهم كل الناتج بطلع 1 هيا نجربو وربى يسر

$$\frac{35}{220} + \frac{105}{220} + \frac{70}{220} + \frac{10}{220} = \frac{220}{220} = 1$$

دعاء بداية المذاكرة

اللهم اني اسالك فهم النبيين ، وحفظ المرسلين ، وان تجعل لساني عامراً بذكرك ، وقلبي خشيتك ، وبدني بطاعتك فانت حسبي ونعم الوكيل

دعاء النهاية من المذاكرة

اللهم اني استودعك علمي هذا امانة عندك على ان ترده إلي وقت حاجتي اليه .

دعاء دخول كُنته الإختبار او الامتحان

اللهم اني توكلت عليك ، واسلمت أمري إليك ، لا ملجأ منك إلا إليك ربني ادخلني مدخل صدق واخرجني مخرج صدق واجعل لي من لدنك سلطاناً نصيراً .

دعاء عند الإجابة عن الامتحان

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلاً ، وانت تجعل الحزن إن شئت سهلاً .
اللهم رد لي ما استودعته امانة عندك

دعاء عند التفكير او النسيان

لا إله إلا أنت سبحانك اني كنت من الظالمين يا حي يا قيوم برحمتك استغيث
ربي يسر ولا تعسر .

دعاء الانتهاء من الامتحان

أحمد لله الذي هدانا لهذا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله .

دعاء الكفوف

اللهم يا معلم إبراهيم علمني ، ويا مفلح سليمان فقهني ،
ويا مصير أيوب صبرني ، ويا مؤتي لقمان الحكمة آتني الحكمة وفصل الخطاب
اللهم علمني ما ينفعني وانفعني بما علمتني .

دعاء الفهم

سبحان الله ، وأحمد لله ولا إله إلا الله ، والله أكبر ولا حول ولا قوة إلا بالله
العلي العظيم حسبي الله لا إله إلا هو عليه توكلت وهو رب العرش العظيم

آخر كلامي

لست الأفضل ولكن لي

أسلوبى .. سأظل دائماً

أقبل رأي الناقد وامتنهكم ..

فالأول يصح مسارى والثاني

يزيد من إصرارى

لا تنسونا خالص دعائكم