

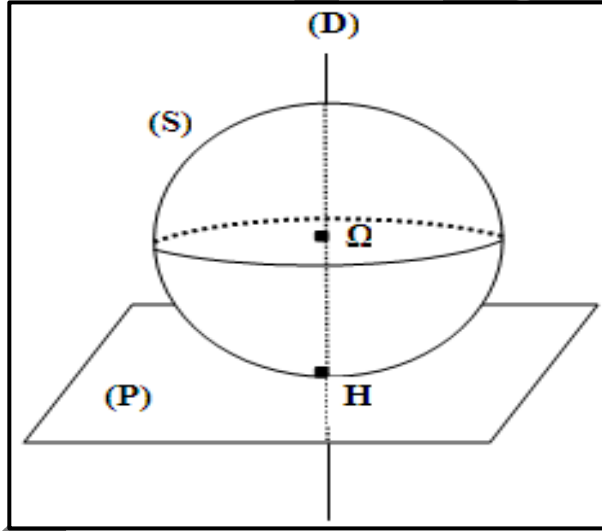
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

– وزارة التربية الوطنية –

سلسلة سبل التألق

في الرياضيات

ملخص حول الهندسة التحليلية في الفضاء



أعد هذا الملخص وفق أهداف ومضمون وهيكلية النظام الجديد

قيل لنابليون كيف استطعت ان تولد الثقة في جيشك ؟

فأجاب : كنت ارد على ثلاث بثلاث

من قال : لا اقدر قلت له : حاول ومن قال : لا اعلم قلت له : تعلم ومن قال مستحيل قلت له : جرب

إعداد الأستاذ: محمد حاقة

دليل الهندسة الفضائية التحليلية

في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

أولاً " مفاهيم أولية "

نعتبر النقطتين : $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$ والشعاعان : $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $\vec{v} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

(1) مركبات الشعاع \overrightarrow{AB} هي : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

(2) الطول (المسافة) بين النقطتين A و B هو : $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

(3) إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

(4) الجداء السلمي لشعاعان \vec{u} و \vec{v} هو : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma'$

(5) تعامد الشعاعان \vec{u} و \vec{v} يعني : $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma' = 0$

(6) توازي الشعاعان \vec{u} و \vec{v} يعني \vec{u} و \vec{v} مرتبطين خطياً (أي إثبات وجود عدد حقيقي t يحقق : $\vec{u} = t \vec{v}$)

معناه : يكفي أن نثبت أن التناسب التالي : $\left[\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = t \in \mathbb{R} \right]$ محقق

(7) جيب تمام (\cos) زاوية شعاعية : حيث : $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma'}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \times \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2}}$$

ثانيا - المستقيم في الفضاء

°1) التمثيل الوسيطى لمستقيم (يشمل نقطة ويوازي شعاع)

المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ ويوازي الشعاع $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

لتكن: $M(x, y, z) \in (\Delta)$ يعني: $\vec{AM} \parallel \vec{u}$ أي: $\vec{AM} = t \vec{u}$ (حيث: t من \mathbb{R})

ومنه (Δ) له تمثيل وسيطي من الشكل: $(\Delta): \begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ [\vec{u} هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)]

°2) التمثيل الوسيطى لمستقيم (يشمل نقطتين)

المستقيم (AB) الذي يشمل النقطتين $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

لتكن: $M(x, y, z) \in (AB)$ يعني: $\vec{AM} \parallel \vec{AB}$ أي: $\vec{AM} = t \vec{AB}$ (حيث: t من \mathbb{R})

ومنه (AB) له تمثيل وسيطي من الشكل: $(AB): \begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + z_A \end{cases}$ [\vec{AB} هو شعاع توجيه للمستقيم (AB)]

°3) مستقيمات خاصة

❖ حامل محور الفواصل $(o; \vec{i})$ يعرف بالجملة: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

❖ حامل محور الترتيب $(o; \vec{j})$ يعرف بالجملة: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

❖ حامل محور الرواقم $(o; \vec{k})$ يعرف بالجملة: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

°4) المسقط العمودي لنقطة على مستقيم

لتكن النقطة $H(x, y, z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

$$H \text{ الذي تمثله الوسيط } (t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} , \text{ لتعيين إحداثيات النقطة } H$$

❖ نبحث عن قيمة الوسيط t وذلك عن طريق :

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha t + x_0 - x_A \\ \beta t + y_0 - y_A \\ \gamma t + z_0 - z_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

❖ نعوض عن t في إحداثيات التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) ، فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

°5) بعد نقطة عن مستقيم

لحساب بُعد نقطة A عن المستقيم (Δ) ، نعين مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ويكون بُعد النقطة عن المستقيم (Δ) هو الطول AH أي :

$$d(A; (\Delta)) = AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$

°6) تعامد مستقيمين في الفضاء

يتعامد مستقيمان في الفضاء اذا تعامد شعاعا توجيههما بمعنى :

• إذا كان : (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\vec{u}_{(\Delta)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $\vec{u}_{(\Delta')} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

فليدنا : $(\Delta) \perp (\Delta') \Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)} \cdot \vec{u}_{(\Delta')} = 0 \Rightarrow \alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma' = 0$

°7) الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\vec{u}_{(\Delta)}$ و $\vec{u}_{(\Delta')}$

❖ إذا كان $\vec{u}_{(\Delta')} \parallel \vec{u}_{(\Delta)}$ (مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيان

(متوازيان تماماً أو منطبقان)

• توضيح : نعين نقطة A من المستقيم (Δ) (أو من (Δ'))

أ/ إذا كانت A تنتمي كذلك إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') منطبقان

ب/ إذا كانت A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') متوازيان تماماً (منفصلان)

❖ إذا كان $\vec{u}_{(\Delta)} \nparallel \vec{u}_{(\Delta')}$ (غير مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيان
(متقاطعان في نقطة أو من مستويين مختلفين : " ليسا من نفس المستوي ")

ثالثاً "المستوي في الفضاء"

1°) المعادلة الديكارتية لمستوي

كل مستوي في الفضاء له معادلة ديكارتية من الشكل : $ax + by + cz + d = 0$

حيث : a, b, c لا تنعدم في آن واحد ، علماً أن : $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ هو الشعاع الناطمي له (عمودياً عليه)

2°) تعيين معادلة ديكارتية لمستوي معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط)

أ/ لإثبات أن النقط : A, B, C تعرف (تُعين - تُشكل) مستوي :

❖ يعني النقط : A, B, C ليست في إستقامة

❖ يعني الشعاعان : \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطياً (غير متوازيين)

ب/ لإيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

❖ نبحث عن شعاعاً ناظمياً $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ له وذلك بحل الجملة التالية

$$\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{AB} \\ \vec{n} \perp \vec{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

ثم نطبق التعريف التحليلي للجداء السلمي فنجد عادة جملة ثلاث مجاهيل بمعادلتين فقط ممّا يجعلنا مثلاً

نثبت a ونبحث عن b و c بدلالة a فنجد الشعاع الناطمي العام \vec{n}_a ونختار قيمة مبسطة لـ : a وعليه نجد الشعاع الناطمي الخاص \vec{n}

❖ بعد إيجاد a, b, c أعداد معلومة يبقى d مجهول فعلياً أن نعوض إحداثيات احد النقط : A أو B

أو C في المعادلة : $ax + by + cz + d = 0$ فنجد قيمة d

• تنبيه: إذا أعطيت المعادلة الديكارتية للمستوي وطلب منا التأكد من أنها للمستوي (ABC) يكفي

أن نبين : أ/ \vec{AB} و \vec{AC} غير مرتبطين خطياً

ب/ إحداثيات كل من النقط الثلاث A, B, C تحقق المعادلة : $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases} \quad \text{بمعنى :}$$

°3) مستويات خاصة:

$$\diamond x = 0 \text{ هي معادلة ديكرتية للمستوي } (o; \vec{j}; \vec{k})$$

$$\diamond y = 0 \text{ هي معادلة ديكرتية للمستوي } (o; \vec{i}; \vec{k})$$

$$\diamond z = 0 \text{ هي معادلة ديكرتية للمستوي } (o; \vec{i}; \vec{j})$$

°4) بعد نقطة عن مستو

بعد النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ عن المستوي $(P): ax + by + cz + d = 0$ تعطى بالقانون التالي:

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

°5) التمثيل الوسيطى لمستو معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط):

لإيجاد التمثيل الوسيطى للمستوي (ABC) حيث: \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطياً

$M(x, y, z) \in (ABC)$ يعني: $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ (حيث: t و t' من \mathbb{R})

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + (x_C - x_A)t' + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + (y_C - y_A)t' + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + (z_C - z_A)t' + z_A \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

°6) تعامد مستويين

يتعامد مستويان في الفضاء اذا تعامد شعاعهما الناظميان:

$$\vec{n}_{(P_1)} \perp \vec{n}_{(P_2)} : \text{يعني } (P_1) \perp (P_2) \quad \text{فلدينا :} \begin{cases} (P_1): ax + by + cz + d = 0 \\ (P_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{إذا كان :}$$

$$\vec{n}_{(P_1)} \cdot \vec{n}_{(P_2)} = a \times a' + b \times b' + c \times c' = 0 \quad \text{أي :}$$

°7) المسقط العمودي لنقطة على مستوي

لتكن النقطة $H(x, y, z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، لتعيين إحداثيات النقطة H :

أ/ نبحث عن التمثيل الوسيطى للمستقيم (AH) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستوي في النقطة H

أي : " $\vec{AH} \parallel \vec{n}_{(P)}$ يعني $\vec{AH} = t. \vec{n}_{(P)}$ "

ب/ نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطى للمستقيم (AH) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطى فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

°8) الوضعية النسبية لمستويين في الفضاء

نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

$$\begin{cases} (P_1): ax + by + cz + d = 0 \\ (P_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

❖ إذا كان : $\left[\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \right]$ فإن : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان بالتطابق (منطبقان)

❖ إذا كان : $\left[\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'} \right]$ فإن : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان تماماً (منفصلان)

❖ إذا كان التناسب التالي : $\left[\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \right]$ غير محقق فإن : المستويين (P_1) و (P_2) غير متوازيان

(متقاطعان)

• ملحوظة

■ المسألة : للبحث عن المستقيم (Δ) ناتج تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) أي : $(P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$

نضع في الحالة العامة : $z = t$ ونبحث عن x و y بدلالة t فنجد التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ)

$$(\Delta): \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = t \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$$

من الشكل :

■ المسألة العكسية: عندما يكون لدينا التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) ، لكي نبين أن (Δ) هو مستقيم

تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ، يكفي أن نتحقق : $\begin{cases} (\Delta) \subset (P_1) \\ (\Delta) \subset (P_2) \end{cases}$ بمعنى إحداثيات التمثيل الوسيطى

للمستقيم (Δ) تحقق معادلة كلاً من المستويين (P_1) و (P_2)

°9) كيفية تعيين تقاطع ثلاث مستويات

❖ الحالة (1) : إذا كان مستويان منهم متوازيان تماماً فإن تقاطع المستويات الثلاثة خال

بمعنى : $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{\emptyset\}$

❖ الحالة (2) : إذا كان مستويين منهم غير متوازيين (متقاطعين) نعين مستقيم تقاطعهما (Δ)

فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن تقاطع مستقيم مع مستوي

بمعنى : مثلاً $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (\Delta) \cap (P_3)$

°10 تعامد مستقيم ومستوي في الفضاء

يتعامد مستقيم ومستوي في الفضاء إذا توازى شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناطمي لهذا المستوي

بمعنى إذا كان : $\vec{u}_{(\Delta)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و $\vec{n}_{(P)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

فان : $(\Delta) \perp (P) \Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)} \parallel \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$

°11 الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

❖ $(\Delta) \cap (P) = (\Delta)$ يعني : $(\Delta) \subset (P)$ " (Δ) مرسوم في هذا المستوي "

❖ $(\Delta) \cap (P) = \{\emptyset\}$ يعني (P) و (Δ) متوازيان تماماً (منفصلان)

❖ $(\Delta) \cap (P) = \{F\}$

لإيجاد إحداثيات F نقطة تقاطع (P) و (Δ) ، نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطى فنجد إحداثيات F

رابعاً "سطح الكرة في الفضاء"

°1 معادلة سطح الكرة: معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ ونصف قطرها R تعطى

بالقانون $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = R^2$

°2 المسألة العكسية: لتكن (E) : مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

لمعرفة طبيعة مجموعة النقط (E) يمكن أن نستعمل إحدى الطريقتين الآتيتين :

❖ الطريقة الأولى: (طريقة حساب العدد K) ، نحسب : $K = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}$

نميز ثلاث حالات

- إذا كان : $K < 0$ فان : $(E) = \emptyset$
- إذا كان : $K = 0$ فان : $(E) = \left\{ \omega \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$
- إذا كان : $K > 0$ فان : (E) سطح كرة (S) حيث :
 $(E) = (S) = \left\{ \omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega) ; R = \sqrt{K} \right\}$

❖ الطريقة الثانية: (طريقة استعمال قاعدة إكمال التربيع)

$$\begin{cases} x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \\ y^2 + by = \left(y + \frac{b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \\ z^2 + cz = \left(z + \frac{c}{2} \right)^2 - \left(\frac{c}{2} \right)^2 \end{cases} \quad \text{نستخدم فيها:}$$

■ نصيحة: إذا اشتملت المعادلة المعطاة لمجموعة النقط (E) على وسيط يفضل استخدام طريقة حساب العدد K أما إذا لم تشتمل المعادلة على وسيط فنفضل استخدام طريقة قاعدة إكمال التربيع

°3 كيفية تعيين معادلة مستوي يمر سطح كرة في نقطة معلومة

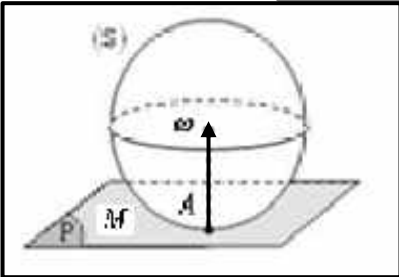
لإيجاد معادلة المستوي (P) الذي يمر سطح الكرة (S) في النقطة A نستعمل إحدى الطريقتين

❖ الطريقة الأولى: $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{\omega A} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{\omega A} = 0$

❖ الطريقة الثانية: نلاحظ ان $\overrightarrow{\omega A}$ شعاع ناظمي للمستوي

(لأنه عمودي عليه)

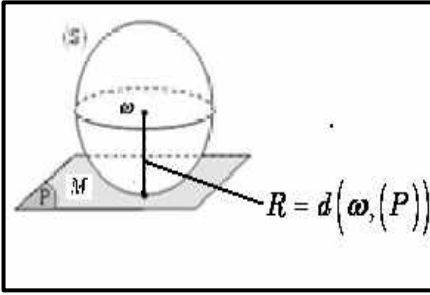
ثم نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي ، فنجد الثابت d



°4 كيفية تعيين معادلة سطح كرة التي تمر مستوي معلوم

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ معطى ، و (P) مستوي معادلته : $ax + by + cz + d = 0$

• طريقة ايجاد معادلة سطح الكرة (S) :



$$\begin{cases} (S): (x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = R^2 = R^2 \\ R = d(\omega; (P)) = \frac{|ax_\omega + by_\omega + cz_\omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{cases} \quad \text{كما يلي}$$

°5) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستوي في الفضاء (مع ذكر العناصر المميزة)

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ ، ونصف قطرها R ، و (P) مستوي معادلته :

$ax + by + cz + d = 0$ نضع : $d = d(\omega, (P))$ فلدينا :

$d < R$	$d = R$	$d > R$
<p>إذا كان : $d(\omega, (P)) < R$</p> <p>فان : $(S) \cap (P) = C(H; r)$</p> <p>المستوي (P) يقطع سطح</p> <p>الكرة (S) وفق دائرة (C)</p> <p>مركزها H ونصف قطرها r ،</p> <p>حيث H المسقط العمودي</p> <p>للنقطة omega على المستوي (P)</p> <p>و $r = \sqrt{R^2 - d^2}$</p>	<p>إذا كان : $d(\omega, (P)) = R$</p> <p>فان : $(S) \cap (P) = \{H\}$</p> <p>المستوي (P) يمس سطح</p> <p>الكرة (S) في النقطة H ،</p> <p>حيث H المسقط العمودي</p> <p>للنقطة omega على المستوي (P)</p>	<p>إذا كان : $d(\omega, (P)) > R$</p> <p>فان : $(S) \cap (P) = \emptyset$</p>

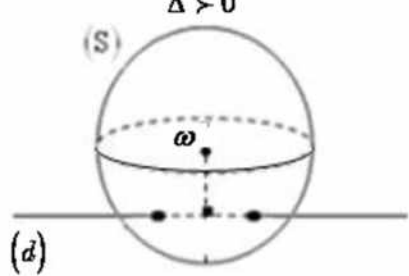
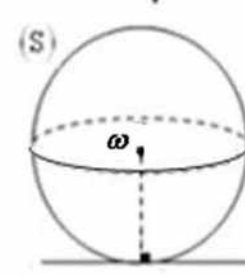
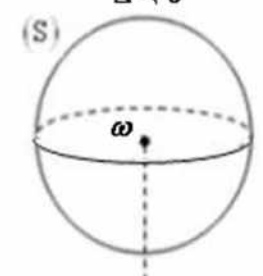
°6 الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستقيم في الفضاء

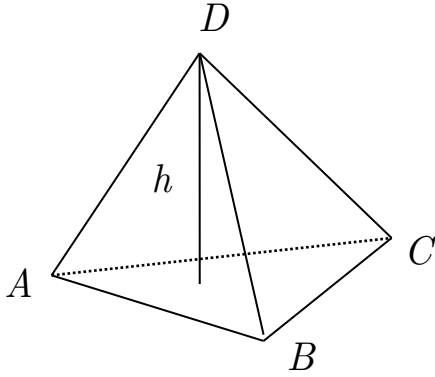
(S) سطح كرة مركزها معادلتها: $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = R^2$

$$(d): \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{و } (d) \text{ مستقيم الذي تمثله الوسيط}$$

لدراسة الوضعية النسبية لسطح كرة (S) مع المستقيم (d) في الفضاء ، نعوض x ، y و z من التمثيل

الوسيطي للمستقيم (d) في معادلة (S)، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط t

$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
		
$\Delta > 0 \Rightarrow (S) \cap (d) = \{H; H'\}$ نقطتي تقاطع H و H' حيث نجد إحداثياتهما بتعويض كل (d) مع في التمثيل الوسيط t_1 و t_2 من قيمة (d) للمستقيم	$\Delta = 0 \Rightarrow (S) \cap (d) = \{H\}$ نقطة تماس بين H حيث نجد إحداثياتها بتعويض (d) و في قيمة الحل المضاعف (d) التمثيل الوسيط للمستقيم	$\Delta < 0 \Rightarrow (S) \cap (d) = \emptyset$

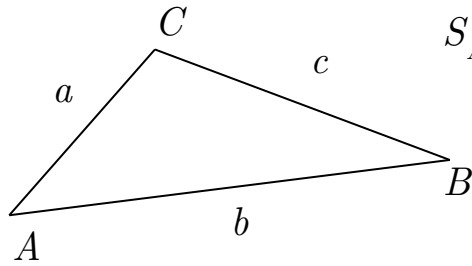


°7 حجم رباعي الوجوه

يحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التالي: $V = \frac{S_{ABC} \times h}{3}$

حيث S_{ABC} مساحة القاعدة (المثلث ABC) و h الارتفاع

°8 مساحة مثلث



أ/ إذا كان المثلث ABC قائم في A (مثلا) فإن $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$

ب/ إذا كان المثلث كفي (أو نجعل طبيعته) وكان لدينا قياس أحد

زواياه فإن: $S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin A}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin B}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin C}{2}$

خامساً "المرّج في الفضاء"

■ ملاحظة: في حالة مرّج أكثر من ثلاث نقط تعمم النتائج بأكملها بنفس الكيفية التي عُرف بها مرّج ثلاث نقط

°1 إحداثيات النقطة G مرّج الجملة المثقلة: $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ تعطى بالعلاقة

$$G \left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$$

°2 كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل: $\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$

علماً أن: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بإدخال نقطة المَرَجح G نجد :

$$\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}$$

• التعميم: المَرَجح $M \times$ (مجموع المعاملات)

▪ ملاحظة: إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فلا يوجد مَرَجح للنقط A ، B و C ويكون الشعاع:

$\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$ شعاعاً ثابتاً مستقلاً عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

(°3) كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$

بإدخال نقطة المَرَجح G نجد

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

• التعميم: اجعل مكان M نقطة المَرَجح $+ [M \text{ المَرَجح}]^2 \times$ (مجموع المعاملات)

(°4) لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC تعطى بالعلاقة:

$$H \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

سادساً "مجموعة النقط M من الفضاء"

طبيعة (نوع E) مجموعة النقط M من الفضاء	شكل المعادلة المحصل عليها من مجموعة النقط M من الفضاء
E : سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = K$	$MG = K > 0$ (°1)
E : سطح الكرة التي قطرها $[GH]$ مركزها ω منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$ ونصف قطرها $R = \frac{GH}{2}$	$\vec{MG} \bullet \vec{MH} = 0$ (°2)
E : المستوي الذي يشمل النقطة G و \vec{AB} شعاع ناظمي له (عمودي عليه)	$\vec{MG} \bullet \vec{AB} = 0$ (°3)
E : المستوي المحوري على منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$	$MG = MH$ (°4)