

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: ( 04 نقاط )

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{4}{3}$  ،

و  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_n + 4$  .

(1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.

(2) اكتب كلا من  $v_n$  و  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية  $(u_n)$  على  $\mathbb{N}$  .

(4) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .

(5) لتكن  $(w_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $w_n = 5 \left( \frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$  .

(أ) بين أن المتتالية  $(w_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  .

(ب) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - w_n)$  .

التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  .

نعتبر النقط  $A(2; -1; 1)$  ،  $B(-1; 2; 1)$  ،  $C(1; -1; 2)$  و  $D(1; 1; 1)$  .

(1) (أ) تحقق أن النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  تُعَيّن مستويا .

(ب) بين أن  $\vec{n}(1; 1; 1)$  هو شعاع ناظمي للمستوي  $(ABC)$  .

(ج) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$  .

(2) لتكن النقطة  $G$  مرجح الجملة المتقلة  $\{(A; 1), (B; 2), (C; -1)\}$  .

(أ) احسب إحداثيات  $G$  .

(ب) لتكن  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق:  $\|\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\|\vec{MD}\|$  .

بين أن  $(\Gamma)$  هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $[GD]$  .

(ج) أثبت أن معادلة  $(\Gamma)$  هي:  $6x - 4y + 2z + 3 = 0$  .

(3) بين أن المستويين  $(ABC)$  و  $(\Gamma)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$  يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له .

### التمرين الثالث: ( 05 نقاط )

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة  $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$  .  
 (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط  $A, B, C$  و  $D$  التي

لاحقاتها على الترتيب :  $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ،  $z_B = \overline{z_A}$ ،  $z_C = 6\sqrt{2}$  و  $z_D = \frac{z_C}{2}$  .  
 أ) اكتب  $z_A$ ،  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل الأسّي.

ب) احسب  $\left( \frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}} \right)^{2014}$

ج) بين أن النقط  $O, A, B$  و  $C$  تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها  $D$ ، يطلب تعيين نصف قطرها.

د) احسب  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$  ثم جد قياسا للزاوية  $(\overline{CA}; \overline{CB})$ . ما هي طبيعة الرباعي  $OACB$ ؟

(3) ليكن  $R$  الدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران  $R$ .

ب) عيّن لاحقة النقطة  $C'$  صورة  $C$  بالدوران  $R$  ثم تحقق أن النقط  $A, C$  و  $C'$  في استقامة.

ج) عيّن لاحقة النقطة  $A'$  صورة  $A$  بالدوران  $R$  ثم حدّد صورة الرباعي  $OACB$  بالدوران  $R$ .

### التمرين الرابع: ( 06 نقاط )

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ؛ فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته:  $y = 1$ .

ب) اكتب معادلة المماس  $(T)$  للمنحنى  $(C_f)$  في النقطة ذات الفاصلة 1.

ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $]0; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$ ، حيث  $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$ .

(3) أنشئ  $(T)$  و  $(C_f)$ .

(4) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  كما يلي:  $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$ .

و ليكن  $(C_h)$  تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير معدوم،  $h(x) - h(-x) = 0$ . ماذا تستنتج؟

ب) أنشئ المنحنى  $(C_h)$  إعتماذا على المنحنى  $(C_f)$ .

ج) ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ، عدد حلول المعادلة:  $\ln x^2 = (m-1)|x|$ .

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: ( 04 نقاط )

- (I) نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N}$  بحدها العام :  $u_n = e^{\frac{1}{2}-n}$  .  
 (  $e$  هو أساس اللوغاريتم النيبيري ) .
- (1) بين أن  $(u_n)$  متتالية هندسية ، يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأول.
- (2) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ، ماذا تستنتج ؟
- (3) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$  .
- (II) نضع، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = \ln(u_n)$  (  $\ln$  يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري ) .
- (1) عبّر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج نوع المتتالية  $(v_n)$  .
- (2) أ) احسب بدلالة  $n$  العدد  $P_n$  حيث :  $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n)$  .  
 ب) عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث :  $P_n + 4n > 0$  .

### التمرين الثاني: ( 05 نقاط )

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ، نعتبر النقط  $A(1; -1; -2)$  ،  $B(1; -2; -3)$  و  $C(2; 0; 0)$  .
- (1) أ) برهن أن  $A$  ،  $B$  و  $C$  ليست في استقامية .  
 ب) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(ABC)$  .  
 ج- تحقق أن  $x + y - z - 2 = 0$  هي معادلة ديكرتية للمستوي  $(ABC)$  .
- (2) نعتبر المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  المعرفين بمعادلتيهما كما يلي :  
 $(P): x - y - 2z + 5 = 0$  و  $(Q): 3x + 2y - z + 10 = 0$  .
- برهن أن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق المستقيم  $(\Delta)$  ذي التمثيل الوسيط:  $(t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -t \\ z = t + 1 \end{cases}$  .
- (3) عيّن تقاطع المستويات  $(ABC)$  ،  $(P)$  و  $(Q)$  .
- (4) لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء. نسمي  $d(M, (P))$  المسافة بين  $M$  و المستوي  $(P)$  و  $d(M, (Q))$  المسافة بين  $M$  و المستوي  $(Q)$  ، عيّن المجموعة  $(\Gamma)$  للنقط  $M$  بحيث :  
 $\sqrt{6} \times d(M, (P)) = \sqrt{14} \times d(M, (Q))$  .

### التمرين الثالث: ( 04 نقاط )

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  حيث :  
 $(z - i)(z^2 - 2z + 5) = 0$
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  (وحدة الطول  $1cm$ ) ، تعطى النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها :  $z_A = i$  ،  $z_B = 1 + 2i$  و  $z_C = 1 - 2i$  على الترتيب .
- أ) أنشئ النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .
- ب) جد  $z_H$  لاحقة النقطة  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $A$  على المستقيم  $(BC)$  .
- ج) احسب مساحة المثلث  $ABC$  .

(3) ليكن  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  و نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

(أ) عيّن الكتابة المركبة للتشابه  $S$ .

(ب) بيّن أنّ مساحة صورة المثلث  $ABC$  بالتشابه  $S$  تساوي  $\frac{1}{2}cm^2$ .

(4) نقطة لاحقتها  $z$ ، عيّن مجموعة النقط  $M$  حيث:  $|z| = |iz + 1 + 2i|$

### التمرين الرابع: ( 07 نقاط )

(I) - لتكن  $g$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ .

(1) أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $0,7 < \alpha < 0,8$ .

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي  $x$  إشارة  $g(x)$ .

(II) - نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

(ب) استنتج أنّ المنحنى  $(C_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا  $(\Delta)$  يُطلب تعيين معادلة له.

(ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى  $(C_f)$  و  $(\Delta)$

(3) أ) بيّن أنّه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$  حيث  $f'$  مشتقة الدالة  $f$ .

(ب) استنتج إشارة  $f'(x)$  حسب قيم  $x$  ثم شكّل جدول تغيرات الدالة  $f$ . (نأخذ  $f(\alpha) \approx -0,1$ )

(4) احسب  $f(1)$  ثم حل في  $\mathbb{R}$  المعادلة  $f(x) = 0$ .

(5) أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  و المنحنى  $(C_f)$ .

(6) لتكن  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$

و  $(C_h)$  تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :  $h(x) = f(x) - 2$

(ب) استنتج أنّ  $(C_h)$  هو صورة  $(C_f)$  بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ  $(C_h)$ .