الإجابة النموذجية لموضوع امتحان البكالوريا دورة: **2015**

اختبار في مادة: الرياضيات   الشعبة: رياضيات   المدة: **04** ساعات ونصف

(الموضوع الأول) عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		
1. أ- النقط A ، B و C ليست في استقامية لأن $\overrightarrow{AB}(9;-1;-1) \nparallel \overrightarrow{AC}(3;-2;1)$	0,25	
ب- النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي لأن $\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.	0,5	
جـ- من ب- أو $2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ ينتج D مرجّح $\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$	0,25	
د- D منتصف $[AE]$ ومنه $E(-1;3;6)$.	0,25	
هـ- $\overrightarrow{n_{(\mathcal{P})}}=\overrightarrow{AD}$ و $D\in(\mathcal{P})$ أو $MA=ME$ ومنه: $x+y-z+1=0$.	0,25	
2. (Γ) هي سطح الكرة ذات المركز D ونصف القطر AD حيث $AD=ED=\sqrt{3}$.	0,5	
3 أ- $F\in(\mathcal{P})$.	0,25	04 نقاط
ب- $[AE]$ و $[GH]$ متعامدتان، متقايستان ومتناصفتان في D ومنه $AGEH$ مربع.	0,25	
$s(AGEH)=2AD^2=6ua$.	0,25	
4. أ- (AEH) معيّن بالشعاعين $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{DF}$ ؛ $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{DF}\perp\overrightarrow{AC}$.	0,5	
ب- $\overrightarrow{DN}=t.\overrightarrow{AC}$ إذن $\overrightarrow{DN}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي $N\in(\Delta)$.	0,25	
جـ- $v(t)=\frac{1}{3}DN\times s(AGEH)=2\sqrt{14t^2}=2\|t\|\sqrt{14}\ uv$	0,25	
د- $N_1\left(3\sqrt{\frac{3}{14}};4-2\sqrt{\frac{3}{14}};5+\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$ ، $N_2\left(-3\sqrt{\frac{3}{14}};4+2\sqrt{\frac{3}{14}};5-\sqrt{\frac{3}{14}}\right)$.	0,25	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1. أ- تمثيل النقط A ، B ، C ، H و I في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.	0,5	
ب- $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ إذاً نسبة التشابه المباشر هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{5\pi}{4}$ زاوية له.	0,5	
2. $z_G=-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}i$.	0,25	
3. أ- $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}=-\frac{1}{3}i$.	0,5	03 نقاط
ب- $\frac{z_B-z_C}{z_H-z_A}$ هو عدد تخيلي صرف إذاً المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان.	0,5	
جـ- $\frac{z_A-z_C}{z_H-z_B}=-i$ وهو تخيلي صرف ومنه $(BH)\perp(AC)$ ؛ بما أنّ ارتفاعات مثلث تتلاقى في نقطة واحدة فإنّ H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.	0,75	

عناصر الإجابة — تابع للموضوع الأول	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
4. $\frac{3}{2}=\frac{z_H-z_I}{z_H-z_G}$ وهو حقيقي ومنه $(GH)//(IH)$ إذن النقط G ، H و I في استقامية.	0,5	02 نقاط
5. أ - $z_A+1+i=1+2i$ ، إذاً $\lvert z_A+1+i\rvert=\sqrt{5}$ أي $A\in(\Gamma)$.	0,5	
ب - $z=z_I+\sqrt{5}e^{i\theta}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$ إذن (Γ) هي دائرة مركزها I ونصف قطرها $\sqrt{5}$.	0,25	
جـ - إنشاء الدائرة (Γ) من المركز I وتمر بالنقطة A .	0,25	
د - $\lvert z_B-z_I\rvert=\sqrt{5}$ ، $\lvert z_C-z_I\rvert=\sqrt{5}$ إذن $IB=IC=\sqrt{5}$ أي $B\in(\Gamma)$ و $C\in(\Gamma)$.	0,5	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1. أ - من أجل كل عدد طبيعي k ، $2^{3k}\equiv1[7]$ ومنه $2^{3k+1}\equiv2[7]$ و $2^{3k+2}\equiv4[7]$.	0,5	04 نقاط
ب - $1962^{1954}-1954^{1962}+2015^{53}\equiv0[7]$	0,5	
2. أ - 89 عدد أوّلي لأنه لا يقبل القسمة على 2،3،5،7 و $11^2>89$.	0,25	
ب - $D_{7832}=\{1,2,4,8,11;22;44,88;89,178,356,712,979,1958,3916,7832\}$	0,5	
جـ - باستعمال خوارزمية إقليدس أو تحليل 981 نجد $PGCD(981,977)=1$.	0,25	
3. $x'^2-y'^2=7832$ و $PGCD(x';y')=1$ و $x'-y'\equiv4[11]$ إذاً $(x';y')=(981;977)$ ومنه $(x;y)=(1962;1954)$.	0,5	
4. أ - باستعمال مبرهنة بيزو ، البرهان أنّ a أوّلي مع $b\times c$.	0,25	
ب - باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنّه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $PGCD(a;b^n)=1$.	0,5	
جـ - $p\gcd(981^{1954};977)=1$ ؛ $p\gcd(981^{1954};977^{1962})=1$ ؛ $p\gcd(981^{1954};2^8)=1$ ؛ من 4. أ . ينتج $p\gcd(1962^{1954};1954^{1962})=2^{1954}p\gcd(981^{1954};977^{1962}\times2^8)=2^{1954}$	0,75	
التمرين الرابع: (07 نقاط)		
1. أ - $\lim\limits_{x\to0^{+}}f(x)=1=f(1)$ ، ومنه الدالة f مستمرة على يمين 0.	0,5	03,25 نقطة
ب - $\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^{+}}-x\ln x=0$.	0,25	
التفسير الهندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس في $A(0;1)$ معادلته $y=1$ و $x\geq0$.	0,25	
2. أ - $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.	0,25	
ب - من أجل $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=-x(2\ln x+1)$ + الإشارة	0,75	
f متزايدة تماما على $[0;e^{-\frac{1}{2}}]$ ومتناقصة تماما على $[e^{-\frac{1}{2}};+\infty[$	0,25	
جدول تغيرات الدالة f .	0,25	
3. أ - تبيين أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.	0,75	

تابع للموضوع الأول — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
ب - $f(1{,}531)\approx 0{,}002$ ؛ $f(1{,}532)\approx -0{,}001$ إذاً $f(1{,}532)<f(\alpha)<f(1{,}531)$	0,5	03,75 نقطة
4. أ - الدالة g زوجية لأن $\mathbb{R}$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $g(-x)=g(x)$	0,25	
ب - إنشاء المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$.	1	
5. $x\mapsto \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{9}$ هي الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto x^2\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1.	0,5	
6. أ - $F(t)=\left(\alpha-\frac{1}{3}\alpha^3\ln\alpha+\frac{1}{9}\alpha^3\right)-\left(t-\frac{1}{3}t^3\ln t+\frac{1}{9}t^3\right)$.	0,25	
ب - من $\ln(\alpha)=\frac{1}{\alpha^2}$ ؛ $\ln(t)=\frac{1-f(t)}{t^2}$ إذاً $F(t)=\frac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$.	0,25	
جـ - لدينا $\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=1$ إذاً $\lim_{t\xrightarrow{>}0}F(t)=\frac{\alpha^3+6\alpha}{9}$.	0,5	
7. أ - القيمة المضبوطة للعدد m حتى يكون $\mathcal{S}(m)=2\mathcal{A}$ هي: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3+6\alpha}{\pi}}$.	0,25	
ب - علما أنّ $3{,}140<\pi<3{,}142$ و $1{,}531<\alpha<1{,}532$ نجد: $1{,}344<m<1{,}346$.	0,25	

(الموضوع الثاني) — عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
التمرين الأوّل: (04 نقاط)		04 نقاط
1. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن حساب u_1 في كل حالة أو $\frac{1}{2}u_n+3$ بدلالة n)	1	
2. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل ($\lvert iz-1-i\rvert=3$ معناه $\lvert z-1+i\rvert=3$)	1	
3. الاقتراح الصحيح (أ) + التعليل (يمكن استعمال خواص الموافقة بترديد 11)	1	
4. الاقتراح الصحيح (ب) + التعليل (في التمثيل الوسيطي يمكن ملاحظة أن الشعاعين مرتبطان خطيا)	1	
التمرين الثاني: (05 نقاط)		
1. $z^2-2(1-\sqrt{3})z+8=0$ معناه $z\in\left\{(1-\sqrt{3})-i(1+\sqrt{3});(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})\right\}$	1,25	03,25 نقطة
2. أ - $\frac{z_B}{z_A}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{\frac{5\pi}{6}i}=e^{-\frac{7\pi}{6}i}$.	0,75	
ب - $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=-2\arg(z_A)=-\frac{7\pi}{6}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{12}$	0,75	
جـ - $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.	0,5	

3. أ - حلول المعادلة $7x-2y=1$ هي كل الثنائيات $(2k+1;7k+3)$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	0,5	01,75 نقطة
ب - $7x=12(1+2y)$ ومنه x مضاعف لـ12 حسب مبرهنة غوص.	0,25	
جـ - حلول المعادلة $7x-24y=12$ هي: $x=24k+12$ و $y=7k+3$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	0,5	
د - $n=24k+12$ مع $k\in\mathbb{N}$.	0,5	
التمرين الثالث: (04 نقاط)		
1. $C\in(\Delta_1)\cap(\Delta_2)$ ومنه $C(3;-2;1)$	0,5	04 نقاط
2. (Δ_1) و (d) غير متوازيين وغير متقاطعين وعليه فهما ليسا من نفس المستوي	0,5	
3. أ - $\begin{cases}x=3-\alpha-3\beta\\ y=-2+2\alpha+2\beta;(\alpha\in\mathbb{R});(\beta\in\mathbb{R})\\ z=1-\alpha+3\beta\end{cases}$ وهو تمثيل وسيطي للمستوي $(\mathcal{P})$.	0,5	
ب - استنتاج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.	0,25	
جـ - $C\in(\mathcal{P})$ و $\overrightarrow{BC}$ عمودي على المستوي $(\mathcal{P})$.	0,25	
4. أ - $I\in(d)\cap(\mathcal{P})$ ومنه $I(1;0;2)$ ؛ $D\in(\Delta_2)\cap(IA)$ ومنه $D(0;0;4)$.	0,75	
ب - I منتصف $[AD]$ لأن $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{ID}$ أو $I\left(\frac{x_A+x_D}{2};\frac{y_A+y_D}{2};\frac{z_A+z_D}{2}\right)$	0,25	
5. أ - $(BC)//(KG)$ حسب طاليس في BIC نجد $\frac{IG}{IC}=\frac{1}{3}$ ومنه G مرجح $\{(C;1),(I;2)\}$ وعليه G مرجح $\{(C;1),(A;1),(D;1)\}$ أي G مركز ثقل ACD.	0,5	
ب - $G\left(\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{5}{3}\right)$	0,5	
التمرين الرابع (07 نقاط)		
1. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=0=f(0)$ إذن الدالة f مستمرة على يسار 0.	0,25	02,50 نقطة
2. $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{t\to-\infty} te^t=0$.	0,25	
التفسير الهندسي: $(\mathcal{C}_f)$ يقبل نصف مماس مواز لحامل محور الفواصل في المبدأ O.	0,25	
3. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.	0,25	
ب - لكل $x\in]-\infty;0[$: $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}$ ؛ $f'(x)>0$	0,5	
f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$.	0,25	
جدول تغيرات الدالة f.	0,25	
4. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{t\xrightarrow{<}0}\frac{e^t}{t}-e^t-\frac{1}{t}=\lim\limits_{t\xrightarrow{<}0}\frac{e^t-1}{t-0}-e^t=0$	0,25	
ب - المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ، $y=x$ معادلة له.	0,25	

تابع للموضوع الثاني عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة مجموع
5. أ - $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$.	0,25	04,50 نقطة
ب - لكل x من المجال $]-\infty;0[$: $g'(x)=e^{\frac{1}{x}}\times\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x}$ ؛ $g'(x)<0$	0,5	
g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$.	0,25	
جدول تغيّرات الدالة g .	0,25	
6. أ - من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ، $0<g(x)<1$ معناه $x<f(x)<0$	0,25	
ب - $(\mathscr{C}_f)$ فوق (Δ) ؛ $f(0)=0$ إذاً يتقاطعان في المبدأ O.	0,25	
جـ - إنشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.	0,5	
7. أ - باستعمال الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n<0$.	0,75	
ب - المتتالية (u_n) متزايدة تماما لأنّ $u_n<f(u_n)<0$	0,25	
جـ - المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 0 إذن هي متقاربة نحو ℓ .	0,25	
بما أنّ f مستمرة على $]-\infty;0[$ فإن $f(\ell)=\ell$ ومنه $\ell=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.	0,25	
8. أ - لكل x من المجال $]-\infty;0[$ ، $h'_m(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)-m=\frac{f(x)}{x}-m$.	0,5	
ب - $h'_m(x)=0$ تكافئ $f(x)=mx$ و $x\neq0$ إذا كان $m\in]0;1[$ فإن المعادلة $h'_m(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-\infty;0[$. إذا كان $m\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$ فإن المعادلة $h'_m(x)=0$ لا تقبل حلا.	0,25	

ملاحظة: تقبل وتراعى جميع الطرق الصحيحة الأخرى مع التقيد التام بسلم التنقيط.