تمرين 01:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

A ، B و C نقط لواحقها $z_A=1+2i$ ، $z_B=-1-4i$ ، $z_C=-5i$.

1) عيّن لاحقة النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD .

2) عيّن لاحقة النقطة H حتى يكون $ABCH$ متوازي أضلاع .

3) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

تمرين 02:

$z=(1+i)\left(\sqrt{3}+i\right)$

1) اكتب z على الشكل الجبري ، ثمّ على الشكل المثلثي.

2) استنتج قيمتي $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3) اكتب z^{2010} على الشكل الجبري.

تمرين 03:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+12=0$.

2. نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=3-i\sqrt{3}$.

اكتب a على الشكل المثلثي ثمّ الشكل الأسّي، ثمّ احسب $\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}$.

3. A ، B نقطتان من المستوي لاحقتاهما a و b على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

أ - بيّن أنّ المثلث ABO متقايس الأضلاع ، ثمّ عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO .

ب - لتكن المجموعة (E) للنقط M من المستوي حيث: $MO^2+MA^2+MB^2=24$.

- تحقّق أنّ النقطة A عنصر من (E).

جـ - بيّن أنّ (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

تمرين 04:

1) $p(z)$ عدد مركب حيث $p(z)=z^3+z^2-4z-24$.

احسب $p(3)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن النقط ذات اللاحقات $z_A=3$ ، $z_B=-2+2i$ و $z_C=-2-2i$ ، $z_D=-1-10i$.

أ) احسب الأطوال BC ، AC و AB ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|z+2-2i|=|z+2+2i|$.

ج) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D، ثمّ عين نسبته و زاويته

تمرين 05:

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

2- نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $a=4\sqrt{3}-4i$ و $b=4\sqrt{3}+4i$
- أكتب العددين a و b على الشكل الأسّي.
3- احسب المسافات OA ، OB و AB ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB.
4- نرمز بـ C إلى النقطة التي لاحقتها $c=-\sqrt{3}+i$ ولتكن النقطة D صورة النقطة C بواسطة الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.
- عيّن لاحقة النقطة D.
5- نسمي G مركز المسافات المتناسبة للنقط B ، D ، O المرفقة بالمعاملات 1، 1، -1 على الترتيب
أ- برّر وجود G ثم بيّن أنّ هذه النقطة لاحقتها $g=4\sqrt{3}+6i$.
ب - أنشئ النقط A ، B ، C ، D و G في المعلم.
ج - برهن أنّ النقط C ، D و G على استقامة واحدة.
د - برهن أنّ الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.
6- أ - بيّن أنّ: $\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.
ب - ماهي طبيعة المثلث AGC.

تمرين 06:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب $z_A=1+i$ ، $z_B=2-i$ و $z_C=3+2i$.
1) احسب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.
2) فسّر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.
3) بيّن أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.
4) عيّن لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثمّ احسب نصف قطرها.
- احسب مساحة المثلث ABC.
5) عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون $ABDC$ مربّعا.

تمرين 07:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.
1) A ، B نقطتين من المستوي لاحقتيهما على الترتيب: $z_A=-\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ و $z_B=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$.
أ) عيّن اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O.
ب) عيّن اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة $[AC]$.
ج) عيّن اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I.
د) أنشئ النقاط A ، B ، C ، D و I.
1) أ) فسّر هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$.

ب) تحقق أنّ: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

ج) ماذا يمكن القول عن القطعتين $[AC]$ و $[BD]$؟

3) ماهي طبيعة الرباعي $ABCD$؟

4) بيّن أن النقاط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها r.

5) لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل

أ) عيّن لاحقة النقطة E.

ب) احسب الجداء $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BE}$.

ج) ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة (γ)؟

تمرين 08:

1) نعتبر العددين المركبين $z_1 = 3+2i$ و $z_2 = 1-2i$

أ) تحقق أنّ $z_1 + \overline{z_2} = 4(1+i)$.

ب) اكتب العدد $z_1 + \overline{z_2}$ على الشكل المثلثي ثمّ على الشكل الأسي.

ج) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(z_1 + \overline{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقاط A، B و C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 3+2i$، $z_B = -3$، $z_C = 1-2i$ و $z_D = -1-6i$.

أ) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) عيّن z_E لاحقة النقطة E صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

ج - G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(D;1)\}$.

- عيّن z_G لاحقة النقطة G، ثمّ بيّن أنّ $ABDG$ مربع.

3) (F) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right\| = 4\sqrt{5}$

أ) تحقق أنّ B تنتمي إلى (F).

ب) عيّن ثمّ أنشئ (F).

تمرين 09:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط: A، B و I لواحقها على الترتيب: $z_A = 2+i$، $z_B = 4+3i$ و $z_I = 2-i$.

أ - عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة I ونسبته 3.

ب - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

جـ - بيّن أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

3. **أ -** التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z' = iz + 5 + i$.

ب - ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة.

جـ - عيّن النقطتين $r(A)$ و $r(C)$.

د - استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

تمرين 10:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=2\sqrt{3}$ ، $z_C=2i$

1) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A.

2) أ) احسب طويلة كل من الأعداد المركبة التالية: z_A-z_C ، z_B-z_A و z_C-z_B.

ب) عيّن لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC، وحدّد نصف قطر هذه الدائرة.

ج) بيّن أنّ النقطة O تنتمي للدائرة (Γ).

3) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

أ) بيّن أنّ $z_D=\sqrt{3}-i$.

ب) احسب لاحقة منتصف القطعة $[AD]$.

ج) عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}$.

د) ماهي طبيعة الرباعي $ABDC$

تمرين 11:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرّف كما يلي: $P(z)=2z^3+14z^2+41z+68$

1) بيّن أنّه من كل عدد مركب z لدينا: $P(z)=(z+4)(2z^2+6z+17)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

3) لتكن النقط A ، B ، C من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

والتي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4$ ، $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$.

أ) اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي f الذي يحقق الشرطين $f(A)=A$ و $f(C)=B$

جـ) عيّن لاحقتي كل من النقطتين D و E حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربّعا مركزه A.

تمرين 12:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $4z^2-12z+153=0$.

2. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و P التي لواحقها على

الترتيب: $z_A=\frac{3}{2}+6i$ و $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ و $z_P=3+2i$ والشعاع $\vec{w}$ حيث: $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$.

أ - عيّن z_Q لاحقة Q صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$.

ب - عيّن z_R لاحقة R صورة P بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته $-\frac{1}{3}$.

جـ - عيّن z_S لاحقة S صورة P بالدوران r الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

د - علم النقط P ، Q ، R ، S.

3. **أ -** برهن أنّ $PQRS$ متوازي أضلاع.

ب - احسب $\frac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$ ثمّ استنتج طبيعة الرباعي $PQRS$.

جـ - تحقق أنّ النقط P ، Q ، R ، S تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين لاحقة مركزها ونصف قطرها.

<u>تمرين 13:</u>

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقطتين A ، B صورتي العددين المركبين $z_A = 4+2i$ و $z_B = 3-i$ على الترتيب.

أ - بيّن أنّ المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين .

ب - عيّن مركز وزاوية الدوران R الذي يحول A إلى B ويحول B إلى O.

ج - لتكن النقطة C صورة O بهذا الدوران

- ماهي طبيعة الرباعي $ABOC$.

<u>تمرين 14:</u>

نعتبر العددين المركبين: $z_A = 3+i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3-i\sqrt{3}$ و $z_C = 2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C.

1) بيّن أنّ المثلث ABO متساوي الساقين ثمّ عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقله.

2) بيّن أنّه يوجد دوران T يحول O إلى G ويحول A إلى C يُطلب تعيين مركزه وزاويته.

3) استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

<u>تمرين 15:</u>

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A = i$ و B لاحقتها $z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$، نسمي C صورة B بواسطة r.

أ - اعط الكتابة المركبة لـ r ثم عيّن z_C ـ الشكل الأسّي ـ لاحقة C.

ب - اكتب كلا من z_B و z_C على الشكل الجبري.

جـ - علم النقط A ، B و C.

2) لتكن D مرجح النقط A ، B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2 ، -1 و 2.

أ - عيّن z_D لاحقة D

ب - بيّن أنّ A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H.

- أعط الكتابة المركبة لـ H ثمّ عيّن z_E لاحقة E ، ثمّ علم E .

4) **أ -** احسب النسبة $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C}$ ، تعطى الكتابة على الشكل الأسّي.

ب - استنتج طبيعة المثلث CDE

تمرين 16:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.
2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، A ، B و C نقط من المستوي

لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$

أ - اكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\dfrac{z_A}{z_B}$.

ب - عين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\dfrac{\pi}{4}$.

جـ - بيّن أنّ الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

أ - بيّن أنّ (Δ) هو محور الفواصل.

ب - بيّن أنّ حلي المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين).

تمرين 17:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$،

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2z+4=0$

2) نسمي A ، B النقطتان التي لاحقتاهما $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=1-i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ - عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين z_A و z_B .

ب -أعط الشكل الأسي للعدد z_A .

3) نسمي R التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

أ - ما طبيعة التحويل R ، عيّن عناصره المميزة.

ب - نسمي C صورة النقطة A بالتحويل R ، أعط الشكل الأسي للعدد المركب z_C لاحقة النقطة C .

ثمّ استنتج الشكل الجبري للعدد z_C .

جـ - بيّن أنّ النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل R . ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

تمرين 18:

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$

أ) تحقق أنّ العدد i جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب) عيّن العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-i)(z^2+\alpha z+\beta)$.

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

2) نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A=i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=2-3i$ على الترتيب.

ليكن الدوران r الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$

- عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r.

- برهن أنّ النقط A' ، B و C في استقامية، ثمّ عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h الذي مركزه B والذي يحول النقطة C إلى A'.

تمرين 19:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+13=0$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

أ - بيّن أنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

ب - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

3) عيّن وأنشئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB)؛ نــرمز بــ β إلى ترتيب النقطة M.

نضع N صورة M بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - بيّن أنّ لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$

ب - كيف يجب أن نختار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC).

تمرين 20:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ تعطى النقط A ، B و C و D التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=1+i$ ، $z_B=-3+3i$ ، $z_C=-1-3i$ و $z_D=-2$.

1) احسب كلا من: $\left|z_D-z_A\right|$ ، $\left|z_D-z_B\right|$ و $\left|z_D-z_C\right|$ ثمّ استنتج أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2) نضع: $L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ احسب طويلة وعمدة العدد L ، ثمّ استنتج نوع المثلث ABC.

3) نسمي (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $\left|z+3-3i\right|=\left|z+1+3i\right|$.

أ - تحقق أن $A\in(\delta)$ و $D\in(\delta)$.

ب - عيّن طبيعة المجموعة (δ) ثمّ أنشئها.

4) لتكن (E) المجموعة للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=z_A+z_Be^{\left(-\frac{3\pi}{4}+q\right)i}$ حيث q عدد حقيقي

أ - أكتب العدد z_B على الشكل الأسي.

ب - عيّن طبيعة المجموعة (E) عندما يمسح q كل الأعداد الحقيقية.

تمرين 21:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+13=0$

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب $z_A=3+2i$ ، $z_B=3-2i$ و $z_\Omega=2$

والشعاع $\vec{w}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{w}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

أ ـ علم النقط A ، B و Ω.

ب ـ عيّن اللاحقة z_E للنقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$.

ج ـ عيّن اللاحقة z_D للنقطة D صورة Ω بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

د ـ عيّن اللاحقة z_C للنقطة C صورة E بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

3) أ ـ بيّن أنّ $ACDE$ متوازي أضلاع.

ب ـ اكتب العدد المركب $L=\frac{z_A-z_E}{z_D-z_E}$ على الشكل الجبري و الأسي.

ج ـ استنتج طبيعة المثلث EAD.

د ـ ماهي طبيعة الرباعي $ACDE$؟

هـ ـ استنتج أن النقط A ، C ، D و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

تمرين 22:

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0.....(1)$ حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2. بيّن أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C

التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ ـ أنشئ النقط A ، B و C .

ب ـ اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثمّ استنتج أنّ C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

جـ ـ عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة : $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثمّ أنشئ G .

د ـ احسب z_D لاحقة النقطة D ، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

تمرين 23:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2z+2=0$

2- لتكن النقط K ، L ، M لواحقها $z_K=1+i$ ، $z_L=1-i$ ، $z_M=-i\sqrt{3}$

في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

ـ علّم هذه النقط .

3- أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L ، عيّن z_N لاحقة N .

ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C

ـ عيّن z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.

- عيّن لاحقة صورة النقطة L بالدوران r.

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B.

- عيّن z_D و z_B لاحقتي النقطتين D و B على الترتيب.
- عيّن لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t.

5- أ) بيّن أنّ: $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$ ، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب) ما طبيعة الرباعي $ABCD$.

تمرين 24:

الجزء الأول :

1– z_1 و z_2 عددان مركبان. حل جملة المعادلتين التالية :

$$\begin{cases} \sqrt{3}z_1 - z_2 = -2 \\ z_1 - \sqrt{3}z_2 = -2i \end{cases}$$

2– المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A = -\sqrt{3}+i$ و $z_B = -1+i\sqrt{3}$.

- اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي، ثمّ علم النقطتين A و B

3– احسب الطويلة وعمدة لـ $\frac{z_A}{z_B}$.

- استنتج طبيعة المثلث ABO وقيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

4– عيّن لاحقة صورة النقطة C بحيث يكون $ACBO$ معينا. علم النقطة C ثمّ احسب مساحة المثلث ABC.

الجزء الثاني :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1– عرّف هذا التحويل واعط عناصره المميزة.

2– ماهي على الشكل الأسّي لواحق A'، B' و C' صور A ، B و C بالتحويل f ؟

3– ماهي مساحة المثلث $A'B'C'$ ؟

تمرين 25:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = 0$.

1.أ ـ تحقق أنّ حل للمعادلة (E)، ثمّ عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z فإنّ:

$z^3 - 3z^2 + 3z - 3 = (z-3)(z^2 + az + b)$.

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

النقط A ، B و C صور الأعداد المركبة $z_A = 3$ ، $z_B = i\sqrt{3}$ و $z_C = -i\sqrt{3}$.

- بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. D النقطة التي لاحقتها $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

- عيّن z_E لاحقة النقطة E.

4. F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ - احسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أنّ المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

ب - عيّن z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا .

تمرين 26:

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ - تحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب - جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$.

أ - اكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب - اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثمّ على الشكل الأسّي.

جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

جـ - بيّن أنّ النقط A ، B و A' في استقامية

تمرين 27:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، لتكن النقط A، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ و $z_D = \frac{z_C}{2}$.

أ) اكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسي.

ب) احسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ) عيّن قيّم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{n}$ حقيقيا سالبا.

د) بيّن أنّ النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها.

هـ) احسب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثمّ جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A .

أ) اكتب العبارة المركبة للدوران R محددا زاويته.

ب) عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثمّ تحقق أنّ النقط C ، A و C' على استقامية.

جـ) عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثمّ حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

تمرين 28:

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B ، C لاحقتاها على الترتيب:

$z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=2+4i\sqrt{3}$.

1) احسب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_B-z_A|$ ثمّ استنتج طبيعة المثلث OAB .

2) نسمي G مركز ثقل المثلث OAB ؛ احسب z_G لاحقة النقطة G .

3) S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى G .

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، ثمّ عيّن العناصر المميزة له.

ب) عيّن $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتشابه S .

جـ) استنتج صورة المثلث OAB بالتشابه S .

4) نسمي (C) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|-z|^2+|z_A-z|^2+|z_B-z|^2=24$

أ) بيّن أنّ (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

ب) ماهي صورة الدائرة (C) بالتشابه S .

تمرين 29:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2-4z+8=0$ ، ثمّ أكتب حليها على الشكل الأسي.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، لتكن النقط A ، B ، C لاحقتاها على الترتيب:

$z_A=2-2i$ و $z_B=-z_A$ ، $z_C=-3-i$.

أ) احسب $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2012}$.

ب) عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{n}$ حقيقيا.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي نسبته $\dfrac{3}{2}$ وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ويحول B إلى C .

أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S ، ثمّ عيّن مركزه.

ب) عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه S .

ج) ماهي طبيعة الرباعي $ACBD$.

د) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;-1),(C;2),(D;-1)\}$.

4) عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$.

تمرين 30:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: A ، B ، C ، D و E

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=-2i$ ، $z_C=3-i$ ، $z_D=3+i$ و $z_E=2-2i$.

نضع $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$

أ ـ احسب طويلة العدد المركب L وعمدة له، ثمّ فسر النتائج هندسيا.

ب ـ استنتج أنّه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

3) نسمي (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz+1-3i)=-\dfrac{\pi}{4}$.

أ ـ بيّن أنّ B تنتمي إلى (Γ_1)، ثمّ عيّن المجموعة (Γ_1).

ب ـ نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r. عيّن المجموعة (Γ_2).

4) بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z'.

أ ـ اكتب العبارة المركبة للدوران r. ثمّ عيّن سابقة النقطة O بالدوران r.

ب ـ عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz+2+2i|=|z_A|$.

5) أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد $\dfrac{z-z_B}{z-z_D}$، ثمّ استنتج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\dfrac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقيا سالبا.

تمرين 31:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة: $z^2+z+1=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، D و F

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2$ ، $z_D=-2+2\sqrt{3}i$ و $z_F=\overline{z_D}$.

أ ـ اكتب z_A و z_B على الشكل الأسي، ثمّ علم النقط A ، B ، C ، D و F.

ب ـ ما طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$.

أ ـ عيّن مركز وزاوية الدوران R.

ب ـ لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R. بيّن أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=1+\sqrt{3}i$.

جـ ـ اكتب العدد $\dfrac{z_F-z_E}{z_D-z_E}$ على الشكل الجبري، ثمّ استنتج أنّ المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E، نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\dfrac{z-z_C}{z-z_E}$.

ـ لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا. عيّن المجموعة (Γ_1).

5) لتكن G مرجح الجملة $\{(A;|z_A|),(B;|z_B|),(C;|z_C|)\}$.

أ ـ عيّن z_G لاحقة النقطة G.

ب ـ (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|$.

ـ تحقق أنّ C تنتمي إلى (Γ_2)، ثمّ عيّن طبيعة (Γ_2).

تمرين 32:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+10=0$.

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب: $z_A=2+i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=1-3i$.

أ ـ أكتب العدد المركب $\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسّي؛ ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب ـ اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى C ثمّ حدّد نسبته وزاويته.

جـ ـ عيّن z_E لاحقة النقطة E؛ علما أنّ D هي صورة E بالتشابه S .

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\dfrac{1}{2}$.

أ ـ بيّن أنّ F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.

ب ـ عيّن z_F لاحقة النقطة F .

تمرين 33:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3-3z^2+3z+7=0$.

1) بيّن أنّ العدد -1 حلا لهذه المعادلة، ثم جد الحلين الآخرين.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: A ، B ، C ، G لواحقها على الترتيب: z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حيث $z_1=-1$ ، $z_2=2+\sqrt{3}i$ ، $z_3=2-\sqrt{3}i$ و $z_4=3$.

ـ اكتب العدد $\dfrac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ACG .

3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12$..........$(1)$.

أ ـ أثبت أنّ G هي مرجح الجملة: $\left\{(A;-1);(B;2),(C;2)\right\}$.

ب ـ بيّن أنّ المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$........$(2)$.

جـ ـ تأكد أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ) .

د ـ بيّن أنّه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ ، ثمّ استنتج طبيعة (γ) وارسمها.

تمرين 34:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نسمي A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ) اكتب العدد $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

ب) استنتج قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$ وطبيعة المثلث OAB .

جـ) عيّن مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

د) هل توجد قيّم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك.

3) أ) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C، محددا نسبته وزاويته.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

4) أ) عيّن العناصر المميزة لـ(E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z-z_1|^2+|z-z_3|^2=5$$

ب) عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث: $|z-z_1|=|z-z_3|$.

تمرين 35:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z، التالية : $z^2+z+1=0$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A، B و M ذات اللاحقات:

$z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A).

أ - أكتب z_A على الشكل الأسّي .

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[\left(z-z_A\right)^2\right]=\arg\left(z_A\right)-\arg\left(z_B\right)$.

3. أ **-** التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A.z+z_B\sqrt{3}$

- ما طبيعة التحويل r ؟ عيّن عناصره المميزة .

ب - التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h .

جـ - نضع : $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عيّن طبيعة التحويل S، مبرزا عناصره المميزة، ثمّ تحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E ؛ حيث: $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

- بيّن أنّ النقط O، Ω و E في استقامية.

5. أ **-** عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث θ عدد حقيقي.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

تمرين 36:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^3+z^2+3z-5=0..........(1)$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=1$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=-1-2i$

ـ اكتب العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC.

3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$

ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث λ عدد حقيقي.

أ ـ تحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F).

ب ـ اكتب معادلة ديكارتية لكل من (E) و (F)؛ وعيّن نقطتي تقاطعهما.

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ ـ اكتب العبارة المركبة للتشابه S وعين نسبته وزاويته.

ب ـ عيّن (E') و (F') صورتا (E) و (F) بالتشابه S.

جـ ـ استنتج تقاطع (E') و (F')

الحلول

حل التمرين 01:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

A ، B و C نقط لواحقها $z_A=1+2i$ ، $z_B=-1-4i$ ، $z_C=-5i$.

1) تعيين لاحقة النقطة D حتى تكون A مركز ثقل المثلث BCD.

A مركز ثقل المثلث BCD معناه $z_A=\frac{z_B+z_C+z_D}{3}$ ومنه

$z_D=3z_A-z_B-z_C=3(1+2i)-(-1-4i)+5i=4+15i$

2) تعيين لاحقة النقطة H حتى يكون $ABCH$ متوازي أضلاع .

$ABCH$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HC}$ أي $z_B-z_A=z_C-z_H$ ومنه

$z_H=z_C+z_A-z_B=-5i+1+2i+1+4i=2+i$ وعليه $z_H=2+i$.

3) عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;2),(C;-1)\}$.

$z_G=\frac{z_A+2z_B-z_C}{1+2-1}=\frac{1+2i-2-8i+5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ إذن $z_G=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

حل التمرين 02:

$z=(1+i)(\sqrt{3}+i)$

1) كتابة z على الشكل الجبري

$z=(1+i)(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+i(\sqrt{3}+i)$ أي $z=\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1$ بالتالي $z=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$

الشكل المثلثي للعدد المركب z

لدينا $|1+i|=\sqrt{2}$ و $|\sqrt{3}+i|=2$ ومنه $|z|=2\sqrt{2}$

و $\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ و $\arg(\sqrt{3}+i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ بالتالي $\arg(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$

وعليه $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

2) استنتاج قيمتي $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

لدينا $z=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$ ومن جهة أخرى $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$

ومنه $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)$ أي $\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

إذن $\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

3) كتابة z^{2010} على الشكل الجبري.

لدينا $z=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$ ومنه $z^{2010}=(2\sqrt{2})^{2010}\left(\cos\frac{2010\times5\pi}{12}+i\sin\frac{2010\times5\pi}{12}\right)$

أي $z^{2010}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\frac{10050\pi}{12}+i\sin\frac{10050\pi}{12}\right)$

ولدينا $\frac{10050\pi}{12}=\frac{10056\pi-6\pi}{12}=838\pi-\frac{\pi}{2}$

ومنه $z^{2010}=\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\left(838\pi-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(838\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(2\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2}\right)$

بالتالي $z^{2010}=-i\,2^{3015}$

<u>حل التمرين 03:</u>

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+12=0$.

$\Delta=36-48=-12=12i^2$ ومنه للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{6+2i\sqrt{3}}{2}=3+i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{6-2i\sqrt{3}}{2}=3-i\sqrt{3}$

2. نعتبر العددين المركبين $a=3+i\sqrt{3}$ ، $b=3-i\sqrt{3}$.

كتابة a على الشكل المثلثي ثمّ الشكل الأسّي.

$|a|=2\sqrt{3}$ و $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{1}{2}\end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ بالتالي $a=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

الشكل الأسي للعدد a .

$a=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$

حساب $\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}$.

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}=\left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2012}=e^{i\frac{2012\pi}{6}}$$

ولدينا $\frac{2012\pi}{6}=\frac{2016\pi-4\pi}{6}=336\pi-\frac{2\pi}{3}$ ومنه $\frac{2012\pi}{6}\equiv-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

ومنه $\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}=e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ أي $\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^{2012}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. A ، B نقطتان من المستوي لاحقتاهما a و b على الترتيب في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

أ ـ تبيين أنّ المثلث ABO متقايس الأضلاع ،

لدينا $OA=|a|=\sqrt{12}$ و $OB=|b|=\sqrt{12}$ و $AB=|b-a|=\left|-2\sqrt{3}i\right|=2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

ومنه $OA=OB=AB$ والمثلث ABO متقايس الأضلاع.

تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABO .

$z_G=\frac{a+b+0}{3}=\frac{3+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{3}$ ومنه $z_G=\frac{6}{3}$ أي $z_G=2$.

ب ـ لتكن المجموعة (E) للنقط M من المستوي حيث: $MO^2+MA^2+MB^2=24$.

ـ التحقّق أنّ النقطة A عنصر من (E).

A عنصر من (E) معناه $AO^2+AA^2+AB^2=24$ أي $AO^2+AB^2=24$

ولدينا $AO=\sqrt{12}$ ومنه $AO^2=12$ و $AB=\sqrt{12}$ ومنه $AB^2=12$ وهذا يعني أنّ $AO^2+AB^2=24$

ومنه A عنصر من (E).

جـ ـ تبيين أنّ (E) دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

نضع $M(x;y)$

$MO=\sqrt{x^2+y^2}$ ومنه $MO^2=x^2+y^2$

$MA=\sqrt{(3-x)^2+\left(\sqrt{3}-y\right)^2}$ ومنه $MA^2=(3-x)^2+\left(\sqrt{3}-y\right)^2=x^2-6x+9+y^2-2\sqrt{3}y+3$

$MB=\sqrt{(3-x)^2+\left(-\sqrt{3}-y\right)^2}$ ومنه $MB^2=(3-x)^2+\left(-\sqrt{3}-y\right)^2=x^2-6x+9+y^2+2\sqrt{3}y+3$

$MO^2+MA^2+MB^2=x^2+y^2+x^2-6x+9+y^2-2\sqrt{3}y+3+x^2-6x+9+y^2+2\sqrt{3}y+3$

أي $MO^2+MA^2+MB^2=3x^2+3y^2-12x+24$

$MO^2+MA^2+MB^2=24$ تعني $3x^2+3y^2-12x+24=24$ وتكافئ $x^2+y^2-4x=0$

أي $(x-2)^2+y^2-4=0$ ومنه $(x-2)^2+y^2=4$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $G(2;0)$ ونصف قطرها 2

<u>حل التمرين 04:</u>

1) $p(z)$ عدد مركب حيث $p(z)=z^3+z^2-4z-24$.

حساب $p(3)$، ثمّ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $p(z)=0$.

$p(3)=3^3+3^2-4(3)-24=27+9-12-24=0$ ومنه 3 حل للمعادلة $p(z)=0$

ومنه $p(z)=(z-3)\left(z^2+az+b\right)$ أي $p(z)=(z-3)\left(z^2+az+b\right)=z^3+(a-3)z^2+(b-3a)z-3b$

وبالمطابقة مع $z^3+z^2-4z-24$ نجد $\begin{cases}a-3=1\\-3b=-24\end{cases}$ أي $\begin{cases}a=4\\b=8\end{cases}$

إذن $p(z)=(z-3)\left(z^2+4z+8\right)$

$p(z)=0$ معناه $z=3$ أو $z^2+4z+8=0.....(1)$

$\Delta'=24-8=-4=(2i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=-2+2i$ ، $z_2=-2-2i$

بالتالي حلول المعادلة $p(z)=0$ هي $\{3,-2+2i,-2-2i\}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A ، B و C ذات اللاحقات $z_A=3$ ، $z_B=-2+2i$ و $z_C=-2-2i$ ، $z_D=-1-10i$.

أ) حساب الأطوال BC ، AC و AB ، ثمّ استنتاج طبيعة المثلث ABC.

$BC=|z_C-z_B|=|-4i|=4$ ، $AC=|z_C-z_A|=|-5-2i|=\sqrt{27}$ و $AB=|z_B-z_A|=|-5+2i|=\sqrt{27}$

ومنه $AB=AC$ بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A.

ب) تعيين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $|z+2+2i|=|z+2-2i|$.

$|z+2+2i|=|z+2-2i|$ معناه $|z-z_C|=|z-z_B|$ وتكافئ $CM=BM$ بالتالي مجموعة النقط M المطلوبة هي محور القطعة $[CB]$.

ج) كتابة العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى D.

$z_D-z_A=\alpha(z_B-z_A)$ ومنه $\alpha=\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4-10i}{-5+2i}=\frac{2i(2i-5)}{-5+2i}=2i$

إذن $z_D-z_A=2i(z_B-z_A)$ ومنه العبارة المركبة للتشابه S هي $z'-z_A=2i(z-z_A)$

أي $z'=2iz+3-6i$

نسبة التشابه و زاويته

لدينا $|2i|=2$ ومنه نسبة التشابه هي 2.

و $\arg(2i)=\frac{\pi}{2}$ ومنه زاوية التشابه هي $\frac{\pi}{2}$.

<u>حل التمرين 05:</u>

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

$\Delta'=48-64=-16=(4i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=4\sqrt{3}+4i$ ، $z_2=4\sqrt{3}-4i$.

2- نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A=4\sqrt{3}-4i$ و $z_B=4\sqrt{3}+4i$

كتابة العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي.

$|z_A|=8$ و $\arg(z_A)=\theta$ حيث $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-1}{2}\end{cases}$ أي $\arg(z_A)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ومنه $z_A=8e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$ ، $z_B=\overline{z_A}=8e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

3- حساب المسافات OA ، OB و AB ، و استنتاج طبيعة المثلث OAB.

$OA=|z_A|=8$ ، $OB=|z_B|=8$ ، $AB=|z_B-z_A|=|8i|=8$

ومنه $OA=OB=AB$ بالتالي المثلث OAB متقايس الأضلاع.

4- نرمز بـ C إلى النقطة التي لاحقتها $z_C=-\sqrt{3}+i$ ولتكن النقطة D صورة النقطة C بواسطة الدوران الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ـ تعيين لاحقة النقطة D.

$z_D=e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C$ ومنه $z_D=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\sqrt{3}+i\right)$ وعليه $z_D=2i$

5- نسمي G مركز المسافات المتناسبة للنقط B ، D ، O المرفقة بالمعاملات 1، 1، -1 على الترتيب

أ- تبرير وجود G و تبيين أنّ هذه النقطة لاحقتها $z_G=4\sqrt{3}+6i$.

بما أنّ $1-1+1\neq 0$ فإن G موجودة

$$z_G=\frac{z_B+z_D-z_O}{1+1-1}=\frac{4\sqrt{3}+4i+2i}{1}=4\sqrt{3}+6i$$

ج ـ اثبات أنّ النقط C ، D و G على استقامة واحدة.

$$\frac{z_G-z_D}{z_C-z_D}=\frac{4\sqrt{3}+6i-2i}{-\sqrt{3}+i-2i}=\frac{4\sqrt{3}+4i}{-\sqrt{3}-i}=-4$$ ومنه $\frac{z_G-z_D}{z_C-z_D}=-4$ أي $z_G-z_D=-4\left(z_C-z_D\right)$

وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{DG}=-4\overrightarrow{DC}$ بالتالي النقط C ، D و G على استقامة واحدة.

<u>**ملاحظة:**</u> لإثبات أنّ النقط C ، D و G على استقامة واحدة يكفي إثبات أنّ $\frac{z_G-z_D}{z_C-z_D}$ هو عدد حقيقي.

د ـ إثبات أنّ الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع

لدينا $z_G-z_D=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i$ و منه $z_G-z_D=z_B$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{OB}$

بالتالي الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع.

تبيين أنّ: $\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$$\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=\frac{-\sqrt{3}+i-4\sqrt{3}-6i}{4\sqrt{3}-4i-4\sqrt{3}-6i}=\frac{-5\sqrt{3}-5i}{-10i}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}$$
$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ب ـ طبيعة المثلث AGC.

لدينا $\frac{z_C-z_G}{z_A-z_G}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ومنه $GC=GA$ و $\left(\overrightarrow{GA};\overrightarrow{GC}\right)=-\frac{\pi}{3}$ إذن المثلث AGC متقايس الأضلاع.

<u>**حل التمرين 06:**</u>

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب

$z_A=1+i$ ، $z_B=2-i$ و $z_C=3+2i$.

1) حساب لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

$$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=2-i-1-i=1-2i \quad ، \quad z_{\overrightarrow{AC}}=z_C-z_A=3+2i-1-i=2+i$$

2) تفسير هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

$$\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB} \quad \text{و} \quad \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right).$$

3) تبيين أنّ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، واستنتاج طبيعة المثلث ABC.

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{3+2i-1-i}{2-i-1-i}=\frac{2+i}{1-2i}=\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$$
$$=\frac{5i}{5}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أنّ $AC = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A .

4) تعيين لاحقة النقطة I مركز الدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC ثمّ احسب نصف قطرها.

مركز الدائرة (Γ) هو النقطة I منتصف الوتر $[BC]$ ذات اللاحقة $z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{2 - i + 3 + 2i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$

ونصف قطرها IA حيث $IA = |z_A - z_I| = \left|-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

وعليه نصف قطره الدائرة (Γ) هو $r = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

حساب مساحة المثلث ABC.

$AB = |z_B - z_A| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$ ، $AB = |z_C - z_A| = |2 + i| = \sqrt{5}$

وعليه $S_{ABC} = \frac{AB.AC}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}ua$.

5) تعيين لاحقة النقطة D حتى يكون $ABDC$ مربّعا.

حتى يكون $ABDC$ مربعا يكفي أن يكون متوازي أضلاع لأن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين

$ABDC$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ ومعناه $z_D - z_C = z_B - z_A$

أي $z_D = z_B - z_A + z_C = 1 - 2i + 3 + 2i = 4$ وعليه $z_D = 4$.

<u>**حل التمرين 07:**</u>

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) A، B نقطتين من المستوي لاحقتيهما على الترتيب: $z_A = -\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$ و $z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

أ) تعيين اللاحقة z_C للنقطة C نظيرة B بالنسبة للمبدأ O.

$z_C = -z_B = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ب) تعيين اللاحقة z_I للنقطة I منتصف القطعة $[AC]$.

$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

ج) تعيين اللاحقة z_D للنقطة D نظيرة B بالنسبة للنقطة I.

لدينا $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IB}$ معناه $z_D - z_I = -(z_B - z_I)$ ومنه $z_D = -(z_B - z_I) + z_I$ أي

$z_D = -\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right) - \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ بالتالي $z_D = -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

1) أ) تفسير هندسيا الطويلة والعمدة للعدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}$.

$\frac{AC}{BD} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_D - z_B|} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right|$ **و** $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}\right) + 2k\pi$

ب) تحقق أنّ: $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$z_C - z_A = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i + \sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ بالتالي $z_C - z_A = -4\sqrt{2}i$

$z_D - z_B = -3\sqrt{2} + \sqrt{2}i - \sqrt{2} - \sqrt{2}i$ بالتالي $z_D - z_B = -4\sqrt{2}$

$\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = \dfrac{-4\sqrt{2}i}{-4\sqrt{2}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

ج) ماذا يمكن القول عن القطعتين $[AC]$ و $[BD]$؟

D نظيرة B بالنسبة إلى I معناه I منتصف $[BD]$ وبما أن I منتصف $[AC]$

فإن القطعتان $[AC]$ و $[BD]$ متناصفتان.

3) تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$.

لدينا $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن $\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right| = 1$ ومنه $AC = BD$ و $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ومنه $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ وعليه $(AC)\perp(BD)$.

الرباعي $ABCD$ قطراه $[AC]$ و $[BD]$ متناصفان ومتقايسان ومتعامدان إذن $ABCD$ مربع.

4) تبيين أن النقاط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها r.

لدينا I منتصف $[BD]$ ومنتصف القطعة $[AC]$ و $AC = BD$ ومنه $IA = IB = IC = ID = 2\sqrt{2}$

بالتالي النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها I ونصف قطرها $r = 2\sqrt{2}$

5) لتكن النقطة E نظيرة B بالنسبة لمحور الفواصل

أ) تعيين لاحقة النقطة E.

$z_E = \overline{z_B} = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ب) حساب الجداء $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BE}$.

لدينا $B\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ ، $D\left(-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ ، $E\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ و $\overrightarrow{BE}\left(0;-2\sqrt{2}\right)$ ، $\overrightarrow{BD}\left(-4\sqrt{2};0\right)$

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BE} = -4\sqrt{2}\times 0 + 0\times -2\sqrt{2} = 0$

ج) ماذا يمثل المستقيم (BE) بالنسبة للدائرة (γ)؟

المستقيم (BE) مماس للدائرة (γ) في النقطة B.

حل التمرين 08:

1) نعتبر العددين المركبين $z_1 = 3 + 2i$ و $z_2 = 1 - 2i$

أ) التحقق أنّ $z_1 + \overline{z_2} = 4(1+i)$.

$z_1 + \overline{z_2} = 3 + 2i + 1 + 2i = 4 + 4i = 4(1+i)$

ب) كتابة العدد $z_1 + \overline{z_2}$ على الشكل المثلثي

$$z_1 + \overline{z_2} = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

الشكل الأسي للعدد $z_1+\overline{z_2}$.

$$z_1+\overline{z_2}=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

ج) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(z_1+\overline{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا $\left(z_1+\overline{z_2}\right)^n=\left(4\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$

يكون $\left(z_1+\overline{z_2}\right)^n$ حقيقيا إذا كان $\sin\frac{n\pi}{4}=0$ أي $\frac{n\pi}{4}=k\pi$ ومنه $n=4k$ مع $k\in\mathbb{N}$

2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقاط A، B و C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=3+2i$ ، $z_B=-3$ ، $z_C=1-2i$

أ) تعيين الطويلة وعمدة للعدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{3+2i-1+2i}{-3-1+2i}=\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{(1+2i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-5i}{5}=-i$$

إذن $\left|\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right|=|-i|=1$ ، $\arg\left(\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}\right)=\arg(-i)=-\frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أنّ $CA=CB$ و $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في C.

ب) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2.

D صورة C بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 معناه $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$ أي $z_D-z_A=2\left(z_C-z_A\right)$

ومنه $z_D=2\left(z_C-z_A\right)+z_A=2z_C-z_A$ بالتالي $z_D=-1-6i$

ج - G مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(D;1)\right\}$.

تعيين z_G لاحقة النقطة G،

$$z_G=\frac{z_A-z_B+z_D}{1-1+1}=\frac{3+2i+3-1-6i}{1}=5-4i$$

تبيين أنّ $ABDG$ مربع.

لدينا G مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;-1),(D;1)\right\}$ معناه $z_G=z_A-z_B+z_D$ ومنه $z_G+z_B=z_A+z_D$

وتكافئ $\frac{z_G+z_B}{2}=\frac{z_A+z_D}{2}$ ومنه $\frac{z_G+z_B}{2}=\frac{z_A+z_D}{2}=1-2i$ وهذا يعني أنّ C هي منتصف $[DA]$ ومنتصف $[BG]$ ومنه $ABDG$ متوازي أضلاع

بما أنّ $(CA)\perp(CB)$ فإنّ $(DA)\perp(GB)$ ولدينا $CA=CD=CB=CG$ بالتالي $DA=BG$

لأنّ C هي منتصف $[DA]$ ومنتصف $[BG]$.

$ABDG$ متوازي أضلاع وقطراه $[DA]$ و $[BG]$ متعامدان ومتقايسان وبالتالي فهو مربع.

3) (F) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\sqrt{5}$

أ) التحقق أنّ B تنتمي إلى (F).

B تنتمي إلى (F) إذا كان $\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BD}\right\|=4\sqrt{5}$.

لدينا $\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right\|=\left\|\overrightarrow{BG}\right\|$ ولدينا $\left\|\overrightarrow{BG}\right\|=|z_G-z_B|=|-8-4i|=4\sqrt{5}$

بالتالي $\left\|\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{BD}\right\|=4\sqrt{5}$ ومنه B تنتمي إلى (F).

ب) تعيين (F).

لدينا $\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=4\sqrt{5}$ تعني $\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=4\sqrt{5}$ أي $MG=4\sqrt{5}$

بالتالي (F) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $4\sqrt{5}$.

<u>حل التمرين 09:</u>

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-4z+5=0$.

$\Delta'=4-5=-1=i^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=2+i$ ، $z_2=2-i$

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط: A ، B و I لواحقها على الترتيب: $z_A=2+i$ ، $z_B=4+3i$ و $z_I=2-i$.

أ ـ تعيين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحاكي h الذي مركزه النقطة I ونسبته 3.

$h(A)=C$ تعني $\overrightarrow{IC}=3\overrightarrow{IA}$ وتكافئ $z_C-z_I=3(z_A-z_I)$ ومنه $z_C=3(z_A-z_I)+z_I$

بالتالي $z_C=2+5i$

ب ـ تعيين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$.

$$z_D=\frac{z_A-z_B+z_C}{1-1+1}=\frac{2+i-4-3i+2+5i}{1}=3i$$

جـ ـ تبيين أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع.

لدينا $z_B-z_A=4+3i-2-i=2+2i$ و $z_C-z_D=2+5i-3i=2+2i$

إذن $z_B-z_A=z_C-z_D$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ بالتالي $ABCD$ متوازي أضلاع.

3. أ ـ التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=iz+5+i$.

ب ـ طبيعة التحويل r وعناصره المميزة.

لدينا عبارة التحويل r من الشكل $z'=az+b$ مع $a=i$ و $b=5+i$

ولدينا $|a|=|i|=1$ و $\arg(a)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ إذن التحويل r دوران زاويته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة الصامدة ω

ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{b}{1-a}$

$$z_\omega=\frac{b}{1-a}=\frac{(5+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{4+6i}{2}=2+3i$$

جـ ـ تعيين النقطتين $r(A)$ و $r(C)$.

$z'=iz_A+5+i=i(2+i)+5+i=2i-1+5+i=4+3i=z_B$ ومنه $r(A)=B$

$z'=iz_C+5+i=i(2+5i)+5+i=2i-5+5+i=3i=z_D$ ومنه $r(C)=D$

د ـ استنتاج طبيعة الرباعي $ABCD$.

لدينا $r(A)=B$ و $r(C)=D$ وحسب الخاصية المميزة للدوران فإنّ $AC=BD$ و $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD})=\frac{\pi}{2}$

$ABCD$ متوازي أضلاع وقطراه متقايسان ومتعامدان إذن $ABCD$ مربع.

<u>حل التمرين 10:</u>

A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=2\sqrt{3}$ ، $z_C=2i$

1) تعيين الطويلة وعمدة للعدد المركب z_A.

$$|z_A|=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$$

$\arg(z_A)=\theta$ بحيث $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{\pi}{3}$ وعليه $z_A=\left[2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right]$

2) أ) حساب طويلة كل من الأعداد المركبة التالية: z_C-z_A ، z_B-z_A و z_C-z_B.

$$|z_C-z_A|=|2i-\sqrt{3}-3i|=|-\sqrt{3}-i|=2$$

$$|z_B-z_A|=|2\sqrt{3}-\sqrt{3}-3i|=|\sqrt{3}-3i|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

$$|z_C-z_B|=|2i-2\sqrt{3}|=\sqrt{16}=4$$

ب) تعيين لاحقة المركز K للدائرة (Γ) المحيطة بالمثلث ABC، ونصف قطر هذه الدائرة.

لدينا $\begin{cases}AC=|z_C-z_A|=2\\ AB=|z_B-z_A|=2\sqrt{3}\\ BC=|z_C-z_B|=4\end{cases}$ ومنه $AB^2+AC^2=BC^2$ بالتالي المثلث ABC قائم في A .

بما أنّ المثلث ABC قائم في A فإنّ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو منتصف الوتر $[BC]$

$z_K=\frac{z_B+z_C}{2}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}$ بالتالي $z_K=\sqrt{3}+i$.

ونصف قطرها $\frac{BC}{2}$ أي نصف قطر الدائرة (Γ) هو 2 .

ج) تبيين أنّ النقطة O تنتمي للدائرة (Γ).

$OK=|z_K|=2$ ومنه O تنتمي للدائرة (Γ).

3) لتكن النقطة D ذات اللاحقة $z_D=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

أ) تبيين أنّ $z_D=\sqrt{3}-i$.

$$z_D=2e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$$

ب) حساب لاحقة منتصف القطعة $[AD]$.

$$\frac{z_A+z_D}{2}=\frac{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}{2}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i=z_K$$

ج) تعيين طويلة العدد المركب $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}$.

$$\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}\right|=\frac{|z_D-z_A|}{|z_C-z_B|}=\frac{4}{4}=1$$

د) طبيعة الرباعي $ABDC$.

لدينا K هي منتصف $[BC]$ ومنتصف $[AD]$.

ولدينا $\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}\right|=1$ و هذا يعني أنّ $AD=BC$

وعليه القطعتان $[BC]$ و $[AD]$ متناصفتان ومتقايستان وبالتالي الرباعي $ABDC$ مستطيل.

حل التمرين 11:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرّف كما يلي: $P(z)=2z^3+14z^2+41z+68$

1) تبيين أنّه من كل عدد مركب z لدينا: $P(z)=(z+4)(2z^2+6z+17)$

$$(z+4)(2z^2+6z+17)=2z^3+6z^2+17z+8z^2+24z+68$$
$$=2z^3+14z^2+41z+68$$

ومنه $P(z)=(z+4)(2z^2+6z+17)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

$P(z)=0$ معناه $z=-4$ أو $2z^2+6z+17=0$

$\Delta'=9-34=-25=(5i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_2=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

3) لتكن النقط A ، B ، C من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

والتي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-4$ ، $z_B=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$

أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ على الشكل الأسي.

$z_B-z_A=-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i+4=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i=\frac{5}{2}(1+i)$ و $z_C-z_A=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+4=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i=\frac{5}{2}(1-i)$

$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{\frac{5}{2}(1+i)}{\frac{5}{2}(1-i)}=\frac{(1+i)}{(1-i)}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

وعليه $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

ب) استنتاج طبيعة التحويل النقطي f الذي يحقق الشرطين $f(A)=A$ و $f(C)=B$.

لدينا $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $z_B-z_A=e^{i\frac{\pi}{2}}(z_C-z_A)$ نستنتج أن B هي صورة C بالدوران f الذي

مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ) تعيين لاحقتي كل من النقطتين D و E حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربّعا مركزه A.

لدينا A منتصف $[BD]$ ومنه $z_A=\frac{z_B+z_D}{2}$ وعليه $z_D=2z_A-z_B=-8+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$ أي $z_D=-\frac{13}{2}-\frac{5}{2}i$

و A منتصف $[CE]$ ومنه $z_A=\frac{z_C+z_E}{2}$ وعليه $z_E=2z_A-z_C=-8+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ أي $z_E=-\frac{13}{2}+\frac{5}{2}i$.

<u>حل التمرين 12:</u>

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $4z^2-12z+153=0$.

$\Delta'=36-612=-576=(24i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{6+24i}{4}=\frac{3}{2}+6i$ و $z_2=\frac{6-24i}{4}=\frac{3}{2}-6i$

2. نعتبر النقط A ، B ، C و P التي لواحقها على الترتيب:

$z_A=\frac{3}{2}+6i$ و $z_B=\frac{3}{2}-6i$ ، $z_C=-3-\frac{1}{4}i$ و $z_P=3+2i$ والشعاع $\vec{w}$ حيث: $z_{\vec{w}}=-1+\frac{5}{2}i$.

أ ـ تعيين z_Q لاحقة Q صورة B بالانسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$.

العبارة المركبة للإنسحاب t الذي شعاعه $\vec{w}$ هي $z'=z+z_{\vec{w}}$ أي $z'=z-1+\frac{5}{2}i$

$t(B)=Q$ معناه $z_Q=z_B-1+\frac{5}{2}i=\frac{3}{2}-6i-1+\frac{5}{2}i$ بالتالي $z_Q=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i$.

ب ـ تعيين z_R لاحقة R صورة P بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته $-\frac{1}{3}$.

$z_R-z_C=\frac{-1}{3}(z_P-z_C)$ ومنه $z_R=\frac{-1}{3}(z_P-z_C)+z_C$ تكافئ $z_R=\frac{-1}{3}z_P+\frac{1}{3}z_C+z_C=\frac{-1}{3}z_P+\frac{4}{3}z_C$

بالتالي $z_R=\frac{-1}{3}(3+2i)+\frac{4}{3}\left(-3-\frac{1}{4}i\right)=-5-i$.

جـ ـ تعيين z_S لاحقة S صورة P بالدوران r الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

$r(P)=S$ معناه $z_S-z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_P-z_A)$ ومعناه $z_S-z_A=-i(z_P-z_A)$ ومنه $z_S=-i(z_P-z_A)+z_A$

وتكافئ $z_S=-i\left(3+2i-\frac{3}{2}-6i\right)+\frac{3}{2}+6i$ بالتالي $z_S=-\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i$.

د ـ تعليم النقط P ، Q ، R ، S.

3. أ ـ اثبات أنّ $PQRS$ متوازي أضلاع.

لدينا $z_P-z_S=3+2i+\frac{5}{2}-\frac{9}{2}i=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}i$ و $z_Q-z_R=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}i+5+i=\frac{11}{2}-\frac{5}{2}i$

ومنه $z_P-z_S=z_Q-z_R$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{RC}$ بالتالي $PQRS$ متوازي أضلاع.

ب ـ حساب $\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}$ ثمّ استنتاج طبيعة الرباعي $PQRS$.

$$\frac{z_R-z_Q}{z_P-z_Q}=\frac{-5-i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}{3+2i-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}=\frac{-10-2i-1+7i}{6+4i-1+7i}=\frac{-11+5i}{5+11i}=i.$$

وهذا يعني أنّ $QR=QP$ و $\left(\overrightarrow{QP};\overrightarrow{QR}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث QPR متساوي الساقين وقائم في Q.

وبالتالي $PQRS$ مربع.

جـ ـ التحقق أنّ النقط P ، Q ، R ، S تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي يطلب تعيين لاحقة مركزها ونصف قطرها.

بما أن $PQRS$ مربع فإن النقط P ، Q ، R ، S تنتمي إلى نفس الدائرة (C) التي مركزها ω منتصف $[PR]$ ونصف قطرها $\frac{PR}{2}$

$$z_\omega=\frac{z_P+z_R}{2}=\frac{3+2i-5-i}{2}=-1+\frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad \frac{PR}{2}=\frac{|z_R-z_C|}{2}=\frac{|-8-3i|}{2}=\frac{\sqrt{73}}{2}.$$

<u>حل التمرين 13:</u>

أ ـ تبيين أنّ المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

لدينا $\begin{cases} OA=|z_A|=\sqrt{20} \\ OB=|z_B|=\sqrt{10} \\ AB=|z_B-z_A|=|-1-3i|=\sqrt{10}\end{cases}$ ومنه $AB^2+OB^2=OA^2$

إذن المثلث OAB قائم في B ومتساوي الساقين.

ب ـ تعيين مركز وزاوية الدوران R الذي يحول A إلى B ويحول B إلى O.

$\begin{cases} R(A)=B \\ R(B)=O \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} z_B=az_A+b......(1) \\ z_O=az_B+b.....(2) \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نجد $z_B-z_O=a(z_A-z_B)$ ومنه $a=\frac{z_B-z_O}{z_A-z_B}=\frac{3-i}{1+3i}=-i$

بالتعويض في (2) نجد $b=-az_B=i(3-i)=1+3i$

العبارة المركبة للدوران R هي $z'=-iz+1+3i$.

$\arg(a)=-\frac{\pi}{2}$ ومنه زاوية الدوران هي $\frac{\pi}{2}$ ومركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega=\frac{b}{1-a}$

$$z_\omega=\frac{1+3i}{1+i}=\frac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4+2i}{2}=2+i$$

<u>ملاحظة:</u> يمكن تعيين زاوية ومركز الدوران R مباشرة بما أنّ المثلث OAB قائم في B ومتساوي الساقين فإنّ زاوية الدوران R هي $-\frac{\pi}{2}$ ومركزه هو ω منتصف الوتر $[OA]$. (ω هي نقطة تقاطع محوري $[AB]$ و $[BO]$)

ج ـ لتكن النقطة C صورة O بهذا الدوران

ـ تعيين طبيعة الرباعي $ABOC$.

لدينا $\begin{cases} R(A)=B \\ R(O)=C \end{cases}$ و ω منتصف $[AO]$ ومنه منتصف $[BC]$ هو النقطة $R(\omega)$ لأنّ الدوران يحافظ على المنتصف

وبما أنّ $R(\omega)=\omega$ فإنّ ω هو منتصف $[BC]$.

ولدينا حسب الخاصية المميزة للدوران $AO=BC$ و $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{BC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

وعليه القطعتان $[AO]$ و $[BC]$ متناصفتان ومتقايستان ومتعامدتان بالتالي $ABOC$ مربع.

<u>حل التمرين 14:</u>

نعتبر العددين المركبين: $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=2+\sqrt{3}+3i$.

A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C.

1) تبيين أنّ المثلث ABO متساوي الساقين.

$\begin{cases} OA=|z_A|=2\sqrt{3} \\ OB=|z_B|=2\sqrt{3} \end{cases}$ إذن المثلث ABO متساوي الساقين رأسه O.

تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقله.

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_O}{3}=\frac{3+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{3}=2$$

2) تبيين أنّه يوجد دوران T يحول O إلى G ويحول A إلى C يُطلب تعيين مركزه وزاويته.

$\begin{cases} T(O)=G \\ T(A)=C \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} z_G=az_O+b........(1) \\ z_C=az_A+b........(2) \end{cases}$

من (1) نجد $b=z_G=2$

بالتعويض في (2) نجد $a=\dfrac{z_C-b}{z_A}=\dfrac{\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+3i\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}$

$$=\frac{3\sqrt{3}-3i+9i+3\sqrt{3}}{12}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

اذن العبارة المركبة للتحويل T هي $z'=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)z+2$

بما أنّ $|a|=1$ فإنّ T دوران زاويته $\arg(a)=\dfrac{\pi}{6}$ ومركزه النقطة الصامدة ω ذات اللاحقة $z_\omega=\dfrac{b}{1-a}$

3) استنتج صورة المستقيم (OA) بالدوران T.

$\begin{cases} T(O)=G \\ T(A)=C \end{cases}$ إذن صورة المستقيم (OA) بالدوران T هو المستقيم (GC).

حل التمرين 15:

لتكن A نقطة لاحقتها: $z_A=i$ و B لاحقتها $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1) ليكن الدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$، نسمي C صورة B بواسطة r.

أ ـ اعطاء الكتابة المركبة لـ r

لتكن M و M' نقطتان من المستوي لاحقيهما z و z' على الترتيب

$r(M)=M'$ معناه $z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}(z-z_O)$ أي $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

تعيين z_C ـ الشكل الأسّي ـ لاحقة C.

$r(B)=C$ يكافئ $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B$ أي $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ وعليه $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب ـ كتابة كلا من z_B و z_C على الشكل الجبري.

$z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$ أي $z_B=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

$z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$ أي $z_C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

جـ ـ انشاء النقط A، B و C.

2) لتكن D مرجح النقط A، B و C المرفقة على الترتيب بالمعاملات 2 ، -1 و 2.

أ ـ تعيين z_D لاحقة D

$$z_D=\frac{2z_A-z_B+2z_C}{2-1+2}=\frac{2i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+\sqrt{3}-i}{3}$$ وعليه $$z_D=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

ب ـ تبيين أنّ A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

$|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=1$ وهذا يعني أنّ $OA=OB=OC=OD=1$ بالتالي A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي الدائرة المثلثية.

3) ليكن H التحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 نسمي E صورة D بالتحاكي H.

الكتابة المركبة لـ H.

$\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$ معناه $z'-z_A=2(z-z_A)$ وتكافئ $z'=2z-z_A$ أي $H:z'=2z-i$

تعيين z_E لاحقة E.

$H(D)=E$ يكافئ $z_E=2z_D-i$ ومنه $z_E=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)-i$ أي $z_E=\sqrt{3}$.

4) أ ـ حساب النسبة $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$.

$$\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{2i}{\sqrt{3}+i}$$

$$=\frac{2i}{\sqrt{3}+i}=\frac{2i\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

وعليه $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب ـ استنتاج طبيعة المثلث CDE.

لدينا $\frac{z_D-z_C}{z_E-z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ وهذا يعني أنّ $CD=CE$ و $\left(\overrightarrow{CE};\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\pi}{3}$

المثلث CDE متساوي الساقين وإحدى زواياه $\frac{\pi}{3}$ بالتالي المثلث CDE متقايس الأضلاع .

<u>حل التمرين 16:</u>

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

$\Delta=2-4=-2=\left(\sqrt{2}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، A ، B و C نقط من المستوي

لاحقاتها على الترتيب : $z_A=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=z_A+z_B$

أ ـ كتابة على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

$z_A=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\overline{z_A}=e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، $\frac{z_A}{z_B}=\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب ـ تعيين لاحقة كل من A' ، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$

$z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_A$ ومنه $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{i\frac{\pi}{4}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$ وعليه $z_{A'}=i$.

$z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_B$ ومنه $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\times e^{-i\frac{\pi}{4}}=e^{i(0)}$ وعليه $z_{B'}=1$.

$z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}z_C$ ومنه $z_{C'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z_A+z_B\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}.z_A+e^{i\frac{\pi}{4}}.z_B=z_{A'}+z_{B'}=1+i$

جـ ـ تبيين أنّ الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

لدينا $z_{A'}=i$ و $z_{C'}-z_{B'}=1+i-1=i$ ومنه $z_{C'}-z_{B'}=z_{A'}$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{OA'}$

ومنه الرباعي $OA'C'B'$ متوازي أضلاع

ولدينا من جهة أخرى $\frac{z_{A'}}{z_{B'}}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ وهذا يعني أنّ $OA'=OB'$ و $\left(\overrightarrow{OB'};\overrightarrow{OA'}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن $OA'C'B'$ مربع.

3. نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z-z_A|=|z-z_B|$.

أ ـ تبيين أنّ (Δ) هو محور الفواصل.

$|z-z_A|=|z-z_B|$ تعني $AM=BM$ بالتالي (Δ) هو محور القطعة $[AB]$ وبما أنّ $z_B=\overline{z_A}$ فإنّ محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل أي (Δ) هو محور الفواصل.

ب ـ تبيين أنّ حلي المعادلة: $\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ **عددان حقيقيان.**

يتساوى عددان مركبان إذا تساوى طويلاتاهما وعمدتاهما بترديد 2π

$\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2=i$ ومنه $\left|\left(\dfrac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2\right|=|i|$ ومنه $\left(\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|}\right)^2=1$ وتكافئ $\dfrac{|z-z_A|}{|z-z_B|}=1$ أي $|z-z_A|=|z-z_B|$

ومنه صورة العدد المركب z تنتمي (Δ) (محور الفواصل) وهذا يعني أنّ الحلين حقيقيين.

<u>حل التمرين 17:</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2z+4=0$

$\Delta'=1-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=1-i\sqrt{3}$

2) نسمي A ، B النقطتان التي لاحقتاهما $z_A=1+i\sqrt{3}$ و $z_B=1-i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ ـ تعيين الطويلة وعمدة لكل من العددين z_A و z_B.

$|z_A|=\sqrt{1+3}=2$ ، $\arg(z_A)=\theta$ بحيث $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_A)=\dfrac{\pi}{3}$ إذن $z_A=\left[2;\dfrac{\pi}{3}\right]$

$z_B=\left[2;-\dfrac{\pi}{3}\right]$

ب الشكل الأسي للعدد z_A . الشكل الأسي للعدد z_A هو $z_A=|z_A|e^{i\theta}$

وعليه $z_A=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3) نسمي R التحويل النقطي في المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z'

حيث: $z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

أ ـ طبيعة التحويل R ، و تعيين عناصره المميزة.

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه M_0 ذات اللاحقة z_0 وزاويته θ هي $z'-z_0=e^{i\theta}(z-z_0)$

وعليه R دوران مركزه O وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$.

ب ـ نسمي C صورة النقطة A بالتحويل R ،

الشكل الأسي للعدد المركب z_C لاحقة النقطة C.

$z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A$ ومنه $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\frac{\pi}{3}}=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}$ وعليه $z_C=e^{i\pi}$

الشكل الجبري للعدد z_C .

$z_C=e^{i\pi}=-1$

جـ - اثبات أنّ النقطة B هي صورة النقطة C بالتحويل R.

$z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_C=-e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\left(-1+i\sqrt{3}\right)=z_B$ ومنه B هي صورة النقطة C بالتحويل R.

طبيعة المثلث ABC.

لدينا $\begin{cases}R(A)=C\\R(C)=B\end{cases}$ ينتج _ حسب خاصية الدوران _ أنّ $AC=CB$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C.

طريقة ثانية: لدينا $z_B=\overline{z_A}$ ومنه النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل بالتالي محور القطعة $[AB]$ هو محور الفواصل وبما أنّ z_C عدد حقيقي فإن C تنتمي لمحور الفواصل أي تنتمي لمحور القطعة $[AB]$ ومنه $CA=CB$ وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C.

<u>حل التمرين 18:</u>

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$

أ) التحقق أنّ العدد i جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$$P(i)=i^3-(4+i)i^2+(13+4i)i-13i$$
$$=-i+4+i+13i-4-13i=0$$

ب) تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-i)(z^2+\alpha z+\beta)$.

$$(z-i)(z^2+\alpha z+\beta)=z^3+(\alpha-i)z^2+(\beta-i\alpha)z-i\beta$$

بالمطابقة مع $z^3-(4+i)z^2+(13+4i)z-13i$ نجد $\begin{cases}\alpha-i=-4-i\\\beta-i\alpha=13+4i\\-i\beta=-13i\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}\alpha=-4\\\beta=13\end{cases}$.

إذن $P(z)=(z-i)(z^2-4z+13)$

ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

$P(z)=0$ يكافئ $z=i$ أو $z^2-4z+13=0......(1)$

نحل المعادلة (1).

$\Delta'=4-13=-9=(3i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=2+3i$ و $z_2=2-3i$.

و بالتالي حلول المعادلة $P(z)=0$ هي $\{i;2+3i;2-3i\}$

2) نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C لواحقها على الترتيب:

$z_A=i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=2-3i$ على الترتيب.

ليكن الدوران r الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

- تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران r.

الكتابة المركبة للدوران r هي $z'-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-z_B)$.

$r(A)=A'$ معناه $z_{A'}-z_B=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_B)$ ومنه $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_B)+z_B$

وتكافئ $z_{A'}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}(-2-2i)+2+3i$ أي $z_{A'}=-2\sqrt{2}i+2+3i$ بالتالي $z_{A'}=2+i\left(3-2\sqrt{2}\right)$

- إثبات أنّ النقط A' ، B و C في استقامية.

$$\frac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-2\sqrt{2}i+2+3i-2-3i}{2-3i-2-3i}=\frac{-2\sqrt{2}i}{-6i}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

بما أنّ $\frac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}$ عدد حقيقي فإنّ النقط A' ، B و C في استقامية.

تعيين الكتابة المركبة للتحاكي h الذي مركزه B والذي يحول النقطة C إلى A'.

لدينا $\frac{z_{A'}-z_B}{z_C-z_B}=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ومنه $z_{A'}-z_B=\frac{\sqrt{2}}{3}(z_C-z_B)$

إذن الكتابة المركبة للتحاكي h هي $z'-z_B=\frac{\sqrt{2}}{3}(z-z_B)$ أي $z'=\frac{\sqrt{2}}{3}(z-z_B)+z_B$

<u>حل التمرين 19:</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+13=0$

نحسب المميز المختصر $\Delta'=9-13=-4=(2i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=3+2i$ و $z_2=3-2i$.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$.

أ - إثبات أنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع.

لدينا $z_B-z_C=3+2i-4i=3-2i$ ومنه $z_B-z_C=z_A$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}$

بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع.

ب - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.

لدينا Ω منتصف $[AC]$ ومنه $z_\Omega=\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{3-2i+4i}{2}=\frac{3}{2}+i$.

3) تعيين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$.

لدينا $4\overrightarrow{M\Omega}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تعني $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ أي $M\Omega=3$.

إذن (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 3 .

4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB)؛ نــرمز بــ β إلى ترتيب النقطة M .

نضع N صورة M بالدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - تبيين أنّ لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2}-\beta+\frac{5}{2}i$

المستقيم (AB) معادلته $x=3$ ومنه احداثيات النقطة M هي $(3;\beta)$

بالتالي لاحقة النقطة M هي $z_M=3+i\beta$

$z_N - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega)$ ومنه $z_N = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_\Omega) + z_\Omega = i\left(\frac{3}{2} + i(\beta - 1)\right) + \frac{3}{2} + i$

$= \frac{3}{2}i - \beta + 1 + \frac{3}{2} + i$

وعليه $z_N = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

ب ـ كيف يجب أن نختار β حتى تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC).

N تنتمي إلى المستقيم (BC) معناه الشعاعان $\overrightarrow{CN}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا

لدينا $z_N - z_C = \frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i - 4i = \frac{5}{2} - \beta - \frac{3}{2}i$ ومنه $\overrightarrow{BN}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \beta \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

و $z_C - z_B = 4i - 3 - 2i = -3 + 2i$ ومنه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

إذن $\dfrac{\frac{5}{2} - \beta}{-3} = \dfrac{\frac{-3}{2}}{2}$ ومنه $5 - 2\beta = \frac{9}{2}$ يكافئ $10 - 4\beta = 9$ أي $\beta = \frac{1}{4}$.

طريقة ثانية:

لدينا معادلة المستقيم (BC) هي $2x + 3y - 12 = 0$

N تنتمي إلى المستقيم (BC) معناه $2x_N + 3y_N - 12 = 0$ وتكافئ $2\left(\frac{5}{2} - \beta\right) + 3\left(\frac{5}{2}\right) - 12 = 0$

أي $5 - 2\beta + \frac{15}{2} - 12 = 0$ وتكافئ $10 - 4\beta + 15 - 24 = 0$ ومنه $\beta = \frac{1}{4}$.

<u>حل التمرين 20:</u>

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ تعطى النقط A، B و C و D التي لواحقها على الترتيب:

$z_A = 1 + i$ ، $z_B = -3 + 3i$ ، $z_C = -1 - 3i$ و $z_D = -2$.

1) حساب كلا من: $|z_D - z_A|$ ، $|z_D - z_B|$ و $|z_D - z_C|$

$|z_D - z_A| = |-2 - 1 - i| = |-3 - i| = \sqrt{10}$ ، $|z_D - z_B| = |-2 + 3 - 3i| = |1 - 3i| = \sqrt{10}$

$|z_D - z_C| = |-2 + 1 + 3i| = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$

استنتاج أنّ النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

لدينا $|z_D - z_A| = |z_D - z_B| = |z_D - z_C| = \sqrt{10}$ وهذا يعني أنّ $DA = DB = DC = \sqrt{10}$ و بالتالي النقط

A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $\sqrt{10}$.

2) نضع: $L = \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$.

حساب طويلة وعمدة العدد L ، واستنتاج نوع المثلث ABC.

$z_C - z_A = -1 - 3i - 1 - i = -2 - 4i$ ، $z_B - z_A = -3 + 3i - 1 - i = -4 + 2i$

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2-4i}{-4+2i}=\frac{i\left(2i-4\right)}{-+2i}=i$$

$|L|=|i|=1$ و $\arg(L)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $AC=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$

إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A.

3) نسمي (δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+3-3i|=|z+1+3i|$.

أ ـ التحقق أنّ $A\in(\delta)$ و $D\in(\delta)$.

$A\in(\delta)$ إذا كان $|z_A+3-3i|=|z_A+1+3i|$

لدينا $|z_A+1+3i|=|1+i+1+3i|=|2+4i|=\sqrt{20}$ و $|z_A+3-3i|=|1+i+3-3i|=|4-2i|=\sqrt{20}$

ومنه $|z_A+3-3i|=|z_A+1+3i|$ وهذا يعني أنّ $A\in(\delta)$.

$|z_D+1+3i|=|-2+1+3i|=|-1+3i|=\sqrt{10}$ و $|z_D+3-3i|=|-2+3-3i|=|1-3i|=\sqrt{10}$

ومنه $|z_D+3-3i|=|z_D+1+3i|$ وهذا يعني أنّ $D\in(\delta)$.

ب ـ تعيين طبيعة المجموعة (δ).

$|z+3-3i|=|z+1+3i|$ تعني $|z-z_B|=|z-z_C|$ أي $BM=CM$ بالتالي (δ) هي محور القطعة $[BC]$.

4) لتكن (E) المجموعة للنقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $z=z_A+z_Be^{\left(-\frac{3\pi}{4}+q\right)i}$ حيث q عدد حقيقي

أ ـ كتابة العدد z_B على الشكل الأسي.

$$z_B=-3+3i=3\left(-1+i\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب ـ تعيين طبيعة المجموعة (E) عندما يمسح q كل الأعداد الحقيقية

$z=z_A+z_Be^{\left(-\frac{3\pi}{4}+q\right)i}$ معناه $z-z_A=3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\times e^{\left(-\frac{3\pi}{4}+q\right)i}$ وتكافئ $z-z_A=3\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}+\left(-\frac{3\pi}{4}+q\right)i}$

أي $z-z_A=3\sqrt{2}e^{iq}$ وتكافئ $|z-z_A|=3\sqrt{2}$ بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها A ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

<u>حل التمرين 21:</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+13=0$

$\Delta'=4-13=-9=(3i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=2+3i$ و $z_2=2-3i$.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A، B و Ω التي لواحقها على الترتيب $z_A=3+2i$ ، $z_B=3-2i$ و $z_\Omega=2$

والشعاع $\vec{w}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{w}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

أ ـ تعليم النقط A، B و Ω.

ب ـ تعيين اللاحقة z_E للنقطة E صورة B بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{w}$.

العبارة المركبة للانسحاب هي $z'=z+z_{\vec{w}}$ ولدينا $z_{\vec{w}}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$

ومنه $z'=z+1+i$ إذن $z_E=z_B+1+i=3-2i+1+i$ أي $z_E=4-i$

ج ـ تعيين اللاحقة z_D للنقطة D صورة Ω بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

$z_D - z_A = 2(z_\Omega - z_A)$ معناه $z_D = 2z_\Omega - z_A$ تكافئ $z_D = 4-3-2i$ أي $z_D = 1-2i$

د ـ تعيين اللاحقة z_C للنقطة C صورة E بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

$z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_E - z_A)$ معناه $z_C = -i(z_E - z_A) + z_A$ تكافئ $z_C = -i(4-i-3-2i)+3+2i$

أي $z_C = i$.

3) أ ـ تبيين أنّ $ACDE$ متوازي أضلاع.

لدينا $z_C - z_A = i-3-2i = -3-i$ و $z_D - z_E = 1-2i-4+i = -3-i$

ومنه $z_C - z_A = z_D - z_E$ وهذا يعني أنّ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{ED}$ بالتالي $ACDE$ متوازي أضلاع.

ب ـ كتابة العدد المركب $L = \frac{z_A - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري و الأسي.

$$\frac{z_A - z_E}{z_D - z_E} = \frac{-1+3i}{-3-i} = \frac{(-1+3i)(-3+i)}{(-3-i)(-3+i)} = \frac{-10i}{10} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ج ـ استنتاج طبيعة المثلث EAD .

لدينا $\frac{z_A - z_E}{z_D - z_E} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left|\frac{z_A - z_E}{z_D - z_E}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_A - z_E}{z_D - z_E}\right) = -\frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أنّ $EA = ED$ و $(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EA}) = -\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث EAD متساوي الساقين وقائم في E .

د ـ طبيعة الرباعي $ACDE$.

بما أنّ $ACDE$ متوازي أضلاع والمثلث EAD قائم و متساوي الساقين فإنّ $ACDE$ مربع.

هـ ـ استنتاج أنّ النقط A ، C ، D و E تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

النقط A ، C ، D و E هي رؤوس مربع فهي تنتمي إلى الدائرة (γ) التي مركزها Ω منتصف $[AD]$ ونصف قطرها ΩA .

$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |3+2i-2| = |1+2i| = \sqrt{5}$ ، نصف قطر الدائرة (γ) هو $\sqrt{5}$.

<u>حل التمرين 22:</u>

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (1) ذات المجهول z التالية:

$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0 .....(1)$ حيث α وسيط حقيقي.

$$\Delta = [-4(\cos\alpha)]^2 - 16 = 16\cos^2\alpha - 16 = 16(\cos^2\alpha - 1)$$

ولدينا $\cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$ ومنه $\Delta = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$

للمعادلة حلان هما $z_1 = \frac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha$

و $z_2 = \frac{4\cos\alpha - 4i\sin\alpha}{2} = 2\cos\alpha - 2i\sin\alpha$.

2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$، نرمز إلى حلي المعادلة (1) بـ z_1 و z_2 .

تبيين أنّ : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

لدينا $z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_2=\overline{z_1}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013}=e^{i(1342\pi)}$ وعليه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C

التي لاحقاتها: $z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ ـ إنشاء النقط A ، B **و** C .

ب ـ كتابة على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{4+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}=\frac{3}{-2i\sqrt{3}}=\frac{3i}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

استنتاج أن C **هي صورة** B **بالتشابه المباشر الذي مركزه** A **ويطلب تعيين نسبته وزاويته.**

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $z_C-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$ وعليه C هي صورة B بالتشابه

المباشر الذي مركزه A ونسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

جـ ـ تعيين لاحقة النقطة G **مرجح الجملة :** $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$.

$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{1-1+2}$ ومنه $z_G=\frac{1+i\sqrt{3}-\left(1-i\sqrt{3}\right)+2\left(4+i\sqrt{3}\right)}{2}$ بالتالي $z_G=4+2i\sqrt{3}$.

د ـ حساب z_D **لاحقة النقطة** D**، بحيث يكون الرباعي** $ABDG$ **متوازي أضلاع.**

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AB}$ أي $z_D-z_G=z_B-z_A$

ومنه $z_D=z_B-z_A+z_G=1-i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}+4+2i\sqrt{3}$ وبالتالي $z_D=4$.

<u>حل التمرين 23:</u>

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2-2z+2=0$

$\Delta=4-8=-4=(2i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{2+2i}{2}=1+i$ و $z_2=\frac{2-2i}{2}=1-i$

2- لتكن النقط K ، L ، M لواحقها $z_K=1+i$ ، $z_L=1-i$ ، $z_M=-i\sqrt{3}$

ـ تعليم النقط .

3- أ) نسمي N نظيرة M بالنسبة إلى L،

تعيين z_N **لاحقة** N .

$\overrightarrow{LN}=-\overrightarrow{LM}$ معناه $z_N-z_L=-(z_M-z_L)$ ومنه $z_N=-(z_M-z_L)+z_L$

أي $z_N=-\left(-i\sqrt{3}-1+i\right)+1-i$ بالتالي $z_N=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)$

ب) ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول M إلى A ويحول N إلى النقطة C

ـ تعيين z_A و z_C لاحقتي النقطتين A و C على الترتيب.

الكتابة المركبة للدوران r هي : $z'=e^{i\frac{\pi}{2}}z$ أي $z'=iz$.

$r(M)=A$ معناه $z_A=iz_M=i\left(-i\sqrt{3}\right)$ ومنه $z_A=\sqrt{3}$.

$r(N)=C$ معناه $z_C=iz_N=i\left(2+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right)$ ومنه $z_C=2-\sqrt{3}+2i$.

ـ تعيين لاحقة صورة النقطة L بالدوران r .

$z'=iz_L=i\left(1-i\right)$ ومنه $z'=1+i=z_K$ وعليه $r(L)=K$.

4- ليكن t الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $2i$ ويحول M إلى النقطة D و N إلى النقطة B .

ـ تعيين z_D و z_B لاحقتي النقطتين D و B على الترتيب.

العبارة المركبة للانسحاب هي : $z'=z+z_{\vec{u}}$ أي $z'=z+2i$

$t(M)=D$ معناه $z_D=z_M+2i$ ومنه $z_D=-i\sqrt{3}+2i=i\left(2-\sqrt{3}\right)$.

$t(N)=B$ معناه $z_B=z_N+2i$ ومنه $z_B=2+i\left(\sqrt{3}-2\right)+2i$ أي $z_B=2+i\sqrt{3}$.

ـ تعيين لاحقة صورة النقطة L بالانسحاب t .

$z'=z_L+2i=1-i+2i$ ومنه $z'=1+i=z_K$ وعليه $t(L)=K$.

5- أ) تبيين أنّ: $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$.

$z_A-z_B=\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}$

$i\left(z_C-z_B\right)=i\left(2-\sqrt{3}+2i-2-i\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-2-i\sqrt{3}$

ومنه $z_A-z_B=i\left(z_C-z_B\right)$ أي $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$.

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=i$ ومنه $\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$.

وهذا يعني أنّ $BA=BC$ و $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في B .

ب) طبيعة الرباعي $ABCD$.

لدينا L منتصف $[MN]$ ولدينا $\begin{cases} r(M)=A \\ r(N)=C \\ r(L)=K \end{cases}$ وبما أنّ الدوران يحافظ على المنتصف فإنّ K منتصف $[AC]$

ولدينا $\begin{cases} t(M)=D \\ t(N)=B \\ t(L)=K \end{cases}$ وبما أنّ الانسحاب يحافظ على المنتصف فإنّ K منتصف $[BD]$.

ومنه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع (قطراه متناصفان)

وزيادة على ذلك لدينا $BA = BC$ و $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{2}$ إذن $ABCD$ مربع.

حل التمرين 24:

الجزء الأول :

1- **حل جملة المعادلتين التالية:**

$$\begin{cases}\sqrt{3}z_1 - z_2 = -2.......(1)\\ z_1 - \sqrt{3}z_2 = -2i.....(2)\end{cases}$$

من (1) نجد $z_2=\sqrt{3}z_1+2$ بالتعويض في (2) نجد $z_1-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}z_1+2\right)=-2i$ ومنه $z_1=-\sqrt{3}+i$.

بتعويض قيمة z_1 نجد $z_2=\sqrt{3}\left(-\sqrt{3}+i\right)+2=-1+i\sqrt{3}$.

2- المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=-\sqrt{3}+i$ و $z_B=-1+i\sqrt{3}$.

- كتابة z_A و z_B على الشكل الأسّي.

$z_A=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ بالتالي $z_A=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z_B=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ بالتالي $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3- **حساب الطويلة وعمدة لـ $\frac{z_A}{z_B}$.**

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{|z_A|}{|z_B|}=1$ ، $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\arg(z_A)-\arg(z_B)$ وعليه $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

- استنتاج طبيعة المثلث ABO وقيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=1$ وهذا يعني أنّ $OA=OB$ إذن المثلث ABO متساوي الساقين.

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ إذن $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

4- **تعيين لاحقة صورة النقطة C بحيث يكون $ACBO$ معينا.**

حتى يكون $ACBO$ معينا يكفي أن يكون متوازي أضلاع لأنّ $OA=OB$.

$ACBO$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$ أي $z_C-z_B=z_A$ ومنه $z_C=z_A+z_B=-1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+1\right)$.

الجزء الثاني :

ليكن f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث: $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$.

1- **تعريف التحويل f واعطاء عناصره المميزة.**

التحويل f عبارته المركبة من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $b=0$.

بما أنّ $|a|=1$ فإنّ f دوران مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{6}$.

2- لواحق A'، B' و C' **صور** A، B و C **بالتحويل** f **؟**

$f(A)=A'$ معناه $z_{A'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_A$ ومنه $z_{A'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 2e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$f(B)=B'$ معناه $z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B$ ومنه $z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}\times 2e^{i\frac{2\pi}{3}}=2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$f(C)=C'$ معناه $z_{C'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_C$ ومنه $z_{C'}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(-1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+1\right)\right)=1-i\left(2+\sqrt{3}\right)$

3- مساحة المثلث $A'B'C'$

بما أنّ المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالدوران f فإنّ مساحة المثلث $A'B'C'$ تساوي مساحة المثلث ABC لأن الدوران تقايس ويحافظ على المساحة.

<u>حل التمرين 25:</u>

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^3-3z^2+3z-9=0$.

1.أ ـ التحقق أنّ 3 **حل للمعادلة** (E)،

$3^3-3\times3^2+3\times3-9=27-27+9-9=0$ ومنه 3 حل للمعادلة (E)،

تعيين العددين الحقيقيين a **و** b **بحيث من أجل كل عدد مركب** z **فإنّ:**

$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)\left(z^2+az+b\right)$.

$(z-3)\left(z^2+az+b\right)=z^3+(a-3)z^2+(b-3a)z-3b$

بالمطابقة مع z^3-3z^2+3z-9 نجد $\begin{cases}a-3=-3\\ b-3a=3\\ -3b=-9\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=0\\ b=3\end{cases}$

إذن $z^3-3z^2+3z-9=(z-3)\left(z^2+3\right)$.

ب ـ حل في $\mathbb{C}$ **المعادلة** (E).

(E) تكافئ $z=3$ أو $z^2=-3$ أي $z=3$ أو $z=i\sqrt{3}$ أو $z=-i\sqrt{3}$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

النقط A، B و C صور الأعداد المركبة $z_A=3$ ، $z_B=i\sqrt{3}$ و $z_C=-i\sqrt{3}$.

ـ إثبات أنّ المثلث ABC **متقايس الأضلاع.**

$$\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}=\frac{3+i\sqrt{3}}{2i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+i}{2i}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

وهذا يعني أنّ $CA=CB$ ومنه المثلث ABC متساوي الساقين وبما أنّ $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{3}$ فهو متقايس الأضلاع.

يمكن حساب الأطوال AB، AC و BC.

3. D النقطة التي لاحقتها $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ـ تعيين z_E لاحقة النقطة E .

$z_E = e^{i\frac{\pi}{3}} z_D$ ومنه $z_E = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ومنه $z_E = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$

4. F النقطة التي لاحقتها $z_F = 1 - i\sqrt{3}$.

أ ـ حساب $\frac{z_F}{z_E}$ **.**

$$\frac{z_F}{z_E} = \frac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i} = \frac{-i^2 - i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-i} = \frac{i\left(-i-\sqrt{3}\right)}{-\sqrt{3}-i} = i$$

استنتاج أنّ المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.

لدينا $\frac{z_F}{z_E} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه المستقيمان (OE) و (OF) متعامدان.

ب ـ تعيين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا

لدينا $\frac{z_F}{z_E} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ إذن $OF = OE$ و $\left(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}\right) = \frac{\pi}{2}$

$OEGF$ مربع معناه $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OE}$ أي $z_G - z_F = z_E$ ومنه $z_G = z_E + z_F$

أي $z_G = -\sqrt{3} - i + 1 - i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} - i\left(1+\sqrt{3}\right)$

<u>حل التمرين 26:</u>

1. $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ ـ التحقّق أنّ 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

$P(6) = 6^3 - 12\times 6^2 + 48\times 6 - 72 = 216 - 432 + 288 - 72 = 0$ ومنه 6 جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب ـ ايجاد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-6)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right)$.

$$(z-6)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right) = z^3 + (\alpha - 6)z^2 + (\beta - 6\alpha)z - 6\beta$$

وبالمطابقة مع $z^3 - 12z^2 + 24z - 72$ نجد $\alpha - 6 = -12$ و $-6\beta = -72$ ومنه $\alpha = -6$ و $\beta = 12$

إذن $P(z) = (z-6)\left(z^2 - 6z + 12\right)$

جـ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة $P(z) = 0$.

$P(z) = 0$ يكافئ $z = 6$ أو $z^2 - 6z + 12 = 0 .....(1)$

نحل المعادلة (1).

$\Delta = 36 - 48 = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1 = \frac{6+2i\sqrt{3}}{2} = 3 + i\sqrt{3}$

و $z_1 = \frac{6-2i\sqrt{3}}{2} = 3 - i\sqrt{3}$ بالتالي حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $\left\{6;3+i\sqrt{3};3-i\sqrt{3}\right\}$.

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب: $z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$.

أ ـ كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

$z_A=6e^{i0}$

$|z_B|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ومنه $z_B=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

بالتالي $z_B=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_C=\overline{z_B}=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب ـ كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{6-3-i\sqrt{3}}{6-3+i\sqrt{3}}=\frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}}=\frac{\left(3-i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{6-6i\sqrt{3}}{12}$$

$$=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

كتابة العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الأسّي

$$\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=1 \text{ ، } \arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)=\arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$$

بالتالي $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

جـ ـ استنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $\left|\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}\right)=-\frac{\pi}{3}$ وهذا يعني أنّ $BA=CA$ و $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)=-\frac{\pi}{3}$

إذن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ ـ ايجاد الكتابة المركبة للتشابه S .

الكتابة المركبة للتشابه S هي $z'-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z-z_C\right)$ أي $z'=i\sqrt{3}\left(z-z_C\right)+z_C$

ومنه $z'=i\sqrt{3}z-4i\sqrt{3}$.

ب ـ تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

$S\left(A\right)=A'$ يكافئ $z_{A'}=i\sqrt{3}z_A-4i\sqrt{3}$ ومنه $z_{A'}=6i\sqrt{3}-4i\sqrt{3}=2i\sqrt{3}$

جـ ـ تبيين أنّ النقط A ، B و A' في استقامية.

$\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2i\sqrt{3}-6}{3+i\sqrt{3}-6}=\frac{2\left(-3+i\sqrt{3}\right)}{-3+i\sqrt{3}}=2$ بما أنّ $\frac{z_{A'}-z_A}{z_B-z_A}$ هو عدد حقيقي فإنّ A ، B و A' في استقامية.

حل التمرين 27:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$.

$\Delta=\left(6\sqrt{2}\right)^2-144=-72=\left(6i\sqrt{2}\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\dfrac{6\sqrt{2}+6i\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}i$ ، $z_2=3\sqrt{2}-3\sqrt{2}i$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لتكن النقط A، B ، C و D التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\dfrac{z_C}{2}$.

أ) كتابة z_A ، z_B **و** $(1+i)z_A$ **على الشكل الأسي.**

$$z_A=3\sqrt{2}(1+i)=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=6e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_B=\overline{z_A}=6e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$(1+i)z_A=6\sqrt{2}i=6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب) **حساب** $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

$$\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(\frac{6\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2014}=e^{i1007\pi}=e^{i\pi}=-1.$$

جـ) تعيين قيّم العدد الطبيعي n **التي من أجلها يكون** $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{n}$ **حقيقيا سالبا.**

لدينا $\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{n}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n}=e^{i\frac{n\pi}{2}}$.

$\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{n}$ حقيقي سالب معناه $\arg\left(\dfrac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{n}=(1+2k)\pi$ ومنه $\dfrac{n\pi}{2}=(1+2k)\pi$

بالتالي $n=2+4k$ حيث k عدد طبيعي.

د) تبيين أنّ النقط O ، A، B **و** C **تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها** D ، **يطلب تعيين نصف قطرها.**

$DO=\left|z_O-z_D\right|=\left|-3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$.

$$DA=\left|z_A-z_D\right|=\left|3i\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$$

$$DB=\left|z_B-z_D\right|=\left|-3i\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$$

$$DC=\left|z_C-z_D\right|=\left|3\sqrt{2}\right|=3\sqrt{2}$$

ومنه $DO=DA=DB=DC=3\sqrt{2}$ بالتالي النقط O ، A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $3\sqrt{2}$.

هـ) حساب $\frac{z_A}{z_B}$ ، ثمّ إيجاد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})$.

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{3\sqrt{2}(1+i)}{3\sqrt{2}(1-i)}=\frac{(1+i)}{(1-i)}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{2}$.

تعيين طبيعة الرباعي $OACB$.

$\frac{z_C-z_B}{z_A}=\frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}}=1$ ومنه $z_C-z_B=z_A$ و هذا يعني أنّ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}$

زيادة على ذلك لدينا $\frac{z_A}{z_B}=i$ وهذا يعني أنّ $OA=OB$ و $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA})=\frac{\pi}{2}$ إذن $OACB$ مربع.

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A .

أ) كتابة العبارة المركبة للدوران R وتحديد زاويته.

العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z'-z_O=\alpha(z-z_O)$ أي $z'=\alpha z$.

وبما أنّ $R(B)=A$ فإنّ $z_A=\alpha z_B$ ومنه $\alpha=\frac{z_A}{z_B}=i$

إذن العبارة المركبة للدوران R هي $z'=iz$.

زاوية الدوران R هي $\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}$.

ب) تعيين لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R .

$R(C)=C'$ معناه $z_{C'}=iz_C$ ومنه $z_{C'}=6i\sqrt{2}$.

التحقق أنّ النقط C ، A و C' على استقامية.

تكون النقط C ، A و C' على استقامية إذا كان $\frac{z_{C'}-z_C}{z_A-z_C}$ عدد حقيقي.

لدينا $\frac{z_{C'}-z_C}{z_A-z_C}=\frac{6i\sqrt{2}-6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}-6\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}(-1+i)}{3\sqrt{2}(-1+i)}=2\in\mathbb{R}$ ومنه النقط C ، A و C' على استقامية.

جـ) تعيين لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R .

$R(A)=A'$ معناه $z_{A'}=iz_A$ ومنه $z_{A'}=i\left(3\sqrt{2}(1+i)\right)$ أي $z_{A'}=-3\sqrt{2}+3i\sqrt{2}$.

تحديد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

بما أنّ $R(O)=O$ و $R(A)=A'$ و $R(C)=C'$ و $R(B)=A$ فإنّ صورة الرباعي $OACB$ هو الرباعي $OA'C'A$.

<u>حل التمرين 28:</u>

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، النقط A، B ، C لاحقتاها على الترتيب:

$z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=3-i\sqrt{3}$ و $z_C=2+4i\sqrt{3}$.

1) حساب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_B - z_A|$ واستنتاج طبيعة المثلث OAB.

$|z_A| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ، $|z_B| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ، $|z_B - z_A| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

ومنه $OA = OB = AB = 2\sqrt{3}$ بالتالي المثلث OAB متقايس الأضلاع.

2) نسمي G مركز ثقل المثلث OAB.

حساب z_G لاحقة النقطة G.

$z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B}{3} = \dfrac{3 - i\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3}}{3}$ وعليه $z_G = 2$.

3) S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C ويحول O إلى G.

أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه المباشر S ، و تعيين العناصر المميزة له.

لدينا $\begin{cases} S(A) = C \\ S(O) = G \end{cases}$ يكافـــئ $\begin{cases} z_C = az_A + b ....(1) \\ z_G = az_O + b ....(2) \end{cases}$ من (2) نجد $b = z_G = 2$.

بالتعويض عن b في (1) نجد $z_C = az_A + 2$ ومنه $a = \dfrac{z_C - 2}{z_A} = \dfrac{4i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \dfrac{(4i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = 1 + i\sqrt{3}$

وعليه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' = (1 + i\sqrt{3})z + 2$.

ب) تعيين $z_{B'}$ لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالتشابه S.

$S(B) = B'$ معناه $z_{B'} = (1 + i\sqrt{3})z_B + 2$ تكافئ $z_{B'} = (1 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3}) + 2$ ومنه $z_{B'} = 8 + 2i\sqrt{3}$

جـ) استنتاج صورة المثلث OAB بالتشابه S.

بما أنّ $S(O) = G$ و $S(A) = C$ و $S(B) = B'$ فإنّ صورة المثلث OAB بالتشابه S هو المثلث GCB'.

4) نسمي (C) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|-z|^2 + |z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 24$

أ) إثبات أنّ (C) هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB.

الدائرة المحيطة بالمثلث OAB مركزها G ونصف قطرها $OG = |z_G| = 2$ لنثبت أنّ (C) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 2.

$|-z|^2 + |z_A - z|^2 + |z_B - z|^2 = 24$ تكافئ $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$

<u>طريقة 1:</u>

نضع $M(x;y)$

$MO = \sqrt{x^2 + y^2}$ ومنه $MO^2 = x^2 + y^2$

$MA = \sqrt{(3-x)^2 + (\sqrt{3} - y)^2}$ ومنه $MA^2 = (3-x)^2 + (\sqrt{3} - y)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$

$MB = \sqrt{(3-x)^2 + (-\sqrt{3} - y)^2}$ ومنه $MB^2 = (3-x)^2 + (-\sqrt{3} - y)^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$

$MO^2 + MA^2 + MB^2 = x^2 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3$

أي $MO^2 + MA^2 + MB^2 = 3x^2 + 3y^2 - 12x + 24$

$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 24$ تكافئ $3x^2 + 3y^2 - 12x + 24 = 24$ وتكافئ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

أي $(x-2)^2+y^2-4=0$ ومنه $(x-2)^2+y^2=4$

إذن (C) هي الدائرة التي مركزها $G(2;0)$ ونصف قطرها 2 أي هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB.

طريقة 2:

$MO^2+MA^2+MB^2=24$ معناه $\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GO}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=24$

و تكافئ $MG^2+GO^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GO}+MG^2+GA^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+MG^2+GB^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}=24$

وتكافئ $3MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}\right)+GO^2+GA^2+GB^2=24......(1)$

$GO^2=|-z_G|^2=|-2|^2=4$ ، $GA^2=|z_A-z_G|^2=|1+i\sqrt{3}|^2=4$ ، $GB^2=|z_B-z_G|^2=|1-i\sqrt{3}|^2=4$

(1) تكافئ $3MG^2+4+4+4=24$ وتكافئ $MG^2=4$ أي $MG=2$.

إذن (C) هي الدائرة التي مركزها $G(2;0)$ ونصف قطرها 2 أي هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB.

ب) تعيين صورة الدائرة (C) بالتشابه S.

صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي الدائرة (C') المحيطة بالمثلث GCB' مركزها G' صورة G بالتشابه S ونصف قطرها 2×2.

تعيين G'.

$S(G)=G'$ معناه $z_{G'}=\left(1+i\sqrt{3}\right)z_G+2$ ومنه $z_{G'}=4+2i\sqrt{3}$.

إذن صورة الدائرة (C) بالتشابه S هي الدائرة التي مركزها $G'\left(4;2\sqrt{3}\right)$ ونصف قطرها 4.

ملاحظة: G' هي مركز ثقل المثلث GCB' لأنّ التشابه المباشر يحفظ المرجح.

ويمكن تعيين G' بطريقة أخرى: $z_{G'}=\dfrac{z_G+z_C+z_{B'}}{3}=\dfrac{2+2+4i\sqrt{3}+8+2i\sqrt{3}}{3}=4+2i\sqrt{3}$

حل التمرين 29:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2-4z+8=0$،

$\Delta'=4-8=-4=(2i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=2-2i$ ، $z_2=2+2i$.

كتابة الحلين على الشكل الأسي.

$z_1=2-2i=2\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$z_2=\overline{z_1}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، لتكن النقط A، B، C لاحقتاها على الترتيب:

$z_A=2-2i$ و $z_B=-z_A$ ، $z_C=-3-3i$.

أ) حساب $\left(\dfrac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2012}$.

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2012}=\left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}}\right)^{2012}=e^{-i\left(\frac{2012\pi}{4}\right)}=e^{-i503\pi}=e^{-i\pi}=-1.$$

ب) تعيين مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{4}}$.

$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقي معناه $\arg\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^n = k\pi$ يكافئ $\frac{-n\pi}{4} = k\pi$ ومنه $n = -4k$ أي $n = 4k'$ و k' عدد طبيعي.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ويحول B إلى C.

أ) إيجاد الكتابة المركبة للتشابه S.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z' = az + b$ بما أنّ S نسبته $\frac{3}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ فإنّ $a = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}i$

ومنه $z' = \frac{3}{2}iz + b$ وبما أنّ $S(B) = C$ فإنّ $z_C = \frac{3}{2}iz_B + b$

ومنه $b = z_C - \frac{3}{2}iz_B = -3 - 3i + 3i + 3$ أي $b = 0$

وعليه الكتابة المركبة للتشابه S هي $z' = \frac{3}{2}iz$.

تعيين مركزه.

بما أنّ $b = 0$ فإنّ مركز التشابه S هو O.

ب) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتشابه S.

$S(A) = D$ معناه $z_D = \frac{3}{2}iz_A$ ومنه $z_D = \frac{3}{2}i(2-2i)$ أي $z_D = 3+3i$.

ج) تعيين طبيعة الرباعي $ACBD$.

لدينا $z_B = -z_A$ ومنه $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ وهذا يعني أنّ O هي منتصف $[AB]$ و $z_D = 3+3i = -z_C$ ومنه $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC}$ وهذا يعني أنّ O هي منتصف $[CD]$.

ولدينا $S(B) = C$ ومنه $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OC}\right) = \frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$ بالتالي $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ لأن النقط O، A و B في استقامية وكذلك النقط O، C و D إذن الرباعي $ACBD$ قطراه $[AB]$ و $[CD]$ متناصفان ومتعامدان نستنتج أنّ $ACBD$ معين

د) تعيين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;-1),(C;2),(D;-1)\}$.

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C - z_D}{1-1+2-1} = -5-13i$$.

4) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$.

G مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;-1),(C;2),(D;-1)\}$ إذن من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا:

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = (1-1+2-1)\overrightarrow{MG}$ ومنه $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG}$

ولدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA}$

$\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=0$ تكافئ $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BA}=0$ بالتالي (E) هي المستقيم المار من G و $\overrightarrow{BA}$ شعاع ناظمي له.

حل التمرين 30:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$

$(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$ يكافئ $z^2=-4$ أو $z^2-6z+10=0$

حل المعادلة $z^2=-4$.

$z^2=-4$ تكافئ $z^2=(2i)^2$ ومنه $z=2i$ أو $z=-2i$.

حل المعادلة $z^2-6z+10=0$.

$\Delta'=9-10=-1=i^2$ للمعادلة حلان هما $z=3+i$ أو $z=3-i$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $(z^2+4)(z^2-6z+10)=0$ هي: $\{2i;-2i;3+i;3-i\}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: A، B، C، D و E التي لواحقها على الترتيب: $z_A=2i$ ، $z_B=-2i$ ، $z_C=3-i$ ، $z_D=3+i$ و $z_E=2-2i$.

نضع $L=\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$

أ ـ حساب طويلة العدد المركب L وعمدة له.

$$L=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}=\frac{3-i-2i}{3+i+2i}=\frac{3-3i}{3+3i}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

ومنه $|L|=|-i|=1$ و $\arg(L)=\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$

تفسير النتائج هندسيا.

$|L|=1$ معناه $\dfrac{AC}{BD}=1$ ومعناه $AC=BD$

$\arg(L)=-\dfrac{\pi}{2}$ معناه $\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AC}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$.

ب ـ استنتاج أنّه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C يطلب إيجاد زاويته.

$$\begin{cases} z_A=az_B+b.....(1) \\ z_C=az_D+b.....(2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نجد $z_C-z_A=a(z_D-z_B)$ ومنه $a=\dfrac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=-i$

بما أنّه يوجد عدد مركب وحيد a غير معدوم و $|a|=|-i|=1$ فإنه يوجد دوران وحيد r يحول B إلى A ويحول D إلى C زاويته $\arg(a)=-\dfrac{\pi}{2}$.

3) نسمي (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق: $\arg(iz+1-3i)=-\dfrac{\pi}{4}$.

أ ـ إثبات أن B تنتمي إلى (Γ_1).

B تنتمي إلى (Γ_1) اذا كان $\arg(iz_B+1-3i)=-\frac{\pi}{4}$.

لدينا $iz_B+1-3i=i(-2i)+1-3i=3-3i=3(1-i)$ ومنه $\arg(iz_B+1-3i)=\arg(3(1-i))=-\frac{\pi}{4}$

وهذا يعني أنّ B تنتمي إلى (Γ_1).

تعيين المجموعة (Γ_1).

$\arg(iz+1-3i)=-\frac{\pi}{4}$ معناه $\arg(i(z-i-3))=-\frac{\pi}{4}$ ومعناه $\arg(i)+\arg(z-i-3)=-\frac{\pi}{4}$

وتكافئ $\frac{\pi}{2}+\arg(z-(i+3))=-\frac{\pi}{4}$ و تكافئ $\arg(z-(i+3))=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}$ أي $\arg(z-z_D)=-\frac{3\pi}{4}$

بالتالي (Γ_1) هي نصف مستقيم مبدؤه D وبما أنّ B تنتمي لـ (Γ_1) فإن (Γ_1) هي نصف المستقيم $[DB)$ باستثناء النقطة D.

ب ـ نسمي (Γ_2) صورة المجموعة (Γ_1) بالدوران r.

تعيين المجموعة (Γ_2).

بما أنّ $\begin{cases} r(B)=A \\ r(D)=C \end{cases}$ فإنّ (Γ_2) صورة (Γ_1) هو نصف المستقيم $[CA)$ باستثناء النقطة C.

4) بكل نقطة M من المستوي المركب ذات اللاحقة z نرفق بالدوران r النقطة M' ذات اللاحقة z'.

أ ـ كتابة العبارة المركبة للدوران r.

العبارة المركبة للدوران r من الشكل $z'=-iz+b$ و بما أنّ $r(B)=A$ فإنّ $z_A=-iz_B+b$

ومنه $b=z_A+iz_B$ أي $b=2+2i$ وعليه العبارة المركبة للدوران r هي $z'=-iz+2+2i$

تعيين سابقة O بالدوران r.

$z_O=-iz+2+2i$ تكافئ $-iz+2+2i=0$ ومنه $z=\frac{2+2i}{i}=2-2i=z_E$

إذن سابقة O بالدوران r هي E أي $r(E)=O$.

ب ـ تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $|-iz+2+2i|=|z_A|$.

$|-iz+2+2i|=|z_A|$ تكافئ $|z'|=2$ تكافئ $OM'=2$ ، حيث z' لاحقة النقطة M' صورة النقطة M بالدوران r.

ولدينا $r(E)=O$ إذن $OM'=EM$ ومنه $EM=2$ بالتالي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|-iz+2+2i|=|z_A|$

هي الدائرة ذات المركز E ونصف القطر 2.

5) التفسيرا هندسيا لعمدة العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$.

$$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right)=\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{BM}\right)$$

استنتاج مجموعة النقط M بحيث يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقيا سالبا.

يكون العدد $\frac{z-z_B}{z-z_D}$ حقيقيا سالبا إذا كان $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right)=\pi$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_D}\right)=\pi$ تكافئ $\left(\overrightarrow{DM};\overrightarrow{BM}\right)=\pi$ ومنه مجموعة النقط M المطلوبة هي القطعة المستقيمة $[DB]$ باستثناء النقطتين D و B.

حل التمرين 31:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $z^2+z+1=0$.

$\Delta=1-4=-3=3i^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ و $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ لتكن النقط: A ، B ، C، D و F

التي لواحقها على الترتيب: $z_A=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-2$ ، $z_D=-2+2\sqrt{3}i$ و $z_F=\overline{z_D}$.

أ ـ كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي، و علم النقط A، B ، C، D و F.

$|z_A|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ ، $\arg(z_A)=\theta$ بحيث $\begin{cases}\cos\theta=-\frac{1}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ومنه $\arg(z_A)=\frac{2\pi}{3}$

وعليه $z_A=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، $z_B=\overline{z_A}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

ب ـ طبيعة المثلث ABC.

$$AB=|z_B-z_A|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$$

$$AC=|z_C-z_A|=\left|-2+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}$$

$$BC=|z_C-z_B|=\left|-2+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}$$

ومنه $AB=AC=BC$ بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) ليكن الدوران R الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث: $z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$.

أ ـ تعيين مركز وزاوية الدوران R .

العبارة المركبة للدوران الذي مركزه M_0 ذات اللاحقة z_0 وزاويته θ هي $z'-z_0=e^{i\theta}(z-z_0)$

لدينا $z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$ تكافئ $z'-z_C=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_C)$ ومنه مركز الدوران R هو النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ب ـ لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R .

إثبات أنّ لاحقة النقطة E هي $z_E=1+\sqrt{3}i$.

لدينا $z_E+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(z_D+2\right)$ معناه $z_E=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(2\sqrt{3}i\right)-2$ وتكافئ $z_E=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2\sqrt{3}i\right)-2$

وعليه $z_E=1+\sqrt{3}i$.

جـ ـ كتابة العدد $\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}=\frac{-2-2\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}i}{-2+2\sqrt{3}i-1-\sqrt{3}}=\frac{-3-3\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i}=\sqrt{3}i\ .$$

استنتاج أنّ المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان.

لدينا $\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}=\sqrt{3}i$ ومنه $\arg\left(\frac{z_F-z_E}{z_D-z_E}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{ED};\overrightarrow{EF}\right)=\frac{\pi}{2}$ أي $\overrightarrow{ED}\perp\overrightarrow{EF}$

ومنه المستقيمان (ED) و (EF) متعامدان.

4) لكل عدد مركب يختلف z عن z_E، نرفق العدد المركب z' حيث: $z'=\frac{z-z_C}{z-z_E}$.

ـ لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا.

تعيين المجموعة (Γ_1).

M تنتمي لـ(Γ_1) معناه $z'=0$ أي $z=z_C$ أو $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $z\neq z_E$

ولدينا $\arg(z')=\arg\left(\frac{z-z_C}{z-z_E}\right)=\left(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MC}\right)$.

وعليه M تنتمي لـ(Γ_1) معناه $M=C$ أو $\left(\overrightarrow{ME};\overrightarrow{MC}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ و $M\neq E$.

بالتالي (Γ_1) هي الدائرة التي قطرها $[EC]$ باستثناء النقطة E.

5) لتكن G مرجح الجملة $\left\{\left(A;|z_A|\right),\left(B;|z_B|\right),\left(C;|z_C|\right)\right\}$.

أ ـ تعيين z_G لاحقة النقطة G.

لدينا $|z_A|=1$ ، $|z_B|=1$ ، $|z_C|=2$ ومنه G مرجح الجملة $\left\{(A;1),(B;1),(C;2)\right\}$

$$z_G=\frac{z_A+z_B+2z_C}{3}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-4}{3}=\frac{-5}{3}$$

ب ـ (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

ـ التحقق أنّ C تنتمي إلى (Γ_2).

$\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{CC}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{CC}\right\|$ ومنه $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$ (محققة) ومنه C تنتمي إلى (Γ_2).

تعيين طبيعة (Γ_2).

من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$

و $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$ تعني $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|$ أي $MG=\frac{\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|}{4}$.

ولدينا $\left\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right\|=|z_A-z_C+z_B-z_C|=|3|=3$ ومنه $MG=\frac{3}{4}$.

بالتالي (Γ_2) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{4}$.

حل التمرين 32:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+10=0$.

$\Delta=4-40=-36=(6i)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{2+6i}{2}=1+3i$ ، $z_2=\frac{2-6i}{2}=1-3i$.

2. نعتبر في المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب:

$z_A=2+i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=1-3i$.

أ ـ كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ على الشكل الأسّي.

$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\frac{-3+i-1-3i}{2+i-1-3i}=\frac{-4-2i}{1-2i}=\frac{(-4-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-10i}{5}=-2i=2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC .

$\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC قائم في B .

ب ـ كتابة العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول A إلى C وتحديد نسبته و زاويته.

العبارة المركبة للتشابه S من الشكل $z'-z_B=a(z-z_B)$ وبما أنّ $S(A)=C$ فإنّ $z_C-z_B=a(z_A-z_B)$

ومنه $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-2i$ وعليه العبارة المركبة للتشابه S هي $z'-z_B=-2i(z-z_B)$ أي $z'=-2iz-5+5i$

جـ ـ تعيين z_E لاحقة النقطة E ؛ علما أنّ D هي صورة E بالتشابه S .

$S(E)=D$ معناه $z_D=-2iz_E-5+5i$ ومعناه $1-3i=-2iz_E-5+5i$ ومنه $z_E=\frac{6-8i}{-2i}=\frac{3-4i}{-i}$

أي $z_E=-4+3i$.

3. لتكن F صورة B بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $-\frac{1}{2}$.

أ ـ ـ تبيين أنّ F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.

لدينا $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ معناه $\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=0$ تكافئ $\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}\right)=\vec{0}$ تكافئ $\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{0}$

تكافئ $-\frac{3}{2}\overrightarrow{FA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FB}=\vec{0}$ تكافئ $-3\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$ نستنتج أن F هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بـ: -3 و 1 على الترتيب.

ب ـ تعيين z_F لاحقة النقطة F.

$z_F = \frac{-3z_A + z_B}{-2} = \frac{-6-3i+1+3i}{-2} = -\frac{5}{2}$.

حل التمرين 33:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$.

1) إثبات أنّ العدد -1 حلا لهذه المعادلة.

$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7 = -1 - 3 - 1 + 7 = 0$ ومنه العدد -1 حل لهذه المعادلة.

إيجاد الحلين الآخرين.

بما أنّ -1 حل للمعادلة فإنّ $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عددان حقيقيان.

$(z+1)(z^2+az+b) = z^3 + (a+1)z^2 + (a+b)z + b$ بالمطابقة نجد $a+1=-3$ و $a+b=3$ و $b=7$

أي $a=-4$ و $b=7$ ومنه $z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = (z+1)(z^2-4z+7)$.

$z^3 - 3z^2 + 3z + 7 = 0$ معناه $(z+1)(z^2-4z+7)$ أي $z=-1$ أو $z^2 - 4z + 7 = 0.....(1)$

نحل المعادلة (1).

$\Delta = 16 - 28 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$ للمعادلة حلان هما $z = 2 + \sqrt{3}i$ أو $z = 2 - \sqrt{3}i$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ لتكن النقط: A ، B ، C ، G لواحقها على الترتيب: z_1 ، z_2 ، z_3 و z_4 حيث $z_1 = -1$ ، $z_2 = 2+\sqrt{3}i$ ، $z_3 = 2-\sqrt{3}i$ و $z_4 = 3$.

ـ كتابة العدد $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \frac{-1-2+\sqrt{3}i}{3-2+\sqrt{3}i} = \frac{-3+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(-3+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{4\sqrt{3}i}{4} = \sqrt{3}i$$

ومنه $\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

استنتاج طبيعة المثلث ACG.

لدينا $\arg\left(\frac{z_1 - z_3}{z_4 - z_3}\right) = \frac{\pi}{2}$ ومنه $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ACG قائم في C.

3) نسمي (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG} = 12..........(1)$.

أ ـ إثبات أنّ G هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

$\frac{-z_1 + 2z_2 + 2z_3}{3} = \frac{1+4+2\sqrt{3}i+4-2\sqrt{3}i}{3} = 3 = z_4$ ومنه G هي مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$.

ب ـ إثبات أنّ المساواة (1) يمكن كتابتها على الشكل $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG} = -4........(2)$.

G مرجح الجملة: $\{(A;-1);(B;2),(C;2)\}$ إذن من أجل نقطة M من المستوي لدينا

$-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (-1+2+2)\overrightarrow{MG}$ أي $-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

المساواة (1) تكافئ $3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=12$ ومنه $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=4$ أي $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$.

جـ ـ التأكد أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (γ).

A تنتمي إلى المجموعة (γ) إذا كان $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4$.

لدينا $A(-1;0)$ ، $C\left(2;-\sqrt{3}\right)$ ، $G(3;0)$ ، $\overrightarrow{GA}(-4;0)$ ، $\overrightarrow{CG}\left(1;\sqrt{3}\right)$.

$\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4(1)+0\left(\sqrt{3}\right)=-4$ و هذا يعني أنّ A تنتمي إلى المجموعة (γ).

د ـ تبيين أنّه يمكن كتابة المساواة (2) على الشكل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$.

$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ معناه $\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AM}\right)\overrightarrow{CG}=-4$ ومعناه $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=-4$

ولدينا $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4$ ومنه $-4+\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=-4$ أي $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$.

استنتاج طبيعة (γ).

$\left(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CG}=12$ تكافئ $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4$ وتكافئ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$

بالتالي (γ) هي المستقيم المار من A و $\overrightarrow{CG}$ شعاع ناظمي له.

<u>حل التمرين 34:</u>

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

$(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$ يكافئ $z=i$ أو $z^2-2\sqrt{3}z+4=0.....(1)$.

نحل المعادلة (1).

$\Delta'=3-4=-1=i^2$ للمعادلة حلان هما $z=\sqrt{3}+i$ أو $z=\sqrt{3}-i$.

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نسمي A ، B و C نقط المستوي التي لاحقاتها على الترتيب $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ) كتابة العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{3}}\ .$$

ب) استنتاج قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)$ وطبيعة المثلث OAB .

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\pi}{3}$ ومنه $\left(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{3}$ ولدينا $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=1$ ومنه $OA=OB$ إذن المثلث OAB متقايس الأضلاع.

جـ) تعيين مجموعة قيّم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا موجبا.

لدينا $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقي موجب معناه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = 2k\pi$ ومنه $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi$ وعليه $n = 6k$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

د) هل توجد قيّم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟

$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيلي صرف معناه $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{\pi}{2} + k\pi$ وتكافئ $\frac{n\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ومنه $\frac{n}{3} = \frac{1}{2} + k$

أي $n = \frac{3}{2} + 3k$ وتكافئ $2n = 3 + 6k....(1)$ والمعادلة (1) لا تقبل حلولا في $\mathbb{N}$ لأن $2n$ زوجي و $3+6k$ فردي

ومنه لا يوجد عدد طبيعي n بحيث يكون العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا.

3) أ) تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C، محددا نسبته وزاويته.

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل $z' - z_1 = \alpha(z - z_1)$ وبما أن S يحول B إلى C فإنّ

$z_3 - z_1 = \alpha(z_2 - z_1)$ ومنه $\alpha = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{i - \sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3}}{-2i} = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$

ومنه العبارة المركبة للتشابه المباشر S هي $z' - z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}(z - z_1)$ أي $z' = -\frac{\sqrt{3}}{2}iz + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$.

نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{3}}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

ب) استنتاج طبيعة المثلث ABC

بما أنّ $S(B) = C$ فإنّ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث ABC قائم في A.

يمكن استنتاج طبيعة المثلث ABC بطريقة أخرى

لدينا $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ ومنه $\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = -\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC قائم في A.

4) أ) تعيين العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق:

$$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$$

$|z - z_1|^2 + |z - z_3|^2 = 5$ تكافئ $AM^2 + CM^2 = 5$

<u>طريقة 1:</u>

نضع $M(x;y)$

$AM = \sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y-1)^2}$ ومنه $AM^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y-1)^2$

$BM = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$ ومنه $CM^2 = x^2 + (y-1)^2$

ومنه $AM^2 + CM^2 = \left(x - \sqrt{3}\right)^2 + x^2 + 2(y-1)^2 = 2x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 + 2(y-1)^2$

$AM^2+CM^2=5$ معناه $2x^2-2\sqrt{3}x+3+2(y-1)^2=5$ ومعناه $x^2-\sqrt{3}x+(y-1)^2=1$

وتكافئ $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{3}{4}+(y-1)^2=1$ أي $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{7}{4}$.

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{4}}$.

طريقة 2:

لتكن I **منتصف** $[AC]$ ومنه $z_I=\frac{z_1+z_3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i$.

$AM^2+CM^2=5$ معناه $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM}\right)^2+\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IM}\right)^2=5$

وتكافئ $AI^2+IM^2+2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM}+CI^2+IM^2+2\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{IM}=5$

تكافئ $2IM^2-2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)+AI^2+CI^2=5$

ولدينا $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ ومنه $2\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}\right)=0$ لأن I منتصف $[AC]$ ومنه $2IM^2+AI^2+CI^2=5.......(1)$

$AI^2=|z_I-z_A|^2=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\frac{3}{4}$ ، $CI^2=|z_I-z_C|^2=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\frac{3}{4}$.

(1) تكافئ $2IM^2+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=5$ أي $IM^2=\frac{7}{4}$ ومنه $IM=\sqrt{\frac{7}{4}}$

بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها $I\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{4}}$.

ب) تعيين (E') **مجموعة النقط** M **من المستوي التي لاحقتها** z **حيث:** $|z-z_1|=|z-z_3|$.

$|z-z_1|=|z-z_2|$ تكافئ $AM=CM$ إذن (E') هي محور القطعة $[AC]$.

حل التمرين 35:

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$**، المعادلة ذات المجهول** z **، التالية :** $z^2+z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=3i^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$ للمعادلة حلان هما $z_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ و $z_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و M ذات اللاحقات:

$z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A).

أ ـ كتابة z_A **على الشكل الأسّي .**

$$z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

ب ـ تعيين مجموعة النقط M **من المستوي، حيث:** $\arg\left[\left(z-z_A\right)^2\right]=\arg\left(z_A\right)-\arg\left(z_B\right)$.

$\arg\left[\left(z-z_A\right)^2\right]=\arg\left(z_A\right)-\arg\left(z_B\right)$ معناه $2\arg\left(z-z_A\right)=\arg\left(z_A\right)+\arg\left(z_A\right)$ ومعناه

$2\arg(z-z_A)=2\arg(z_A)$ ومنه $\arg(z-z_A)=\arg(z_A)+k\pi$ إذن مجموعة النقط M هي المستقيم (OA) باستثناء النقطة A.

3. أ ـ التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A.z+z_B\sqrt{3}$

ـ تعيين طبيعة التحويل r وعناصره المميزة.

العبارة المركبة للتحويل r من الشكل $z'=az+b$ حيث $a=z_A$ و $b=\sqrt{3}z_B$.

$|a|=|z_A|=1$ و $\arg(a)=\arg(z_A)=\frac{3\pi}{4}$ ومنه r دوران زاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة

$$z_\Omega=\frac{\sqrt{3}z_B}{1-z_A}=\frac{\frac{-\sqrt{3}+3i}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\sqrt{3}+3i}{3+i\sqrt{3}}=\frac{i\left(3+i\sqrt{3}\right)}{3+i\sqrt{3}}=i$$

ب ـ التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$

ـ تعيين نسبة ومركز التحاكي h.

نسبة التحاكي هي -2 ومركزه النقطة الصامدة ذات اللاحقة $z_\Omega=i=\frac{3i}{3i}=\frac{3i}{1-(-2)}$ أي مركز التحاكي h هو Ω.

جـ ـ نضع : $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

ـ تعيين طبيعة التحويل S ، وعناصره المميزة.

يمكن اعتبار h تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته π ومركزه Ω

و r تشابه مباشر نسبته 1 وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه Ω إذن S هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين أي نسبته 2

وزاويته $\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{3\pi}{4}+\pi$ أي زاويته $\frac{\pi}{3}$ و مركزه Ω.

التحقّق أنّ عبارته المركّبة هي: $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

العبارة المركبة للتشابه S هي : $z'-z_\Omega=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_\Omega)$ أي $z'-i=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)$ ومنه $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C ، D و E ؛ حيث: $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

ـ إثبات أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

لدينا $S(D)=E$ ومنه $S[S(C)]=E$ أي $S\circ S(C)=E$ يكافئ $S\circ S[S(O)]=E$ يكافئ $S\circ S\circ S(O)=E$

نستنتج أنّ E هي صورة O بالتحويل $S\circ S\circ S$ ولدينا $S\circ S\circ S$ تشابه مباشر زاويته $3\times\frac{\pi}{3}$ أي زاويته π

ومركزه Ω ومنه $(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega E})=\pi$ وهذا يعني أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

<u>طريقة 2:</u>

لدينا $S(O)=C$ معناه $(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega C})=\frac{\pi}{3}$

$S(C)=D$ معناه $(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D})=\frac{\pi}{3}$

$S(D)=E$ معناه $\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\frac{\pi}{3}$

بالجمع طرفا إلى طرف نجد $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega C}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$

ولدينا حسب علاقة شال $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega C}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega C};\overrightarrow{\Omega D}\right)+\left(\overrightarrow{\Omega D};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega E}\right)$ ومنه $\left(\overrightarrow{\Omega O};\overrightarrow{\Omega E}\right)=\pi$

وهذا يعني أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

5. أ ـ تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث: $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ حيث θ عدد حقيقي.

$z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $z-i=2e^{i\theta}$ وتكافئ $z-z_\Omega=2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z-z_\Omega|=2$ أي $\Omega M=2$

بالتالي (Γ) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 2 .

ب ـ تعيين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S .

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي، $M'(z')$ صورتها بالتشابه S إذن $\Omega M'=2\Omega M$

إذا كانت M نقطة من (Γ) فإنّ $\Omega M=2$ ولدينا $\Omega M'=2\Omega M$ ومنه $\Omega M'=2\times 2$ أي $\Omega M'=4$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

__طريقة 2:__

لدينا $z=2e^{i\theta}+i$ ومنه $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\left(2e^{i\theta}+i\right)-i\right)+i$ ومنه $z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(2e^{i\theta}\right)+i$ أي $z'-i=4e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$

إذن M' تنتمي للدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها 4 وعليه صورة الدائرة (Γ) بالتشابه S هي دائرة (Γ') مركزها Ω ونصف قطرها 4.

__حل التمرين 36:__

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $z^3+z^2+3z-5=0..........(1)$

نلاحظ أن مجموع المعاملات يساوي 0 ومنه العدد 1 هو حل ظاهري للمعادلة (1).

ومنه $z^3+z^2+3z-5=(z-1)(z^2+az+b)$ حيث a و b عددان حقيقيان

$z^3+z^2+3z-5=z^3+(a-1)z^2+(b-a)z-b$ بالمطابقة نجد $a=2$ و $b=5$

ومنه $z^3+z^2+3z-5=(z-1)(z^2+2z+5)$

(1) تكافئ $z=1$ أو $z^2+2z+5=0$

$\Delta=4-20=-16=(4i)^2$ للمعادلة حلان هما $z=-1-2i$ أو $z=-1+2i$.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي $\{1;-1-2i;-1+2i\}$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب $z_A=1$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=-1-2i$

كتابة العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC .

لدينا $z_C-z_A=-1-2i-1=-2-2i$ و $z_B-z_A=-1+2i-1=-2+2i$

ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-2-2i}{-2+2i}=\frac{1+i}{1-i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ وهذا يعني أنّ

$AC=AB$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A.

3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$

ولتكن (F) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ حيث λ عدد حقيقي.

أ ـ تحقق أن النقطة A تنتمي إلى كل من (E) و (F).

A تنتمي إلى (E) إذا وُجد عدد حقيقي θ بحيث $z_A=-1+2e^{i\theta}$

لدينا $z_A=-1+2=-1+2e^{i0}$ إذن من أجل $\theta=0$ نجد النقطة A من (E).

A تنتمي إلى (F) إذا وُجد عدد حقيقي λ بحيث $z_A=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$

لدينا $z_A=-1-2i+2+2i=-1+2i+2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن من أجل $\lambda=2\sqrt{2}$ نجد النقطة A من (F).

ب ـ كتابة معادلة ديكارتية لـ (E)

$z=-1+2e^{i\theta}$ معناه $z+1=2e^{i\theta}$ بوضع $z_I=-1$ ومنه $z-z_I=2e^{i\theta}$ وتكافئ $|z-z_I|=2$ أي $IM=2$

إذن (E) هي الدائرة التي مركزها $I(-1;0)$ ونصف قطرها 2 والمعادلة الديكارتية لـ(E) هي $(x+1)^2+y^2=4$

كتابة معادلة ديكارتية لـ (F)

$z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ معناه $z-z_C=\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن (F) هي المستقيم الذي يشمل C وميله $tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

إذن معادلة (F) من الشكل $y=x+b$ وبما أنّ $C\in(F)$ فإنّ $-2=-1+b$ ومنه $b=-1$

وعليه معادلة (F) هي $y=x-1$.

تعيين نقطتي تقاطعهما.

نحل الجملة $\begin{cases}y=x-1\\(x+1)^2+y^2=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-1\\(x+1)^2+(x-1)^2=4\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}y=x-1\\x^2=1\end{cases}$

ومنه $(x;y)\in\{(1;0);(-1;-2)\}$ إذن (E) و (F) يتقاطعان في النقطتين A و C.

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ ـ كتابة العبارة المركبة للتشابه S وتعيين نسبته وزاويته.

الكتابة المركبة للتشابه S من الشكل $z'-z_C=a(z-z_C)$ وبما أنّ $S(A)=B$ فإنّ $z_B-z_C=a(z_A-z_C)$

ومنه $a=\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{4i}{2+2i}=1+i$ وعليه الكتابة المركبة للتشابه S هي $z'-z_C=(1+i)(z-z_C)$

أي $z'=(1+i)z-2+i$.

$|a|=|1+i|=\sqrt{2}$ ومنه نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$

$\arg(a)=\arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ومنه زاوية التشابه S هي $\frac{\pi}{4}$.

ب ـ تعيين $\left(E'\right)$ و $\left(F'\right)$ صورتا $\left(E\right)$ و $\left(F\right)$ بالتشابه S.

نضع $I'=S\left(I\right)$ ومنه $z_{I'}=-3$ وبما أنّ نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$ فإنّ $\left(E'\right)$ هي الدائرة التي مركزها I' ونصف قطرها $2\sqrt{2}$

بما أنّ $S\left(A\right)=B$ و $S\left(C\right)=C$ فإنّ $\left(F'\right)$ هي المستقيم $\left(BC\right)$ لأنّ $\left(F\right)$ هي المستقيم $\left(AC\right)$.

جـ ـ استنتاج تقاطع $\left(E'\right)$ و $\left(F'\right)$

بما أنّ $\left(E\right)$ و $\left(F\right)$ يتقاطعان في النقطتين A و C فإنّ $\left(E'\right)$ **و** $\left(F'\right)$ يتقاطعان في النقطتين $S\left(A\right)$ و $S\left(C\right)$ أي في النقطتين B و C.