الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي — دورة : جوان 2013

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

<u>الموضوع الأول</u>

<u>التمرين الأول:</u> (06 نقاط)

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$،

النقط A، B، C و E التي لاحقاتها: $z_A = ae^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B = a\sqrt{2}$ ، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{4}}$ على الترتيب.

1. أ - اكتب على الشكل الأسي العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب - حدّد طبيعة الرباعي $OABC$، ثم استنتج مساحته.

2. التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$، يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$

أ- اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S، ثم تحقق أنّ $S(A) = E$.

ب - بيّن أنّ مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث $S(B) = F$ و $S(C) = G$.

3. أ– احسب بدلالة a و b العبارة: $|z_C|^2 + |z_E|^2 - 2|z_C \times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$.

ب– استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b .

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O، لاحقتها z_n .

نضع: $M_0 = A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين، من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $u_n = |z_n|$ و $v_n = \arg(z_n)$.

1. اكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي بدلالة a و b.

2. نفرض أنّ : $a < b$ و $\arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right) \in]-\pi;\pi]$.

بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يُطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

3. احسب، بدلالة a ، b و n المجموع T_n، حيث : $T_n = a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \dots + \frac{b^n}{a^{n-1}}$، ثم $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4. عيّن قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط O ، A و M_n في استقامية.

التمرين الثاني: (03 نقاط)

1. n عدد طبيعي. نعتبر العددين الصحيحين α و β حيث: $\alpha = 2n^3 - 14n + 2$ و $\beta = n + 3$.

أ - بيّن أنّ: $PGCD(\alpha;\beta) = PGCD(\beta;10)$. (يرمز $PGCD$ إلى القاسم المشترك الأكبر)

ب - ما هي القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha;\beta)$؟

جـ - عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n، بحيث يكون: $PGCD(\alpha;\beta) = 5$.

2. أ - ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 11.

ب - عيّن مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق الجملة التالية: $\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0[11] \\ n \equiv 2[10] \end{cases}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقط $A(0;0;1)$، $B(2;2;-1)$، $C(-2;-7;-7)$ و $D(-3;4;4)$

والمستوي $(\mathscr{P})$ المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = 1 + 3\alpha - \beta \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 4 - \alpha + \beta \end{cases}$؛ α و β وسيطان حقيقيان.

1. أ - بيّن أنّ النقط A، B و C تعيّن مستويا.

ب - تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(3;-2;1)$ ناظمي للمستوي (ABC)، ثم اكتب معادلة ديكارتية له.

2. أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{P})$، ثم بيّن أنّ المستويين (ABC) و $(\mathscr{P})$ متعامدان.

ب - بيّن أنّ تقاطع (ABC) و $(\mathscr{P})$ هو المستقيم (Δ) ذو التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 4t \;;\; t \in \mathbb{R} \\ z = -7 - 5t \end{cases}$

جـ - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، والمسافة بين النقطة D والمستوي $(\mathscr{P})$، ثم استنتج المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

3. $(\mathscr{Q})$ المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (ABC) و $(\mathscr{P})$.

أ - اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathscr{Q})$.

ب - بيّن أنّ المستويات الثلاثة (ABC)، $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{Q})$ تتقاطع في نقطة واحدة H، ثم عيّن إحداثيات H.

جـ - احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ).

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I- 1. الدالة u معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $u(x)=e^x-3x+4-e$.

أ - ادرس اتجاه تغير الدالة u .

ب - بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $e^x-e>3x-4$.

2. الدالة v معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$.

أ - بيّن أنّ: $v'(1)=0$. (يرمز v' إلى الدالة المشتقة للدالة v)

ب - أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $v(x)<0$.

جـ - استنتج، أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{-1+\ln x}{x^2}<3x-4$.

3. أثبت أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $e^x-e+\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^x-ex-\dfrac{\ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بيّن أنّ الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيّراتها.

3. احسب $f(1)$ ، ثم مثّل المنحنى (C_f) على المجال $\left]0;\dfrac{5}{2}\right]$.

(نأخذ: $f(2)\approx 2{,}3$ ، $f(1{,}64)\approx 1$ و $f\left(\dfrac{5}{2}\right)\approx 5{,}75$) .

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

1. أ - عيّن الأعداد الطبيعية n التي تحقق: $2n+27 \equiv 0[n+1]$.

ب - عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية، حيث: $(b-a)(a+b)=24$.

جـ - استنتج طريقة لرسم قطعة مستقيمة طولها $\sqrt{24}$.

2. α و β عددان طبيعيان مكتوبان في النظام ذي الأساس خمسة على الشكل $\alpha=\overline{10141}$ و $\beta=\overline{3403}$

أ - اكتب العددين α و β في النظام العشري.

ب - عيّن الثنائية $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية حيث: $\begin{cases} b^2-a^2=24 \\ \alpha a-\beta b=9 \end{cases}$.

3. أ - عيّن القاسم المشترك الأكبر للعددين 2013 و 1434، ثم استنتج القاسم المشترك الأكبر للعددين 671 و 478.

ب - حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ التالية: $2013x-1434y=27$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z، التالية: $z^2+z+1=0$.

2. نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقط A، B و M ذات اللاحقات:

$z_A=-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و z على الترتيب. (يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A)

أ - أكتب z_A على الشكل الأسي.

ب - عيّن مجموعة النقط M من المستوي، حيث: $\arg\left[(z-z_A)^2\right]=\arg(z_A)-\arg(z_B)$.

3. أ - التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=z_A z+z_B\sqrt{3}$.

- ما طبيعة التحويل r؟ عيّن عناصره المميزة.

ب - التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث: $z'=-2z+3i$.

- عيّن نسبة ومركز التحاكي h.

جـ - نضع: $S=h\circ r$. (يرمز $\circ$ إلى تركيب التحويلين r و h).

- عيّن طبيعة التحويل S، مبرزا عناصره المميزة، ثم تحقق أنّ عبارته المركبة هي: $z'=2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-i)+i$.

4. نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E؛ حيث: $S(O)=C$ ، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

- بيّن أنّ النقط O ، Ω و E في استقامية.

5. أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث : $z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$ مع $\theta\in\mathbb{R}$.

ب - عيّن (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، النقطتين $A(-1;0;2)$ و $B(1;1;1)$

والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=2-\alpha \\ y=2 \\ z=-1-\alpha \end{cases}$ حيث $(\alpha\in\mathbb{R})$.

1. أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB).

ب- بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

2. $(\mathcal{P})$ المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ).

أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي $(\mathcal{P})$.

ب- أثبت أنّ $x-y+z-1=0$، هي معادلة ديكارتية للمستوي $(\mathcal{P})$.

3. لتكن N نقطة من المستقيم (Δ) و M نقطة من الفضاء إحداثياتها $(1-2\beta;1+\beta;1-\beta)$ مع $(\beta\in\mathbb{R})$.

أ- بيّن أنّ النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB).

ب- جد إحداثيات النقطتين M و N حتى تكون M المسقط العمودي للنقطة N على المستوي $(\mathcal{P})$.

جـ- تحقق أنّ المسافة بين N و $(\mathcal{P})$ هي $\frac{2}{\sqrt{3}}$، ثم احسب مساحة المثلث ABN.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I- الدالة g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+(x^2-1)e^{-x}$.

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g، ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ: $g(1-\sqrt{2})\simeq-0,26$ و $g(1+\sqrt{2})\simeq1,43$)

2. أ- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$، ثم تحقق أنّ أحدهما معدوم والآخر α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x.

II- الدالة f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)^2e^{-x}$

$(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $2\,cm$)

1. أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$، مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$.

جـ- ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

2. أ- بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=g(x)$. (يرمز f' إلى الدالة المشتقة للدالة f)

ب- شكّل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$. (نأخذ: $f(\alpha)\simeq-0,9$)

3. أ- بيّن أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين، معامل توجيه كل منهما يساوي 1، يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

ب- مثّل (Δ) والمماسين والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

جـ - ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m، عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $(x+1)^2 - me^x = 0$.

4. الدالة H معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2-4x-5)e^{-x}$.

أ - بيّن أنّ H دالة أصلية للدالة: $x \mapsto (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب - احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

III- (u_n) المتتالية العددية المعرّفة بـ: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(نذكّر أنّ العدد α يحقق $g(\alpha)=0$)

1. برهن بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq \alpha$.

2. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة.

3. استنتج أنّ (u_n) متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.