الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي | دورة: 2017

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات | المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطتين $A(-1;1;-2)$ و $B(1;-3;-4)$ والمستقيم (Δ) ذا التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=t-2 \\ y=-t+2 \ ; \ t\in\mathbb{R} \\ z=2t-4 \end{cases}$

وليكن (Δ') المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}(-1;2;1)$ شعاع توجيه له .

1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2) ليكن (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (Δ) و (Δ') .

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .

3) نسمّي (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $AM^2+BM^2=20$.

بيّن أنّ (S) سطح كرة مركزها منتصف القطعة $[AB]$ ونصف قطرها 2 .

4) حدّد الوضع النسبي للمستوي (P) وسطح الكرة (S) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) نعتبر المعادلة : $104x-20y=272 \cdots\cdots (E)$ ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان .

أ) احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 20 و 104 ثم بيّن أنّ المعادلة (E) تقبل حلولا.

ب) بيّن أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 3[5]$ ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 4 ، ويكتب $\overline{1\alpha\beta01}$ في نظام التعداد الذي أساسه 6 حيث α و β عددان طبيعيان.

عيّن α و β ، ثم اكتب λ في النظام العشري .

3) تحقق أنّ كلا من 2017 و 1009 عدد أوّلي، ثم عيّن الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق:

$$2m-d=2017 \quad \text{حيث} \quad m=PPCM(a;b)\ ,\ d=PGCD(a;b)$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $(z-2+2i)(z^2-2\sqrt{2}z+8)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و C

التي لاحقاتها $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=2(1-i)$.

أ) اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (Ω) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^n$ تخيليا صرفا .

جـ) نسمّي (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z=z_C-k\left(\dfrac{z_A}{z_B}\right)$ ، مع k يمسح $\mathbb{R}_+$

تحقّق أنّ النقطة C تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن وأنشئ (Γ).

3) r الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $\dfrac{2\pi}{3}$ ، h التحاكي الذي مركزه النقطة O ونسبته -2 .

عيّن طبيعة التحويل $h\circ r$ وعناصره المميّزة ، ثم استنتج صورة الدائرة (Ω) بالتحويل $h\circ r$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$.

(C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1-أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحني (C_f) يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ : من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2) اكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 .

3) h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

4) ارسم المماس (T) والمنحني (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

5) نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $f(x)=m(x-2)$ ... (E)

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6) g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة g .

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأوّل $u_0=1$

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=7u_n+8$.

1) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_n=7^{n+1}-4$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=1+7+7^2+......+7^n$ و $S'_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$.

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n ثم جد علاقة بين S_n و S'_n .

ب) استنتج أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $18\times S'_n=7^{n+2}-24n-31$.

3) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 5 .

ب) عيّن قيم n الطبيعية حتى يكون S'_n قابلا للقسمة على 5 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، (P) مستو تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=-t-2\lambda+2 \\ y=3t+4\lambda-3 \\ z=3t+4\lambda-1 \end{cases}$

حيث t و λ عددان حقيقيان .

1) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

2) ليكن α عددا حقيقيا من المجال $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ ، ولتكن (E_α) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث

$$x^2+y^2+z^2-2x\cos\alpha-2y\sin\alpha-z-\frac{3}{4}=0 \ .$$

أ) بيّن أنّ: من اجل كل α من المجال السابق ، (E_α) هي سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها ω_α بدلالة α ونصف قطرها R .

ب) ادرس حسب قيم العدد الحقيقي α الوضع النسبي للمستوي (P) و سطح الكرة (E_α) .

3) في الحالة التي يكون فيها المستوي (P) مماسا لسطح الكرة (E_α)

عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطة ω_α والعمودي على المستوي (P)

واستنتج إحداثيات I نقطة تماس (E_α) مع المستوي (P) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I) اكتب العدد $\left(\dfrac{5}{2}+i\right)^2$ على الشكل الجبري ثم استنتج الجذرين التربيعيين للعدد المركب : $\dfrac{21}{4}+5i$

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A , B , C و I ذات اللواحق : $z_A=\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=-\dfrac{3}{2}i$ ، $z_C=-\overline{z}_A$ و $z_I=i$.

1) اكتب z_A و z_C على الشكل الجبري .

2) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي مستنتجا طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول A إلى I .

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S ثم عيّن نسبته وزاويته.

ب) نعرف من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ التحويل النقطي T_n كما يلي: $T_n = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{n \text{ مرة}}$

عيّن قيم n حتى يكون T_n تحاكيا ، عين عندئذ عناصره المميزة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g .

2) بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]1,76\,;1,77[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x-\ln x} \quad ; \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أثبت أن الدالة f مستمرة عند العدد 0 على اليمين ،

ثم احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

2) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$.

3) احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) لتكن الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = x - \ln x$

أ) بيّن أن: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما ، $h(x)>0$،

واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=1$.

ب) ارسم (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)

5) لتكن الدالة F المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

– بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \geq 1$ ، $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$.

– اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ثم استنتج حصرا له.

انتهى الموضوع الثاني