التصحيح المفصل لاختبار مادة الرياضيات بكالوريا 2016 شعبة الرياضيات

الموضوع الأول

$B(2;-1;1)$ و $C(-1;0;1)$ و $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ و $E(0;1;1)$ و $H\left(\frac{5}{4};\frac{7}{4};-\frac{1}{2}\right)$ و المستوي (P) تمثيله

$\begin{cases} x = 1+\alpha+ \\ y = 2-\alpha \\ z = -1+2\alpha - \end{cases}$ و α و β وسيطان حقيقيان

$\overrightarrow{AB}(1;-2;1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2;-1;1)$ شعاعان غير مرتبطان خطيا لأن $\frac{-1}{-2} \neq \frac{-2}{1}$ و منه النقط A و B و C تعيين

.

قق أن $\vec{n}(1;3;5)$ شعاع ناظيمي للمستوي (ABC) نحسب الجداءاتين السلميين $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 1-6+5 = 0$

$\vec{n}\,\overrightarrow{AC} = -2-3+5$ أي ان $\vec{n}$. عمودي على الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و منه محققة .

المعادلة الديكارتية للمستوي (P) لدينا $\begin{cases} x = 1+\alpha+\beta \\ y = 2-\alpha \\ z = -1+2\alpha-\beta \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x+z = 3\alpha \\ \alpha = 2-y \\ z = -1+2\alpha-\beta \end{cases}$ يكافئ $x+z=$

$3(2-$

$x+3y+z-$ هي المعادلة المطلوبة للمستوي (P) و منه شعاعه الناظيمي هو $\vec{v}(1;3;1)$

$\vec{n}(1;$ غير مرتبطان خطيا لأن $\frac{1}{5} \neq \frac{1}{1}$ و منه المستويان (ABC) و (P) غير متوازيان فهما متقاطعان .

(Δ) هو تقاطع (ABC) و (P) التحقق من انه يمر من $D\left(\frac{1}{2};2;-\frac{1}{2}\right)$ أي ان $\begin{cases} \frac{1}{2}+3(2)+\left(-\frac{1}{2}\right)-6=0 \\ \overrightarrow{AD}.\vec{n}=0 \end{cases}$ و منه

$\frac{1}{2}+3(2)+($ محققة أي ان $D \in (P)$. و لدينا الشعاع $\overrightarrow{AD}\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)$

و منه $\overrightarrow{AD}.\vec{n} = -\frac{1}{2}+3-\frac{5}{2} = 3-3 = 0$ محققة إذن $D \in (ABC)$ إذن D تنتمي الى (Δ) .

مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث $\vec{n}.\overrightarrow{DM}=0$. و $M \in (P)$ لدينا $\overrightarrow{DM}\left(x-\frac{1}{2};y-2;z+\frac{1}{2}\right)$

$x-\frac{1}{2}+3(y-2)+5\left(z+\right.$ أي ان $x+3y+5z-4=0$ و $M \in (P)$ يعني ان $x+3y+z-6=0$ و

التالية $\begin{cases} x+3y+z-6=0 \\ x+3y+5z-4=0 \end{cases}$ نضع $y=t$ نجد $\begin{cases} x+3t+z-6=0 \\ y=t \\ x+3t+5z-4=0 \end{cases}$ و هذا يكافئ

$\begin{cases} x+3t+ \\ y \\ 4z+2=0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x=-3t+\frac{13}{2} \\ y=t \\ z=-\frac{1}{2} \end{cases}$ و t وسيط حقيقي .

قط العمودي للنقطة A على (Δ) يعني ان $\begin{cases} H \in (\Delta) \\ \vec{v} \perp \overrightarrow{AH} \end{cases}$ حيث $\vec{v}$ شعاع توجيه (Δ) أي ان $\vec{v}(-3;1;0)$ و

$\overrightarrow{A}$ نحسب الجداء السلمي $\vec{v}.\overrightarrow{AH} = -\frac{3}{4}+\frac{3}{4} = 0$. و منه $\vec{v} \perp \overrightarrow{AH}$

ي للجملة حل وحيد t ... $\begin{cases}\frac{5}{4}=-3t+\frac{13}{2}\\ \frac{7}{4}=t\\ -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\end{cases}$ يكافئ $t=\frac{7}{4}$ و منه محققة إذن النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

A و (Δ) هي AH أي $d(A;(\Delta))=AH=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$.

ح الجملة $\{(A;2);(B;-3);(C;2)\}$

ين إحداثيات G : $\begin{cases}x_G=\frac{2(1)-3(2)+2(-1)}{1}=-6\\ y_G=\frac{2(1)-3(-1)+2(0)}{1}=5\\ z_G=\frac{2(0)-3(1)+2(1)}{1}=-1\end{cases}$ و منه $G(-6;5;-1)$

ية معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{GM}=11$ لدينا $\overrightarrow{EM}(x;y-$

$1;z-$ و

$\overrightarrow{GM}(x+6;y-5;z+$ و منه $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{GM}=11$ يكافئ $x(x+6)+(y-1)(y-5)+(z-1)(z+1)=$

أي ان $x^2+6x+y^2-6y+5+z^2-1=11$ و منه تصبح المعادلة هي $x^2+y^2+z^2+6x-6y-$

$7=$

هي تكافئ $x^2+6x+9+y^2-6y+9+5+z^2-25=0$ أي ان $(x+3)^2+(y-3)^2+z^2=25$ و

معادلة سطح كرة نصف قطره 5 و مركزها $\omega(-3;3;0)$.

يد الوضعية النسبية بين المستوي (ABC) و المجموعة (Γ) نحسب المسافة بين (ABC) و مركز سطح الكرة

$=\frac{|(3)+3(3)+5(0)-4=0|}{\sqrt{1+3^2+5^2}}=d\left(\omega;(ABC)\right)$ و هو أصغر من نصف قطر سطح الكرة (Γ) إذن المستوي (ABC) و

) متقاطعان وفق دائرة

المتتالية (u_n) هندسية حدودها موجبة

u_2 : لدينا $\begin{cases}ln(u_1)+ln(u_2)=11\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$ يكافئ لدينا $\begin{cases}u_1.u_2=e^{11}\\ u_1+u_2=e^4(1+e^3)\end{cases}$ و منه u_1 و u_2 هما حلي

$x^2-e^4(1+e^3)x+e^{11}=$

نحسب المميز $\Delta=e^8(1+e^3)^2-4e^{11}=e^8(1+e^6+2e^3)-4e^{11}=$

أي ان $\Delta=\ e^8(1+e^6+2e^3-4e^3)=e^8(1+e^6-2e^3)=[e^4(1-e^3)]^2$ للمعادلة حلين هما

$u_1=\frac{e^4(1+e^3)+e^4(1-e^3)}{2}=e^4$ و $u_2=\frac{e^4(1+e^3)-e^4(1-e^3)}{2}=e^7$

د العام $u_n=u_1.q^{n-1}=e^4.(e^3)^{n-1}=e^{3n+1}$.

ب)حساب S_n : $S_n=ln(u_0)+ln(u_1)+\cdots+ln(u_1)=ln[u_0\times u_1\times\ldots\times u_n]$

أي $S_n=ln[e^1\times e^4\times e^7\times\ldots\times e^{3n+1}]=lne^{1+4+7+\cdots(3n+1)}=1+4+7+\cdots.(3n$

$\frac{n+}{2}=S_n=\frac{n+1}{2}(1+3n+1)$ و مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها 3 و حدها الأول 1 .

$a_n = n$ و $2S_n = (n+1)(2+3n)$ أي أن $2S_n = 3n^2 + 5n + 2$ و منه بالقسمة الإقليدية نجد
$2S_n = (n+3)(3n-4) + 14$ أي ان $2S_n - a_n(3n-4) = 14$ و منه القاسم المشترك للعددين $2S_n$ و
a_n هو قاسم للعدد $2S_n - a_n(3n-4)$ أي قاسم للعدد 14 ..
و كذالك $2S_n = a_n(3n-4) + 14$ تعليان القاسم المشترك الأكبر للعددين 14 و a_n
قاسم للعدد $a_n(3n-4) + 14$ أي قاسم للعدد $2S_n$
و منه نجد ان $PGCD(2S_n; a_n) = PGCD(14; a_n)$.
ب)القيم الممكنة للعدد $PGCD(2S_n; a_n)$ هي قواسم 14 و هي 1 و 2 و 7 و 14 ..
ج) ليكن $PGCD(2S_n; a_n) = 7$ أي ان $a_n \equiv 0[7]$ أي $n + 3 \equiv 0[7]$ يكافئ $n \equiv 4[7]$
و منه $n = 7k + 4$ و k عدد طبيعي .

قسمة العدد 2^n على 7
$2^0 \equiv 1[7]$ و $2^1 \equiv 2[7]$ و $2^2 \equiv 4[7]$ و $2^3 \equiv 1[7]$ بالرفع الى قوى k نجد $2^{3k} \equiv 1[7]$

ي 2 نجد $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و بالضرب في 2 نجد $2^{3k+2} \equiv 1[7]$ و منه

لى 7 هو 1 لما $n = 3k$.   باقي قسمة 2^n على 7 هو 2 لما $n = 3k + 1$.

لى 7 هو 4 لما $n = 3k + 2$.

$b_n = 3n.a_n - 2S_n + 1437^{201}$ و $1437 \equiv 2[7]$ و $2016 = 3(672)$ و منه $1437^{2016} \equiv 1[7]$

$\begin{cases} b_n \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ أي ان $\begin{cases} 3n.a_n - 2S_n + 1437^{2016} + 1 \equiv 0[7] \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ و

$\begin{cases} 3n.a_n - a_n(3n-4) - 14 + \\ n \equiv 0[5] \end{cases}$ و منه نجد $4a_n - 12 \equiv 0[7]$

$4(a_n - 3)$ بما أن 7 و 4 أوليان فيما بينهما فإننا نستنتج ان $a_n - 3 \equiv 0[7]$ أي ان $n \equiv 0[7]$

و بما 5 و 7 أوليان فيما بينهما فإن $n \equiv 0[35]$ أي قيم المطلوبة هي مضاعفات 35 .

$1437^{9n+1} \equiv 2^{9n}$ و منه $1437^{9n+1} \equiv 2[7]$ لأن $9n + 1$ من الشكل $3k + 1$

$\equiv$ 4^{12n+1} و منه $4^{12n+1} \equiv 4[7]$ لأن $24n + 2$ من الشكل $3k + 2$ و $52 \equiv 3[7]$ إذن

$1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 2 -$ و منه $1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 7[7]$ و $7 \equiv 0[7]$ و منه

$1437^{9n+1} - 3 \times 4^{12n+1} + 52 \equiv 0[7]$ أي ان العدد مضاعف للعدد 7 .

ي $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 4z + 5 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعدلة حلين هما $z' = 2 + i$, $z'' = 2 - i$.
تاج حلول المعادلة $\left(z + +i(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4z + 1 - 4i(1-\sqrt{3}) = 0$
كافئ $\left(z + 1 + i(1-\sqrt{3})\right)^2 - 4\left(z + 1 - i(1-\sqrt{3})\right) + 5 = 0$ يكافئ ان $z + 1 + i(1-\sqrt{3}) = 2 - i$
$z + 1 + i(1-\sqrt{3}) = 2$ و منه $z = 1 - i(2-\sqrt{3})$ او $z = 1 + i\sqrt{3}$.

ة على الشكل الأسي $|1+i\sqrt{3}| = 2$ و $sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $cos\theta_1 = \frac{1}{2}$ و منه $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ و منه $1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$.

$z_0 = e^{i\theta}$ تعيين θ حيث أن حيث أن $\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{\overline{z_0}} = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ هذا يكافئ $2e^{\frac{\pi}{2}i} = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \times e^{2\theta i}$ أي ان $e^{\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)i} =$

نه $\frac{\pi}{2} = 2\theta + \frac{\pi}{3}$ و منه $\theta = \frac{\pi}{12}$.

بة على الشكل الأسي : $\left(\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right)^n = \left(e^{\frac{\pi}{12}i} . e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^n = e^{\frac{5\pi}{12}in}$.

$\left(\frac{z_0(1+i\sqrt{3})}{2}\right)^n$ عدد حقيقي موجب تماما يعني ان $\frac{5\pi}{12}n = 2\pi k$ و k عدد طبيعي أي ان $n = \frac{24}{5}k$ و k مضاعف للعدد

n و t عدد طبيعي .

ج الجملة $\{(A;1)(B;-1)(C;1)\}$ يعني ان $z_D = z_A - z_B + z_C = 5 + i\sqrt{3}$.

$z_D = z_A - z_B + z_C$ و منه $z_D - z_C = z_A - z_B$ و هذا يعني ان $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ و منه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

$\begin{cases} \arg(z_E - z_A) - \arg(z_E - z_B) = \frac{\pi}{2} \\ \left|\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B}\right| = 2 \end{cases}$ هذا يعني ان $\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$ أي ان $\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} = 2i$

$z_E - z_A = 2i($ و يكافئ $z_E(1-2i) = z_A - 2iz_B$

$= \frac{14+3i}{5} = \frac{(1+2i)(4-5i)}{5} = \frac{4-5i}{1-2i} = \frac{2-i-2i(2+i)}{1-2i} = \frac{z_A - 2iz_B}{1-2i} = z_E$.

$\frac{z_E - z_A}{z_E - z_B} =$ هذا يعني $z_E - z_A = 2i(z_E - z_B)$ أي ان $z_A - z_E = 2i(z_B - z_E)$ و هذا يعني ان النقطة A صورة B

زه E و نسبته 2 و زاويته $arg(2i) = \frac{\pi}{2}$.

$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

جموعة النقط $M(z)$ حيث $z - z_I = e^{i\alpha}$. يكافئ أن $|z - z_I| = 1$. و $z_E - z_I = \frac{14}{5} + \frac{3}{5}i - 2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

$= \sqrt{1}$ $\left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right|$ و منه $|z_E - z_I| = 1$ إذن E ينتمي الى (Γ) .

عة النقط (Γ) هي الدائرة ذات المركز I و نصف القطر 1 .

تجاه تغير الدالة g المشتقة $g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$ و هي موجبة على المجال $]0;+\infty[$. إذن الدالة g متزايدة

$]0;+$.

$g(0,52) = -0,037$ و $g(0,53) = 0,011143$ و بما ان الدالة متزايدة و مستمرة على المجال $]0,52;0,53[$ فحسب

لقيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,52;0,53[$

بق نستنتج إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$-$	0	$+$	

ـثاني : $f(x) = -x + \frac{3+2lnx}{x}$

ـب النهايات $\lim_{x \to 0^{>}} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3+2lnx}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to 0^{>}} \frac{3+2lnx}{x} = -\infty$$

ـدينا المشتقة $f'(x) = -1 + \frac{\frac{2}{x}x-3-2lnx}{x^2} = \frac{-1-x^2-2lnx}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$ إشارتها عكس إشارة $g(x)$.

ـجدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

ـالتحقق

لأن $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1 + \alpha^2 + 2ln(\alpha) = 0$ يكافئ $ln(\alpha) = -\frac{1+\alpha^2}{2}$

$$..f(\alpha) = -\alpha + \frac{3+2ln(\alpha)}{\alpha} = -\alpha + \frac{3+2\left(-\frac{1+\alpha^2}{2}\right)}{\alpha} = -\alpha + \frac{3-1-\alpha^2}{\alpha} = \frac{2-}{\alpha}$$

$f(\alpha) = \frac{2}{\alpha} - 2\alpha = 2\left(\frac{1}{\alpha} -\right.$ و المطلوب

ـنا $0,52 < \alpha < 0,53$ بالقلب نجد $\frac{1}{0,53} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,52}$ و $-0,53 < -\alpha < -0,52$ بالجمع

$\frac{1}{0,53} - 0,53 < \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) <$ بالضرب في 2 نجد $2\left(\frac{1}{0,53} - 0,53\right) < 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) < 2\left(\frac{1}{0,52} - 0,52\right)$ و منه

$2,713585 < f(\alpha$ ...

ـساب النهاية $\lim_{x \to +\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3+2lnx}{x}\right) = 0$

ـب التزايد المقارن .و هذا يعني ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = -x$.

ـدراسة وضعية (C_f) و (Δ) : ندرس إشارة $f(x) - y = \frac{3+2lnx}{x}$ و اشارتها من إشارة $3 + 2lnx$

$3 + 2lnx =$ يكافئ $lnx = -\frac{3}{2}$ يكافئ $x = e^{-\frac{3}{2}}$.

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	0	$+$	
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)		يقع (C_f) تحت (Δ)	(C_f) و (Δ) يتقاطعان	يقع (C_f) فوق (Δ)	

ـبين ان (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) أي ان معامل توجيه (T) هو -1 أي ان المعادلة $f'(x) = -1$ تقبل حلا

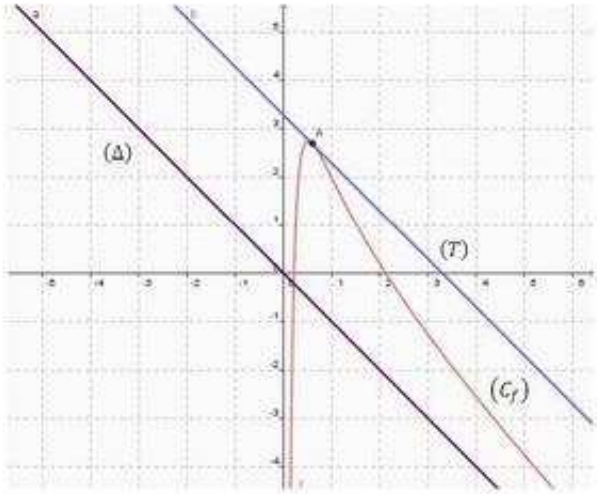
ان $\frac{-g(x)}{x^2} = -1$ أي $g(x) = x^2$ يكافئ $1 + x^2 + 2\ln x = x^2$ يكافئ $1 + 2\ln x = 0$ يكافئ $x = e^{-\frac{1}{2}}$.

ـه المماس (T) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $e^{-\frac{1}{2}}$ ، و لدينا $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = -e^{-\frac{1}{2}} + 2e^{\frac{1}{2}}$

ـدلته $y = -1\left(x - e^{-\frac{1}{2}}\right) + f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ أي $y = -x + 2e^{\frac{1}{2}}$.

ـ المنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيم المقارب (Δ) .

*********************** الأستاذ: جوالبل أحمد ****************************



نا $3 + 2lnx - mx = 0$ يكافئ $-x + \frac{3+2lnx}{x} = -x + m$ أي ان $f(x) = -x + m$ وحلها يعني ايجاد فواصل
ط تقاطع (C_f) و المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -x + m$.
اقشة

$]-\infty ; 0]$ $m \in$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه المعادلة تقبل حل وحيد .

$\left]0; 2e^{\frac{1}{2}}\right[$ $m \in$ فإن (C_f) و (Δ_m) يتقاطعان في نقطتين و منه المعادلة تقبل حلين

$m = 2e^{\frac{1}{2}}$ فإن (C_f) و (Δ_m) غير يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه المعادلة تقبل حل وحيد

$\left]2e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[$ $m \in$ فإن (C_f) و (Δ_m) لا يتقاطعان و منه المعادلة لا تقبل حلول .

جزء الثالث :

نا $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]\, dx$.

لدينا $f(x) + x = \frac{3+2lnx}{x}$ و هو عدد موجب على المجال $]1; +\infty[$ و منه فإن $f(x) + x$ موجبة على كل المجالات من الشكل $[e^n; e^{n+1}]$.

: $f(x) + x > 0$ بالمكاملة نجد $\int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]\, dx > 0$ أي ان $u_n > 0$.

$u_0 = \int_1^e [f(x) + x]\, dx$ و تفسيره هندسيا هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمان اللذان معادلتاهما $x = 1$ و $x = e$.

حساب $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]\, dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3+2lnx}{x}\right] dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3}{x} + 2\frac{lnx}{x}\right] dx = \left[3lnx + (lnx)^2\right]_{e^n}^{e^{n+1}}$

$u_n = 3(n+1) + (n+1)^2 - 3n - n^2 = 2n + 4$ و منه $u_n = 2n + 4$.

حساب S_n و هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية

و منه $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n) = \frac{n+1}{2}(4 + 2n + 4) = (n+1)(n+4)$.

$S_n = (n+1)(n+4)$.

********************** الأستاذ: جوائل أحمد*****************************