مجلة

5 min Maths

الأعداد المركبة

Complex number

3as

للشعب:

علوم تجريبية

تقني رياضي

رياضيات

اعدادالأستاذ: شعبان أسامة

بالتعاون و التنسيق مع:

الأستاذ: بلقاسم عبد الرزاق

الأستاذ: خالد بخاخشة

بسم الله الرحمان الرحيم

تم بفضل الله عز وجل و بمساعدة السادة الأساتذة بخاخشة خالد و

بلقاسم عبد الرزاق جزاهم الله كل خير و تشرفت بعطائهم

في انجاز هذه الهدية العلمية مجلة " Maths 5min"

في الأعداد المركبة

التي أرجو أن تكون مرجعا لكم في هذا المحور

أتمنى أن تكون في مستوى تطلعكم .

أ.شعبان أسامة

مجلة Maths 5min

تجدون فيها:

اصدار 2020

ابراهام دي موافر:ولد عام 1667م عالم في الرياضيات أضاف إضافات هامة في حساب المثلثات وقانون الاحتمالات وهناك ثلاث نظريات رياضية تحمل اسمه. توفي عام 1754م.

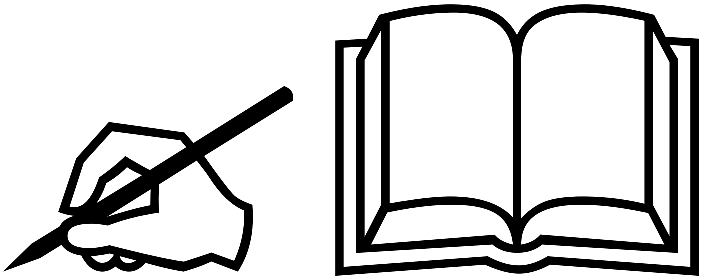
« ابراهام دي موافر» من أصدقاء « اسحاق نيوتن»،حيث نشر على التوالي سنة (1718)، (1738)، (1756) مساهماته في الاحتمال ضمن كتابه في المصادفة « مبدأ الفرص ».

في سنة 1707م.اكتشف« ابراهام دي موافر » دستوره الشهير:

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

Abraham de Moivre

1. الدرس + أمثلة تطبيقية محلولة



تعريف

نسمي عددا مركبا كل عدد z يكتب على الشكل $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان و $i^2=-1$

ملاحظات و ترميز:

- نرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بِ : $\mathbb{C}$.
- العدد الحقيقي x يسمى الجزء الحقيقي للعدد المركب z ، و نرمز $\operatorname{Re} z$.
- العدد الحقيقي y يسمى الجزء التخيلي للعدد المركب z ، و نرمز $\operatorname{Im} z$.
- إذا كان $y=0$ نقول أن العدد z حقيقي.
- إذا كان $x=0$ نقول أن العدد z تخيلي صرف (أو تخيلي محض أو تخيلي بحت) .
- يكون العدد المركب z معدوما إذا و فقط إذا كان جزؤه الحقيقي معدوما و جزؤه التخيلي معدوما.
  أي $z=0$ يعني $x=0$ و $y=0$.
- الكتابة $z=x+iy$ تسمى الشكل الجبري للعدد المركب z .

مثال: $z=1+2i$ $z=-3i$.

تساوي عددين مركبين .

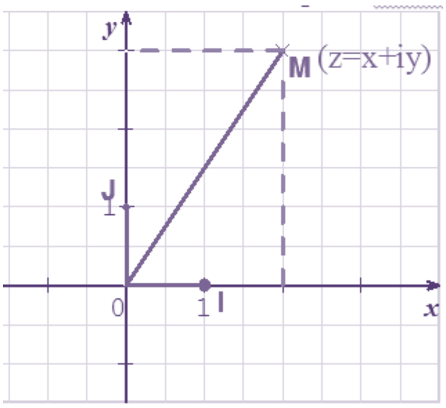
يكون عددان مركبان z و z' متساويين إذا وفقط إذا كان لهما نفس الجزء الحقيقي و نفس الجزء التخيلي.

نصع $z=x+iy$ و $z'=x'+iy'$: $z=z'$ معناه $(x=x'$ و $y=y')$

التمثيل الهندسي لعدد مركب.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

- إلى كل عدد مركب $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ ، $y\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$) نرفق النقطة M إحداثياها $x;y$ ، النقطة M تسمى صورة العدد المركب z و الشعاع $\overrightarrow{OM}$ يسمى كذلك صورة للعدد المركب z .
- كل نقطة M هي صورة عدد مركب وحيد $z=x+iy$ ، نقول أن z لاحقة النقطة M و الشعاع $\overrightarrow{OM}$.
- محور الفواصل يسمى المحور الحقيقي ،لأن الأعداد الحقيقية هي لواحق نقط محور الفواصل.
- محور التراتيب يسمى المحور التخيلي لأن كل عدد تخيلي صرف هو لاحقة نقطة من محور التراتيب
- المستوي يسمى المستوي المركب.



تطبيق 1:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

لتكن النقط A ، B ، C من المستوي التي لواحقها $-2+i$ ، $2i$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ على الترتيب .

1) أنشئ النقط A ، B ، C في المعلم $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.
2) عين لاحقة النقطة B' نظيرة B بالنسبة إلى O . أنشئ B'.
3) عين لاحقة النقطة A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل ، ثم عين لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AA'}$. أنشئ A' .

حل التطبيق 1:

1) A صورة العدد $-2+i$ إذن $A\ -2;1$.

B صورة العدد $2i$ إذن $B\ 0;2$.

C صورة العدد $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ إذن $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

لإنشاء النقطة C يمكن الملاحظة أنها تنتمي إلى الدائرة

التي مركزها O و نصف قطرها 1 و ترتيبها $\frac{1}{2}$.

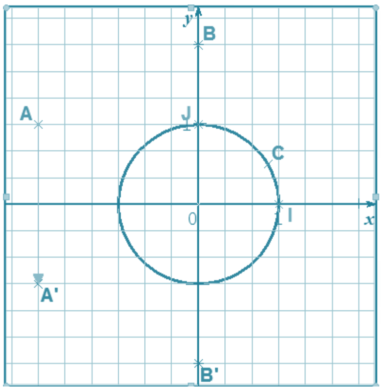
2) B' نظيرة B بالنسبة إلى O إذن $\overrightarrow{OB'}=-\overrightarrow{OB}$.

و منه $B'(0;-2)$ و لاحقة B' هي $-2i$.

3) A' نظيرة A بالنسبة إلى محور الفواصل إذن A'

و A لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن $A'(-2;-1)$

و لاحقة A' هي $-2-i$. $\overrightarrow{AA'}(0;-2)$ و منه لاحقة $\overrightarrow{AA'}$ هي $-2i$



مرافق عدد مركب.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$). العدد المركب $x-iy$ و الذي نرمز له $\bar{z}$ يسمى مرافق العدد المركب z

ملاحظة: للحصول على مرافق عدد مركب z ، نغير إشارة الجزء التخيلي.

أمثلة : • $\overline{2+8i}=2-8i$ ، • $\overline{3-11i}=3+11i$ ، • $\overline{4i}=-4i$ ، • $\overline{-2}=-2$.

التفسير الهندسي لمرافق عدد مركب.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$.

لتكن M صورة z و M' صورة $\bar{z}$ ، M و M'

لهما نفس الفاصلة و ترتيبان متناظران إذن M و M'

متناظرتان بالنسبة إلى حامل محور الفواصل.

مجموع وجداء عددين مركبين.

z عدد مركب حيث $z=x+iy$ ($x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$) و z' عدد مركب حيث $z'=x'+iy'$

($x'\in\mathbb{R}$ و $y'\in\mathbb{R}$) .

مجموع العددين z و z' هو العدد المركب $z+z'=(x+x')+i(y+y')$.

جداء العددين z و z' هو العدد المركب $z.z'=(xx'-yy')+i(xy'+x'y)$.

ملاحظة: قواعد الحساب المعروفة في $\mathbb{R}$ تبقى صحيحة في $\mathbb{C}$.

أمثلة : • $(2-i)+(-7+4i)=(2-7)+i(-1+4)=-5+3i$.

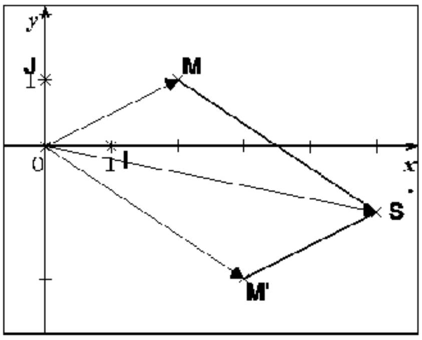
• $(3-2i)(-4-7i)=-12-21i+8i+14i^2=-26-13i$.

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

$z=x+iy$ عدد مركب و $z'=x'+iy'$ عدد مركب .

المجموع $z+z'$ هو لاحقة النقطة S حيث : $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}$.

$\overrightarrow{OS}$ هي محصلة الشعاعين $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{OM'}$.



ملاحظات: •إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان z' لاحقة الشعاع $\vec{v}$،

فإن $z+z'$ هو لاحقة $\vec{u}+\vec{v}$.

•إذا كان z لاحقة الشعاع $\vec{u}$ و كان λ عددا حقيقيا فإن λz هو لاحقة $\lambda\vec{u}$.

• شعاعان متساويان لهما نفس اللاحقة .

تطبيق 2:

n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أكتب على الشكل الجبري كل من : i^3 ، i^4 ، i^5 ، i^6 ، i^7 ، i^8 .

2) ناقش تبعا لقيم n كتابة i^n على الشكل الجبري .

حل التطبيق 2:

$i^3=i^2\times i=-i$ ، $i^4=i^2\times i^2=1$ ، $i^5=i^4\times i=i$ ، $i^6=-1$ ، $i^7=-i$ ، $i^8=1$.

2) نلاحظ أن $i^4=1$ و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k : $i^{4k}=1$.

كذلك : $i^{4k+1}=i^{4k}\times i=i$.

$i^{4k+2}=i^{4k}\times i^2=-1$.

$i^{4k+3}=i^{4k}\times i^3=-i$.

كل عدد طبيعي n يكتب على أحد الأشكال التالية : $4k$ ، $4k+1$ ، $4k+2$ و $4k+3$.

تطبيق 3:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=(1-i)^4$ ، **2)** $z_2=(-2+i\sqrt{3})(3-5i)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$ ، **3)** $z_3=(-7-2i)(6-4i)^2$.

حل التطبيق 3:

1) $z_1=(1-i)^4$ و منه $z_1=(1-i)^2(1-i)^2=(-2i)(-2i)$ إذن $z_1=4i^2=-4$.

2) $z_2=(-2+i\sqrt{3})(3-5i)+\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2}+4i\right)$.

و منه $z_2=-6+3i\sqrt{3}+10i-5i^2\sqrt{3}+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}i+4i-2i^2$ إذن $z_2=-\frac{5}{2}+5\sqrt{3}+\left(\frac{53}{4}+3\sqrt{3}\right)i$.

3) $z_3=(-7-2i)(6-4i)^2$ و منه $z_3=(-7-2i)(36-48i+16i^2)=(-7-2i)(20-48i)$

إذن $z_3=-140+336i-40i+96i^2=-236+296i$.

تطبيق 4:

أكتب على الشكل الجبري الأعداد المركبة الآتية :

1) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ ، **2)** $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$ ، **3)** $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$.

حل التطبيق 4:

1) $z_1=\frac{5}{1-2i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_1=\frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$ أي $z_1=\frac{5(1+2i)}{5}=1+2i$.

2) $z_2=\frac{-7+4i}{4-7i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_2=\frac{(-7+4i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)}=\frac{-28+16i-49i+28i^2}{16+49}$ أي $z_2=\frac{-56-33i}{65}=-\frac{56}{65}-\frac{33}{65}i$.

3) $z_3=\frac{3+2i}{(1+i)(-6-5i)}$ نقوم أولا بكتابة المقام على الشكل الجبري :

$z_3=\frac{3+2i}{-6-6i-5i-5i^2}=\frac{3+2i}{-1-11i}$ بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على:

$z_3=\frac{(3+2i)(-1+11i)}{(-1-11i)(-1+11i)}=\frac{-3+33i-2i+22i^2}{1+121}$ أي $z_3=\frac{-25+31i}{122}=-\frac{25}{122}+\frac{31}{122}i$

خواص مرافق عدد مركب.

- $\overline{\overline{z}}=z$.
- $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$.
- $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}(z)$.
- $z\overline{z}=(\operatorname{Re}(z))^2+(\operatorname{Im}(z))^2$.

z عدد مركب و مرافقه $\overline{z}$ ، z' عدد مركب و مرافقه $\overline{z'}$.

• $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$ • $\overline{zz'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$.   • $\overline{z^n}=\overline{z}^n$. $n\in\mathbb{N}^*$

• $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}$. مع $z\neq 0$.   • $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$. مع $z'\neq 0$.

☐تطبيق 5:

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z في الحالتين الآتيتين ؛

1) $2-3i\ \ z-26=0$.

2) $z-21i=-14+i\frac{\sqrt{3}}{2}z$.

حل التطبيق 5:

1) $2-3i\ \ z-26=0$ أي $2-3i\ \ z=26$ و بالتالي $z=\frac{26}{2-3i}$.

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\frac{26\ \ 2+3i}{2-3i\ \ 2+3i}=4+6i$

لتكن S مجموعة الحلول $S=\ \ 4+6i$.

2) $z-21i=-14+i\frac{\sqrt{3}}{2}z$. نضرب الطرفين في 2 نحصل على $2z-42i=-28+i\sqrt{3}z$

$2z-i\sqrt{3}z=-28+42i$ أي $z\ \ 2-i\sqrt{3}\ \ =-28+42i$

وبالتالي $z=\frac{-28+42i}{2-i\sqrt{3}}$

بضرب البسط و المقام في مرافق المقام نحصل على $z=\frac{-28+42i\ \ 2+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}\ \ 2+i\sqrt{3}}$

$z=\ -4+6i\ \ \ 2+i\sqrt{3}\ \ =-8-6\sqrt{3}+\ 12-4\sqrt{3}\ \ i$

لتكن S' مجموعة الحلول $S'=\ \ -8-6\sqrt{3}+\ 12-4\sqrt{3}\ \ i$.

☐ تطبيق 6:

ليكن كثير الحدود P للمتغير المركب z المعرف كما يلي ؛

$$P\ \ z\ =z^3+z^2-2$$

1) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P\ \ z}=P\ \ \overline{z}$.

2) أحسب $P\ \ 1$ و $P\ \ -1-i$.

3) استنتج جذرا آخر لـ $P\ \ z$.

حل التطبيق 6:

1) $\overline{P\ \ z}=\overline{z^3+z^2-2}$.

$\overline{P\ \ z}=\overline{z^3}+\overline{z^2}-\overline{2}$ بتطبيق خاصية المجموع .

$\overline{P\ \ z}=\ \overline{z}^{\ 3}+\ \overline{z}^{\ 2}-2$ بتطبيق خاصية الأس .

إذن $\overline{P\ \ z}=P\ \ \overline{z}$.

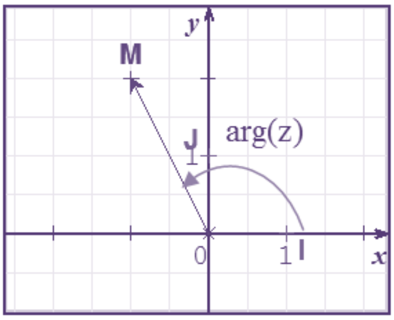
2) $P\ \ 1\ =0$.

$P\ \ -1-i\ =\ -1-i^{\ 3}+\ -1-i^{\ 2}-2$

$P\ \ -1-i\ =2i\ \ -1-i\ +2i-2=0$.

3) $P\ \ -1-i\ =0$ و منه $\overline{P\ \ -1-i}=0$ وبالتالي $P\ \ \overline{-1-i}=0$ أي $P\ \ -1+i\ =0$

إذن $-1+i$ جذر لـ $P\ \ z$.



طويلة عدد مركب.

z عدد مركب حيث: $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان).

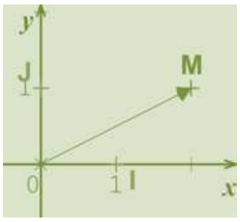
نسمي طويلة العدد المركب z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له $|z|$ حيث $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

☜ أمثلة : $|2+8i| = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$ ، $|-4-3i| = \sqrt{16+9} = 5$ ، $|-7i| = \sqrt{49} = 7$

ملاحظات: • إذا كان z عددا حقيقيا فإن طويلة z هي القيمة المطلقة للعدد z .

• $z = 0$ يعني $|z| = 0$. • $|z|^2 = x^2 + y^2$.

التفسير الهندسي لطويلة عدد مركب.



المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

z عدد مركب حيث $z = x + iy$ إذا كانت M صورة z فإن $OM = |z|$

خواص طويلة عدد مركب.

خواص: من أجل كل عددين مركبين z و z' .

• $|\overline{z}| = |z|$. • $|-z| = |z|$.

• $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$. • $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ مع $z' \neq 0$

• $|z^n| = |z|^n$. • $|z+z'| \leq |z| + |z'|$.(المتباينة الثلاثية).

ملاحظة: A و B نقطتان لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب : $AB = |z_B - z_A|$.

تطبيق 7:

عين طويلة العدد المركب z في كل حالة من الحالات الآتية.

1) $z = \ 2+i \quad -5+3i$ ، 2) $z = \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$ ، 3) $z = \ -3+4i\ ^{4}$ ، 4) $z = \left(\frac{1-i\ ^{6}}{-8-6i\ ^{2}}\right)^3$.

حل التطبيق 7:

1) $z = \ 2+i \quad -5+3i$

$|z| = |\ 2+i \quad -5+3i\ | = |2+i||-5+3i|$ أي $|z| = \sqrt{5}\times\sqrt{34} = \sqrt{170}$.

2) $z = \frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}$

$|z| = \left|\frac{3-4i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{|3-4i|}{|\sqrt{3}-i|}$ أي $|z| = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{3+1}} = \frac{5}{2}$.

3) $z = \ -3+4i\ ^{4}$

$|z| = |\ -3+4i\ ^{4}| = |-3+4i|^4$ أي $|z| = \ \sqrt{9+16}\ ^{4} = 5^4 = 625$.

4) $z = \left(\frac{1-i\ ^{6}}{-8-6i\ ^{2}}\right)^3$

$|z| = \left|\left(\frac{1-i\ ^{6}}{-8-6i\ ^{2}}\right)^3\right| = \left(\frac{|1-i\ ^{6}|}{|-8-6i\ ^{2}|}\right)^3 = \left(\frac{|1-i|^6}{|-8-6i|^2}\right)^3$ أي $|z| = \left(\frac{8}{100}\right)^3 = \frac{8}{15625}$.

عمدة عدد مركب غير معدوم.

z عدد مركب غير معدوم حيث: $z = x + iy$ (x و y عددان حقيقيان).

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ لتكن M صورة z .

نسمي عمدة العدد المركب z و نرمز $\arg z$ كل قيس بالرديان للزاوية الموجهة $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$.

الشكل المثلثي لعدد مركب غير معدوم.

z عدد مركب غير معدوم. العدد z يكتب على الشكل $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ حيث :

$r = |z|$ و $\theta = \arg z$. هذا الشكل يسمى الشكل المثلثي لِـ z .

ملاحظة: • إذا كان $z = x + iy$ ، $\cos\theta = \frac{x}{r}$ و $\sin\theta = \frac{y}{r}$.

خاصية:

*يكون عددان مركبان مكتوبان على الشكل المثلثي متساويين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس الطويلة وعمدتان متوافقتان بترديد 2π .

*إذا كان $z = \lambda\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ و كان $\lambda > 0$ فإن $\lambda = |z|$ و $\theta = \arg z$.

خواص عمدة عدد مركب غير معدوم.

خواص: z و z' عددان مركبان غير معدومين.

• $\arg z.z' = \arg z + \arg z'$.

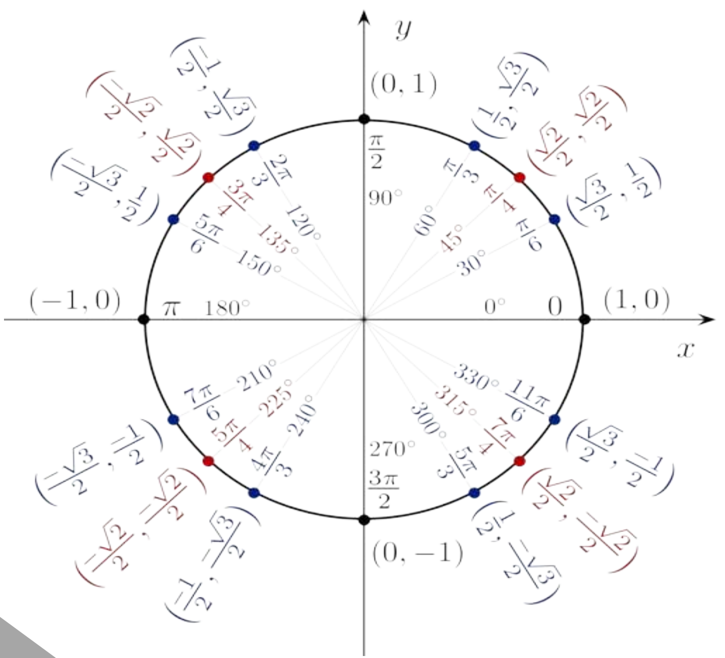
• $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

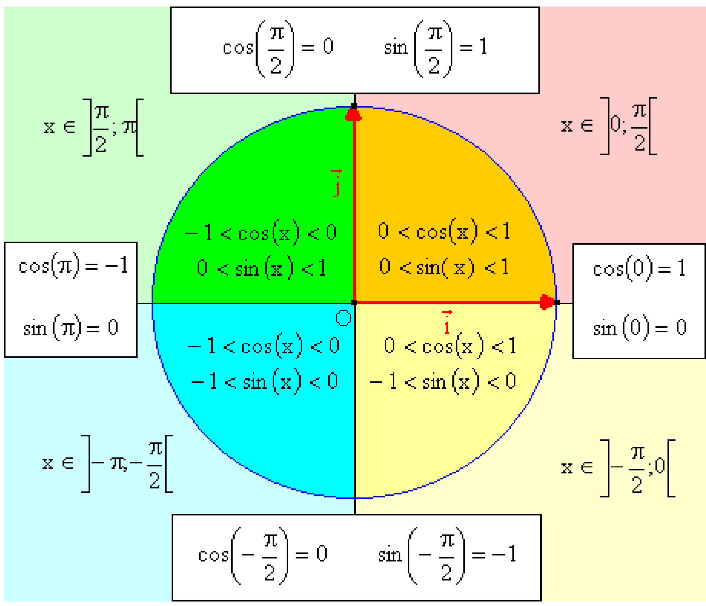
• $\arg z^n = n\arg z$. $n \in \mathbb{N}^*$

دستور موافر : $z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

معارف سابقة

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0





تطبيق 8:

عين الطويلة وعمدة للعدد z ثم أكتبه على الشكل المثلثي في الحالتين الآتيتين ؛

1) $z=1+i$ 2) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$

حل التطبيق 8:

1) $z=1+i$. $|z|=|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ليكن θ عمدة لِ z .

$\cos\ \theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin\ \theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه $\frac{\pi}{4}$ عمدة لِ z أي $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{6}$. $|z|=\left|\sqrt{2}-i\sqrt{6}\right|=\sqrt{\sqrt{2}^{\,2}+\ -\sqrt{6}^{\,2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. ليكن θ عمدة لِ z .

$\cos\ \theta=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ و $\sin\ \theta=\frac{-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ومنه $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ عمدة لِ z أي $z=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

تطبيق 9:

ليكن العددان المركبان $Z_1=\ 1+i\ \ -1-i\sqrt{3}$ و $Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}$ ؛

1) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الجبري.   2) أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل المثلثي.

حل التطبيق 9:

1) $Z_1=\ 1+i\ \ -1-i\sqrt{3}\ =-1+\sqrt{3}+i\ \ -1-\sqrt{3}$.

$Z_2=\frac{1+i}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{1+i\ \ -1+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}\ \ -1+i\sqrt{3}}=\frac{-1-\sqrt{3}+i\ \ -1+\sqrt{3}}{4}$. $Z_2=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$.

2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ ، $-1-i\sqrt{3}=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

$Z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.

$Z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)+\sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$.

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم.

الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم : العدد المركب z غير المعدوم الذي طويلته r و θ عمدة له يكتب $z=re^{i\theta}$.

هذه الكتابة تسمى الشكل الأسي للعدد المركب z.

قواعد الحساب على الشكل الأسي

<u>خواص:</u> θ و θ' عددان حقيقيان.

- $e^{i\ \theta+\theta'}\ =e^{i\theta}\cdot e^{i\theta'}$.
- $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i\ \theta-\theta'}$.
- $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$.

☜<u>أمثلة :</u> • $z_1=1+i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، • $z_1=-1-i\sqrt{3}$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

• $z_1=1-i$ يكتب $z_1=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، • $z_1=-\sqrt{3}+i$ يكتب $z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

دستور موافر

<u>خواص:</u> z عدد مركب طويلته r و θ عمدة له .من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا: $e^{i\theta}\ ^{n}=e^{in\theta}$.

تطبيق 10:

1) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الجبري :

- $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}}$ • $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$ • $z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}}$

2) أكتب الأعداد المركبة الآتية على الشكل الأسي :

- $z_0 = -7i$ • $z_1 = -3-3i$ • $z_2 = (1-i)^8$ • $z_3 = (\sqrt{3}+i)^6$

حل التطبيق 10:

1) • $z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_0 = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

• $z_1 = 8e^{-i\frac{\pi}{4}} = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1 = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\sqrt{2} - 4i\sqrt{2}$.

• $z_2 = 5e^{i\frac{\pi}{2}} = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

أي $z_2 = 5(0 + i\,1) = 5i$.

• $z_3 = 6e^{i\frac{2\pi}{3}} = 6\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

أي $z_3 = 6\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 + 3i\sqrt{3}$

2) • $z_0 = -7i = 7e^{-i\frac{\pi}{2}}$

• $z_1 = -3-3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

أي $z_1 = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

• $z_2 = (1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8$.

أي $z_2 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^8 = \left(\sqrt{2}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\right)^8 = 16e^{-2i\pi}$.

• $z_3 = (\sqrt{3}+i)^6 = \left(2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^6$.

أي $z_3 = 2^6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^6 = 64\left(\cos\left(\frac{6\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{6}\right)\right) = 64(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

إذن $z_3 = 64e^{i\pi}$.

المعادلات من الدرجة الثانية.

لتكن المعادلة ذات المجهول المركب z : $az^2+bz+c=0$ حيث a ، b و c أعداد مركبة و $a\neq 0$.

$\Delta=b^2-4ac$ مميزها .

- إذا كان $\Delta=0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا $z=-\dfrac{b}{2a}$.
- إذا كان $\Delta\neq 0$ ، المعادلة تقبل حلين متمايزين :

$$z'=\frac{-b-\omega}{2a} \quad \text{و} \quad z''=\frac{-b+\omega}{2a}$$

حيث ω جذر تربيعي لِـ Δ.

ملاحظة: إذا كان z' و z'' حلي المعادلة فإن من أجل كل عدد مركب z :

$$az^2+bz+c=a(z-z')(z-z'')$$

☜ مثال: • حلا المعادلة $z^2-z+1=0$ هما $z'=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و $z''=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ω عدد مركب .يسمى حلا المعادلة $z^2=\omega$ في المجموعة $\mathbb{C}$ الجذرين التربيعيين للعدد ω .

☜ أمثلة : •الجذران التربيعيان للعدد $3-4i$ هما $2-i$ و $-2+i$.

•الجذران التربيعيان للعدد -9 هما $-3i$ و $3i$.

ملاحظة: كل عدد مركب له جذران تربيعيان متناظران .

تطبيق 11:

عين الجذرين التربيعيين للعدد $z=-8+6i$

حل التطبيق 11:

ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لِـ z . أي $z=\omega^2$.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$$|\omega^2|=|\omega|^2=x^2+y^2 \quad ، \quad |z|=|-8+6i|=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$$

$$z=\omega^2 \text{ يعني } \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=-8 \\ 2xy=6 \end{cases}$$

$$\text{أي } \begin{cases} 2x^2=2 \\ y^2=10-x^2 \\ xy=3 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=9 \\ xy=3 \end{cases}$$

أي ($x=1$ و $y=3$) أو ($x=-1$ و $y=-3$) لأن $xy>0$

إذن $\omega=1+3i$ أو $\omega=-1-3i$.

تطبيق 12:

حل في المجموعة $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول المركب z

$z^2+(3-2i)z+5-5i=0$.

حل التطبيق 12:

نحسب المميز : $\Delta=(3-2i)^2-4(1)(5-5i)$.

$$\Delta=9-12i+4i^2-20+20i=-15+8i$$

ليكن $\omega=x+iy$ جذرا تربيعيا لِـ Δ.

$\omega^2=x^2-y^2+2xyi$.

$$|\omega^2|=|\omega|^2=x^2+y^2 \quad ، \quad |\Delta|=|-15+8i|=\sqrt{(-15)^2+8^2}=17$$

$z=\omega^2$ يعني $\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x^2-y^2=-15 \\ 2xy=8 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 2x^2=2 \\ y^2=17-x^2 \\ xy=4 \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=16 \\ xy=4 \end{cases}$

أي $(x=1$ و $y=4)$ أو $(x=-1$ و $y=-4)$ لأن $xy>0$

إذن $\omega=1+4i$ أو $\omega=-1-4i$.

نضع $\triangle=(1+4i)^2$.

$$z'=\frac{-3+2i-1-4i}{2}=-2-i \quad \text{و} \quad z''=\frac{-3+2i+1+4i}{2}=-1+3i$$

الأعداد المركبة و التحويلات النقطية.

في كل ما يأتي المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

f تحويل نقطي من المستوي المركب الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$ مع $a\in\mathbb{R}^*$ أو $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$ ونكتب. $f(M)=M'$ يعني $z'=az+b$.

1.الحالة الأولى $a=1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=z+b$

(b عدد مركب) هو **انسحاب** شعاعه $\overrightarrow{U}$ صورة b.

تطبيق 13:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

$t_{\vec{u}}$ الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(-2;1)$

1. عين العبارة المركبة للانسحاب $t_{\vec{u}}$.
2. A النقطة التي لاحقتها $3-i$ ، عين لاحقة النقطة A' صورة A بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

حل التطبيق 13:

1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالانسحاب $t_{\vec{u}}$.

$t_{\vec{u}}(M)=M'$ يعني $z'=z-2+i$.

2) $t_{\vec{u}}(A)=A'$ يعني $z_{A'}=z_A-2+i$ و منه $z_{A'}=3-i-2+i=1$

2.الحالة الثانية $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$

مع a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 و b عدد مركب ، هو **التحاكي** الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ونسبته a.

تطبيق 14:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$.

h التحاكي الذي مركزه A ذات اللاحقة $-1+2i$ و نسبته 3.

1. عين العبارة المركبة للتحاكي h.
2. B النقطة التي لاحقتها $-3-2i$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالتحاكي h.

حل التطبيق 14:

1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالتحاكي h.

$h(M)=M'$ يعني $z'=3z+b$. بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h(A)=A$ و منه $z_A=3z_A+b$.

أي $(-1+2i)=3(-1+2i)+b$ و منه $b=2-4i$. إذن $z'=3z+2-4i$.

2) $h(B)=B'$ يعني $z_{B'}=3z_B+2-4i$ و منه $z_{B'}=3(-3-2i)+2-4i=-7-10i$.

3.الحالة الثالثة $a\in\mathbb{C}$ و $|a|=1$.

خاصية: f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث $z'=az+b$

مع a عدد مركب غير حقيقي طويلته 1 و b عدد مركب ، هو **الدوران** الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}$ ، وزاويته $\arg(a)$.

تطبيق 15:

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}$.

r الدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و زاويته θ حيث $\frac{\pi}{3}$ أحد أقياسها .

1. عين العبارة المركبة للدوران r.

2. B النقطة التي لاحقتها $1-i\sqrt{3}$ ، عين لاحقة النقطة B' صورة B بالدوران r.

حل التطبيق 15:

1) لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها z و M' لاحقتها z' صورتها بالدوران r.

$r(M)=M'$ يعني $z'=az+b$ حيث $|a|=1$ و $\arg(a)=\frac{\pi}{3}+k2\pi$. $k\in\mathbb{Z}$

و منه $a=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$

بما أن النقطة A هي مركز التحاكي فإن $h(A)=A$ و منه $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}z_A+b$

نعلم أن $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{4\pi}{3}}$ و منه $e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}\cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}+b=e^{i\frac{5\pi}{3}}+b=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+b$

إذن $-1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=b$ أي $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z-1$.

2) $r(B)=B'$ يعني $z_{B'}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_B-1$ أي $z_{B'}=1$.

التشابه المباشر

تعريف: القول أن التحويل النقطي S تشابه مباشر معناه أن S يحافظ على نسب المسافات وعلى الزوايا الموجهة أي من أجل كل نقط M,N,P,Q من المستوي و $M\neq N$، صورها M',N',P',Q' على الترتيب فإن: $\frac{PQ}{MN}=\frac{P'Q'}{M'N'}$ و $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$.

خاصية: إذا كان S تشابها مباشرا فإن S يضرب المسافات في عدد حقيقي موجب تماما k.
العدد k يسمى نسبة التشابه S .

حالة خاصة

إذا كان $k=1$ نقول عن التشابه المباشر S أنه تقايس موجب أو إزاحة أي S انسحاب أو دوران .

تعريف: S تشابه مباشر من المستوي. S يحافظ على الزوايا الموجهة $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{PQ}\right)=\left(\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{P'Q'}\right)$.

و منه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ زاوية ثابتة مستقلة عن اختيار النقطتين M و N

هذه الزاوية $\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}\right)$ نسمى زاوية التشابه المباشر S.

خاصية: كل تشابه مباشر من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z'=az+b$
حيث a و b عددان مركبان و $a\neq 0$.

خاصية: a و b عددان مركبان حيث $a \neq 0$.
إذا كان S تحويلا نقطيا من المستوي المركب له كتابة مركبة من الشكل $z' = az + b$ ، فإن S تشابه مباشر نسبته $|a|$.

ملاحظة: لا توجد تشابهات أخرى كتابتها المركبة تختلف عن $z' = az + b$ مع $a \in \mathbb{C}^*$ و $b \in \mathbb{C}$.

حالات خاصة:

1) الانسحاب تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = z + b$ و هو من الشكل $z' = az + b$ مع $a = 1$. نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .

2) التحاكي تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد حقيقي غير معدوم و يختلف عن 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي $|a|$.

3) الدوران تشابه مباشر لأن شكله المركب هو $z' = az + b$ حيث a عدد مركب غير حقيقي ، طويلته تساوي 1 . نسبة التشابه المباشر في هذه الحالة تساوي 1 .
زاوية التشابه المباشر في هذه الحالة هي زاوية الدوران أي $\arg(a)$.

خاصية: تركيب تشابهين مباشرين هو تشابه مباشر نسبته جداء النسبتين وزاويته مجموع الزاويتين .

التحليل القانوني للتشابه المباشر

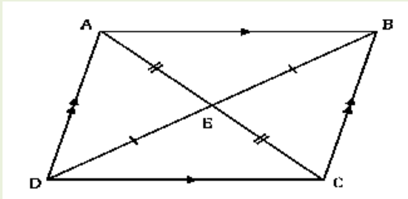
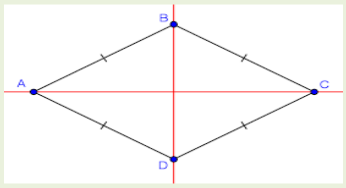
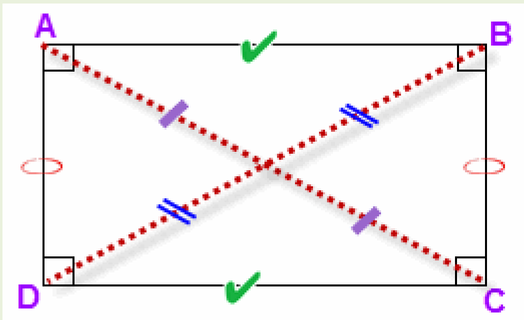
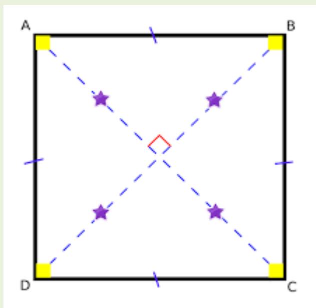
خاصية: S تشابه مباشر نسبته k $\left(k \in \mathbb{R}_+^*\right)$ و زاويته θ $(\theta \in \mathbb{R})$.

- إذا كان $k = 1$ و $\theta = 0$ التشابه S انسحاب .
- في الحالات الأخرى S يقبل نقطة صامدة وحيدة Ω لاحقتها ω و $S = h \circ r = r \circ h$ ، حيث h هو التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k و r هو الدوران الذي مركزه Ω و زاويته θ .

خاصية: إذا كانت A ، B ، A' و B' أربع نقط حيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .

نتائج:

- S هو التشابه المباشر الذي يحول A إلى A' و يحول B إلى B' .
- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AA'}$ لأن $a = \dfrac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A} = 1$
- إذا كان $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$ فإن S هو تشابه مباشر نسبته $\dfrac{A'B'}{AB}$ وزاويته $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right)$. مركزه النقطة الصامدة.

يكون الرباعي ABCD	إذا كان :	بالأعداد المركبة
متوازي الأضلاع 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ أو : للقطرين $[AC],[BD]$ نفس المنتصف .	أي : $z_D-z_A=z_C-z_B$ أي: $z_A+z_C=z_B+z_D$
معين 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و $AB=BC$ أو: 2. القطران $[AC],[BD]$ متناصفان و متعامدان	أي : $z_D-z_A=z_C-z_B$ و $\lvert z_B-z_A\rvert=\lvert z_C-z_B\rvert$ أي : $z_A+z_C=z_B+z_D$ و العدد $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_B}$ تخيلي صرف .
مستطيل 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B . ... 2. القطران $[AC],[BD]$ متناصفان و متقايسان .	أي : $z_D-z_A=z_C-z_B$ و العدد $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ تخيلي صرف . أي : $z_A+z_C=z_B+z_D$ و $\lvert z_C-z_A\rvert=\lvert z_D-z_B\rvert$
مربع 	1. $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ و المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين . 2. القطران $[AC],[BD]$ متناصفان و متقايسان ومتعامدان .	أي : $z_D-z_A=z_C-z_B$ والعدد $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\pm$ أي : $z_A+z_C=z_B+z_D$ والعدد: $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\pm$

☜ **تنبيه : توجد طرق أخرى . إنما اخترنا الأكثر استعمالا .**

أسئلة حول مجموعة النقط

نفرض في كل ما يلي المستوي مركب و مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\vec{u},\vec{v})$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z في كل حالة من الحالات الآتية : (**كل سؤال مستقل عن الاخر**) .

1) $|z| = 3$.
2) $|z-1+2i| = 5$.
3) $|\overline{z}| = 4$.
4) $|\overline{z}+2-3i| = 2$.
5) $|z-2+i| = |z+1-2i|$.
6) $|\overline{z}-2+i| = |\overline{z}+1-2i|$.
7) $z \times \overline{z} = 3$.
8) $(z-2)(\overline{z}-2) = 4$.
9) $z+\overline{z} = 0$.
10) $z-\overline{z} = 0$.
11) $Re(z) = 4$
12) $Re(z)+Im(z) = 0$
13) $Re(z^2) = 0$.
14) $Im(z^2) = 0$.
15) $|z| \leq 2$.
16) $|z| \geq 2$.
17) $3 \leq |z| \leq 4$.
18) $\left|\frac{z-2+i}{z}\right| = 1$.
19) $|z-1| < |z+1-2i|$.
20) $|z-2| = |\overline{z}+i|$.
21) $|iz+3| = |z+4+i|$.
22) $|2\overline{z}+1| = 1$.
23) $|z|^2 = z+\overline{z}$.
24) $\left|\frac{iz+1+i}{z+2}\right| = 1$.
25) $|z-i| = |1-z|$.
26) $z = 1+2i+3e^{i\theta}\ ,\ (\theta \in \mathbb{R})$.
27) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R}^+)$.
28) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \leq 0)$
29) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R})$.
30) $z = 2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}\ ,\ (k \in \mathbb{R}^*)$.
31) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}+2k\pi$, (k عددصحيح).
32) $\arg(z) = \frac{\pi}{3}+k\pi$, (k عددصحيح) .
33) $\arg(\overline{z}) = \frac{\pi}{3}+k\pi$, (k عددصحيح).
34) $\arg(z-1+2i) = \frac{\pi}{4}+2k\pi$, .
35) $\arg(z-1+2i) = \frac{\pi}{4}+k\pi$, . .
36) $\arg(\overline{z}+2-3i) = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$.
37) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي غير معدوم .
38) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي سالب تماما .
39) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ حقيقي موجب تماما .
40) العدد $\left(\frac{z-1+2i}{z+i}\right)$ تخيلي صرف .
41) باك 2015 :

$z = k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ مع يمسح $\mathbb{R}^+$.

42) $\arg\left(\frac{z}{\overline{z}}\right) = 2k\pi$.
43) $\arg(-z) = \arg(\overline{z})+2k\pi$.
44) $arg(z)-arg(-\overline{z}) = \frac{\pi}{3}+2k\pi$
45) $\overline{z} = 1-2i+k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $(k>0)$
46) $z = 2-ke^{i\frac{\pi}{6}}$ مع $(k>0)$.

تذكير :

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس :

1. كل مستقيم له معادلة من الشكل : $ax+by+c=0$. حيث b,a عددان غير معدومين معا .
2. كل دائرة لها معادلة من الشكل : $(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2$. النقطة $\omega(a\,;b)$ هي المركز و R هو نصف القطر .

✍حلول أسئلة مجموعة النقط

رقم	الخاصية	التفسير الهندسي	مجموعة النقط M
1	$\lvert z\rvert=3$	$OM=3$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 3 .
2	$\lvert z-1+2i\rvert=5$.	$AM=5$ ، مع $A(1;-2)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 5 .
3	$\lvert\bar{z}\rvert=4$ أي : $\lvert z\rvert=4$.	$OM=4$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 4 .
4	$\lvert\bar{z}+2-3i\rvert=2$ أي : $\lvert z-(-2-3i)\rvert=2$.	$BM=2$ ، مع $B(-2;-3)$	هي الدائرة التي مركزها B و نصف قطرها 2 .
5	$\lvert z-2+i\rvert=\lvert z+1-2i\rvert$	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;-1)\\B(-1;2)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
6	$\lvert\bar{z}-2+i\rvert=\lvert\bar{z}+1-2i\rvert$ أي : $\lvert z-2-i\rvert=\lvert z+1+2i\rvert$	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;1)\\B(-1;-2)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
7	$z\times\bar{z}=3$ أي : $\lvert z\rvert^2=3$ أي : $\lvert z\rvert=\sqrt{3}$.	$OM=\sqrt{3}$.	هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{3}$.
8	$(z-2)(\bar{z}-2)=4$ أي : $(z-2)(\overline{z-2})=4$ أي : $\lvert z-2\rvert^2=4$ أي : $\lvert z-2\rvert=2$	$AM=2$ ، مع $A(2;0)$.	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 2 .
9	$z+\bar{z}=0$ أي : $2\mathrm{Re}(z)=0$ أي : $\mathrm{Re}(z)=0$	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $x=0$.	هي حامل محور التراتيب (yy') .
10	$z-\bar{z}=0$ أي : $2\mathrm{Im}(z)=0$ أي : $\mathrm{Im}(z)=0$.	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $y=0$.	هي حامل محور الفواصل (xx') .
11	11) $\mathrm{Re}(z)=4$	$M(x;y)$ هي صورة z حيث : $x=4$.	هي المستقيم الموازي لحامل محور التراتيب ذو المعادلة : $x=4$.
12	$\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)=0$	من أجل كل نقطة M من المستوي تكون إحداثييها متعاكستان .	هي المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ (المنصف الثاني) .

13	$Re(z^2)=0$ أي : $x^2-y^2=0$ ، أي : $y=x$ أو $y=-x$.		هي إتحاد المنصف الأول و المنصف الثاني .
14	$Im(z^2)=0$ أي : $x.y=0$ أي : $x=0$ أو $y=0$.		هي إتحاد حاملي محوري الإحداثيات (الفواصل و التراتيب) .
15	$\|z\|\leq 2$	$OM\leq 2$.	هي القرص الذي مركزه O و نصف قطره 2 .
16	$\|z\|\geq 2$	$OM\geq 2$.	هي المستوي ما عدا القرص المفتوح الذي مركزه O و نصف قطره 2 .
17	$3\leq\|z\|\leq 4$	$3\leq OM\leq 4$.	هي الحلقة المحددة بين القرص الذي مركزه O و نصف قطره 3 و القرص الذي مركزه O و نصف قطره 4 .
18	$\left\|\frac{z-2+i}{z}\right\|=1$ أي : $\|z-2+i\|=\|z\|$.	$AM=OM$ مع $A(2;1)$.	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[OA]$.
19	$\|z-1\|<\|z+1-2i\|$ أي : $\|z-1\|<\|z-(-1+2i)\|$	$AM<BM$ مع $\begin{cases}A(1;0)\\B(-1;2)\end{cases}$ حيث تكون M أقرب إلى A	هي نصف المستوي المحدّد بالمستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ و الذي يشمل A .
20	$\|z-2\|=\|\bar{z}+i\|$ أي : $\|z-2\|=\|z-i\|$.	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(2;0)\\B(0;1)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
21	$\|iz+3\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|i\|.\left\|z+\frac{3}{i}\right\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|z-3i\|=\|z+4+i\|$ أي : $\|z-3i\|=\|z-(-4-i)\|$	$AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;-3)\\B(-4;-1)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
22	$\|2\bar{z}+1\|=1$ أي : $2.\left\|\bar{z}+\frac{1}{2}\right\|=1$ أي :	$AM=\frac{1}{2}$ مع : $A(-\frac{1}{2};0)$	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها $\frac{1}{2}$

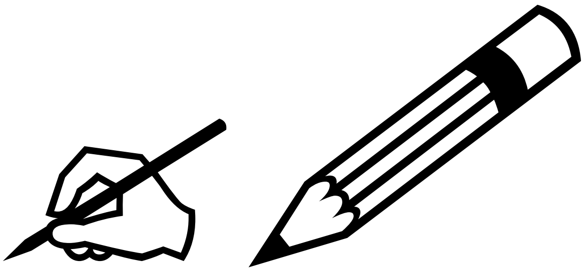
	$\left\lvert z+\frac{1}{2}\right\rvert=\frac{1}{2}$.		
23	أي : $\lvert z\rvert^2=z+\bar{z}$ أي : $x^2+y^2=2x$ أي : $x^2+y^2-2x=0$ $(x-1)^2-1+y^2=0$ و منه : $(x-1)^2+y^2=1$.	هذه الأخيرة هي معادلة دائرة .	هي الدائرة التي مركزها $\Omega(1;0)$ و نصف قطرها 1 .
24	أي : $\left\lvert\frac{iz+1+i}{z+2}\right\rvert=1$ أي : $\lvert iz+1+i\rvert=\lvert z+2\rvert$ أي : $\lvert i\rvert.\left\lvert z+\frac{1}{i}+1\right\rvert=\lvert z+2\rvert$ $\lvert z+1-i\rvert=\lvert z+2\rvert$.	$AM=BM$ مع $\begin{cases}A(1;-1)\\B(2;0)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
25	أي : $\lvert z-i\rvert=\lvert 1-z\rvert$ $\lvert z-i\rvert=\lvert z-1\rvert$.	$AM=BM$ مع : $\begin{cases}A(0;1)\\B(1;0)\end{cases}$	هي المستقيم المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$.
26	أي : $z=1+2i+3e^{i\theta}$ و منه ، $z-z_A=3e^{i\theta}$: $\lvert z-z_A\rvert=3$.	$AM=3$ مع $A(1;2)$	هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 3 .
27	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}^+$ أي نميز حالتين : *) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z=z_A$. *) لما $k>0$ يكون : أي تصبح : $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{3}}$ $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$.	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.	*) هي النقطة A . هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
28	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\leq 0$ أي نميز حالتين : *) لما $k=0$ يكون : $z=2-i$ أي : $z=z_A$.	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$.	*) هي النقطة A . *)هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و

	*) لما $k<0$ يكون : $z=2-i-ke^{i(\pi+\frac{\pi}{3})}$ ، و منه : $z-z_A=ke^{i\frac{4\pi}{3}}$ ، أي : $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$.		يشكل زاوية قيسها $\frac{4\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
29	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}$ ، نميز 3 حالات : *) لما $k=0$ أي : $z=z_A$. *) $k>0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{3}$. *) $k<0$ ، $\arg(z-z_A)=\frac{4\pi}{3}$	*) $M=A$ مع $A(2;-1)$. $\left\{ (\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi \right.$	*) هي النقطة A . *) هي المستقيم المار بالنقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل .
30	$z=2-i+ke^{i\frac{\pi}{3}}$. لدينا : $k\in\mathbb{R}^*$ ، واضح أنّه تكون حالتين فقط نستثني النقطة A .		هي المستقيم المار بالنقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .
31	31) $\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$. مع : $z\neq 0$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء المبدأ O .
32	$\arg(z)=\frac{\pi}{3}+k\pi$. مع : $z\neq 0$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـــ O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O
33	$\arg(\bar{z})=\frac{\pi}{3}+k\pi$ أي : $\arg(z)=-\frac{\pi}{3}+k\pi$ مع $z\neq 0$	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=-\frac{\pi}{3}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـــ O و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O .

34	$\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{4}$ مع حامل محور الفواصل ، باستثناء النقطة A .
35	$\arg(z-1+2i)=\frac{\pi}{4}+k\pi$ مع $z\neq 1-2i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{4}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـــ A و يشكل زاوية قيسها $-\frac{\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء A .
36	لدينا : $\arg(\bar{z}+2-3i)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أي: $\arg(z+2+3i)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ مع $z\neq -2-3i$ أي : $z\neq z_A$.	*) $M\neq A$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل ، ما عدا النقطة A .
37	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي غيرمعدوم أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ أي أنّ : النقط $M;B;A$ في إستقامية .	هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B
38	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي سالب أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\pi+2k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\pi+2k\pi$.	هي قطعة المستقيم $[AB]$ ما عدا النقطتين A و B .
39	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ حقيقي موجب أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}\neq 0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=2k\pi$.	*) $M\neq A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=0+2k\pi$. أي أنّ : M تكون خارج القطعة $[AB]$.	هي المستقيم (AB) ما عدا القطعة $[AB]$.
40	$\frac{z-1+2i}{z+i}$ تخيلي صرف أي : $\frac{z-1+2i}{z+i}=0$ و $\arg(\frac{z-z_A}{z-z_B})=\frac{\pi}{2}+k\pi$.	*) $M=A$ و $M\neq B$ حيث : $A(1;-2)$ و $B(0;-1)$ *) $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$. أي : المثلث ABM قائم في M	هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B

41	أي : $z=k(1+i)e^{i\frac{7\pi}{12}}$ أي : $z=k.\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{i\frac{7\pi}{12}}$ $z=k.\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}$ مع $k\in\mathbb{R}^{+}$. *)إما $k=0$ أي : $z=0$ ، أو *) $\arg(z)=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.	*) $M=O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و زاويته $\frac{5\pi}{6}$ ما عدا المبدأ O .
42	أي : $\arg(\frac{z}{\bar{z}})=2k\pi$ أي : $\arg(z)-\arg(\bar{z})=2k\pi$ $\arg(z)+\arg(z)=2k\pi$ ، و منه : $\arg(z)=k\pi$.	*) $M\neq O$. معناه أنّ z حقيقي غير معدوم	هي حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .
43	$\arg(-z)=\arg(\bar{z})+2k\pi$ تصبح : $\pi+\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi$ أي : $2\arg(z)=-\pi+2k\pi$ و منه : $\arg(z)=-\frac{\pi}{2}+k\pi$.	*) $M\neq O$. معناه أنّ z تخيلي صرف .	هي حامل محور التراتيب ما عدا المبدأ O .
44	لدينا : $\arg(-z)-\arg(-\bar{z})=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أي : $2\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ و منه : $\arg(z)=\frac{\pi}{6}+k\pi$.	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{\pi}{6}+k\pi$.	هي المستقيم المار بـــ O و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{6}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء المبدأ O
45	لدينا : $\bar{z}=1-2i+k(1-i)e^{i\frac{\pi}{4}}$ $(k>0)$ أي : أي : $\bar{z}=1-2i+k(\sqrt{2}.e^{-i\frac{\pi}{4}})e^{i\frac{\pi}{4}}$ أي : $\bar{z}=1-2i+k.\sqrt{2}$ $z=1+k.\sqrt{2}+2i$ ، $(k>0)$	إذن : $\begin{cases}Re(z)=1+k.\sqrt{2}>0\\ Im(z)=2\end{cases}$	هي نصف المستقيم المعرف بـــ : $\begin{cases}Re(z)>1\\ Im(z)=2\end{cases}$.
46	$z=2-k.e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $(k>0)$ أي : $z=2+k.e^{i(\frac{\pi}{6}+\pi)}$ أي : $z=2+k.e^{i\frac{7\pi}{6}}$ مع $(k>0)$. و منه : $\arg(z)=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$	*) $M\neq O$. *) $(\vec{u};\overrightarrow{OM})=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$.	هي نصف المستقيم الذي مبدؤه O و زاويته $\frac{7\pi}{6}$ باستثناء المبدأ O .

2. تمارين مقترحة + حلول نموذجية



1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\frac{2}{\overline{z}+i}+\frac{2}{\overline{z}-i}=4$ ، وَ الجملة : $\begin{cases}2a+b=2\\-a+b=-1+3i\end{cases}$.

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط : A ، B ، C ، D لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=2i$ ، $z_D=1-i$.

أ) أكتب z_A وَ z_B على الشكل الأسي ، ثمّ أحسب العدد : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}$.

ب) تحقّق من أنّ : $z_A\times z_D=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$ ، ثمّ إستنتج قيمة كل من : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

ج) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $(\frac{z_A\times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا .

3) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z مع $z\neq 2i$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z'=\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}$

أ) تحقّق من أنّ : $OM'=3\times\frac{DM}{CM}$. إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ فإنّ M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تحديدها .

ب) بيّن أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM})+2k\pi$ ، حيث : $(k\in\mathbb{Z})$.

ج) إستنتج أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة ذات القطر $[CD]$ ما عدا النقطة C فإنّ النقطة M' تنتمي إلى مجموعة يطلب تحديدها .

حل التمرين 1:

1) حل المعادلة : $\frac{2}{\overline{z}+i}+\frac{2}{\overline{z}-i}=4$ ، أي : $\frac{2}{z-i}+\frac{2}{z+i}=4$ ، أي : $\frac{2(z-i)+2(z+i)}{(z-i)(z+i)}=4$

و منه : $\frac{4z}{z^2+1}=4$ ، أي : $4z^2-4z+4=0$ ، إذن : $\begin{cases}z_1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\\z_2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

لدينا الجملة : $\begin{cases}2a+b=2\\-a+b=-1+3i\end{cases}$ **بالطرح نجد :** $3a=3-3i$ ، **و منه :** $a=1-i$ وَ $b=2i$.

2) أ) لدينا : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، **أي :** $z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، **و لدينا :** $z_B=\overline{z_A}$ ، **و منه :** $z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $e^{i\frac{2018\pi}{3}}+e^{-i\frac{1439\pi}{3}}=(e^{i\frac{\pi}{3}})^{2018}+(e^{-i\frac{\pi}{3}})^{1439}=(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}$.

أي : $\begin{cases}\frac{2018\pi}{3}=\frac{2016\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=672\pi+\frac{2\pi}{3}\\\frac{1439\pi}{3}=\frac{1440\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=480\pi-\frac{\pi}{3}\end{cases}$ ، **و منه :** $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=e^{i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$ ،

أي : $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، **و منه :** $(z_A)^{2018}+(z_B)^{1439}=i\sqrt{3}$.

ب) لدينا : $z_D=1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ ، **أي :** $z_A\times z_D=e^{i\frac{\pi}{3}}\times\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

و منه : $z_A \times z_D = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})$ ، و هو المطلوب .

إستنتاج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{\pi}{12})$ وَ $\sin(\frac{\pi}{12})$.

لدينا : $z_A \times z_D = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i)$ ، أي : $z_A \times z_D = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

بالمطابقة بين الشكل المثلثي و الشكل الجبري للعدد $z_A \times z_D$ نجد :

$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ، $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

ج) لدينا : $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n = (e^{i\frac{\pi}{12}})^n = e^{i\frac{n\pi}{12}}$ ، إذن $(\frac{z_A \times z_D}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا موجبا إذا كان : $\frac{n\pi}{12} = 0 + 2k\pi$

و منه : $n = 24k$ ، أي : n مضاعف للعدد 24 .

3) أ) التحقق أنّ : $OM' = 3 \times \frac{DM}{CM}$ ، أي نحسب OM' و نتحقّق من المساواة :

$OM' = |z'| = |3i| \times \frac{|z-1+i|}{|z-2i|} = 3 \times \frac{|z-z_D|}{|z-z_B|}$ ، و منه : $OM' = 3 \times \frac{DM}{CM}$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى محور القطعة $[CD]$ معناه : $DM = CM$ ، أي : $\frac{DM}{CM} = 1$

و منه : $OM' = 3$ ، إذن M' ستكون تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O وَ نصف قطرها 3 .

ب) بيان أنّ : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

لدينا : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(z') + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg\left[\frac{3i(z-1+i)}{z-2i}\right] + 2k\pi$ ، أي :

$(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg(\frac{z-1+i}{z-2i}) + 2k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \arg(3i) + \arg(\frac{z-z_D}{z-z_B}) + 2k\pi$

و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) + 2k\pi$ ، و هو المطلوب .

❖ إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة التي قطرها $[CD]$ ، أي : $(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

و منه : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $(\vec{u};\overrightarrow{OM'}) = \pi + k\pi$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى حامل محور الفواصل ما عدا المبدأ O .

التمرين 2:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(z^2-2z-3)(z^2-4z+7) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة : $(2cm)$ نعتبر النقط A ، B ،

C و G لواحقها على الترتيب : $z_A = -1$ ، $z_B = 2+i\sqrt{3}$ ، $z_C = 2-i\sqrt{3}$ و $z_G = 3$.

أ) علّم النقط : A ، B ، C و G .

ب) أحسب العدد : $\dfrac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ، ثمّ إستنتج طبيعة المثلث GAC .

3) نعتبر (D) هي مجموعة النقط M من المستوي حيث : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12.......(1)$.

أ) برهن أنّ G هي مرجح الجملة : $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$.

ب) بيّن أنّ العلاقة (1) تكافئ العلاقة $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4.......(2)$.

ج) تحقّق أنّ A تنتمي إلى المجموعة (D) .

د) برهن أنّ العلاقة (2) تكافئ العلاقة $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0.......(3)$.

ه) إستنتج طبيعة المجموعة (D) ثمّ أنشئها .

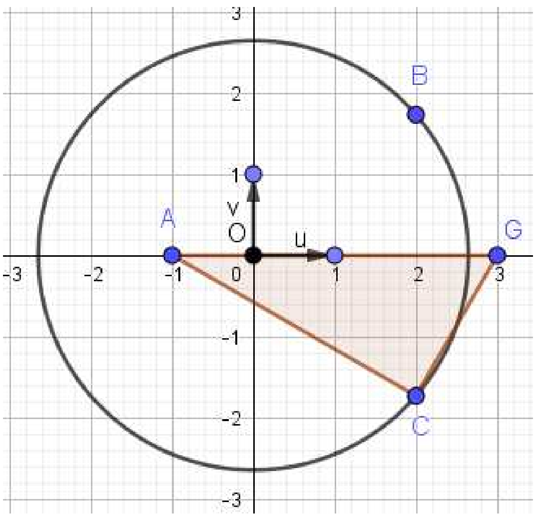
حل التمرين 2:

1) حل المعادلة : $(z^2-2z-3)(z^2-4z+7)=0$.

إما : $(z^2-2z-3)=0$ **أو** $(z^2-4z+7)=0$ **و منه :** $\begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=3 \end{cases}$ **أو** $\begin{cases} z_3=2-i\sqrt{3} \\ z_4=2+i\sqrt{3} \end{cases}$.

إذن : $S=\{-1;3;2-i\sqrt{3};2+i\sqrt{3}\}$.

2) أ) تعليم النقط :



ب) حساب العدد $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ **:**

$$\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}.$$

و منه : $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=i\sqrt{3}$ **(تخيلي صرف)**

أي : $(\overrightarrow{CG};\overrightarrow{CA})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، **و منه : المثلث** GAC **قائم في** C .

3) أ) لنبرهن أنّ النقطة G **هي مرجح الجملة** $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$:

نحسب لاحقة المرجح و يجب أن نجدها هي نفسها لاحقة النقطة G .

أي : $z=\dfrac{-z_A+2z_B+2z_C}{3}=\dfrac{9}{3}=3=z_G$ ، **و منه :** G **هي مرجح الجملة** $\{(A;-1);(B;2);(C;2)\}$.

ب) لدينا العلاقة : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG}=12.....(1)$ **تكافئ** $3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=12$ ، **أي :** $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{CG}=4$

و منه : $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4\ ....(2)$ ، **و هو المطلوب .**

ج) التحقق أنّ $A\in(D)$ **: نعوض** M **بـ** A **في العلاقة (2) ، أي :** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4\ ...(2)$ **ثم نتحقق من المساواة**

- لنحسب الجداء $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}$ **:**

لدينا : $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}-4\\0\end{pmatrix}$ **و** $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}1\\i\sqrt{3}\end{pmatrix}$ ، **و منه :** $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=(-4\times1)+(0\times i\sqrt{3})=-4$.

إذن : المساواة محققة ، أي أنّ : $A\in(D)$. $(\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4)$

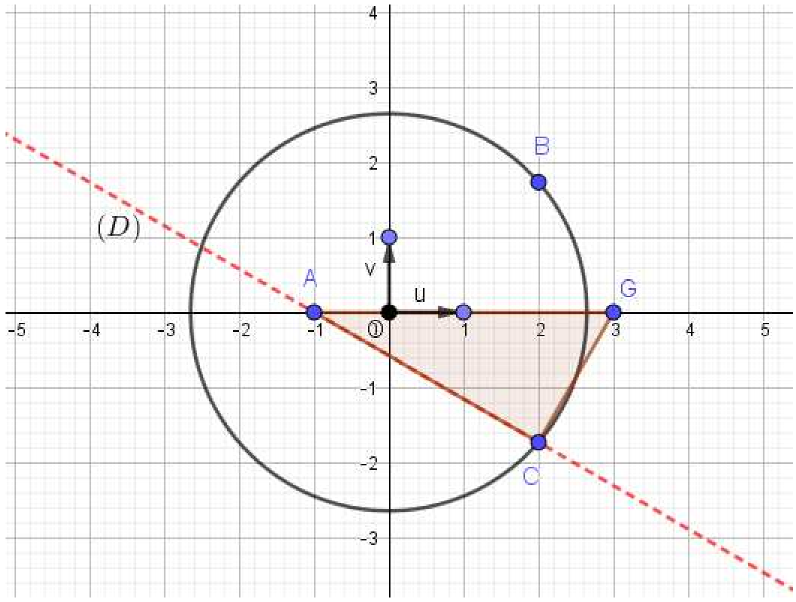
د) لدينا : $\begin{cases}\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}=-4\\ \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=-4\end{cases}$ **بالطرح نجد :** $\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{CG}=0$ ، **أي :** $(\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GA}).\overrightarrow{CG}=0$ ،

أي : $(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{AG}).\overrightarrow{CG}=0$ ، **و منه :** $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0.......(3)$ ، **و هو المطلوب .**

ه) لدينا : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CG}=0$ ، هذا يعني أنّ : $(AM)\perp(CG)$.

إذن : مجموعة النقط M هي المستقيم المار بالنقطة A و العمودي على (CG) ، أي : هي المستقيم (AC) .

*) الإنشاء :



التمرين 3:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة : $(8cm)$.

●) نعتبر A هي النقطة ذات اللاحقة -1 وَ B النقطة ذات اللاحقة 1 .

●) لتكن (Γ) هي مجموعة النقط من المستوي التي تختلف عن A ، B وَ O ، نرفق بكل نقطة M من (Γ) لاحقتها z النقطة N ذات اللاحقة z^2 وَ النقطة P ذات اللاحقة z^3 .

1) بيّن أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

2) نعتبر (C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

أ) باستعمال مبرهنة فيثاغورس بيّن أنّ المثلث MNP قائم في P معناه : $|z+1|^2+|z|^2=1$.

ب) برهن أنّ : $|z+1|^2+|z|^2=1$ تكافئ $(z+\frac{1}{2})(\overline{z+\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}$.

ج) إستنتج طبيعة المجموعة (C) .

3) نعتبر M نقطة من (Γ) لاحقتها z ، r هي طويلة z وَ α عمدته حيث : $\alpha\in\left]-\pi;\pi\right]$.

أ) برهن أنّ المجموعة (F) للنقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما هي إتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) مثّل (C) وَ (F) في المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

ج) عيّن لواحق النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائما في P وَ لاحقة النقطة P عدد حقيقي موجب تماما .

حل التمرين 3:

لدينا النقط : $A(-1)$ ، $B(1)$ و النقط : $M(z)$ ، $N(z^2)$ ، $P(z^3)$ هذه الأخيرة تختلف عن A ، B و O .

1) لنبيّن أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى :

أي تكون : $M\neq N$ ، $M\neq P$ و $N\neq P$.

- نعلم أنه : $M=N$ معناه : $z=z^2$ ، أي : $z^2-z=0$ ، أي : $z(z-1)=0$ ، و منه : $z=0$ أو $z=1$

أي أنّ : $M=O$ أو $M=B$ ، لكن M تختلف عن O و B ، إذن : $M\neq N$.

- و أيضا : $M=P$ معناه : $z=z^3$ ، أي : $z^3-z=0$ ، أي : $z(z^2-1)=0$ ، أي : $z=0$ أو $z^2-1=0$

و منه : $z=0$ أو $z=1$ أو $z=-1$ ، أي أنّ : $M=O$ أو $M=B$ أو $M=A$.

لكن M تختلف عن O ، B و A ، إذن : $M\neq P$.

ـ كذلك بنفس الطريقة نبيّن أنّ $N \neq P$.
إذن مما سبق نستنتج أنّ النقط M ، N و P متمايزة مثنى مثنى .

2) أ) المثلث MNP قائم في P معناه : $MN^2 = MP^2 + NP^2$ ، أي : $\left|z_N - z_M\right|^2 = \left|z_P - z_M\right|^2 + \left|z_P - z_N\right|^2$

أي : $\left|z^2 - z\right|^2 = \left|z^3 - z\right|^2 + \left|z^3 - z^2\right|^2$ ، أي : $\left|z(z-1)\right|^2 = \left|z(z^2-1)\right|^2 + \left|z^2(z-1)\right|^2$ ، أي :

$\left|z\right|^2.\left|z-1\right|^2 = \left|z\right|^2.\left|z-1\right|^2.\left|z+1\right|^2 + \left|z^2\right|^2\left|z-1\right|^2$ ، بما أنّ : $z \neq 1$ و $z \neq 0$ يمكن الإختزال بعد القسمة

على $\left|z\right|^2.\left|z-1\right|^2$ ، فنتحصل على : $1 = \left|z+1\right|^2 + \left|z\right|^2$ ، و منه : $\left|z+1\right|^2 + \left|z\right|^2 = 1$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $\left|z+1\right|^2 + \left|z\right|^2 = 1$ معناه : $(z+1)(\overline{z}+1) + z.\overline{z} = 1$ ، لأنّ : $\left|z\right|^2 = z.\overline{z}$ ، أي تصبح :

$\underline{z.\overline{z} + z} + \overline{z} + 1 + z.\overline{z} = 1$ ، أي : $2z.\overline{z} + z + \overline{z} = 0$.

و من جهة أخرى لدينا : $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ تعني : $(z+\frac{1}{2})(\overline{z}+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ ، أي تصبح :

$z.\overline{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ، أي : $z.\overline{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z} = 0$ (نضرب في 2) نجد : $2z.\overline{z} + z + \overline{z} = 0$.

إذن : من هذا و ذاك نستنتج أنّ المساواة $\left|z+1\right|^2 + \left|z\right|^2 = 1$ تكافئ المساواة $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$.

ج) طبيعة المجموعة (C) :

(C) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث يكون المثلث MNP قائم في P .

أي : $(z+\frac{1}{2})\overline{(z+\frac{1}{2})} = \frac{1}{4}$ ، أي : $\left|z+\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ ، أي : $\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ ، و منه : $EM = \frac{1}{2}$.

حيث : $z_E = -\frac{1}{2}$ ، إذن المجموعة (C) هي الدائرة التي مركزها E و نصف قطرها $\frac{1}{2}$ ما عدا النقطتين O و A .

3) (F) هي مجموعة النقط M من (Γ) بحيث تكون لاحقة P عدد حقيقي موجب تماما .

أ) P عدد حقيقي موجب تماما أي : z^3 عدد حقيقي موجب تماما ، أي أنّ : $\arg(z^3) = 0 + 2k\pi$ ، أي :

$3\arg(z) = 2k\pi$ ، أي : $\arg(z) = \frac{2k\pi}{3}$ ، و منه : $\alpha = \frac{2k\pi}{3}$ مع $(k \in \mathbb{Z})$ ، لكن : $-\pi < \alpha \leq \pi$ ،

أي : $-\pi < \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$ ، أي : $-1 < \frac{2k}{3} \leq 1$ ، أي : $-3 < 2k \leq 3$ ، أي : $-\frac{3}{2} < k \leq \frac{3}{2}$ ، و منه :

$k \in \{-1;0;1\}$ ، و منه : $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ أو $\alpha = 0$ أو $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

إذن : $\arg(z) = 0$ أو $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}$ أو $\arg(z) = -\frac{2\pi}{3}$.

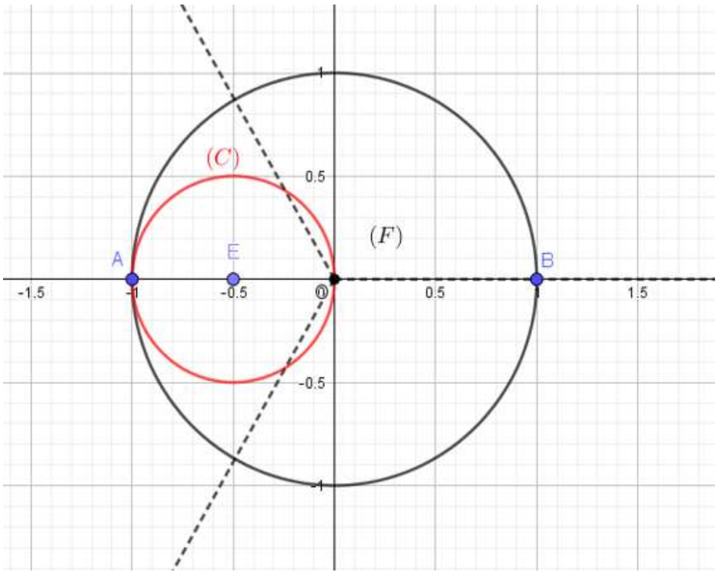
أي أنّ : المجموعة (F) تكون : نصف المستقيم $[Ox)$ ما عدا النقطتين O و B أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O

و يشكل زاوية قيسها $\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ما عدا النقطة O أو نصف المستقيم الذي مبدؤه O و يشكل

زاوية قيسها $-\frac{2\pi}{3}$ مع حامل محور الفواصل ما عدا النقطة O .

إذن : مجموعة النقط (F) هي إتحاد ثلاث أنصاف مستقيمات .

ب) التمثيل :



ج) بما أنّ المثلث MNP قائم في P و z_P موجب تماما ، إذن : M تنتمي إلى تقاطع المجموعتين (C) و (F) .

لدينا : (C) معرفة بالعلاقة $\left|z+1\right|^2+\left|z\right|^2=1$ لأنّ : $M\in(C)$ ، أي : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$ ، حيث :

$z=r.e^{i\frac{2k\pi}{2}}$ مع $k\in\{-1;0;1\}$ لأنّ : $M\in(F)$.

*) نعلم أنّ : $z.\bar{z}=\left|z\right|^2$ و $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$ ، أي : $z.\bar{z}=r^2$ و $z+\bar{z}=2\times r.\cos(\frac{2k\pi}{3})$.

إذن : $z.\bar{z}+\frac{1}{2}(z+\bar{z})=0$ تعني : $r^2+\frac{1}{2}\times 2r.\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$ ، أي : $r^2+r.\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$ ، أي :

$r\left[r+\cos(\frac{2k\pi}{3})\right]=0$ ، نعلم أنّ : $(r>0)$ ، إذن : $r+\cos(\frac{2k\pi}{3})=0$.

*) لما $k=0$ يكون : $r+1=0$ ، و منه : $r=-1$ (مرفوض) .

*) لما $k=1$ يكون : $r+\cos(\frac{2\pi}{3})=0$ ، أي : $r-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $r=\frac{1}{2}$.

*) لما $k=-1$ يكون : $r+\cos(-\frac{2\pi}{3})=0$ ، أي : $r-\frac{1}{2}=0$ ، و منه : $r=\frac{1}{2}$.

إذن : $r=\frac{1}{2}$ ، أي : $z_1=\frac{1}{2}.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $z_2=\frac{1}{2}.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ، و بالتالي توجد نقطتان تحققان المطلوب .

التمرين4:

1) عيّن العددين المركبين a و b علما أنّ : $\begin{cases}\bar{a}-\bar{b}=1+3i\\ a+ib=-1+3i\end{cases}$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$. نعتبر النقطتين A وَ B لاحقتاهما على الترتيب ؛ $a=3+i$ وَ $b=2+4i$ ، وَ نفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$.

أ) عيّن لاحقة النقطة C صورة O بالإنسحاب T .

ب) أحسب العدد $\frac{z_c - z_A}{z_B}$ ، ثمّ أكتبه على الشكل الأسي .

● ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ وَ $[OB]$ ؟ .

ج) إستنتج ممّا سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثمّ عيّن لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$.

3) نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O وَ يحوّل B إلى C .

أ) أعط الكتابة المركّبة للتشابه المباشر S .

ب) ماهي صورة النقطة A بالتشابه S ؟ .

ج) نضع ، $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$.

● أعط الكتابة المركّبة للتحويل S^4 ، وَ ماطبيعة هذا التحويل ؟ .

حل التمرين 4:

1) تعيين العددين المركبين a وَ b :

لدينا الجملة : $\begin{cases} \overline{a} - \overline{b} = 1+3i \\ a+ib = -1+3i \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} a-b = 1-3i \text{........}(1) \\ a+ib = -1+3i \text{.....}(2) \end{cases}$ **بالطرح نجد :** $-b-ib = 2-6i$ ، أي :

$b(-1-i) = 2-6i$ ، أي : $b = \frac{2-6i}{-1-i}$ $\boxed{b = 2+4i}$. **و بالتعويض نجد :** $a = 3+i$.

2) أ) تعيين لاحقة C صورة O بالإنسحاب T :

بما أنّ C هي صورة O بالإنسحاب T فإنّ : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ ، **و منه :** $z_C = z_B - z_A$ ، أي : $z_C = -1+3i$.

ب) حساب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B}$ ، ثم كتابته على الشكل الأسي :

لدينا : $i = \frac{-4+2i}{2+4i} = \frac{-1+3i-3-i}{2+4i} = \frac{z_C - z_A}{z_B}$ ، أي : $\frac{z_C - z_A}{z_B} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

إذن : $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B}\right| = 1$ وَ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، **ومنه :** $AC = OB$ وَ $(\overrightarrow{OB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

إذن القطعتان $[AC]$ و $[OB]$ متقايستان و متعامدتان .

ج) إستنتاج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ و تعيين لاحقة النقطة E :

بما أنّ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ فإنّ الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع ، وَ بما أنّ $[AC]$ ، $[OB]$ متقايستان و متعامدتان فسيكون الرباعي $OABC$ مربّع .

E هي مركز تناظر الرباعي $OABC$ ، أي : هي منتصف القطرين ، و منه : $z_E = \frac{z_O + z_B}{2} = 1+2i$.

3) أ) الكتابة المركبة للتشابه

لدينا : S مركزه O و يحوّل B إلى C أي : $z' - z_O = ke^{i\theta}(z - z_O)$ ، أي : $z' = ke^{i\theta}z$ ، **و منه :**

$z_C = ke^{i\theta}z_B$ ، أي : $\frac{z_C}{z_B} = ke^{i\theta}$.

نحسب $\frac{z_C}{z_B}$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \left(\frac{-1+3i}{2+4i}\right)\left(\frac{2-4i}{2-4i}\right) = \frac{-1+3i}{2+4i} = \frac{z_C}{z_B}$.

لدينا: $\begin{cases} \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ ، **إذن عبارة التشابه S هي :** $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z$ أو $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$.

ب) صورة A بالتشابه S :

لدينا : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$ ، أي : $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)z_A$ ، أي: $z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)(3+i)$ ، **و منه:** $z' = 1+2i$.

إذن : E هي صورة A بالتشابه S .

ج) العبارة المركبة للتحويل S^4 ، و طبيعته :

لدينا : $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$ ، أي أنّ : S^4 هو تشابه مباشر نسبته : $k=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$ ، وزاويته : $\theta = 4\times\frac{\pi}{4}=\pi$ و مركزه : O .

- الكتابة المركبة : $z'=\frac{1}{4}e^{i\pi}.z$ ، أي : $z'=-\frac{1}{4}z$ ، لأنّ : $e^{i\pi}=-1$. إذن التحويل S^4 هو تحاكي مركزه O و نسبته $-\frac{1}{4}$.

التمرين 5: خاص بالتقني رياضي + رياضي

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $6cm$) .

نعتبر التحويل f للمستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث ، $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}}$.

و لتكن النقطة M_0 ذات اللاحقة z_0 ، حيث ، $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = f(M_n)$ وَ نسمي z_n لاحقة النقطة M_n .

1) عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f ، ثمّ علّم النقط ، M_0 ، M_1 ، M_2 ، M_3 .

2) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون ، $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) نعتبر n وَ p عددان طبيعيان . برهن أنّ النقطتان M_n وَ M_p متطابقتان إذا وافقط إذا كان $(n-p)$ مضاعفا لـ 12 .

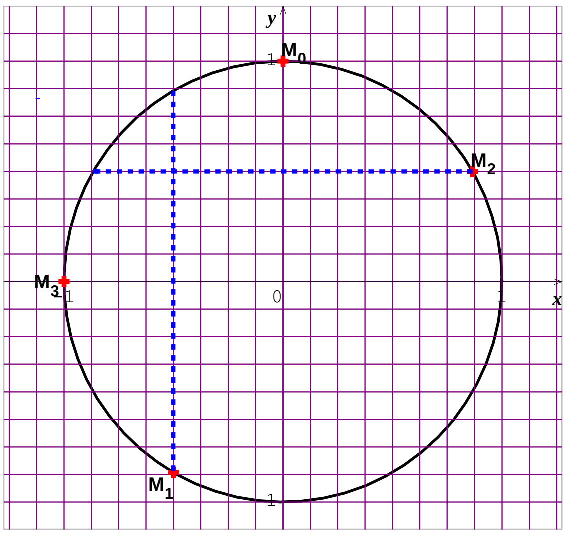
4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ، $12x-5y=3$ علما أنّ الثنائية $(4;9)$ حل خاص لها .

ب) إستنتج مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث تكون النقطة M_n تنتمي إلى نصف المستقيم $[Ox)$.

حل التمرين 5:

1) طبيعة التحويل f : $z' = ze^{i\frac{5\pi}{6}} \Leftarrow f$ هو دوران مركزه O وَ زاويته $\frac{5\pi}{6}$.

2) البرهان من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، **لنستعمل البرهان بالتراجع :**



✓ **نتحقّق من أجل :** $n=0$: $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2}+0\times\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي : $z_0 = e^{i(\frac{\pi}{2})}$ ، **(محققة) .**

✓ **نفرض صحة :** $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

✓ **نبرهن صحة :** $z_{n+1} = e^{i(\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6})}$.

البرهان : نعلم أنّ : $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}}z_n$ ،

وَ لدينا فرضا :

$z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، **أي :** $z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}} \times e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ،

أي : $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}\right]}$ ، **أي :** $z_{n+1} = e^{i\left[\frac{\pi}{2}+(n+1)\frac{5\pi}{6}\right]}$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$.

3) M_n و M_p متطابقتان معناه أنّ : $z_n = z_p$ ، أي : $e^{i(\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6})} = e^{i(\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6})}$ ، و هذا معناه أنّ :

$\frac{\pi}{2}+p\frac{5\pi}{6}+2k\pi = \frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6}$ ، أي : $p\frac{5\pi}{6}+2k\pi = n\frac{5\pi}{6}$ ، أي : $n\times 5\pi = p\times 5\pi + 12k\pi$ أي :

$5n = 5p + 12k$ ، أي : $5n - 5p = 12k$ ، ومنه : $5(n-p) = 12k$. $12 / 5(n-p)$ و 12

أوّلي مع 5 ، حسب غوص : 12 يقسم $(n-p)$ ، أي أنّ : $(n-p)$ مضاعف لـ 12 .

4) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $12x-5y=3$: $12x-5y=12(4)-5(9)$ ، أي : $12(x-4)=5(y-9)$ حسب غوص نستنتج أنّ :

$\begin{cases} x = 5k+4 \\ y = 12k+9 \end{cases}$ حيث : $k \in \mathbb{Z}$.

ب) $M_n \in [Ox)$ معناه أنّ : z_n حقيقي موجب ، أي : $\arg(z_n) = 0+2k\pi$ ، أي : $\frac{\pi}{2}+n\frac{5\pi}{6} = 2k\pi$ ، أي :

$3\pi + 5n\pi = 12k\pi$ ، أي : $3+5n=12k$ ، أي : $12k-5n=3$.

إذن : $n = y = 12k+9$ مع $k \in \mathbb{N}$.

التمرين 6:

1) أ) نعتبر (r_n) المتتالية الهندسية التي حدها الأول r_0 و أساسها $\frac{2}{3}$ ، مع $r_0 > 0$.

❖ عبّر عن r_n بدلالة r_0 و n .

ب) نعتبر (θ_n) المتتالية الحسابية التي حدها الأول θ_0 و أساسها $\frac{2\pi}{3}$ ، مع $\theta_0 \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

❖ عبّر عن θ_n بدلالة θ_0 و n .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $z_n = r_n.(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ ، علما أنّ ؛ $z_0\times z_1\times z_2 = 8$.

❖ عيّن الطويلة و العمدة لكل من ؛ z_1 و z_2 .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ وحدة ؛ $4cm$.

نسمي M_n النقطة ذات اللاحقة z_n .

أ) علم النقط ؛ M_0 ، M_1 ، M_2 و M_3 .

ب) عبّر عن ؛ $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$ بدلالة n .

ج) نضع ؛ $L_n = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$.

❖ عبّر عن L_n بدلالة n .

❖ مـاهي نهاية L_n لما n يؤول إلى $+\infty$ ؟ .

حل التمرين 6:

1) أ) التعبير عن r_n بدلالة r_0 و n : $r_n = r_0\times q^n$ و منه : $r_n = r_0.(\frac{2}{3})^n$.

ب) التعبير عن θ_n بدلالة θ_0 و n : $\theta_n = \theta_0 + \frac{2\pi}{3}n$ و منه : $\theta_n = \theta_0 + \frac{2n\pi}{3}$.

ج) لدينا : $z_0\times z_1\times z_2 = 8$.

*) $|z_0\times z_1\times z_2|=|8|$ أي : $|z_0|\times|z_1|\times|z_2|=8$ أي : $r_0\times r_1\times r_2=8$ و نعلم أنّ : $r_0\times r_2=r_1^2$

إذن : $r_1\times r_1^2=8$ أي : $r_1^3=8$ و عليه : $r_1=2$.

*) $\arg(z_0\times z_1\times z_2)=\arg(8)+2k\pi$ أي : $\arg(z_0)+\arg(z_1)+\arg(z_2)=0+2k\pi$ ، أي :

$\theta_0+\theta_1+\theta_2=2k\pi$ و نعلم أنّ : $\theta_0+\theta_2=2\theta_1$ ، إذن : $3\theta_1=2k\pi$ و عليه : $\theta_1=\frac{2k\pi}{3}$.

نعلم أنّ : $\theta_0=\theta_1-\frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_0=\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}$ و لدينا أيضا : $\theta_0\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ ، أي :

$0\le\frac{2k\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$ ، أي : $0\le\frac{2k}{3}-\frac{2}{3}<\frac{1}{2}$ أي : $\frac{2}{3}\le\frac{2k}{3}<\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ ، أي : $\frac{2}{3}\le\frac{2k}{3}<\frac{7}{6}$

أي : $\frac{6}{3}\le 2k<\frac{21}{6}$ ، أي : $2\le 2k<\frac{21}{6}$ ، و منه : $1\le k<\frac{21}{12}$ ، إذن : $k=1$.

و منه سنجد أنّ : $\theta_0=0$.

*) حساب r_1 و r_2 :

لدينا : $r_1=2$ ، أي : $r_2=r_1\times\frac{2}{3}$ ، و منه : $r_2=\frac{4}{3}$. إذن : $r_0=3$ و $r_3=\frac{8}{9}$.

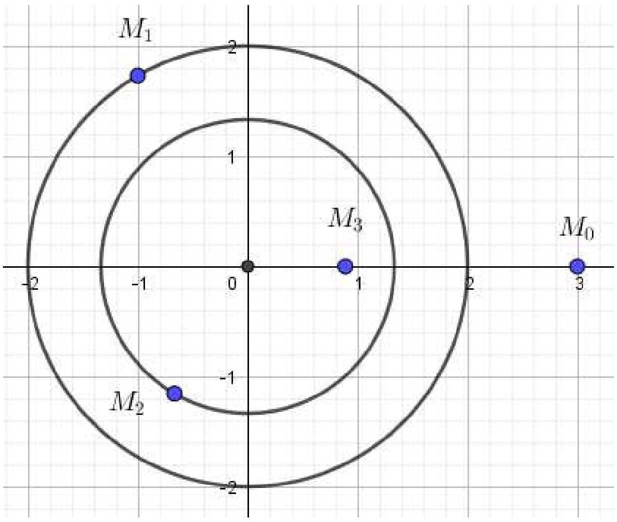
*) حساب θ_1 و θ_2 :

لدينا : $\theta_1=\theta_0+\frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_1=\frac{2\pi}{3}$. لدينا : $\theta_2=\theta_1+\frac{2\pi}{3}$ و منه : $\theta_2=\frac{4\pi}{3}$ و $\theta_3=2\pi$.

2) تعليم النقط :

لدينا : $z_0=3$ ، $z_1=-1+i\sqrt{3}$

$z_2=-\frac{2}{3}-i\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $z_3=\frac{8}{9}$



ب) التعبيّر عن $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ بدلالة n :

نعلم أنّ : $\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|=|z_{n+1}-z_n|$.

لدينا : $z_n=r_n.e^{i(\theta_n)}$ ، أي : $z_n=r_0\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، و منه : $z_n=3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$.

و لدينا : $z_{n+1}=r_{n+1}.e^{i(\theta_{n+1})}$ ، و منه : $z_{n+1}=3\times(\frac{2}{3})^{n+1}.e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})}$.

إذن : $z_{n+1}-z_n=3\times(\frac{2}{3})^{n+1}.e^{i(\frac{2(n+1)\pi}{3})}-3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}$ ، أي :

$z_{n+1}-z_n=3\times(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\left[\frac{2}{3}.e^{i(\frac{2\pi}{3})}-1\right]$ ، أي : $z_{n+1}-z_n=3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\left[\frac{2}{3}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-1\right]$ أي :

$z_{n+1}-z_n=3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\times(-\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3}-1)$ ، أي : $z_{n+1}-z_n=3(\frac{2}{3})^n.e^{i(\frac{2n\pi}{3})}\times(-\frac{4}{3}+i\frac{\sqrt{3}}{3})$

و منه : $|z_{n+1}-z_n|=3\times(\frac{2}{3})^n\times\frac{\sqrt{19}}{3}$ ، أي : $|z_{n+1}-z_n|=\sqrt{19}\times(\frac{2}{3})^n$.

و عليه : $\left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\| = \sqrt{19}\times(\frac{2}{3})^n$.

ج) لدينا : $L_n = \left\|\overrightarrow{M_0M_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\right\|$

*) التعبير عن L_n بدلالة n :

$L_n = \sqrt{19}(\frac{2}{3})^0 + \sqrt{19}(\frac{2}{3})^1 + \sqrt{19}(\frac{2}{3})^2 + ... + \sqrt{19}(\frac{2}{3})^n$ ، أي :

$L_n = \sqrt{19}\left[(\frac{2}{3})^0 + (\frac{2}{3})^1 + (\frac{2}{3})^2 + ... + (\frac{2}{3})^n\right]$.

نلاحظ أنّ : $\left[(\frac{2}{3})^0 + (\frac{2}{3})^1 + (\frac{2}{3})^2 + ... + (\frac{2}{3})^n\right]$ هو مجموع متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ و حدها الأول 1 عدد حدودها $(n+1)$ حدا .

إذن : $L_n = \sqrt{19}\left[1\times\frac{1-(\frac{2}{3})^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}\right]$ ، أي : $L_n = \sqrt{19}\times 3\left[1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$ ، و منه : $L_n = 3\sqrt{19}\left[1-(\frac{2}{3})^{n+1}\right]$

*) حساب $\lim_{n\to+\infty} L_n$:

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^{n+1} = 0$ ، و منه : $\lim_{n\to+\infty} L_n = 3\sqrt{19}$.

التمرين 7:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نعتبر النقط C,B,A التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 1+i\sqrt{3}$ و $z_C = 1-i\sqrt{3}$.

I) 1) أ) أعط الشكل الأسي لـ z_B ثمّ لـ z_C .

ب) علّم النقط : C,B,A .

2) عيّن طبيعة الرباعي $OBAC$.

3) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z| = |z-2|$.

II) نرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z $(z \neq z_A)$ النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث : $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1) أ) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z = \frac{-4}{z-2}$.

ب) إستنتج النقطتين المرفقتين بالنقطتين B و C .

ج) عيّن و علّم G' النقطة المرفقة بالنقطة G مركز الثقل للمثلث OAB .

2) أ) برهن أنّه من أجل كل z يختلف عن 2 يكون : $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

ب) بيّن أنّه إذا كانت M نقطة كيفية من المجموعة (D) المذكورة في الجزء الأوّل فإنّ M' تنتمي إلى المجموعة (T) يطلب تعيينها ثمّ إنشائها .

حل التمرين 7:

I) 1) أ) إعطاء الشكل الأسي لـ z_B ثمّ لـ z_C :

*) لدينا : $z_B = 1+i\sqrt{3}$ ، أي : $\begin{cases} |z_B| = 2 \\ \arg(z_B) : \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases} \Bigg\rangle \theta = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ و منه : $z_B = 2.e^{\frac{\pi}{3}}$.

*) نلاحظ أنّ : $z_C = \overline{z_B}$ ، و منه : $z_C = 2.e^{-\frac{\pi}{3}}$.

ب) تعليم النقط : (أنظر الشكل أسفله) .

2) طبيعة الرباعي $OBAC$:

- لدينا : $z_A - z_B = z_C - z_O$ ، أي أنّ : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$ ، إذن الرباعي $OBAC$ متوازي أضلاع .

- و من جهة أخرى لدينا : $|z_B| = |z_C|$ أي أنّ : $OB = OC$ ، إذن الرباعي $OBAC$ هو معين .

3) طبيعة المجموعة (D) :

لدينا : $|z| = |z-2|$ ، أي : $OM = AM$ ، و منه : (D) هي محور القطعة $[OA]$.

II) لدينا : $z' = \dfrac{-4}{z-2}$ مع $(z \neq z_A)$.

1) أ) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z = \dfrac{-4}{z-2}$ ، هذه الأخيرة تكافئ : $z^2 - 2z + 4 = 0$ مع $(z \neq 2)$.

نجد : $\Delta = (2\sqrt{3}i)^2$ ، و منه : $z_1 = 1+i\sqrt{3}$ و $z_2 = 1-i\sqrt{3}$.

ب) مما سبق نستنتج أنّ النقطة المرفقة بالنقطة B هي B نفسها و النقطة المرفقة بالنقطة C هي C نفسها أيضا .

ج) لدينا : النقطة G هي مركز الثقل للمثلث OAB ، أي : $z_G = \dfrac{z_O + z_A + z_B}{3}$ ، و منه : $z_G = 1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

إذن : $z_{G'} = \dfrac{-4}{z_G - 2}$ ، أي : $z_{G'} = \dfrac{-4}{1 + i\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 2}$ و منه بعد الحساب نجد : $z_{G'} = 3 + i\sqrt{3}$.

*) تعليم $z_{G'}$: (أنظر الشكل أسفله)

2) أ) البرهان أنّ : $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$.

لدينا : $|z'-2| = \left|\dfrac{-4}{z-2} - 2\right|$ ، أي : $|z'-2| = \left|\dfrac{-4-2z+4}{z-2}\right|$ ، أي : $|z'-2| = \left|\dfrac{-2z}{z-2}\right|$ ، و منه :

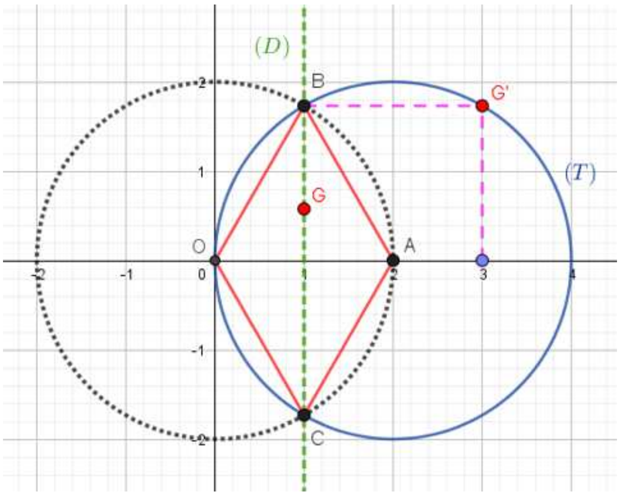
$|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$ و هو المطلوب .

ب) إذا كانت M تنتمي إلى المجموعة (D) فإنّ : $OM = AM$ ، أي : $|z| = |z-2|$.

و منه : المساواة $|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}$ تصبح : $|z'-2| = 2$ ، أي أنّ : $AM' = 2$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T) التي مركزها A و نصف قطرها 2 .

*) الإنشاء :



التمرين 8:

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (وحدته $2cm$) .

نفرض النقطتين : A وَ B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = i$ ، $z_B = 1+2i$.

1) برّر أنّه يوجد تشابه مباشر S حيث : $S(A) = B$ وَ $S(O) = A$.

2) أ) بيّن أنّ الكتابة المركبة للتشابه S هي : $z' = (1-i)z + i$.

ب) عيّن العناصر المميزة لـ S (نسمي Ω المركز) .

3) نعتبر متتالية النقط (A_n) حيث : A_0 هي المبدأ O و من أجل كل عدد طبيعي n : $A_{n+1} = S(A_n)$.

نسمي z_n لاحقة A_n (لدينا إذن : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$) .

أ) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1-(1-i)^n$.

ب) عيّن بدلالة n لاحقتي الشعاعين : $\overrightarrow{\Omega A_n}$ وَ $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$.

❖ قارن بين طويلتي هذين الشعاعين و احسب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$.

ج) إستنتج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n ثمّ أنشئ A_3 وَ A_4 .

د) عيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) .

حل التمرين 8:

1) بما أنّ : A **تختلف عن** B **و** A **تختلف عن** O **، فإنّه يوجد تشابه مباشر** S **يحوّل** A **إلى** B **و يحوّل** O **إلى** A .

2) أ) تبيين أن الكتابة المركبة لـ S **هي :** $z' = (1-i)z + i$.

لدينا : $\begin{cases} S(A) = B \\ S(O) = A \end{cases}$ **أي :** $\begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_A = az_O + b \end{cases}$ **بالطرح نجد :** $z_B - z_A = a(z_A - z_O)$ **، أي :**

$a = \dfrac{z_B - z_A}{z_A - z_O} = \dfrac{1+2i-i}{i}$ **، و منه :** $a = 1-i$ **. نعوض قيمة** a **في** $z_A = az_O + b$ **نجد :** $z_A = b$ **، أي :**

$b = i$ **، إذن الكتابة المركبة للتشابه** S **هي :** $z' = (1-i)z + i$ **، و هو المطلوب .**

ب) العناصر المميزة للتشابه S **:**

لدينا : $a = 1-i$ **، أي :** $\begin{cases} |a| = \sqrt{2} \\ \arg(a) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$ **و لدينا :** $z_\Omega = \dfrac{b}{1-a} = 1$ **، أي :** $\Omega(1;0)$.

إذن العناصر المميزة للتشابه S **هي : نسبته** $\sqrt{2}$ **، زاويته** $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ **و مركزه** Ω .

3) أ) لنبرهن بالتراجع على أنّه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1-(1-i)^n$

- لنتحقق من أجل $n=0$ ، أي : $z_0 = 1-(1-i)^0$ ، أي : $z_0 = 0$ ، و منه : z_0 لاحقة A_0 (محققة) .

- نفرض صحة : $z_n = 1-(1-i)^n$ و نبرهن صحة : $z_{n+1} = 1-(1-i)^{n+1}$:

لدينا : $A_{n+1} = S(A_n)$ ، أي : $z_{n+1} = (1-i)z_n + i$ و لدينا فرضا أنّ : $z_n = 1-(1-i)^n$ ، أي :

$z_{n+1} = (1-i)\left[1-(1-i)^n\right]+i$ ، أي : $z_{n+1} = 1-i-(1-i)(1-i)^n + i$ ، و منه :

$z_{n+1} = 1-(1-i)^{n+1}$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 1-(1-i)^n$.

ب) تعيين بدلالة n لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$:

❖ $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = z_n - z_\Omega$ ، أي : $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = 1-(1-i)^n - 1$ ، و منه : $z_{\overrightarrow{\Omega A_n}} = -(1-i)^n$.

❖ $z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}} = z_{n+1} - z_n$ ، أي : $z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}} = 1-(1-i)^{n+1} - 1 + (1-i)^n$ ، و منه : $z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}} = i(1-i)^n$.

*) المقارنة بين طويلتي الشعاعين $\overrightarrow{\Omega A_n}$ و $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$:

❖ $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\| = \Omega A_n$ ، أي : $\Omega A_n = \left|-(1-i)^n\right| = \left|1-i\right|^n$ ، و منه : $\Omega A_n = (\sqrt{2})^n$.

❖ $\left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\| = A_nA_{n+1}$ ، أي : $A_nA_{n+1} = \left|i(1-i)^n\right| = \left|i\right|.\left|1-i\right|^n$ ، و منه : $A_nA_{n+1} = (\sqrt{2})^n$.

إذن نستنتج أنّ : $\left\|\overrightarrow{\Omega A_n}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right\|$ أي : $\Omega A_n = A_nA_{n+1}$.

*) حساب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}})$: $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg(\frac{z_{\overrightarrow{A_nA_{n+1}}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}) + 2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \arg\left[\frac{i(1-i)^n}{-(1-i)^n}\right] + 2k\pi = \arg(-i) + 2k\pi$.

و منه : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ج) إستنتاج طريقة إنشاء النقطة A_{n+1} بمعرفة النقطة A_n :

لدينا : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{A_n\Omega};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = -\frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi$ ،

و منه : $(\overrightarrow{A_n\Omega};\overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و لدينا من قبل أنّ : $\Omega A_n = A_nA_{n+1}$ ، إذن النقطة A_{n+1} هي صورة النقطة Ω بالدوران الذي مركزه A_n و زاويته

$\frac{\pi}{2}$ ، فبذلك سيكون المثلث ΩA_nA_{n+1} متقايس الضلعين و قائم في A_n .

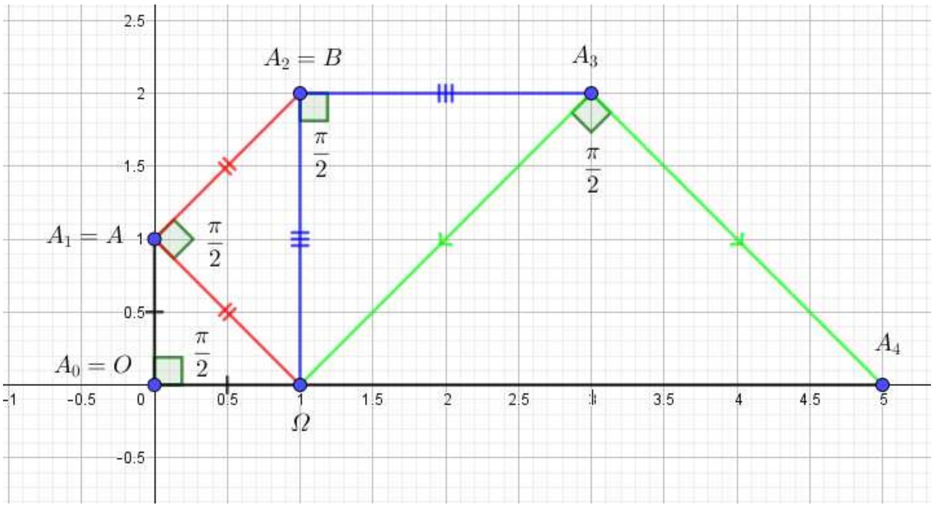
*) إنشاء النقطتين A_3 و A_4 :

أولا ننشئ كل من النقط : $A_0 = O$ ، $A_1 = A$ ، $A_2 = B$ و $\Omega(1;0)$ ، بعدها سنلاحظ أنّ كل من المثلثين

ΩAB و ΩOA المتقايسا الضلعين و القائمين في A و O على الترتيب .

إذن لإنشاء النقطتين A_3 و A_4 نقوم بإنشاء المثلثين ΩBA_3 و ΩA_3A_4 المتقايسا الضلعين و القائمين في B و A_3

على الترتيب . (أنظر إلى الشكل الموالي) :



د) تعيّن النقط A_n التي تنتمي إلى المستقيم (ΩB) :

لدينا : $A_n \in (\Omega B)$ يعني أنّ النقط Ω ، B و A_n على إستقامة واحدة ، أي : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega B}) = k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$

و منه : $(\overrightarrow{\Omega A_n};\overrightarrow{\Omega A_2}) = k\pi$ ، أي : $\arg(\frac{z_{\overrightarrow{\Omega A_n}}}{z_{\overrightarrow{\Omega A_2}}}) = k\pi$ ، أي : $\arg\left[\frac{-(1-i)^n}{-(1-i)^2}\right] = k\pi$ ، و منه :

$\arg\left[(1-i)^{n-2}\right] = k\pi$ ، أي : $(n-2)\arg(1-i) = k\pi$ ، أي : $(n-2)(-\frac{\pi}{4}) = k\pi$ ، و منه :

$n-2 = -4k$ ، إذن : $n = -4k+2$ مع $k \in \mathbb{Z}^-$ لأنّ $n \in \mathbb{N}$.

و عليه فسيكون : $n \in \{2;6;10;14;.....\}$.

إذن النقط A_n التي تنتمي للمستقيم (ΩB) هي : A_2 ، A_6 ، A_{10} ، A_{14} ، .... إلخ .

التمرين9:

I) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط : A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 1+i$ ، $z_B = i$ و $z_C = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S يحوّل A إلى B و يحوّل B إلى C .

2) أعط العبارة المركبة لـ S ثمّ استنتج العناصر المميزة له .

3) نعتبر النقطة A_0 ذات اللاحقة $z_0 = 2$ و النقطتان A_n ، A_{n+1} لاحقتاهما z_n و z_{n+1} حيث : $z_{n+1} = \frac{1+i}{2}z_n$.

أ) أحسب كلا من : z_1, z_2, z_3, z_4 ثمّ علّم النقط : A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ج) ما هي أوّل نقطة A_n تنتمي إلى القرص الذي مركزه O و نصف قطره $0,1$ ؟ .

II) تحتوي علبة على 30 كرة مرقّمة من 1 إلى 30 لا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب عشوائيا كرة واحدة من العلبة و نسجل رقمها n $(1 \leq n \leq 30)$ ثمّ نعلّم النقطة A_n ذات اللاحقة z_n (المذكورة في السؤال 3 -ب-).

- أحسب إحتمال كل حادثة :

A : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور الفواصل " .

B : " النقطة A_n تنتمي إلى حامل محور التراتيب " .

C : " النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ " .

حل التمرين 9:

I) 1) بما أنّ : A تختلف عن B و A تختلف عن C ، فإنّه يوجد تشابه مباشر S يحوّل A إلى B ، و يحوّل B إلى C .

2) العبارة المركبة للتشابه S : $z' = az+b$. لدينا : $S(A)=B$ و $S(B)=C$ ، و منه :

$\begin{cases} z_B = az_A+b \\ z_C = az_B+b \end{cases}$ بالطرح نجد : $z_B - z_C = a(z_A - z_B)$ ، و منه : $a = \frac{z_B-z_C}{z_A-z_B} = \frac{i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{1+i-i}$ ،

و منه : $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. نختار : $z_B = az_A+b$ ، أي : $i=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)(1+i)+b$ ، و منه : $b=0$.

إذن العبارة المركبة للتشابه S هي : $\boxed{z'=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)z}$.

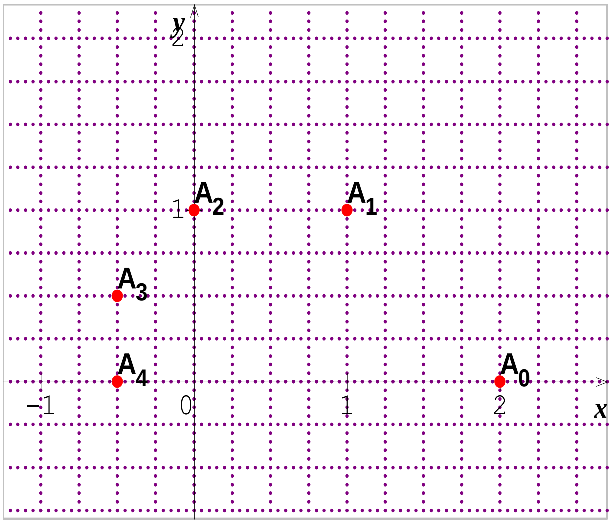
العناصر المميزة لـ S : النسبة : $k=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، الزاوية : $\arg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)=\frac{\pi}{4}$ ، المركز : المبدأ O .

3) أ) حساب : z_1,z_2,z_3,z_4 ، ثمّ تعليم النقط : A_0,A_1,A_2,A_3,A_4 .

لدينا : $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}z_n$ ، أي : $z_1=\frac{1+i}{2}z_0=\frac{1+i}{2}\times 2 = 1+i$ ، $z_2=\frac{1+i}{2}z_1=\frac{1+i}{2}\times 1+i = i$ ،

$z_3=\frac{1+i}{2}z_2=\frac{1+i}{2}\times i = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ ، $z_4=\frac{1+i}{2}z_3=-\frac{1}{2}$

تعليم النقط : (أنظر الشكل المقابل) .



ب) برهان أنّ : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- التحقق من أجل $n=0$ ، أي : $z_0=2$ (محققة) .

- نفرض صحة : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

- و نبرهن صحة : $z_{n+1}=2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} .\ e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$.

لدينا فرضا : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ، أي : $z_{n+1}=\frac{1+i}{2}\times 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ،

أي : $z_{n+1} = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} .\ e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{4})}$ ، و منه : $z_{n+1}=2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1} .\ e^{i\frac{(n+1)\pi}{4}}$ و هو المطلوب .

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n .\ e^{i\frac{n\pi}{4}}$.

ج) النقطة A_n تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره 0,1 :

معناه أنّ : $OA_n \le 0,1$ ، أي : $|z_n|\le 0,1$ ، أي : $2\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \le 0,1$ ، أي : $(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \le 0,05$ ، و منه :

أي : $\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})^n \leq \ln(0,05)$ ، أي : $n\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) \leq \ln(0,05)$ ، ومنه : $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})}$ ، أي : $n \geq 8,64$.

إذن : $n \in \{9;10;11;12;........\}$ و منه : أوّل نقطة تكون في القرص الذي مركزه O و نصف قطره **0,1** هي : A_9 .

II) A : "النقطة A_n تنتمي إلى محور الفواصل" معناه أنّ : z_n حقيقي ، أي : $\arg(z_n) = k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = k\pi$

أي : $\frac{n}{4} = k$ ، و منه : $n = 4k$ ، (n مضاعف لـ 4) أي : $n \in \{4;8;12,16;20;24;28\}$. إذن : $p(A) = \frac{7}{30}$.

B : "النقطة A_n تنتمي إلى محور التراتيب" معناه أنّ : z_n تخيلي صرف ، أي : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، و منه :

$n = 4k+2$ ، أي : $n \in \{2;6;10,14;18,22,26;30\}$. إذن : $p(B) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

C : "النقطة A_n تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$" ، أي أنّ : $\arg(z_n) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ، أي : $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

أي : $\frac{n}{4} = \frac{1}{4} + k$ ، ومنه : $n = 4k+1$ ، أي : $n \in \{1;5;9;13;17;21,25,29\}$. إذن : $p(C) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$.

التمرين 10:

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$.

- نعتبر A و B نقطتان لاحقاتاهما على الترتيب ؛ $a = 1$ و $b = -1$.
- نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث ؛ $z' = \frac{z-1}{z+1}$ مع $z \neq -1$

1) أ) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً حقيقياً .

ب) عيّن و أنشئ المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' تخيلياً صرفاً .

ج) عيّن و أنشئ المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون ؛ $|z'| = 1$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد مركب z يختلف عن -1 يكون ؛ $(z'-1)(z+1) = -2$.

ب) إستنتج أنّ ؛ $AM' \times BM = 2$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'}) + (\vec{u};\overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi$.

3) بيّن أنّه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 فإنّ M' تنتمي إلى الدائرة (T') يطلب تعيينها .

4) نرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي النقطة N ذات اللاحقة $-\bar{z}$.

❖ بيّن أنّه إذا كانت M تختلف عن B فإنّ M' تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$.

5) نعتبر K النقطة ذات اللاحقة ؛ $t = -2 + i\sqrt{3}$.

أ) أكتب $(t+1)$ على الشكل الأسي .

ب) بيّن أنّ النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) .

6) باستعمال الأسئلة السابقة ، أعط إنشاءاً للنقطة K' المرفقة بالنقطة K بواسطة العلاقة ؛ $z' = \frac{z-1}{z+1}$.

حل التمرين 10:

1) أ) يكون z' عدداً حقيقياً معناه : $z' = 0$ أو $\arg(z') = k\pi$ ، أي : $\frac{z-1}{z+1} = 0$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) = k\pi$

أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1\neq 0 \end{cases}$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=k\pi$ ، و منه : المجموعة (Δ) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً حقيقياً هي المستقيم (AB) ما عدا النقطة B .

ب) يكون z' تخيلياً صرفاً معناه : $z'=0$ أو $\arg(z')=\frac{\pi}{2}+k\pi$

أي : $\frac{z-1}{z+1}=0$ أو $(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ، أي : $\begin{cases} z-1=0 \\ z+1\neq 0 \end{cases}$ أو المثلث AMB قائم في M .

و منه : المجموعة (Δ') للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون z' عدداً تخيلياً صرفاً هي الدائرة ذات القطر AB ما عدا النقطة B .

ج) يكون $|z'|=1$ ، أي : $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$ ، أي : $|z-1|=|z+1|$ ، أي : $AM=BM$.

و منه : المجموعة (D) للنقط M ذات اللاحقة z حيث يكون $|z'|=1$ هي محور قطعة المستقيم $[AB]$.

2) أ) لنبيّن أنّ : $(z'-1)(z+1)=-2$.

$(z'-1)(z+1)=(\frac{z-1}{z+1}-1)(z+1)$ ، أي : $(z'-1)(z+1)=(\frac{z-1-z-1}{z+1})(z+1)$ ،

أي : $(z'-1)(z+1)=(\frac{-2}{z+1})(z+1)$ ، و منه : $(z'-1)(z+1)=-2$ و هو المطلوب .

ب) لدينا : $(z'-1)(z+1)=-2$ ، أي : $|z'-1|.|z+1|=2$ و $\arg\left[(z'-1)(z+1)\right]=\pi+2k\pi$

أي : $AM'\times BM=2$ و $\arg(z'-1)+\arg(z+1)=\pi+2k\pi$.

و منه : $AM'\times BM=2$ و $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi$ ، و هو المطلوب .

3) إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 هذا يعني أنّ : $BM=2$.

أي : $AM'\times BM=2$ تصبح : $AM'\times 2=2$ و منه : $AM'=1$.

إذن : M' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T') ذات المركز A و نصف القطر 1 .

4) لإثبات أنّ : $M'\in[AN]$ يكفي تبيين أنّ : $\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطيا و لهما نفس الإتجاه ، أي أنّ :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=0+2k\pi$.

*) لنحسب $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})$:

حسب علاقة شال يكون لدينا : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=(\overrightarrow{AN};\vec{u})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=-(\vec{u};\overrightarrow{AN})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=-\arg(z_N-z_A)+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$

أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=-\arg(-\bar{z}-1)+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\arg(-z-1)+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$

أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\arg\left[-(z+1)\right]+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\arg(-1)+\arg(z+1)+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي :

$(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\pi+\arg(z+1)+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=\pi+(\vec{u};\overrightarrow{BM})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+2k\pi$ و نعلم أنّ

: $(\vec{u};\overrightarrow{AM'})+(\vec{u};\overrightarrow{BM})=\pi+2k\pi$ ، أي : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=2\pi+2k\pi$.

و منه : $(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AM'})=0+2k\pi$ و عليه فإنّ : $M'\in[AN]$.

5) أ) لدينا : K لاحقتها $t=-2+i\sqrt{3}$ ، أي : $t+1=-1+i\sqrt{3}$.

$|t+1|=|-1+i\sqrt{3}|=2$ ، أي : $t+1=2(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$ ، و منه : $t+1=2.e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

ب) لنبيّن أنّ النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) :

*) نحسب الطول BK : $BK=|z_K-z_B|=|-2+i\sqrt{3}+1|=|-1+i\sqrt{3}|$ ، و منه : $BK=2$.

إذن : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ذات المركز B و نصف القطر 2 .

6) *) بما أنّ : النقطة K تنتمي إلى الدائرة (T) ، فحسب السؤال (3) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى الدائرة (T') ذات المركز A و نصف القطر 1 .

*) و حسب السؤال (4) : النقطة K' ستكون تنتمي إلى نصف المستقيم $[AN)$ حيث : $z_N=-\overline{z_K}$.

أي : $z_N=2+i\sqrt{3}$.

- من هذا و ذاك نستنتج أنّ النقطة K' هي نقطة تقاطع الدائرة (T') مع نصف المستقيم $[AN)$.

التمرين 11:

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+4z-\frac{25}{4}=0$.

– إستنتج حلول المعادلة : $-\left(z+1-\frac{1}{2}i\right)^2+4\left(z+1-\frac{1}{2}i\right)-\frac{25}{4}=0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ وحدته 2cm .

- علم النقط A, B, C, D لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i$, $z_B=1+2i$, $z_C=2+\frac{3}{2}i$, $z_D=2-\frac{3}{2}i$

- ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ .

3. نعتبر M نقطة من المستقيم (AB) ترتيبها α والنقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- عين قيمة العدد α حتى تكون N على إستقامية مع النقطتين O و A .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقيا سالبا تماما .

حل التمرين 11:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $-z^2+4z-\frac{25}{4}=0$.

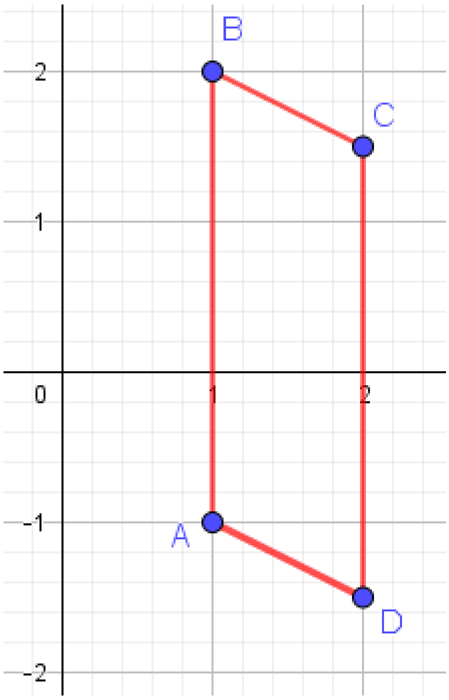
نجد : $\Delta=(3i)^2$ و $z_1=2-\frac{3}{2}i$ ، $z_2=2+\frac{3}{2}i$

*) إستنتاج حلول المعادلة :

مما سبق لدينا : $z+1-\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$ أي : $z=1-i$

أو $z+1-\frac{1}{2}i=2+\frac{3}{2}i$ ، أي : $z=1+2i$.

2) *) تعليم النقط :



*) طبيعة الرباعي $ABCD$:

من خلال الشكل نلاحظ أنّ الرباعي هو متوازي أضلاع

- لنبين ذلك :

بعد الحساب نجد أنّ : $z_D - z_A = z_C - z_B$ ، و منه :

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ، إذن الرباعي $ABCD$ هو متوازي أضلاع .

3) لدينا : النقطة M نقطة من (AB) و بما أنّ للنقطتين

A و B نفس الفاصلة 1 فستكون : $M(1;\alpha)$.

لدينا : النقطة N هي صورة M بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، أي : $z_N - z_O = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_M - z_O)$ ، أي :

$z_N = i(z_M)$ ، أي : $z_N = i(1+i\alpha)$ ، أي : $z_N = i - \alpha$ ، و منه : $z_N = -\alpha + i$.

*) تكون النقطة N على إستقامية مع O و A إذا كان :

العدد $\frac{z_N - z_O}{z_A - z_O}$ حقيقيا ، أي : $(\frac{-\alpha+1}{1-i}) \in \mathbb{R}$.

أي : $\frac{z_N}{z_A} = \frac{-\alpha-1}{2} + i\frac{1-\alpha}{2}$.

إذن : تكون N على استقامية مع O و A إذا كان :

$\frac{1-\alpha}{2} = 0$ ، و منه : $\alpha = 1$.

4) العدد $\frac{z-1+i}{z-1-2i}$ حقيقي سالب معناه أنّ :

$\frac{z-1+i}{z-1-2i} \neq 0$ وَ $\arg(\frac{z-1+i}{z-1-2i}) = \pi + 2k\pi$

أي : $\begin{cases} z \neq z_A \\ z \neq z_B \end{cases}$ وَ $\arg(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi$.

و منه : مجموعة النقط M هي قطعة المستقيم $[AB]$ ماعدا النقطتين A و B .

التمرين 12:

1 . حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(\ ;\ \overrightarrow{\ \ }\ ;\vec{v}\right)$

نفرض النقطتين $A(2-i)\,,B(2+i)$ و نعتبر التحاكي h الذي مركزه O ونسبته 2.

ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$. عين لاحقة النقطة E صورة I بالتحاكي h .

3. أحسب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_E}$. إستنتج طبيعة الرباعي $OAEB$ ، ثم أحسب مساحته .

4. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث ؛ $|z_A-z|^2+|z_B-z|^2=4$.

حل التمرين 12:

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-4z+5=0$.

نجد : $\Delta=(2i)^2$ و $z_1=2+i$ ، $z_2=2-i$.

2) لدينا : I هي منتصف $[AB]$ ، أي أنّ : $z_I=2$.

لدينا : النقطة E هي صورة I بالتحاكي h ، أي :

$\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{OI}$ ، أي : $z_E=2.z_I$ ، و منه : $z_E=4$.

3) حساب العدد $\frac{z_B-z_A}{z_E}$:

بعد الحساب نجد : $\frac{z_B-z_A}{z_E}=\frac{1}{2}i$.

*) طبيعة الرباعي $OAEB$:

لدينا : I منتصف $[AB]$ و أيضا منتصف $[OE]$ ، أي :

القطران متناصفان ، إذن الرباعي $OAEB$ متوازي أضلاع

و بما أنّ : $\frac{z_B-z_A}{z_E}=\frac{1}{2}i$ ، أي : $\arg(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{AB})=\frac{\pi}{2}$

إذن : القطران متعامدان ، و عليه سيكون الرباعي $OAEB$ معيّن .

*) حساب مساحة الرباعي $OAEB$:

$S_{OAEB}=\frac{AB\times OE}{2}=\frac{4}{2}=2(u.a)$.

4) تعيين مجموعة النقط M :

لدينا : $|z_A-z|^2+|z_B-z|^2=4$ ، أي :

$MA^2+MB^2=4$ ، نعلم أنّ : $AB^2=4$

و منه : $MA^2+MB^2=AB^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

إذن : مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها AB .   ملاحظة : يمكن وضع $z=x+iy$ فنجد معادلة الدائرة .

3. تمارين البكالوريا 2008-2019

+ الحل النموذجي للبعض منها

علوم تجريبية

التمارين:

التمرين [1][باك 2008][م1] [4,5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

نرمز للحلّين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1|<|z_2|$. بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي .

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

لتكن A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : 1 ، z_1 و z_2 .

ليكن z العدد المركّب حيث : $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$.

أ- إنطلاقا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

برهن أن : $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ و أن : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ حيث θ، θ_1 و θ_2 أعداد حقيقية .

ب- أكتب z على الشكل الأسّي .

جـ- أكتب z على الشكل المثلثي و استنتج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته .

التمرين [2][باك 2008][م2] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2+iz-2-6i=0$

2) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب حيث : $z_A=2+i$ و $z_B=-2-2i$.

عيّن z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن C النقطة ذات اللاحقة z_C حيث : $z_C=\frac{4-i}{1+i}$.

أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) .

4) أ - برهن أن عبارة التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ و نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ و الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$

ب - **تطبيق** : عيّن الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التمرين [3][باك 2009][م1] [5 ن]

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

2) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

ب - أكتب $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي .

جـ - إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أ - n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب - أحسب قيمة العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$.

التمرين [4][باك 2009][م2] [4 ن]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

2) نسمي z_1 و z_2 حلّي هذه المعادلة .

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

ب - A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\frac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

أحسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ - جد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

د- أحسب z^3 ، z^6 ثم استنتج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين [5][باك 2010][م1] [5 ن]

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A وB لاحقتيهما على الترتيب : $z_A=1+i$ و $z_B=3i$

1) أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي .

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z'=2iz+6+3i$

أ- عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S .

ب - عيّن z_C لا حقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة $\left\{(A,2);(B,-2);(C,2)\right\}$.

أ- عيّن z_D لا حقة النقطة D .

ب - عيّن مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب - أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$. عيّن حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين [6][باك 2010][م2] [4 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$ ، ثم أكتب الحلّين على الشكل الأسّي .

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ- بيّن أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O .

ب - عيّن زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B .

جـ - بيّن أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D .

د- إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين [7][باك 2011][م1] [5 ن]

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$

1)أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب - عيّن طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$z'=iz-1-i$

أ- عيّن طبيعة التحويل T محدّدا عناصره المميزة.

بـ - ما هي صورة النقطة B بالتحويل T .
3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$
أ- بيّن أن النقط A ، C و D في استقامية.
بـ - عيّن نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D .
جـ - عيّن العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

التمرين [8][باك 2011][2م][4 ن]

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ و $z_C=4i$

1) أ- علّم النقط A ، B و C .
بـ - ما هي طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علّل إجابتك .
جـ - عيّن لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$.
2) عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$
3) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+13=0$.
نسمي z_0 ، z_1 حلّي هذه المعادلة .
بـ - لتكن M نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب z.
- عيّن مجموعة النقطة M من المستوي التي تحقق : $|z-z_0|=|z-z_1|$

التمرين [9][باك 2012][1م][4 ن]

1)نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z\neq 2-3i$)
- حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .
2)ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$

- تحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.
3)نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$
النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.
أ- عبّر عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM .
بـ - إستنتج أنه من أجل كل نقطة M من (Δ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها
تحقق أن E تنتمي إلى (γ) .

التمرين [10][باك 2012][2م][4,5 ن]

1) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$
أ-تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.
بـ - حدّد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$.
جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$.
2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب :

$z_A=6$ ، $z_B=3+i\sqrt{3}$ و $z_C=3-i\sqrt{3}$

أ-أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
بـ - أكتب العدد المركب $\dfrac{z_A-z_B}{z_A-z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي.
جـ إستنتج طبيعة المثلث ABC .
3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$
أ-جد الكتابة المركبة للتشابه S.
بـ - عيّن $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .

جـ - بيّن أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

التمرين [11][باك 2013][1م] [5 ن]

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية :

$z^2-(4\cos\alpha)z+4=0$ ...... (I) حيث α وسيط حقيقي .

2) من أجل $\alpha=\frac{\pi}{3}$ ، نرمز إلى حلّي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . بيّن أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=1$.

3) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+i\sqrt{3}$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_C=4+i\sqrt{3}$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

جـ - عيّن لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$ ، ثم أنشئ G.

د - أحسب z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع .

التمرين [12][باك 2013][2م] [4,5 ن]

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : (E) ...... $z^2+4z+13=0$

1) تحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة (E) ، ثم جد الحل الآخر .

2) A و B نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- بيّن أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

بـ - أحسب z_C لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S .

3) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$.

أ- بيّن أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما .

بـ - أحسب z_D لاحقة النقطة D.

جـ - بيّن أن $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

التمرين [13][باك 2014][1م] [5 ن]

1) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=6\sqrt{2}$ و $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي.

بـ - أحسب $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$.

جـ - بيّن أن النقط O ، A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D ، يطلب تعيين نصف قطرها .

د- أحسب $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ ثم جد قيسا للزاوية $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$. ماهي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

3) ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- أكتب العبارة المركّبة للدوران R .

بـ - عيّن لاحقة النقطة C' صورة C بالدوران R ثم تحقق أن النقط A، C و C' في إستقامية .

جـ - عيّن لاحقة النقطة A' صورة A بالدوران R ثم حدّد صورة الرباعي $OACB$ بالدوران R .

التمرين [14][باك 2014][م2] [4 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحدة الطول $1cm$)

تعطى النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب : $z_A=i$ ، $z_B=1+2i$ ، $z_C=1-2i$.

أ- أنشئ النقط A ، B و C .

بـ - جد z_H لاحقة النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على (BC) .

جـ - أحسب مساحة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه A و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$

أ- عيّن الكتابة المركّبة للتشابه S .

بـ - بيّن أن مساحة صورة المثلث ABC بالتشابه S تساوي $\frac{1}{2}cm^2$.

4) M نقطة لاحقتها z ، عيّن مجموعة النقط M حيث : $|z|=|iz+1+2i|$.

التمرين [15][باك 2015][م1] [4,5 ن]

I) عيّن العددين المركّبين α و β حيث : $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\ 2\bar{\alpha}+\bar{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_A=z_Ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أ- أكتب z_A و z_C على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

بـ - تحقق أن العدد المركّب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}2$ حقيقي .

2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D=1+i$

أ- حدّد النسبة و زاوية للتشابه S الذي مركزه O و يحوّل D إلى A .

بـ - أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) عيّن مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ حيث k يمسح $\mathbb{R}^+$.

التمرين [16][باك 2015][م2] [5ن]

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

z_A ، z_B و z_C حيث : $z_A=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B=-\overline{z_A}$ ، $z_C=-(z_A+z_B)$.

1) أ- أكتب كلا من العددين المركّبين z_B و z_C على الشكل الأسّي.

بـ - استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

جـ - أنشئ الدائرة (γ) و النقط A ، B و C.

2) أ- تحقق أن : $\frac{z_B-z_C}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{3}}$

بـ - استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع و أن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث .

جـ - عيّن و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z|=|z-\sqrt{3}-i|$.

3) أ- عيّن زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحوّل C إلى A .

بـ - أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.

التمرين [17][باك 2016][الدورة الأولى][م1] [4,5 ن]

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. من أجل كل نقطة M من المستوي لاحقتها العدد المركب z

حيث $\left(z\neq 1\right)$ نرفق النقطة M' لاحقتها العدد المركب z' حيث : $z'=\dfrac{z-2}{z-1}$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z'=z$.

2) النقطتان A و B لاحقتاهما z_1 و z_2 على الترتيب حيث : $z_1=1-i$ ، $z_2=\overline{z_1}$.

أ- أكتب $\dfrac{z_2}{z_1}$ على الشكل الأسّي .

بـ - بيّن أن النقطة B صورة النقطة A بالدوران R الذي مركزه المبدأ O ، يطلب تعيين زاوية له .

3) نضع : $z'\neq z$. نعتبر النقطتين C و D لاحقتيهما 2 و 1 على الترتيب .

عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M حيث M' تنتمي إلى محور التراتيب ثم أنشئ $\left(\Gamma\right)$.

4) h التحاكي الذي مركزه المبدأ O و نسبته 2 .

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي $S=h\circ R$ و عناصره المميزة .

بـ - أكتب العبارة المركبة للتحويل S .

جـ - عيّن ثم أنشئ المجموعة $\left(\Gamma'\right)$ صورة $\left(\Gamma\right)$ بالتحويل S .

التمرين [18][باك 2016][الدورة الأولى][م2] [4,5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(z-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)\left(z^2+\sqrt{3}z+1\right)=0$

2) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ، $z_B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أ- أكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

بـ - بيّن أنه يوجد تشابه مباشر S مركزه B و يحوّل النقطة C إلى النقطة A يطلب تعيين عناصره المميزة .

3) أ- عيّن لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته .

بـ - عيّن $\left(E\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $\left|z-z_A\right|=\left|\overline{z}-z_B\right|$.

جـ - عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z=z_B+\sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما θ يتغيّر على ،ثم تحقق أن $A\in\left(\Gamma\right)$

التمرين [19][باك 2016][الدورة الثانية][م1] [4 ن]

1) نضع من أجل كل عددمركب z : $P\left(z\right)=z^3-24\sqrt{3}$

أ-تحقق أن: $P\left(2\sqrt{3}\right)=0$.

بـ - جد العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P\left(z\right)=\left(z-2\sqrt{3}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P\left(z\right)=0$.

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$. A ، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب :

$z_A=-\sqrt{3}+3i$ ، $z_B=-\sqrt{3}-3i$ و $z_C=2\sqrt{3}$

أ - أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

بـ - بيّن أنه يوجد دوران R مركزه A و يحوّل النقطة B إلى النقطة C ، يطلب تعيين زاويته .

جـ - استنتج طبيعة المثلث ABC.

د- عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ، ثم حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) عيّن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة غير المعدومة z بحيث : $\arg\left(\dfrac{z}{\overline{z}}\right)=2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

التمرين [20][باك 2016][الدورة الثانية][م2] [4,5 ن]

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $\left(E\right)$ .... $2\overline{z}^3+3\overline{z}^2-3\overline{z}+5=0$

يشير الرمز $\overline{z}$ إلى مرافق العدد المركب z .

1) أ- أثبت أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة : $(2\overline{z}+5)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)=0$.

بـ - حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

2) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad z_B=\overline{z_A} \quad ، \quad z_C=-1 \quad ، \quad z_D=-\frac{5}{2}$$

ب- أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

بـ - أنشئ النقط A ، B ، C و D .

جـ - أثبت أن : $z_B-z_C=z_B(z_A-z_C)$.

د- إستنتج طبيعة المثلث ABC .

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أنشئ النقطة F ثم حدّد طبيعة المثلث AFC .

4) عيّن طبيعة المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z+1=kz_B$. لمّا يتغير k في المجموعة $\mathbb{R}_+$.

التمرين [21][باك 2017][1م] [5 ن]

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z+2)(z^2-4z+8)=0$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2-2i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2$

1) أكتب كلا من العددين z_A و z_B على الشكل الأسّي .

2) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون النقطة B مركز ثقل المثلث ACD .

3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z (M تختلف عن A و B) بحيث :. $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_A-z}\right)=\frac{\pi}{2}$

تحقق أن مبدأ المعلم O هو نقطة من (Γ) ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و أنشئها .

4) ليكن h التحاكي الذي مركزه النقطة C و نسبته 2 ، (Γ') صورة (Γ) بالتحاكي h .

عيّن طبيعة المجموعة (Γ') مع تحديد عناصرها المميزة .

التمرين [22][باك 2017][2م] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة مما يلي :

1) مجموعة حلول المعادلة $\left(\frac{z+1-i}{z-i}\right)^2=1$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هي : $S=\left\{-\frac{1}{2}+i\right\}$.

2) من أجل كل عدد مركب z ، . $(z+2)(\overline{z}+2)=|z+2|^2$

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n}=1$.

4) S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة 1 و نسبته 3 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

صورة الدائرة (C) ذات المركز $\omega(0;1)$ و نصف القطر 3 بالتشابه S هي الدائرة (C') ذات المركز $\omega'(-2;-3)$ و نصف القطر 9

5) من أجل كل عدد حقيقي : إذا كان $z=(\sin\alpha+i\cos\alpha)\times(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ فإن : $\arg(z)=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2k\pi$ حيث k عدد صحيح .

التمرين [23][باك 2017][الدورة الإستثنائية][1م] [5 ن]

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-2)(z^2+2z+4)=0$.

II) المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ حيث : $\|\vec{u}\|=2cm$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها : $z_A=2$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\overline{z_B}$

1) أ - أكتب z_B على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد المركّب z_C .

ب - عيّن مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشئ النقط A ، B و C .

2) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه النقطة O و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن F صورة A بالتحويل S .

أ - أكتب العبارة المركّبة للتشابه S ثم عيّن لاحقة كل A' ، B' و C' من صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتشابه S ، ثم أنشئ في المعلم السابق النقط A' ، B' و C' .

ب - أحسب بالسنتمتر المربّع مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين [24][باك 2017][الدورة الإستثنائية][م2] [5 ن]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب :

$$z_A=-3-2i \quad ، \quad z_B=1+i \quad و \quad z_C=4-3i$$

1) عيّن النسبة و زاوية للتشابه S المباشر ذي المركز A و الذي يحوّل النقطة B إلى النقطة C .

2) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC و بـ I إلى منتصف القطعة $[AC]$.

عيّن كلا من z_G و z_I لاحقتي النقطتين G و I ، ثم بيّن أن النقط B ، G و I في إستقامية .

4) نعتبر النقطة D نظيرة النقطة B بالنسبة إلى I . حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

5) نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|=5\sqrt{2}$.

أ - تحقق أن النقطة C تنتمي إلى (Γ) .

ب - عيّن طبيعة المجموعة (Γ) ثم أنشئها .

التمرين [25][باك 2018][م1][5 ن]

4) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-\sqrt{3}z+1=0$

5) المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $z_B=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $z_C=\overline{z_B}$.

أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

6) أ- تحقق أن : $\frac{z_B}{z_C}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدّد طبيعة المثلث OBC .

ب - إستنتج أن : B هي صورة C بدوران r يطلب تعيين عناصره المميّزة .

7) نسمّي (γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $\left|\overline{z}-\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right|=|z|$.

عيّن طبيعة المجموعة (γ) ثم عيّن صورتها بالدوران r .

التمرين [26][باك 2018][م2][5 ن]

I) حل في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(\overline{z}-4+i\right)\left(z^2-4z+5\right)=0$ (يرمز $\overline{z}$ لمرافق العدد z)

II) في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_A=2+i \quad ، \quad z_B=4+i \quad و \quad z_C=\overline{z_A} \ .$$

1) تحقق أن : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=i$ ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)^n$ تخيليا صرفا .

2) D نقطة من المستوي لاحقتها z_D حيث :
$$\begin{cases}|z_D-z_A|=|z_B-z_A|\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

بيّن أن المثلث ABD متقايس الأضلاع و أحسب z_D.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحوّل G إلى D .

4) عيّن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (M تختلف عن C) بحيث : $\arg\left(\frac{z_G - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

التمرين [27][باك 2019][م1] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z-i)(z^2-4z+5)=0$.

II) نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط A ، B و C التي لاحقاتها : i ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب .

1) أكتب العدد المركّب $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

2) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $2+i$ نضع : $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$.

أ - عيّن المجموعة (E) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق $|f(z)|=\frac{1}{2}$.

ب - بيّن أن العدد $\left[f(i)\right]^{1440}$ حقيقي موجب .

3) نعتبر الدوران r الذي مركزه النقطة C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ - عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران r و بيّن أن النقط D ، A و C في إستقامية .

ب - استنتج أن النقطة D هي صورة النقطة A بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة .

التمرين [28][باك 2019][م2] [5 ن]

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها z_A، z_B و z_C على الترتيب حيث : $z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ - أكتب العدد المركّب z_A على الشكل الأسي .

ب - أحسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ- T الإنسحاب الذي يحول A إلى C ، عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب T.

ب - استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) أكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي .

4) جد قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{-6\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا .

5) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث تختلف عن A و تختلف عن C .

عيّن (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

تصحيح مقترح للتمرين [1][باك 2008][1م]

3) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة : $z^2-(1+2i)z-1+i=0$.

لدينا : $\Delta=(1+2i)^2-4\times1\times(-1+i)=1$ و منه للمعادلة حلّين هما :

$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$ و $z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$.

• تبيان أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ حقيقي :

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}=\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2008}=\left(\frac{i(1-i)}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{i+1}{2}\right)^{2008}=\left(\frac{(i+1)^2}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{2i}{4}\right)^{1004}=\left(\frac{i}{2}\right)^{1004}=\frac{(i^4)^{251}}{2^{1004}}=\frac{1}{2^{1004}}$$

4) أ- إعتمادا من التعريف $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ و من الخاصية $e^{i(\theta_1+\theta_2)}=e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}$.

• لبرهان أن : $e^{-i\theta}=\frac{1}{e^{i\theta}}$ يكفي إثبات أن : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=1$.

لدينا : $e^{-i\theta}\times e^{i\theta}=e^{(-i\theta+i\theta)}=e^0=\cos0+i\sin0=1$

• إثبات : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

لدينا : $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times\frac{1}{e^{i\theta_2}}=e^{i\theta_1}\times e^{-i\theta_2}=e^{i\theta_1-i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ب- كتابة z على الشكل الأسّي .

لدينا : $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}$ و منه $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{1+i-1}{i-1}=\frac{i}{i-1}=\frac{i(-i-1)}{2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

لدينا : $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ و منه : $|z|=\frac{\sqrt2}{2}$.

و بفرض θ عمدة للعدد المركب z ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta=\frac{1}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z)=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z=\frac{\sqrt2}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

جـ- كتابة z على الشكل المثلثي :

$$z=\frac{\sqrt2}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

• استنتاج أن C هي صورة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين نسبته و زاويته :

لدينا : $z=\frac{z_2-1}{z_1-1}=\frac{\sqrt2}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ يكافئ $z_2-1=\frac{\sqrt2}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}(z_1-1)$ و منه C هي صورة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A، و نسبته $\frac{\sqrt2}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

تصحيح مقترح للتمرين [2][باك 2008][2م]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2+iz-2-6i=0$

لدينا : $\Delta=i^2-4\times1\times(-2-6i)=7+24i=7+2\times4\times3i=16-9+2\times4\times3i=(4+3i)^2$.

(يمكن إستخدام طريقة أخرى للبحث عن الجذرين التربيعيين لـ Δ)

و منه للمعادلة حلّين مركبين هما : $z_1=\dfrac{-i+4+3i}{2}=2+i$ و $z_2=\dfrac{-i-4-3i}{2}=-2-2i$.

2) تعيين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$:

$$z_\omega=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-2-2i+2+i}{2}=-\frac{1}{2}i$$

3) كتابة z_C على الشكل الجبري :

$$z_C=\frac{4-i}{1+i}=\frac{(4-i)(1-i)}{2}=\frac{4-i-4i-1}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$$

● إثبات أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ) :

يكفي أن نثبت أن : $\omega C=\frac{1}{2}AB$ أي : $|z_C-z_\omega|=\frac{1}{2}|z_B-z_A|$.

لدينا : $|z_B-z_A|=|-2-2i-2-i|=|-4-3i|=5$ و، $|z_C-z_\omega|=\left|\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i-\left(-\frac{1}{2}i\right)\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\frac{5}{2}=\frac{1}{2}|z_B-z_A|$

و منه $C\in(\Gamma)$.

4) أ - S التشابه المباشر الذي مركزه $M_0(z_0)$ نسبته k $(k>0)$ و زاويته θ معناه :

● $S(M_0)=M_0$.

● من أجل كل نقطة M من المستوي تختلف عن M_0، $S(M)=M'$ معناه :

$$\begin{cases}M_0M'=k\,M_0M\\ \left(\overrightarrow{M_0M},\overrightarrow{M_0M'}\right)=\theta\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}|z'-z_0|=k\,|z-z_0|\\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right)=\theta[2\pi]\end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases}\left|\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right|=k\\ \arg\left(\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}\right)=\theta[2\pi]\end{cases}$$

و منه $\dfrac{z'-z_0}{z-z_0}=ke^{i\theta}$ أي : $z'-z_0=ke^{i\theta}(z-z_0)$ هي عبارة التشابه S .

ب - **تطبيق** : تعيين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل S المعرّف بـ : $z'+\frac{1}{2}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z+\frac{1}{2}i\right)$.

التحويل S هو التشابه المباشر الذي مركزه النقطة ذات اللاحقة $-\frac{1}{2}i$ أي ω و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

تصحيح مقترح للتمرين [3][باك 2009][1م]

$P(z)$ كثير حدود حيث : $P(z)=(z-1-i)(z^2-2z+4)$ و z عدد مركب .

4) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z)=0$.

$P(z)=0$ تكافئ $(z-1-i)(z^2-2z+4)=0$ تكافئ $z=1+i$ أو $z^2-2z+4=0$

لنحل المعادلة $z^2-2z+4=0$:

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=\left(i\sqrt{12}\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\left\{1+i;1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\right\}$.

5) نضع : $z_1=1+i$ ، $z_2=1-i\sqrt{3}$.

أ- كتابة z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1+i$ و منه : $|z_1|=\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_2|=2$.

و بفرض θ_2 عمدة للعدد المركب z_2 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_2=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_2)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

بـ - كتابة $\dfrac{z_1}{z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي :

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(1+i\sqrt{3})}{4}=\frac{1+i\sqrt{3}+i-\sqrt{3}}{4}=\frac{1-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

جـ - إستنتاج القيمة المضبوطة لكل من $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$:

لدينا : $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ و بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :

$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}\end{cases}$ و منه $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}\\ \sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{2(1+\sqrt{3})}{4\sqrt{2}}\end{cases}$ أي : $\begin{cases}\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{cases}$.

6)أ - n عدد طبيعي ، تعيين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

لدينا : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^n=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{7n\pi}{12}}$,

$\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^n\in\mathbb{R}$ يكافئ $\dfrac{7n\pi}{12}=k\pi$ يكافئ $n=12k$ ، مع $k\in\mathbb{N}$.

بـ - حساب قيمة العدد $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{456}$:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{456}e^{i\frac{7\times456\pi}{12}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{456}e^{266i\pi}=\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{228}=\frac{1}{2^{228}}$$

تصحيح مقترح للتمرين [4][باك 2009][م2]

3) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$.

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=-12=12i^2=\left(\sqrt{12}i\right)^2=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ و $z_2=\dfrac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$.

4) أ- كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=1-i\sqrt{3}$ و منه : $|z_1|=2$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

لدينا : $z_2=\overline{z_1}$ و منه : $z_2=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

ب- A ، B و C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=\dfrac{1}{2}\left(5+i\sqrt{3}\right)$

حساب الأطوال :

$AB=|z_B-z_A|=\left|2i\sqrt{3}\right|=2\sqrt{3}$ ، $AC=|z_C-z_A|=\left|\dfrac{3}{2}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right|=3$ و $BC=|z_C-z_B|=\left|\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{3}$

طبيعة المثلث ABC:

لدينا : $AB^2=AC^2+BC^2$ و منه المثلث ABC قائم في C حسب النظرية العكسية لفيثاغورس .

جـ - إيجاد الطويلة و عمدة للعدد المركب z حيث : $z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$.

لدينا : $|z|=\left|\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}\right|=\dfrac{|z_C-z_B|}{|z_A-z_B|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

و $z=\dfrac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=\dfrac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2i\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{4}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ و منه $\arg(z)=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

د- حساب z^3 ، z^6 ثم استنتاج أن z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

لدينا : $z=\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه $z^3=\left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3=\dfrac{1}{2^3}e^{i\frac{3\pi}{3}}=\dfrac{1}{8}e^{i\pi}=-\dfrac{1}{8}$

و $z^6=\left(\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^6=\dfrac{1}{2^6}e^{i\frac{6\pi}{3}}=\dfrac{1}{8}e^{i2\pi}=\dfrac{1}{64}$

و لدينا : $z^{3k}=\left(z^3\right)^k=\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k$ و منه z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

تصحيح مقترح للتمرين [5][باك 2010][م1]

5) كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا : $z_A=1+i$ و منه : $|z_A|=\sqrt{2}$.

و بفرض θ_A عمدة للعدد المركب z_A ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_A)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_B=3i$ و منه : $|z_B|=3$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_B=\frac{0}{3}=0\\ \sin\theta_B=\frac{3}{3}=1\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_B=3e^{i\frac{\pi}{2}}$.

6) S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' بحيث : $z'=2iz+6+3i$

الكتابة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z'=\alpha z+\beta$ بحيث : $\alpha=2i$ و $\beta=6+3i$.

أ- تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k=|\alpha|=2$.

زاوية للتشابه المباشر S هي : $\theta=\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

مركز التشابه المباشر S هو النقطة ذات اللاحقة $\frac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $z_B=3i=\frac{15i}{5}=\frac{(6+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{6+3i}{1-2i}=\frac{\beta}{1-\alpha}$ و منه النقطة B هي مركز التشابه المباشر S .

ب- عيّن z_C لا حقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S .

لدينا $z_C=2iz_A+6+3i$ و منه $z_C=2i(1+i)+6+3i$ ، إذن : $z_C=4+5i$.

جـ- طبيعة المثلث ABC :

لدينا : النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S الذي مركزه B و نسبته 2 و هذا يعني : $\begin{cases}BC=2BA\\ \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\pi}{2}\end{cases}$.

و منه المثلث ABC مثلث قائم في النقطة B .

7) النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-2);(C,2)\}$.

أ- تعيين z_D لا حقة النقطة D :

لدينا : $z_D=\frac{2z_A-2z_B+2z_C}{2-2+2}$ و منه $z_D=\frac{2(1+i)-2(3i)+2(4+5i)}{2}$ إذن : $z_D=5+3i$.

بـ- تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$ مع التبرير :

لدينا : $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=3i-(1+i)=-1+2i$ و $z_{\overrightarrow{DC}}=z_C-z_D=4+5i-(5+3i)=-1+2i$

و منه الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع .

و لدينا مما سبق : ABC مثلث قائم و $BC=2BA$ و بالتالي الرباعي $ABCD$ مستطيل .

8) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B و عن D لاحقتها z و لتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- التحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

لدينا : $6=\frac{-6}{-1}=\frac{3i-(6+3i)}{5+3i-(6+3i)}=\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E}$ و منه العدد $\frac{z_B-z_E}{z_D-z_E}$ حقيقي موجب تماما و بالتالي $E\in(\Delta)$.

بـ- $\left(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}\right)=\arg\left(\frac{z_B-z}{z_D-z}\right)$.

العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ حقيقي موجب تماما يكافئ $\arg\left(\frac{z_B-z}{z_D-z}\right)=0+2k\pi$ أي $\left(\overrightarrow{MD};\overrightarrow{MB}\right)=0+2k\pi$.

و بالتالي المجموعة (Δ) هي : $(BD)-[BD]$ (المستقيم (BD) باستثناء القطعة $[BD]$)

تصحيح مقترح للتمرين [6][باك 2010][م2]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-6z+18=0$.

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times18=-36=36\boldsymbol{i}^2=(6\boldsymbol{i})^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\dfrac{6+6\boldsymbol{i}}{2}=3+3\boldsymbol{i}$ و $z_2=\dfrac{6-6\boldsymbol{i}}{2}=3-3\boldsymbol{i}$.

كتابة العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي :

لدينا : $z_1=3+3\boldsymbol{i}$ و منه : $|z_1|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$.

و بفرض θ_1 عمدة للعدد المركب z_1 ، يكون : $\begin{cases}\cos\theta_1=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta_1=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ ، و منه $\arg(z_1)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

إذن : $z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

لدينا : $z_2=\overline{z_1}$ و منه : $z_2=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقها على الترتيب :

$z_A=3+3\boldsymbol{i}$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$.

أ- تبيان أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O :

لدينا : $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=3\sqrt{2}$ أي : $OA=OB=OC=OD$ و منه النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $3\sqrt{2}$.

ب - تعيين زاوية للدوران R الذي مركزه O و يحول النقطة A إلى B :

$\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\arg\left(\dfrac{\overline{z_A}}{z_A}\right)=\arg(-\boldsymbol{i})=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

جـ - إثبات أن النقط A ، O و C في استقامية و كذلك النقط B ، O و D .

يكفي إثبات أن كلا من $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}$ و $\dfrac{z_B-z_O}{z_D-z_O}$ حقيقي .

لدينا : $\dfrac{z_A-z_O}{z_C-z_O}=\dfrac{z_A}{z_C}=-1$ و $\dfrac{z_B-z_O}{z_D-z_O}=\dfrac{z_B}{z_D}=-1$.

(يمكن استخدام كون $z_A+z_C=0$ و $z_B+z_D=0$ و بالتالي O منتصف كل من $[AC]$ و $[BD]$)

د - طبيعة الرباعي $ABCD$:

الرباعي $ABCD$ قطراه متناصفان و متقايسان بالتالي فهو متوازي أضلاع ، و لدينا $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})=\dfrac{\pi}{2}$ و منه الرباعي $ABCD$ مربع .

تصحيح مقترح للتمرين [7][باك 2011][م1]

$z_A=-\boldsymbol{i}$ ، $z_B=2+3\boldsymbol{i}$ و $z_C=-4+\boldsymbol{i}$

1)أ - كتابة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-4+\boldsymbol{i}-(-\boldsymbol{i})}{2+3\boldsymbol{i}-(-\boldsymbol{i})}=\frac{-4+2\boldsymbol{i}}{2+4\boldsymbol{i}}=\frac{(-4+2\boldsymbol{i})(2-4\boldsymbol{i})}{(2+4\boldsymbol{i})(2-4\boldsymbol{i})}=\frac{20\boldsymbol{i}}{20}=\boldsymbol{i}$$

ب - طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له :

لدينا : $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\boldsymbol{i}$ و منه $\begin{cases}\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|\boldsymbol{i}|=1\\ \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(\boldsymbol{i})=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

طبيعة المثلث ABC:

لدينا: $\begin{cases} \left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} \dfrac{AC}{AB} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ ، أي : $\begin{cases} AB = AC \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

و منه المثلث ABC متساوي الساقين و قائم في A .

1) نعتبر التحويل النقطي T في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z، النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث :

$z' = iz - 1 - i$

أ- تعيين طبيعة التحويل T مع تحديد عناصره المميزة :

الكتابة المركبة للتحويل النقطي T من الشكل : $z' = \alpha z + \beta$ بحيث : $\alpha = i$ و $\beta = -1 - i$.

لدينا : $\alpha \in \mathbb{C}$ و $|\alpha| = |i| = 1$ و منه التحويل T هو دوران .

زاوية للدوران T هي : $\theta = \arg(\alpha) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

مركز الدوران T هو النقطة ذات اللاحقة $\dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

لدينا : $z_A = -i = \dfrac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{-1-i}{1-i} = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ و منه النقطة A هي مركز الدوران T .

ب - صورة النقطة B بالتحويل T :

نسمي النقطة B' صورة النقطة B بالتحويل T و منه $z_{B'} = iz_B - 1 - i = i(2+3i) - 1 - i = i - 4$ أي : $z_{B'} = z_C$.

إذن صورة النقطة B بالتحويل T هي النقطة C .

3) لتكن D ذات اللاحقة $z_D = -6 + 2i$

أ- تبيان أن النقط A ، C و D في استقامية :

يكفي إثبات أن $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ حقيقي .

لدينا : $\dfrac{2}{3} = \dfrac{2(-2+i)}{3(-2+i)} = \dfrac{-4+2i}{-6+3i} = \dfrac{-4+i-(-i)}{-6+2i-(-i)} = \dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$ و منه النقط A ، C و D في استقامية .

ب - تعيين نسبة التحاكي h الذي مركزه A و يحول النقطة C إلى D :

العبارة المركبة للتحاكي h من الشكل : $z_D - z_A = k(z_C - z_A)$ بحيث : k هي نسبة التحاكي h .

لدينا : $\dfrac{3}{2} = \dfrac{z_D - z_A}{z_C - z_A}$ و منه نسبة التحاكي h هي : $k = \dfrac{3}{2}$.

جـ - تعيين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه A و يحول B إلى D .

العبارة المركبة للتشابه المباشر S من الشكل : $z_D - z_A = a(z_B - z_A)$

لدينا : $\dfrac{3}{2}i = \dfrac{3i(2i+1)}{2(1+2i)} = \dfrac{-6+3i}{2+4i} = \dfrac{-6+2i-(-i)}{2+3i-(-i)} = \dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = a$ و منه :

نسبة التشابه المباشر S هي : $k = |a| = \dfrac{3}{2}$.

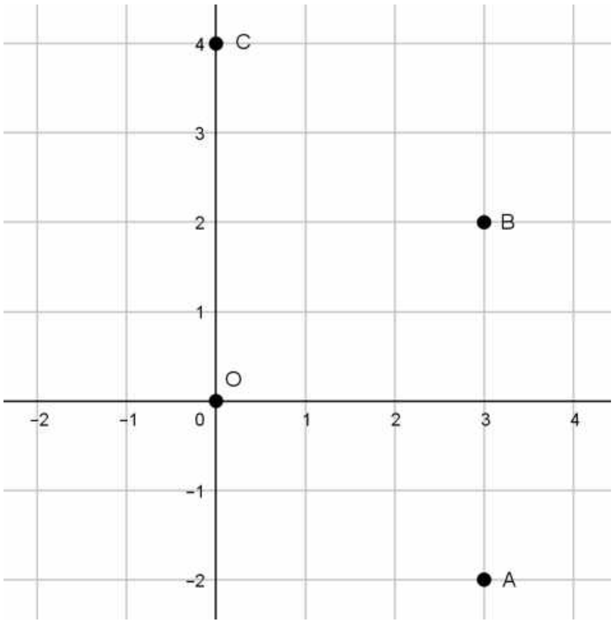
زاوية للتشابه المباشر S هي : $\theta = \arg(a) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

(يمكن إثبات أن : $S = h \circ T$)

تصحيح مقترح للتمرين [8][باك 2011][2م]

$z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ و $z_C = 4i$

4) أ- تعليم النقط A ، B و C :



ب - طبيعة الرباعي $OABC$:

لدينا : $z_{AB} = z_B - z_A = 3+2i-(3-2i) = 4i$ و $z_{OC} = z_{AB}$ أي : $z_{OC} = z_C - z_O = 4i$ و منه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$

و بالتالي $OABC$ متوازي أضلاع .

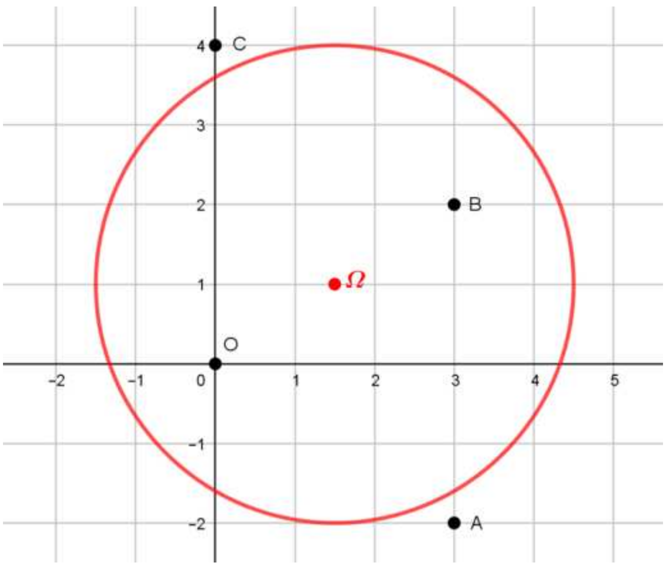
جـ - تعيين لاحقة النقطة Ω مركز الرباعي $OABC$:

النقطة Ω هي مرجح الجملة $\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ و منه : $z_\Omega = \dfrac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}$ أي : $z_\Omega = \dfrac{3}{2}+i$.

5) تعيين (E) مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12$

$\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\| = 12$ أي $M\Omega = 3$ و بالتالي (E) هي الدائرة التي مركزها النقطة Ω و نصف قطرها 3 .

الرسم :



6) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة :)

لدينا : $\Delta = (-6)^2 - 4\times1\times13 = -16 = 16i^2 = (4i)^2$ و منه للمعادلة حلين مركبين هما :

$z_0 = \dfrac{6-4i}{2} = 3-2i = z_A$ و $z_1 = \dfrac{6+4i}{2} = 3+2i = z_B$.

ب - تعيين مجموعة النقط M من المستوى التي تحقق : $|z-z_0| = |z-z_1|$

$|z-z_0| = |z-z_1|$ معناه $AM = BM$ و بالتالي المجموعة المطلوبة هي محور القطعة $[AB]$. (محور الفواصل) .

تصحيح مقترح للتمرين [9][باك 2012][م1]

4) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z = \dfrac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ (حيث $z \neq 2-3i$)

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة .

$z=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ تكافئ $z(z-2+3i)=3i(z+2i)$ تكافئ $z^2-2z+6=0$.

لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times6=-20=20i^2=(\sqrt{20}i)^2=(2\sqrt{5}i)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\frac{2+2\sqrt{5}i}{2}=1+i\sqrt{5}$ و $z_2=\frac{2-2\sqrt{5}i}{2}=1-i\sqrt{5}$.

5) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A ، B نقطتان لاحقتاهما على الترتيب : z_A و z_B حيث :

$z_A=1+i\sqrt{5}$ و $z_B=1-i\sqrt{5}$

التحقق أن A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها :

لدينا : $|z_A|=|1+i\sqrt{5}|=\sqrt{6}$ و $|z_B|=|1-i\sqrt{5}|=\sqrt{6}$ و منه $|z_A|=|z_B|$ أي: $OA=OB$.

و بالتالي A و B تنتميان إلى دائرة مركزها O و نصف قطرها $\sqrt{6}$.

6) نرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z ، $(z\neq 2-3i)$ النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$

النقط C ، D ، E لواحقها على الترتيب : $z_C=-2i$ ، $z_D=2-3i$ و $z_E=3i$ و (Δ) محور القطعة $[CD]$.

أ- التعبير عن المسافة OM' بدلالة المسافتين CM و DM :

لدينا : $z'=\frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ أي $z'=\frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}$ و منه $|z'|=\left|\frac{z_E(z-z_C)}{z-z_D}\right|=\frac{|z_E|.|z-z_C|}{|z-z_D|}$ أي : $OM'=\frac{3CM}{DM}$

ب- $M\in(\Delta)$ معناه : $CM=DM$ و منه $OM'=3$ أي أن النقطة M' تنتمي إلى دائرة (γ) مركزها O و نصف قطرها 3 .

التحقق أن $E\in(\gamma)$:

لدينا : $|z_E|=|3i|=3$ أي : $OE=3$ و منه $E\in(\gamma)$.

تصحيح مقترح للتمرين [10][باك 2012][2م]

4) $P(z)$ كثير حدود للمتغيّر المركب z حيث: $P(z)=z^3-12z^2+48z-72$

ب- التحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$:

$$P(6)=6^3-12\times6^2+48\times6-72=216-432+288-72=0$$

ب - تعيين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z)=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)$

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-6)(z^2+\alpha z+\beta)\\&=z^3+\alpha z^2+\beta z-6z^2-6\alpha z-6\beta\\&=z^3+(\alpha-6)z^2+(\beta-6\alpha)z-6\beta\\&=z^3-12z^2+48z-72\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد $\alpha=-6$ ، $\beta=12$ و منه $P(z)=(z-6)(z^2-6z+12)$.

جـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z)=0$:

$P(z)=0$ تكافئ $(z-6)(z^2-6z+12)=0$ معناه : $z-6=0$ أو $z^2-6z+12=0$.

لنحل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة $z^2-6z+12=0$.

لدينا : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times12=-12=12i^2=(\sqrt{12}i)^2=(2\sqrt{3}i)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين هما :

$z_1=\frac{6-2\sqrt{3}i}{2}=3-i\sqrt{3}$ و $z_2=\frac{6+2\sqrt{3}i}{2}=3+i\sqrt{3}$.

إذن مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$ هي : $S=\{6;3-i\sqrt{3};3+i\sqrt{3}\}$.

5) أ - كتابة كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي:

لدينا : $z_A=6$ و منه $|z_A|=6$ إذن $z_A=6e^{i0}$.

لدينا : $z_B=3+i\sqrt{3}$ و منه : $|z_B|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

و بفرض θ_B عمدة للعدد المركب z_B ، يكون : $\begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ ، و منه $\arg(z_B) = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن : $z_B = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

لدينا : $z_C = \overline{z_B}$ و منه : $z_C = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

ب - كتابة العدد المركب $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي :

$$\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \frac{6-(3+i\sqrt{3})}{6-(3-i\sqrt{3})} = \frac{3-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{(3-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} = \frac{6-6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ و منه $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ إذن $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

جـ - إستنتاج طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ يكافئ $\begin{cases} \left|\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$ معناه $\begin{cases} BA = CA \\ \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}\right) = -\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

و بالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع .

6) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ، نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

ب- الكتابة المركبة للتشابه S :

لدينا : $z' = az + b$ بحيث $a = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{3}$ و $b = (1-a)z_C$ ، أي : $b = (1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3}) = -4i\sqrt{3}$.

و منه $z' = i\sqrt{3}z - 4i\sqrt{3}$ هي العبارة المركبة للتشابه S .

ب - تعيين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S :

$$z_{A'} = i\sqrt{3}z_A - 4i\sqrt{3} = 6i\sqrt{3} - 4i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$$

جـ - تبيان أن النقط A ، B و A' في إستقامية.

يكفي إثبات أن $\dfrac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ حقيقي .

لدينا : $2 = \dfrac{2(3-i\sqrt{3})}{3-i\sqrt{3}} = \dfrac{6-2i\sqrt{3}}{6-(3+i\sqrt{3})} = \dfrac{z_A - z_{A'}}{z_A - z_B}$ و بالتالي النقط A ، B و A' في إستقامية.

تصحيح مقترح للتمرين [11][باك 2013][1م]

4) حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية : (I) ...... $z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ حيث α وسيط حقيقي .

لدينا : $\Delta = (-4\cos\alpha)^2 - 4\times1\times4 = 16\cos^2\alpha - 16 = 16(\cos^2\alpha - 1) = -16\sin^2\alpha = (4i\sin\alpha)^2$ و منه للمعادلة حلّين مركبين

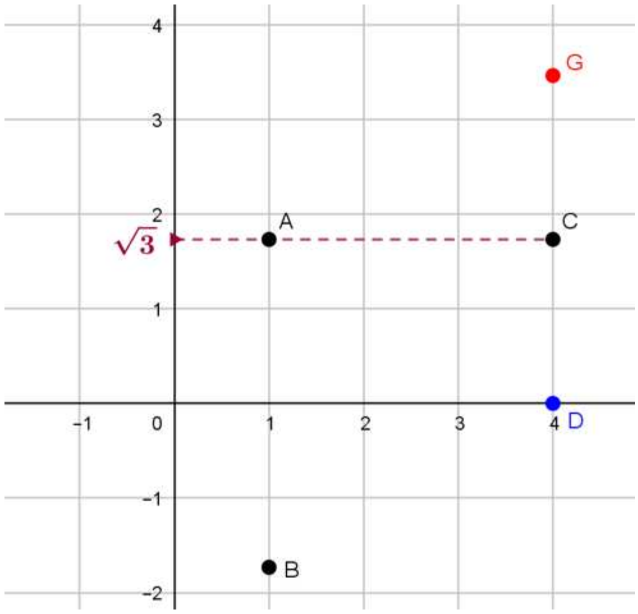
هما : $z_1 = \dfrac{4\cos\alpha + 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ و $z_2 = \dfrac{4\cos\alpha - 4i\sin\alpha}{2} = 2(\cos\alpha - i\sin\alpha)$.

5) من أجل $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ ، نجد : $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$.

تبيان أن : $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$.

لدينا : $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و منه $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013}=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013}=e^{i\frac{4026\pi}{3}}=e^{i(1342\pi)}=e^{i(2\pi)}=1$.

6) أ- تعليم النقط A ، B و C .



بـ - كتابة العدد المركّب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري .

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{4+i\sqrt{3}-\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1-i\sqrt{3}-\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{-2i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

إستنتاج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و يطلب تعيين نسبته و زاويته .

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{\sqrt{3}}{2}i$ و منه $z_C-z_A=\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(z_B-z_A\right)$ إذن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A

و نسبته $\frac{\sqrt{3}}{2}=\left|\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|$ و زاويته $\frac{\pi}{2}=\arg\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

جـ - تعيين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1),(B;-1),(C;2)\}$:

$$z_G=\frac{z_A-z_B+2z_C}{2}=\frac{1+i\sqrt{3}-\left(1-i\sqrt{3}\right)+2\left(4+i\sqrt{3}\right)}{2}=4+2i\sqrt{3}$$

د - تعيين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع :

$ABDG$ متوازي أضلاع معناه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GD}$ معناه $z_B-z_A=z_D-z_G$ و بالتالي $z_D=z_B-z_A+z_G=4$.

تصحيح مقترح للتمرين [12][باك 2013][2م]

نعتبر في مجوعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية : (E) ...... $z^2+4z+13=0$

4) التحقق أن العدد المركّب $-2-3i$ حل للمعادلة (E):

$$(-2-3i)^2+4(-2-3i)+13=4-9+12i-8-12i+13=0$$

بما أن $-2-3i$ حل للمعادلة (E) فإن $\overline{-2-3i}=-2+3i$ كذلك حل للمعادلة (E) . ((E) معادلة في $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية)

5) A و B نقطتان من المستوي المركّب لاحقتاهما $z_A=-2-3i$ و $z_B=i$ على الترتيب .

S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و الذي يحوّل كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ-تبيان أن : $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$

العبارة المركبة للتشابه المباشر S : $z'-z_A=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_A)$ أي $z'=\frac{1}{2}iz+\frac{1}{2}iz_A+z_A$ و منه $z'=\frac{1}{2}iz-\frac{7}{2}-2i$.

بـ - حساب z_C لاحقة النقطة C هي صورة B بالتشابه S :

$$z_C=\frac{1}{2}iz_B-\frac{7}{2}-2i=\frac{1}{2}i(i)-\frac{7}{2}-2i=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}-2i=-4-2i$$

6) لتكن النقطة D حيث : $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$.

أ- تبيان أن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقين يطلب تعيينهما :

لدينا $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\vec{O}$ و منه $2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\vec{O}$ أي $-3\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\vec{O}$ إذن D مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين -3 و 1 على الترتيب .

بـ - حساب z_D لاحقة النقطة D.

$$z_D=\frac{-3z_A+z_B}{-2}=\frac{-3(-2-3i)+i}{-2}=\frac{6+9i+i}{-2}=-3-5i$$

جـ - تبيان أن : $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$

$$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-3-5i-(-2-3i)}{-4-2i-(-2-3i)}=\frac{-1-2i}{-2+i}=\frac{i(i-2)}{-2+i}=i$$

طبيعة المثلث ACD :

$\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}=i$ يكافئ $\begin{cases}\left|\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right|=1\\ \arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$ معناه $\begin{cases}AD=AC\\ \overline{(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})}=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

و منه المثلث ACD قائم في A و متساوي الساقين .

4. تمارين البكالوريا 2008-2018

تقني رياضي

التمرين [1][باك 2008][م1] [4 ن]

لتكن في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(*)$ المعرفة كمايلي :

$$z^3+(2-4i)z^2-(6+9i)z+9(-1+i)=0 \quad .... \quad (*)$$

1) بيّن أن $z_0=3i$ هو حل للمعادلة $(*)$.

2) حل ، في $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(*)$ ثم أكتب حلولها z_0 ، z_1 و z_2 على الشكل الأسي ، حيث $|z_1|<|z_2|$.

3) لتكن A ، B و C صور الحلول z_0 ، z_1 و z_2 على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

عيّن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$.

4) عيّن المجموعة (E) للنقط M حيث : $AM^2+BM^2-CM^2=-13$.

5) تحقق أن النقط O ، B و G في إستقامية ثم عيّن صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه النقطة O و يحول B إلى G محددا عناصره المميزة .

التمرين [2][باك 2008][م2] [4 ن]

r عدد حقيقي موجب تماما و θ عدد حقيقي كيفي .

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$z^2-2i\left(r\cos\frac{\theta}{2}\right)z-r^2=0$$

أكتب الحلّين على الشكل الأسي .

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B صورتي الحلين .

عيّن θ حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع .

التمرين [3][باك 2009][م1] [4 ن]

1) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-2z+2=0$.

ب - إستنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z : $(\overline{z}+3)^2-2(\overline{z}+3)+2=0$ ، حيث $\overline{z}$ مرافق z .

2) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

النقط A ، B و M لواحقها $(1-i)$ ، $(1+i)$ و z على الترتيب .

أ - عيّن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=1-i+ke^{i\frac{5\pi}{4}}$ عندما k يمسح $\mathbb{R}^+$.

ب - عيّن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z-1+i|=|z-1-i|$.

التمرين [4][باك 2009][م2] [4 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-6z+18=0$.

2) ليكن العدد المركب z_1 حيث : $z_1=3-3i$.

أ - أكتب z_1 على الشكل الأسي .

ب - أحسب طويلة العدد z_3 و عمدة له حيث : $z_1\times z_3=6\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. استنتج قيمتي $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها $3+3i$ ، $3-3i$ و $\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ على الترتيب .

أ - عيّن قيم العددالحقيقي α حتى تقبل الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,\alpha)\}$ مرجحا نرمز له بـ G_α.

ب - عيّن مجموعة النقط G_α لما يتغيّر α في $\mathbb{R}^*$.

التمرين [5][باك 2010][م1] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-3+2i)(z^2+6z+10)=0$.

2) علّم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، C ، D و I لواحقها $z_A=3-2i$ ، $z_C=-3+i$
و $z_D=-3-i$ و $z_I=1$ على الترتيب .

3) z عدد مركب يحقق الجملة : $\begin{cases}\arg\left(z-3+2i\right)=\arg\left(z-1\right)+\dfrac{\pi}{2}\\ \left|z-3+2i\right|=\left|z-1\right|\end{cases}$.

أ - بيّن أن الجملة تكافئ : $\dfrac{z-3+2i}{z-1}=i$ ، ثم عيّن قيمة z .

بـ - B النقطة التي لاحقتها $z_B=3$ ، تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟

جـ - لتكن J النقطة التي لاحقتها z_J حيث : $z_J=1-2i$.

أكتب على الشكل الأسي العدد المركب z حيث : $z=\dfrac{z_A-z_J}{z_B-z_J}$.

تحقق أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JI}$. ما هي طبيعة الرباعي $ABIJ$ ؟

التمرين [6][باك 2010][م2] [5 ن]

1) أ - أكتب على الشكل الأسي العدد المركب a حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$.

بـ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2=-2+2i\sqrt{3}$.

2) يُنسب المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=-1-\sqrt{3}i$ و $z_C=1+\sqrt{3}i$ على الترتيب .

أ - أحسب طويلة العدد المركب $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له .

بـ - استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) لتكن (E) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $\arg\left(\overline{z}+2\right)=\dfrac{\pi}{3}$.

أ - تحقق أن B تنتمي إلى (E).

بـ - عيّن المجموعة (E) .

التمرين [7][باك 2011][م1] [4 ن]

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) .... $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$.

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ، ثم أكتب حلولها على الشكل المثلثي .

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ و $z_C=\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

نضع : $L=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

أ - أكتب L على الشكل الأسي .

بـ - أثبت أن $z_A-z_B=L\left(z_C-z_B\right)$ ، ثم استنتج أن A صورة C بتحويل نقطي يطلب تعيينه و تحديد عناصره المميزة .

جـ - استنتج نوع المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

التمرين [8][باك 2011][م2] [4 ن]

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

العدد المركب المعرّف كما يلي : $L=\dfrac{-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{5+3i}$.

1) أ - أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .

بـ - بيّن أن $L^{12}+1=0$ ، ثم أحسب : $\left(-4\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{12}+\left(5+3i\right)^{12}$.

جـ - n عدد طبيعي فردي و p عدد طبيعي زوجي . أثبت أن : $L^{4n}+L^{4p}=0$.

2) أ - النقطتان A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = 5+3i$ و $z_B = 5-3i$.

عيّن اللاّحقة $z_{A'}$ للنقطة A' صورة النقطة A بالتشابه المباشر الذي مركزه النقطة B و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{3\pi}{4}$.

بـ - عيّن z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABA' .

التمرين [9][باك 2012][م1] [6 ن]

1) عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث : $\begin{cases} 2z_1 + 3z_2 = 9-2i \\ 3z_1 - z_2 = 8+8i \end{cases}$.

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A ، B و Ω التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3+2i$ ، $z_B = -3$ و $z_\Omega = 1-2i$.

أ - أثبت أن : $z_B - z_\Omega = i(z_A - z_\Omega)$.

بـ - عيّن طبيعة المثلث ΩAB .

3) h التحاكي الذي مركزه النقطة A و نسبته 2 .

أ - عيّن الكتابة المركبة للتحاكي h.

بـ - عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة Ω بالتحاكي h .

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$.

د- بيّن أن $ABCD$ مربع .

4) (E) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$.

أ - تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (E)، ثم عيّن طبيعة (E) و عناصرها المميزة .

بـ - أنشئ المجموعة (E) .

التمرين [10][باك 2012][م2] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z^2+2z+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B ، C و D النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3}+i$ ، $z_B = \sqrt{3}-i$ ، $z_C = -1-\sqrt{3}i$ و $z_D = -1+\sqrt{3}i$.

أ - أكتب كلا من z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسي .

بـ - تحقق أن : $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_C} = i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

3) z_n العدد المركب الذي طويلته $\frac{1}{2^n}$ و $\frac{2\pi}{3}n$ عمدة له حيث n عدد طبيعي .

L_n العدد المركب المعرّف بـ : $L_n = z_D \times z_n$.

أ - أكتب كلا من L_0 و L_1 على الشكل الجبري .

بـ - (u_n) المتتالية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = |L_n|$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

- M_0، M_1 ، ...... ، M_n صور الأعداد المركبة L_0، L_1 ، ...... ، L_n على الترتيب .

أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = \left\|\overrightarrow{OM_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM_2}\right\| + ... + \left\|\overrightarrow{OM_n}\right\|$

- جد نهاية S_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين [11][باك 2013][م1] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2+6z+17=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -4$ ، $z_B = -\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$ و $z_C = -\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$.

أحسب الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3) أ - عيّن z_D و z_E لاحقتي النقطتين D و E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ مربعا مركزه A .

بـ - عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}\right\|=10\sqrt{2}$.

4) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ، ذات اللاحقة z حيث : $\arg(z+4)=\frac{\pi}{4}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عيّن المجموعة (Γ_2) .

التمرين [12][باك 2013][2م] [4,5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(z+5-i\sqrt{3}\right)\left(z^2+2z+4\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1-i\sqrt{3}$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ و $z_C=-5+i\sqrt{3}$.

S التشابه المباشر الذي يحول A إلى C و يحول O إلى B .

- جد العبارة المركبة للتشابه S ، ثم عيّن العناصر المميزة له .

3) أ - عيّن z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$.

بـ - أكتب العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

جـ - عيّن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|$.

التمرين [13][باك 2014][1م] [5,5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$.

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $z_1=\sqrt{3}+i$ ، $z_2=\sqrt{3}-i$ و $z_3=i$.

أ - أكتب العدد $\frac{z_1}{z_2}$ على الشكل الأسي .

بـ - هل توجد قيم للعدد الطبيعي n يكون من أجلها العدد المركب $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ تخيليا صرفا ؟ برّر إجابتك .

3) أ - عيّن العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C ، محددا نسبته و زاويته .

بـ - استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) أ - عيّن العناصر المميزة لـ (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z و التي تحقق : $|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=5$

بـ - عيّن (E') مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $|z-z_1|=|z-z_3|$.

التمرين [14][باك 2014][2م] [4,5 ن]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطة A ذات اللاحقة $z_0=1+i$.

1) أ - عيّن ثم أنشئ (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

بـ - عيّن ثم أنشئ (γ') مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $z=z_0+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$.

جـ - عيّن إحداثيات نقطة تقاطع (γ) و (γ') .

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_1 حيث : $z_1=z_0+2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$.

أ - عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_1-z_0}{z_0}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

بـ - عيّن z_2 لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

جـ - عيّن العددين α و β بحيث تكون النقطة O مرجحا للجملة $\{(A,\alpha);(C,\beta)\}$ و $\alpha+\beta=\sqrt{2}$.

د- عيّن ثم أنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$.

التمرين [15][باك 2015][1م] [4 ن]

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب z_A و z_B حيث : $z_A=-1-i$ و $z_B=3+3i$.

1) أ - أكتب z_A و z_B على الشكل الأسي .

ب - n عدد طبيعي ، عيّن قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا .

جـ - z عدد مركب حيث $\frac{z}{z_A}=4e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، أحسب طويلة العدد z و عمدة له ، ثم أكتب $\frac{z}{z_A}$ على الشكل الجبري .

د- استنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

2) أ - أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - أحسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\left\{(A,-1);(B,1);(C,1)\right\}$ ، ثم بيّن أن $ABDC$ مربع .

التمرين [16][باك 2015][2م] [5 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2-4(\sin\theta)z+4=0$ ....(I) ، حيث θ وسيط حقيقي .

2) من أجل $\theta=\frac{\pi}{3}$ نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ z_1 و z_2 . أكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

3) نعتبر في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب :

$z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=3\sqrt{3}+i$.

أ - أكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب - استنتج النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A يطلب تعيين نسبته و زاوية له .

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$ ، ثم حدّد طبيعة الرباعي $ABDC$.

4) أ - عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ تخيلي صرف مع $z\neq z_B$.

ب - عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $\frac{z-z_C}{z-z_B}$ حقيقيا مع $z\neq z_B$.

التمرين [17][باك 2016][1م] [4 ن]

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $9z^2-6\sqrt{3}z+4=0$.

2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب :

$z_A=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}i$ و $z_B=\overline{z_A}$.

أ - أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي .

ب - بيّن أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2016}+\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1437}=0$.

جـ - عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عددا حقيقيا .

3) f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث : $z'=\left(\frac{z_A}{z_B}\right)z$.

أ - عيّن طبيعة التحويل النقطي f و عناصره المميزة .

ب - أحسب z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتحويل f .

جـ - عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى تكون O مركز ثقل الرباعي $ABCD$.

التمرين [18][باك 2016][2م] [4,5 ن]

1) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(2z-\sqrt{2}\right)\left(z^2-2\sqrt{2}z+4\right)=0$.

ب - أكتب الحلول على الشكل الأسي .

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

A ، B و C النقط التي لواحقها على الترتيب : $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $b=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ و $c=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

أ - علّم النقط A ، B و C في المعلم السابق .

ب - نعتبر النقطة D صورة النقطة C بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و نسبته 3 و زاوية π .

و النقطة E صورة النقطة C بالدوران R الذي مركزه O و زاوية $-\frac{\pi}{2}$.

- أحسب اللاحقتين d و e للنقطتين D و E على الترتيب .

3) نضع : $z=\frac{d-b}{e-b}$.

أ - أكتب العدد z على الشكل المثلثي .

ب - نعتبر النقطة I منتصف القطعة $\left[DE\right]$ ، F نظيرة النقطة B بالنسبة للنقطة I . ما طبيعة الرباعي $BDFE$ ؟

التمرين [19][باك 2017][1م] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-1$ ، $z_B=2+i$ و $z_C=-i$.

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2) عيّن العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه C و يحول B إلى A .

3) نعتبر النقطة D نظيرة B بالنسبة إلى C و النقطة E صورة النقطة D بالتشابه S.

أ - عيّن z_D لاحقة النقطة D ، ثم تحقق أن : $z_E=1-2i$ حيث z_E لاحقة النقطة E .

ب - حدّد طبيعة الرباعي $ADEB$.

4) $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z . (M تختلف عن A و B)

حيث : $\arg\left(z-z_A\right)-\arg\left(z-z_B\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

تحقق أن النقطة C تنتمي إلى $\left(\Gamma\right)$ ، ثم حدّد طبيعة المجموعة $\left(\Gamma\right)$ و أنشئها .

التمرين [20][باك 2017][2م] [5 ن]

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=\frac{1}{2}\left(1-i\right)$ و $z_D=\overline{z_C}$.

1) أكتب z_A و z_C على الشكل الأسي ، ثم استنتج الشكل الأسي لكل من z_B و z_D .

ب - عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\left(z_A\right)^n=\left(z_B\right)^n$.

2) أ - جد نسبة و مركز التحاكي h الذي يحول D إلى A و يحوّل C إلى B .

ب - أحسب طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ADCB$.

3) أحسب z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\left\{\left(A,2\right);\left(B,2\right);\left(C,-1\right);\left(D,-1\right)\right\}$ ،

4) لتكن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|=\sqrt{5}$.

بيّن أن النقطة A تنتمي إلى $\left(\Gamma\right)$ ، ثم حدّد طبيعة المجموعة $\left(\Gamma\right)$ و عناصرها المميزة و أنشئها .

التمرين [21][باك 2017][الدورة الإستثنائية][1م] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $\left(z-4\right)\left(z^2-2z+4\right)=0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1)أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

2)أ - عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.

بـ - عيّن طبيعة الرباعي $ABDC$.

3)من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $z_n = (z_A)^n + (z_B)^n$

أ - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $z_n = 2^{n+1} \times \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$.

بـ - نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = z_{6n}$

عبّر عن t_n بدلالة n ثم أحسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = t_0 \times t_1 \times t_2 \times ...... \times t_n$.

التمرين [22][باك 2017][الدورة الإستثنائية][م2] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$.

1) بيّن أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC و أحسب مساحته .

2) أ - أكتب على الشكل الجبري العدد L حيث : $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$.

بـ - بيّن أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{\pi}{12}$.

3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحوّل النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' و المعرّف بـ :

$z' = (z - z_B)L + z_B$.

- بيّن أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة .

4)لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.

- أحسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

التمرين [23][باك 2018][م1] [5 ن]

I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

لتكن النقطتين A و B لاحقتاهما: $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ و $z_B = \overline{z_A}$.

1) أكتب على الشكل الأسي كلا من العددين المركبين z_A و $\frac{1}{z_B}$ ، ثم بيّن أن العدد $\left(\frac{2}{z_B}\right)^{2018}$ تخيلي صرف .

2) لتكن النقطة C صورة النقطة B بالتحاكي h الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و نسبته -3 .

- بيّن أن لاحقة النقطة C هي : $z_C = -\sqrt{2} + i3\sqrt{2}$.

3) عيّن لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

4) أ - بيّن أن $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = -i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD .

بـ - جد لاحقة النقطة E بحيث يكون الرباعي $ACED$ مربعا .

التمرين [24][باك 2018][م2] [5 ن]

I) أ - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $4z^2 - 2z + 1 = 0$ .... (E).

بـ - أكتب العددان $\frac{1}{z_1}$ و $\frac{1}{z_2}$ على الشكل الأسي، حيث z_1 و z_2 حلا المعادلة (E) .

II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.

1) أحسب $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث ABC .

بـ - استنتج أن B هي صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

2) جد لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$ و استنتج بدقة طبيعة الرباعي $ACBD$.

3) حدّد طبيعة (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|iz+\sqrt{3}-i|=|z-1+i\sqrt{3}|$.

4) بيّن أن النقطة G مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC تنتمي إلى (γ) .

مع تمنياتنا لكم نحن الأساتذة بالتوفيق و النجاح في بكالوريا 2020

أ.شعبان

تجدون هذا الملف في صفحة -5min Maths