حل التمرين 1

1. عبارة u في لحظة t بدلالة R ، i ، E :

لدينا : $u(t)+Ri=E \Rightarrow \boxed{u(t)=E-Ri}$

2. عبارة i_0 عند اللحظة $t=0$:

عند اللحظة $t=0$ يكون : $E-Ri_0=0 \Rightarrow i_0=\dfrac{E}{R}$

تطبيق عددي : $i_0=\dfrac{12}{320\times10^3}$, $\boxed{i_0=3{,}75\times10^{-5}\,A}$

3. نهاية i عندما ينتهي الزمن t إلى ∞ :

عندما $t\to\infty$ فإن $u\to E$ ، ومنه $i=0$

التعليل : المكثفة مشحونة كليا وعندها لا يمر تيار مستمر في الدارة .

4. تبيان أن حل المعادلة التفاضلية من الشكل : $u(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$:

لدينا : $\dfrac{du_{(t)}}{dt}=\dfrac{E}{RC}.e^{-\frac{t}{RC}}$

ومنه :

$$\frac{du}{dt}+\frac{1}{RC}u-\frac{1}{RC}=\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{1}{RC}\left[E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right]-\frac{E}{RC}$$

$$=\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{E}{RC}-\frac{E}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}-\frac{E}{RC}$$

$$=0$$

أي أن حل المعادلة التفاضلية هو من الشكل : $u(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

5. ـ إيجاد قيمة ثابت الزمن τ : من البيان نجد $\boxed{\tau=0{,}3s}$.

ـ استنتاج قيمة C : $RC=\tau \Rightarrow C=\dfrac{\tau}{R}$

تطبيق عددي : $C=\dfrac{0{,}3}{32\times10^4}$, $\boxed{C=0{,}94\mu F}$

6. إيجاد u_C من أجل $t=\tau$:

ـ بيانيا : $u_C=7{,}5V$.

ـ حسابيا : $u_C=E\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$u_C=E\left(1-e^{-1}\right)$, $\boxed{u_C=0{,}63E=7{,}56V}$

7. حساب الطاقة المخزنة في المكثفة عند شحنها :

لدينا : $E=\dfrac{1}{2}.u^2.C$

تطبيق عددي : $E=\dfrac{1}{2}\times(12)^2\times0{,}94\times10^{-6}$

$$\boxed{E\approx67{,}7\times10^{-6}\,j}$$

حل التمرين 2

1. أ) كتابة المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة q :

بتطبيق قانون أوم و قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = E$

حيث : $u_C = \dfrac{q}{C}$ و $u_R = Ri = R\dfrac{dq}{dt}$

أي : $\dfrac{q}{C} + R\dfrac{dq}{dt} = E$

وبالقسمة على R نحصل على المعادلة : $\boxed{\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{RC}q = \dfrac{E}{R}}$

ب) التحقق من أن حل المعادلة التفاضلية من الشكل $q(t) = Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ ، حيث $\tau = RC$

لدينا : $\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

ومنه :

$$\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{RC}\left(Q_0\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\right) = \frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{Q_0}{RC} - \frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$= \frac{Q_0}{RC}$$

$$= \frac{E}{R}$$

2. أ) ثابت الزمن τ :

تعريفه : هو الزمن اللازم لشحن المكثفة بنسبة 63% من قيمتها الأعظمية .

قيمته : من البيان نجد $\boxed{\tau = 0{,}01s}$

ب) الزمن $0{,}05s$ كافي لتبلغ عملية الشحن 99% من القيمة العظمي .

التبرير :

3. ـ أ) تعيين قيمة سعة المكثفة : $C = \dfrac{Q_0}{E}$

تطبيق عددي : $C = \dfrac{6 \times 10^{-7}}{6}$, $\boxed{C = 0{,}1\mu F}$

ب) مقاومة الناقل الأومي : $\tau = RC \Rightarrow R = \dfrac{\tau}{C}$

تطبيق عددي : $R = \dfrac{0{,}01}{0{,}1 \times 10^{-6}}$, $\boxed{R = 100k\Omega}$

ج) شدة التيار في النظام الدائم :

4. الطاقة المخزنة في المكثفة عند نهاية الشحن :

لدينا : $E_C = \dfrac{1}{2}u^2C$

تطبيق عددي : $E_C = \dfrac{1}{2} \times (6)^2 \times 0{,}1 \times 10^{-6}$

$$\boxed{E_C = 1{,}8 \times 10^{-6}\, j}$$

حل التمرين 3

1. شدة التيار الكهربائي المار في الدارة بعد مدة $\Delta t = 15s$ من غلقها :

من البيان نلاحظ أنه بعد المدة $\Delta t = 15s$ ، أن $u_C = E$

أي أن المكثفة شحنت كليا و بالتالي : $i = 0$

2. ـ العبارة الحرفية لثابت الزمن τ : $\tau = RC$.

ـ ثابت الزمن τ له نفس وحدة قياس الزمن لأن : $[\tau] = \frac{[u]}{[I]} \times \frac{[I][T]}{[u]} = [T]$

3. ـ تعيين قيمة τ بيانيا : من البيان نجد $\boxed{\tau = 2,2s}$

ـ استنتاج السعة (C) للمكثفة : $C = \frac{\tau}{R}$

تطبيق عددي : $\boxed{C = 220\mu F}$, $C = \frac{2,2}{10^4}$

4. أ) كتابة عبارة شدة التيار الكهربائي $i(t)$ بدلالة $q(t)$:

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

ب) كتابة عبارة التوتر $u_C(t)$ بدلالة $q(t)$:

$$\boxed{u_C(t) = \frac{q(t)}{C}}$$

ج) تبيان أن المعادلة التفاضلية التي تعبر عن $u_C(t)$ هي : $u_C + RC\frac{du_C}{dt} = E$

لدينا : $u_C + u_R = E$

أي : $u_C + Ri = E$

$$u_C + R\frac{dq}{dt} = E \quad / \quad dq = Cdu_C$$

ومنه : $\boxed{u_C + RC\frac{du_C}{dt} = E}$

5. ـ استنتاج العبارة الحرفية للثابت A :

بما أن $u_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{A}}\right)$ حل للمعادلة التفاضلية السابقة ، فإن :

$$E\left(1 - e^{-\frac{t}{A}}\right) + RC.\frac{E}{A}.e^{-\frac{t}{A}} = E \quad / \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{E}{A}.e^{-\frac{t}{A}}$$

أي : $E - E.e^{-\frac{t}{A}} + RC.\frac{E}{A}.e^{-\frac{t}{A}} = E$

$$E.e^{-\frac{t}{A}}\left(\frac{RC}{A} - 1\right) = 0$$

المعادلة محققة من أجل : $\frac{RC}{A} - 1 = 0$

ومنه : $\boxed{A = RC}$

ـ مدلوله الفيزيائي : الزمن اللازم لشحن المكثفة إلى الثلثين تقريبا .

حل التمرين 4

1. أ) إيجاد المعادلة التفاضلية للدارة $u_{AB} = f(t)$:

حسب قانون جمع التوترات : $u_{AB} + u_{BD} = E$

أي : $i = C.\dfrac{du_{AB}}{dt}$, $u_{AB} + Ri = E$

ومنه : $u_{AB} + RC\dfrac{du_{AB}}{dt}$

بالقسمة على RC : $\boxed{\dfrac{du_{AB}}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_{AB} = \dfrac{E}{RC}}$

ب) التحقق من أن حل المعادلة التفاضلية هو : $u_{AB} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

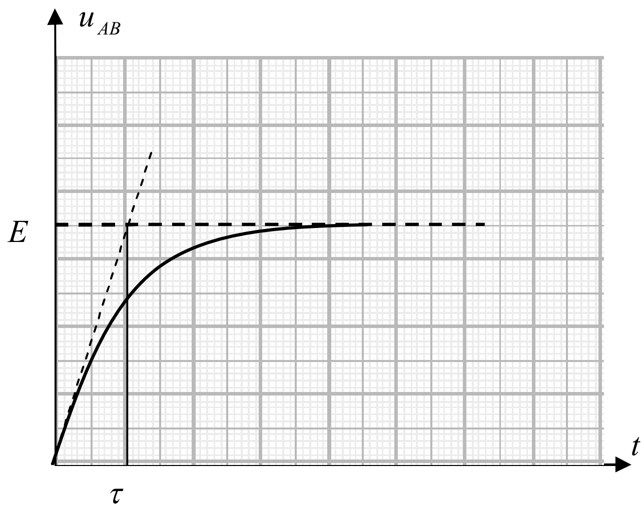
نعوض في المعادلة التفاضلية : $\dfrac{E}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \dfrac{1}{RC}\left[E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right] = \dfrac{E}{RC}$

أي : $e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\dfrac{E}{\tau} - \dfrac{E}{RC}\right) + \dfrac{E}{RC} = \dfrac{E}{RC}$

وبما أن $\tau = RC$ ، فإن هذه المساواة محققة ، وبالتالي :

$u_{AB} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ هو حل للمعادلة التفاضلية السابقة .

ج) التمثيل الكيفي لتغيرات u_{AB} بدلالة الزمن :



د) دلالة فاصلة نقطة تقاطع المماس للبيان عند المبدأ مع المستقيم $u_{AB} = E$:

هو ثابت الزمن τ

ه) حساب ثابت الزمن لثنائي القطب RC :

$\tau = RC$

تطبيق عددي : $\tau = 10\times10^3 \times 0,5\times10^{-6}$

$\boxed{\tau = 5ms}$

و) حساب u_{AB} في اللحظات $t_1 = \tau$ ، $t_2 = 5\tau$:

ـ حساب u_{AB} في اللحظة $t_1 = \tau$:

لدينا : $u_{AB} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

تطبيق عددي : $u_{AB} = E\left(1 - e^{-1}\right)$

$u_{AB} \approx 0,63E$, $\boxed{u_{AB} \approx 63V}$

ـ حساب u_{AB} في اللحظة $t_2 = 5\tau$:

$u_{AB} = E\left(1 - e^{-5}\right)$

$u_{AB} \approx E$

$\boxed{u_{AB} \approx 100V}$

2. أ) إيجاد المعادلة التفاضلية :

حسب قانون جمع التوترات : $u_{AB} + u_{BD} = 0$

أي : $u_{AB} + Ri = 0$, $i = C.\dfrac{du_{AB}}{dt}$

ومنه : $u_{AB} + RC\dfrac{du_{AB}}{dt} = 0$

بالقسمة على RC :

$$\boxed{\frac{du_{AB}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{AB} = 0}$$

ب) حساب u_{AB} من أجل $t_1 = 0$ ، $t_2 = \tau$ ، $t_3 = 5\tau$ ، $t \to \infty$:

المعادلة التفاضلية السابقة تقبل كحل لها من الشكل : $u_{AB} = ae^{\alpha.t} + b$

حيث : $a = E$ ، $b = 0$ ، $\alpha = -\dfrac{1}{RC} = -\dfrac{1}{\tau}$ ، أي : $u_{AB} = E.e^{-\frac{1}{\tau}}$

ـ حساب u_{AB} من أجل $t_1 = 0$:

$u_{AB} = E.e^{-\frac{1}{\tau}}$

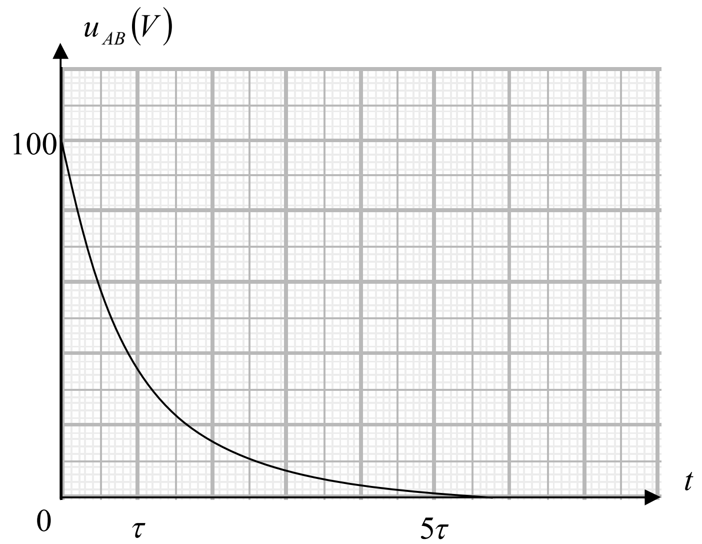
$u_{AB} = E.e^{0}$

$$\boxed{u_{AB} = E = 100V}$$

وبنفس الطريقة ، نعوض قيم t المعطاة فنحصل على قيم u_{AB} المدونة في الجدول التالي :

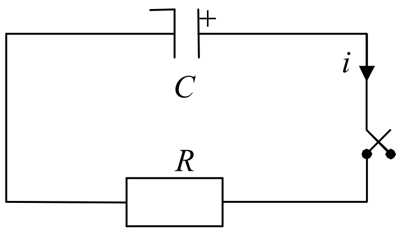
$t(s)$	0	τ	5τ	∞
$u_{AB}(V)$	100	37	0,67	0

ج) تمثيل تغيرات u_{AB} بدلالة الزمن :



حل التمرين 5

1. رسم مخطط الدارة : (الشكل -1) .



2. تمثيل جهة التيار الكهربائي المار في الدارة على الشكل -1) .
3. إيجاد العلاقة بين u_R و u_C :

حسب قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = 0$

$$u_C = -u_R$$

4. إيجاد المعادلة التفاضلية بدلالة u_C :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R = Ri = RC\dfrac{du_C}{dt}$ / $u_C + u_R = 0$

أي : $u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = 0$

بالقسمة على RC : $\boxed{\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = 0}$

5. حل المعادلة التفاضلية السابقة من الشكل : $u_C = a \times e^{bt}$

ـ تعيين قيمتي الثابتين a و b :

بالتعويض في المعادلة التفاضلية السابقة : $ab \times e^{bt} + \dfrac{1}{RC}.a \times e^{bt} = 0$

أي : $a.e^{bt}\left(b + \dfrac{1}{RC}\right) = 0$

ومنه : $b = -\dfrac{1}{RC}$

تطبيق عددي : $\boxed{b = -\dfrac{2}{3} \times 10^3}$, $b = -\dfrac{1}{15 \times 10^3 \times 1{,}0 \times 10^{-7}}$

كما أنه في اللحظة $t = 0$: $u_C = a = \dfrac{q}{C}$

تطبيق عددي : $\boxed{a = 6}$, $a = \dfrac{0{,}6 \times 10^{-6}}{1{,}0 \times 10^{-7}}$

6. كتابة العبارة الزمنية للتوتر u_C :

$$\boxed{u_C = 6e^{-\frac{2}{3} \times 10^3 t}}$$

7. التأكد من القيم المحسوبة في السؤال 5 :

من البيان : ـ في اللحظة $t = 0$ ، نجد $u = 6V$ وهي نفس القيمة المحسوبة في السؤال 5 .

ـ إن القيمة $u(\tau) = 0{,}37 \times 6 = 2{,}22V$ توافق على البيان $\tau = 0{,}75 \times 0{,}002 = 1{,}5 \times 10^{-3}$.

حيث : $b = -\dfrac{1}{RC} = -\dfrac{1}{\tau}$

أي : $b = -\dfrac{1}{1{,}5 \times 10^{-3}}$

ومنه : $\boxed{b = -\dfrac{2}{3} \times 10^3}$

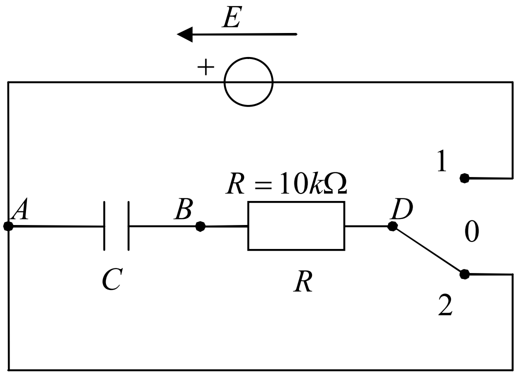
وهي نفس القيمة المحسوبة في السؤال 5 .

حل التمرين 6

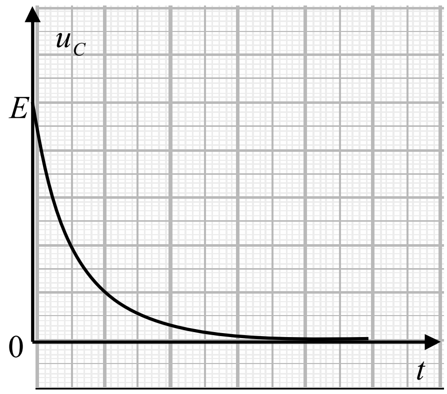
1. وضع القاطعة لتفريغ المكثفة : الوضع 2 (الشكل -1) .

2. ـ وصل الدارة براسم اهتزاز مهبطي للحصول على u_{AB} بدلالة الزمن : موضحة على الشكل - 1) .

ـ التمثيل الكيفي للبيان : (شكل -2)



(شكل -1)



(شكل -2)

3. العلاقة بين u_C و u_R : $u_C + u_R = 0$

4. المعادلة التفاضلية أثناء تفريغ المكثفة من الشكل : $\alpha \dfrac{du_{(t)}}{dt} + u_{(t)} = 0$

أ) ـ المعامل α : يمثل الجداء RC ، أي ثابت الزمن ($\tau = RC$) .

ـ وحدة قياسه : الثانية (s).

ـ التعليل : $[\tau] = \dfrac{[u]}{[I]} \times \dfrac{[T].[I]}{[u]} = [T]$

ب) اختيار الحل الصحيح للمعادلة : $u_{(t)} = Ee^{-t/\alpha}$

5. أ) كتابة العبارة البيانية : $\ln u_C = at + b$

ب) إيجاد قيمة ثابت الزمن τ وحساب C :

ـ إيجاد قيمة ثابت الزمن τ :

من العلاقة النظرية لدينا : $\ln u_C = -\dfrac{1}{\tau}.t + \ln E \quad (1)$

و من البيان : $\ln u_C = a.t + b \quad (2)$

حيث a ميل المنحنى البياني $\ln u_C = f(t)$

بالمطابقة بين المعادلتين (1) و (2) : $-\dfrac{1}{\tau} = a \quad , \quad a = -\dfrac{3 \times 0{,}5}{3 \times 10 \times 10^{-3}} = -50$

ومنه : $-\dfrac{1}{\tau} = -50 \quad , \quad \boxed{\tau = 0{,}02s}$

ـ حساب C : $\tau = RC \Rightarrow C = \dfrac{\tau}{R}$

تطبيق عددي : $C = \dfrac{0{,}02}{10 \times 10^3} \quad , \quad \boxed{C = 2\mu F}$

ج) إيجاد قيمة E :

لدينا : $\ln E = b = 3 \times 0{,}5$

أي : $\ln E = 1{,}5 \quad , \quad \boxed{E \approx 4{,}48V}$

حل التمرين 7

1. إيجاد المعادلة التفاضلية :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = 0$

$u_{C(t)} + Ri_{(t)} = E$

أي : $i_{(t)} = C\dfrac{du_{C(t)}}{dt}$

ومنه : $u_{C(t)} + RC\dfrac{du_{C(t)}}{dt} = E$

بالقسمة على RC : $\boxed{\dfrac{du_{C(t)}}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_{C(t)} = \dfrac{E}{RC}}$

2. التحقق من أن المعادلة التفاضلية تقبل العبارة $u_{C(t)} = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}.t}\right)$ كحل لها :

لدينا : $\dfrac{du_{C(t)}}{dt} = \dfrac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}.t}$

نعوض في المعادلة التفاضلية : $\dfrac{E}{RC}.e^{-\frac{1}{RC}.t} + \dfrac{1}{RC}\left[E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}.t}\right)\right] = \dfrac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}.t} + \dfrac{E}{RC} - \dfrac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}.t}$

$= \dfrac{E}{RC}$

ومنه المعادلة التفاضلية تقبل كحل لها : $u_{C(t)} = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}.t}\right)$

3. ـ وحدة المقدار RC : $[RC] = \dfrac{[u]}{[I]} \times \dfrac{[T][I]}{[u]} = [T]$

ـ مدلوله العملي بالنسبة للدارة : هو مؤشر لمدة النظام الانتقالي أثناء شحن أو تفريغ مكثفة .

ـ اسمه : ثابت الزمن و يرمز له بـ (τ) .

4. حساب قيمة التوتر الكهربائي $u_{C(t)}$ في اللحظات المدونة في الجدول :

لدينا : $\boxed{u_{C(t)} = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}.t}\right)}$

نحسب RC : $RC = 5\times10^3 \times 1,2\times10^{-6}$

$\boxed{\tau = RC = 6\times10^{-3}s}$

في اللحظة $t=0$: $u_{C(0)} = 6\left(1-e^0\right)$, $\boxed{u_{C(0)} = 0V}$

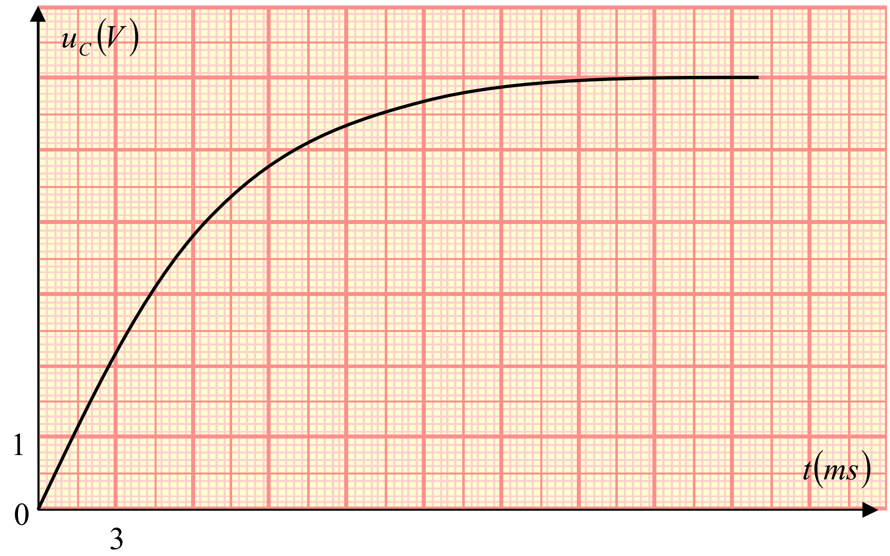
في اللحظة $t = 6ms$: $u_C = 6\left(1-e^{-\frac{6\times10^{-3}}{6\times10^{-3}}}\right) = 6\left(1-e^{-1}\right)$

$\boxed{u_C \approx 3,8V}$

وهكذا بنفس طريقة الحساب ، نحصل على باقي القيم المدونة في الجدول التالي :

$t(ms)$	0	6	12	18	24
$u_{C(t)}(V)$	0	3,8	5,2	5,7	5,9

5. رسم المنحنى البياني $u_{C(t)} = f(t)$:



6. ـ العبارة الحرفية للشدة اللحظية للتيار الكهربائي $i(t)$:

لدينا : $$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{du_{C(t)}}{dt}$$

أي : $$i(t) = C\frac{E}{RC}e^{-\frac{1}{RC}.t}$$

ومنه : $$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{1}{RC}.t}}$$

ـ حساب قيمتها في اللحظتين $t = 0$ ، $t \to \infty$:

في اللحظة $t = 0$: $$i(0) = \frac{E}{R}$$

في اللحظة $t \to \infty$: $$i = 0$$

7 . ـ عبارة الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}.u_{C(t)}^2.C}$$

حيث : $$u_{C(t)} = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}.t}\right)$$

ـ حساب قيمتها عندما $(t \to \infty)$:

لدينا : $$\lim_{t\to\infty} u_{C(t)} = \lim_{t\to\infty} E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}.t}\right) = E$$

ومنه : $$E = \frac{1}{2}.E^2.C$$

تطبيق عددي : $$E = \frac{1}{2}.(6)^2 \times 1,2 \times 10^{-6}$$ $$\boxed{E = 21,6 \times 10^{-6} j}$$

حل التمرين 8

1. أ) كتابة المعادلة التفاضلية $u_{BD} = u_{(t)} = f(t)$:

بتطبيق قانون أوم و قانون جمع التوترات : $u_R = Ri$ / $u_{BD} + u_R = E$

أي : $i = C\dfrac{du_{(t)}}{dt}$ / $u_{(t)} + Ri = E$

ومنه : $u_{(t)} + RC\dfrac{du_{(t)}}{dt} = E$

بالقسمة على RC :
$$\boxed{\frac{du_{(t)}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{(t)} = \frac{E}{RC}}$$

ب) التحقق من أن حل المعادلة من الشكل $u_{(t)} = E + a.e^{-bt}$ ، باختيار صحيح لـ b :

نعوض في المعادلة التفاضلية : $\dfrac{du_{(t)}}{dt} = -a.b.e^{-bt}$

$$-a.b.e^{-bt} + \frac{1}{RC}\left(E + a.e^{-bt}\right) = -a.be^{-bt} + \frac{E}{RC} + \frac{a}{RC}e^{-bt}$$
$$= a.e^{-bt}\left(\frac{1}{RC} - b\right) + \frac{E}{RC}$$

تقبل المعادلة التفاضلية حل من الشكل $u_{(t)} = E + a.e^{-bt}$ ، إذا كان : $\dfrac{1}{RC} - b = 0$

أي : $\boxed{b = \dfrac{1}{RC}}$

ج) ـ نبين أن $a = -E$:

من الشروط الابتدائية ، في اللحظة $t = 0$: $u_{(0)} = 0 \Rightarrow E + a.e^{0} = 0$

ومنه : $\boxed{a = -E}$

ـ إيجاد قيمة τ : $\tau = RC$

تطبيق عددي : $\tau = 100 \times 10^{3} \times 0{,}1 \times 10^{-6}$, $\boxed{\tau = 10ms}$

2. إكمال الجدول :

لدينا : $u_{BD} = E - E.e^{-\frac{1}{RC}.t} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

في اللحظة $t = 0$: $u_{BD} = E\left(1 - e^{0}\right) = 0$

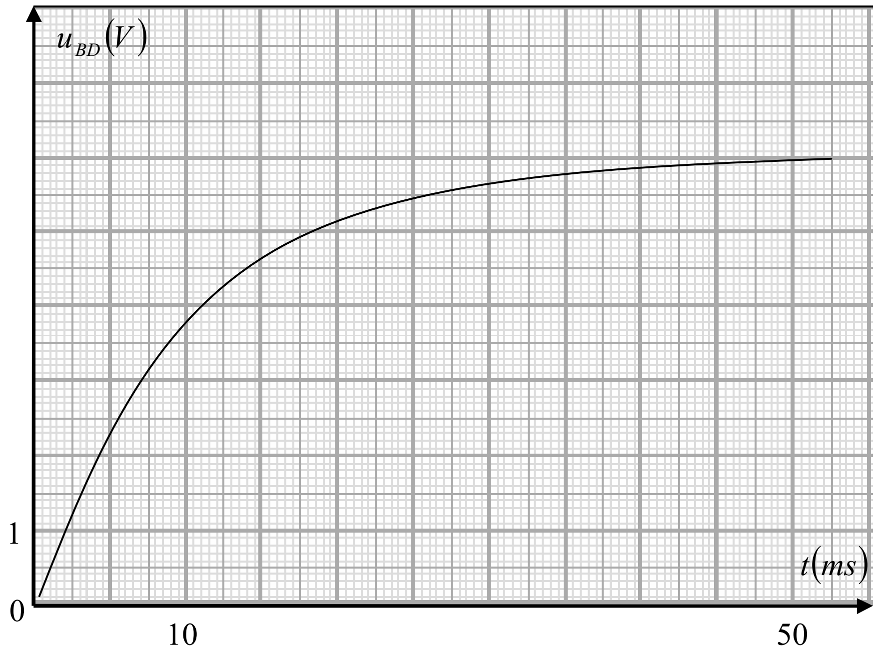
في اللحظة $t = \tau$: $u_{BD} = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63E \approx 3{,}78V$

في اللحظة $t = 5\tau$: $u_{BD} = E\left(1 - e^{-5}\right) \approx 6V$

$t(s)$	0	τ	5τ
$u_{AB}(V)$	0	3,78	6

3. رسم البيان $u_{BD} = f(t)$ (صفحة 47).

رسم البيان $u_{BD} = f(t)$:



4. تفرغ المكثفة : بوضع البادلة في الوضع 2 .

أ) أين تذهب الطاقة المخزنة في المكثفة ؟

ـ تفرغ المكثفة في المقاومة ، و الطاقة المخزنة فيها تصرف على شكل حرارة بفعل جول في أسلاك التوصيل .

ب) القيمة العددية لهذه الطاقة :

لدينا: $E = \frac{1}{2} u_{(t)}^2 C$

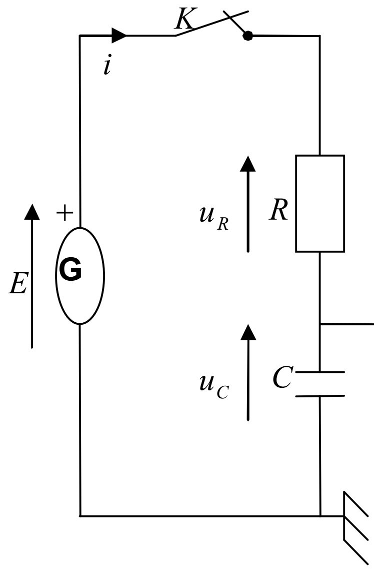
حيث : $u_{(t)} = E$

ومنه : $\boxed{E = \frac{1}{2} E^2 C}$

تطبيق عددي : $E = \frac{1}{2} (6)^2 \times 0,1 \times 10^{-6}$

$\boxed{E = 1,8 \times 10^{-6}\, j}$

حل التمرين 9



1. أ) الظاهرة التي تحدث في الدارة : عملية شحن مكثفة .

ب) ـ اتجاه التيار في الدارة : موضح بسهم في الشكل 1-).

ـ التوترات بين طرفي كل عنصر : موضحة بأسهم في الشكل 1-).

ج) كيفية ربط جهاز راسم الاهتزاز المهبطي للحصول على u_C بدلالة الزمن موضح على الشكل 1-).

د) إيجاد المعادلة التفاضلية التي يحققها u_C بين طرفي المكثفة :

حسب قانون جمع التوترات : $u_C + u_R = E$

أي : $u_C + Ri = E \quad / \quad i = C\dfrac{du_C}{dt}$

ومنه : $u_C + RC\dfrac{du_C}{dt} = E$

بالقسمة على RC : $\boxed{\dfrac{du_C}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{E}{RC}}$

ه) ـ التحقق من أن حل المعادلة التفاضلية من الشكل : $u_C = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}\left[A\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = \frac{A}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC}e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{A}{RC}$$

$$= \frac{E}{RC}$$

حيث : $\tau = RC$

أي : حل المعادلة التفاضلية من الشكل $u_C = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ مع $A = E$

ـ نبين أن : $\ln(E - u_C) = -\dfrac{1}{\tau}t + \ln E$

لدينا : $u_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

أي : $u_C = E - Ee^{-t/\tau}$

نضرب طرفي المعادلة في -1 : $-u_C = -E + Ee^{-t/\tau}$

نضيف إلى طرفي المعادلة E : $E - u_C = E - E + Ee^{-t/\tau}$

أي : $E - u_C = Ee^{-t/\tau}$

بأخذ اللوغاريتم النيبيري للطرفين : $\ln(E - u_C) = \ln E + \ln e^{-t/\tau}$

أي : $\ln(E - u_C) = -\dfrac{t}{\tau} + \ln E$

ومنه : $\boxed{\ln(E - u_C) = -\dfrac{1}{\tau}t + \ln E}$

2. استنتاج من البيان قيمة كل من E و τ :

لدينا :

$$\ln(E-u_C)=-\frac{1}{\tau}t+\ln E \qquad (1)$$

$$\ln(E-u_C)=at+b \qquad (2)$$

ـ استنتاج قيمة τ :

من العلاقتين (1) و (2) لدينا :

$$-\frac{1}{\tau}=a \quad / \quad a=\frac{3\times 0{,}25}{6\times 0{,}125\times 10^{-3}}=-1000$$

حيث a ميل المحنى البياني .

ومنه :

$$-\frac{1}{\tau}=-1000 \quad , \quad \boxed{\tau=10^{-3}s=1ms}$$

ـ استنتاج قيمة E:

$$\ln E=b=6\times 0{,}25$$

أي :

$$\ln E=1{,}5 \quad , \quad \boxed{E\approx 4{,}48V}$$

3. حساب النسبة : $\frac{E_e}{E_{e(\max)}}$

ـ نحسب E_e الطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t=\tau$:

$$E_e=\frac{1}{2}u_{(\tau)}^2C \quad , \quad u_{(\tau)}=E\left(1-e^{-1}\right)\approx 0{,}63E$$

ومنه :

$$E_e=\frac{1}{2}(0{,}63E)^2C$$

ـ نحسب $E_{e(\max)}$ الطاقة القصوى المخزنة في المكثفة :

$$E_{e(\max)}=\frac{1}{2}u_{\max}^2C \quad , \quad u_{\max}=E$$

ومنه :

$$E_{e(\max)}=\frac{1}{2}E^2C$$

النسبة $\frac{E_e}{E_{e(\max)}}$:

$$\frac{E_e}{E_{e(\max)}}=\frac{\frac{1}{2}(0{,}63E)^2C}{\frac{1}{2}E^2C}=(0{,}63)^2$$

ومنه :

$$\boxed{\frac{E_e}{E_{e(\max)}}\approx 0{,}40\approx 40\%}$$

الاستنتاج : الطاقة المخزنة في المكثفة عند اللحظة $t=\tau$ تمثل تقريبا 40% من الطاقة القصوى .

4. إيجاد قيمة سعة المكثفة $C^{/}$ التي تربط مع المكثفة C في الدارة ليأخذ ثابت الزمن القيمة $\tau^{/}=\frac{\tau}{3}$:

لتكن C_{eq} السعة المكافئة لـ C و $C^{/}$ ، فنكتب :

$$\tau^{/}=RC_{eq}$$

$$C_{eq}=\frac{\tau^{/}}{R}=\frac{\tau}{3R}=\frac{RC}{3R}=\frac{C}{3}$$

(الربط على التسلسل)

ومنه :

$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C}+\frac{1}{C^{/}}\Rightarrow\frac{1}{C^{/}}=\frac{1}{C_{eq}}-\frac{1}{C}=\frac{3}{C}-\frac{1}{C}=\frac{2}{C}$$

$$C^{/}=\frac{C}{2} \quad , \quad C=\frac{\tau}{R}=\frac{10^{-3}}{100}=10\mu F$$

$$\boxed{C^{/}=5\mu F}$$

حل التمرين 10

1. اعتمادا على البيان :

أ) ـ قيمة ثابت الزمن τ : $\boxed{\tau \approx 14ms}$

ـ قيمة التوتر الكهربائي بين طرفي المولد : $\boxed{E = 14{,}8V}$

ـ حساب سعة المكثفة :

لدينا : $\tau = RC \Rightarrow C = \dfrac{\tau}{R}$

تطبيق عددي : $\boxed{C = 28\mu F}$, $C = \dfrac{14\times10^{-3}}{500}$

ب) تحديد المدة الزمنية $t^{/}$ لاكتمال عملية شحن المكثفة :

لدينا : $u_C = 0{,}99E$

أي : $u_C = 14{,}65V$, $u_C = 0{,}99\times14{,}8$

نقرأ على البيان القيمة الموافقة : $\boxed{t^{/} \approx 70ms}$

ج) العلاقة بين $t^{/}$ و τ : $\boxed{t^{/} \approx 5\tau}$

2 . إيجاد المعادلة التفاضلية بدلالة التوتر الكهربائي بين طرفي المكثفة $u_{AB} = u_{C(t)}$:

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_{AB} + u_{BD} = E$

أي : $u_{C(t)} + Ri = E \;/\; i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_{C(t)}}{dt}$

ومنه : $u_{C(t)} + RC\dfrac{du_{C(t)}}{dt} = E$

بالقسمة على RC :

$$\boxed{\frac{du_{C(t)}}{dt} + \frac{1}{RC}u_{C(t)} = \frac{E}{RC}}$$

ـ نبين أن المعادلة التفاضلية تقبل حلا لها من الشكل : $u_{C(t)} = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

نعوض في المعادلة : $\dfrac{du_{C(t)}}{dt} + \dfrac{1}{RC}u_{C(t)} - \dfrac{E}{RC} = 0$

حيث : $\dfrac{du_{C(t)}}{dt} = \dfrac{E}{\tau}e^{-t/\tau}$

أي :

$$\frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{1}{RC}\left[E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] - \frac{E}{RC} = \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{E}{RC} - \frac{E}{RC}e^{-t/\tau} - \frac{E}{RC}$$

$$= \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{E}{\tau} - \frac{E}{\tau}e^{-t/\tau} - \frac{E}{\tau}$$

$$= 0$$

ومنه المعادلة التفاضلية تقبل كحل لها : $u_{C(t)} = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

3. إيجاد الطاقة الكهربائية المخزنة E_C في المكثفة في اللحظات $t_0 = 0$ ، $t_1 = \tau$ ، $t_2 = 5\tau$:

ـ الطاقة الكهربائية المخزنة E_C في المكثفة في اللحظة $t_0 = 0$:

لدينا : $E_C = \dfrac{1}{2}u_{C(0)}^2 C \;/\; u_{C(0)} = E\left(1 - e^{0}\right) = 0$

ومنه : $\boxed{E_{C(t_0)} = 0j}$

ـ الطاقة الكهربائية المخزنة E_C في المكثفة في اللحظة $t_1 = \tau$:

لدينا : $u_{C(\tau)} = E(1-e^{-1}) \approx 0{,}63E \approx 9{,}32V$ / $E_C = \frac{1}{2}u^2_{C(t_1)}C$

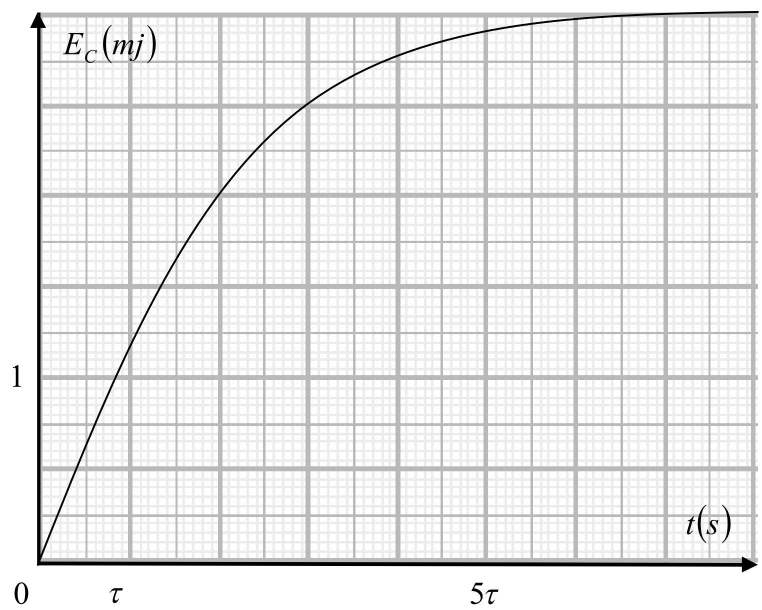
ومنه : $\boxed{E_{C(t_1)} \approx 1{,}22mj}$, $E_C = \frac{1}{2}(9{,}32)^2 \times 28\times10^{-6}$

ـ الطاقة الكهربائية المخزنة E_C في المكثفة في اللحظة $t_2 = 5\tau$:

لدينا : $u_{C(5\tau)} = E(1-e^{-5}) \approx 0{,}99E \approx 14{,}65V$ / $E_C = \frac{1}{2}u^2_{C(t_2)}C$

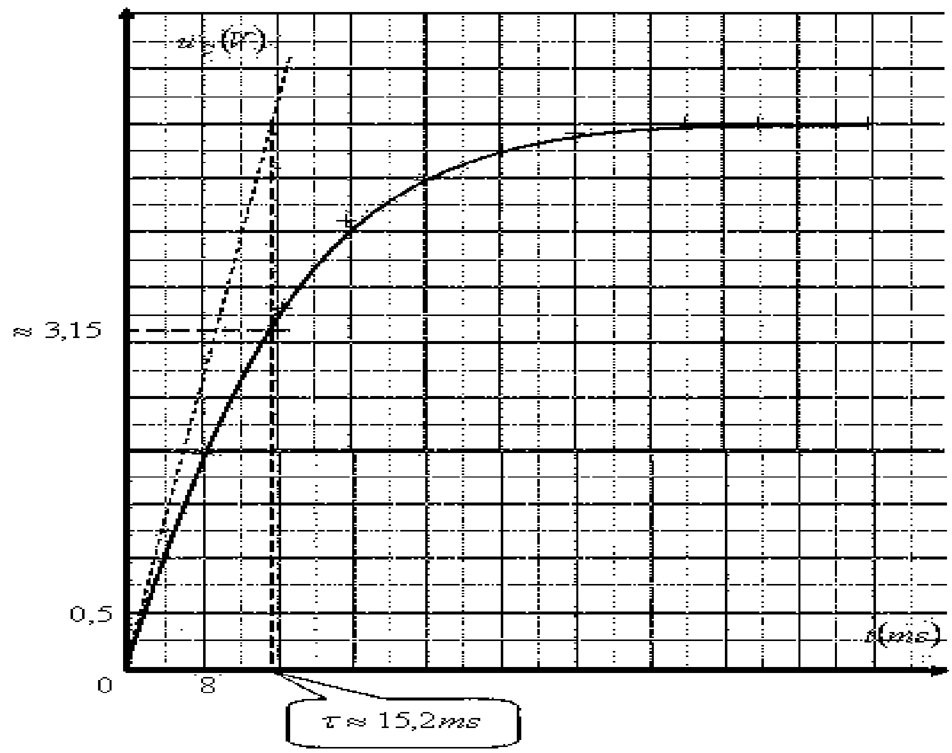
ومنه : $\boxed{E_{C(t_2)} \approx 3mj}$, $E_{C(t_2)} = \frac{1}{2}(14{,}65)^2 \times 28\times10^{-6}$

4. رسم كيفي لشكل المنحنى $E_C = f(t)$:



حل التمرين 11

1. أ/ ارسم البيان $u_C = f(t)$:



ب/ ـ تعيين قيمة ثابت الزمن τ لثنائي القطب RC :

لدينا من البيان : $u(\tau) = 5 \times 0,63 = 3,15V$

ومنه : $\boxed{\tau \approx 15,2ms}$

أو : طريقة المماس (الموضحة بالرسم على البيان).

ـ استنتاج قيمة السعة C للمكثفة :

لدينا : $\tau = RC$

$C = \frac{\tau}{R} = \frac{15,2 \times 10^{-3}}{120}$,

ومنه : $\boxed{C \approx 1,3 \times 10^{-4} F}$

2. كيف تتغير قيمة ثابت الزمن τ في الحالتين ؟

الحالة (أ) : من أجل مكثفة سعتها $C^{/}$ ($C^{/} \rangle C$ و $R = 120\Omega$)

بما أن R لم تتغير فنكتب :

$C = \frac{\tau}{R}$......(1)

$C^{/} = \frac{\tau^{/}}{R}$.......(2)

بقسمة (2) على (1) نجد : $\frac{C^{/}}{C} = \frac{\tau^{/}}{\tau}$

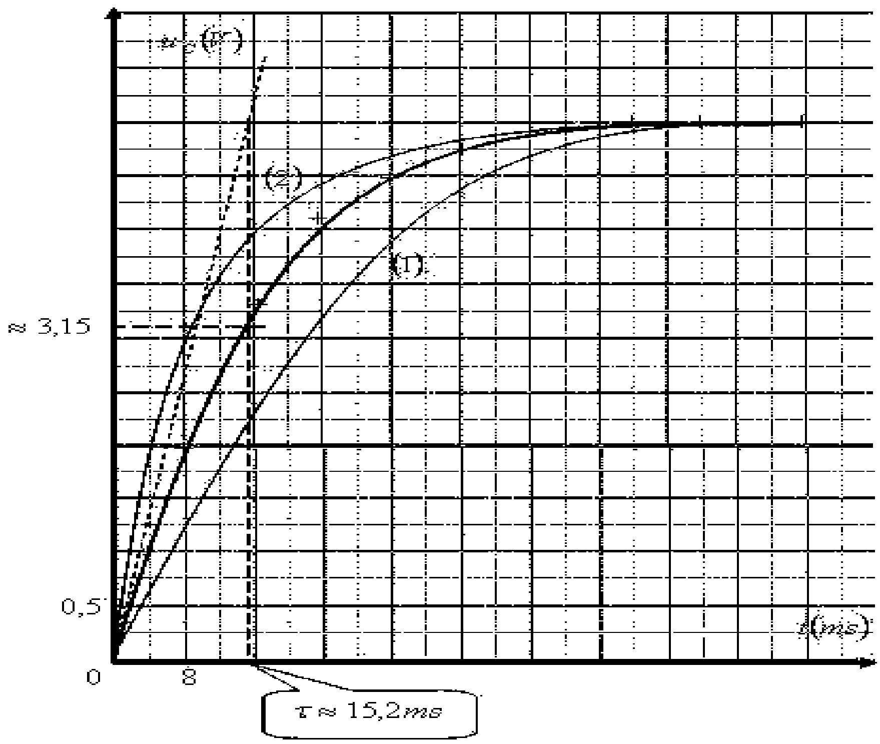
ومنه : $\boxed{C^{/} \rangle C \Rightarrow \tau^{/} \succ \tau}$

الحالة (ب) : من أجل مكثفة سعتها $C^{//}$ ($C^{//} = C$ و $R^{/} \langle 120\Omega$)

نتبع نفس الطريقة فنجد :

$\boxed{R^{/} \prec R \Rightarrow \tau^{//} \prec \tau}$

- رسم المنحنيين (1) و (2) المعبرين عن $u_C(t)$ في الحالتين (أ) و (ب) :



حيث : المنحنى (1) يمثل الحالة (أ) ($\tau' \succ \tau$).

و : المنحنى (2) يمثل الحالة (ب) ($\tau'' \prec \tau$).

3. أ/ تبيان أن المعادلة التفاضلية المعبرة عن $q(t)$ تعطى بالعبارة : $\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{RC}q(t) = \frac{E}{R}$

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_C = E$

أي : $Ri + u_C = E \quad / \; i = \frac{dq_{(t)}}{dt} \quad , \quad u_C = \frac{q_{(t)}}{C}$

أي : $R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$

وبقسمة طرفي المعادلة على R نجد : $\boxed{\frac{dq_{(t)}}{dt} + \frac{1}{RC}q_{(t)} = \frac{E}{R}}$ ....(1)

ب/ تعيين الثوابت : A و α و β :

لدينا : $q(t) = Ae^{\alpha t} + \beta$

أي : $\frac{dq_{(t)}}{dt} = A\alpha.e^{\alpha.t}$

وبالتعويض في المعادلة (1)نجد : $A\alpha.e^{\alpha.t} + \frac{1}{RC}\left(Ae^{\alpha.t} + B\right) = \frac{E}{R}$

أي : $A\alpha.e^{\alpha.t} + \frac{A}{RC}e^{\alpha.t} + \frac{B}{RC} = \frac{E}{R}$

أي : $A\left(\alpha + \frac{1}{RC}\right)e^{\alpha.t} + \left(\frac{B}{RC} - \frac{E}{R}\right) = 0$

ومنه : $\alpha + \frac{1}{RC} = 0 \quad ,$ $\boxed{\alpha = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau}}$

و : $\boxed{B = CE}$ $\qquad \frac{B}{RC} - \frac{E}{R} = 0$,

ومن الشرط في اللحظة $t=0$ تكون $q(0)=0$ نجد : $q(0) = Ae^{\alpha \times 0} + B = 0$

أي : $A + B = 0$

$$\boxed{A = -B = -CE}$$

<u>ملاحظة:</u>

نعوض الثابتين A و β و α في عبارة الشحنة $q(t) = Ae^{\alpha t} + \beta$ فيكون لدينا :

$$q_{(t)} = CE\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad q_{(t)} = -CEe^{-t/\tau} + CE \;,$$

وكذلك : $u_{C(t)} = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad u_{C(t)} = \frac{q_{(t)}}{C}$,

4. أ/ حساب الطاقة الكهربائية المخزنة E_0 في المكثفة :

لدينا : الطاقة الكهربائية المخزنة في المكثفة في كل لحظة t هي : $E_C = \frac{1}{2}Cu_{C(t)}^2$

حيث $u_{C(t)} = Ee^{-t/\tau}$ عبارة التوتر بين طرفي المكثفة خلال التفريغ

أي : $E_C = \frac{1}{2}C\left(Ee^{-t/\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}CE^2e^{-2t/\tau}$

ومنه في اللحظة $t=0$ تكون الطاقة المخزنة في المكثفة هي : $E_0 = \frac{1}{2}CE^2$

ت،ع : $\boxed{E_0 = 1{,}63 \times 10^{-4}\, j}$ $\qquad E_0 = \frac{1}{2} \times 1{,}3 \times 10^{-4} \times (5)^2$,

ب/ حساب الزمن الذي من أجله تصبح الطاقة المخزنة في المكثفة $E = \frac{E_0}{2}$:

لدينا : $E = \frac{1}{2}E_0$

أي : $\frac{1}{2}CE^2e^{-2t/\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}CE^2\right)$

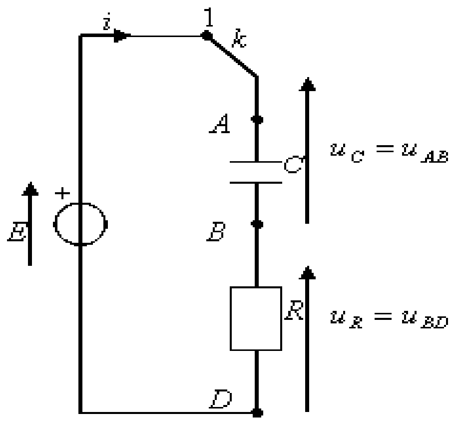
أي : $e^{-2t/\tau} = \frac{1}{2}$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نجد : $-2\frac{t}{\tau} = -\ln 2$

ومنه : $t = \frac{\tau}{2}\ln 2$

ت،ع : $\boxed{t = 5{,}3ms}$ $\qquad t = \frac{15{,}2 \times 10^{-3}}{2}\ln 2$,

حل التمرين 12



1. أ/ تمثيل بالأسهم وعلى الشكل : ـ جهة التيار الكهربائي المار في الدارة.

ـ التوترين u_C ، u_R.

ب/ ـ التعبير عن u_C و u_R بدلالة شحنة المكثفة $q = q_A$:

لدينا : $\boxed{u_C = \frac{q_{(t)}}{C}}$

و : $\boxed{u_R = Ri = R\frac{dq_{(t)}}{dt}}$

- إيجاد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q :

بتطبيق قانون جمع التوترات :
$$u_R + u_C = E$$

حيث :
$$u_R = R\frac{dq_{(t)}}{dt} \quad , \quad u_C = \frac{q_{(t)}}{C}$$

أي :
$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

وبقسمة طرفي المعادلة على R نحصل على المطلوب :

$$\boxed{\frac{dq_{(t)}}{dt} + \frac{1}{RC}q_{(t)} = \frac{E}{R} \ldots\ldots\ldots(1)}$$

ج/ التعبير عن A و α بدلالة C ، R ، E :

لدينا :
$$q(t) = A\left(1 - e^{-\alpha.t}\right)$$

أي :
$$\frac{dq_{(t)}}{dt} = A\alpha.e^{-\alpha.t}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد :
$$A\alpha.e^{-\alpha.t} + \frac{A}{RC}\left(1 - e^{-\alpha.t}\right) = \frac{E}{R}$$

أي :
$$A\alpha.e^{-\alpha.t} + \frac{A}{RC} - \frac{A}{RC}e^{-\alpha.t} = \frac{E}{R}$$

أي :
$$A\left(\alpha - \frac{1}{RC}\right)e^{-\alpha.t} + \left(\frac{A}{RC} - \frac{E}{R}\right) = 0$$

ومنه :
$$\alpha - \frac{1}{RC} = 0 \quad , \quad \boxed{\alpha = \frac{1}{RC}}$$

و:
$$\frac{A}{RC} - \frac{E}{R} = 0 \quad , \quad \boxed{A = CE}$$

و:
$$q_{(t)} = CE\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}.t}\right)$$

د/ استنتاج قيمة E :

لدينا :
$$u_R + u_C = E$$

حيث نهاية الشحن تعني الدخول في النظام الدائم، أي التيار الكهربائي لا يمر $(u_R = 0)$.

ومنه :
$$\boxed{u_C = E = 5V}$$

ه/ استنتاج سعة المكثفة (C) :
$$E_C = \frac{1}{2}CE^2$$
$$C = \frac{2E_C}{E^2} = \frac{2 \times 5 \times 10^{-3}}{(5)^2} \quad , \quad \boxed{C = 400\mu F}$$

2. البادلة في الوضع (2) (دارة التفريغ) :

أ/ يحدث تفريغ للمكثفة في الناقل الأومي.

ب/ مقارنة قيمتي ثابت الزمن الموافق للوضعين (1) ثم (2) للبادلة (k):

- الوضع (1):
$$\tau_1 = RC$$

- الوضع (2):
$$\tau_2 = \left(R + R'\right)C = 2RC \quad / \quad R' = R$$

ومنه :
$$\boxed{\tau_2 = 2\tau_1}$$

أي أن ثابت الزمن لدارة التفريغ ضعف ثابت الزمن لدارة الشحن. ($\tau_1 = 188ms$ و $\tau_2 = 376ms$)

حل التمرين 13

1. حساب E :

لدينا : بتطبيق قانون جمع التوترات

$u_{BA} = u_{BM} + u_{MA}$ / $u_{BA} = E$

أي :

$E = u_{BM} + u_{MA}$

و من البيانين (عند لحظة الوصول إلى النظام الدائم) يكون : $u_{BM} = 2V \quad , \quad u_{MA} = 7V$

ومنه : $E = 2 + 7 = 9V$

$$\boxed{E = 9V}$$

2. - حساب R :

لدينا : $u_{BM} = L\frac{di}{dt} + ri$

و: $u_{MA} = Ri$

في النظام الدائم يكون : $u_{BM} = ri = 2V ....(1)$ / $\frac{di}{dt} = 0$

و: $u_{MA} = Ri = 7V ....(2)$

بقسمة (2) على (1) نجد : $\frac{u_{MA}}{u_{BM}} = \frac{Ri}{ri} = \frac{7}{2}$

ومنه : $R = \frac{7}{2}r = \frac{7}{2} \times 10 \quad ,$ $\boxed{R = 35\Omega}$

- حساب L :

لدينا : $u_{MA} = Ri$

أي : $\frac{du_{MA}}{dt} = R\frac{di}{dt}$

حيث $\left(\frac{du_{MA}}{dt}\right)_{t=0}$ يمثل ميل مماس المنحنى (البيان الأول) عند اللحظة $t = 0$.

أي عند هذه اللحظة $t = 0$: $R\frac{di}{dt} = \frac{3,5 \times 2}{2 \times 10^{-3}} = 3,5 \times 10^{3}$

أي : $\frac{di}{dt} = \frac{3,5 \times 10^{3}}{R} = \frac{3,5 \times 10^{3}}{35} = 100$

من جهة أخرى (البيان الثاني) وعند نفس اللحظة $t = 0$: $u_{MA} = L\frac{di}{dt} = 9V$

ومنه : $L = \frac{9}{\left(\frac{di}{dt}\right)} = \frac{9}{100} \quad ,$ $\boxed{L = 0,09H}$

3. - التعبير عن i بدلالة R, L, E, r :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_{BM} + u_{MA} = u_{BA}$

أي : $L\frac{di}{dt} + ri + Ri = E$

أي : $\frac{di}{dt} + \left(\frac{R + r}{L}\right)i = \frac{E}{L}$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى بالنسبة لـ i حلها من الشكل :

$$\boxed{i_{(t)} = \frac{E}{R + r}\left(1 - e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)}$$

- حساب قيمة i عند اللحظة $t = 3ms$:

$$i = \left(\frac{9}{35+10}\right)\left(1 - e^{-\frac{(35+10)}{0,09}\times 0,003}\right)$$

أي :

$$i = 0,2\left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) \quad , \quad \boxed{i \approx 0,155A}$$

4. حساب الطاقة المخزنة في الوشيعة عند نفس اللحظة السابقة $t = 3ms$:

لدينا :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2$$

ت،ع :

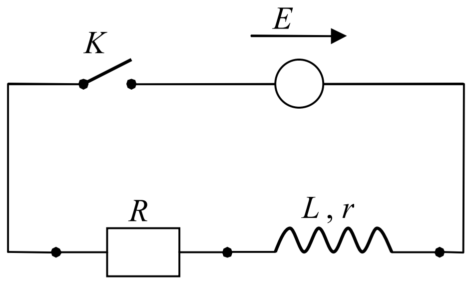
$$E_L = \frac{1}{2}\times 0,09\times(0,155)^2 \quad , \quad \boxed{E_L \approx 1,1\times10^{-3}\,j}$$

5. تعيين قيمة ثابت الزمن للدارة :

$$\tau = \frac{L}{R+r} = \frac{0,09}{35+10} \quad , \quad \boxed{\tau = 0,002s = 2ms}$$

حل التمرين 14

1. تمثيل مخطط الدارة :



2. - كتابة العبارة الحرفية لشدة التيار المار بالدارة في النظام الدائم :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_L = E$

أي : $Ri + L\frac{di}{dt} + ri = E$

في النظام الدائم : $RI + rI = E \quad \Big/ \quad \frac{di}{dt} = 0$

ومنه : $\boxed{I = \frac{E}{R+r}}$

- حساب قيمته العددية :

من البيان (شكل -1) نجد :

$$I = 4\times 0,06 \quad , \quad \boxed{I = 0,24A}$$

- حساب r :

من العلاقة :

$$I = \frac{E}{R+r}$$

نجد :

$$r = \frac{E}{I} - R = \frac{12}{0,24} - 35 \quad , \quad \boxed{r = 15\Omega}$$

3. إيجاد من البيان قيمة ثابت الزمن τ و حساب L:

لدينا من البيان : $\boxed{\tau = 20ms}$

- حساب L:

لدينا :

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

ومنه :

$$L = (R+r).\tau = (35+15)\times 20\times10^{-3} \quad , \quad \boxed{L = 1H}$$

4. أ/ كتابة العبارة البيانية :

البيان (شكل -2) عبارة عن خط مستقيم مار بالمبدأ، معادلته من الشكل : $L = a.\tau$

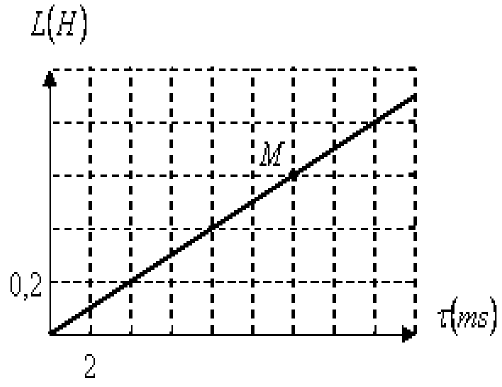
حيث a يمثل معامل توجيه البيان :

$$a = \frac{4\times 0,2}{8\times 2\times 10^{-3}} = 50$$

ومنه العبارة البيانية : $\boxed{L = 50\tau}$

ب/ التعبير عن τ بدلالة R ، r ، L :

ـ ثابت الزمن من الدراسة النظرية هو : $\boxed{\tau = \frac{L}{R+r}}$



ج/ هل نتائج هذه الظاهرة تتفق مع المعطيات ؟

من العلاقة النظرية لدينا : $R+r = \frac{L}{\tau}$

ومن البيان نأخذ نقطة كيفية، ولتكن M حيث :

$M\left(\tau = 12\,ms\,,\, L = 0,6\,H\right)$

فنستنتج أن : $R+r = \frac{3\times 0,2}{6\times 2\times 10^{-3}} = 50\Omega$

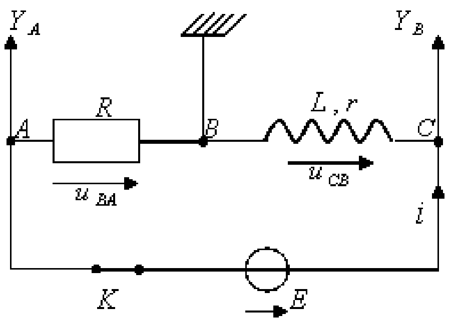
وهي نتيجة تتفق مع المعطيات التي سمحت بإيجاد قيمة المقدار $R+r$.

حل التمرين 15

1. كيفية ربط الدارة الكهربائية بمدخلي جهاز راسم الاهتزاز المهبطي :

ـ مبينة على مخطط الدارة الكهربائية.

ملاحظة: لقد تم الحصول على المنحنى u_{BA}، بالضغط على الزر **inv** عند المدخل Y_A.



الشكل(1)

2. الدارة في حالة النظام الدائم :

أ/ إيجاد قيمة التوتر الكهربائي (u_{BA}) :

من البيان : $\boxed{u_{BA} = 10V}$

ب/ إيجاد قيمة التوتر الكهربائي (u_{CB}):

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_{CB} + u_{BA} = E$

أي : $u_{CB} = E - u_{BA}$

ومنه : $u_{CB} = 12 - 10 = 2V$

$\boxed{u_{CB} = 2V}$

ج/ إيجاد قيمة الشدة العظمى للتيار المار في الدارة :

لدينا : $u_{BA} = RI_0$

ومنه : $I_0 = \frac{u_{BA}}{R} = \frac{10}{10} = 1A$, $\boxed{I_0 = 1A}$

3. أ/ استنتاج قيمة (τ) ثابت الزمن المميز للدارة :

بالاعتماد على البيان (شكل -2) نجد : $\boxed{\tau \approx 2ms}$

ب/ إيجاد قيمة مقاومة و ذاتية الوشيعة :

لدينا : $u_{CB} = rI_0$ / $u_{CB} = 2V$

ومنه : $r = \frac{u_{CB}}{I_0} = \frac{2}{1} = 2\Omega$, $\boxed{r = 2\Omega}$

- حساب L :

لدينا : $\tau = \dfrac{L}{R+r}$

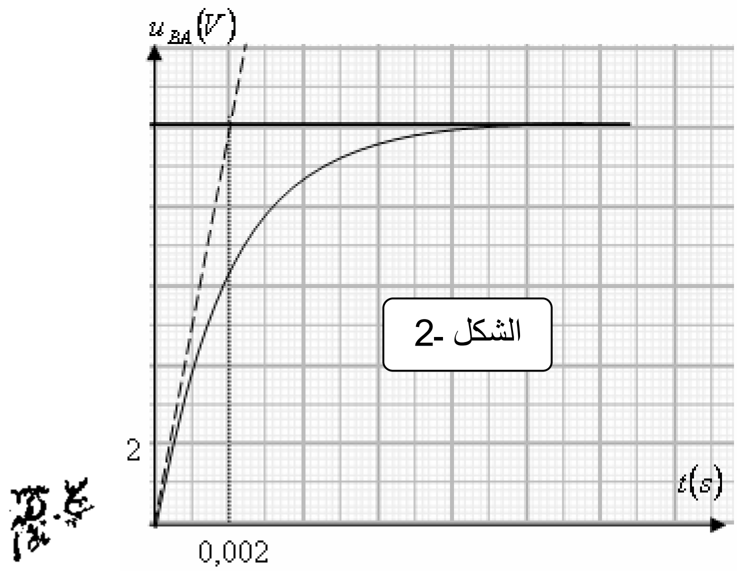
ومنه : $L = \tau(R+r)$

ت،ع : $L = 2\times10^{-3}\times(10+2)$, $\boxed{L = 24mH}$

4. حساب الطاقة الأعظمية المخزنة في الوشيعة :

لدينا : $E_L = \dfrac{1}{2}LI_0^2$

ت،ع : $E_L = \dfrac{1}{2}\times24\times10^{-3}\times(1)^2$, $\boxed{E_L = 12mj}$



حل التمرين 16

1. كتابة عبارة التوتر الكهربائي الذي يظهر في المدخل Y_B بدلالة شدة التيار :

بتطبيق قانون أوم : $\boxed{u_R = Ri}$

2. إيجاد القيمة العددية لشدة التيار المار بالدارة عند النظام الدائم (I_0) :

عند النظام الدائم : $u_R = RI_0$ / $u_R = 3V$ (من البيان)

ومنه : $I_0 = \dfrac{u_R}{R} = \dfrac{3}{50}$, $\boxed{I_0 = 0,06A}$

3. التعبير عن E بدلالة $\dfrac{di}{dt}$, i , R , r , L :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_R + u_L = E$

أي : $Ri + L\dfrac{di}{dt} + ri = E$

ومنه : $\boxed{E = (R+r)i + L\dfrac{di}{dt}}\ldots\ldots(1)$

4. حساب المقاومة الداخلية للوشيعة و ذاتيتها :

- حساب المقاومة الداخلية r للوشيعة :

لدينا من العلاقة (1)، وفي النظام الدائم : $E = (R+r)I_0$ / $\dfrac{di}{dt} = 0$

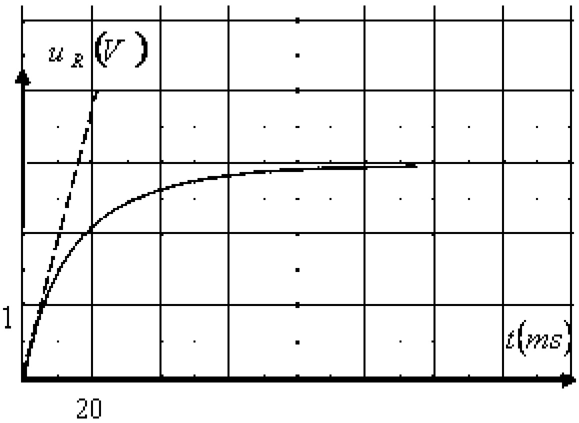
ومنه : $r = \frac{E}{I_0} - R$

ت،ع : $r = \frac{3,8}{0,06} - 50$, $\boxed{r \approx 13,3\Omega}$

ـ حساب ذاتية الوشيعة :

لدينا : $L = (R+r).\tau$

حيث قيمة τ من البيان هي تقريبا : $\tau \approx 17ms$



ومنه : $L = (50 + 13,3) \times 17 \times 10^{-3}$

$$\boxed{L \approx 1H}$$

حل التمرين 17

1. كتابة المعادلة التفاضلية للدارة بدلالة $i(t)$:

بتطبيق قانون أوم و قانون جمع التوترات :

$$u_1 + u_2 = E$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + ri = E$$

أي : $L\frac{di}{dt} + (R+r)i = E$

ومنه : $\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L}}$ ....(1)

2. أ/ تبيان أن : $L = 0,5H$

لدينا من العلاقة (1) : $\frac{di}{dt} = -\frac{(R+r)}{L}i + \frac{E}{L}$.....(2)

أي عند $i = 0$: $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$

ومن المنحنى،عند $i = 0$، لدينا : $\frac{di}{dt} = 12$

أي أن : $\frac{E}{L} = 12$

ومنه : $L = \frac{E}{12} = \frac{6}{12}$, $\boxed{L = 0,5H}$

ب/ إيجاد قيمة المقاومة r للوشيعة :

إن المقدار $a = -\frac{(R+r)}{L}$ في العلاقة (2) يمثل ميل المنحنى $\frac{di}{dt} = f(t)$، ومنه :

$$-\left(\frac{R+r}{L}\right)=a \qquad a=-\frac{12-3}{(4{,}5-0)\times 10^{-2}}=-200$$

أي : $r=-aL-R=-(-200)\times 0{,}5-90$, $\boxed{r=10\Omega}$

3. التعبير بدلالة E ، R و r عن الشدة I_p للتيار عندما يصل النظام الدائم :

لدينا $$\frac{di}{dt}+\frac{(R+r)}{L}i=\frac{E}{L}$$

عند النظام الدائم : $$\frac{(R+r)}{L}I_p=\frac{E}{L}$$

ومنه : $$\boxed{I_p=\frac{E}{R+r}}$$

4. ـ استنتاج عبارة τ بدلالة L ، R ، r :

لدينا : $$i(t)=I_P\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

أي : $$\frac{di}{dt}=\frac{I_p}{\tau}e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في المعادلة (1) : $$\frac{I_p}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{(R+r)}{L}.I_p\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{E}{L}$$

بقسمة طرفي المعادلة على $(R+r)$: $$\frac{I_p}{\tau(R+r)}e^{-t/\tau}+\frac{I_p}{L}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{E}{L(R+r)}$$

أي : $$\frac{I_p}{\tau(R+r)}e^{-t/\tau}+\frac{I_p}{L}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{I_p}{L}$$

بقسمة طرفي المعادلة على I_P : $$\frac{1}{\tau(R+r)}e^{-t/\tau}+\frac{1}{L}\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{1}{L}$$

بضرب طرفي المعادلة في L : $$\frac{L}{\tau(R+r)}e^{-t/\tau}+\left(1-e^{-t/\tau}\right)=1$$

ومنه : $\frac{L}{\tau(R+r)}=1$, $\boxed{\tau=\frac{L}{R+r}}$

ـ حساب قيمته : $\tau=\frac{0{,}5}{90+10}$, $\boxed{\tau=5ms}$

حل التمرين 18

1. إيجاد المعادلة التفاضلية التي تعطي شدة التيار الكهربائي في الدارة :

بتطبيق قانون أوم و قانون جمع التوترات :

$$u_R+u_L=E$$

$$Ri+L\frac{di}{dt}+ri=E$$

أي : $$L\frac{di}{dt}+(R+r).i=E$$

ومنه : $$\boxed{\frac{di}{dt}+\frac{(R+r)}{L}i=\frac{E}{L}}\ldots\ldots(1)$$

2. ـ سلوك الوشيعة في النظام الدائم : سلوك ناقل أومي

ـ عبارة شدة التيار الكهربائي I_0 الذي يجتاز الدارة : $\boxed{I_0=\frac{E}{R+r}}$

3. أ/ إيجاد العبارة الحرفية لكل من A و τ :

باعتبار العلاقة $i = A\left(1-e^{-t/\tau}\right)$ حلا للمعادلة التفاضلية (1) فإن :

$$\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{(R+r)}{L}.A\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{E}{L}$$

أي :

$$\frac{A}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{A(R+r)}{L}-\frac{A(R+r)}{L}e^{-t/\tau}=\frac{E}{L}$$

أي :

$$\left(\frac{A}{\tau}-\frac{A(R+r)}{L}\right)e^{-t/\tau}+\left(\frac{A(R+r)}{L}-\frac{E}{L}\right)=0$$

ومنه : إما

$$\left(\frac{A}{\tau}-\frac{A(R+r)}{L}\right)=0 \quad , \qquad \boxed{\tau=\frac{L}{R+r}}$$

أو

$$\left(\frac{A(R+r)}{L}-\frac{E}{L}\right)=0 \quad , \qquad \boxed{A=\frac{E}{R+r}}$$

ب/ استنتاج عبارة التوتر الكهربائي u_{BC} بين طرفي الوشيعة :

لدينا :

$$i = A\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

أي :

$$i=\frac{E}{R+r}\left(1-e^{-\frac{R+r}{L}.t}\right)$$

ومنه :

$$u_{BC}=L\frac{di}{dt}+ri=L\left(\frac{E}{L}e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)+\frac{rE}{R+r}\left(1-e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)$$

$$u_{BC}=Ee^{-\frac{R+r}{L}t}+\frac{rE}{R+r}-\frac{rE}{R+r}e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

$$\boxed{u_{BC}=Ee^{-\frac{R+r}{L}t}+\frac{r}{R+r}E\left(1-e^{-\frac{R+r}{L}t}\right)}$$

4. أ/ حساب قيمة التوتر الكهربائي u_{BC} في النظام الدائم :

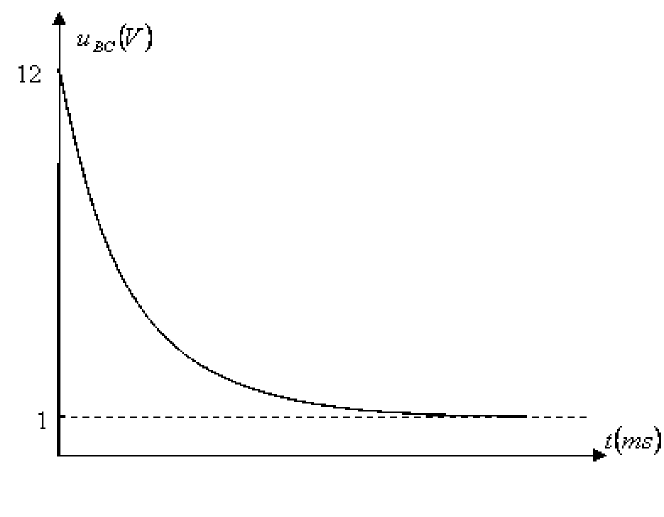
في النظام الدائم :

$$u_{BC}=ri \quad / \quad i=I_0=\frac{E}{R+r}$$

ومنه :

$$u_{BC}=\frac{rE}{R+r}=\frac{10\times 12}{110+10} \quad , \qquad \boxed{u_{BC}=1V}$$

ب/ رسم كيفي لشكل البيان $u_{BC}=f(t)$:



حل التمرين 19

1. كتابة عبارة كل من :

- التوتر الكهربائي بين طرفي الناقل الأومي R : $u_R = Ri$

- التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة : $u_b = L\dfrac{di}{dt} + ri$

2. إيجاد المعادلة التفاضلية للتيار الكهربائي $i(t)$ المار في الدارة :

بتطبيق قانون أوم و قانون جمع التوترات :

$$u_R + u_b = E$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + ri = E$$

أي :

$$L\frac{di}{dt} + (R+r).i = E$$

ومنه :

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{(R+r)}{L}i = \frac{E}{L}.......(1)}$$

3. تبيان أن المعادلة التفاضلية السابقة تقبل حلا من الشكل : $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$

لدينا :

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}e^{-\frac{R+r}{L}t}$$

بالتعويض في (1) نجد :

$$\frac{E}{L}e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{(R+r)}{L}.\frac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}.t}\right) = \frac{E}{L}e^{-\frac{R+r}{L}t} + \frac{E}{L} - \frac{E}{L}e^{-\frac{R+r}{L}.t} = \frac{E}{L}$$

ومنه المعادلة التفاضلية السابقة تقبل $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - e^{-\frac{(R+r)}{L}t}\right)$ حلا لها.

4. أ/ حساب المقاومة r للوشيعة :

في النظام الدائم : $I_0 = 0,5A$ (من البيان) / $I_0 = \dfrac{E}{R+r}$

ومنه : $r = \dfrac{E}{I_0} - R = \dfrac{6}{0,5} - 10$, $\boxed{r = 2\Omega}$

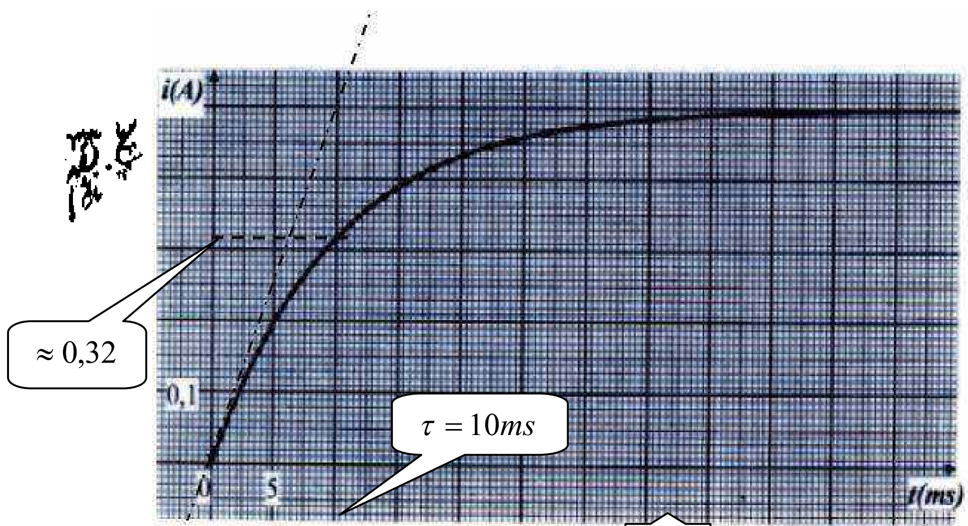
ب/ ـ حساب قيمة τ ثابت الزمن :

بالاعتماد على البيان (شكل -2) نحسب قيمة τ : ـ باستعمال ميل المماس في اللحظة $t = 0$.

أو ـ طريقة النسبة المئوية (63%) من I_0 ، أي : $0,63I_0$

$(\ 0,63I_0 = 0,63 \times 0,5 \approx 0,32 \ )$

فنجد : $\boxed{\tau = 10ms}$



- استنتاج قيمة L ذاتية الوشيعة :

$\tau = \dfrac{L}{R+r}$

ومنه : $L = (R+r).\tau = (10+2)\times 10\times 10^{-3}$ $\boxed{L = 0{,}12H}$

5. حساب قيمة الطاقة الكهربائية المخزنة في الوشيعة في حالة النظام الدائم :

في النظام الدائم : $E_b = \dfrac{1}{2}LI_0^2$ $I_0 = 0{,}5A$

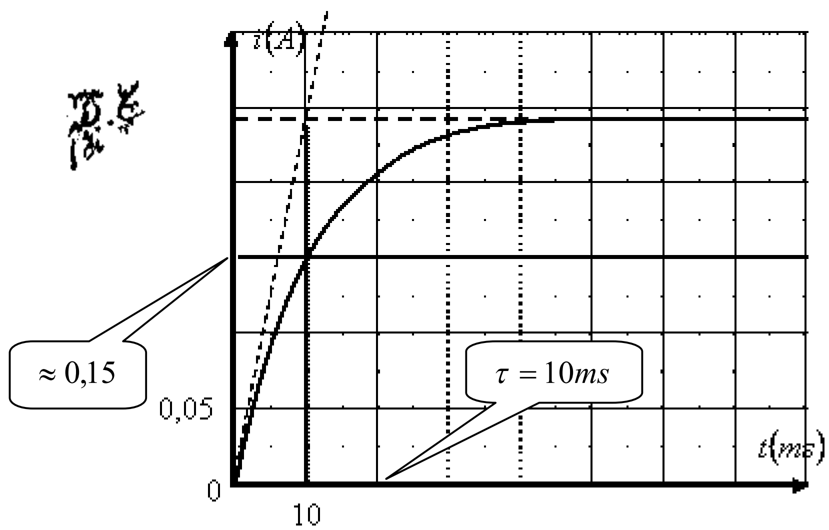
ومنه : $E_b = \dfrac{1}{2}\times 0{,}12\times(0{,}5)^2$, $\boxed{E_b = 1{,}5\times 10^{-2}\,j}$

حل التمرين 20

1. أ/ - استنتاج قيمة شدة التيار الكهربائي في النظام الدائم : $I_0 = 4{,}8\times 0{,}05 = 24A$

- استنتاج قيمة ثابت الزمن τ للدارة :
بالاعتماد على البيان (شكل -2) نحسب قيمة τ :
- باستعمال ميل المماس في اللحظة $t=0$.
أو- طريقة النسبة المئوية (63%) من I_0، أي : $0{,}63I_0$ ($0{,}63I_0 = 0{,}63\times 0{,}24 \approx 0{,}15$).

من البيان نجد : $\boxed{\tau = 10ms}$



ب/ حساب كل من المقاومة r و الذاتية L للوشيعة :
- حساب r :

لدينا في النظام الدائم : $I_0 = \dfrac{E}{R+r}$ / $I_0 = 0{,}24A$

ومنه : $r = \dfrac{E}{I_0} - R = \dfrac{6}{0{,}24} - 17{,}5$, $\boxed{r = 7{,}5\Omega}$

- حساب L: $L = (R+r).\tau = (17{,}5+7{,}5)\times 10\times 10^{-3}$, $\boxed{L = 0{,}25H}$

2. أ/ إثبات أن : $\frac{di}{dt}+\frac{i}{\tau}=\frac{I_0}{\tau}$

بتطبيق قانون جمع التوترات :

$$u_R+u_b=E$$

$$Ri+L\frac{di}{dt}+ri=E$$

أي :

$$L\frac{di}{dt}+(R+r).i=E$$

نقسم طرفي المعادلة على L نجد :

$$\frac{di}{dt}+\frac{(R+r)}{L}i=\frac{E}{L}$$

نجعلها بالشكل :

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{\left(\frac{L}{R+r}\right)}i=\frac{E}{(R+r)}.\frac{(R+r)}{L}$$

ومنه :

$$\frac{di}{dt}+\frac{1}{\tau}i=I_0.\frac{1}{\tau}......(1)$$

حيث : $I_0=\frac{E}{R+r}$ و $\tau=\frac{L}{R+r}$ في النظام الدائم

ب/ تبيان أن حل المعادلة هو من الشكل : $i=I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

لدينا :

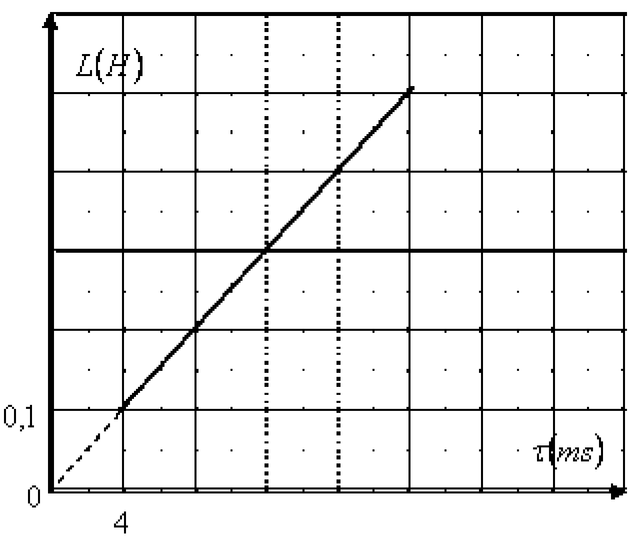
$$\frac{di}{dt}=\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (1) نجد :

$$\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{1}{\tau}I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)=\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}+\frac{I_0}{\tau}-\frac{I_0}{\tau}e^{-t/\tau}=\frac{I_0}{\tau}$$

ومنه المعادلة التفاضلية تقبل كحل لها : $i=I_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)$

3. أ/ رسم البيان $L=h(\tau)$:



ب/ كتابة معادلة البيان :

معادلة البيان هي من الشكل :

$$L=a.\tau \quad / \quad a=\frac{(5-1)\times 0{,}1}{(5-1)\times 4\times 10^{-3}}=25$$

ومنه :

$$\boxed{L=25\tau}$$

ج/ استنتاج قيمة مقاومة الوشيعة r :

لدينا : ـ من العلاقة النظرية $L=(R+r)\tau$

و ـ من معادلة البيان $L=25\tau$

نستنتج : $R+r=25$, $\boxed{r=7{,}5\Omega}$

وهي توافق القيمة المحسوبة في (1 ـ ب).

حل التمرين 21

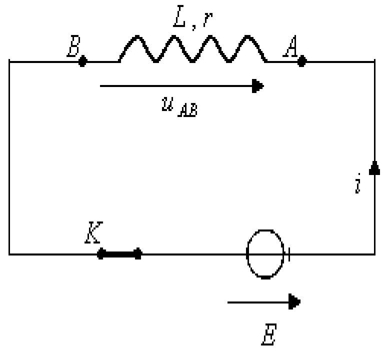
1. تبيان :

ـ جهة مرور التيار الكهربائي.

ـ جهة السهم الذي يمثل التوتر الكهربائي بين طرفي الوشيعة.

ـ جهة السهم الذي يمثل التوتر الكهربائي بين طرفي المولد.

على مخطط الدارة.



2. أ/ إيجاد المعادلة التفاضلية التي تعطي الشدة اللحظية $i(t)$ للتيار الكهربائي المار في الدارة :

بتطبيق قانون جمع التوترات : $u_{AB}=E$

أي : $L\dfrac{di}{dt}+ri=E$

ومنه : $\boxed{\dfrac{di}{dt}+\dfrac{r}{L}i=\dfrac{E}{L}}\ldots\ldots(1)$

ب/ تبيان أن المعادلة التفاضلية (1) تقبل حلا من الشكل : $i(t)=I_0\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)$

لدينا : $\dfrac{di}{dt}=I_0\dfrac{r}{L}e^{-\frac{r}{L}t}$

بالتعويض في (1) نجد :

$$I_0\frac{r}{L}e^{-\frac{r}{L}}+\frac{r}{L}I_0\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)=I_0\frac{r}{L}e^{-\frac{r}{L}t}+I_0\frac{r}{L}-I_0\frac{r}{L}e^{-\frac{r}{L}t}=I_0\frac{r}{L}=\frac{E}{L}$$

حيث : $I_0=\dfrac{E}{r}$ (الشدة العظمى للتيار الكهربائي المار في الدارة)

ومنه المعادلة التفاضلية (1) تقبل حلا من الشكل : $i(t)=I_0\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)$

3. حساب قيم المقادير الكهربائية التالية :

أ/ الشدة العظمى (I_0) للتيار الكهربائي المار في الدارة :

بمطابقة المعادلتين (2) و (3) :

$i(t)=I_0\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)\ldots\ldots(2)$

$i(t)=0{,}45\left(1-e^{-10t}\right)\ldots\ldots(3)$

نجد : $\boxed{I_0=0{,}45A}$

ب/ المقاومة (r) للوشيعة :

لدينا : $I_0 = \frac{E}{r}$

ومنه : $r = \frac{E}{I_0} = \frac{4,5}{0,45}$, $\boxed{r = 10\Omega}$

ج/ الذاتية (L) للوشيعة :

بمطابقة (2) مع (3) نجد : $\frac{r}{L} = 10$

ومنه : $L = \frac{r}{10} = \frac{10}{10}$, $\boxed{L = 1H}$

د/ ثابت الزمن (τ) المميز للدارة :

لدينا : $\tau = \frac{L}{r}$

ومنه : $\tau = \frac{1}{10}$, $\boxed{\tau = 0,1s}$

4. إيجاد قيمة الطاقة المخزنة في الوشيعة في حالة النظام الدائم :

لدينا : $E = \frac{1}{2} L I_0^2$ / $I_0 = 0,45A$ (النظام الدائم)

ومنه : $E = \frac{1}{2} \times 1 \times (0,45)^2$, $\boxed{E \approx 0,1j}$