الطرح الجيد مرآة الفكر النيّر

"إلى جمهور طلبتنا الأوفياء مصدر تعلمنا المستمر"

ملخص في رحـــــاب

الـــدوال العدديـــــة

(بأسلوب مبسط)

BAC 2018

" ما يجب الاحتفاظ به وعدم نسيانه حتى تتمكن من حل التمارين بكل سهولة "

إعداد الأستاذ : محمد حاقة

06-66-94-85-70

1) تذكير: (حلول معادلة من الدرجة الثانية والتحليل إلى جداء عاملين)

$ax^2+bx+c=0$ حيث $a\neq 0$

إذا كان	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta>0$
حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ في $\mathbb{R}$	لا تقبل حل	حل مضاعف $x_0=-\dfrac{b}{2a}$	حلين هما: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
يتم تحليل $ax^2+bx+c=0$ على الشكل	لا تقبل تحليل	$a(x-x_0)^2$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

الإشارة:

إذا كان	فان الإشارة كما يلي
$\Delta<0$	x: $-\infty$ … $+\infty$ الإشارة: حسب إشارة a
$\Delta=0$	x: $-\infty$ … x_0 … $+\infty$ الإشارة: حسب إشارة a | حسب إشارة a
$\Delta>0$	$x_1<x_2$ x: $-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$ الإشارة: حسب إشارة a | عكس إشارة a | حسب إشارة a

إشـــارة العبارة $ax+b$ حيث $a\neq 0$

x	$-\infty$	$x_0=-b/a$	$+\infty$
الإشارة	عكس إشارة a	0	حسب إشارة a

2) تذكير ببعض المتطابقات الشهيرة

$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$; $\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$; $\boxed{a^2-b^2=(a-b)(a+b)}$

$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$; $\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$; $\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

3) المستقيـمات المقــاربـــة

النهاية	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=a$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$	المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=b$ بجوار ∞
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$	المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞

ملحوظة: إذا كانت الدالة f من الشكل: $f(x)=ax+b+g(x)$ وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$ فالمستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞

4) دراسة وضعية المنحنى والمستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(ax+b)$ ونميز

إشارة الفرق	الوضعية النسبية
$f(x)-(ax+b)>0$	(C_f) فـــوق (Δ)
$f(x)-(ax+b)<0$	(C_f) تحـــت (Δ)
$f(x)-(ax+b)=0$	(C_f) يقطـــع (Δ)في النقطة $A(x_0;f(x_0))$

5) أما هذه الحالة خاصة بشعبتي تقني رياضي والرياضيات

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ تفسر هندسيا بين ثلاث احتمالات نحسب أولا $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$، إذا كانت

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ تفسر هندسيا: المنحنى (C_f) يقبل فرع لانهائي باتجاه محور الفواصل (xx')

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ تفسر هندسيا: المنحنى (C_f) يقبل فرع لانهائي باتجاه محور التراتيب (yy')

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a\in\mathbb{R}^*$ نواصل حساب الفرق، $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ تفسر هندسيا: المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار ∞

6) تقاطع (C_f) مع محور الفواصل

$(C_f)\cap(xx')$ يعني: حل المعادلة $f(x)=0$

(إذا كانت المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حل معناه (C_f) لا يقطع محور الفواصل)

7) تقاطع (C_f) مع محور التراتيب

$(C_f)\cap(yy')$ يعني: حساب $f(0)$

8) الدالة الزوجية والدالة الفردية

أ/ f دالة زوجية يكافئ: $f(-x)=f(x)$ ب/ f دالة فردية يكافئ: $f(-x)=-f(x)$

ملحوظة (1): يكون المنحنى الممثل للدالة الزوجية متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب

ملحوظة (2): يكون المنحنى الممثل للدالة الفردية متناظر بالنسبة إلى المبدأ : " O "

9) مركز التناظر

$\omega(\alpha,\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) يعني : $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ أو $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$

⬅ المسألة العكسية

نأخذ مثال: يطلب منا إثبات أن $f(-2-x) + f(x) = 4$ ثم ضر النتيجة هندسيا

لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة التالية: $\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ 2\beta = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases}$ ونقول أن النقطة $A(-1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f)

10) محور التناظر

المستقيم (D) : $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) يعني: $f(2\alpha - x) = f(x)$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$

⬅ المسألة العكسية

نأخذ مثال: يطلب منا إثبات أن $f(3-x) = f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا لتفسيرها هندسيا نقوم بالمطابقة

التالية: $2\alpha = 3$ ومنه $\alpha = \dfrac{3}{2}$ ونقول أن المستقيم ذا المعادلة $x = \dfrac{3}{2}$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

11) نقطــة الانعـطاف

نقول أن (C_f) يقبل النقطة $A(x_0; f(x_0))$ كنقطة انعطاف اذا تحقق أحد الشروط التالية

أ/ المشتق الثاني $f''(x)$ ينعدم عند x_0 ، ويغير اشارته عندها

ب/ المشتق الأول $f'(x)$ ينعدم عند x_0 ، ولا يغير إشارته عندها

ج/ المماس عند النقطة $A(x_0; f(x_0))$ يخترق المماس (C_f)

12) الاستمرارية

f مستمرة عند a يكافئ: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

⬅ في بعض التمارين ندرس الاستمرارية من اليمين ومن اليسار أي

f مستمرة عند a من اليمين (بقيم كبرى) يكافئ: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

f مستمرة عند a من اليسار (بقيم صغرى) يكافئ: $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = f(a)$

الخلاصة: نقول أن f مستمرة عند a إذا تحقق $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = f(a)$

⬅ نظرية القيم المتوسطة (الحالة الخاصة) : إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على $[a;b]$

وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α يحقق $f(\alpha) = 0$ حيث $\alpha \in]a;b[$

⬅ نظرية القيم المتوسطة (الحالة العامة) : إذا كانت f دالة مستمرة ورتيبة تماما على $[a;b]$ وكان k محصور بين

$f(a)$ و $f(b)$ فان المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد α يحقق $f(\alpha) = k$ حيث $\alpha \in]a;b[$

13) الاشتقاق والتفسير الهندسي

	النهاية	قابلية الاشتقاق	التفسير الهندسي
1	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \neq 0$	f ق إ عند x_0	(C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ معامل توجيهه (الميل) l
2	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$	f ق إ عند x_0	(C_f) يقبل مماسا عند النقط $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور الفواصل (أفقي) معادلته: $y=f(x_0)$
3	$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$	f غير ق إ عند x_0	(C_f) يقبل مماسا عند النقط $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته: $x=x_0$
4	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_1 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l_2 \in \mathbb{R}$ و $l_1 \neq l_2$	f ق إ على يمين وعلى يسار x_0 لكن غير ق إ عند x_0	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين وتسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة زاوية للمنحنى (C_f)
5	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \in \mathbb{R}$ أو العكس	f ق إ على يمين x_0 وغير ق إ على يسار x_0 وغير ق إ عند x_0	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين وتسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة زاوية للمنحنى (C_f)
6	$\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ بحيث النهايتين معا $-\infty$ أو $+\infty$	f غير ق إ على يمين وعلى يسار x_0 و غير ق إ عند x_0	(C_f) يقبل مماسا عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ موازيا لحامل محور التراتيب (عمودي) معادلته: $x=x_0$ وتسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)
7	$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ بحيث احدى النهايتين $-\infty$ والأخرى $+\infty$	f غير ق إ على يمين وعلى يسار x_0 و غير ق إ عند x_0	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين موازيين لحامل محور التراتيب (عموديان) معادلتيهما: $x=x_0$ وتسمى النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نقطة رجوع للمنحنى (C_f)

ملحوظة(1):: صيغة أخرى لقانون قابلية الاشتقاق: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ملحوظة(2):: معادلتا **نصفي المماسين** التي ذكرناها في الحالة (4) عند النقطة الزاوية هما:

$$\begin{cases} y=f_g'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \\ f_g'(x_0)=l_1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} y=f_d'(x_0).(x-x_0)+f(x_0) \\ f_d'(x_0)=l_2 \end{cases}$$

14) المماس : السؤال وطريقة الإجابة عليه

	السؤال	كيفية البحث عن الفاصلة x_0 لكتابة معادلة المماس
1	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب القانون: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ نعوض x_0 بقيمتها المعطاة
2	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	نحل المعادلة $f(x_0)=y_0$ ، وعند تعيين x_0 نطبق القانون كما في (1)
3	بين أنه يوجد مماس ، للمنحنى (C_f) ميله (أو معامل توجيهه) يساوي a	نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ ، وعند إيجاد قيمة x_0 نطبق القانون كما في (1)
4	بين انه يوجد مماس، للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$	نحل المعادلة $f'(x_0)=a$ مثل الحالة (3)
5	بين انه يوجد مماس، للمنحنى (C_f) يعامد المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$	نحل المعادلة: $a.f'(x_0)=-1$ وعند إيجاد قيمة x_0 نطبق القانون كما في (1)
6	بين انه يوجد مماس، للمنحنى (C_f) يشمل النقطة $M(\alpha,\beta)$	نحل المعادلة: $\beta=f'(x_0).(\alpha-x_0)+f(x_0)$ عند إيجاد قيمة x_0 نطبق القانون كما في (1)

ملحوظة : في الحالات (3) (4) (5) (6) عدد الحلول يدل على عدد المماسات وإذا لم تقبل المعادلة حل يعني لا يوجد مماس

15) استنتاج تمثيل بياني من أخر

يطلب منا في بعض المسائل استنتاج تمثيل بياني بالاستعانة بتمثيل بياني أخر إما قمنا برسمه أو منحنى دالة مرجعية

السؤال	استنتاج (C_h) من (C_f)
$h(x)=\|f(x)\|$	لما يكون (C_f) فوق محور الفواصل فان $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) منطبق على (C_f) ، ولما يكون (C_f) تحت محور الفواصل فان $h(x)=-f(x)$ ومنه (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لـ (xx')
$h(x)=f(\|x\|)$ " h دالة زوجية "	لما $x\geq 0$ فان $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) منطبق على (C_f) ونكمل رسم (C_h) بالتناظر بالنسبة (yy') لان h زوجية
$h(x)=f(-\|x\|)$ " h دالة زوجية "	لما $x\leq 0$ فان $h(x)=f(x)$ ومنه (C_h) منطبق على (C_f) ونكمل رسم (C_h) بالتناظر بالنسبة (yy') لان h زوجية
$h(x)=-f(x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى (xx')
$h(x)=f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى (yy')
$h(x)=-f(-x)$	(C_h) نظير (C_f) بالنسبة إلى مبدأ المعلم" O "
$h(x)=f(x+a)+b$	(C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$

إنما الأعمالُ العظيمة هي أعمالٌ صغيرة كُتب لهَــا الإستمرار