الطرح الجيد مرآة الفكر النيّر

"إلى جمهور طلبتنا الأوفياء مصدر تعلمنا المستمر"

درس + تطبيقات في رحاب

النهـــــايات

(بأسلوب مبسط)

" ازرع جميـلا ولو فــي غيـر موضعـه
فلا يضيــع جميــلا أينمـــا زرع "

إعداد الأستاذ : محمــد حاقـــة
ثانوية عبد العزيز الشريف ـ الوادي

06-66-94-85-70

BAC 2018

1) **حالات عدم التعيين:** وهي الحالات التي لا يمكن فيها حساب النهاية مباشرة بل نلجأ لرفعها (إزالتها) وهي أربعة حالات؛ $\infty-\infty+$; $0\times\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

2) **ملحوظة:**

حالات يتوهم أنها حالات عدم تعيين وهي ليست كذلك؛ $(+\infty)\times(-\infty)=-\infty$; $\frac{\infty}{0}=\infty$; $\frac{0}{\infty}=0$

3) **طرق رفع حالة عدم التعيين**

أ/ **التحليل ثم الاختزال:** نستخدم لرفع حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ للكسور الناطقة عندما x يؤول إلى عدد

تطبيق: أحسب $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-9}$

ملحوظة: حذاري تكتفي بالتعويض في أكبر درجة في البسط على أكبر درجة في المقام لأن هذه القاعدة تستخدم لما x يؤول إلى ∞ فقط

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-9}=\frac{27-18-12+3}{9-9}=\frac{0}{0}$$ **وهي حالة عدم تعيين**

إزالتها: نحلل البسط والمقام (ركز جيدا)

لدينا: $x^3-2x^2-4x+3=(x-3).(\underbrace{ax^2+bx+c}_{q(x)})$ لإيجاد كثير الحدود $q(x)$ هناك عدة طرق منها

❖ **القسمة الإقليدية**

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-4x+3 & x-3 \\ \hline -(x^3-3x^2) & x^2+x-1 \\ x^2-4x+3 & \\ -(x^2-3x) & \\ -x+3 & \\ -(-x+3) & \\ 0 & \end{array}$$

$x^3-2x^2-4x+3=(x-3).(x^2+x-1)$

وأيضا: $x^2-9=x^2-3^2=(x-3)(x+3)$

ومنه: $$\lim_{x\to3}\frac{x^3-2x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{\cancel{(x-3)}.(x^2+x-1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-1}{x+3}=\frac{11}{6}$$

❖ **خوارزمية هونر:**

	1	-2	-4	3
3		3	3	-3
×	1	1	-1	0
	a	b	c	

جمع

للتحقق

$x^3-2x^2-4x+3=(x-3).(x^2+x-1)$

❖ **النشر والمطابقة:**

$$x^3-2x^2-4x+3=(x-3).(ax^2+bx+c)$$
$$=ax^3+bx^2+cx-3ax^2-3bx-3c$$
$$=ax^3+(b-3a)x^2+(c-3b)x-3c$$

بالمطابقة نجد $\boxed{a=1}$ و $-3c=3$ ومنه $c=\frac{3}{-3}$ أي $\boxed{c=-1}$ و $b-3a=-2$ ومنه $b-3=-2$ أي $\boxed{b=1}$

وعليه؛ $x^3-2x^2-4x+3=(x-3).(x^2+x-1)$

ب/ طريقة المرافق: تستخدم لرفع حالات عدم التعيين للعبارات الصماء (الجذور)

تطبيق: أحسب: $\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}$

$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}=-\infty+\infty$ **وهي حالة عدم تعيين**

إزالتها: مرافق العبارة $x+\sqrt{x^2+3}$ هو $x-\sqrt{x^2+3}$ لكن حذاري القيام بعملية الضرب فقط لان الدالة تتغير إذا ضربنا نقسم كما يلي (**ركز جيدا**)

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[x+\sqrt{x^2+3}\right]\left[x-\sqrt{x^2+3}\right]}{x-\sqrt{x^2+3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+3)}{x-\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-3}{x-\sqrt{x^2+3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{\underbrace{x}_{-\infty}-\underbrace{\sqrt{x^2+3}}_{+\infty}}=\frac{-3}{-\infty}=0$$

ج/ طريقة العامل المشترك

تطبيق: أحسب $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}+x$

$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-2x=+\infty-\infty$ **وهي حالة عدم تعيين، إزالتها ... (ركز جيدا)**

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-2x=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2x$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{=0}}-2\right)=+\infty\times(1-2)=+\infty\times(-1)=-\infty$$

ملاحظة 1 : حاول فيها بطريقة المرافق... ماذا وجدت؟

ملاحظة 2 : $\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & ;x\geq 0\\ -x & ;x\leq 0\end{cases}$ ولا تظن أنه دوما إخراج x^2 من الجذر التربيعي يساوي x

د/ طريقة العدد المشتق: تستخدم لرفع (إزالة) حالات عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ **للعبارات التي تكتب كما يلي:** $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **وتكون النتيجة** $f'(x_0)$

تطبيق: أحسب $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

$\frac{0}{0} = \frac{\sqrt{4}-2}{1-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ **وهي حالة عدم تعيين، إزالتها ... (ركز جيدا)**

نضع: $f(x) = \sqrt{x+3}$ إذن $f(1) = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$ ومنه تصبح النهاية المعطاة على الشكل

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

نحسب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على المجال $]-3;+\infty[$ ولدينا: $f'(x) = \left(\sqrt{x+3}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ومنه $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ أي أن: $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{1}{4}$

ملاحظة مهمة بخصوص هذه الطريقة

1) لاحظ جيدا النهاية السابقة تجد أنه يمكن إزالة (ح ع ت) بطريقة المرافق وهي أيضا صحيحة، لكن استعملت طريقة العدد المشتق لتوضيحها ولا تظن دوما أنه يمكن الإجابة بالطريقتين هناك نهايات يتم حلها إلا بطريقة العدد المشتق مثلا

أحسب: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

بما أن $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ فإن $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0}$ **وهي حالة عدم تعيين، إزالتها ...(ركز جيدا)**

نضع : $f(x) = \cos x$ إذن $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$ ومنه تصبح النهاية المعطاة على الشكل

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

نحسب $f'(x)$: f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x) = \left(\cos x\right)' = -\sin x$

ومنه $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$ أي أن: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$

وفي الأخير أقول(من باب الفكاهة فقط) جملة تكررت أثناء الشرح (**ركز جيدا**) هي لك عزيزي الطالب حذاري تعتبرها ضمن منهجية الحل وتقول للمصحح ركز جيدا

انتظرونـــا مــع الدرس القـــادم في رحـــاب النهايـــات بالمقارنـــة

إنما الأعمالَ العظيمة هي أعمالٌ صغيرة كُتب لهَـــا الإستمرار

الطرح الجيد مرآة الفكر النيّر

"إلى جمهور طلبتنا الأوفياء مصدر تعلمنا المستمر"

درس + تطبيقات في رحاب

النهايات بالمقارنة ونهاية مركب دالتين

(بأسلوب مبسط)

" ازرع جميلا ولو في غير موضعه

فلا يضيع جميلا أينما زرع "

إعداد الأستاذ : محمد حاقة

ثانوية عبد العزيز الشريف ـ الوادي

06-66-94-85-70

BAC 2018

1)النهايات بالمقارنة

نقصد فيما يلي بـــ:($x \to \square$) أن النظرية صحيحة في الحالات الثلاث: عدد ، $-\infty$ ، $+\infty$ وهو ليس رمز رياضي لتبسيط فقط

أ/ نظرية الحد من الأسفل: إذا كانت $\boxed{g(x) \le f(x)}$ وكان $\boxed{\lim_{x \to \square} g(x) = +\infty}$ فان $\boxed{\lim_{x \to \square} f(x) = +\infty}$

تطبيق1 : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 - 3\sin x$

❖ بيِّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان: $x^2 - 3 \le f(x)$ ، ثم استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الإجابة: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\sin x \le 1$ ومنه:

$$\sin x \le 1 \Rightarrow -3\sin x \ge -3 \Rightarrow \overbrace{x^2 - 3\sin x}^{f(x)} \ge x^2 - 3$$

$$\Rightarrow f(x) \ge x^2 - 3 \Rightarrow x^2 - 3 \le f(x)$$ و هـ م

استنتاج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$: بما أن $x^2 - 3 \le f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 3 = +\infty$

فانه حسب نظرية الحد من الأعلى: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و هـ م

تطبيق2 : نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بيِّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$ فان: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

2) استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الإجابة:

$$x \in]1;+\infty[\Rightarrow x > 1 \Rightarrow x + x > x + 1 \Rightarrow 2x > x + 1$$

1)
$$\Rightarrow \sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

2)استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$: لدينا $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} > \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$ ومنه $\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} > \dfrac{2x}{\sqrt{2x}}$ إذن : $f(x) > \sqrt{2x}$

وبما أن: $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty$ فانه حسب نظريه الحد من الأعلى: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و هـ م

ملحوظة: إذا كانت $\boxed{\lim_{x \to \square} g(x) \ne +\infty}$ لا يمكن تطبيق النظرية

مثلا: f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x < 0$: $f(x) \ge -2x^3$.هل يمكن استنتاج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الإجابة: لا يمكن لأن $\lim_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$ لأنه تصبح أي نتيجة تحقق ولا يمكن الجزم بمقدار النهاية

ب/ نظرية الحد من الأعلى: إذا كانت $\boxed{f(x) \le g(x)}$ وكان $\boxed{\lim_{x \to \square} g(x) = -\infty}$ فان $\boxed{\lim_{x \to \square} f(x) = -\infty}$

تطبيق1 : f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -5x + coc2x$

❖ بيِّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فان: $f(x) \le -5x + 1$ ، ثم استنتج $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

الإجابة: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\cos x \le 1$ إذن: $\cos 2x \le 1$ للتوضيح: $\cos(\square) \le 1$

ومنه $$\cos 2x \le 1 \Rightarrow \overbrace{-5x + \cos x}^{f(x)} \le -5x + 1 \Rightarrow f(x) \le -5x + 1$$

استنتاج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$: بما أن $f(x) \le -5x+1$ و $\lim_{x\to+\infty} -5x+1 = -\infty$ و هـ م

حسب نظرية الحد من الأسفل فان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

تطبيق2: بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ ، $\sqrt{2x^2-1} < 2x$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1} - 3x$

الإجابة: نبين أن الفرق $\sqrt{2x^2-1} - 2x < 0$

لدينا: $$\sqrt{2x^2-1} - 2x = \frac{\left[\sqrt{2x^2-1} - 2x\right]\left[\sqrt{2x^2-1} + 2x\right]}{\sqrt{2x^2-1} + 2x} = -\frac{\overbrace{2x^2+1}^{>0}}{\underbrace{\sqrt{2x^2-1} + 2x}_{>0}} < 0$$

ومنه $\sqrt{2x^2-1} - 2x < 0 \Leftarrow \sqrt{2x^2-1} < 2x$

استنتاج $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2-1} - 3x$: مما سبق $\sqrt{2x^2-1} < 2x$ ومنه $\sqrt{2x^2-1} - 3x < \underbrace{2x - 3x}_{=-x}$

وبالتالي $\sqrt{2x^2-1} - 3x < -x$ وبما أن $\lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$ فانه حسب نظرية الحد من الأسفل $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ و هـ م

ملحوظة: إذا كانت $\boxed{\lim_{x\to\square} g(x) \ne -\infty}$ لا يمكن تطبيق النظرية

مثلا: f دالة بحيث من اجل كل عدد حقيقي $x < 0$: $f(x) \le x^2$. هل يمكن استنتاج $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

الإجابة: لا يمكن لأن $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ لأنه تصبح أي نتيجة تحقق ولا يمكن الجزم بمقدار النهاية

أ/ **نظرية الحصر**: إذا كانت $\boxed{h(x) \le f(x) \le g(x)}$ وكان $\boxed{\lim_{x\to\square} g(x) = \lim_{x\to\square} h(x) = l \in \mathbb{R}}$

فان $\boxed{\lim_{x\to\square} f(x) = l}$

مثال: f دالة معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$

لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $-1 \le \cos x \le 1$ ومنه $\dfrac{-1}{\sqrt{x}} \le \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

بما أن: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x}} = 0$ فان $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = 0$ وعليه $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ و هـ م

2) نهاية مركب دالتين

لحساب $\lim_{x\to\square} f\left[g(x)\right]$ نحسب أولا $\lim_{x\to\square} g(x)$ ونكمل الحساب بإدخال الدالة f

مثال1: لحساب نهاية التالية $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{6x-1}{2x+3}}$

نحسب أولا $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{6x-1}{2x+3} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{6\cancel{x}}{2\cancel{x}} = 3$ وبالتالي: $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{6x-1}{2x+3}} = \sqrt{3}$ و هـ م

مثال2: أحسب $\lim_{x\to-\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{x+1}\right)$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi x}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi \cancel{x}}{\cancel{x}}=\pi$ ومنه $\lim_{x\to-\infty}\cos\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)=\cos(\pi)=-1$ و هـ م

مثال3: أحسب $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$، لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=\cos(0)=1$ و هـ م

3) النهايات المثلثية الشهيرة:

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1} \qquad \boxed{\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1}$$

تطبيق: أحسب $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$، $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4x}$، $\lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}$، $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

حل:

$$*/\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}3\times\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{=1}=3$$

$$*/\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\times\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1}=\frac{1}{4}$$

$$*/\ \lim_{x\to0}\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{7}{7}\times\frac{\sin 7x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{7}{3}\times\underbrace{\frac{\sin 7x}{7x}}_{=1}=\frac{7}{3}$$

$$*/\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+cox)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+cox)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+cox)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{=1}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ومنه $\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$

فائدة (قواعد بسيطة لكن مهمة جدا) : الحالات التي نغير فيها اتجاه المتراجحة

- ✓ الضرب في مقدار سالب
- ✓ أخذ المقلوب
- ✓ التربيع إذا كانت المتراجحة سالبة
- ✓ القيمة المطلقة إذا كانت المتراجحة سالبة

إنما الأعمالُ العظيمة هي أعمالٌ صغيرة كُتب لهَـــا الإستمرار

أهدي هذا العمل إلى كل مجهول X هو حل لمعادلة النجاح في البكالوريا