الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2019

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و30 د

**على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:**

## الموضوع الأول

### التمرين الأول: (04 نقاط)

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0=13$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

**1)** أ) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n>1$ .

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية $(u_n)$ واستنتج أنها متقاربة.

**2)** $(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\ln(u_n-1)$ .

أثبت أن المتتالية $(v_n)$ حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

**3)** اكتب $v_n$ بدلالة $n$ ثم بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n=1+\frac{12}{5^n}$ واحسب عندئذ $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .

**4)** بيّن أنه: من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $(u_0-1)(u_1-1)\times\ldots\times(u_n-1)=\left(\frac{12}{5^{\frac{n}{2}}}\right)^{n+1}$ .

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها أربع كريات تحمل الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في آن واحد ونعتبر الحادثتين $A$ و $B$ حيث: $A$: " سحب كريتين من نفس اللون " ، $B$ : " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " .

**1)** بيّن أنّ احتمال الحادثة $A$ هو $P(A)=\frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة $B$ .

**2)** علما أنّ الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال أن تحملا نفس الرقم؟

**3)** ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

**I.** حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$ التالية: $(z-i)(z^2-4z+5)=0$ .

**III.** نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ ، النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها $i$ ، $2-i$ و $2+i$ على الترتيب.

1) اكتب العدد المركب $\frac{z_A-z_C}{z_C-z_B}$ على الشكل الأسي، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

2) من أجل كل عدد مركب $z$ يختلف عن $2+i$ نضع $f(z)=\frac{iz-1-2i}{2z-4-2i}$

أ) عين المجموعة $(E)$ للنقط $M$ من المستوي ذات اللاحقة $z$ التي تحقق: $|f(z)|=\frac{1}{2}$

ب) بيّن أن العدد $\left[f(i)\right]^{440}$ حقيقي موجب.

3) نعتبر الدوران $r$ الذي مركزه $C$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$ .

أ) عيّن لاحقة $D$ صورة $B$ بالدوران $r$ وبيّن أنّ النقط $D$ ، $A$ و $C$ في استقامية.

ب) استنتج أنّ $D$ هي صورة النقطة $A$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تحديد طبيعته وعناصره .

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

$f$ الدّالة العددية المعرفة على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln x$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ثم فسّر النتائج بيانيا.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ .

2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة $f$ على $]0;2[\cup]2;+\infty[$ وشكّل جدول تغيّراتها.

3) نسمي $(\Gamma)$ المنحنى البياني للدّالة اللوغاريتمية النيبيرية "ln" في المعلم السابق.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\ln x\right)$ ثم فسّر النّتيجة بيانيا.

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنّسبة إلى المنحنى $(\Gamma)$ .

4) ارسم بعناية المنحنى $(\Gamma)$ ثمّ المنحنى $(C_f)$ .

5) $H$ الدّالة المعرفة على المجال $[3;+\infty[$ بـ: $H(x)=\int_3^x \ln(t)dt$ حيث $t$ متغيّر حقيقي موجب تماما.

أ) باستعمال المكاملة بالتّجزئة، عيّن عبارة $H(x)$ بدلالة $x$ .

ب) احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(C_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x=3$ و $x=4$ .

6) $g$ الدّالة المعرّفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ بـ : $g(x)=f(-2x)$ .

دون حساب عبارة $g(x)$ حدّد اتجاه تغيّر الدالة $g$ على مجموعة تعريفها.

انتهى الموضوع الأول

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللّمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 والكريات الأخرى تحمل الرقم 2. نسحب عشوائياً وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق.

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الأرقام المسجّلة على الكريات المسحوبة.

1) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) بيّن أنّ احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقماً زوجياً هو $\frac{7}{24}$.

3) نسحب الآن من الصندوق كريتين على التوالي دون إرجاع.

ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علماً أن جداءهما زوجي؟

### التمرين الثاني: (04 نقاط)

$f$ الدالة المعرفة على المجال $]4;7[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$.

1) أ) بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]4;7[$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]4;7[$ فإنّ $f(x)\in]4;7[$.

2) برهن أنّه: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]4;7[$ فإنّ $f(x)-x=\frac{-x^2+9x-14}{x-4+\sqrt{x+2}}$.

ثم استنتج أنّه: من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]4;7[$ فإنّ $f(x)-x>0$

3) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0=4$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنّه: من أجل كل عدد طبيعي $n$ $4\le u_n<7$.

ب) استنتج اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$ ثم بيّن أنّها متقاربة.

4) أ) بيّن أنّه: من أجل كل عدد طبيعي $n$ $7-u_{n+1}<\frac{1}{4}(7-u_n)$.

ب) استنتج أنّه: من أجل كل عدد طبيعي $n$ $0<7-u_n<3\left(\frac{1}{4}\right)^n$، ثمّ احسب نهاية المتتالية $(u_n)$.

### التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقط $A$، $B$ و $C$ التي لاحقاتها $z_A$، $z_B$ و $z_C$ على الترتيب حيث:

$z_A=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=-2z_A$.

1) أ) اكتب العدد المركب $z_A$ على الشكل الأسي.

ب) احسب العدد $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{2019}$.

2) أ) $T$ الانسحاب الذي يحوّل $A$ إلى $C$، عيّن $z_D$ لاحقة النقطة $D$ صورة $B$ بالانسحاب $T$.

ب) استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$.

3) اكتب العدد المركب $z_C - z_A$ على الشكل الأسي.

4) جد قيم العدد الطبيعي $n$ التي يكون من أجلها العدد المركب $\left(\dfrac{-4\sqrt{2}}{z_C - z_A}\right)^n$ عددا حقيقيا.

5) لتكن $M$ نقطة كيفية من المستوي لاحقتها $z$ حيث $M$ تختلف عن $A$ وتختلف عن $C$.

عيّن $(E)$ مجموعة النقط $M$ التي من أجلها يكون $\dfrac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

**التمرين الرابع: (07 نقاط)**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. تُؤخذ وحدة الطول $2cm$

$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ التمثيلان البيانيان للدالتين $f$ و $g$ المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}ex^2 \quad \text{و} \quad g(x) = e^x - ex$$

1) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$.

ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم $x$ الحقيقية.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة $f$.

3) احسب كلاً من $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ؛ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$.

4) ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على $\mathbb{R}$.

5) ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في نفس المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (يُعطى $e^2 - 2e \approx 2$)

6) احسب بالسنتمتر المربع، مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.

7) $h$ الدالة المعرّفة على المجال $[-2\,;\,2]$ كما يلي: $h(x) = \frac{1}{2}ex^2 - e^{|x|}$ و ليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ $h$ دالة زوجية.

ب) من أجل $x \in [0\,;\,2]$ احسب $h(x) + f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم $(\Gamma)$ انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسمه.

**انتهى الموضوع الثاني**