بسم الله الرحمان الرحيم

كلمة الأستاذ

ضمن مسعى مساعدة الطلبة المقبلين على امتحان شهادة البكالوريا في التعامل مع مادة الرياضيات بالأسلوب الذي يمكنهم من فهمها والاجتهاد في تطبيقها أقدم إليهم العدد الرابع من" سلسلة سبل التالق في الرياضيات " في رحاب الهندسة الفضائية التحليلية التي تناولت فيها ملخص هذه الوحدة بأسلوب مشوق ومبسط ليسهل فهمه متبوع بمواضيع البكالوريا الجزائرية والأجنبية مرفقًا بعض منها بحلول نموذجية وارتأيت هذه المرة حل البكالوريات الجزائرية والأجنبية لما فيها من أفكار ولأن تمارين الهندسة في البكاوريا تقريبا نفس الأفكار تتكرر

ولأن هذا العمل إنجازا بشريا فانه لا يخلو من النقصان، وعليه فاني أرحب، بكل اهتمام، انتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء وتحسين المجلة وهم مشكورون مسبقا على ذلك .

وفي الأخير، أسأل الله أن ينفع بما كتبت، هو الموفق والهادي إلى سواء السبيل

مــــا أروع عقـلا يستهــدي ، يســأل ، يتأمــل ، يتفكـر

الأستاذ : محمد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة القبة القديمة - الجزائر

- ENS -

ثانوية عبد العزيز الشريف - الوادي -

فــيفري 2017

دليل الهندسة الفضائية التحليلية

في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

أولا " مفاهيم أولية "

نعتبر النقطتين : $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ والشعاعان : $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$

1) مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

2) الطول (المسافة) بين النقطتين A و B هو: $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

3) إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2},\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

4) الجداء السلمي لشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو : $\vec{u}\bullet\vec{v}=\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'$

5) تعامد الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يعني : $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\bullet\vec{v}=\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'=0$

6) توازي الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً(أي إثبات وجود عدد حقيقي t يحقق : $\vec{u}=t\,\vec{v}$)

<u>معناه</u> : يكفي أن نثبت أن التناسب التالي : $\left[\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{\gamma}{\gamma'}=t\in\mathbb{R}\right]$ محقق

7) جيب تمام ($\cos$) زاوية شعاعيّة : حيث : $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\times\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}$$

ثانيا " المستقيم في الفضاء"

1°) التمثيل الوسيطي لمستقيم (يشمل نقطة ويوازي شعاع)

المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A\left(x_A , y_A , z_A\right)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

لتكن: $M\left(x,y,z\right) \in (\Delta)$ يعني : $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{u}$ أي : $\overrightarrow{AM} = t\ \vec{u}$ (حيث : t من $\mathbb{R}$)

ومنه (Δ) له تمثيل وسيطي من الشكل : $(\Delta):\begin{cases} x = \alpha\, t + x_A \\ y = \beta\, t + y_A \\ z = \gamma\, t + z_A \end{cases} \quad \left(t \in \mathbb{R}\right)$ [$\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)]

2°) التمثيل الوسيطي لمستقيم (يشمل نقطتين)

المستقيم (AB) الذي يشمل النقطتين $A\left(x_A , y_A , z_A\right)$ و $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$

لتكن: $M(x,y,z) \in (AB)$ يعني : $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ أي : $\overrightarrow{AM} = t\ \overrightarrow{AB}$ (حيث : t من $\mathbb{R}$)

ومنه (AB) له تمثيل وسيطي من الشكل : $\begin{cases} x = \left(x_B - x_A\right)t + x_A \\ y = \left(y_B - y_A\right)t + y_A \\ z = \left(z_B - z_A\right)t + z_A \end{cases}$ [$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB)

[

3°) مستقيمات خاصة

- ❖ حامل محور الفواصل $\left(o;\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- ❖ حامل محور التراتيب $\left(o;\vec{j}\right)$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- ❖ حامل محور الرواقم $\left(o;\vec{k}\right)$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

4°) المسقط العمودي لنقطة على مستقيم

لتكن النقطة $H(x,y,z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

الذي تمثيله الوسيطي $\left(\Delta\right):\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \quad ;(t \in \mathbb{R}) \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases}$ ، لتعيين إحداثيات النقطة H

❖ نبحث عن قيمة الوسيط t وذلك عن طريق :

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \bullet \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha t + x_0 - x_A \\ \beta t + y_0 - y_A \\ \gamma t + z_0 - z_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

❖ نعوض عن t في إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) ، فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

5°) بعد نقطة عن مستقيم

لحساب بُعد نقطة A عن المستقيم (Δ)، نعيّن مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ويكون بُعد النقطة عن المستقيم (Δ) هو الطول AH أي :

$$d\left(A;\left(\Delta\right)\right) = AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(x_H - x_A\right)^2 + \left(y_H - y_A\right)^2 + \left(z_H - z_A\right)^2}$$

6°) تعامد مستقيمين في الفضاء

يتعامد مستقيمان في الفضاء اذا تعامد شعاعا توجيههما بمعنى:

- **إذا كان**: (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $\vec{u}_{(\Delta')}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

فلدينا: $(\Delta) \perp (\Delta') \Rightarrow \vec{U}_{(\Delta)} \bullet \vec{U}_{(\Delta')} = 0 \Rightarrow \alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma' = 0$

7°) الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\vec{u}_{(\Delta)}$ و $\vec{u}_{(\Delta')}$

❖ إذا كان $\vec{u}_{(\Delta)} \parallel \vec{u}_{(\Delta')}$ (مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيان

(متوازيا تماما أو منطبقان)

- **توضيح** : نعين نقطة A من المستقيم (Δ) (أو من (Δ'))

أ/ إذا كانت A تنتمي كذلك إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') **منطبقان**

ب/ إذا كانت A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') **متوازيا تماما (منفصلان)**

❖ إذا كان $\vec{u}_{(\Delta)} \nparallel \vec{u}_{(\Delta')}$ (غير مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيان

(متقاطعان في نقطة أو من مستويين مختلفين : " ليسا من نفس المستوي ")

ثالثا "المستوي في الفضاء"

1°) المعادلة الديكارتية لمستوٍ

كل مستوٍ في الفضاء له معادلة ديكارتية من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

حيث : a ، b و c لا تنعدم في آن واحد ، علماً أن : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هو الشعاع الناظمي له (عمودياً عليه)

2°) تعيين معادلة ديكارتية لمستوٍ معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط)

أ/ لإثبات أن النقط : A ، B و C تعرف (تُعين – تُشكل) مستوٍ:

- ❖ يعني النقط : A ، B و C ليست في إستقامية
- ❖ يعني الشعاعان: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً (غير متوازيين)

ب/ لإيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

❖ نبحث عن شعاعاً ناظمياً $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ له وذلك بحل الجملة التالية $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

ثم نطبق التعريف التحليلي للجداء السلمي فنجد عادة جملة ثلاث مجاهيل بمعادلتين فقط ممّا يجعلنا مثلا نثبت a ونبحث عن b و c بدلالة a فنجد الشعاع الناظمي العام $\vec{n}_a$ ونختار قيمة مبسطة لـ : a وعليه نجد الشعاع الناظمي الخاص $\vec{n}$

❖ بعد إيجاد a ، b و c أعداد معلومة يبقى d مجهول فعلينا أن نعوض إحداثيات احد النقط: A أو B أو C في المعادلة : $ax+by+cz+d=0$ فنجد قيمة d

- **تنبيه**: إذا أعطيت المعادلة الديكارتية للمستوي وطلب منا التأكد من أنها للمستوي (ABC) يكفي أن نبين :

أ/ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

ب/ إحداثيات كل من النقط الثلاث A ، B و C تحقق المعادلة : $ax+by+cz+d=0$

بمعنى : $\begin{cases}A\in(ABC)\\ B\in(ABC)\\ C\in(ABC)\end{cases}$

3°) مستويات خاصة:

- ❖ $x=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(o;\vec{j};\vec{k}\right)$
- ❖ $y=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(o;\vec{i};\vec{k}\right)$
- ❖ $z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

4°) بعد نقطة عن مستوٍ

بعد النقطة $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ عن المستوي : $(P): ax+by+cz+d=0$ تعطى بالقانون التالي:

$$d\left(A;(\mathrm{P})\right)=\frac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

5°) التمثيل الوسيطي لمستوٍ معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط):

لإيجاد التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) حيث: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

$M(x,y,z)\in(ABC)$ يعني : $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AB}+t'\overrightarrow{AC}$ (حيث : t و t' من $\mathbb{R}$)

يعني : $\begin{cases} x=\left(x_B-x_A\right)t+\left(x_C-x_A\right)t'+x_A \\ y=\left(y_B-y_A\right)t+\left(y_C-y_A\right)t'+y_A \\ z=\left(z_B-z_A\right)t+\left(z_C-z_A\right)t'+z_A \end{cases}$

6°) تعامد مستويين

يتعامد مستويان في الفضاء اذا تعامد شعاعهما الناظميّان:

إذا كان : $\begin{cases} (P_1): ax+by+cz+d=0 \\ (P_2): a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ فلدينا : $(P_1)\perp(P_2)$ يعني : $\vec{n}_{(P_1)}\perp\vec{n}_{(P_2)}$

أي : $\vec{n}_{(P_1)}.\vec{n}_{(P_2)}=a\times a'+b\times b'+c\times c'=0$

7°) المسقط العمودي لنقطة على مستوي

لتكن النقطة $H(x,y,z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ،لتعيين إحداثيات النقطة H :

أ/ نبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستوي في النقطة H

أي : " $\overrightarrow{AH}\parallel\vec{n}_{(P)}$ يعني $\overrightarrow{AH}=t.\,\vec{n}_{(P)}$ "

ب/ نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطي فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

8°) الوضعية النسبية لمستويين في الفضاء

نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي: $\begin{cases}(P_1): ax + by + cz + d = 0\\(P_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0\end{cases}$

❖ إذا كان : $\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}\right]$ فان : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان بالتطابق **(منطبقان)**

❖ إذا كان : $\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \neq \dfrac{d}{d'}\right]$ فان : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان تماماً **(منفصلان)**

❖ إذا كان **التناسب التالي** : $\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}\right]$ **غير محقق** فان : المستويين (P_1) و (P_2) غير متوازيان **(متقاطعان)**

- **ملحوظة**

▪ **المسألة** : للبحث عن المستقيم (Δ) ناتج تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) أي : $(P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$

نضع في الحالة العامة : $z = t$ ونبحث عن x و y بدلالة t فنجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

من الشكل : $(\Delta): \begin{cases}x = \alpha t + x_0\\y = \beta t + y_0 \quad ;(t \in \mathbb{R})\\z = t\end{cases}$

▪ **المسألة العكسية**: عندما يكون لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)، لكي نبين أن (Δ) هو مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ، يكفي أن نتحقق : $\begin{cases}(\Delta) \subset (P_1)\\(\Delta) \subset (P_2)\end{cases}$ بمعنى إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)تحقق معادلة كلاً من المستويين (P_1) و (P_2)

9°) كيفية تعيين تقاطع ثلاث مستويات

❖ **الحالة (1)** : اذا كان مستويان منهم متوازيان تماما فان تقاطع المستويات الثلاثة **خال**

بمعنى : $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{\varnothing\}$

❖ **الحالة (2)** : اذا كان مستويين منهم غير متوازيين **(متقاطعين)** نعين مستقيم تقاطعهما (Δ) فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن تقاطع مستقيم مع مستوي

بمعنى : مثلا $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (\Delta) \cap (P_3)$

10°) تعامد مستقيم ومستوي في الفضاء

يتعامد مستقيم ومستوي في الفضاء اذا **توازى** شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناظمي لهذا المستوي

بمعنى إذا كان : $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و $\vec{n}_{(P)}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

فان : $(\Delta)\perp(P)\Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)} \parallel \vec{n}_{(P)} \Rightarrow \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{b}{\beta}=\dfrac{c}{\gamma}$

11°) الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

- ❖ $(\Delta)\cap(P)=(\Delta)$ يعني : $(\Delta)\subset(P)$ " (Δ) مرسوم في هذا المستوي "
- ❖ $(\Delta)\cap(P)=\{\varnothing\}$ يعني (P) و (Δ) متوازيان تماماً **(منفصلان)**
- ❖ $(\Delta)\cap(P)=\{F\}$

لإيجاد إحداثيات F نقطة تقاطع (P) و (Δ)، نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطي فنجد إحداثيات F

رابعاً "سطح الكرة في الفضاء"

1°) معادلة سطح الكرة: معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز: $\omega(x_\omega,y_\omega,z_\omega)$ ونصف قطرها R تعطى بالقانون $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2$

2°) المسألة العكسية: لتكن (E) : مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

لمعرفة طبيعة مجموعة النقط (E) يمكن أن نستعمل إحدى الطريقتين الآتيتين :

❖ **الطريقة الأولى : (طريقة حساب العدد K)**، نحسب : $K=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

نميز ثلاث حالات

- **إذا كان** : $K<0$ **فان** : $(E)=\varnothing$
- **إذا كان** : $K=0$ **فان** : $(E)=\left\{\omega\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{b}{2},-\dfrac{c}{2}\right)\right\}$
- **إذا كان** : $K>0$ **فان**: (E) سطح كرة (S) **حيث** :

$$(E)=(S)=\left\{\ \omega(x_\omega,y_\omega,z_\omega)\ ;\ R=\sqrt{K}\ \right\}$$

❖ **الطريقة الثانية:** (**طريقة استعمال قاعدة إكمال التربيع**)

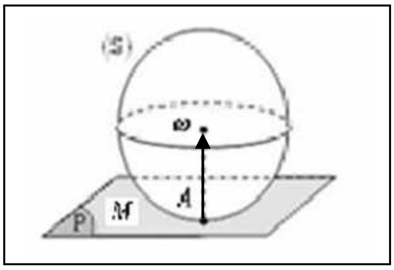
نستخدم فيهــا :

$$\begin{cases} x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ y^2+by=\left(y+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ z^2+cz=\left(z+\frac{c}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2 \end{cases}$$

▪ **نصيحة:** إذا اشتملت المعادلة المعطاة لمجموعة النقط(E) على وسيط يفضل استخدام طريقة حساب العدد K أمّا إذا لم تشتمل المعادلة على وسيط فنفضل استخدام طريقة قاعدة إكمال التربيع

3°) كيفية تعيين معادلة مستو يمس سطح كرة في نقطة معلومة

لإيجاد معادلة المستوي(P) الذي يمس سطح الكرة(S) في النقطة A نستعمل إحدى الطريقتين



❖ **الطريقة الأولى** : $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{\omega A}\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\omega A}=0$

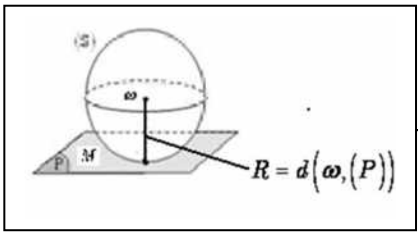
❖ **الطريقة الثانية** : نلاحظ ان $\overrightarrow{\omega A}$ شعاع ناظمي للمستوي (لأنه عمودي عليه)

ثم نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي ، فنجد الثابت d

4°) كيفية تعيين معادلة سطح كرة التي تمس مستوٍ معلوم

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega , y_\omega , z_\omega)$ معطى ، و (P) مستوٍ معادلته : $ax+by+cz+d=0$

- **طريقة ايجاد معادلة سطح الكرة** (S) :



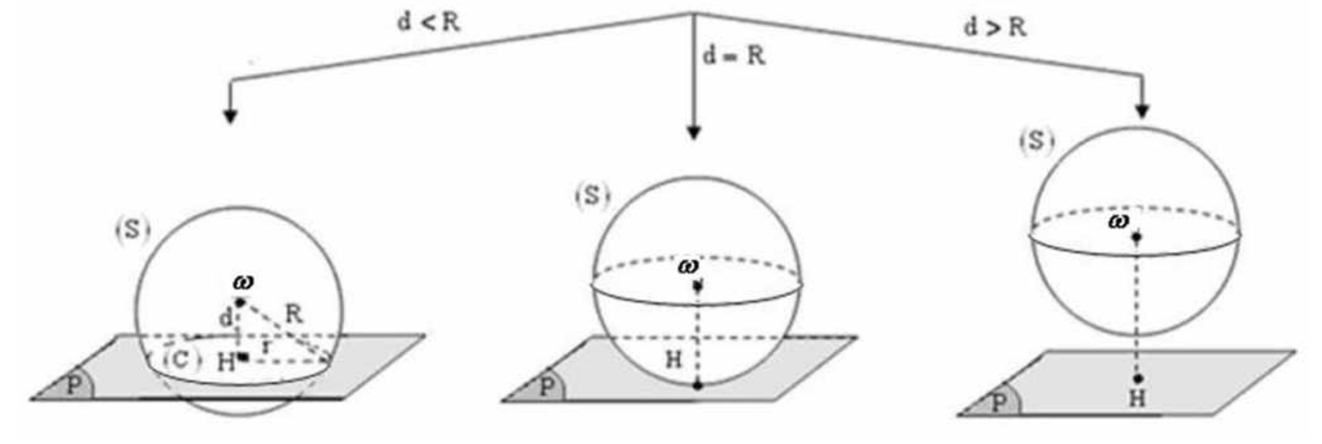
كما يلي

$$\begin{cases} (S):(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2=R^2 \\ R=d\left(\omega;(\mathrm{P})\right)=\dfrac{|ax_\omega+by_\omega+cz_\omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

5°) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستوٍ في الفضاء (مع ذكر العناصر المميزة)

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega , y_\omega , z_\omega)$ ، ونصف قطرها R ، و (P) مستوٍ معادلته :

$ax + by + cz + d = 0$ **نضع** : $d = d\left(\omega,(\text{P})\right)$ **فلدينا**:



اذا كان : $d\left(\omega,\left(P\right)\right) \prec R$ **فان** $\left(S\right)\cap\left(P\right) = C\left(H;r\right)$ **المستوي** $\left(P\right)$ **يقطع سطح الكرة** $\left(S\right)$ **وفق دائرة** $\left(C\right)$ **مركزها** H **ونصف قطرها** r، **حيث** H **المسقط العمودي للنقطة** ω **على المستوي** $\left(P\right)$ **و** $r = \sqrt{R^2 - d^2}$	**اذا كان :** $d\left(\omega,\left(P\right)\right) = R$ **فان :** $\left(S\right)\cap\left(P\right) = \left\{H\right\}$ **المستوي** $\left(P\right)$ **يمس سطح الكرة** $\left(S\right)$ **في النقطة** H ، **حيث** H **المسقط العمودي للنقطة** ω **على المستوي** $\left(P\right)$	**اذا كان :** $d\left(\omega,\left(P\right)\right) \succ R$ **فان :** $\left(S\right)\cap\left(P\right) = \varnothing$

6°) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستقيم في الفضاء

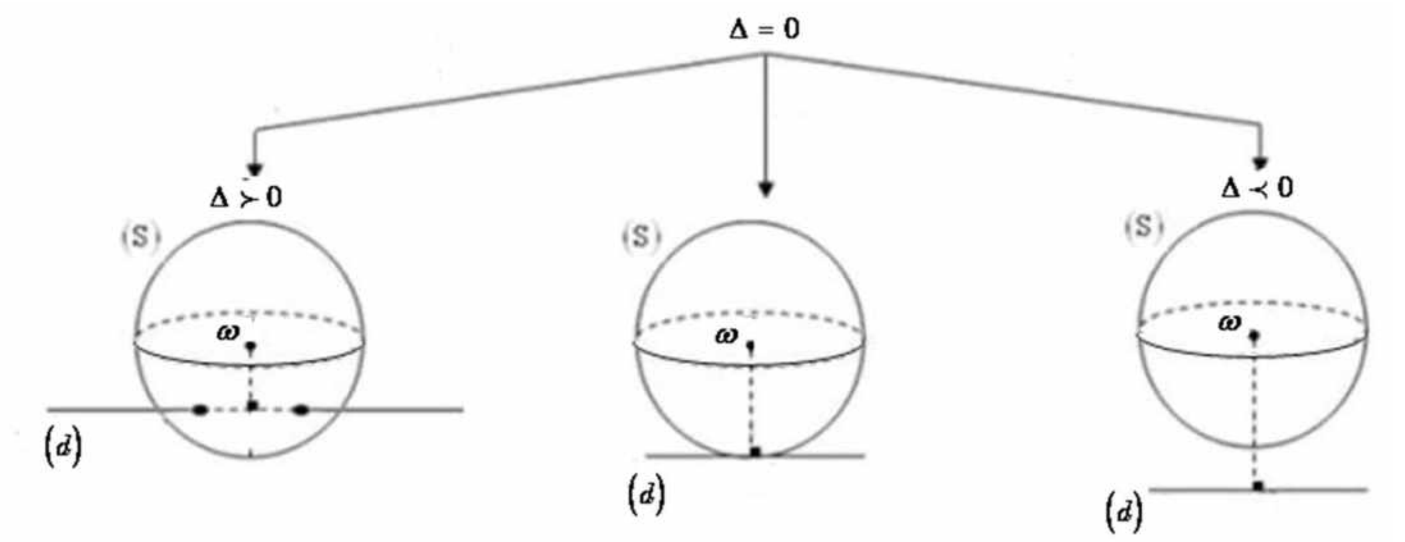
(S) سطح كرة مركزها معادلتها: $(x - x_\omega)^2 + (y - y_\omega)^2 + (z - z_\omega)^2 = R^2$

و (d) مستقيم الذي تمثيله الوسيطي

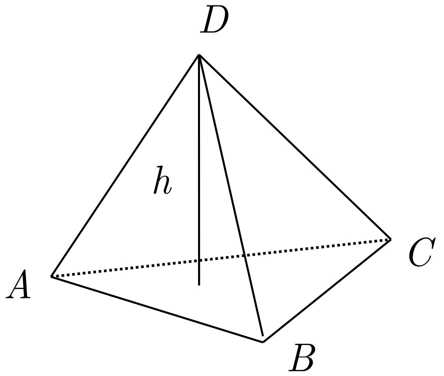
$$(d):\begin{cases} x = \alpha\, t + x_0 \\ y = \beta\, t + y_0 \; ; \; (t \in \mathbb{R}) \\ z = \gamma\, t + z_0 \end{cases}$$

لدراسة الوضعية النسبية لسطح كرة (S) مع المستقيم (d) في الفضاء ، نعوض x ، y و z من التمثيل

الوسيطي للمستقيم (d) في معادلة (S)، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط t



$\Delta > 0 \Rightarrow (S)\cap(d) = \{H\,;H'\}$ حيث H و H' نقطتي تقاطع (S) مع (d) نجد إحداثياتهما بتعويض كل من قيمة t_1 و t_2 في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)	$\Delta = 0 \Rightarrow (S)\cap(d) = \{H\}$ حيث H نقطة تماس بين (S) و (d) نجد إحداثياتها بتعويض قيمة الحل المضاعف t في التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)	$\Delta < 0 \Rightarrow (S)\cap(d) = \emptyset$

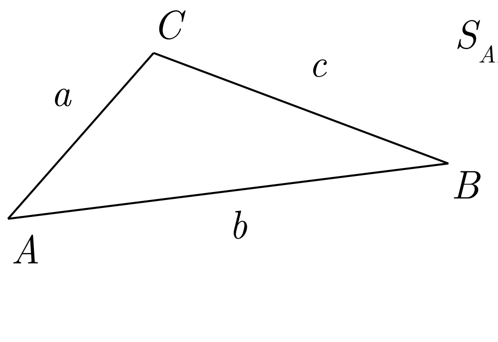


7°) **حجم رباعي الوجوه**

يحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التالي: $V = \dfrac{S_{ABC} \times h}{3}$

حيث S_{ABC} مساحة القاعدة (المثلث ABC) و h الارتفاع

8°) **مساحة مثلث**



أ/ إذا كان المثلث ABC قائم في A (مثلا) فان $S_{ABC} = \dfrac{AB \times AC}{2}$

ب/ إذا كان المثلث كيفي وكان لدينا قيس أحد زواياه

فان: $S_{ABC} = \dfrac{a.b.\sin A}{2} = \dfrac{b.c.\sin B}{2} = \dfrac{a.c.\sin C}{2}$

ج/ قانون هيرو لحساب مساحة مثلث

$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$ حيث: P نصف محيط المثلث أي $P = \dfrac{a+b+c}{2}$

خامسًا "المرّجح في الفضاء"

▪ **ملاحظة**: في حالة مرّجح أكثر من ثلاث نقط تعمم النتائج بأكملها بنفس الكيفية التي عُرف بها مرّجح ثلاث نقط

1°) إحداثيات النقطة G **مرجح الجملة المثقلة** : $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ **تعطى بالعلاقة**

$$\boxed{G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma},\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)}$$

2°) كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل: $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}$

علمًا أن: $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$$

• **التعميم** : $\overrightarrow{\text{M المرّجح}}$ ×(مجموع المعاملات)

▪ **ملاحظة**: إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فلا يوجد مرّجح للنقط A ، B و C ويكون الشعاع:

$\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتًا مستقلا عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط

المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

3°) كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

• **التعميم**: اجعل مكان M نقطة المرّجح + ^{2}[المرّجح M] ×(مجموع المعاملات)

4°) لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC تعطى بالعلاقة:

$$H\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

سادسًا "مجموعة النقط M من الفضاء

شكل المعادلة المحصل عليها من مجموعة النقط M من الفضاء	طبيعة (نوع E) مجموعة النقط M من الفضاء
1°) $MG = K > 0$	E : سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = K$
2°) $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MH} = 0$	E : سطح الكرة التي قطرها $[GH]$ مركزها ω منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$ ونصف قطرها $R = \frac{GH}{2}$
3°) $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$	E : المستوي الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له (عمودي عليه)
4°) $MG = MH$	E : المستوي المحوري على منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$

قف عند ناصية الحلم وقاتل

بكالوريات الشعب

العلمية المشتركـة

في رحاب الهندســة

الفضائية التحليلية

BAC : 2008-2016

جمع وكتابة الأستاذ : محمد حاقة

BAC : 2008

شعبة علوم تجريبية

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P) الذي معادلته: $x+2y-z+7=0$

والنقط $A(2,0,1)$ ، $B(3,2,0)$ ، $C(-1,-2,2)$

1) تحقق أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية ثم بيّن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $y+2z-2=0$

2) أ/ تحقق أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

ب/ احسب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

3) لتكن G مرجح الجملة $\left\{(A,1);(B,\alpha);(C,\beta)\right\}$ حيث α و β عددان حقيقيان يحققان $1+\alpha+\beta\neq 0$

عين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

شعبة علوم تجريبية

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد صحيح فقط. عيّن الجواب الصحيح معللا اختيارك. نعتبر في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط: $A(1,3,-1)$ ، $B(4,1,0)$ ، $C(-2,0,-2)$ و $D(3,2,1)$ والمستوي (P) الذي معادلته: $x-3z-4=0$

1) المستوي (P) هو: ج1/ (BCD) ، ج2/ (ABC) ، ج3/ (ABD)

2) شعاع ناظمي للمستوي (P) هو: ج1/ $\overrightarrow{n_1}\left(1,2,1\right)$ ، ج2/ $\overrightarrow{n_2}\left(-2,0,6\right)$ ، ج3/ $\overrightarrow{n_3}\left(2,0,-1\right)$

3) المسافة بين النقطة D والمستوي (P) هي: ج1/ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ ، ج2/ $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ ، ج3/ $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

شعبة تقني رياضي

نعتبر الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، $A(1,2,2)$ ، $B(3,2,1)$ ، $C(1,3,3)$ نقط من هذا الفضاء

1) برهن أن النقط A ، B و C تعين مستو يطلب تعيين معادلته الديكارتية

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما الديكارتيتين: $(P_1): x-2y+2z-1=0$ و $(P_2): x-3y+2z+2=0$ ، بين أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

3) بيّن أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

4) بين أنّ الشعاع $\vec{u}\left(2,0,-1\right)$ هو احد أشعة توجيه المستقيم (Δ)

5)استنتج أنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو الجملة: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3 \\ z = 3-t \end{cases} ,(t \in \mathbb{R})$

6)لتكن M نقطة من المستقيم (Δ)

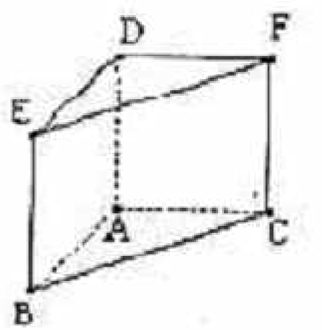
أ/ أوجد قيمة k حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}\left(2,0,-1\right)$ متعامدان

ب/ استنتج المسافة بين النقطة $A(1,2,2)$ والمستقيم (Δ)

شعبة تقني رياضي

$ABCDEF$ موشور قائم قاعدته المثلث ABC القائم في A والمتساوي الساقين وجهاه $ABED$ و $ACFD$

مربعان متقايسان طول كل منهما r حيث $(r \in \mathbb{R}_+^*)$ (أنظر الشكل)



1)يرمز I إلى منتصف $\left[AD\right]$ و J إلى مركز ثقل الرباعي $BCFE$

بيّن أن G مرجح الجملة $\left\{(A,2);(B,1);(C,1);(\mathrm{D},2);(\mathrm{E},1);(\mathrm{F},1)\right\}$

هو منتصف $\left[IJ\right]$

2)ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right)$

أ/ عيّن إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F

ب/ عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2MD^2 + ME^2 + MF^2 + 10r^2$$

شعبة رياضيات

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن النقط $A(0,2,1)$ ، $B(-1,1,-3)$ ، $C(1,0,-1)$

1)أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A

2)ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = -1-\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = -3+2\lambda \end{cases}$ حيث λ عدد حقيقي

أ/ اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D)

ب/ احسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D)

ج/ ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S

شعبة رياضيات

نعتبر في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين

الوسيطيين الآتيين: $\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\dfrac{1}{2}\lambda \; ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=-2-2\lambda \end{cases}$ و $\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \; ;\alpha\in\mathbb{R} \\ z=5+\alpha \end{cases}$ على الترتيب

1) بيّن أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي

2) M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ')

أ/ عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ')

ب/ أحسب الطول MN

3) عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) ويوازي المستقيم (Δ')

4) احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') والمستوي (P) ، ماذا تلاحظ؟

BAC : 2009

شعبة علوم تجريبية

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقط : $A(1,0,2)$ ، $B(0,2,1)$، $C(2,1,3)$

1) (P) المستوي الذي: $x-z+1=0$ معادلة ديكارتية له

أ/ بيّن أن المستوي (P) هو المستوي (ABC)

ب/ ما طبيعة المثلث ABC

2) أ/ تحقق أن النقطة $D\ \ 2,3,4$ لا تنتمي للمستوي (P)

ب/ ما طبيعة $ABCD$

3) أ/ أحسب المسافة بين D والمستوي (P)

ب/ أحسب حجم $ABCD$

شعبة علوم تجريبية

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(2,3,-1)$ $B(1,-2,4)$، $C(3,0,-2)$ و $D(1,-1,-2)$ وليكن (π) المستوي المعرف

بمعادلته الديكارتية: $2x-y+2z+1=0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية

1) النقط A ، B و C في استقامية

2) (ABD) مستوي معادلة ديكارتية له: $25x - 6y - z - 33 = 0$

3) المستقيم (CD) عمودي على المستوي (π)

4) المسقط العمودي للنقطة B على (π) هو النقطة $H\ 1;1;-1$

شعبة تقني رياضي

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ (Δ) مستقيم من الفضاء تمثيله الوسيطي معطى بالجملة التالية: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - t \ ;\mathrm{t} \in \mathbb{R} \\ z = 1 + t \end{cases}$ ، (P) مستو معرف بالمعادلة $x + 3y + z + 1 = 0$

عيّن في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح أو الاقتراحات الصحيحة مع التعليل

1	A_1 : النقطة $A(1;1;2)$ تنتمــي إلى (Δ)	B_1 : النقطة $B(-1;0;2)$ تنتمــي إلى (Δ)	C_1 : النقطة $C\left(0;\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$ تنتمــي إلى (Δ)
2	A_2: $\vec{u}\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ شعاع توجيه (Δ)	B_2 : $\vec{u'}(1;3;1)$ شعاع توجيه (Δ)	C_2: $\vec{u''}(3;1;0)$ شعاع توجيه (Δ)
3	A_3 : (Δ) محتوى في P	B_3 : (Δ) يقطع P	C_3 : (Δ) يوازي P
4	A_4: المستوي Q_1 ذو المعادلة $x + 3y + z - 3 = 0$ يعامد P	B_4: المستوي Q_2 ذو المعادلة $2x - y + \frac{1}{2}z = 0$ يعامد P	C_4: المستوي Q_3 ذو المعــادلة : $x - y - 2z + 5 = 0$ يعامد P
5	A_5: المسافة بين النقطة $D(1;1;1)$ و المستوي P هي $\frac{6}{\sqrt{11}}$	B_5: المسافة بين النقطة $O(0;0;0)$ و المستوي P هي : $\frac{\sqrt{11}}{11}$	C_5: المسافة بين النقطة $E(1;3;0)$ و المستوي P هي : $\sqrt{11}$

شعبة تقني رياضي

1) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

2) نعتبر النقط : $A(1,1,2)$ $B(-1,0,-2)$ ، $C(-1,0,-6)$

بيّن أن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA^2 - MB^2 = 1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB)

نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة لـه

3) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

برهن أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

4) G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

أ/ عيّن إحداثيات G ثم تأكد أنها تنتمي إلى (S)

ب/ اكتب معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة G

شعبة الرياضيات

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(2,1,2)$ و $B(0,2,-1)$ والمستقيم (D) ذا التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-t \quad ; t\in\mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$

1) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ، وأثبت أن (D) و (AB) لا ينتميان الى نفس المستوي

2) نعتبر المستوي (P) الذي يشمل المستقيم (AB) ويوازي المستقيم (D)

أ/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}\left(1,5,1\right)$ عمودي على المستوي (P)

ب/ أكتب معادلة للمستوي (P)

ج/ بيّن أن المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M

د/ عيّن تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz)

شعبة الرياضيات

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستويين (P_1) و (P_2) حيث:

$x+2y-z-2=0$ معادلة للمستوي (P_1) و $\begin{cases} x=1+2\alpha+\beta \\ y=1+\alpha \quad ; (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=5+\alpha+\beta \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستوي (P_2)

1) أكتب معادلة للمستوي (P_2)

2) عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n_1}$ للمستوي (P_1) وشعاعا ناظميا $\vec{n_2}$ للمستوي (P_2)

3) بيّن أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان

4) أ/ $A(3,1,1)$ نقطة من الفضاء،عيّن المسافة d_1 بين النقطة A والمستوي (P_1) ،ثم المسافة d_2 بين A والمستوي (P_1)

ب/ استنتج المسافة d بين النقطة A والمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)

5) أ/ عيّن تمثيلا وسيطيا بدلالة λ للمستقيم (Δ) ، حيث λ عدد حقيقي

ب/ M نقطة كيفية من (Δ)، احسب MA^2 بدلالة λ مستنتجا ثانية المسافة بين A و (Δ)

BAC : 2010

شعبة علوم تجريبية

نعتبر في الفضاء معلم المنسوب إلى متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(1,1,0)$ ، $B(2,1,1)$ و $C(-1,2,-1)$

1) أ/ بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية

ب/ بيّن أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x+y-z-2=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) اللذين معادلتيهما على الترتيب: $(P): x+2y-3z+1=0$ و $(Q): 2x+y-z-1=0$ والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $F(0,4,3)$ و $\vec{u}\left(-1,5,3\right)$ شعاع توجيه لـه

أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

ب/ تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

3) عيّن تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q)

شعبة علوم تجريبية

في الفضاء معلم المنسوب إلى متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P) الذي

معادلته $x-2y+z+3=0$

1) نذكر أن حامل محور الفواصل $\left(\mathrm{o},\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

عيّن إحداثيات A تقاطع حامل محور الفواصل $\left(\mathrm{o},\vec{i}\right)$ مع المستوي (P)

2) B و C النقطتان من الفضاء حيث: $B(0,0,-3)$ و $C(-1,-4,2)$

أ/ تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المستوي (P) . ب/ أحسب الطول AB

ج/ احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P)

3) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المارّ بالنقطة C والعمودي على المستوي (P)

ب/ تحقق أنّ النقطة A تنتمي إلى المستقيم (Δ)

ج/ احسب مساحة المثلث ABC

شعبة تقني رياضي

الفضاء مزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(3,-1,2)$ ، $B(1,2,1)$

والمستوي (P) الذي معادلته $x-2y+3z-7=0$

1) عيّن إحداثيات النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و 1 على الترتيب

2) عيّن طبيعة وعناصر (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=4$

3) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة G ويعامد المستوي (P)

ب/ عيّن إحداثيات H نقطة تقاطع (P) و (Δ)

ج/ احسب المسافة بين G والمستوي (P)

4) نعرف المستوي (P') بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=1+t \\ y=t+2\lambda \\ z=2-t+2\lambda \end{cases}$ حيث t و λ عددان حقيقيان

أثبت أنّ (P) و (P') متقاطعان وأكتب تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(3,-2,2)$ ، $B(0,4,-1)$

1) اكتب معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\left(1,0,-1\right)$ شعاع ناظمي له

2) (P_2) المستوي الذي يحوي المستقيم (AB) ويعامد المستوي (P_1)

أ/ بيّن أن $\vec{v}\left(1,1,1\right)$ شعاع ناظمي لـ (P_2)

ب/ اكتب معادلة لـ (P_2)

3) نعتبر النقطتين C و D حيث C $6;1;5$ و D معرفة بـ: $\overrightarrow{CD}\left(0,-3,-6\right)$

أ/ بيّن أنّ المثلث ACD قائم في A واحسب مساحته

ب/ بيّن أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD)

ج/ احسب حجم رباعي الوجوه $ACDB$

شعبة الرياضيات

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(2,0,0)$ ، $B(0,1,0)$ و $C(0,0,2)$

1) بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية

2) جد معادلة للمستوي (ABC)

3) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)

4) (P) المستوي الذي معادلته: $2x+2y+z-2=0$

أ/ بيّن أن : (P) و (ABC) متقاطعان

ب/ بيّن أن : (P) يشمل B و C ، ماذا تستنتج؟

5) عيّن (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

شعبة الرياضيات

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\ \ -1;2;1$ ، $B\ \ 2;1;3$ و

$C(0,-1,2)$ ولتكن (P) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $AM=BM$

1) بيّن أنّ (P) هو المستوي الذي معادلته: $3x-y+2z-4=0$

2) عيّن معادلة للمستوي (Q) الذي يشمل A ويوازي (P)

3) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل C ويعامد (P)

ب/ عيّن احداثيات E نقطة تقاطع (Q) و (D)

ج/ احسب المسافة بيّن النقطة A والمستقيم (D)

4) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يحوي المستقيم (AC) ويعامد المستوي (P) ثم استنتج معادلة له

BAC : 2011

شعبة علوم تجريبية

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوي (P) الذي يشمل النقطة

$A(1,-2,1)$ و $\vec{n}\left(-2,1,5\right)$ شعاع ناظمي له؛ وليكن (Q) المستوي ذا المعادلة: $x+2y-7=0$

1) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

2) أ/ تحقق أنّ النقطة $B(-1,4,-1)$ مشتركة بيّن المستويين (P) و (Q)

ب/ بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

3) لتكن النقطة $C(5,-2,-1)$

أ/ احسب المسافة بين النقطة C والمستوي (P) ثم المسافة بين النقطة C والمستوي (Q)

ب/ أثبت أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان

ج/ استنتج المسافة بين النقطة C والمستقيم (Δ)

شعبة علوم تجريبية

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(0,1,5)$ ، $B(2,1,7)$ و $C(3,-3,6)$

1) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}\left(1,-4,-1\right)$ شعاع توجيه له

ب/ تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

ج/ بيّن أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان

د/ استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

2) نعتبر النقطة $M(2+t,1-4t,7-t)$ حيث t عدد حقيقي؛ ولتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$

أ/ اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t

ب/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

ج/ استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن

د/ قارن بين القيمة الصغرى للدالة h ، والمسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

شعبة تقني رياضي

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) المعادلة $21x+14y=40$ لا تقبل حلولا في مجموعة الأعداد الصحيحة

2) في نظام التعداد ذا الاساس 7 يكون: $\overline{3421}+\overline{1562}=\overline{5413}$

3) باقي القسمة الاقليدية للعدد: $1+3+3^2+\ldots+3^{2011}$ على 7 هو 6

4) الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

أ/ المستوي (P) الذي معادلته $2x+y-z+1=0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2,1,-1)$ و $\vec{u}\left(1,-1,1\right)$ شعاع توجيهه لا يشتركان في اية نقطة

ب/ معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (P) هي: $x-y+z=0$

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث

$\overrightarrow{AD}\left(1,5,2\right)$ ، $\overrightarrow{BD}\left(0,7,3\right)$ ، $\overrightarrow{CD}\left(1,-3,7\right)$ و $C(2,8,-4)$

1) بيّن أن النقط A ، B و D تعين مستويا

2) بيّن أنّ المستقيم (CD) يعامد المستوي (ABD)

3) I المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB)

أ/ بيّن أنّ المستقيم (AB) يعامد المستوي $(\mathrm{C}DI)$

ب/ عيّن معادلة للمستوي $(\mathrm{C}DI)$ واكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ج/ استنتج إحداثيات النقطة I

4) احسب الأطوال DI ، CD و AB واستنتج حجم رباعي الوجوه $ABCD$

(حجم رباعي الوجوه= $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة× الارتفاع)

شعبة الرياضيات

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

1) نعتبر النقط : $A\ 1;0;2$ ، $B\ 1;1;4$ و $C(-1,1,1)$

أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا

ب/ بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(3,4,-2\right)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) حيث:

$(P_1): 3x+4y-2z+1=0$ و $(P_2): 2x-2y-z-1=0$

أ/ بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)

ج/ تحقق أن النقطة $O(0,0,0)$ لا تنتمي إلى (Δ)

د/ احسب المسافتين $d(O,(P_1))$ و $d(O,(P_2))$ واستنتج المسافة $d(O,(\Delta))$

شعبة الرياضيات

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(1,0,0)$ ، $B(0,2,0)$

$C(0,0,3)$ و $G\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right)$

(D) المستقيم الذي يشمل النقطة A وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(-1,1,\frac{3}{2}\right)$ و (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة C وشعاع توجيهه $\vec{u}\left(\frac{1}{2},1,-3\right)$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) ثم ادرس الوضع النسبي لهما

2) بيّن أنّ : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ؛ ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة G ؟

3) عيّن شعاعا ناظميا $\vec{n}$ للمستوي (ABC) ثم اكتب معادلة لـه

4) احسب المسافة بيّن النقطة O والمستوي (ABC)

5) H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (D)

أ/ جد إحداثيات النقطة H

ب/ استنتج المسافة بين النقطة B والمستقيم (D)

BAC : 2012

شعبة علوم تجريبية

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستوي (P)

ذا المعادلة: $14x+16y+13z-47=0$ والنقط : $A(1,-2,5)$ ، $B(2,2,-1)$ و $C(-1,3,1)$

1) أ/ تحقق أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية

ب/ بيّن أنّ المستوي (ABC) هو (P)

2) جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

3) أ/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[\mathrm{AB}]$

ب/ تحقق أنّ النقطة $D\left(-1,-2,\frac{1}{4}\right)$ تنتمي إلى المستوي (Q)

ج/ احسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB)

شعبة علوم تجريبية

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(-1,0,1)$، $B(2,1,0)$

و $C(1,-1,0)$

1) بيّن أنّ النقط A، B و C تُعين مستويا

2) بيّن أنّ $2x-y+5z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) D و H نقطتان من الفضاء حيث: $D(2,-1,3)$ و $H\left(\frac{13}{15},-\frac{13}{30},\frac{1}{6}\right)$

أ/ تحقّق أنّ النقطة D لا تنتمي إلى المستوي (ABC)

ب/ بيّن أنّ النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

ج/ استنتج أنّ المستويين (ADH) و (ABC) متعامدان، ثم جد تمثيلا وسيطيا لتقاطعهما

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، (P) المستوي الذي يشمل النقطة $A\ \ 2;-5;2$

و $\vec{n}\left(-2,1,5\right)$ شعاع ناظمي لـه، (Q) المستوي الذي: $x+2y-2=0$ معادلة له

1) عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P)

2) بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) متعامدان

3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q)

4) أ/ احسب d_1 المسافة بين النقطة $K\ \ 3;3;3$ والمستوي (P) و d_2 المسافة بين النقطة $K\ \ 3;3;3$ والمستوي (Q)

ب/ استنتج المسافة d بين النقطة $K\ \ 3;3;3$ والمستقيم (Δ)

5) احسب المسافة d بطريقة ثانية

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، (P)المستوي الذي: $-4x-3y+1=0$ معادلة ديكارتية له و (D) المستقيم الذي : $k\in\mathbb{R}$; $\begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}k \\ z=\dfrac{-3}{4}+\dfrac{3}{4}k \end{cases}$ تمثيل وسيطي له

1) تحقق أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

2) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,1,0)$ و $\vec{u}\left(4,1,3\right)$ شعاع توجيه له

ب/ عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ)

3) بيّن أنّ: $3x-4z-3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ)

4) $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء. أ/ احسب المسافة بين النقطة M وكل من (P) و (Q)

ب/ أثبت أنّ مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q)

هي اتحاد مستويين متعامدين (P_1) و (P_2)؛ يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما

5) عيّن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

شعبة الرياضيات

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط : $A(3,0,0)$ ، $B(0,4,0)$ و $C(2,2,2)$

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية وأنّ الشعاع $\vec{n}\left(4,3,-1\right)$ عمودي على كل من الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B و C

3) أ/ بيّن أنّ : $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $AM=BM$

ب/ بيّن أنّ : $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $AM=CM$

ج/ بيّن أنّ (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

4) احسب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

شعبة الرياضيات

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط : $A(1,1,1)$ ، $B(1,-1,0)$ و $C(2,0,1)$

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويا (P_1) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له

2) (P_2) المستوي الذي: $x-2y-2z+6=0$ معادلة ديكارتية له

بيّن أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطي له

3) بيّن أنّ النقطة O هي مرجح الجملة: $\left\{(A;1),(B;1),(C;-1)\right\}$

4) أ/ عيّن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{3}$

ب/ احسب إحداثيات D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ)

ج/ ما هي طبيعة المثلث ODE ؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ)

BAC : 2013

شعبة علوم تجريبية

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط : $A(-1,1,3)$ ، $B(1,0,-1)$ ، $C(2,-1,1)$ و $D(2,0,-1)$ والمستوي (P) ذا المعادلة: $2y+z+1=0$

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: $\begin{cases}x=-1\\y=2+\beta\\z=1-2\beta\end{cases}$ حيث β وسيط حقيقي

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC) ،ثم تحقّق أن المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P)

2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ) و (BC) ليسا من نفس المستوي

3) أ/ احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P)

ب/ بيّن أنّ D نقطة من (P)، وأنّ المثلث BCD قائم

4) بيّن أن $ABCD$ رباعي وجوه، ثم احسب حجمه

شعبة علوم تجريبية

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط : $A(2,1,-1)$

$B(1,-1,3)$ ، $C\left(-\dfrac{3}{2},-2,1\right)$ و $D\left(\dfrac{7}{2},-3,0\right)$ ولتكن I منتصف القطعة $[AB]$

1) أ/ احسب إحداثيات النقطة I

ب/ بيّن أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ (P) ؛المستوي المحوري لـ $[AB]$

2) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $\vec{u}\left(1,2,-4\right)$ شعاع توجيه له

3) أ/ جد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ)

ب/ بيّن أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوي، ثمّ استنتج أنّ المثلث IEC قائم

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE)

ب/ أحسب حجم رباعي الوجوه $DIEC$

شعبة تقني رياضي

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط : $A(3,-2,-1)$

$B(5,-3,2)$ ، $C(2,3,2)$ و $D(1,-5,-2)$

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويا؛ نرمز له بالرمز (P)

2) بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ ناظمي للمستوي (P)، ثم جد معادلة ديكارتية للمستوي (P)

3) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P)

ب/ عيّن إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)

4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ، و λ العدد الحقيقي حيث: $\overrightarrow{AH}=\lambda\,\overrightarrow{AB}$

أ/ بيّن أنّ : $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$

ب/ استنتج العدد الحقيقي λ وإحداثيات النقطة H ، ثمّ المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB)

شعبة تقني رياضي

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(2,-5,4)$ و $B(3,-4,6)$

والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \ ,(t\in\mathbb{R}) \\ z = 4+t \end{cases}$

1) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطتين A و B

ب/ ادرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D)

2) (P) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ)

- برهن أنّ $\vec{n}\left(3,1,-2\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، ثم عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P)

3) M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (D)

أ/ عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (D)

ب/ احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (P)

شعبة الرياضيات

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(0,0,1)$ ، $B(2,2,-1)$

$C(-2,-7,-7)$ و $D(-3,4,4)$

والمستوي (P) المعرّف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = 1+3\alpha+\beta \\ y = 1-2\alpha \\ z = 4+\alpha+\beta \end{cases}$ حيث α و β وسيطان حقيقيان

1) أ/ بيّن أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا

ب/ تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}\left(3,-2,1\right)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكارتية له

2) أ/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)، ثم بيّن أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

ب/ بيّن أنّ تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) ذا التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x = -2+t \\ y = -7+4t \ ,(t\in\mathbb{R}) \\ z = -7+5t \end{cases}$

ج/ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)، والمسافة بين النقطة D والمستوي (P)، ثم استنتج المسافة

بين النقطة D والمستقيم (Δ)

3) (Q) المستوي الذي يشمل النقطة D والعمودي على كل من المستويين (P) و (ABC)

أ/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

ب/ بيّن أنّ المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة H ، ثم عيّن إحداثيات H

ج/ احسب بطريقة ثانية، المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

شعبة الرياضيات

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقطتين $A(-1,0,2)$ و $B(1,1,1)$

والمستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x = 2+\alpha \\ y = -2 \;\;, (\alpha \in \mathbb{R}) \\ z = -1-\alpha \end{cases}$

1) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ب/ بيّن أنّ المستقيمين (AB) و (Δ) ليسا من نفس المستوي

2) (P) المستوي الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ)

أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P)

ب/ أثبت أنّ ؛ $x-y+z-1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P)

3) لتكن N نقطة من المستقيم (Δ) و M نقطة من الفضاء إحداثياتها $(1+2\beta, 1+\beta, 1-\beta)$ مع $(\beta \in \mathbb{R})$

أ/ بيّن أن النقطة M تنتمي إلى المستقيم (AB)

ب/ جد إحداثيات النقطتين N و M حتى تكون M المسقط العمودي للنقطة N على المستوي (P)

ج/ تحقق أنّ المسافة بين N و (P) هي $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ، ثم أحسب مساحة المثلث ABN

BAC : 2014

شعبة علوم تجريبية

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(2,-1,1)$ ، $B(-1,2,1)$

$C(1,-1,2)$ و $D(1,1,1)$

1) أ/ تحقق أنّ النقط A ، B و C تعيّن مستويا

ب/ بيّن أنّ $\vec{n}\left(1,1,1\right)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ج/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\left\{(A,1);(B,2);(C,-1)\right\}$

أ/ احسب إحداثيات G

ب/ لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=2\left\|\overrightarrow{MD}\right\|$

بيّن أنّ (Γ) هي المستوي المحوري للقطعة المستقيم $\left[GD\right]$

ج/ أثبت أن معادلة (Γ) هي: $6x-4y+2z+3=0$

3) أثبت أنّ المستويين (ABC) و (Γ) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له

شعبة علوم تجريبية

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط : $A(1,-1,2)$ ، $B(1,-2,-3)$ و $C(2,0,0)$

1) أ/ برهن أنّ A ، B و C ليست في استقامية

ب/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC)

ج/ تحقق أنّ $x+y-z-2=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي:

$(P): x-y-2z+5=0$ و $(Q): 3x+2y-z+10=0$

برهن أنّ (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)، ذا التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=-3+t \\ y=-t \ ,(\mathrm{t}\in\mathbb{R}) \\ z=1+t \end{cases}$

3) عيّن تقاطع المستويات (ABC)،(P) و (Q)

4) لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء ، نسمي $d\left(M;(P)\right)$ المسافة بين M والمستوي (P)

و $d\left(M;(\mathrm{Q})\right)$ المسافة بين M والمستوي (Q) ، عيّن المجموعة (Γ) للنقط M بحيث:

$$\sqrt{6}\times d\left(M;(P)\right)=\sqrt{14}\times d\left(M;(\mathrm{Q})\right)$$

شعبة تقني رياضي

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيليهما الوسيطيين التاليين :

$$(\Delta_1):\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2-2t\\ z=1-t\end{cases},(\mathrm{t}\in\mathbb{R})\quad \text{و}\quad (\Delta_2):\begin{cases}x=1\\ y=-1-t'\\ z=4+2t'\end{cases},(\mathrm{t}'\in\mathbb{R})$$

1) أ/ عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) المعين بالمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

2) أ/ أثبت أنّ النقطة $A(6,4,4)$ لا تنتمي للمستوي (P)

ب/ بيّن أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

3) أ/ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة A و $\vec{n}\left(5,1,-7\right)$ شعاع ناظمي له

ب/ عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع (Q) مع كل من (Δ_1) و (Δ_2) على الترتيب

4) أ/ عيّن طبيعة المثلث BCD ، ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

ب/ استنتج مساحة المثلث ACD

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، A ، B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث $A(0,-1,1)$

$B(1,3,2)$ ، $C(-1,3,4)$

1) أ/ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية BAC

ب/ بيّن أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا

2) أ/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}\left(2,-1,2\right)$ ناظمي للمستوي (ABC)

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) ليكن (S) سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

نسمي Ω و R مركز ونصف قطر (S) احسب R وعيّن إحداثيات Ω

4) أكتب معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1) و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

شعبة الرياضيات

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقط $A(2,1,-1)$ ، $B(-1,2,4)$ ، $C(0,-2,3)$ و $D(1,1,-2)$ والمستوي (P) المعرّف بالمعادلة الديكارتية: $2x-y+2z+1=0$

المطلوب: أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الاجابة في كل حالة من الحالات التالية

1) النقط A ، B و C تُعين مستويًا

2) المستقيم (AC) محتوى في المستوي (P)

3) معادلة ديكارتية للمستوي (ACD) هي؛ $x-2y-z-1=0$

4) للمستقيم (AC) له تمثيل وسيطي الجملة التالية: $\begin{cases} x=2t \\ y=-2+3t \\ z=3-4t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي

5) بعد النقطة D عن المستوي (P) يساوي $\dfrac{3}{2}$

6) النقطة $E\left(-2,-1,1\right)$ المسقط العمودي للنقطة C على المستوي (P)

7) سطح الكرة التي مركزها D ونصف قطرها $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ هو مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق؛ $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CM}=0$

شعبة الرياضيات

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1,1,3)$ و $\vec{u}\left(1,2,-2\right)$ شعاع توجيه له، (Δ') المستقيم المعرّف بجملة المعادلتين: $\begin{cases} x+z=0 \\ y=3 \end{cases}$

1) جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ')

2) بيّن أنّ (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي

3) (P) المستوي الذي يشمل (Δ') ويوازي (Δ). بيّن أنّ معادلة المستوي (P) هي؛ $2x+y+2z-3=0$

4) $M(1+t,1+2t,3-2t)$ نقطة كيفية من المستقيم (Δ)، حيث $t\in\mathbb{R}$. أحسب d المسافة بين M والمستوي (P)

5) أ/ عيّن إحداثيات A' المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)، ثم عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ'') الذي يشمل A ويوازي (Δ)

ب/ بيّن أنّ (Δ') و (Δ'') يتقاطعان في النقطة $B(1,3,-1)$

6) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(t)=BM^2$

أ/ بيّن أنّ : $f(t)=9t^2-24t+20$

ب/ بين أنّ f تقبل قيمة حدية صغرى $f(t_0)$ ، يطلب تعيين t_0 و $f(t_0)$

ج/ تحقق أنّ : $d=\sqrt{f(t_0)}$

BAC : 2015

شعبة علوم تجريبية

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(2,1,0)$ ، $B(1,2,2)$ $C(3,3,1)$ و $D(1,1,4)$

1) تحقق أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويًا وأنّ $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له

2) بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع ، ثم تحقق أنّ مساحته هي $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ وحدة مساحة

3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D

4) النقطة E هي المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

أ/ عيّن إحداثيات النقطة E ثمّ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)

ب/ عيّن مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$

5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

شعبة علوم تجريبية

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر النقط $A(2,4,1)$ ، $B(0,4,-3)$ $C(3,1,-3)$ و $D(1,0,-2)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الأتية

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية

2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي؛ $2x+2y-z-11=0$

3) النقطة $E\left(3,2,-1\right)$ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي

5) المستقيم (CD) له تمثيل وسيطي الجملة التالية: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=-1-t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

شعبة تقني رياضي

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقط $A(1,2,2)$ ، $B(2,0,2)$ $C(-2,3,7)$

والمستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=2+\beta \\ y=-1-3\alpha-\beta \\ z=-\alpha \end{cases}$ حيث α و β وسيطان حقيقيان

1) أ/ بيّن أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويًا

ب/ تحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(2,1,1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له

2) أ/ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) ، ثم بين أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

ب/ بيّن أنّ تقاطع (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) ذا التمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=5+4t \\ y=-4-7t \\ z=-t \end{cases} ;(t\in\mathbb{R})$

3) أ/ عيّن إحداثيات النقطة H مرجّح الجملة $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$

ب/ أحسب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ)

4) لتكن (P') مجموعة النقط M من الفضاء بحيث؛ $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\vec{u}=0$ ($\vec{u}$ هو شعاع توجيه (Δ))

أ/ بيّن أنّ المجموعة (P') هي مستو يطلب تعيين عناصره المميزة، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

ب/ بيّن أنّ المستويات الثلاثة (P)، (P') و (ABC) تتقاطع في نقطة واحدة E ، ثم عيّن إحداثيات E

ج/ احسب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ)

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقطتين $A(2,3,1)$ ، $B(1,2,-2)$

و (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x=1 \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases};(t\in\mathbb{R})$

1) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\left(1,2,-2\right)$ شعاع توجيه له

ب/ عيّن إحداثيات النقطة C نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ)

2) (P) المستوي المعيّن بالمستقيمين (D) و (Δ)

بين أن $\vec{n}\left(2,-2,-1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)، ثم استنتج معادلة ديكارتية له

3) أ/ اكتب معادلة ديكارتيه للمستوي (Q) الذي يشمل النقطة B ويعامد المستقيم (Δ)

ب/ عيّن إحداثيات النقطة E المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (Δ)

ج/ احسب المسافة بين النقطة B و المستقيم (Δ)

د/ احسب مساحة المثلث BEC

شعبة الرياضيات

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقط $A(1,5,4)$ ، $B(10,4,3)$ $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$

1) أ/ بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية

ب/ بيّن أنّ النقط A ، B ، C و D من نفس المستوي

ج/ استنتج أن النقطة D هي مرجّح النقط A ، B و C المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها

د/ عيّن إحداثيات النقطة E نظيرة النقطة A بالنسبة الى النقطة D

هـ/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المحوري للقطعة $\left[AE\right]$

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MA}\right\|$

3) أ/ تحقق أن النقطة $F(1,8,10)$ تنتمي إلى المستوي (P)

ب/ المستقيم (FD) يقطع (Γ) في نقطتين G و H ، حدّد طبيعة الرباعي $AGEH$ ، ثم أحسب مساحته

4) (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة D ويعامد المستوي (AEH)

أ/ بيّن أنّ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ ناظمي للمستوي (AEH)

ب/ تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، النقطة $N(3t,4-2t,5+t)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ)

ج/ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي t ، حجم المجسم $NAGEH$ هو $v(t)$ حيث؛ $v(t)=2\left|t\right|\sqrt{14}\,uv$

(uv وحدة الحجوم)

د/ عيّن إحداثيات كل من النقطتين N_1 و N_2 من (Δ) اللّتين يكون من أجليهما $v(t)=2\sqrt{3}\,uv$

شعبة الرياضيات

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقطتين $A(2,0,0)$ ، $B(-1,-5,-1)$

(Δ_1) المستقيم الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\left(-1,2,-1\right)$ شعاع توجيه له

(Δ_2) المستقيم المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي : $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-3-3t \\ y=2+2t \\ z=7+3t \end{cases}$

(d) المستقيم الذي يشمل النقطة B و $\vec{v}\left(2,5,3\right)$ شعاع توجيه له

1) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) يتقاطعان في النقطة C يُطلب تعيين إحداثياتها

2) بيّن أنّ المستقيمين (Δ_1) و (d) ليسا من نفس المستوي

3) أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

ب/ استنتج أنّ $4x+3y+2z-8=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (P)

ج/ تحقّق من أنّ النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P)

4)أ/ بيّن أنّه يوجد نقطة وحيدة I من المستقيم (d) وتوجد نقطة وحيدة D من المستقيم (Δ_2) حيث تكون النقط A ، I و D في استقامية؛ يطلب تعيين إحداثيات النقطتين I و D

ب/ بيّن أنّ النقطة I هي منتصف القطعة $\left[AD\right]$

5) النقطة K مرجّح الجملة المثقلة $\left\{(B,1);(\mathrm{I},2)\right\}$ والنقطة G المسقط العمودي للنقطة K على المستوي (P)

أ/ بيّن أنّ النقطة G هي مرجح النقط A ، C و D المرفقة بمعاملات يُطلب تعيينها

ب/ استنتج إحداثيات النقطة G

BAC : 2016

شعبة علوم تجريبية

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(1,0,2)$ وشعاع توجيه له $\vec{u}(2;1;-1)$ وليكن (Δ') المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=4+\lambda;(\lambda\in\mathbb{R}) \\ z=2+\lambda \end{cases}$

1) أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

ب/ بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2) أ/ بين أن النقطة $A(-1,3,1)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ')

ب/ تحقق أن المستقيم (AB) عمودي على كل من المستقيمين (Δ) و (Δ')

ج/ استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (Δ')

3) لتكن N نقطة احداثياتها $(-2+t;2+t;t)$ حيث $(t\in\mathbb{R})$ ولتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(t)=AN^2$$

أ/ بين أن النقطة N تنتمي الى المستقيم (Δ') ، ثم اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة t

ب/ استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافه AN أصغر ما يمكن، ثم قارن القيمة الصغرى للدالة h والمسافة AB

شعبة علوم تجريبية

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ونعتبر النقط $A(2,1,-3)$ ، $B(0,-1,2)$

$C(-3,-1,-1)$

1) أ/ تحقق أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويًا

ب/ بين أن المعادلة: $2x-7y-2z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (BC)

3) أ/ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) تقاطع المستويين (ABC) و (P)

ب/ بين أن المستقيم (D) عمود في المثلث ABC

4) ليكن (Δ) المتوسط المتعلق بالضلع $\left[AC\right]$ في المثلث ABC

أ/ بين أن الجملة: $;(k\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}k \\ y=k \\ z=-2-4k \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

ب/ بين أن المستقيمين (D) و (Δ) يتقاطعان في نقطة G يطلب تعيين إحداثياتها

ج/ بين أن المثلث ABC متساوي الساقين

د/ ماذا تمثل النقطة G بالنسبة للمثلث ABC ؟

5) عين طبيعة وعناصر المجموعة (E) للنقط M من الفضاء التي تحقق $3 = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

شعبة علوم تجريبية الدورة الأولى

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر المستويين (P) و (P') معادلتيهما على الترتيب:

$x-2y+z-2=0$ و $2x+y-z+1=0$

1) بين أن المستويين (P) و (P') متقاطعان

2) عيّن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $d\Big(M;(P)\Big)=d\Big(M;(P')\Big)$

حيث $d\Big(M;(P)\Big)$ المسافة بين M والمستوي (P)، $d\Big(M;(P')\Big)$ المسافة بين M والمستوي (P')

3) تحقق أن النقطة $A(1;2;0)$ تنتمي الى المجموعة (Γ)

4) H و H' المسقطان العموديان للنقطة A على المستويين (P) و (P') على الترتيب

أ/ جد تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (AH) و (AH')

ب/ استنتج احداثيات كل من النقطتين H و H'

5) عين احداثيات النقطة I منتصف القطعة $\left[HH'\right]$ ثم أحسب مساحة المثلث AHH'

شعبة علوم تجريبية الدورة الأولى

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقطتين $A(5,-1,-2)$ و $B(3,12,-7)$

(Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x=1+3k \\ y=1+2k\,;(k\in\mathbb{R}) \\ z=4k \end{cases}$

1) أ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ') الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\Big(-2,1,1\Big)$ شعاع توجيه له

ب/ بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متعامدان، ثم تحقق أن النقطة $C(1;1;0)$ نقطة تقاطعهما

2) (P) المستوي المعين بالمستقيمين (Δ) و (Δ')

أ/ بين أن الشعاع $\vec{n}\Big(2,11,-7\Big)$ ناظمي للمستوي (P) ، ثم جد معادلة ديكارتية له

ب/ بين أن النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوي (P)

3) α و β عددان حقيقيان و (P') مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء المعرفة بـ $\begin{cases} x=3-\beta \\ y=12+12\alpha+9\beta \\ z=-7-6\alpha-11\beta \end{cases}$

أ/ أثبت أن المجموعة (P') هي مستو ثم تحقق أن $13x - y - 2z - 41 = 0$ هي معادلة ديكارتيه له

ب/ عين احداثيات D و E نقطتي تقاطع المستوي (P') مع المستقيمين (Δ) و (Δ') على الترتيب

ج/ احسب حجم رباعي الوجوه $BCDE$

شعبة تقني رياضي

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،لتكن النقط $A(1,1,4)$ ، $B(0,3,1)$ و $C\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3},5\right)$

والمستوي (P) الذي $x - 2y + z - 3 = 0$ معادلة له والمستقيم (Δ) الذي $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \,;(t \in \mathbb{R}) \\ z = 4-3t \end{cases}$

في كل سؤال توجد إجابه واحدة صحيحة من بين الاقتراحات الثلاثة، حدّدها مع التعليل

		الاجابة أ/	الاجابة ب/	الاجابة ج/
1	المستوي (P) يحوي المستقيم	(Δ)	(AB)	(AC)
2	المستويان (P) و (ABC)	متوازيان تماما	متقاطعان	متطابقان
3	المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (Δ) هي النقطة	A	B	C
4	المستقيمان (Δ) و (AC)	متقاطعان	متوازيان	ليسا من نفس المستوي
5	مجموعة النقط M من الفضاء جيث $BM^2 - 9CM^2 = 0$ هي	مستو	سطح كرة	مجموعة خاليه

شعبة تقني رياضي

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$A(3,-2,2)$ ، $B(6,1,5)$ $C(6,-2,-1)$ و $D(0,1,1)$

1) بين أن ABC مثلث قائم في A

2) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل A والعمودي على (AB)

3) ليكن (P') المستوي حيث: $x - z - 1 = 0$ ، معادلة له

أ/ هل المستويان (P) و (P') متعامدان؟ برّر إجابتك.

ب/ بين أن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}\left(1,-2,1\right)$ شعاع توجيه له هو

تقاطع المستويين (P) و (P')

4) لتكن النقطة $H\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ من الفضاء

أ/ بين أن H هي المسقط العمودي لـ D على (Δ)

ب/ احسب المسافة بين D و (Δ)

5) أ/ بين أن النقطة $E(0;4;-1)$ تنتمي الى المستقيم (Δ)

ب/ احسب حجم رباعي الوجوه $ABCE$

شعبة الرياضيات

الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

نعتبر النقط $A(1,1,0)$ ، $B(2,-1,1)$ $C(-1,0,1)$ ، $D\left(\frac{1}{2},2,-\frac{1}{2}\right)$ ، $E(0,1,1)$ ، $H\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4},-\frac{1}{2}\right)$

والمستوي (P) المعرف بالتمثيل الوسيطي: $\begin{cases} x=1+\alpha+\beta \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha-\beta \end{cases}$ ، α و β وسيطان حقيقيان.

1) أ/ بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.

ب/ تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;3;5)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم أكتب معادلة ديكارتيه له.

2) أ/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) ثم بين أن المستويين (ABC) و (P) متقاطعان

ب/ نسمي (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P).

– تحقق أن النقطة D تنتمي الى المستقيم (Δ) وأن $\vec{u}(-3;1;0)$ شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

ج/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ).

د/ بين أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ثم استنتج المسافة بين A و (Δ).

3) G مرجح الجملة المثقلة: $\left\{(A,2);(B,-3);(C,2)\right\}$.

نسمي (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{GM}=11$

أ/ عين احداثيات النقطة G

ب/ اكتب معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) ثم بين أنها سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها

ج/ حدّد الوضعية النسبية للمستوي (ABC) والمجموعة (Γ)

شعبة الرياضيات

1) في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط A ، B ، C و D حيث:

$A(1,0,3)$ ، $B(1,2,4)$ $C(0,0,2)$ و $D(3,4,1)$

أ/ عيّن العددين الحقيقيين α و β حتى يكون الشعاع $\vec{n}(2;\alpha;\beta)$ ناظميا للمستوي (ABC) .

ب/ جد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) $z=2-x$ و $y=2z-2x-4$ معادلتان ديكارتيتان للمستويين (P) و (Q) على الترتيب

أ/ بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

ب/ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q)

ج/ احسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

3) (S) سطح الكرة التي مركزها D ومماس للمستوي (Q)

أ/ اكتب معادلة ديكارتيه لسطح الكرة (S)

ب/ جد الطبيعة والعناصر المميزة لتقاطع (P) و (S)

4) λ عدد حقيقي، G_λ نقطة من الفضاء حيث: $2\overrightarrow{G_\lambda A}-\overrightarrow{G_\lambda B}+e^{\lambda}\overrightarrow{G_\lambda C}=\vec{0}$ (e يرمز الى اساس اللوغاريتم النيبيري)

أ/ عيّن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$(1+e)\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\right\|$$

ب/ H مرّجح الجملة $\left\{(A,2);(B,-1)\right\}$ أكتب $\overrightarrow{CG_\lambda}$ بدلالة $\overrightarrow{CH}$

ج/ عيّن مجموعة النقط G_λ لمّا يتغير λ في المجموعة $\mathbb{R}$

د/ جد قيمة λ التي يكون من أجلها G_λ منتصف القطعة $[CH]$

بكالوريات

أجنبية وامتحانات

سابقة لثلاثي الثاني

التمرين الأول :بكالوريا فرنسا 2006

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$تعطى النقط: $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$

1) بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية

2) ليكن (d) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطي : $\begin{cases} x=-7+2t \\ y=-3t \\ z=4+t \end{cases} \quad ,\ (t\in\mathbb{R})$

أ/ بيّن أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC)

ب/أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) لتكن H النقطة المشتركة بين المستقيم (d) والمستوي (ABC)

أ/ بيّن أن H مرّجح الجملة : $\left\{(A,-2;(B,-1);(C,2)\right\}$

ب/ عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

محددًا العناصر المميزة

ج/ عيّن (Γ_2) مجموعة النقط Mمن الفضاء التي تحقق : $\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$

محددًا العناصر المميزة

د/ عيّن الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة $(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$

هـ) هل النقطة $D\left(-8;1;3\right)$ تنتمي إلى المجموعة $(\Gamma_1\cap\Gamma_2)$

التمرين الثاني :بكالوريا فرنسا 2011

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A(1,2,-1)$ ، $B(-3,2,3)$ ، $C(0,-2,-3)$ و $\mathrm{G}(2,0,-5)$

1)أ/ بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية

ب/ برهن أن الشعاع $\vec{n}\left(2,-1,1\right)$ ناظم للمستوي (ABC)

2)ليكن (P) المستوي ذا المعادلة؛ $x+y-z+2=0$ أثبت أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان

3)أ/بيّن أن مرّجح الجملة المثقلة $\left\{(A,1);(B,-1);(C,2)\right\}$ هو النقطة G

ب/ بيّن أن المستقيم (CG) عمودي على المستوي (P)

ج/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (CG)

د/ عيّن إحداثيات النقطة H تقاطع (CG) مع المستوي (P)

4) برهن أن (S) مجموعة النقط M من الفضاء؛ $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=12$

هي سطح كرة يطلب تعيين العناصر المميزة لها

5) عيّن طبيعة تقاطع المستوي (P) مع سطح الكرة (S) وأعط عناصره المميزة

التمرين الثالث: بكالوريا فرنسا 2009

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ نعتبر النقط: $A(1,-1,3)$ ، $B(0,3,1)$

$C(6,-7,-1)$ ، $D(2,1,3)$ و $E(4,-6,2)$

1) أ/ بيّن أن مرجّح الجملة؛ $\{(A,2);(B,-1);(C,1)\}$ هو النقطة E

ب/ أوجد طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء : $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=2\sqrt{21}$

2) أ/ بين أن النقط A ، B و D تُعرف مستويًا

ب/ بيّن أن المستقيم (EC) عمودي على المستوي (ABD)

ج/ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (ABD)

3) أ/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (EC)

ب/ عيّن إحداثيات النقطة F تقاطع (EC) مع المستوي (ABD)

4) بيّن أن المستوي (ABD) والمجموعة (Γ) متقاطعان، عيّن العناصر المميزة لهذا التقاطع

التمرين الرابع: بكالوريا تونس 2014

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر سطح الكرة (S) ذا المعادلة $x^2+y^2+z^2-8=0$

والمستوي (P) ذا المعادلة $x+2y+z-6=0$

1) أ/ عيّن مركز ونصف قطر سطح الكرة (S)

ب/ بيّن أنّ المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (C) ، يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

1) نعتبر النقطتين $A(2,0,2)$ و $B(2,2,0)$

أ/ تحقق أنّ A تنتمي إلى سطح الكرة (S)، ولا تنتمي إلى المستوي (P)، وأنّ B تنتمي إلى الدائرة (C)

ب/ لتكن (Q) ؛ مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $MA=MB$

بين أنّ (Q) هي المستوي ذا المعادلة $y=z$

ج/ بيّن أنّ المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) تمثيله الوسيطي: $(t\in\mathbb{R});\begin{cases}x=6-3t\\y=t\\z=t\end{cases}$

2) عيّن نقطة D من الدائرة (C) بحيث يكون المثلث ABD متقايس الأضلاع

التمرين الخامس : بكالوريا فرنسا 2014

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}$ نعتبر النقط : $A(5,-5,2)$ ، $B(-1,1,0)$ ، $C(0,1,2)$ و $D(6,6,-1)$

1) عيّن طبيعة المثلث BCD ، وأحسب مساحته

2) أ/ بيّن أنّ الشعاع $\vec{n}\left(-2,3,1\right)$ ناظمي على المستوي (BCD)

ب/ عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)

3) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) العمودي على المستوي (BCD)، والمارّ بالنقطة A

4) جدّ إحداثيات النقطة H ، تقاطع المستقيم (D) مع المستوي (BCD)

5) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

6) استنتج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية BAC

التمرين السادس : بكالوريا تونس 2013

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(2,1,0)$ ، $B(2,-1,-2)$ و $C(0,1,-2)$ والمستوي $(P): x+y-z-3=0$

1) بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية، وأنّ المستوي (ABC) هو المستوي (P)

2) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$

أ/ بيّن أنّ (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها I ونصف قطرها R

ب/ تحقق أنّ (P) و (S) يتقاطعان وفق الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC

ج/ بيّن أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) ليكن (Δ) المستقيم المار بالنقطة I والعمودي على المستوي (P)

أ/ بيّن أنّ التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو: $\begin{cases} x=2+\beta \\ y=1+\beta \\ z=-2-\beta \end{cases}, (\beta\in\mathbb{R})$

ب/عيّن إحداثيات النقطة G ؛ تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ)

ج/ بيّن أن : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ ، ماذا تستنتج بخصوص النقطة G

د/ استنتج مركز ونصف قطر الدائرة (C)

✍التمرين السابع : بكالوريا المغرب 2013

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(0,0,1)$ ، $B(1,1,1)$

و $C(2,1,2)$ وسطح الكرة (S) التي مركزها $\omega(1,-1,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{3}$

1) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) وتحقق من أنّ A تنتمي لـ (S)

2) أ/ تحقّق أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويا، يطلب إيجاد شعاعا ناظميا له

ب/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

ج/ احسب المسافة $d\left(\omega;(ABC)\right)$ ، ثم استنتج الوضعية النسبية للمستوي (ABC) وسطح الكرة (S)

3) ليكن (Δ) ،المستقيم الذي يشمل ω ، والعمودي على المستوي (ABC)

أ/ بيّن أنّ؛ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \quad ,(t\in\mathbb{R}) \\ z=-t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ)

ب/ استنتج إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) وسطح الكرة (S)

✍التمرين الثامن : بكالوريا تونس 2004

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر المستوي (P) ذا المعادلة

$$x+y-z-2=0$$

1) أ/ تحقق من أن النقطة $I(0,1,-1)$ تنتمي إلى (P)

ب/ عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) العمودي على (P) في I

ج/ تحقق من أن النقطة $\Omega(1,0,0)$ تنتمي إلى (D)

2) (C) الدائرة من (P) التي مركزها I ونصف قطرها 1 و (S) سطح الكرة التي مركزها Ω وتقطع المستوي (P) وفق الدائرة (C)

أ/ بيّن أن نصف قطر (S) هو 2

ب/ عيّن معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S)

3) m عدد حقيقي و (S_m) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ حيث

$$x^2+y^2+z^2+mx+(m+2)y-(m+2)z+2m+1=0$$

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، (S_m) سطح كرة يطلب تعيين إحداثيات مركزها I_m ونصف قطرها

ب/ بيّن أن مجموعة النقط I_m هي المستقيم (D) عندما يتغير m في $\mathbb{R}$

التمرين التاسع : بكالوريا فرنسا 2007

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(-2,8,4)$ والشعاع $\vec{u}\left(1,5,-1\right)$

1) عيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له

2) نعتبر المستويين ؛ $(P): x-y-z-7=0$ و $(Q): x-2z-11=0$

أ/ برهن أنّ (P) و (Q) متقاطعان؛ أعط تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (d')

ب/ أثبت أنّ الشعاع $\vec{v}\left(2,1,1\right)$ هو شعاع توجيه لـ (d')

ج/ برهن أنّ المستقيمين (d) و (d') ليسا من نفس المستوي

3) نعتبر النقطتين $H(-3,3,5)$ و $I(3,0,-4)$

أ/ تحقّق أنّ H تنتمي إلى (d) وأنّ I تنتمي إلى (d')

ب/ برهن أنّ المستقيم (HI) عمودي على المستقيمين (d) و (d')، ثم احسب المسافة بين (d) و (d')

ج/ عيّن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقّق: $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{HI}=126$

التمرين العاشر : بكالوريا فرنسا 2001 بتصرف

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(2,-1,0)$ ، $B(0,3,-4)$

$C(4,1,1)$ و $D\left(0,3,\frac{1}{2}\right)$

1) عيّن إحداثيات النقطة E حتى يكون $ABEC$ متوازي أضلاع

2) احسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABEC$

3) أ/ أوجد تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC) ب/ استنتج معادلة ديكارتية له

4) أ/ اوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D ويعامد المستوي (ABC)

ب/ عيّن إحداثيات النقطة I تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC)

5) أ/ احسب حجم الهرم $ABECD$ ب/ استنتج المسافة بيّن النقطة C والمستوي (DBE)

التمرين الحادي عشر : بكالوريا جزر الأنتيل 2008 بتصرف

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد صحيح، عينه مبررا إجابتك

1) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ بحيث؛ $\begin{cases}2x-6y+2z-7=0\\-x+3y-z+5=0\end{cases}$ هي

ج1/ مجموعة خالية ج2/ مستقيم ج3/ مستوي ج4/ نقطة

2) المستقيمان الممثلان وسيطيا كما يلي: $\begin{cases}x=1-t\\y=-1+t\\z=2-3t\end{cases};(t\in\mathbb{R})$ و $\begin{cases}x=2+\lambda\\y=-2-\lambda\\z=4+2\lambda\end{cases};(\lambda\in\mathbb{R})$

ج1/ متوازيان تماما ج2/ متطابقان ج3/ متقاطعان ج4/ ليسا من نفس المستوي

3) المسافة بين النقطة $A(1,-2,1)$ والمستوي (P) الذي معادلته $-x+3y-z+5=0$ هي

ج1/ $\frac{3}{11}$ ج2/ $\frac{3}{\sqrt{11}}$ ج3/ $\frac{1}{2}$ ج4/ $\frac{8}{\sqrt{11}}$

4) إحداثيات H المسقط العمودي للنقطة $B(1,6,0)$ على المستوي (P)

ج1/ $H(3,1,5)$ ج2/ $H(2,3,1)$ ج3/ $H(3,0,2)$ ج4/ $H(-2,3,-6)$

التمرين الثاني عشر : كالوريا الجزائر 1991 بتصرف

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقطة $A(1,-2,4)$

والمستوي (P) الذي معادلته $2x-3y+z+2=0$

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويعامد المستوي (P)

2) عيّن إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P)

3) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس المستوي (P)

4) عيّن إحداثيات C و D نقطتي تقاطع سطح الكرة (S) مع حامل محور الرواقم (oz)

5) أ/ عيّن إحداثيات H مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

ب/ عيّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقّق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

التمرين الثالث عشر : بكالوريا فرنسا 2008 بتصرف

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،النقط : $A(1,1,0)$ ، $B(1,2,1)$

$C(3,-1,2)$

1) تحقق أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية ثم بين أنّ المعادلة الديكارتية للمستوي

(ABC) هي؛ $2x+y-z-3=0$

2) نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين على الترتيب بالمعادلتين

$x+2y-z-4=0$ و $2x+3y-2z-5=0$

*/ بين أنّ المستويين (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم (D) تمثيله الوسيطي هو: $\begin{cases} x=-2+t \\ y=3\ ; \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=t \end{cases}$

3) ادرس تقاطع المستويات (P) ، (Q) و (ABC)

4) عيّن بعد A عن المستقيم (D) بطريقتين مختلفتين

التمرين الرابع عشر : بكالوريا أجنبية بتصرف

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(1,2,3)$ ، $B(0,1,4)$ ، $C(-1,-3,2)$

و $D(4,-2,5)$ والشعاع $\vec{n}\left(2,a,b\right)$

1) أ/ بين أن النقط A ، B و C ليست تعين مستوي

ب/ أوجد العددين a و b حتى يكون $\vec{n}$ شعاع ناظم للمستوي (ABC)

ج/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) أ/ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D وعمودي على المستوي (ABC)

ب/ عين إحداثيات النقطة E نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستوي (ABC)

3) بيّن أن E هي مركز ثقل المثلث ABC

التمرين الخامس عشر : من امتحان الثلاثي الثاني لسنوات سابقة

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(3,4,0)$ ، $B(0,5,0)$ ، $C(0,0,5)$

$D(-2,-6,5)$ و $E(-4,0,-3)$

1) أ/ بين أن النقط A ، B و C ليست في استقامية. ماذا تستنتج؟

ب/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (ABC)

ج/انطلاقا من التمثيل الوسيطي استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

2) أ/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[DE]$

ب/ تحقق أن النقطة $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q)

ج/ استنتج المسافة بيّن النقطة F والمستقيم (DE)

3) لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (DE)، λ العدد الحقيقي حيث: $\overrightarrow{DH}=\lambda\,\overrightarrow{DE}$

أ/ بيّن أن: $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{DO}\bullet\overrightarrow{DE}}{\left\|\overrightarrow{DE}\right\|^2}$

ب/ استنتج قيمة العدد λ وإحداثيات النقطة H ثم $d\left(O;(\mathrm{DE})\right)$

التمرين السادس عشر : من امتحان الثلاثي الثاني لسنوات سابقة

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$النقط: $A(1,1,0)$ ، $B(1,-2,4)$ و $C(-1,0,1)$

والمستوي (P) الذي معادلته : $2x+y-z+3=0$

1) ليكن $\vec{n}$ شعاع ناظم للمستوي (P)

أ/ هل يوجد عدد حقيقي α بحيث: $\overrightarrow{AB}=\alpha.\vec{n}$ ؟ ماذا تستنتج؟

ب/ بيّن أن التمثيل الوسيطي للمستوي (Q) الذي يمر بالنقطة A ويوازي كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}$ من الشكل

$$\begin{cases}x=1+t'\\ y=1-3t+t'\\ z=4t-t'\end{cases}$$ حيث t و t' عددين حقيقيين

ج/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (Q)، وأن المستويين (P) و (Q)متعامدان

2) بيّن أن C نقطة مشتركة للمستويين (P) و (Q) وأن الشعاع $\vec{u}\left(14;-11;17\right)$ يعامد كل من $\vec{n}$ و $\vec{n'}$ الشعاع الناظمي للمستوي (Q)

3) استنتج تمثيل وسيطي للمستقيم (D') المسقط العمودي للمستقيم (AB) على المستوي (P)

التمرين السابع عشر : بكالوريا أمريكا الشمالية 2008 بتصرف

1) نعتبر النقطتان A و D من الفضاء. ولتكن I منتصف القطعة $[AD]$

أ/ برهن أنه من أجل كل نقطة M من الفضاء فان: $\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{MA}=MI^2-IA^2$

ب/ استنتج أنّ : (E) هي مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MD}\bullet\overrightarrow{MA}=0$

2) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط: $A(3,0,0)$ ، $B(0,6,0)$

$C(0,0,4)$ و $D(-5,0,1)$

أ/ تحقق أن $\vec{n}\left(4;2;3\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ،ثم أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

ب/ اوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) ويشمل النقطة D

ج/ لتكن H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) . استنتج إحداثيات النقطة H

د/ برهن أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (E) المعرفة في الجزء (1)

التمرين الثامن عشر : بكالوريا أجنبية

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد صحيح، عينه مبررا إجابتك

1) المستقيم الذي يشمل $A(1,2,-4)$ و $B(-3,4,1)$ والمستقيم الذي تمثيله الوسيطي المعرف بـ

$$\begin{cases} x=-11-4t \\ y=8+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=11+5t \end{cases}$$

*/ متقاطعان   */ متوازيان تماما   */ متطابقان   */ ليسا من نفس المستوي

2) ليكن المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $2x+3y-z+4=0$ والمستقيم (d) المعرف بـ

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=8+t \end{cases}$$

*/ (P) و (d) متقاطعان   */(P) و (d) متوازيان تماما   */ (d) محتوى في (P)

3) المسافة بين النقطة $A(1,2,-4)$ والمستوي المعرف بالمعادلة: $2x+3y-z+4=0$

*/ $\frac{8\sqrt{14}}{7}$ */16 */ $8\sqrt{14}$ */$\frac{8}{7}$

4) لتكن النقطة $B(-3,4,1)$ وسطح الكرة (S) المعرف بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2=16$

*/ B داخل (S) */ B خارج (S) */ B نقطة من (S) */ لا أعرف

التمرين التاسع عشر : بكالوريا أجنبية

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$،نعتبر النقطتين $A(3,0,6)$ ، $B(0,0,6)$ وليكن

المستقيم (D) الذي يشمل النقطتين A و B

نعتبر المستويين (P) و (Q)المعرفين بالمعادلتين التاليتين: $2y+z-6=0$ و $y-2z+12=0$ على الترتيب

1) بين أن المستويين (P) و (Q) متعامدان

2) بين أن تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

3) بين أن المستويين (P) و (Q) يقطعان على الترتيب، المحور $\left(O,\vec{j}\right)$ في نقطتين G و H

4) اثبت ان معادلة للمستوي (π) يشمل النقطة G والشعاع $\overrightarrow{AH}$ ناظمي له هي: $x+4y+2z-12=0$

5) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (OA) ،برهن أن المستقيم (OA) والمستوي (π) يتقاطعان في نقطة I يطلب تعيين احداثياتها

6) ماذا تمثل النقطة I بالنسبه للمثلث AGH ؟ علل جوابك

تمرين شامل في رحاب الهندسة الفضائية

نعتبر في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ النقط :

$D\left(-4,2,1\right)$ ، $C\left(3,1,-2\right)$ ، $B\left(2,2,3\right)$ ، $A\left(1,0,-1\right)$

1°) بيّن ان النقط A ، B و C تعين مستو

2°) عين شعاعا ناظميا للمستوي $\left(ABC\right)$

3°) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $\left(ABC\right)$

4°) اثبت ان المثلث ABC قائم في A

5°) احسب مساحة المثلث ABC

6°) عين بعد النقطة D عن المستوي $\left(ABC\right)$ ، ثم احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

7°) عين ω مركز سطح الكرة $\left(S\right)$ الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

8°) احسب بعد النقطة ω عن المستوي $\left(ABC\right)$

9°) اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي يشمل النقطة ω ويعامد المستوي $\left(ABC\right)$

10°) عيّن طبيعة وخصائص تقاطع المستوي $\left(ABC\right)$ وسطح الكرة $\left(S\right)$

11°) ليكن $\left(P\right)$ المستوي الذي معادلته : $x+y+z-1=0$ ،بين ان المستويين $\left(P\right)$ و $\left(ABC\right)$ متعامدان

12°) اعط التمثيل الوسيطي للمستقيم $\left(\Delta'\right)$ تقاطع $\left(P\right)$ و $\left(ABC\right)$

13°)عين بعد النقطة D عن المستوي $\left(P\right)$، ثم استنتج المسافة بيّن D و $\left(\Delta'\right)$

14°) لتكن $M_{t'}$ نقطة من المستقيم $\left(\Delta'\right)$

أ) عبّر عن المسافة $DM_{t'}$ بدلالة t'

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة : $h(t') = DM_{t'}$

ج) ماذا تمثل القيمة الحدية للدالة h

15°) ادرس الوضع النسبي للمستقيمين $\left(\Delta\right)$ و $\left(\Delta'\right)$

16°) اعط المعادلة الديكارتية لـ $\left(Q\right)$ المستوي المحوري للقطعة $\left[MN\right]$

حيث : $M\left(1,0,0\right)$ و $N\left(-1,0,2\right)$

17°) عيّن تقاطع المستويات الثلاث : $\left(P\right)$ ، $\left(Q\right)$ و $\left(ABC\right)$

18°) عين احداثيات النقطتين G و G' حيث G مركز ثقل المثلث ABC

و G' مرّجح الجملة $\left\{A\left(3\right), B\left(-1\right), C\left(1\right)\right\}$

19°) عيّن في كل حالة من الحالات التالية مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

أ) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 6$

ب) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

ج) $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

د) $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right) = 0$

هـ) $\left(3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right) = 0$

و) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 30$

حلول نموذجية

لبعض بكالوريات

الجزائرية والأجنبية

لشعب مختلفة

الأستـــاذ / محـمـد حـــــاقـة

شعبة علوم تجريبية 2008

1) */ التحقق من أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية

$\overrightarrow{AB}\left(1,2,-1\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-3,-2,1\right)$ وبما أنّ ؛ $\frac{-2}{2}\neq\frac{-3}{1}$ فان $\overrightarrow{AC}\not\parallel\overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية

*/ يكفي أن نتحقّق من أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى المستوي (ABC)

$0+2-2=0 \Rightarrow A\in(ABC)$ بنفس الكيفية B و C

2) أ/ نبيّن أنّ؛ $\vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(ABC)}$ ؛ لدينا $\vec{n}_{(P)}\left(1,2,-1\right)$ و $\vec{n}_{(ABC)}\left(0,1,2\right)$ ومنه $\vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(ABC)}=0$

وعليه $\vec{n}_{(P)}\perp\vec{n}_{(ABC)}$ ومنه $(P)\perp(\mathrm{ABC})$

*/ تعيّين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع (P) و (ABC)

لدينا؛ $(\Delta):\begin{cases}x+2y-z+7=0\\y+2z-2=0\end{cases}$ ، نضع؛ $z=t$ تصبح الجملة كالتالي: $\begin{cases}x+2y-t+7=0 & (1)\\y+2t-2=0 & (2)\end{cases}$

من (2) نجد: $y=2-2t$ نعوضها في (1) نجد $x+4-4t-t+7=0$ $\Leftarrow$ $x=-11+5t$

ومنه: $(\Delta):\begin{cases}x=-11+5t\\y=2-2t\quad;(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$

ب/ حساب المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ): لدينا $\vec{u}\left(5,-2,1\right)$ هو شعاع توجيه لـ (Δ)

***/طريقة أولى:** لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من (Δ) ومنه $M(-11+5t,2-2t,\mathrm{t})$ وَ $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$ وبالتالي $\overrightarrow{AM}.\vec{u}=0$

*/ $\overrightarrow{AM}\left(-13+5t,2-2t,t-1\right)$ ومنه $5.(-13+5t)-2(2-2t)+t-1=0$ وعليه $t=\frac{7}{3}$

*/ نعوض قيمة t في مركبات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ نجد $\overrightarrow{AH}\left(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right)$

(H المسقط العمودي للنقطة A على (Δ))

ومنه $d\left(A,(\Delta)\right)=AH=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{64}{9}+\frac{16}{9}}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

*/ **طريقة ثانية** : بما أنّ $(P)\perp(\mathrm{ABC})$ فان $d\left(A,(\Delta)\right)=d\left(A,(P)\right)=\frac{8}{\sqrt{6}}=\frac{8\sqrt{6}}{6}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

ملاحظة/ هذه الطريقة لا يمكن استعمالها دوما إلا إذا كان $(P)\perp(\mathrm{ABC})$
وعند توفر هذا الشرط تصبح أسهل وأحسن من الطريقة الأولى

3)تعيين α حتى تنتمي النقطة G إلى المستقيم (Δ)

*/ إحداثيات G هي $G\left(\frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta},\frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta},\frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}\right)$ وبما أنّ $(\Delta)\subset(P)$ فإننا نعوض إحداثيات النقطة G في المعادلة الديكارتية للمستوي (P)

$$\frac{2+3\alpha-\beta}{1+\alpha+\beta}+2\frac{2\alpha-2\beta}{1+\alpha+\beta}-\frac{1+2\beta}{1+\alpha+\beta}+7=0$$ بعد التبسيط نجد $$\frac{14\alpha+8}{1+\alpha+\beta}=0$$

معناه $14\alpha+8=0$ وبالتالي: $\alpha=-\frac{2}{7}$

ملاحظة/ لعل البعض يسأل لماذا لم يسأل عن قيمة β نلاحظ في المعادلة الأخيرة لم تظهر β وهذا يعني أن أي قيمة لـ β تحقق المطلوب باستثناء القيم التي تعدم المجموع $1+\alpha+\beta$

شعبة تقني رياضي 2008

1)برهان أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا

*/ $\overrightarrow{AB}(2,0,-1)$ و $\overrightarrow{AC}(0,1,1)$ وبما أنّ ؛ $\frac{0}{2}\neq\frac{1}{-1}$ فان $\overrightarrow{AC}\nparallel\overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية فهي تُعين مستو

*/ تعيين معادلته الديكارتية: **نبحث أولا عن شعاع ناظم**

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) ومنه $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$ يكافئ $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0$

ومنه $\begin{cases}2a-c=0 & (1)\\ b+c=0 & (2)\end{cases}$ من(1) نجد $c=2a$ ومن(2) نجد $b=-c=-2a$

فنحصل على شعاع الناظم العام (بدلالة a)؛ $\vec{n}(a,-2a,2a)$ ، نأخذ $a=1$ نجد أحد الأشعة الناظمية $\vec{n}(1,-2,2)$

نكتب معادلة المستوي: $2x-y+z+d=0$ وبما أنّ $A\in(ABC)$ فان؛ $2-2+2+d=0$ أي $d=-2$

ومنه للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل $2x-y+z-2=0$

2)تبيّان أنّ (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

$\vec{n}_{(P_1)}(1,-2,2)$ و $\vec{n}_{(P_2)}(1,-3,2)$ وبما أنّ ؛ $\frac{-3}{-2}\neq\frac{1}{1}$ فان $(P_2)\nparallel(P_1)$ أي أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

3)تبيّان أنّ النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

بما أنّ $(\Delta)=(P_1)\cap(P_2)$ فانه لإثبات أن $C\in(\Delta)$ يكفي أنّ نبين أنّ $C\in(P_1)$ و $C\in(P_2)$

$1-6+6-1=0 \Rightarrow C\in(P_1)$ و $1-9+6+2=0 \Rightarrow C\in(P_2)$ ومنه $C\in(\Delta)$

4)تبيّان أنّ الشعاع $\vec{u}\left(2,0,-1\right)$ هو احد أشعة توجيه المستقيم (Δ)

نبيّن أنّ $\vec{n}_{(P_1)} \perp \vec{u}$ و $\vec{n}_{(P_2)} \perp \vec{u}$

$\vec{n}_{(P_1)}.\vec{u}=2+0-2=0 \Rightarrow \vec{n}_{(P_1)} \perp \vec{u}$ و $\vec{n}_{(P_2)}.\vec{u}=2+0-2=0 \Rightarrow \vec{n}_{(P_2)} \perp \vec{u}$

5)استنتاج أنّ التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) هو الجملة: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$

*/ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) يكافئ؛ $\overrightarrow{CM}\,//\,\vec{u}$ يكافئ وجود عدد حقيقي t يحقّق $\overrightarrow{CM}=t\vec{u}$

ومنه $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-3 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=3 \\ z=3-t \end{cases},(t\in\mathbb{R})$

6)أ/ ايجاد قيمة t حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}\left(2,0,-1\right)$ متعامدان

$M\in(\Delta)$ يكافئ $M(1+2t,3,3-t)$ ومنه $\overrightarrow{AM}\left(2t,1,1-t\right)$

$$\overrightarrow{AM}\perp\vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{u}=0 \Rightarrow 4t-1+t=0 \Rightarrow t=\frac{1}{5}$$

ب/ استنتاج المسافة بين النقطة $A(1,2,2)$ والمستقيم (Δ)

من أجل $t=\frac{1}{5}$ تصبح M المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ومنه $d\left(A,(\Delta)\right)=AM$

لدينا: $\overrightarrow{AM}\left(\frac{2}{5},1,\frac{4}{5}\right)$ ومنه $d\left(A,(\Delta)\right)=AM=\sqrt{\frac{4}{25}+1+\frac{16}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

شعبة تقني رياضي 2008

1)تبيّان أنّ G مرجح الجملة $\left\{(A,2);(B,1);(C,1);(D,2);(E,1);(F,1)\right\}$ هو منتصف $[IJ]$

*/ نبيّن أنّ: $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

$$2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JF}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JE}+\overrightarrow{JF}}_{=\vec{0}}+2\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{ID}\right)}_{=\vec{0}}+4\overrightarrow{GI}+4\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{GI}+4\overrightarrow{GJ}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$$

ومنه G منتصف $[IJ]$

2)أ/ تعيين إحداثيات النقط A ، B ، C ، D ، E ، F

$A(0,0,0)$ ، $B(r,0,0)$ ، $C(0,r,0)$ ، $D(0,0,r)$ ، $E(r,0,r)$ ، $F(0,r,r)$

ب/ تعيين مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$

لدينا:

$$2MA^2+MB^2+MC^2+2MD^2+ME^2+MF^2=10r^2$$
$$\Rightarrow 8MG^2+2GA^2+GB^2+GC^2+2GD^2+GE^2+GF^2=10r^2$$

بالحساب نجد $G\left(\frac{r}{4},\frac{r}{4},\frac{r}{2}\right)$

*/ نحسب أولا الأطوال

$$GA^2=\left(\frac{r}{4}-0\right)^2+\left(\frac{r}{4}-0\right)^2+\left(\frac{r}{2}-0\right)^2=\frac{3r^2}{8}\Rightarrow 2GA^2=\frac{3r^2}{4}$$

$$GB^2=\frac{7r^2}{8}\text{ ، } GC^2=\frac{7r^2}{8}\text{ ، } 2GD^2=\frac{3r^2}{4}\text{ ، } GE^2=\frac{7r^2}{8}\text{ ، } GF^2=\frac{7r^2}{8}$$

$$8MG^2=10r^2-(\underbrace{2GA^2+GB^2+GC^2+2GD^2+GE^2+GF^2}_{=5r^2})$$

ومنه:

$$\Rightarrow 8MG^2=5r^2\Rightarrow MG^2=\frac{5r^2}{8}\Rightarrow MG=\frac{\sqrt{10}}{4}r$$

وعليه مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها النقطة $G\left(\frac{r}{4},\frac{r}{4},\frac{r}{2}\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{10}}{4}r$

شعبة رياضيات 2008

1)كتابة المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A

لسطح الكرة معادلة من الشكل: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

لدينا: $R=CA=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(1+1)^2}=3$ ومنه $x^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$

2)أ/ كتابة معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C و يعامد المستقيم (D)

$\vec{u}\left(-1,2,2\right)$ شعاع توجيه المستقيم (D) هو شعاع ناظم للمستوي (P) وعليه تكون المعادلة على الشكل

$-x+2y+2z+d=0$ وبما أنّ $C\in(P)$ فان $-1-2+d=0\Rightarrow d=3$

ومنه $(\mathrm{P}):-x+2y+2z+3=0$

ب/ حساب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D)

*/ نبحث أولا عن إحداثيات النقطة H حيث: $(P)\cap(D)=\{H\}$

$1+\lambda+2+4\lambda-6+4\lambda+3=0 \Rightarrow 9\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0$ ومنه $H(-1,1,-3)$

وبالتالي؛ $d\left(C,(D)\right)=CH=\sqrt{(-1-1)^2+(1-0)^2+(-3+1)^2}=3$

ج/ ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S

بما أنّ: $d\left(C,(D)\right)=R=3$ فان (D) يمس سطح الكرة S في النقطة $H(-1,1,-3)$ أي

$(S)\cap(D)=\{H(-1,1,-3)\}$

شعبة تقني رياضي 2009

1)تبيّان أن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA^2-MB^2=1$ هي مستو عمودي على المستقيم (AB) نرمز له بالرمز (P) يطلب تعيين معادلة لـه

*/ $MA^2-MB^2=1 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2-(x+1)^2-(y-0)^2-(z+2)^2=1$

بعد التبسيط نجد: $2x+y+4z=0$ وهي معادلة مستوي $\vec{n}\left(2,1,4\right)$ شعاع ناظم له

و $\overrightarrow{AB}=-\vec{n}$ ومنه $(P)\perp(\mathrm{AB})$

*/ أو بطريقة أخرى (علاقة شال)

$$MA^2-MB^2=1 \Rightarrow MA^2-\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)^2=1 \Rightarrow MA^2-MA^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}+AB^2=1$$

وبما أنّ: $AB^2=21$ فان: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=10$ ، الكتابة الأخيرة تعرف مستو عمودي على المستقيم (AB)

2)لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-6=0$

برهن أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

*/ نحسب العدد k حيث: $k=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

$k=\dfrac{4+4+4+20}{4}=9>0$ ومنه (S) هي سطح كرة مركزها $\Omega(1,1,1)$ ونصف قطرها؛ $R=\sqrt{9}=3$

3) G نقطة من الفضاء معرفة بالعلاقة: $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

أ/ تعييّن إحداثيات G

*/ G مرجّح الجملة المثقلة $\{(A,1);(B,-1);(C,1)\}$ ومنه إحداثياتها تكون كما يلي: $G(1,1,-2)$

*/ $G \in (S)$ لان إحداثياتها تحقّق معادلة (S)

ب/ كتابة معادلة المستوي (Q) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة G

$\overrightarrow{\Omega G}\left(0,0,-3\right)$ هو شعاع ناظم للمستوي (Q) وعليه: $-3z + d = 0$ وبما أنّ: $G \in (Q)$ فان $d = -6$

ومنه $(Q) : z + 2 = 0$

شعبة الرياضيات 2009

1) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) ،

$\overrightarrow{AB}\left(-2,1,-3\right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB) ، ولتكن $M \in (AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{AM}$ وهذا يكافئ

وجود عدد حقيقي α يحقّق: $\overrightarrow{AM} = \alpha.\overrightarrow{AB}$ ومنه: $\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 2 - 3\alpha \end{cases} ;\alpha \in \mathbb{R}$

إثبات أن (D) و (AB) لا ينتميان إلى نفس المستوي

*/ نضع: $\vec{u}\left(3,-1,2\right)$ شعاع توجيه لـ (D)، لدينا $\frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{3}$ وعليه $(\mathrm{D}) \not\parallel (AB)$ **هذا غير كاف حذاري**

*/نبيّن أنّ الجملة $\begin{cases} 2 - 2\alpha = 2 + 3t & (1) \\ 1 + \alpha = 1 - t & (2) \\ 2 - 3\alpha = 2t & (3) \end{cases}$ **لا تقبل حل**

من (2) نجد: $\alpha = -t$ نعوض في (3) نجد: $2 + 3t = 2t \Rightarrow t = -2$ ومنه $\alpha = 2$

بالتعويض قيمتي t و α في (1) نجد : $-2 = -4$ غير محقّقة وبالتالي الجملة لا تقبل حل ومنه المستقيمان ليسا من نفس المستوي

2)أ/ بيّن أن الشعاع $\vec{n}\left(1,5,1\right)$ عمودي على المستوي (P)

نبيّن أنّ $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\vec{n} \perp \vec{u}$

$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = -2 + 5 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}.\vec{u} = 3 - 5 + 2 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ ومنه $\vec{n} \perp (P)$

ب/ كتابة معادلة للمستوي (P)

$\vec{n}\left(1,5,1\right)$ شعاع ناظم للمستوي (P) وعليه: $x + 5y + z + d = 0$ وبما أنّ $(AB) \subset (P)$ فانّ $A \in (P)$

وبالتالي: $2 + 5 + 2 + d = 0 \Rightarrow d = -9$ ونكتب؛ $x + 5y + z - 9 = 0$ معادلة للمستوي (P)

ج/ تبيّان أنّ المسافة بين نقطة M من (D) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M

$M \in (D)$ يكافئ $M(2 + 3t, 1 - t, 2t)$

$d\left(M,(D)\right)=\dfrac{\left|2+3t+5-5t+2t-9\right|}{\sqrt{1+25+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{27}}=\dfrac{2\sqrt{27}}{27}$ نتيجة ثابتة ليست بدلالة t ومنه المسافة مستقلة عن موضع M

د/ تعيين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستوي (P) مع المستوي (yoz)

$\begin{cases}x+5y+z-9=0\\x=0\end{cases}\Leftarrow\begin{cases}5y+z-9=0\\x=0\end{cases}$ نضع $y=\beta$ نجد $z=9-5\beta$

ويكون التمثيل الوسيطي كما يلي $\begin{cases}x=0\\y=\beta\quad;\beta\in\mathbb{R}\\z=9-5\beta\end{cases}$

شعبة علوم تجريبية 2010

1) أ/ تبيّان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية

*/ $\overrightarrow{AB}\left(1,0,1\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-2,1,-1\right)$ وبما أنّ ؛ $\dfrac{-1}{1}\neq\dfrac{-2}{1}$ فان $\overrightarrow{AC}\not\parallel\overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية

ب/ تبيّان أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $x+y-z-2=0$

*/ يكفي أن نتحقّق من أنّ النقط A ، B و C تنتمي إلى المستوي (ABC)

$1+1-0-2=0\Rightarrow A\in(ABC)$ بنفس الكيفية B و C

2) أ/ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

رأينا الطريقة مما سبق وعليه نكتب النتيجة مباشرة: $(D):\begin{cases}x=-t\\y=4+5t\;;(t\in\mathbb{R})\\z=3+3t\end{cases}$

ب/ التحقّق من أنّ تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D)

نبيّن أن x و y و z من التمثيل الوسيطي لـ (D) تحقق معادلة المستويين (P) و (Q)

$-t+8+10t-9-9t+1=0\Rightarrow(D)\subset(\mathrm{P})$

$-2t+4+5t-3-3t-1=0\Rightarrow(D)\subset(Q)$

الخلاصة: $(P)\cap(Q)=(D)$

3) تعيين تقاطع المستويات الثلاث (ABC) ، (P) و (Q)

$(\mathrm{ABC})\cap\underbrace{(P)\cap(Q)}_{=(D)}=(ABC)\cap(D)$ معناه تقاطع ثلاث مستويات يصبح تقاطع مستقيم مع مستو

نعوض x و y و z من التمثيل الوسيطي لـ (D) في معادلة المستوي (ABC) نجد

$-t+4+5t-3-3t-2=0 \Rightarrow t=1$ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي نجد احداثيات نقطة التقاطع

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=9 \\ z=6 \end{cases} \Rightarrow (ABC)\cap(P)\cap(Q)=\{H(-1,9,6)\}$$

شعبة تقني رياضي 2010

1)كتابة معادلة للمستوي (P_1) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}(1,0,-1)$ شعاع ناظمي له

للمستوي (P_1) معادلة من الشكل: $x-z+d=0$ وبما أنّ $A\in(P_1)$ فان $3-2+d=0 \Rightarrow d=-1$

ومنه $(P_1): x-z-1=0$

2)أ/ تبيّان أنّ $\vec{v}(1,1,1)$ شعاع ناظمي لـ (P_2) : لدينا أولا ؛ $\overrightarrow{AB}(-3,6,-3)$

نبيّن أنّ $\overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$ و $\vec{u}\perp\vec{v}$

$\overrightarrow{AB}.\vec{v}=-3+6-3=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{v}$ و $\vec{u}.\vec{v}=1+0-1=0\Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

ب/ كتابة معادلة لـ (P_2)

للمستوي (P_2) معادلة من الشكل: $x+y+z+d=0$ وبما أنّ $A\in(P_2)$ أو $B\in(P_2)$ (لان $(AB)\subset(\mathrm{P}_2)$)

فان $3-2+2+d=0 \Rightarrow d=-3$ ومنه $(P_2): x+y+z-3=0$

3)أ/ تبيّان أنّ المثلث ACD قائم في A

نبيّن أنّ: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0$ (لأننا نعلم أين المثلث قائم وعندما لا يصرح التمرين أين المثلث قائم نحسب الأطوال)

$\overrightarrow{AC}(3,3,3)$ ولحساب مركبات الشعاع $\overrightarrow{AD}$ نستعمل علاقة شال بإدخال النقطة C بمعنى $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

ومنه $\overrightarrow{AD}(0+3,-3+3,-6+3) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(3,0,-3)$

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=9+0-9=0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$ وبالتالي المثلث ACD قائم في A

*/ حساب مساحته: $AC=3\sqrt{3}$ و $AD=3\sqrt{2}$ ومنه؛ $S_{ACD}=\dfrac{AC\times AD}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}\times3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{6}\,ua$

ب/ تبيّان أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (ACD)

طريقة وملاحظة:عندما يطلب منا إثبات أن مستقيم عمودي على مستو ولا نملك المعادلة الديكارتية للمستوي فإننا نبيّن أن المستقيم يعامد على الأقل شعاعان غير متوازيان من المستوي

نبيّن أن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ حيث $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه للمستقيم (AB)

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-9+18-9=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-9+0+9=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

الخلاصة: $(AB)\perp(ACD)$

ج/ حساب حجم رباعي الوجوه $ACDB$

$v_{ACDB} = \frac{1}{3} \times S_{ACD} \times h$ حيث h ارتفاع رباعي الوجوه وفي هذه الحالة $h = AB = 3\sqrt{6}$

$$v_{ACDB} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{6} \times 3\sqrt{6} = 18\,uv$$

شعبة الرياضيات 2010

1) تبيّان أن النقط A ، B و C ليست في استقامية

*/ $\overrightarrow{AB}\left(-2,1,0\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-2,0,2\right)$ وبما أنّ ؛ $\frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-2}$ فان $\overrightarrow{AC} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية

2) ايجاد معادلة للمستوي (ABC)

*/ تعيين معادلته الديكارتية: **نبحث أولا عن شعاع ناظم**

ليكن $\vec{n}\left(a,b,c\right)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) ومنه $\overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$ و $\overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$ يكافئ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$

ومنه $\begin{cases} -2a + b = 0 & (1) \\ -2a + 2c = 0 & (2) \end{cases}$ من(1) نجد $b = 2a$ ومن (2) نجد $c = a$

فنحصل على شعاع الناظم العام (بدلالة a)؛ $\vec{n}\left(a, 2a, a\right)$، نأخذ $a = 1$ نجد أحد الأشعة الناظمية $\vec{n}\left(1,2,1\right)$

*/ نكتب معادلة المستوي: $x + 2y + z + d = 0$ وبما أنّ $A \in (ABC)$ فان؛ $2 + 0 + 0 + d = 0$ أي $d = -2$

ومنه للمستوي (ABC) معادلة ديكارتية من الشكل $x + 2y + z - 2 = 0$

3) ايجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (BC)

$\overrightarrow{BC}\left(0,-1,2\right)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (BC) ، ولتكن $M \in (BC)$ يكافئ $\overrightarrow{BC} \,/\!/\, \overrightarrow{BM}$ وهذا يكافئ وجود عدد حقيقي α يحقّق: $\overrightarrow{BM} = \alpha.\overrightarrow{BC}$ ومنه: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \alpha \\ z = 2\alpha \end{cases} \quad ;\alpha \in \mathbb{R}$

4) (P) المستوي الذي معادلته: $2x + 2y + z - 2 = 0$

أ/ تبيّان أن : (P) و (ABC) متقاطعان ؛ **(يكفي أن تبين أنهما غير متوازيان)**

$\vec{n}_{(P)}\left(2,2,1\right)$ و $\vec{n}_{(ABC)}\left(1,2,1\right)$ وبما أنّ ؛ $\frac{2}{2} \neq \frac{1}{2}$ فان $(\mathrm{ABC}) \not\parallel (P)$ أي أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

ب/ تبيّان أن : (P) يشمل B و C : نبين أنّ إحداثيات B و C تحقّق معادلة المستوي (P)

*/الاستنتاج: $(BC) \subset (P)$ و $(BC) \subset (\mathrm{ABC})$ وعليه $(ABC) \cap (P) = (BC)$

5)تعيين (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MH}$ حيث H مركز ثقل المثلث ABC

(لان المرجح يصبح مركز ثقل في حالة المعاملات متساوية)

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ نلاحظ أن جمع المعاملات معدوم وبالتالي العبارة تكتب بشكل أخر مستقلة عن M

نستخدم علاقة شال فقط

$$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{HA}$$

ومنه

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|\Rightarrow\left\|3\overrightarrow{MH}\right\|=\left\|3\overrightarrow{HA}\right\|$$

$$\Rightarrow 3MH=3HA\Rightarrow MH=HA$$

لدينا: $H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ومنه وبالتالي: $HA=\sqrt{\frac{16}{3}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$ ومنه: $MH=\frac{\sqrt{21}}{3}$

ومنه مجموعة النقط M هي سطح كرة مركزها النقطة $H\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ ونصف قطرها $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$

شعبة علوم تجريبية 2011

1)أ/ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة B و $\vec{u}\left(1,-4,-1\right)$ شعاع توجيه له

رأينا الطريقة سابقا وعليه نكتب مباشرة: $(\Delta):\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=7-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$

ب/ التحقق من أن النقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ)

$$\begin{cases}3=2+t\\-3=1-4t\\6=7-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}\Rightarrow C\in(\Delta)$$

ج/ تبيّان أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان : $\overrightarrow{AB}\left(2,0,2\right)$ و $\overrightarrow{BC}\left(1,-4,-1\right)$ نبيّن أنّ: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2+0-2=0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$

د/ استنتاج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

بما أنّ $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$ فان $\overrightarrow{AB}\perp(\Delta)$ ومنه B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ) ويصبح لدينا

$$d\left(A,(\Delta)\right) = AB = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

2) أ/ كتابة عبارة $h(t)$ بدلالة t

$$h(t) = AM = \sqrt{(2+t-0)^2 + (1-4t-1)^2 + (7-t-5)^2}$$
$$= \sqrt{(2+t)^2 + (-4t)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{18t^2+8}$$

ومنه $h(t) = \sqrt{18t^2+8}$

ب/ تبيّان أنه من أجل كل عدد حقيقي t ؛ $h'(t) = \dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$ **للتذكير؛** $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

$$h'(t) = \frac{36t}{2\sqrt{18t^2+8}} = \frac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$$

ج/ استنتاج قيمة العدد الحقيقي t التي تكون من أجلها المسافة AM أصغر ما يمكن

نحل معادلة $h'(t) = 0$ يكافئ $\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}} = 0 \Rightarrow 18t = 0 \Rightarrow t = 0$

*/ إشارة المشتقة من إشارة البسط ومنه:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$		$\searrow$	$h(0)$	$\nearrow$	

تكون AM أصغر ما يمكن معناه أصغر قيمة تأخذها الدالة h

لان $h(t) = AM$ ومنه لما $t = 0$ تبلغ h القيمة الحدية الصغرى

د/ $h(0) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} = d\left(A,(\Delta)\right)$

شعبة الرياضيات 2011

1) أ/ أثبت أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا

*/ $\overrightarrow{AB}\left(0,1,2\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-2,1,-1\right)$ وبما أنّ ؛ $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{2}$ فان $\overrightarrow{AC} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية فهي تُعيّن مستويا

ب/ تبيّان أنّ الشعاع $\vec{n}\left(3,4,-2\right)$ عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ، ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=-6+4+2=0 \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\vec{n}$ و $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0+4-4=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\vec{n}$

$\vec{n}\left(3,4,-2\right)$ شعاع ناظم للمستوي (ABC) ومنه: $3x+4y-2z+d=0$ نعوض احداثيات A أو B أو C

نجد قيمة $d=1$ وعليه؛ $(ABC):3x+4y-2z+1=0$

2) أ/ بيّن أنّ المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان : $\vec{n}_{(P_1)}\left(3,4,-2\right)$ و $\vec{n}_{(P_2)}\left(2,-2,-1\right)$

و $\vec{n}_{(P_1)}.\vec{n}_{(P_2)}=6-8+2=0 \Rightarrow \vec{n}_{(P_1)}\perp\vec{n}_{(P_2)}$ ومنه $(P_1)\perp(P_2)$

ب/ تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P_1) و (P_2)

نُشكل الجملة: $\begin{cases}3x+4y-2z+1=0\\2x-2y-z-1=0\end{cases}$ ونضع $z=t$ تصبح الجملة كالتالي: $\begin{cases}3x+4y-2t+1=0 & (1)\\2x-2y-t-1=0 & (2)\end{cases}$

من (2) نجد (3) $y=\dfrac{2x-t-1}{2}$ نعوض في (1) نجد: $3x+4x-2t-2-2t+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{7}t$

نعوض في (3) نجد $y=\dfrac{-5}{14}+\dfrac{1}{14}t$ ومنه للمستقيم (Δ) تمثيل وسيطي كما يلي:

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{7}t\\y=\dfrac{-5}{14}+\dfrac{1}{14}t \quad ,(t\in\mathbb{R})\\z=t\end{cases}$$

ج/ التحقّق من أنّ النقطة $O(0,0,0)$ لا تنتمي إلى (Δ)

$$\begin{cases}0=\dfrac{1}{7}+\dfrac{4}{7}t\\0=\dfrac{-5}{14}+\dfrac{1}{14}t\\0=t\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=\dfrac{-1}{4}\\t=5\\t=0\end{cases}$$

قيم مختلفة لـ t معناه $O\notin(\Delta)$

د/ حساب المسافتين $d(O,(P_1))$ و $d(O,(P_2))$

$d(O,(P_1))=\dfrac{|1|}{\sqrt{9+16+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{29}}=\dfrac{\sqrt{29}}{29}$ و $d(O,(P_2))=\dfrac{|-1|}{\sqrt{4+4+1}}=\dfrac{1}{3}$

*/ واستنتج المسافة $d(O,(\Delta))$

بما أن $(P_1) \perp (P_2)$ فان $d^2(O,(\Delta)) = d^2(O,(P_1)) + d^2(O,(P_2))$ (حسب نظرية فيتاغورث)

$d^2(O,(\Delta)) = \frac{1}{29} + \frac{1}{9} = \frac{38}{261}$ ومنه $d(O,(\Delta)) = \sqrt{\frac{38}{261}}$

شعبة تقني رياضي 2012

1) التحقّق من أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P)

$$-4k - 3\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}k\right) + 1 = -4k - 3 + 4k + 1 = 0 \Rightarrow (D) \subset (P)$$

2) أ/ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(1,1,0)$ و $\vec{u}\left(4,1,3\right)$ شعاع توجيه له

التمثيل الوسيطي لـ (Δ) يكون كما يلي: $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 1 + t \quad ,(t \in \mathbb{R}) \\ z = 3t \end{cases}$

ب/ عيّن إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين (D) و (Δ)

نحل الجملة $\begin{cases} 1 + 4t = k & (1) \\ 1 + t = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}k & (2) \\ 3t = \frac{-3}{4} + \frac{3}{4}k & (3) \end{cases}$

نعوض k بـ $1 + 4t$ في (2) نجد $1 + t = \frac{-3 - 16t}{3} \Rightarrow t = \frac{-6}{19}$

ولدينا $k = 1 + 4t = 1 - \frac{24}{19} = \frac{-5}{19}$ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) أو قيمة k في التمثيل الوسيطي لـ (D) نجد احداثيات H نقطة التقاطع: $(\Delta) \cap (\mathrm{D}) = \left\{ H\left(\frac{-5}{19}, \frac{13}{19}, \frac{-18}{19}\right) \right\}$

3) تبيّان أنّ: $3x - 4z - 3 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ)

$$3k - 4\left(\frac{-3}{4} + \frac{3}{4}k\right) - 3 = 3k + 3 - 3k - 3 = 0 \Rightarrow (D) \subset (Q)$$

$$3(1 + 4t) - 12t - 3 = 3 + 12t - 12t - 3 = 0 \Rightarrow (\Delta) \subset (Q)$$

4) $M(x,y,z)$ نقطة من الفضاء

أ/ حساب المسافة بين النقطة M وكل من (P) و (Q)

$$d\left(M,(P)\right)=\frac{\left|-4x-3y+1\right|}{\sqrt{25}}=\frac{\left|-4x-3y+1\right|}{5} \text{ و } d\left(M,(\text{Q})\right)=\frac{\left|3x-4z-3\right|}{\sqrt{25}}=\frac{\left|3x-4z-3\right|}{5}$$

ب/

$$\begin{aligned} d\left(M,(P)\right)=d\left(M,(\text{Q})\right) &\Rightarrow \frac{\left|-4x-3y+1\right|}{5}=\frac{\left|3x-4z-3\right|}{5} \\ &\Rightarrow \left|-4x-3y+1\right|=\left|3x-4z-3\right| \\ &\Rightarrow \begin{cases} -4x-3y+1=3x-4z-3 \\ -4x-3y+1=-(3x-4z-3) \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه إما $(P_1):\ 7x+3y-4z-4=0$ أو $(P_2):\ x+3y+4z+2=0$

وبالتالي مج النقط M هي اتحاد مستويين ولدينا أيضا؛ $\vec{n}_{(P_1)}\left(7,3,-4\right)$ و $\vec{n}_{(P_2)}\left(1,3,4\right)$

و $\vec{n}_{(P_1)} \perp \vec{n}_{(P_2)} \Leftarrow \vec{n}_{(P_1)}.\vec{n}_{(P_2)}=7+9-16=0$ ومنه $(P_1)\perp(P_2)$

5)تعيّن مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي إحداثياتها حلول للجملة الآتية:

$$\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$$

بما أنّ $(D)\subset(P)$ و $(D)\subset(\text{Q})$ فان $(P)\cap(Q)=(D)$ ندرس الآن تقاطع (D) مع (P_2)

$$k+1-4k-3+3k+2=0 \Rightarrow (D)\subset(P_2)$$

ومنه؛ $(P)\cap(Q)\cap(P_2)=(D)$

شعبة الرياضيات 2012

1)تبيّان أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامية

*/ $\overrightarrow{AB}\left(-3,4,0\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-1,2,2\right)$ وبما أنّ ؛ $\frac{2}{4}\neq\frac{-1}{-3}$ فان $\overrightarrow{AC} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية

*/ إثبات أنّ الشعاع $\vec{n}\left(4,3,-1\right)$ عمودي على كل من الشعاعين: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

*/ $\vec{n}\left(4,3,-1\right).\overrightarrow{AB}\left(-3,4,0\right)=-12+12+0=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$$\vec{n}\left(4,3,-1\right).\overrightarrow{AC}\left(-1,2,2\right)=-4+6-2=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$$

2)كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B و C

$\vec{n}\left(4,3,-1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ومنه؛ $4x+3y-z+d=0$ وبما أنّ $A\in(P)$ فان: $d=-12$

وعليه: $(P): 4x+3y-z-12=0$

3)أ/ تبيّان أنّ: $6x-8y+7=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P') مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:

$AM = BM$

$$\begin{aligned} AM = BM &\Rightarrow AM^2 = BM^2 \\ &\Rightarrow (x-3)^2+y^2+z^2 = x^2+(y-4)^2+z^2 \\ &\Rightarrow 6x-8y+7=0 \quad (P') \end{aligned}$$

ب/تبيّان أنّ : $2x-4y-4z+3=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P'') مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء

حيث: $AM = CM$

$$\begin{aligned} AM = BM &\Rightarrow AM^2 = BM^2 \\ &\Rightarrow (x-3)^2+y^2+z^2 = (x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 \\ &\Rightarrow 2x-4y-4z+3=0 \quad (P'') \end{aligned}$$

ج/ تبيّان أنّ (P') و (P'') يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

*/ $\vec{n}_{(P')}\left(6,-8,0\right)$ و $\vec{n}_{(P'')}\left(2,-4,-4\right)$ وبما أنّ ؛ $\dfrac{-4}{-8} \neq \dfrac{2}{6}$ فان $\vec{n}_{(P'')} \not\parallel \vec{n}_{(P')}$

وبالتالي (P') و (P'') متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

*/ تعيين تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} 6x-8y+7=0 \\ 2x-4y-4z+3=0 \end{cases}$ نضع $y=t$

تصبح الجملة: $\begin{cases} 6x-8t+7=0 & (1) \\ 2x-4t-4z+3=0 & (2) \end{cases}$ من (1) نجد $x = \dfrac{-7}{6}+\dfrac{4}{3}t$ نعوض في (2) نجد

$$\frac{-7}{3}+\frac{8}{3}t-4t-4z+3=0 \Rightarrow z=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t$$

التمثيل الوسيطي لـ (Δ) هو: $\quad ,(t\in\mathbb{R})$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-7}{6}+\dfrac{4}{3}t \\ y=t \\ z=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{3}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-7}{6}+4t \\ y=3t \\ z=\dfrac{1}{6}-t \end{cases}$$

4)حساب إحداثيات النقطة ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

لدينا $(P)\cap(P')\cap(P'')=\{\omega\}$ وبما أن $(P')\cap(P'')=(\Delta)$ فان $(\Delta)\cap(P)=\{\omega\}$

$-\frac{14}{3}+16t+9t-\frac{1}{6}+t-12=0 \Rightarrow t=\frac{101}{156}$ ومنه

$$(P)\cap(P')\cap(P'')=\left\{\omega\left(\frac{37}{26},\frac{101}{56},\frac{-25}{52}\right)\right\}$$

شعبة علوم تجريبية 2013

1) أ/ حساب إحداثيات النقطة I : $I\left(\frac{3}{2},0,1\right)$

ب/ تبيّان أنّ: $2x+4y-8z+5=0$ معادلة ديكارتية لـ(P) ؛المستوي المحوري لـ$[AB]$

$\overrightarrow{AB}(-1,-2,4)$ هو شعاع ناظم للمستوي (P) لان $(AB)\perp(P)$ وعليه: $-x-2y+4z+d=0$

وأيضا $I\left(\frac{3}{2},0,1\right)\in(P)$ وبالتالي $d=\frac{-5}{2}$ $-\frac{3}{2}+4+d=0\Rightarrow$ نعوض قيمة d نجد

$$-2.\left(-x-2y+4z-\frac{5}{2}\right)=0\Rightarrow 2x+4y-8z+5=0$$

2)كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة C و $(-4$ $\vec{u}(1,2,-4)$ شعاع توجيه له

$$(\Delta):\begin{cases}x=\frac{-3}{2}+t\\ y=-2+2t \quad ,(\mathrm{t}\in\mathbb{R})\\ z=1-4t\end{cases}$$

3) أ/ ايجاد إحداثيات E نقطة تقاطع المستوي (P) والمستقيم (Δ)

نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي نجد $-3+2t-8+8t-8+32t+5=0\Rightarrow 42t=14\Rightarrow t=\frac{1}{3}$

$$(P)\cap(\Delta)=\left\{E\left(\frac{-7}{6},\frac{-4}{3},\frac{-1}{3}\right)\right\}$$

ب/ تبيّان أنّ (Δ) و (AB) من نفس المستوي

*/بما أنّ ؛ $\vec{u}=-\overrightarrow{AB}$ فان $\vec{u}//\overrightarrow{AB}$ وبالتالي $(\Delta)//(AB)$ ومنه (Δ) و (AB) من نفس المستوي

استنتاج أنّ المثلث IEC قائم

*/ $IE = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ و $IC = \sqrt{13}$ و $EC = \frac{\sqrt{21}}{3}$ ومنه $IE^2 + EC^2 = IC^2$ وعليه حسب نظرية فيتاغورث

المثلث IEC قائم في E

4) أ/ تبيّان أنّ المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE)

$$\overrightarrow{AB}\left(-1,-2,4\right).\overrightarrow{ID}\left(2,-3,-1\right) = -2+6-4 = 0 \Rightarrow (ID) \perp (AB)$$

$$\overrightarrow{AB}\left(-1,-2,4\right).\overrightarrow{IE}\left(\frac{-8}{3},\frac{-4}{3},\frac{-4}{3}\right) = \frac{8}{3}+\frac{8}{3}-\frac{16}{3} = 0 \Rightarrow (IE) \perp (AB)$$

ب/ حساب حجم رباعي الوجوه $DIEC$

$v_{DIEC} = \frac{1}{3} \times S_{IEC} \times h$ حيث h ارتفاع رباعي الوجوه وفي هذه الحالة $h = ID = \sqrt{14}$

$$S_{IEC} = \frac{IE \times EC}{2} = \frac{2\sqrt{14}}{3}$$

$v_{DIEC} = \frac{1}{3} \times \sqrt{14} \times \frac{2\sqrt{14}}{3} = \frac{28}{9}$ ومنه $v_{DIEC} = \frac{28}{9}\ uv$

شعبة تقني رياضي 2013

1) تبيّان أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويا؛ نرمز له بالرمز (P)

*/ $\overrightarrow{AB}\left(2,-1,3\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-1,5,3\right)$ وبما أنّ ؛ $\frac{5}{-1} \neq \frac{-1}{2}$ فان $\overrightarrow{AC} \nparallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في

استقامية

فهي تُعين مستويًا

2) تبيّان أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ ناظمي للمستوي (P)

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 4-1-3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \text{ و } \overrightarrow{AC}.\vec{n} = -2+5-3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$$

ومنه $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ايجاد معادلة ديكارتية للمستوي (P)

*/ بما أنّ : $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فان المعادلة تكتب على الشكل $2x+y-z+d=0$

وبما أنّ $A \in (P)$ فان: $d = -5$ وعليه: $(P): 2x+y-z-5=0$

3) أ/ كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D ويعامد (P)

بما أنّ: (Δ) يعامد (P) فان؛ $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ يصبح أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ) ونكتب مباشرة

$$(\Delta):\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -5 + t \\ z = -2 - t \end{cases} ,(\text{t} \in \mathbb{R})$$

ب/ تعييّن إحداثيات النقطة E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P)

E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (P) معناه: $(P) \cap (\Delta) = \{E\}$ وعليه

$2 + 4t - 5 + t + 2 + t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1$ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي نجد $E(3,-4,-3)$

4) H المسقط العمودي للنقطة D على المستقيم (AB) ، و λ العدد الحقيقي حيث: $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$

أ/ تبيّان أنّ : $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$

نذكر أولا بأن: $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2$

لدينا؛ $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ ومنه $\overrightarrow{AH}\,.\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ وعليه $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$

وحسب خاصية الجداء السلمي (الاسقاط) نصها: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$ نجد المطلوب $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$

ب/ استنتاج العدد الحقيقي λ وإحداثيات النقطة H ، ثمّ المسافة بين النقطة D والمستقيم (AB)

*/ $\overrightarrow{AD}\left(-2,-3,-1\right)$ ومنه: $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = -4 + 3 - 3 = -4$ و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2 = 14$

ومنه: $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2} = \dfrac{-4}{14} = \dfrac{-2}{7}$

*/ تعيين إحداثيات النقطة H

لدينا $\overrightarrow{AH} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ وبما أنّ $\lambda = \frac{-2}{7}$ فان $\overrightarrow{AH} = \frac{-2}{7}.\overrightarrow{AB}$ أي $\begin{pmatrix} x_H - 3 \\ y_H + 2 \\ z_H + 1 \end{pmatrix} = \frac{-2}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

وبالتالي: $x_H = \frac{17}{7} \Leftarrow x_H - 3 = \frac{-4}{7}$ و $y_H = \frac{-12}{7} \Leftarrow y_H + 2 = \frac{2}{7}$ و $z_H + 1 = \frac{-6}{7} \Rightarrow z_H = \frac{-13}{7}$

ومنه $H\left(\frac{17}{7}, \frac{-12}{7}, \frac{-13}{7}\right)$

*/ $d\big(D;(AB)\big) = DH = \sqrt{\left(\frac{17}{7} - 1\right)^2 + \left(\frac{-12}{7} + 5\right)^2 + \left(\frac{-13}{7} + 2\right)^2} = \frac{3\sqrt{70}}{7}$

شعبة تقني رياضي 2014

1)أ/ حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}(1,4,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,4,3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -1 + 16 + 3 = 18$

*/ استنتاج القيمة المدورة إلى الوحدة، بالدرجات للزاوية BAC

لدينا: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

و $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{18}$ ، $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = AC = \sqrt{26}$ وبالتالي: $\cos A = \frac{18}{\sqrt{26}.\sqrt{18}} \approx 0,83$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد: $A = BAC \approx 33,6$ ومنه $A \approx 34^0$ بالتدوير للوحدة

ب/ تبيّان أنّ النقط A ، B و C تعين مستويا

*/ $\overrightarrow{AB}(1,4,1)$ و $\overrightarrow{AC}(-1,4,3)$ وبما أنّ ؛ $\frac{4}{4} \neq \frac{1}{-1}$ فان $\overrightarrow{AC} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية فهي تُعين مستويًا

2)أ/ تبيّان أن الشعاع $\vec{n}(2,-1,2)$ ناظمي للمستوي (ABC)

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n}$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -2 - 4 + 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$

ومنه $\vec{n}(2,-1,2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ب/ كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

*/ بما أنّ : $\vec{n}\left(2,-1,2\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) فان المعادلة تكتب على الشكل

$$2x-y+2z+d=0$$

وبما أنّ $A\in(ABC)$ فان: $d=-3$ وعليه: $(\mathrm{ABC}):2x-y+2z-3=0$

3) ليكن (S) سطح الكرة الذي معادلته: $x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0$

*/ حساب R وتعيين إحداثيات Ω

نستعمل طريقة العدد k حيث: $k=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

$k=\dfrac{16+36+4-20}{4}=9$ ومنه $R=\sqrt{9}=3$ و $\Omega\left(\dfrac{-a}{2},\dfrac{-b}{2},\dfrac{-c}{2}\right)\Leftarrow\Omega(2,-3,1)$

4) كتابة معادلة ديكارتية لكل من المستويين (P_1) و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) والموازيين للمستوي (ABC)

بما أن $(P_1)//(P_2)//(ABC)$ فان لديهم نفس الشعاع الناظم $\vec{n}\left(2,-1,2\right)$ ونكتب:

$(P_1),(P_2):2x-y+2z+d=0$ بما أن (P_1) و (P_2) مماسي سطح الكرة (S) فان

$d\left(\Omega,(P_1)\right)=d\left(\Omega,(P_2)\right)=3$ أي $d\left(\Omega,(P_1)\right)=\dfrac{\left|4+3+2+d\right|}{\sqrt{9}}=\dfrac{\left|9+d\right|}{3}=3$ وعليه

$\left|9+d\right|=9\Rightarrow\begin{cases}9+d=9\\9+d=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d=0\\d=-18\end{cases}$ ومنه معادلة المستويين هي:

$$\begin{cases}(P_1):2x-y+2z=0\\(P_2):2x-y+2z-18=0\end{cases}$$

شعبة علوم تجريبية 2015

1) التحقّق من أنّ النقط A ، B و C تُعين مستويًا وأنّ $x-y+z-1=0$ معادلة ديكارتية له

*/ $\overrightarrow{AB}\left(-1,1,2\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(1,2,1\right)$ وبما أنّ $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-1}{1}$ ؛ فان $\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية فهي تُعين مستويًا

*/ $2-1+0-1=0\Rightarrow A\in(ABC)$ بنفس الكيفية نبيّن أنّ؛ $B\in(ABC)$ و $C\in(ABC)$

2) تبيان أنّ المثلث ABC متقايس الأضلاع

بما أنّ ؛ $AB=\sqrt{6}$ و $AC=\sqrt{6}$ و $BC=\sqrt{6}$ فان المثلث ABC متقايس الأضلاع

ملاحظة: المثلث المتقايس الأضلاع زواياه الثلاث متساوية وتساوي $\dfrac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

*/ حساب مساحته: $S_{ABC}=\frac{AB\times AC\times\sin A}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ u\,a$

3) تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) العمودي على المستوي (ABC) والذي يشمل النقطة D

بما أنّ: (Δ) يعامد (ABC) فان؛ $\vec{n}\left(1,-1,1\right)$ يصبح أحد أشعة توجيه المستقيم (Δ) ونكتب مباشرة

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+t\\ y=1-t\\ z=4+t\end{cases},(\mathrm{t}\in\mathbb{R})$$

4) أ/ تعيين إحداثيات النقطة E ثمّ احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)

E ؛ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) معناه: $(P)\cap(\Delta)=\left\{E\right\}$ وعليه

$1+t-1+t+4+t-1=0\Rightarrow t=-1$ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي نجد $E(0,2,3)$

ب/ تعيين مركزي سطحي الكرتين اللذين يمسان (ABC) في النقطة E ونصف قطر كل منهما $\sqrt{3}$

بما أنّ؛ $DE=\sqrt{3}$ فان $D(1,1,4)$ أحد مركزي سطحي الكرتين وليكن D' مركز سطح الكرة الثانية

E منتصف $[DD']$ أي D' نظيرة D بالنسبة لـ E سوف أشرح كيفية إيجاد $x_{D'}$ أما $y_{D'}$ و $z_{D'}$ بنفس الكيفية

*/ $x_E=\frac{x_D+x_{D'}}{2}\Rightarrow x_{D'}=2x_E-x_D=2\times0-1=-1$ وأيضا $y_{D'}=3$ و $z_{D'}=2$

ومنه $D'(-1,3,2)$

5) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

$v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times h$ حيث h ارتفاع رباعي الوجوه وفي هذه الحالة $h=DE=\sqrt{3}$

$v_{ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}uv$ ومنه $v_{abcd}=\frac{3}{2}\ uv$

شعبة علوم تجريبية 2015

1) النقط A ، B و C ليست في استقامية (**صحيح**)

التبرير

*/ $\overrightarrow{AB}\left(-2,0,-4\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(1,-3,-4\right)$ وبما أنّ ؛ $\frac{0}{-3} \neq \frac{-2}{1}$ فان $\overrightarrow{AC} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية

2) معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي؛ $2x + 2y - z - 11 = 0$ **(صحيح)**

التبرير

$4 + 8 - 1 - 11 = 0 \Rightarrow A \in (ABC)$ و $0 + 8 + 3 - 11 = 0 \Rightarrow B \in (ABC)$

$6 + 2 + 3 - 11 = 0 \Rightarrow C \in (ABC)$

3) النقطة $E\left(3,2,-1\right)$ المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) **(خطأ)**

التبرير

$d\left(\mathrm{D},(ABC)\right) = \frac{\left|2+0+2-11\right|}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$ و $DE = \sqrt{4+4+1} = 3$ ومنه $d\left(E,(ABC)\right) \neq DE$

4) المستقيمان (AB) و (CD) من نفس المستوي **(خطأ)**

التبرير

$d\left(\mathrm{D},(ABC)\right) = \frac{7}{3} \neq 0 \Rightarrow D \notin (ABC)$ ومنه المستقيمان (AB) و (CD) ليسا من نفس المستوي

5) المستقيم (CD) له تمثيل وسيطي الجملة التالية: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$ حيث t عدد حقيقي **(صحيح)**

التبرير

$$\begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \Rightarrow C \in (CD) \\ t = 2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 3 = -1 + 2t \\ 1 = -1 + t \\ -3 = -1 - t \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 1 = -1 + 2t \\ 0 = -1 + t \\ -2 = -1 - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \Rightarrow D \in (CD) \\ t = 1 \end{cases}$$

6) يوجد عددان حقيقيان α و β حيث النقطة $I\left(\frac{3}{5},4,-\frac{9}{5}\right)$ مرجح الجملة $\left\{(A,\alpha);(B,\beta)\right\}$ **(صحيح)**

التبرير

$\overrightarrow{AI}\left(\frac{-7}{5},0,\frac{-14}{5}\right)$ و $\overrightarrow{BI}\left(\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)$ نلاحظ أنّ : $\overrightarrow{AI} = \frac{-7}{3}\overrightarrow{BI}$ ومنه الشعاعان متوازيان وهذا يعني أن النقط في استقامية وبالتالي يوجد عددان حقيقيان α و β بحيث I مرجح الجملة $\left\{(A,\alpha);(B,\beta)\right\}$

*/ أو $7\overrightarrow{BI} + 3\overrightarrow{AI} = \vec{0}$

شعبة تقني رياضي 2015

1) أ/ تبيّان أنّ النقط A ، B و C تُعيّن مستويًا

*/ $\overrightarrow{AB}\left(1,-2,0\right)$ و $\overrightarrow{AC}\left(-3,1,5\right)$ وبما أنّ $\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{1}$ ؛ فان $\overrightarrow{AC} \not\parallel \overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط ليست في استقامية

فهي تُعين مستويًا

ب/ التحقّق من أنّ الشعاع $\vec{n}\left(2,1,1\right)$ ناظمي للمستوي (ABC)

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 2-2+0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \text{ و } \overrightarrow{AC}.\vec{n} = -6+1+5 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \vec{n}$$

ومنه $\vec{n}\left(2,1,-1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

*/ بما أنّ : $\vec{n}\left(2,1,1\right)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) فان المعادلة تكتب على الشكل $2x+y+z+d=0$

وبما أنّ $A \in (P)$ فان: $d=-6$ وعليه: $(ABC): 2x+y+z-6=0$

2) أ/ تعييّن معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(P) المعرف بالتمثيل الوسيطي:
$$\begin{cases} x = 2+\beta & (1) \\ y = -1-3\alpha-\beta & (2) \\ z = -\alpha & (3) \end{cases}$$

نعوض (3) في (2) نجد $(4)\quad y=-1+3z-\beta$ وبجمع طرف لطرف(4) مع (1) نجد

$x+y=1+3z$ ومنه للمستوي (P) معادلة ديكارتية من الشكل: $x+y-3z-1=0$

حيث $\vec{n'}\left(1,1,-3\right)$ شعاع ناظم له

*/ تبيّان أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان

$$\vec{n}\left(2,1,1\right).\vec{n'}\left(1,1,-3\right) = 2+1-3 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n'}$$ ومنه $(ABC) \perp (\mathrm{P})$

ب/ تبيّان أنّ تقاطع (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) ذا التمثيل الوسيطي: $(t \in \mathbb{R})$;
$$\begin{cases} x = 5+4t \\ y = -4-7t \\ z = -t \end{cases}$$

*/ $5+4t-4-7t+3t-1=0 \Rightarrow (\Delta) \subset (P)$ و

$$10+8t-4-7t-t-6=0 \Rightarrow (\Delta) \subset (ABC)$$

ومنه $(ABC)\cap(P)=(\Delta)$

3)أ/ تعيين إحداثيات النقطة H مرجّح الجملة $\left\{(A,1);(B,1);(C,-1)\right\}$

$x_H=\dfrac{1+2+2}{1}=5$ ، $y_H=\dfrac{2+0-3}{1}=-1$ ، $z_H=\dfrac{2+2-7}{1}=-3$ ومنه $H(5,-1,-3)$

$H\in(ABC)$ لأنها مرجّح الجملة $\left\{(A,1);(B,1);(C,-1)\right\}$

ب/ حساب المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ) $\quad d\left(H,(\Delta)\right)=d\left(H,(P)\right)=\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$

4)لتكن (P') مجموعة النقط M من الفضاء بحيث؛ $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\vec{u}=0$ ($\vec{u}$ هو شعاع توجيه (Δ))

أ/ تبيّان أنّ المجموعة (P') هي مستو يطلب تعيين عناصره المميزة

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right).\vec{u}=0\Rightarrow\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0$ لان $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MH}$

ومنه مجموعة النقط (P') هي مستو يشمل النقطة H و $\vec{u}\left(4,-7,-1\right)$ شعاع ناظم له

*/ معادلة المستوي (P') هي: $4x-7y-z+d=0$ وكون $H\in(P')$ فان $d=-30$ وبالتالي

$(P'):4x-7y-z-30=0$

ب/ تبيّان أنّ المستويات الثلاثة (P)،(P') و (ABC) تتقاطع في نقطة واحدة E

لدينا: $\underbrace{(ABC)\cap(P)}_{=(\Delta)}\cap(P')=(\Delta)\cap(P')$ يصبح تقاطع ثلاث مستويات تقاطع مستقيم مع مستوي

$$20+16t+28+49t+t-30=0\Rightarrow t=\frac{-3}{11}$$

*/ تعيّن إحداثيات E : نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد $E\left(\dfrac{43}{11},\dfrac{-23}{11},\dfrac{3}{11}\right)$ ومنه

$$(ABC)\cap(P)\cap(P')=\left\{E\left(\frac{43}{11},\frac{-23}{11},\frac{3}{11}\right)\right\}$$

ج/ حساب بطريقة ثانية المسافة بين النقطة H والمستقيم (Δ): $\quad d\left(H,(\Delta)\right)=HE=\dfrac{12\sqrt{11}}{11}$

حل نموذجي للتمرين الثاني عشر : بكالوريا الجزائر 1991 بتصرف

1)كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A ويعامد المستوي (P)

$(\Delta)\perp(P)$ معناه $\vec{n}(2,-3,1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

لتكن $M(x,y,z)\in(\Delta)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\,//\,\vec{n}$ ومنه يوجد عدد حقيقي t يحقق $\overrightarrow{AM}=t\,\vec{n}$ وعليه

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-4 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\Delta):\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \ ; t \in \mathbb{R} \\ z = 4+t \end{cases}$$

2)تعيّين إحداثيات النقطة B تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P)

نعوض x ، y و z من التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي (P)

نجد $2(1+2t)-3(-2-3t)+4+t+2=0$ ومنه $t=-1$ نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطي: $B(-1,1,3)$

3) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتمس المستوي (P)

ليكن R نصف قطر سطح الكرة (S) ومنه: $R = d(A,(P)) = \dfrac{|2+6+4+2|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$ ومنه

$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2 = \left(\sqrt{14}\right)^2$ وعليه $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-8z+7=0$

4)تعيّين إحداثيات C و D نقطتي تقاطع سطح الكرة (S) مع حامل محور الرواقم (oz) حامل محور الرواقم معرف

كما يلي: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ ومنه نعوض في معادلة سطح الكرة (S) ، x و y بـ0 نجد $z^2-8z+7=0$ نحسب

المميز Δ و $\Delta = 36$ ومنه $z_1 = 7$ و $z_2 = 1$ وعليه $(S)\cap(oz) = \{D(0,0,1);C(0,0,7)\}$

5)أ/ تعييّن إحداثيات H مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$

لدينا $x_H = \dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4} = \dfrac{1-1+0+0}{4} = 0$ بنفس الطريقة نجد $y_H = \dfrac{-1}{4}$ و $z_H = \dfrac{15}{4}$

ومنه $H\left(0,\dfrac{-1}{4},\dfrac{15}{4}\right)$

ب/ تعييّن مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقّق: $\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right).\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

لدينا: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MH}$ و $\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD}$ ومنه

$$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)\left(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\right)=0 \Rightarrow 4\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CD}=0 \Rightarrow \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{CD}=0$$

ومنه مجموعة النقط M عبارة عن مستوي يشمل النقطة H و $\overrightarrow{CD}$ شعاع ناظم له

حل نموذجي للتمرين الثامن عشر : بكالوريا أجنبية

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

كل سؤال يتضمن أربع اختيارات من بينها اختيار واحد صحيح، عينه مبررا إجابتك

7) المستقيم الذي يشمل $A(1,2,-4)$ و $B(-3,4,1)$ والمستقيم الذي تمثيله الوسيطي المعرف بـ

$$(\Delta):\begin{cases} x=-11-4t \\ y=8+2t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=11+5t \end{cases}$$

المستقيمين (AB) **و** (Δ) **منطبقين لأن:** $\vec{u}\,//\,\overrightarrow{AB}$ **و** $A\in(\Delta)$

2) ليكن المستوي (P) المعرف بالمعادلة: $2x+3y-z+4=0$ والمستقيم (d) المعرف بـ

$$\begin{cases} x=t \\ y=t \quad ,t\in\mathbb{R} \\ z=8+t \end{cases}$$

(P) و (d) متقاطعان في نقطة لأن $\vec{n}_{(P)} \not\perp \vec{u}_{(d)}$

3) المسافة بين النقطة $A(1,2,-4)$ والمستوي المعرف بالمعادلة: $2x+3y-z+4=0$ هي $\dfrac{8\sqrt{14}}{7}$

لأن: $$d(A,(P))=\frac{\left|2\times1+2\times3+4+4\right|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{16}{\sqrt{14}}=\frac{16\sqrt{14}}{14}=\frac{8\sqrt{14}}{7}$$

4) لتكن النقطة $B(-3,4,1)$ وسطح الكرة (S) المعرف بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2=16$

مركز سطح الكرة (S) هو المبدأ ونصف قطرها $R=4$ ومنه $OB=\sqrt{(-3)^2+4^2+1}=\sqrt{26}>4$

ومنه B خارج (S)

وفي الأخير أسأل الله انّ يوفقني واياكم لما فيه الخير والصلاح آمين ، آمين ، آمين

أستــــــاذكم King يتمنى لكم النجاح والمراتب العليا