مسألة شاملة في المتتاليات العددية

الجزء الأول : لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \quad (\alpha \neq 1) \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \neq 1$.

2) حلى في $\mathbb{R}$ المعادلة ذات المجهول x التالية : $x^2 - 7x + 6 = 0$

3) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

الجزء الثاني : نفرض في كل ما يلي : $u_0 = 8$.

1) تحقق أن $u_n = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$، ثم برهن بالتراجع أن $u_n \geq 6$

2) أثبت أن : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}$ ،

- استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) أثبت أن (u_n) متقاربة نحو العدد ℓ وَ يحقق : $\ell^2 - 7\ell + 6 = 0$

4) عين النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الجزء الثالث : نعتبر f دالةمعرفة $[1;8]$ بِـ : $f(x) = \dfrac{8x - 6}{x + 1}$

1) أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ (C_f) تمثيلها البياني .

2) بين أنه إذا كان $x \in [4;8]$ ، فإن $f(x) \in [4;8]$.

3) برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $6 \leq u_n \leq 8$.

4) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 وَ u_2.

5) أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

6) برهن بالتراجع على كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n = 1 - \dfrac{5}{\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1} - 1}$ ثم

استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

الجزء الرابع : (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1) برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $4 \leq v_n \leq 6$.

2) أثبت أن (v_n) متتالية متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

3) مثل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 وَ v_2 .

4) ما هو تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (v_n) وَ تقاربها .

الجزء الخامس : نضع : $w_{n+1} = f(u_n) - f(v_n)$

1) أثبت من أجل $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = \dfrac{14(u_n - v_n)}{(u_n + 1)(v_n + 1)}$.

2) برهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n \geq 0$.

3) بين أن : $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \dfrac{14}{35}(u_n - v_n)$.

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - v_n \leq 4\left(\dfrac{14}{35}\right)^n$

- استنتج أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

الجزء السادس : (L_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$.

1) برهن أن (L_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها .

2) أوجد عبارة الحد العام L_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

3) أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$ ثم $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج ؟

4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + ... + L_n$.

- استنتج بدلالة n المجموع :

$$S'_n = \frac{1}{u_0 - 1} + \frac{1}{u_1 - 1} + ... + \frac{1}{u_n - 1}$$

5) أحسب الجداء : $P_n = L_0^{2018} \times L_1^{2018} \times ... \times L_n^{2018}$.

الجزء السابع :

1) برهن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 6 = \dfrac{2(u_n - 6)}{u_n + 1}$.

2) عين عدداً حقيقياً k من المجال $]0;1[$ بحيث :

$|u_{n+1} - 6| \leq k\,|u_n - 6|$.

3) بين من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_n - 6| \leq 2\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، يطلب تعيين نهايتها .

:

التصحيح النموذجي --- المسألة الشاملة في المتتاليات ---

الجزء الأول: لدينا (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \alpha \quad ; \quad \alpha \neq 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} \end{cases}$

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : u_n \neq 1$

✓لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = \alpha \neq 1$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \neq 1$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \neq 1$.

يكفي إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1$ يستلزم $u_n = 1$

لدينا $u_{n+1} = 1$ منه : $\dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} = 1$ و منه : $8u_n - 6 = u_n + 1$ و منه : $8u_n - u_n = 6 + 1$ أي : $7u_n = 7$ إذن : $u_n = 1$

إذن إذا كان $u_n \neq 1$ فإن $u_{n+1} \neq 1$ أي $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\boxed{u_n \neq 1}$.

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية $x^2 - 7x + 6 = 0$:

لدينا : $\Delta = b^2 - 4ac$ منه : $\Delta = 49 - 24 = 25$ ، إذن للمعادلة حلان مختلفان هما :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{2} = 1 \quad \text{وَ} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7+5}{2} = 6$$

3) تعيين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة :

(u_n) متتالية ثابتة يعني من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n = u_0 = \alpha$

من العلاقة : $u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1}$ نجد : $\alpha = \dfrac{8\alpha - 6}{\alpha + 1}$ منه : $\alpha(\alpha+1) = 8\alpha - 6$ و منه : $\alpha^2 + \alpha = 8\alpha - 6$

أي : $\alpha^2 - 7\alpha + 6 = 0$ و هي المعادلة السابقة ، و عليه : $\boxed{\alpha = 6}$ (مقبول) أو $\alpha = 1$ (مرفوض لأن $\alpha \neq 1$)

.

الجزء الثاني: نفرض في كل ما يلي : $u_0 = 8$.

1) لنتحقق أن : $u_n = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$

لدينا : $\dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n + 8 - 14}{u_n + 1} = \dfrac{8(u_n + 1) - 14}{u_n + 1} = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$ منه : $\boxed{u_n = 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}}$.

- لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : u_n \geq 6$

✓لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 8 > 6$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $u_n \neq 1$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $u_{n+1} \geq 6$.

لدينا حسب فرضية التراجع أن : $u_n \geq 6$ منه : $u_n + 1 \geq 7$ و منه : $\dfrac{1}{7} \leq \dfrac{1}{u_n + 1}$ و منه : $\dfrac{-14}{7} \geq \dfrac{-14}{u_n + 1}$

و منه : $8 - 2 \geq 8 - \dfrac{14}{u_n + 1}$ أي : $u_{n+1} \geq 6$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{u_n \geq 6}$.

2) إثبات أن : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 6)}{u_n + 1}$

لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{8u_n-6}{u_n+1}-u_n=\frac{8u_n-6-u_n\left(u_n+1\right)}{u_n+1}=\frac{8u_n-6-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\frac{-\left(u_n^2-7u_n+6\right)}{u_n+1}$

إذن : $\boxed{u_{n+1}-u_n=\frac{-\left(u_n-1\right)\left(u_n-6\right)}{u_n+1}}$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n):

بما أن $u_n \geq 6$ فإن $u_n-6\geq 0$ وَ $-\left(u_n-1\right)<6$ وَ $u_n+1>0$

إذن : $u_{n+1}-u_n\leq 0$ و بالتالي $\boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متناقصة}}$.

3) إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة :

بما أن $u_n \geq 6$ فإن (u_n) متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة فهي متقاربة و تقترب نحو العدد الحقيقي ℓ

منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$

لدينا : $u_{n+1}=\frac{8u_n-6}{u_n+1}$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{8u_n-6}{u_n+1}$ و منه : $\ell=\frac{8\ell-6}{\ell+1}$ تكافئ : $\ell^2+\ell=8\ell-6$

تكافئ : $\boxed{\ell^2-7\ell+6=0}$.

4) تعيين النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

لدينا : $\ell^2-7\ell+6=0$ من أجل $\ell=1$ أو $\ell=6$

بما أن $u_n\geq 6$ فإن $\ell=6$ و عليه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=6}$.

الجزء الثالث : لدينا من أجل $x\in[1;8]$: $f\left(x\right)=\frac{8x-6}{x+1}$

1) دراسة تغيرات الدالة f :

من أجل كل $x\in[1;8]$: $f'\left(x\right)=\frac{8\left(x+1\right)-1\left(8x-6\right)}{\left(x+1\right)^2}=\frac{8+6}{\left(x+1\right)^2}=\frac{14}{\left(x+1\right)^2}>0$

منه f دالة متزايدة تماماً على المجال $[1;8]$.

x	1 $\qquad$ 8
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow \frac{58}{9}$

2) لنبين أنه إذا كان $x\in[4;8]$، فإن $f\left(x\right)\in[4;8]$.

لدينا : $x\in[4;8]$ وَ f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f\left(x\right)\in\left[f\left(4\right);f\left(8\right)\right]$ و منه : $f\left(x\right)\in\left[\frac{26}{4};\frac{58}{9}\right]$

بما أن : $\left[\frac{26}{5};\frac{58}{9}\right]\subset[4;8]$ فإن : $\boxed{f\left(x\right)\in[4;8]}$.

3) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p\left(n\right):6\leq u_n\leq 8$.

✓ لنتحقق من صحة $p\left(0\right)$: من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=8$ منه : $6\leq u_0\leq 8$ إذن $p\left(0\right)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p\left(n\right)$ أي : $6\leq u_n\leq 8$ و لنبرهن صحة $p\left(n+1\right)$ أي : $6\leq u_{n+1}\leq 8$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $6\leq u_n\leq 8$ وَ f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f\left(6\right)\leq f\left(u_n\right)\leq f\left(8\right)$ أي : $6\leq u_{n+1}\leq\frac{58}{9}$

و بما أن $\frac{58}{6}\leq 8$ فإن : $6\leq u_{n+1}\leq 8$ منه $p\left(n+1\right)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\boxed{6\leq u_n\leq 8}$.

الجزء الرابع: لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} v_0=4 \\ v_{n+1}=f\left(v_n\right)\end{cases}$

1) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $p(n) : 4 \le v_n \le 6$

✓لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n = 0$ لدينا : $v_0 = 4$ منه : $4 \le v_0 \le 6$ إذن $p(0)$ محققة .

✓نفرض صحة $p(n)$ أي : $4 \le v_n \le 6$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $4 \le v_{n+1} \le 6$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $4 \le v_n \le 6$ وَ f دالة متزايدة تماماً ، منه : $f(4) \le f(v_n) \le f(6)$ أي : $\frac{26}{5} \le u_{n+1} \le 6$

و بما أن $\frac{26}{5} \ge 4$ فإن : $4 \le v_{n+1} \le 6$ منه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $\boxed{4 \le v_n \le 6}$.

2) إثبات أن (v_n) متتالية متزايدة :

لدينا : $v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n = \frac{8v_n - 6}{v_n + 1} - v_n = \frac{-(v_n - 1)(v_n - 6)}{v_n + 1}$

بما أن $4 \le v_n \le 6$ فإن $v_n - 6 \le 0$ وَ $-(v_n - 1) < 6$ وَ $v_n + 1 > 0$

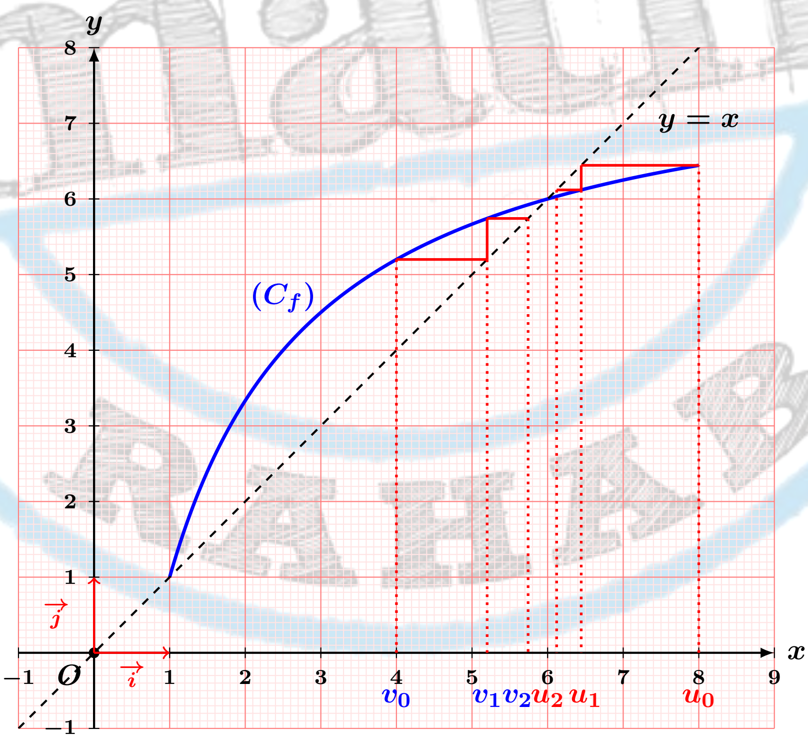
إذن : $v_{n+1} - v_n \ge 0$ و بالتالي المتتالية (v_n) متزايدة .

الاستنتاج : بما أن $4 \le v_n$ فإن (v_n) متتالية محدودة من الأسفل و متزايدة فهي متقاربة و تقترب نحو العدد الحقيقي ℓ' .

3) تمثيل على محور الفواصل الحدود v_0 ، v_1 وَ v_2 : أنظر الشكل أدناه .

4) التخمين :

من الشكل نلاحظ أن : $v_0 < v_1 < v_2$ فإن المتتالية (v_n) متزايدة متناقصة و تقترب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x$ أي : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell' = 6}$.



الجزء الخامس: لدينا المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_{n+1}=f(u_n)-f(v_n)$

1) لنثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+1}=\dfrac{14(u_n-v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}$

لدينا : $w_{n+1}=f(u_n)-f(v_n)=\dfrac{8u_n-6}{u_n+1}-\dfrac{8v_n+1}{v_n+1}=\dfrac{(8u_n-6)(v_n+1)-(8v_n+1)(u_n+1)}{(u_n+1)(v_n+1)}$

$$=\frac{(8u_nv_n+8u_n-6v_n-6)-(8v_nu_n+8v_n-6u_n-6)}{(u_n+1)(v_n+1)}=\frac{+8u_n-6v_n-8v_n+6u_n}{(u_n+1)(v_n+1)}$$

$$=\frac{14u_n-14v_n}{(u_n+1)(v_n+1)}=\frac{14(u_n-v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}$$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $\boxed{w_{n+1}=\dfrac{14(u_n-v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}}$.

2) لنبرهن بالتراجع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $w_n\geq 0$

لدينا : $w_{n+1}=f(u_n)-f(v_n)$ منه : $w_{n+1}=u_{n+1}-v_{n+1}$ أي : $w_n=u_n-v_n$

✓ لنتحقق من صحة $p(0)$: من أجل $n=0$ لدينا : $w_0=u_0-v_0=8-4=4\geq 0$ إذن $p(0)$ محققة .

✓ نفرض صحة $p(n)$ أي : $w_n\geq 0$ و لنبرهن صحة $p(n+1)$ أي : $w_{n+1}\geq 0$.

لدينا حسب فرضية التراجع : $w_n\geq 0$ أي $v_n-u_n\geq 0$ منه : $14(v_n-u_n)\geq 0$

نقسم الطرفين على العدد $(u_n+1)(v_n+1)$ الموجب تماماً فنجد : $\dfrac{14(u_n-v_n)}{(u_n+1)(v_n+1)}\geq 0$ و بالتالي : $w_{n+1}\geq 0$

أي $p(n+1)$ صحيحة ، إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $\boxed{w_n\geq 0}$.

3) لنبين من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-v_{n+1}\leq\dfrac{14}{35}(u_n-v_n)$

لدينا : $\begin{cases}u_n\geq 6\\ v_n\geq 4\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_n+1\geq 7\\ v_n+1\geq 5\end{cases}$ و منه : $(u_n+1)(v_n+1)\geq 35$ أي : $\dfrac{1}{(u_n+1)(v_n+1)}\leq\dfrac{1}{35}$

نضرب طرفي المتباينة بالعدد الموجب $14(u_n-v_n)$ فنجد : $\dfrac{u_n-v_n}{(u_n+1)(v_n+1)}\leq\dfrac{14}{35}(u_n-v_n)$

إذن : $\boxed{u_{n+1}-v_{n+1}\leq\dfrac{14}{35}(u_n-v_n)}$.

4) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-v_n\leq 4\left(\dfrac{14}{35}\right)^n$

لدينا : $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{4}(v_n-u_n)$ منه :

$$\begin{cases}u_1-v_1\leq\dfrac{14}{35}(u_0-v_0)\\ u_2-v_2\leq\dfrac{14}{35}(u_1-v_1)\\ u_3-v_3\leq\dfrac{14}{35}(u_4-v_4)\\ \quad\vdots\\ u_n-v_n\leq\dfrac{14}{35}(u_{n-1}-v_{n-1})\end{cases}$$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $u_n-v_n\leq\left(\dfrac{14}{35}\right)^n(u_0-v_0)$.

و بما أن : $u_0 - v_0 = 8 - 4 = 4$ فإن : $\boxed{u_n - v_n \leq 4\left(\frac{14}{35}\right)^n}$.

الاستنتاج : بما أن (u_n) متتالية متناقصة وَ (v_n) متتالية متزايدة وَ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ فإن $\boxed{\text{المتتاليتان } (u_n) \text{ و } (v_n) \text{ متجاورتان}}$.

الجزء السادس : لدينا المتتالية (L_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$

1) لنبرهن أن (L_n) متتالية هندسية :

لدينا : $$L_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 6}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 6}{\frac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{u_n + 1}}{\frac{8u_n - 6 - (u_n + 1)}{u_n + 1}} = \frac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{8u_n - 6 - (u_n + 1)} = \frac{2u_n - 12}{7u_n - 7}$$

منه : $L_{n+1} = \dfrac{2}{7}\left(\dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}\right) = \dfrac{2}{7}L_n$

إذن (L_n) متتالية هندسية متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{2}{7}}$ و حدها الأول $L_0 = \dfrac{u_0 - 6}{u_0 - 1} = \dfrac{8 - 6}{8 - 1}$ أي : $\boxed{L_0 = \frac{2}{7}}$.

2) إيجاد عبارة الحد العام L_n بدلالة n :

لدينا : $L_n = L_0 \times q^n$ منه : $L_n = \dfrac{2}{7} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^n$ إذن : $\boxed{L_n = \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}$.

- استنتاج u_n بدلالة n :

لدينا : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$ منه : $L_n(u_n - 1) = u_n - 6$ تكافئ : $L_n u_n - L_n = u_n - 6$ تكافئ : $L_n u_n - u_n = L_n - 6$

تكافئ : $u_n(L_n - 1) = L_n - 6$ تكافئ : $u_n = \dfrac{L_n - 6}{L_n - 1}$ إذن : $\boxed{u_n = \dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 6}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 1}}$.

3) حساب النهايات :

✓ بما أن $-1 < \dfrac{2}{7} < 1$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{7}\right)^{n+1} = 0$ منه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n = 0}$ ، نستنتج أن (L_n) متتالية متقاربة نحو 0 .

✓ وَ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 6}{\left(\frac{2}{7}\right)^{n+1} - 1} = \dfrac{-6}{-1} = 6$ منه : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$ ، نستنتج أن (u_n) متتالية متقاربة نحو 6 .

4) حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا : $S_n = L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_n$ منه : $S_n = L_0\left(\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$

و منه : $$\frac{2}{7} \times \frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{7}\left(\frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{7}}\right) = S_n$$ إذن : $\boxed{S_n = \frac{2}{5}\left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)}$.

- استنتاج المجموع S'_n :

لدينا : $L_n = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 1}$ منه : $L_n = \dfrac{u_n - 1 - 5}{u_n - 1}$ ومنه : $L_n = 1 - \dfrac{5}{u_n - 1}$ ومنه : $L_n - 1 = -\dfrac{5}{u_n - 1}$

أي : $\dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{1 - L_n}{5}$

و لدينا : $S_n{}' = \dfrac{1}{u_0 - 1} + \dfrac{1}{u_1 - 1} + \dfrac{1}{u_2 - 1} + \dots + \dfrac{1}{u_n - 1}$ منه : $S_n{}' = \dfrac{1 - L_0}{5} + \dfrac{1 - L_1}{5} + \dots + \dfrac{1 - L_n}{5}$

و منه : $S_n{}' = \dfrac{1 + 1 + \dots + 1 - (L_0 + L_1 + \dots + L_n)}{5}$ أي : $S_n{}' = \dfrac{n + 1 - S_n}{5}$

إذن : $\boxed{S_n{}' = \dfrac{n + 1 - \frac{2}{5}\left(1 - \left(\frac{2}{7}\right)^{n+1}\right)}{5}}$.

5) حساب بدلالة الجداء n P_n :

لدينا : $P_n = L_0^{2018} \times L_1^{2018} \times L_2^{2018} \times \dots \times L_n^{2018}$

تكافئ : $P_n = L_0^{2018} \times (L_0 q)^{2018} \times \left(L_0 q^2\right)^{2018} \times \dots \times (L_0 q^n)^{2018}$

تكافئ : $P_n = L_0^{2018} \times L_0^{2018} q^{2018} \times L_0^{2018} q^{2 \times 2018} \times \dots \times L_0^{2018} q^{n \times 2018}$

تكافئ : $P_n = L_0^{2018} \times L_0^{2018} \times L_0^{2018} \times \dots \times L_0^{2018} \times q^{2018 + 2 \times 2018 + \dots + n \times 2018}$

تكافئ : $P_n = \left(L_0^{2018}\right)^{n+1} \times q^{2018(1+2+\dots+n)}$ تكافئ : $P_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{2018(n+1)} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^{2018 \times \frac{n}{2}(1+n)}$

تكافئ : $P_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{2018(n+1)} \times \left(\dfrac{2}{7}\right)^{1009(n+1)}$ إذن : $\boxed{P_n = \left(\dfrac{2}{7}\right)^{3027(n+1)}}$.

الجزء السابع:

1) لنبرهن من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 6 = \dfrac{2(u_n - 6)}{u_n + 1}$

لدينا : $u_{n+1} - 6 = \dfrac{8u_n - 6}{u_n + 1} - 6 = \dfrac{8u_n - 6 - 6(u_n + 1)}{u_n + 1} = \dfrac{8u_n - 6 - 6u_n - 6}{u_n + 1} = \dfrac{2u_n - 12}{u_n + 1}$

منه : $\boxed{u_{n+1} - 6 = \dfrac{2(u_n - 6)}{u_n + 1}}$.

2) تعيين العدد الحقيقي k من المجال $]0;1[$ بحيث : $|u_{n+1} - 6| \leq k\,|u_n - 6|$

لدينا : $u_{n+1} - 6 = \dfrac{2(u_n - 6)}{u_n + 1}$ منه : $|u_{n+1} - 6| = \dfrac{2}{u_n + 1}|u_n - 6|$ ....(1)

و لدينا : $u_n \geq 6$ منه : $u_n + 1 \geq 7$ و منه : $\dfrac{1}{u_n + 1} \leq \dfrac{1}{7}$ نضرب الطرفين بالعدد الموجب $2|u_n - 6|$

نجد : $\dfrac{2}{u_n + 1}|u_n - 6| \leq \dfrac{2}{7}|u_n - 6|$ ....(2)

بتعويض (1) في (2) نجد : $|u_{n+1} - 6| \leq \dfrac{2}{7}|u_n - 6|$ و عليه : $\boxed{k = q = \dfrac{2}{7}}$.

3) لنبين من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $|u_n - 6| \leq 2\left(\dfrac{2}{7}\right)^n$

لدينا : $|u_n - 6| \leq \frac{2}{7}|u_{n+1} - 6|$ منه :

$$\begin{cases} |u_1 - 6| \leq \frac{2}{7}|u_0 - 6| \\ |u_2 - 6| \leq \frac{2}{7}|u_1 - 6| \\ |u_3 - 6| \leq \frac{2}{7}|u_2 - 6| \\ \vdots \\ |u_n - 6| \leq \frac{2}{7}|u_{n-1} - 6| \end{cases}$$

بضرب المتباينات طرفاً لطرف نجد : $|u_n - 6| \leq \left(\frac{2}{7}\right)^n |u_0 - 6|$

و بما أن : $u_0 - 6 = 8 - 6 = 2$ فإن : $\boxed{|u_n - 6| \leq 2\left(\frac{2}{7}\right)^n}$.

4) استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، يطلب تعيين نهايتها .

لدينا : $|u_n - 6| \leq 2\left(\frac{2}{7}\right)^n$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 6| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\frac{2}{7}\right)^n$ و منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 6| \leq 0$

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - 6) = 0$ إذن : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6}$ ، أي (u_n) متتالية متقاربة و تقترب نحو 6 .

بالتوفيق للجميع