الحلول

(تطور جملة ميكانيكية)

الجزء 1

حل التمرين 1

1.ـ إثبات أن حركة القمر الاصطناعي منتظمة :

ندرس حركة القمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي باعتباره غاليليا.

تطبق الأرض على القمر الاصطناعي قوة : (نصف قطر المدار : r) / $\overrightarrow{F_{T/S}} = -G.\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{u_{TS}}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} = m\vec{a}$

نجد أن : $\vec{a} = -\frac{GM_T}{r^2}\overrightarrow{u_{TS}}$

حيث : $a = \frac{GM_T}{r^2}$ تمثل قيمة ثابتة.

وبما أن التسارع هو شعاع ناظمي قيمته a ثابتة، فإن حركة القمر منتظمة.

ـ إيجاد عبارتي سرعته و دوره :

لدينا : $a = \frac{GM_T}{r^2}$ / $a = \frac{v^2}{r}$

ومنه : $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}}$

أما عبارة الدور فهي : $T = \frac{2\pi.r}{v}$

أي : $\boxed{T = \frac{2\pi.r}{v}}$

2. حساب كلا من قيمتي السرعة و الدور :

ـ حساب قيمة السرعة : $\boxed{v = 7{,}44\times10^3\, m/s}$, $v = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}{6378\times10^3 + 822\times10^3}}$

ـ حساب الدور : $\boxed{\begin{aligned}T &= 6{,}08\times10^3\, s\\ &= 101\min\end{aligned}}$, $T = \frac{2\times3{,}14\times7200\times10^3}{7{,}44\times10^3}$

3. إيجاد قيمة الدور باستعمال الفقرة التالية من النص :

تمثل هذه المدة (الحلقة المدارية) و التي ينجز خلالها القمر الاصطناعي 369 دورة

ـ إن مدة 369 دورة تساوي 26,0 يوما :

أي : $369T = 26{,}0\, jours$

ومنه : $T = \frac{26{,}0\, j}{369}$ / $1j = 24\times60\min = 1440\min$

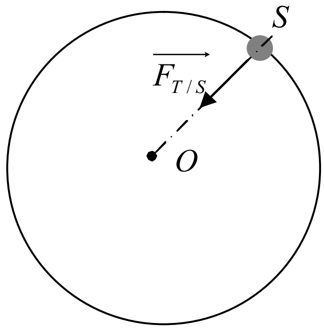
ت،ع : $T = \frac{26{,}0\times1440}{369}$

$$\boxed{T = 101\min}$$

وهي القيمة نفسها المتحصل عليها من قبل.

حل التمرين 2

1. ـ تمثيل قوة جذب الأرض للقمر الاصطناعي : (الشكل المقابل)



ـ كتابة عبارة قيمتها بدلالة M_T , m , G , r :

لدينا : بتطبيق قانون الجذب العام

$$\boxed{F_{T/S} = G.\frac{M_T.m}{r^2}}$$

2. إيجاد وحدة ثابت الجذب العام (G)في الجملة الدولية (SI) باستعمال التحليل البعدي :

لدينا : من العبارة السابقة

$$G = \frac{F_{T/S}.r^2}{M_T.m}$$

أي :

$$G = \frac{[Kg][L][S^{-2}][L^2]}{[Kg][Kg]}$$

ومنه وحدة(G) في الجملة الدولية (SI) هي : $G: \ kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

3. تبيان أن عبارة السرعة الخطية (v) للقمر الاصطناعي في المرجع المركزي الأرضي هي : $v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$

لدينا :

$$F_{T/S} = G.\frac{M_T.m}{r^2} = ma_N \quad / \quad a_N = \frac{v^2}{r}$$

أي :

$$G.\frac{M_T.m}{r^2} = m.\frac{v^2}{r}$$

أي :

$$G.\frac{M_T}{r} = v^2$$

ومنه :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}}$$

4. كتابة عبارة (v) بدلالة r و T حيث T دور القمر الاصطناعي :

$$\boxed{v = \frac{2\pi r}{T}}$$

5. كتابة عبارة دور القمر الاصطناعي حول الأرض بدلالة M_T , G , r :

لدينا :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \quad / \quad v = \sqrt{\frac{G.M_T}{r}}$$

أي :

$$T = 2\pi r.\sqrt{\frac{r}{G.M_T}}$$

ومنه :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}}$$

6. أ/ ـ تبيان أن النسبة $\left(\frac{T^2}{r^3}\right)$ ثابتة لأي قمر يدور حول الأرض :

لدينا : $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G.M_T}}$

أي : $$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T} = k}$$

ومنه : النسبة $\left(\frac{T^2}{r^3}\right)$ لا تتعلق بأي قمر ، بل تتعلق بكتلة الجسم المركزي فقط.

ـ حساب قيمتها العددية في المعلم المركزي الأرضي مقدرة بوحدة الجملة الدولية (SI) :

لدينا : $k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_T}$

ت،ع : $k = \frac{4\times 10}{6{,}67\times 10^{-11}\times 5{,}97\times 10^{24}}$, $\boxed{k = 9{,}9\times 10^{-14}\,SI}$

ب/ حساب دور حركته T :

لدينا : $\frac{T^2}{r^3} = k$

ومنه : $T = \sqrt{k.r^3}$

$T = \sqrt{9{,}9\times 10^{-14}\times\left(2{,}66\times 10^{7}\right)^3}$ $T \approx 43165{,}8s$

أي : $$\boxed{T \approx 12h}$$

حل التمرين 3

1. المقصود بالمعلم المركزي الأرضي : مركزه مركز الأرض ومحاوره موجهة لثلاثة نجوم ثابتة

2. كتابة عبارة القانون الثالث لكبلر بالنسبة لهذا القمر: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ / $r = R + h$

ومنه : $$\boxed{\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

3. إيجاد العبارة الحرفية بين مربع سرعة القمر (v^2) و (G) ثابت الجذب العام ، M_T كتلة الأرض ، h و R :

لدينا : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

أي : $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T}.(R+h)^3$ ....(1)

ومن جهة أخرى : $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(R+h)}{T}$

أي : $v^2 = \frac{4\pi^2(R+h)^2}{T^2}$ ....(2)

بتعويض (1) في (2) نجد المطلوب : $$\boxed{v^2 = \frac{GM_T}{R+h}}$$

4. ـ تعريف القمر الجيومستقر : هو القمر الذي يدور حول الأرض و في نفس جهة دورانها حول محورها، ودور حركته مساويا لدور حركة الأرض حول محورها.

ـ حساب ارتفاعه (h) و سرعته (v) :

لدينا : $\frac{T^2}{(R+h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$

ومنه : $h = \sqrt[3]{\frac{GM_T}{4\pi^2} \times T^2} - R$

ت،ع : $h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{4(3,14)^2} \times (24 \times 3600)^2} - 6400 \times 10^3$

$$\boxed{h \approx 35841 km}$$

حساب السرعة (v):

من العلاقة السابقة : $v^2 = \frac{GM_T}{R+h}$

نجد : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R+h}}$

ت،ع : $v = \sqrt{\frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,97 \times 10^{24}}{6400 \times 10^3 + 35841 \times 10^3}}$, $\boxed{v \approx 3070 m/s}$

5. ـ حساب قوة جذب الأرض لهذا القمر :

لدينا : $F = G.\frac{M_T.m_S}{(R+h)^2}$

ت،ع : $F = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{5,97 \times 10^{24} \times 2,0 \times 10^3}{(6400 \times 10^3 + 35841 \times 10^3)^2}$

$$\boxed{F \approx 446,34}$$

ـ شرح لماذا لا يسقط القمر على الأرض رغم ذلك (أي رغم وجود قوة جذب الأرض له) :
دورانه حول الأرض يمنعه من السقوط (القوة الطاردة المركزية)

حل التمرين 4

1. ـ المرجع الذي تتم فيه دراسة حركة هذا القمر الاصطناعي هو : المعلم الجيو مركزي
ـ الفرضية المتعلقة بهذا المرجع و التي تسمح بتطبيق القانون الثاني لنيوتن هي :
أن يكون المعلم الجيو مركزي غاليليا. وحتى يتحقق ذلك يجب أن يكون دور حركة القمر الاصطناعي صغيرا جدا مقارنة مع دور حركة الأرض حول الشمس، (نعتبر المعلم غاليليا بتقريب جيد)

2. ـ إيجاد عبارة تسارع القمر $(Giove-A)$ وتعيين قيمته :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}$

أي : $m\vec{g} = m\vec{a}$

ومنه : $a = a_N = g$ (حيث g الجاذبية عند المدار)

وبتطبيق قانون الجذب العام : $F = G.\dfrac{M_T.m_S}{(R_T+h)^2}$ / $F = P = m_S g$

أي : $m_S g = G.\dfrac{M_T.m_S}{(R_T+h)^2}$

أي : $g = G.\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$

ومنه : $\boxed{a = G.\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}}$

قيمته : $a = 6{,}67\times10^{-11}\times\dfrac{5{,}98\times10^{24}}{(6380\times10^3+23600\times10^3)^2}$

$\boxed{a = 0{,}44 m/s}$

3. حساب سرعة القمر $(Giove-A)$ على مداره :

لدينا : $a = \dfrac{v^2}{r}$ / $r = R_T + h$

أي : $\dfrac{v^2}{R_T+h} = G.\dfrac{M_T}{(R_T+h)^2}$

ومنه : $v = \sqrt{\dfrac{GM_T}{R_T+h}}$

ت،ع : $v = \sqrt{\dfrac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{6380\times10^3+23600\times10^3}}$, $\boxed{v = 3{,}64\times10^3 m/s}$

4. تعريف الدور T وتعيين قيمته بالنسبة للقمر $(Giove-A)$:
ـ التعريف : الدور T هو زمن دورة واحدة.
ـ تعيين قيمته : $T = \dfrac{2\pi.r}{v}$ / $r = R_T + h$

أي : $T = \dfrac{2\pi(R_T+h)}{v}$

أي : $T = 2\pi(R_T+h).\dfrac{1}{v} = 2\pi(R_T+h).\sqrt{\dfrac{R_T+h}{GM_T}}$

ومنه : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{(R_T+h)^3}{GM_T}}$

ت،ع : $T = 2\times3{,}14\times\sqrt{\dfrac{(6380\times10^3+23600\times10^3)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}}$

ومنه :
$$\boxed{T = 51617s = 14{,}34h}$$

5. حساب الطاقة الإجمالية للجملة ($(Giove - A)$، أرض) :

لدينا : $E_T = E_C + E_{PP}$

حيث : $E_C = \frac{1}{2}m_S v^2 \quad , \quad E_{PP} = m_S gh$

ومنه :
$$\boxed{E_T = \frac{1}{2}m_S v^2 + m_S gh}$$

ت،ع : $E_T = \frac{1}{2}\times 700 \times (3{,}64\times 10^3)^2 + 700 \times 0{,}44 \times 23{,}6 \times 10^6$

حيث سطح الأرض مرجعا للطاقة الكامنة

$$\boxed{E_T = 11{,}9 \times 10^9 j}$$

حل التمرين 5

أ/

1. ـ تفسير وجود موقع الشمس في النقطة F_1 : تقع الشمس في النقطة F_1 حسب قانون كبلر الأول الذي ينص على ما يلي :

إن الكواكب تتحرك وفق مدارات إهليلجية تمثل الشمس إحدى محرقيها

ـ نسمي عندئذ النقطتين F_1 و F_2 : محرقا (أو بؤرتا) المدار الاهليليجي.

2. العلاقة بين المساحتين S_1 و S_2 : حسب قانون كبلر الثاني الذي ينص على ما يلي :

إن المستقيم الرابط بين الشمس وكوكب يمسح مساحات متساوية خلال مجالات زمنية متساوية

وبناءا عليه تكون العلاقة بين المساحتين S_1 و S_2 هي : $\boxed{S_1 = S_2}$

3. تبيان أن متوسط السرعة بين الموضعين C و C' أقل من متوسط السرعة بين الموضعين D و D':

لدينا : $C'C \prec D'D$

وبقسمة طرفي المتراجحة على نفس المقدار الموجب Δt، نحصل على الطلوب : $\frac{C'C}{\Delta t} \prec \frac{D'D}{\Delta t}$

ب/

1. نص قانون كبلر الثالث :

إن مربع الدور لمدار كوكب يتناسب مع مكعب البعد المتوسط للكوكب عن الشمس

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = K} \quad / \quad a = r$$

2. إيجاد عبارة كل من v سرعة الكوكب ، ودور حركته T بدلالة r ، G ، M:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

أي : $\vec{F} = m\vec{a}$

بالإسقاط : $F = ma \qquad a = a_n = \dfrac{v^2}{r}$

أي : $F = m.\dfrac{v^2}{r}.........(1)$

بتطبيق قانون الجذب العام : $F = G.\dfrac{m.M}{r^2}........(2)$

ومن (1) و (2) نحصل على عبارة السرعة v : $m.\dfrac{v^2}{r} = G.\dfrac{mM}{r^2}$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

أما عبارة الدور فنحصل عليها من العلاقة : $T = \dfrac{2\pi .r}{v}$

وهي :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}}$$

3.إيجاد بيانيا العلاقة بين T^2 و r^3 :

البيان $T^2 = f\left(r^3\right)$ عبارة عن خط مستقيم يمر بالمبدأ (دالة خطية)، معادلته من الشكل : $T^2 = k.r^3$

حيث k معامل توجيه البيان : $k = \dfrac{6\times 0,2\times 10^{17}}{8\times 0,5\times 10^{35}} = 0,3\times 10^{-18}$

أي :

$$\boxed{T^2 = 0,3\times 10^{-18}\, r^3}$$

4. إيجاد العلاقة النظرية بين T^2 و r^3 :

بتطبيق قانون كبلر الثالث : $\dfrac{T^2}{r^3} = K$

نحصل على العلاقة النظرية :

$$\boxed{T^2 = Kr^3}$$

5.استنتاج قيمة كتلة الشمس :

بتوظيف العلاقتين الأخيرتين (1) و (2) :

$$T^2 = 0,3\times 10^{-18}\, r^3..........(1)$$
$$T^2 = Kr^3..........(2)$$

يمكننا استنتاج قيمة كتلة الشمس :

أي من (1) و (2) : $K = 0,3\times 10^{-18} \quad / \quad K = \dfrac{4\pi^2}{GM}$

ومنه :

$$M = \frac{4\pi^2}{GK}$$

ت،ع : $M = \dfrac{4(3,14)^2}{6,67\times 10^{-11}\times 0,3\times 10^{-18}}$

$$\boxed{M = 1,97\times 10^{30}\, kg}$$

حل التمرين 6

1. تبيان أن حركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة :

تطبق الأرض على القمر الاصطناعي قوة : (نصف قطر المدار : r) $\overrightarrow{F_{T/S}} = -G.\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{u_{TS}}$

وهي قوة متجهة نحو مركز الأرض (أي أن تسارعه متجه نحو الأرض وبالتالي هو تسارع ناظمي)

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

نجد أن :

$$\vec{a} = -\frac{GM_T}{r^2}\overrightarrow{u_{TS}}$$

حيث : $a = \frac{GM_T}{r^2}$ تمثل قيمة ثابتة.

وبما أن التسارع هو شعاع ناظمي قيمته a ثابتة، فإن حركة القمر الاصطناعي دائرية منتظمة.

2. - تبيان أن : $\frac{(R+H)^3}{T^2} = cte$

لدينا : $F = G.\frac{M.m}{r^2} \;\Big/\; F = ma_N = m\frac{v^2}{r}$

أي : $G.\frac{M.m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$

أي : $v^2 = \frac{GM}{r} = \frac{GM}{R+H} \;\Big/\; r = R+H$

وبتربيع طرفي عبارة الدور التالية : $T = \frac{2\pi.r}{v} = \frac{2\pi(R+H)}{v}$

نجد : $T^2 = \frac{4\pi^2(R+H)^2}{v^2}$

ومنه : $T^2 = \frac{4\pi^2(R+H)^2}{\left(\frac{GM}{R+H}\right)} = \frac{4\pi^2}{GM}(R+H)^3$

$$\boxed{\frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = cte \text{ (ثابت)}}$$

- ثابت التناسب هو : $\boxed{\frac{GM}{4\pi^2} = cte}$

أما ثابت التناسب في القانون الثالث لكبلر فهو : $K = \frac{4\pi^2}{GM}$

3. أ/ خصائص القمر الاصطناعي ميتيوسات : - يتميز بدوره الذي يساوي الدور اليومي للأرض $86164s$

- مستقرا فوق نقطة من سطح الأرض على خط الاستواء

- يدور شرقا في نفس جهة دوران الأرض

ب/ يسمى هذا النوع من الأقمار الاصطناعية : الأقمار المستقرة أرضيا

ج/ يمثل الدور $23h56\min 4s$: دور الأرض اليومي

د/ لماذا لا يساوي هذا الدور $24h$ ؟

- إن الأرض (أثناء دورانها وخلال $365,25$ يوم شمسي) تنجز دورة زيادة بالنسبة للنجوم الثابتة

وبالتالي يكون الدور اليومي : $T = 86164s$, $T = 86400 \times \frac{365,25}{366,25}$

أي ليس $24h$.

4. التأكد من الجدول أن : $\frac{(R+H)^3}{T^2} = cte$

لدينا :

ـ بالنسبة لكوسموس : $\frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{(6400\times10^3 + 19100\times10^3)^3}{(11\times3600+14\times60)^2} \approx 10^{13}$

ـ بالنسبة للمركبة مير : $\frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{(6400\times10^3 + 500\times10^3)^3}{(1\times3600+35\times60)^2} \approx 10^{13}$

ـ بالنسبة ميتيوسات : $\frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{(6400\times10^3 + 35800\times10^3)^3}{(23\times3600+56\times60)^2} \approx 10^{13}$

ومنه : $\boxed{\frac{(R+H)^3}{T^2} = cte = 10^{13}}$

5. استنتاج القيمة التقريبية لكتلة الأرض M:

لدينا : $\frac{(R+H)^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} = cte = 10^{13}$

أي : $\frac{GM}{4\pi^2} = 10^{13}$

ومنه : $M = \frac{4\pi^2 \times 10^{13}}{G}$

ت،ع : $M = \frac{4(3{,}14)^2 \times 10^{13}}{6{,}67\times10^{-11}}$, $\boxed{M \approx 5{,}9\times10^{24} kg}$

حل التمرين 7

/I

1. تعيين السرعة v_S لحركة مركز عطالة القمر الاصطناعي :

لدينا : $v_S = \sqrt{\frac{GM}{R_T + h}}$

ومنه : $v_S = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}{6380\times10^3+400\times10^3}}$, $\boxed{v_S \approx 7{,}66\times10^3 m/s \approx 27576 km/h}$

2. تعيين دور الحركة T_S:

$T_S = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}$

ومنه : $T_S = 2(3{,}14)\sqrt{\frac{(6380\times10^3+400\times10^3)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}}}$, $\boxed{T_S \approx 5555{,}9 s \approx 92{,}6 \min}$

3. تعيين المجال الزمني الذي يفصل بين مرورين متتاليين في موضع يقع على شاقول نقطة معينة من خط الاستواء :
لدينا : القمر الاصطناعي (S) ينتقل نحو الشرق، وبالتالي فهو يدور في نفس جهة دوران الأرض.
وعندما تنجز الأرض جزء من الدورة يكون القمر الاصطناعي أنجزأ نفس الجزء زائد دورة
ليكن t هو المدة التي هو المدة التي استغرقها القمر الاصطناعي، أي :

$t = (n+1)T_S$

بالنسبة للأرض : $t = nT$

حيث T هو دور الأرض حول نفسها ، n : عدد الدورات

من العبارتين السابقتين نجد : $n = \dfrac{T_S}{T - T_S}$

وبالتعويض في إحداهما نجد : $t = T\left(\dfrac{T_S}{T - T_S}\right)$

ت،ع : $t = 1440 \times \left(\dfrac{92{,}7}{1440 - 92{,}7}\right) = 99\,\text{min}$

وهو المجال الزمني الذي يفصل بين مرورين متتاليين في موضع يقع على شاقول نقطة معينة من خط الاستواء.

II/

1. إيجاد العلاقة بين h_{n+1} و h_n عند بداية الدورة n :

لدينا : القمر الاصطناعي موجود عند ارتفاع $h_0 = 400km$ ، ونظرا للتأثيرات المختلفة يتناقص ارتفاعه بمقدار $1/1000$ من الارتفاع الذي كان عليه عند بداية كل دورة.

أي بالنسبة للارتفاع $h_0 = 400km$ و الارتفاع الذي يليه h_1 يمكن أن نكتب : $h_1 = h_0 - \dfrac{h_0}{1000} = h_0\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)$

وكذلك بالنسبة للارتفاع h_1 و الارتفاع الذي يليه h_2 يمكن أن نكتب :

$$h_2 = h_1 - \frac{h_1}{1000} = h_1\left(1 - \frac{1}{1000}\right) = h_0\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^2$$

أما عند بداية الدورة n فيكون : $h_n = h_0\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n$

أي أن الارتفاعات عبارة عن حدود متتالية هندسية أساسها $\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)$ وحدها الأول $h_0 = 400km$.

ومنه العلاقة بين h_{n+1} و h_n : $\boxed{h_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{1000}\right).h_n}$

2. استنتاج العلاقة بين h_1 و h_0 : $h_1 = \left(\dfrac{999}{1000}\right).h_0$

3. تعيين عدد الدورات التي أنجزها القمر الاصطناعي عند الارتفاع $100km$:

لدينا : $h_n = h_0\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n$

حيث n عدد دورات القمر الاصطناعي .

من أجل الارتفاع $h_n = 100km$ يكون : $100 = 400\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n$

أي : $\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n = \dfrac{1}{4}$

أي : $\ln\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right)^n = \ln\dfrac{1}{4}$

أي : $n\ln\dfrac{999}{1000} = -\ln 4$

ومنه : $n = -\dfrac{\ln 4}{\ln\dfrac{999}{1000}} = -\dfrac{\ln 4}{\ln 0{,}999}$

$$\boxed{n \approx 1386}$$

حل التمرين 8

1. كيف نسمي النظامين المختلفين لمثل هذه الحركة ؟

- في المجال الزمني $[0\,;0,9\,s]$: النظام الانتقالي.
- من أجل $t \succ 0,9s$: النظام الدائم.

2. أ/ السرعة الابتدائية v_0 للكرية :

من البيان نستنتج : $v_0 = 0$

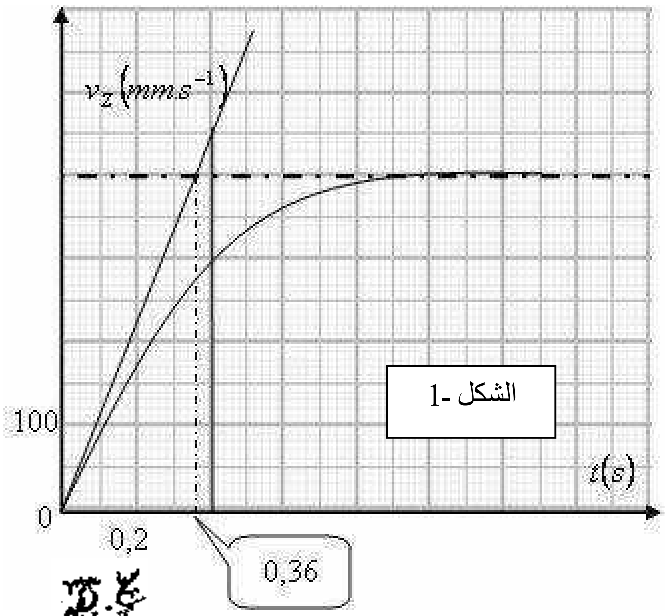
لأن السرعة الابتدائية v_0 هي سرعة الجسم في اللحظة $t = 0$.

ب/ السرعة الحدية v_L للكرية :

من البيان نستنتج : $v_L = 400mm/s = 0,4m/s$

3. تحديد الزمن المميز للسقوط :

الزمن المميز للسقوط هو فاصلة تقاطع المماس للبيان في المبدأ مع الخط المقارب (الشكل -1).



الشكل -1

أي : $\boxed{\tau \approx 0,36s}$

4. تحديد قيمة التسارع في اللحظة $t = 0s$:

التسارع هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، فهو يمثل ميل المماس لبيان السرعة، أي :

$$a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{v_L}{\tau} = \frac{0,4}{0,36}$$

$$\boxed{a_0 \approx 1,11m.s^{-2}}$$

5. يعطى كتابة المعادلة التفاضلية للسرعة بالشكل :

$$\frac{dv_z}{dt} = g\left(1 - \rho_f \frac{V_S}{m}\right) - \frac{k}{m}v_z(t)$$

المطلوب : استنتاج قيمة دافعة أرخميدس و قيمة k.

لدينا : $\dfrac{dv_z}{dt} = g\left(1 - \rho_f \dfrac{V_S}{m}\right) - \dfrac{k}{m}v_z(t)$

أي : $\dfrac{dv_Z}{dt} = g - \dfrac{\rho_f V_S g}{m} - \dfrac{k}{m}v_Z(t)$

حيث $\rho_f V_S g$ تمثل دافعة أرخميدس Π : $\Pi = \rho_f V_S g$

فتؤول المعادلة السابقة إلى الشكل : $\dfrac{dv_Z}{dt} = g - \dfrac{\Pi}{m} - \dfrac{k}{m}v_Z(t)......(1)$

من أجل $v = 0$ يكون : $\dfrac{dv_Z}{dt} = g - \dfrac{\Pi}{m}$ / $\dfrac{dv_Z}{dt} = a_0 = 1,11m.s^{-2}$

ومنه : $g - \dfrac{\Pi}{m} = 1,11 \;\Rightarrow\; \Pi = m(g - 1,11)$

ت،ع : $\Pi = 13,3\times10^{-3}\times(9,8 - 1,11)$, $\boxed{\Pi = 0,115N}$

- استنتاج قيمة k : في العلاقة (1)، لما $\dfrac{dv_Z}{dt} = 0$ فإن $v = v_L = 0,4m/s$

ومنه : $g - \dfrac{\Pi}{m} - \dfrac{k}{m}v_L = 0 \;\Rightarrow\; k = \dfrac{mg - \Pi}{v_L}$

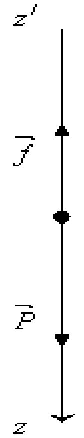
ت،ع : $k = \dfrac{13,3\times10^{-3}\times9,8 - 0,115}{0,4}$, $\boxed{k = 0,038kg/s}$

حل التمرين 9

1. تبيان أن المعادلة التفاضلية لحركة المظلي من الشكل : $\frac{dv}{dt} = A.v + B$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجملة (مظلي + مظلته) : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$

أي : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}_G$



وبالإسقاط على $z'z$: $mg - kv = m\frac{dv}{dt}$

بقسمة أطراف المعادلة على m ،نجد : $g - \frac{k}{m}v = \frac{dv}{dt}$

ومنه : $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g$

وهي من الشكل : $\boxed{\frac{dv}{dt} = A.v + B}$

حيث : $A = -\frac{k}{v}$ و $B = g$

2. تعيين قيمة كل من g و v_L من البيان :

لدينا : ـ العلاقة النظرية : $\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v + g ....(1)$

ـ البيان : مستقيم لا يمر بالمبدأ معادلته من الشكل : $a = \alpha.v + \beta$

حيث : $\alpha = -\frac{10}{12,5} = -0,8$ و $\beta = 10$ $\quad a = -0,8.v + 10......(2)$

وبالمطابقة بين (1) و (2) نجد : $\boxed{g = 10 m.s^{-2}}$

و : $\boxed{v_L = 12,5 m.s^{-1}}$ $\quad 0 = -0,8.v_L + 10 \Rightarrow v_L = \frac{10}{0,8}$,

3. تحديد وحدة المقدار $\left(\frac{k}{m}\right)$ وحساب قيمته من البيان :

ـ وحدة المقدار $\left(\frac{k}{m}\right)$:

لدينا : $\frac{k}{m} = \frac{g}{v_L}$

بالتحليل البعدي : $\left[\frac{k}{m}\right] = \frac{[L][T]^{-2}}{[L][T]^{-1}} = [T]^{-1}$

ومنه وحدة $\left(\frac{k}{m}\right)$ هي الثانية (s^{-1}).

ـ قيمة المقدار $\left(\frac{k}{m}\right)$: $\left(\frac{k}{m}\right) = \frac{10}{12.5}$,

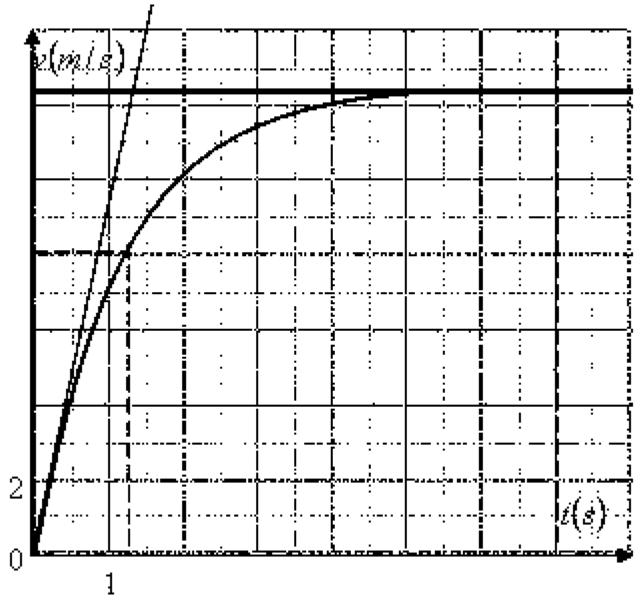
$\boxed{\left(\frac{k}{m}\right) = 0,8 s^{-1}}$

أو مباشرة من معادلة البيان (2).

4. حساب قيمة الثابت k : $k = 0,8m$

ت،ع : $k = 0,8 \times 0,1$, $\boxed{k = 8 \times 10^{-2} kg/s}$

5. التمثيل الكيفي لـ : $v = f(t)$ ، في المجال الزمني : $0 \le t \le 7s$



حل التمرين 10

I/ استغلال المنحنى البياني و معادلته :

1. المعنى الفيزيائي للمنحنى البياني رقم 2 هو : ـ مخطط سرعة الكرة عند إهمال قوى الاحتكاك (صحيح).
ـ مخطط سرعة الكرة عند إهمال دافعة أرخميدس (خطأ).
ـ تسارع الكرة لحظة تحريرها (خطأ).

التعليل : لأن محصلة القوى المطبقة على الكرة تبقى ثابتة وبالتالي يكون الميل أي التسارع ثابت

$$a = \frac{dv}{dt} = cte \text{ (ثابت)}$$

2. نعم معادلة المنحنى البياني تتطابق مع المعادلة رقم (2).

3. تحديد قيمتي الثابتين A و B :

لدينا : $v(t) = 1{,}14.\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$

أي : $v(t) = 1{,}14 - 1{,}14 e^{-\frac{t}{0{,}132}}$

ومنه : $\boxed{A = -B = 1{,}14}$

4. إثبات أن المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة الكرة $v(t)$ هي : $\frac{dv}{dt} + 7{,}58.v = 8{,}64$

لدينا $v(t) = 1{,}14\left(1 - e^{-\frac{t}{0{,}132}}\right)$

ومنه : $\frac{dv}{dt} = \frac{1{,}14}{0{,}132} e^{-\frac{t}{0{,}132}}$ / $e^{-\frac{t}{0{,}132}} = 1 - \frac{v(t)}{1{,}14}$

أي : $\frac{dv}{dt} = \frac{1{,}14}{0{,}132}\left(1 - \frac{v(t)}{1{,}14}\right)$

أي : $\frac{dv}{dt} = \frac{1{,}14}{0{,}132} - \frac{1}{0{,}132} v(t)$

أي : $$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{0,132}v(t)=\frac{1,14}{0,132}$$

أي : $$\boxed{\frac{dv}{dt}+7,58v=8,64}$$ وهو المطلوب.

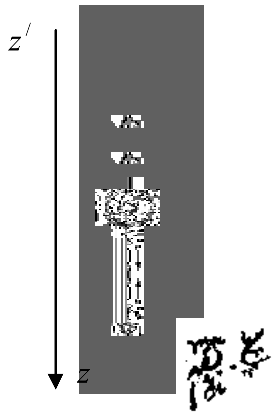
- تعيين قيمتي α و β :

بمطابقة المعادلة التفاضلية التي تحققها سرعة الكرية والتي هي من الشكل : $$\frac{dv}{dt}+\alpha.v=\beta$$

مع المعادلة : $$\frac{dv}{dt}+7,58v=8,64$$

نجد : $$\boxed{\alpha=7,58 \quad , \quad \beta=8,64}$$

II/ دراسة الظاهرة الفيزيائية :



1. إحصاء وتمثيل القوى المطبقة على الكرة أثناء سقوطها :

الجملة المدروسة هي الكرة في المرجع الأرضي الذي نفترضه غاليليا.

القوى التي تخضع لها الكرة أثناء سقوطها هي :

- الثقل $\vec{P}=m\vec{g}$ منحاها شاقولي واتجاهها نحو الأسفل.
- دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$ منحاها شاقولي واتجاهها نحو الأعلى.
- قوى الاحتكاك $\vec{f}$ منحاها شاقولي واتجاهها نحو الأعلى.

2. إثبات أن المعادلة التفاضلية المتعلقة بالسرعة $v(t)$ تحقق العلاقة :

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g\left(1-\frac{\rho.V}{m}\right) \quad (3)$$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}+\vec{f}+\vec{\Pi}=m\vec{a}_G$$

أي : $$\vec{P}+\vec{f}+\vec{\Pi}=m\vec{a}$$

بالإسقاط على المحور ($z'z$) الموجه نحو الأسفل : $$P-f-\Pi=ma$$

أي : $$mg-kv-\rho Vg=ma$$

أي : $$g(m-\rho V)-kv=ma$$

وبقسمة طرفي المعادلة على m : $$g\left(1-\frac{\rho V}{m}\right)-\frac{k}{m}v=\frac{dv}{dt}$$

ومنه المطلوب : $$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g\left(1-\frac{\rho.V}{m}\right)} \quad (3)$$

3. - العبارة الحرفية للمعامل β :

بالمطابقة بين المعادلتين (1) و (3) نجد :(4) $$\boxed{\beta=\left(1-\frac{\rho V}{m}\right).g}$$

- قيمة دافعة أرخميدس Π التي تخضع لها الكرة :

لدينا : من المعادلة (4) $$\beta=g-\frac{\rho Vg}{m}=g-\frac{\Pi}{m}$$

ومنه : $$\Pi=m(g-\beta) \quad / \quad \beta=8,64$$

ت،ع : $$\Pi=32\times10^{-3}\times(9,8-8,64) \quad ,$$ $$\boxed{\Pi=3,7\times10^{-2}N}$$

4. حساب قيمة كل من السرعة الحدية v_L، الثابت k و تسارع الكرة في اللحظة $t=0s$:

- السرعة الحدية v_L :

من البيان : $$\boxed{v_L\approx1,13m/s}$$

- حساب الثابت k :

لدينا : $\alpha = \frac{k}{m}$ / $\alpha = 7{,}58$

ومنه : $k = \alpha . m$

ت،ع : $k = 7{,}58 \times 32 \times 10^{-3}$,

$$\boxed{k = 0{,}24 kg/s}$$

- حساب تسارع الكرة في اللحظة $t = 0s$:

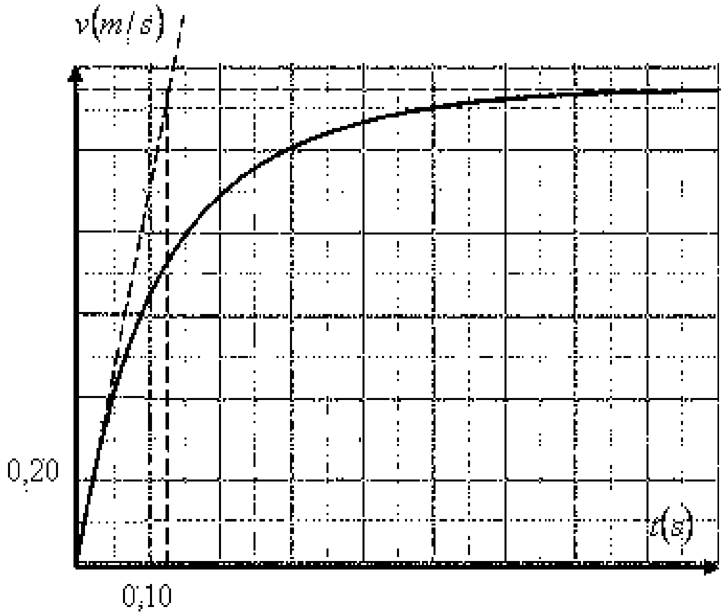
التسارع هو مشتق السرعة بالنسبة للزمن ، فهو يمثل ميل المماس لبيان السرعة، أي :

$$a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1{,}25}{0{,}15}$$

$$\boxed{a_0 \approx 8{,}33 m.s^{-2}}$$

حل التمرين 11

1. أ/ رسم المنحنى البياني الممثل لتغيرات السرعة v بدلالة الزمن : $v = f(t)$ (الشكل -1)



(الشكل -1)

ب/ تعيين قيمة السرعة الحدية $v_{\lim}$:

$$\boxed{v_{\lim} = 1{,}14 m/s}$$

ج/ يكون الجسم الصلب (S) متميزا للحصول على حركة مستقيمة شاقولية انسحابية في نظامين انتقالي ودائم :

بـ : الشكل ، الحجم ، الكتلة

أي : ينبغي أن يكون خفيف نسبيا وذو حجم كاف لبلوغ السرعة الحدية، وأن لا يسمح شكله بدورانه.

د/ حساب تسارع حركة (S) في اللحظة $t = 0$:

$$a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1{,}14}{0{,}13}$$

$$\boxed{a_0 = 8{,}77 m.s^{-2}}$$

2. تعطى المعادلة التفاضلية لحركة (S) بالعبارة :

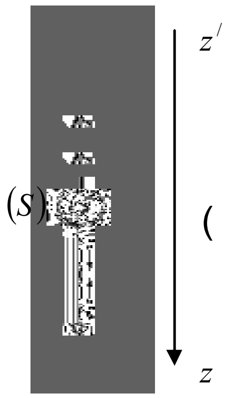
$$\frac{dv}{dt}+Av=C\left(1-\frac{\rho.V}{m}\right)......(1)$$

حيث ρ الكتلة الحجمية للهواء ، V حجم (S).

أ/ تمثيل القوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة (S)

القوى الخارجية المطبقة على مركز عطالة الكرية هي :

- الثقل $\vec{P}=m\vec{g}$.
- دافعة أرخميدس $\vec{\Pi}$.
- قوى الاحتكاك $\vec{f}$. (الشكل -2)



(الشكل -2)

ب/ إيجاد المعادلة التفاضلية لحركة مركز عطالة (S) بدلالة السرعة v وذلك في حالة السرعات الصغيرة :

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum\vec{F}_{ext}=\vec{P}+\vec{f}+\vec{\Pi}=m\vec{a}_G$

أي : $\vec{P}+\vec{f}+\vec{\Pi}=m\vec{a}$

بالإسقاط على المحور الموجه نحو الأسفل : $P-f-\Pi=ma$

أي : $mg-kv-\rho Vg=ma$

أي : $g(m-\rho V)-kv=ma$

وبقسمة طرفي المعادلة على m : $g\left(1-\frac{\rho V}{m}\right)-\frac{k}{m}v=\frac{dv}{dt}$

ومنه المطلوب :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g\left(1-\frac{\rho.V}{m}\right)......(2)}$$

- بالمطابقة بين المعادلة المعطاة (1) و المعادلة (2) نجد : $C=g$ و $A=\frac{k}{m}$

ج/ استنتاج قيمة دافعة أرخميدس و قيمة الثابت k :

- قيمة دافعة أرخميدس Π :

لدينا : $P-f-\Pi=ma$

لما $t=0$: $a_0=8{,}77m.s^{-2}$ ، $v=0$

ومنه : $\Pi=P-ma=m(g-a)$

ت،ع : $\Pi=19\times10^{-3}\times(9{,}80-8{,}77)$, $\boxed{\Pi=19{,}6\times10^{-3}N}$

- قيمة الثابت k :

لدينا : $P-f-\Pi=ma$

لما $a=0$ (النظام الدائم) : $v=v_{\lim}=1{,}14m/s$

ومنه : $P-kv-\Pi=0\Rightarrow k=\frac{P-\Pi}{v}$

ت،ع : $k=\frac{19\times10^{-3}\times9{,}8-19{,}6\times10^{-3}}{1{,}14}$, $\boxed{k=0{,}15N.m^{-1}s}$