

Modélisation des populations avec le système de Hastings-Powell

Hassan FAYAD

March 5, 2023

Contents

1	Introduction	1
2	Présentation du système de Hastings-Powell	2
2.1	Obtention du système et signification physique des paramètres	2
2.2	Adimensionnement du système	3
3	Etude théorique du système adimensionné	3
3.1	Points d'équilibre	3
3.2	Stabilité des points d'équilibre	4
3.2.1	E_0	4
3.2.2	E_1	4
3.2.3	E_2	4
3.2.4	E_3	5
3.3	Linéarisation du système	5
4	Résolution numérique	5
4.1	Méthode numérique d'approximation: Runge-Kutta d'ordre 4 classique	6
4.2	Justification du choix de la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4	6
4.3	Traçage des diagrammes de phase et observation du "chaos"	6
4.4	Traçage des diagrammes de bifurcation	7
5	Comparaison avec la réalité	8
6	Conclusion	9
7	Références bibliographiques	10

1 Introduction

Beaucoup de systèmes différentiels sont utilisés en écologie pour modéliser les populations. Pour que ces systèmes puissent recréer fidèlement la réalité, ils doivent prendre en compte un grand nombre de facteurs influençant la variation du nombre d'individus au sein des populations. Or, ces facteurs introduisent des paramètres et des termes non-linéaires dans le système, rendant ainsi son étude bien plus complexe.

On s'intéresse dans cette étude au système de Hastings-Powell, qui modélise l'évolution des effectifs de trois espèces, en prenant compte des interactions entre elles, et avec leur environnement.

En écologie, les modèles classiques utilisés pour étudier des populations d'êtres vivants étaient les modèles à deux espèces, comme celui de Lotka-Volterra. Cependant, de nombreuses études montrent que les interactions entre deux espèces sont très largement insuffisantes pour expliquer l'ensemble des phénomènes observés dans les systèmes écologiques.

Dès qu'on passe à des systèmes à trois espèces, la réalité est plus fidèlement modélisée, mais la complexité augmente aussi. En 1991, Alain Hastings et Thomas Powell publient un article sur ce

qui sera connu sous le nom du modèle de Hastings-Powell, un système de 3 équations différentielles modélisant les interactions entre trois espèces. Au cours de ces deux dernières décennies, ce modèle a subi des changements afin de pouvoir modéliser les effets observés sur les populations de certains événements écologiques comme la chasse, les épidémies, l'épuisement de ressources... Ce système diffère des systèmes écologiques de son époque pour une autre raison : il est chaotique.

Les systèmes chaotiques, très répandus en écologie, présentent plusieurs caractéristiques qui les différencient des systèmes régis par des équations différentielles linéaires usuelles : sensibilité aux conditions initiales, sensibilité aux variations des valeurs des paramètres, récurrence forte...

Parmi les caractéristiques, la sensibilité aux variations des valeurs des paramètres fait qu'en changeant un paramètre du système, la nature des solutions peut changer, ce qui provoque ainsi un changement dans la nature du comportement du système : par exemple, un système non-périodique peut devenir pseudopériodique avec la modification d'un paramètre, ou on peut observer une multiplication de périodes... Ainsi, pour savoir comment se comportera le système chaotique pour une valeur donnée d'un paramètre choisi, on trace ce que l'on appelle des diagrammes de bifurcations.

Dans cette étude on cherche donc à étudier théoriquement le système de Hastings-Powell, et à voir comment son comportement change lorsqu'on fait varier les paramètres qui le régissent.

2 Présentation du système de Hastings-Powell

2.1 Obtention du système et signification physique des paramètres

La situation qu'on cherche à étudier est la suivante : on dispose d'un écosystème constitué de trois espèces vivantes, espèce X , espèce Y et espèce Z d'effectifs respectifs X , Y et Z , tel que Y soit le prédateur de X et Z soit le prédateur de Y .

On suppose que l'espèce au fond de la chaîne alimentaire, l'espèce X , voit son effectif évoluer de manière logistique avec un taux de croissance R_0 (nombre d'individus qui survivent par unité de temps) et une capacité porteuse (définie comme la taille maximale de la population qu'un milieu donné peut supporter) K_0 c'est-à-dire qu'en absence de prédateur on a :

$$\frac{dX}{dT} = R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right)$$

Mais il faut prendre en considération la prédation par l'espèce Y , pour cela il faut introduire ce qu'on appelle les réponses fonctionnelles de Holling, qui représentent le taux d'admission d'apport alimentaire d'une espèce consommatrice en fonction de la quantité d'aliments. Dans cette étude nous nous intéressons à la réponse fonctionnelle de Holling de type II, qui prends en considération la capacité de l'espèce prédatrice à manipuler ses proies, et qui s'écrit sous la forme :

$$F_y(X) = \frac{A_y X}{B_y + X}$$

Avec $A_y = \frac{1}{h_y}$ où h_y est le temps moyen passé par un individu de l'espèce Y à manipuler sa proie de l'espèce X , et $B_y = \frac{1}{a_y h_y}$ ou a_y est le nombre moyen d'attaques réalisée par des individus de l'espèce Y sur une seule proie de l'espèce X par unité de temps. B_y représente aussi la population de l'espèce X pour laquelle le taux de prédation de l'espèce Y par unité de proie vaut la moitié de sa valeur maximale. Ainsi on peut déduire le nombre d'individus de l'espèce X consommés par l'espèce Y par unité de temps, qui vaut :

$$\text{Taux d'admission alimentaire} \times \text{taux de conversion} \times Y = F_y(X) \times C_X \times Y$$

Avec C_X le taux de conversion c'est-à-dire le taux qui permet de régulariser la population Y par rapport à X . Cette régularisation modélise entre autres la quantité d'individus de l'espèce X qui disparaît lorsqu'une certaine quantité d'individus de l'espèce Y consomme. Donc l'équation qui décrit l'évolution de la population de l'espèce X en fonction du temps devient :

$$\frac{dX}{dT} = R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - C_X F_y(X) Y$$

Quant à l'espèce Y , elle proie sur l'espèce X ce qui augmente sa population, elle se fait chasser par l'espèce Z ce qui diminue son effectif et elle présente un taux de mortalité D_Y (on ne considère pas quelle présente une évolution autonome logistique comme pour l'espèce X) ce qui nous donne directement l'équation d'évolution :

$$\frac{dY}{dT} = F_y(X)Y - F_z(Y)Z - D_Y Y$$

Il n'existe pas de terme régulateur devant $F_z(Y)z$ parce qu'on introduira ce dernier dans l'équation de l'espèce Z : on régularise ainsi toujours la population de l'espèce Y aux populations des autres espèces. Enfin pour l'espèce Z , elle voit son effectif augmenter lorsqu'elle consomme l'espèce Y et elle présente aussi un taux de mortalité D_Z ce qui nous donne :

$$\frac{dZ}{dT} = C_Z F_z(Y)Z - D_Z Z$$

Avec C_z le taux qui permet de régulariser la population Y par rapport à Z . On obtient ainsi le modèle de Hastings-Powell constitué par les trois équations :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} &= R_0 X \left(1 - \frac{X}{K_0}\right) - C_X F_y(X)Y \\ \frac{dY}{dT} &= F_y(X)Y - F_z(Y)Z - D_Y Y \\ \frac{dZ}{dT} &= C_Z F_z(Y)Z - D_Z Z \end{cases}$$

2.2 Adimensionnement du système

On cherche maintenant à passer du système obtenu à un système adimensionné. Pour se faire, on commence par écrire que $X = K_0 x$ avec x une fonction adimensionnelle. Si K_0 est la taille maximale de la population X , par définition de C_X et C_Z , la taille maximale de la population Y est $\frac{K_0}{C_X}$ et celle de la population Z est $\frac{C_Z K_0}{C_X}$. On écrit donc $Y = \frac{K_0 y}{C_X}$ et $Z = \frac{C_Z K_0 z}{C_X}$. On adimensionne aussi le temps $T = \frac{t}{R_0}$.

En injectant cela dans le système obtenu précédemment on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x(1-x) - f_y(x)y \\ \frac{dy}{dt} &= f_y(x)y - f_z(y)z - d_y y \\ \frac{dz}{dt} &= f_z(y)z - d_z z \end{cases}$$

Paramètre	Valeur
$f_i(u)$	$\frac{a_i u}{1+b_i u}$ pour $i \in \{y, z\}$ et $u \in \{x, y\}$
a_x	$\frac{K_0 A_X}{R_0 B_X}$
b_x	$\frac{K_0}{B_X}$
a_y	$\frac{C_Z A_Z K_0}{C_X R_0 B_X}$
b_y	$\frac{K_0}{C_X B_Z}$
d_y	$\frac{D_Y}{R_0}$
d_z	$\frac{D_Z}{R_0}$

Table 1: Valeurs des paramètres adimensionnés.

3 Etude théorique du système adimensionné

3.1 Points d'équilibre

En annulant les dérivées, on déduit que le système adimensionné présente quatre points d'équilibres présentés dans la table 2. Le point E_3 est définie de la manière suivante: x^* est la racine positive du polynôme $(b_x b_y d_z - a_y b_x)X^2 + (-b_x b_y d_z + a_y b_x - a_y + b_y d_z)X + (a_y - b_y d_z - a_x d_z)$, $y^* = \frac{d_z}{a_y - b_y d_z}$ et $z^* = \frac{(a_x - b_x d_y)x^* - d_y}{(a_y - b_y d_z)(1 + b_x x^*)}$.

Point d'équilibre	Existence
$E_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Toujours
$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Toujours
$E_2 = \begin{pmatrix} \bar{x} = \frac{d_y}{a_x - b_x d_x} \\ \bar{y} = \frac{a_x - b_x d_x - d_y}{(a_x - b_x d_x)^2} \\ \bar{z} = 0 \end{pmatrix}$	N'existe que si $a_x - b_x d_x > d_y$
$E_3 = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$	Toujours

Table 2: Points d'équilibre et leur existence.

3.2 Stabilité des points d'équilibre

Etudions la stabilité des points d'équilibre :

3.2.1 E_0

On écrit la matrice Jacobienne du système au point E_0 :

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_y & 0 \\ 0 & 0 & -d_z \end{bmatrix}$$

Ainsi $Sp(J(E_0)) = \{1, -d_y, -d_z\}$. On voit $Sp(J(E_0)) \cap \mathbb{R}_+^* = \{1\} \neq \emptyset$. On déduit que le point est instable.

3.2.2 E_1

On écrit la matrice Jacobienne du système au point E_1 :

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{a_x}{1+b_x} & 0 \\ 0 & \frac{a_x}{1+b_x} - d_y & 0 \\ 0 & 0 & -d_z \end{bmatrix}$$

Ainsi $Sp(J(E_1)) = \{-1, \frac{a_x}{1+b_x} - d_y, -d_z\}$. On déduit que le point est stable si et seulement si $\frac{a_x}{1+b_x} < d_y$.

3.2.3 E_2

On écrit la matrice Jacobienne du système au point E_2 :

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 - 2\bar{x} - \frac{a_x \bar{y}}{(1+b_x \bar{x})^2} & -\frac{a_x \bar{x}}{1+b_x \bar{x}} & 0 \\ \frac{a_x \bar{y}}{(1+b_x \bar{x})^2} & \frac{a_x \bar{x}}{1+b_x \bar{x}} - d_y & -\frac{a_y \bar{y}}{1+b_y \bar{y}} \\ 0 & 0 & \frac{a_y \bar{y}}{1+b_y \bar{y}} - d_z \end{bmatrix}$$

Par définition de \bar{x} on a $\frac{a_x \bar{x}}{1+b_x \bar{x}} = d_y$ et que $1 - 2\bar{x} - \frac{a_x \bar{y}}{(1+b_x \bar{x})^2} = -\bar{x}(1 - \frac{a_x b_x \bar{y}}{(1+b_x \bar{x})^2})$. Ainsi cette matrice devient :

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\bar{x}(1 - \frac{a_x b_x \bar{y}}{(1+b_x \bar{x})^2}) & -d_y & 0 \\ \frac{a_x \bar{y}}{(1+b_x \bar{x})^2} & 0 & -\frac{a_y \bar{y}}{1+b_y \bar{y}} \\ 0 & 0 & \frac{a_y \bar{y}}{1+b_y \bar{y}} - d_z \end{bmatrix}$$

Ainsi le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\chi_{J(E_2)}(X) = P(X) \times \left(X - \frac{a_y \bar{y}}{1 + b_y \bar{y}} + d_z\right)$$

$$\text{avec } P(X) = X^2 + \bar{x} \left(1 - \frac{a_x b_x \bar{y}}{(1 + b_x \bar{x})^2}\right) X + \frac{d_y a_x \bar{y}}{(1 + b_x \bar{x})^2}$$

Le critère de Routh-Hurwitz permet de voir que le polynôme P est à racines à partie réelle strictement négative si et seulement si $(1 + b_x \bar{x})^2 > a_x b_x \bar{y}$. On déduit que le point E_2 est stable si et seulement si

$$(1 + b_x \bar{x})^2 > a_x b_x \bar{y} \text{ et } \frac{a_y \bar{y}}{1 + b_y \bar{y}} < d_z.$$

3.2.4 E_3

On écrit la matrice Jacobienne du système au point E_3 :

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} J_{11} = 1 - 2x^* - \frac{a_x y^*}{(1+b_x x^*)^2} & J_{12} = -\frac{a_x x^*}{1+b_x x^*} & J_{13} = 0 \\ J_{21} = \frac{a_x y^*}{(1+b_x x^*)^2} & J_{22} = \frac{a_x x^*}{1+b_x x^*} - \frac{a_y z^*}{(1+b_y y)^2} - d_y & J_{23} = -\frac{a_y y^*}{1+b_y y^*} \\ J_{31} = 0 & J_{32} = \frac{a_y z^*}{(1+b_y y^*)^2} & J_{33} = \frac{a_y y^*}{1+b_y y^*} - d_z \end{bmatrix}$$

On pose :

$$\begin{cases} \sigma_1 &= & -(J_{11} + J_{22} + J_{33}) \\ \sigma_2 &= & J_{11}J_{22} + J_{22}J_{33} + J_{33}J_{11} - J_{13}J_{31} - J_{21}J_{12} - J_{32}J_{23} \\ \sigma_3 &= & -J_{11}J_{22}J_{33} - J_{13}J_{21}J_{32} - J_{12}J_{23}J_{31} + J_{22}J_{13}J_{31} + J_{33}J_{21}J_{12} + J_{11}J_{32}J_{23} \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice $J(E_3)$ est :

$$\chi_{J(E_3)}(X) = X^3 + \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X + \sigma_3$$

Ainsi, d'après le critère de Routh-Hurwitz, le point E_3 est stable si et seulement si :

$$\begin{cases} \sigma_1 &> 0 \\ \sigma_3 &> 0 \\ \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_3 &> 0 \end{cases}$$

3.3 Linéarisation du système

Dans cette partie on cherche à linéariser le système autour du point d'équilibre E_3 . Les autres points d'équilibres correspondent à des états où au moins une des populations disparaît ce qui ne nous intéresse pas. le système linéarisé au point E_3 est :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\tilde{x}}{dt} \\ \frac{d\tilde{y}}{dt} \\ \frac{d\tilde{z}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x^* - \frac{a_x y^*}{(1+b_x x^*)^2} & -\frac{a_x x^*}{1+b_x x^*} & 0 \\ \frac{a_x y^*}{(1+b_x x^*)^2} & \frac{a_x x^*}{1+b_x x^*} - \frac{a_y z^*}{(1+b_y y)^2} - d_y & -\frac{a_y y^*}{1+b_y y^*} \\ 0 & \frac{a_y z^*}{(1+b_y y^*)^2} & \frac{a_y y^*}{1+b_y y^*} - d_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

Cette linéarisation ne va pas nous servir dans la suite, puisqu'on cherchera à résoudre numériquement le système.

4 Résolution numérique

Nous cherchons maintenant à approximer les solutions du système différentiel numériquement. Les méthodes d'approximations basées sur l'algèbre linéaire, comme la méthode des éléments finis et la méthode des différences finies ne peuvent pas être utilisées puisque le système qu'on cherche à étudier est non-linéaire. Pour cela, on se limite aux méthodes d'approximations des équations différentielles ordinaires. On choisira ainsi la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, dont la nature sera étudiée dans la première sous-partie. Le choix de cette méthode sera justifié dans la sous-partie qui suit.

4.1 Méthode numérique d'approximation: Runge-Kutta d'ordre 4 classique

Soit $d \in \mathbf{N}^*$, $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ un ouvert et $I = [0, T]$ avec $T > 0$. On définit $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^d$ et on considère le problème de Cauchy défini par: $\forall t \in I, y'(t) = f(t, y(t))$ et $y(t_0) = y_0$, avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \Omega$. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 classique est une méthode d'approximation numérique à un pas qui consiste à considérer les suites suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_0 & = & y_0 \\ t_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & z_n + h\Phi(t_n, z_n, h), \forall n \in \mathbf{N}^* \\ t_{n+1} & = & t_n + h, \forall n \in \mathbf{N}^* \end{array} \right.$$

avec $N \in \mathbf{N}^*$ le nombre d'échantillons, $h = T/N$ le pas, et Φ la fonction d'incrément définie par:

$$\begin{aligned} \Phi : I \times \Omega &\longrightarrow \mathbf{R}^d \\ (t, y, h) &\mapsto \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} k_1 & = & f(t, y) \\ k_2 & = & f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 & = & f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 & = & f(t + h, y + hk_3) \end{array} \right.$$

Montrons que cette méthode est convergente. On commence par montrer sa consistance: on remarque qu'on a $\forall t \in [0, T], \forall y \in \Omega, \Phi(t, y, 0) = f(t, y)$, ce qui nous donne la consistance par théorème. Elle est aussi stable, en supposant que Φ est Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On déduit donc que la méthode est convergente. On admet que la convergence est d'ordre 4. Dans notre cas, la fonction qui régit le système différentiel est:

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty[^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{pmatrix} x(1-x) - f_y(x)y \\ f_y(x)y - f_z(y)z - d_y y \\ f_z(y)z - d_z z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On admettra la convergence de la méthode pour ce système différentiel (on a la consistance, et la stabilité est sur tout compact, due au fait que f est Lipschitzienne sur tout compact de $[0, +\infty[^3$).

4.2 Justification du choix de la méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4 a été choisie parce qu'elle est d'ordre 4 et elle est simple à implémenter. Les méthodes plus simple, comme les méthodes d'Euler, ont l'inconvénient d'être d'ordre 1, ce qui signifie qu'en les implémentant on a besoin d'un pas très petit pour avoir une bonne approximation de la solution. Or, la taille du pas est inversement proportionnelle à la complexité du problème. Donc, un programme résolvant le système avec une méthode d'Euler mettra beaucoup plus de temps pour finir qu'un programme utilisant une méthode de Runge-Kutta 4, pour une même erreur finale.

4.3 Traçage des diagrammes de phase et observation du "chaos"

L'étude du point d'équilibre E_3 dans la sous-partie 3.2.4 montre que la nature de ce dernier dépend de la valeur des paramètres. Donc, théoriquement, en choisissant arbitrairement l'un parmi ces paramètres, on peut observer que le comportement du système change en variant ce paramètre. Dans cette partie on étudiera les trajectoires de phase du système en variant le paramètre b_x et avec les valeurs des autres paramètres fixées à dans la Table 3

Sans entrer dans la théorie mathématique du chaos, on peut dire que le comportement d'un système est chaotique si il est très sensible aux conditions initiales. Pour $b_x < 2.36$, on remarque que le système

Paramètre	Valeur
a_x	5,0
a_y	0,1
b_y	2,0
d_y	0,4
d_z	0,011

Table 3: Valeurs fixées des paramètres.

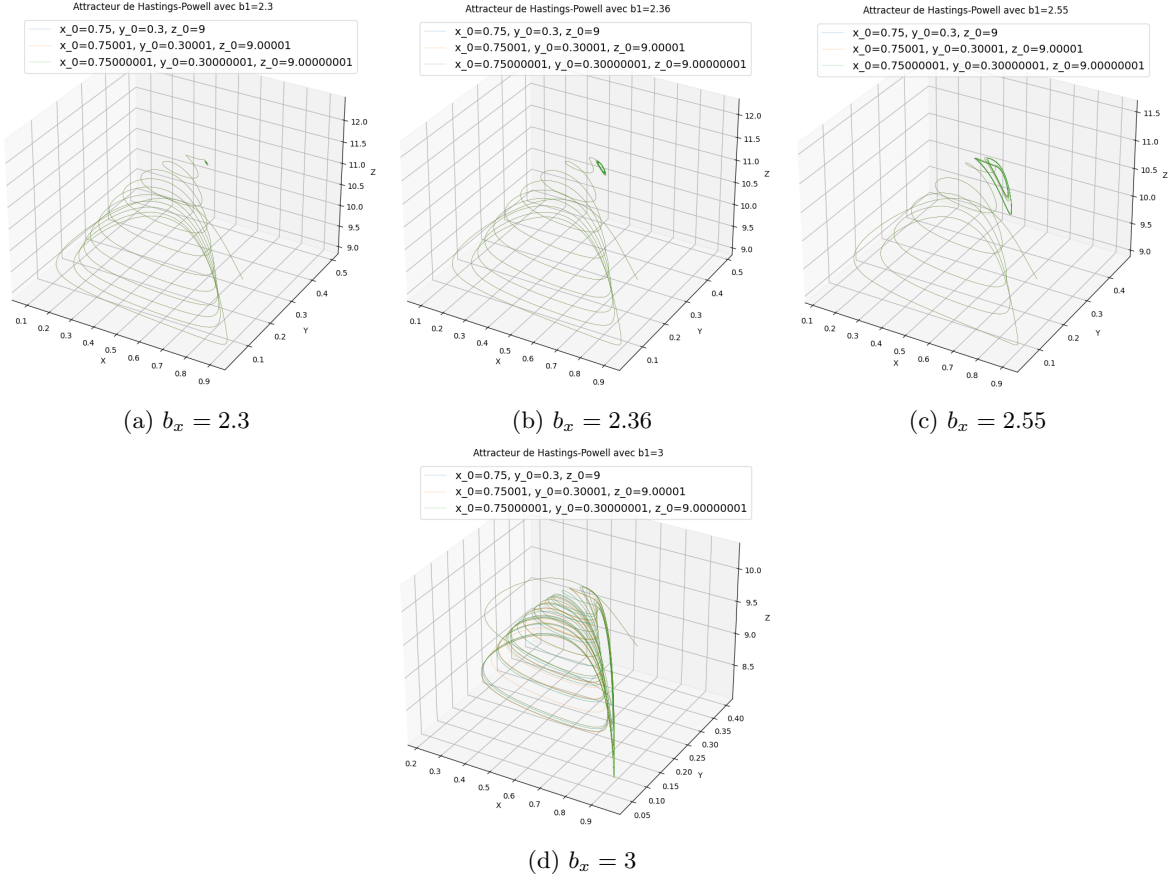


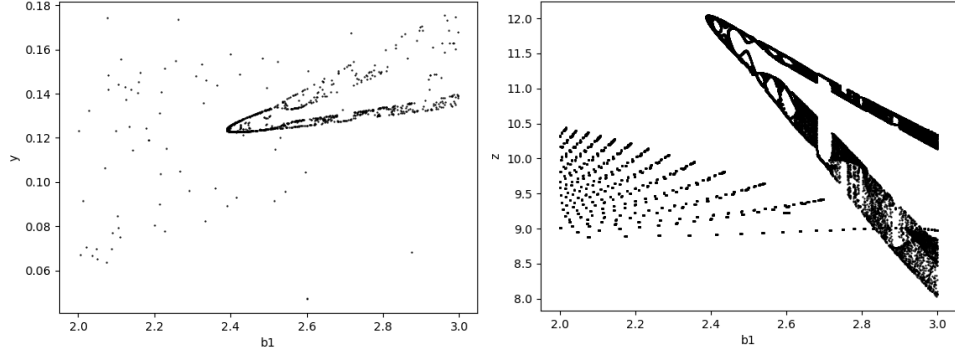
Figure 1: Attracteurs du système pour différentes valeurs de b_x .

converge vers le point d'équilibre, plus précisément, ce point est de type foyer attractif, c'est-à-dire que la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne au point d'équilibre est strictement négative. Qualitativement, la trajectoire tourne autour du point d'équilibre et converge vers ce dernier. Pour $b_x = 2.36$, on remarque que la trajectoire tourne autour du point d'équilibre sans converger: on dit que le point est donc un centre, c'est-à-dire que la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne au point d'équilibre est nulle. Pour $b_x = 2.55$, la trajectoire fait deux fois plus de tour autour du point d'équilibre: la trajectoire n'est plus une ellipse mais une sorte de ruban enroulé deux fois. On observe ce que l'on appelle un phénomène de doublement de période. Pour $b_x = 3$, on remarque que la trajectoire varie grandiausement même pour des petites variations des conditions initiales: le système est donc chaotique.

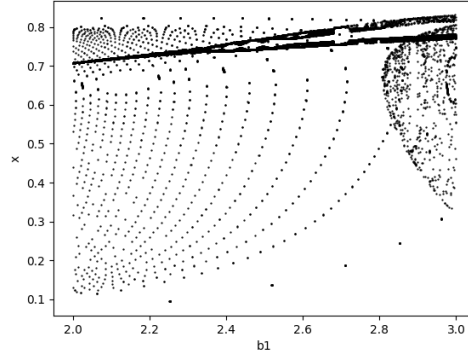
4.4 Traçage des diagrammes de bifurcation

On cherche maintenant à visualiser continuellement les variations dans le comportement du système en fonction des valeurs du paramètre b_x . Pour se faire, on introduit la notion de diagramme de bifurcation. Sans rentrer dans la théorie mathématiques, une bifurcation peut-être définie simplement comme le changement brusque du comportement d'un système en variant un de ses paramètres. Ce

changement peut-être dû au changement de la nature d'un point d'équilibre et peut se manifester par un phénomène de doublement de période. Il existe plusieurs types de bifurcation, mais on ne s'intéressera qu'aux bifurcations de Hopf, qui se caractérisent par la croissance de la partie réelle des valeurs propres conjuguées de la matrice jacobienne au point d'équilibre. Le diagramme de bifurcation de x par rapport à b_x est défini comme le traçage de la coordonnées x des points de l'attracteur qui appartiennent au plan défini par $y = y^*$, en fonction de b_x . Les diagrammes de bifurcations de y et Z peuvent être défini de la même manière.



(a) Diagramme de bifurcation de y par rapport à b_x (b) Diagramme de bifurcation de z par rapport à b_x



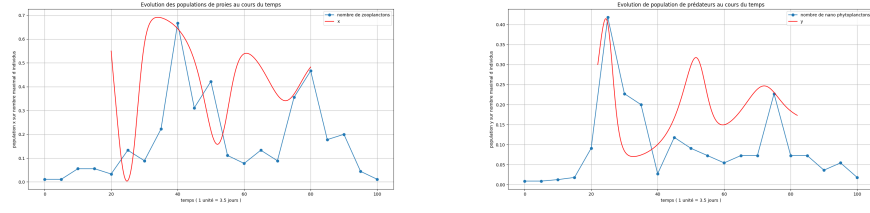
(c) Diagramme de bifurcation de x par rapport à b_x

Figure 2: Diagrammes de bifurcation du système par rapport à b_x

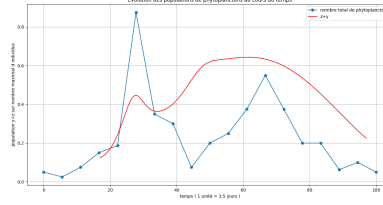
L'apparition de "fourches" dans ces diagrammes correspond à des bifurcations de Hopf. Les zones à droite des diagrammes où on commence à avoir une distributions aléatoire de points sont les valeurs de b_x pour lesquelles le système présente un comportement chaotique.

5 Comparaison avec la réalité

Pendant les années 80 et 90, J. P. Pelletier et G. Balvay, deux chercheurs, s'intéressent à l'étude de la vie microscopique du lac Léman. Ils prélèvent ainsi les effectifs de planctons herbivores, de nano phytoplanctons et du reste des espèces de phytoplanctons dans le lac. On suppose ainsi que X soit le nombre de planctons herbivores, Y celui de nano phytoplanctons et Z celui du reste des phytoplanctons dans le milieu. On comparera dans cette partie les valeurs prélevées par J. P. Pelletier et G. Balvay avec celles obtenues dans le système de Hastings-Powell. Pour modéliser ces populations dans le lac, il faut résoudre le système dimensionné, mais vu que les valeurs des capacités des populations sont inconnues, on se contente de diviser les données réelles par l'effectif maximal de la population de l'espèce atteint durant l'année considérée, et donc de modéliser ces nouveaux résultats avec le système adimensionné. Les valeurs des consantes a_x, a_y, b_x, b_y, d_y , et d_z étant inconnues pour ces espèces, nous les prenons égales aux valeurs données dans la Table 3, et nous adapterons "linéairement" les résultats aux données réelles.



(a) Comparaison entre modèle et données réelles pour espèce X (b) Comparaison entre modèle et données réelles pour espèce Y



(c) Comparaison entre modèle et données réelles pour Y + Z

Figure 3: Comparaison entre modèle et réalité

On remarque sur les figures 5,6 et 7, que qualitativement, les résultats du modèle varient de la même manière que les données réelles. On quantifiera la fiabilité du modèle en calculant le coefficient de corrélation entre les données réelles et celles trouvées par le modèle pour chacune des espèces. Le coefficient de corrélation est définie de la manière suivante:

$$R = \frac{\sum_{i=0}^n (m_i - \bar{m}) \sum_{i=0}^n (l_i - \bar{l})}{\sqrt{\sum_{i=0}^n (m_i - \bar{m})^2} \sqrt{\sum_{i=0}^n (l_i - \bar{l})^2}}$$

Avec $(m_i)_{i \in \mathbf{N}}$ les données réelles, \bar{m} leur moyenne, $(l_i)_{i \in \mathbf{N}}$ les valeurs obtenues par le modèle dans les mêmes instants pendant lesquels les valeurs réelles ont été prélevées, et \bar{l} leur moyenne. Ainsi on a après calcul:

Coefficient et valeur	
R_x	≈ 0.38
R_y	≈ 0.25
R_{y+z}	≈ -0.20

Table 4: valeurs des coefficients de corrélation

Ces coefficients étant supérieurs en valeur absolue à 0.2, on peut dire qu'il existe une corrélation entre le modèle et les données réelles, mais cette corrélation n'est pas forte. Ce modèle ne prévoit pas exactement les effectifs des populations, mais nous décrit juste la manière dont évoluent les populations (croissance, décroissance, extrêmes ...).

6 Conclusion

Le système de Hastings-Powell sert de modèle qualitatif d'évolution de population, comme celles des phytoplanctons. On peut penser à rendre le système plus représentatif de la réalité en introduisant des termes qui modélisent différents phénomènes écologiques, comme le prélèvement humain (voir référence bibliographique 3). On peut aussi étudier le système mais avec des dérivées fractionnaire au lieu des dérivées entières, ce qui s'est aussi montré être plus proche de la réalité (voir référence bibliographique 5).

7 Références bibliographiques

- 1** *CHAOS IN A THREE-SPECIES FOOD CHAIN*, ALAN HASTINGS Division of Environmental Studies and Institute for Theoretical Dynamics, University of California, Davis, California 95616 USA
THOMAS POWELL Division of Environmental Studies, University of California, Davis, California 95616 USA.
- 2** *Complex dynamics and its stabilization in an eco-epidemiological model with alternative food*, Krishna Pada Das.
- 3** *Harvesting in tri-trophic food chain stabilises the chaotic dynamics-conclusion drawn from Hastings and Powell model*, Binayak Nath and Krishna Pada Das, Corresponding author.
- 4** *On-Off Intermittency in a Three-Species Food Chain*, Gabriele Vissio, and Antonello Provenzale.
- 5** *Dynamics Analysis and Chaotic Control of a Fractional-Order Three-Species Food-Chain System*, Lina Wang, Hui Chang and Yuxia Li.
- 6** *Mathématiques pour la Physique, Introduction à la théorie qualitative des systèmes dynamiques*, Pierrette Benoist-Gueutal.
- 7** *Bifurcations et Chaos, une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal*, Fortan et Mathématica, Dang-Vu Huyen, Delcarte Claudine.
- 8** *Systèmes dynamiques et méthodes de continuation*, Jean Roux, ellipses.
- 9** *Introduction à la dérivation fractionnaire Théorie et applications*, François Dubois, Ana Cristina Galucio et Nelly Point.
- 10** *Comparaison qualitative et quantitative de modèles proie-prédateur à des données chronologiques en écologie*, Christian Jost, Comparaison qualitative et quantitative de modèles proie-prédateur à des données chronologiques en écologie. Other [q-bio.OT]. INAPG (AgroParisTech), 1998. English. tel-00005771