

﴿الاحتمالات﴾

1 - تذكير :

التجربة العشوائية : هي كل تجربة لا يمكن توقع نتائجها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة .

مجموعة الإمكانيات : مجموعة النتائج الممكنة تسمى مجموعة إمكانيات أو مجموعة الخارج أو المجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز Ω وكل عنصر من Ω يسمى إمكانية

الحوادث : كل مجموعة جزئية من Ω تسمى حادثة ، وليكن A جزءاً من Ω نقول عندئذ أن A حادثة

- إذا احتوت الحادثة A على عنصر وحيد فإنها تدعى حادثة أولية
- إذا احتوت الحادثة A على أكثر من عنصر تسمى حادثة مركبة
- \emptyset هي الحادثة الأكيدة و \emptyset هي الحادثة المستحيلة .
- إذا كانت A حادثة ما فإن حادثتها العكسية يرمز لها بالرمز \bar{A} وهي التي تحتوي كل عناصر Ω ما عدا عناصر A
- لنكن A و B حادثتين :
- الرمز $A \cap B$ يعني الحادثة A و B وهي التي تحوي العناصر المشتركة بين A و B
- الرمز $A \cup B$ يعني الحادثة A أو B وهي التي تحوي عناصر A وعناصر B أيضا
- إذا كانت $A \cap B$ حالية أي \emptyset نقول عندئذ أن الحادثتين A و B غير متماثمتين .

مثال :

نرمي زهرة نرد غير مزيفة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .

- ✓ الحادثة A " الحصول على رقم زوجي "
- ✓ الحادثة B " الحصول على رقم أكبر أو يساوي 4 "
- ✓ الحادثة C " الحصول على رقم 6 "
- ✓ الحادثة D " الحصول على رقم زوجي أكبر أو يساوي 4 "
- ✓ الحادثة F " الحصول على رقم زوجي أو أكبر أو يساوي 4 "

2 - قانون الاحتمال :

لتكن $\{\Omega = e_1, e_2, \dots, e_n\}$ مجموعة إمكانيات (الخارج) لتجربة عشوائية ذات n عنصر ، يعرف قانون احتمال على Ω إذا ارفقنا كل مخرج e_i من Ω بعدد موجب P_i مع $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ بحيث يكون $P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$

- ✓ يسمى العدد P_i احتمال تحقق المخرج e_i
- ✓ إذا كانت A حادثة فإن $P(A)$ يرمز إلى احتمال الحادثة A والذي يساوي مجموع احتمالات الحوادث الأولية للحادثة A
- ✓ من أجل كل $\{e_i\}$ $0 \leq P(e_i) \leq 1 : i \in \{1, 2, \dots, n\}$

مثال :

كييس به كرتان حمروان و 4 كرات خضراء و كرة سوداء نسحب كرة واحدة ونسجل لونها ، ما هي احتمالات الحوادث التالية :

"A = الحصول على كرة حمراء " 1

"B = الحصول على كرة خضراء " 2

"C = الحصول على كرة سوداء " 3

3 - تساوي الاحتمال :

عندما يكون جميع الحوادث الأولية لتجربة عشوائية نفس الاحتمال نقول عن التجربة أنها متساوية الاحتمال

وأن قانون الاحتمال متساوي التوزيع ويكون : $P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n = \frac{1}{n}$ ويكون احتمال حادثة

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\Omega}$$
 في هذه الحالة :

ملاحظة :

يشار إلى تساوي الاحتمال من خلال عبارات تتضمنها نصوص التجربة مثل أن يقال (زهرة نرد غير مزيفة أو قطعة نقود متوازنة أو كريات لا نفرق بينها باللمس)

مثال :

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات متتالية ، نعتبر الحادثة A الحصول على ظهرين وجه نمز للظهر P بالرمز و للوجه بالرمز F .

1. أنشئ مخططًا يوضح كل الحالات . 2. استنتج احتمال الحادثة A .

4 - خواص الاحتمالات :

Ω مجموعة الإمكانيات معرف عليها قانون احتمال P :

1) من أجل كل حادثة A فإن $0 \leq P(A) \leq 1$.

$$P(\emptyset) = 0 \quad P(\Omega) = 1 \quad 2$$

3) إذا كانت A و B حادثتين كيفيتين فإن : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) إذا كانت A و B حادثتين غير متلائمتين فإن ($A \cap B = \emptyset$) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5) إذا كانت الحادثة A جزءاً من الحادثة B فإن ($A \subset B$) $P(A) \leq P(B)$

6) إذا كانت \bar{A} الحادثة العكسية للحادثة A فإن ($\bar{A} = A^c$) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ أي $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

مثال 01 :

عند رمي زهرة نرد غير مزيفة أوجهها مرقطة من 1 إلى 6 ، نعتبر الحوادث :

" $A = 1$ " الحصول على رقم زوجي 1

" $B = 3$ " الحصول على رقم من مضاعفات 3 2

عين الحوادث و احسب احتمالها : A ، B ، \bar{A} ، $A \cap B$ ، $A \cup B$

مثال 02 :

$P(B) = 0,3$ ، $P(A \cap B) = 0,2$ ، $P(A \cup B) = 0,7$ ، احسب : $P(A)$ و B حادثان حيث :

مثال 03 :

$P(A) = 0,45$ ، $P(B) = 0,37$ ، $P(A \cup B) = 0,82$ ، اثبت أن A و B غير متلائمين A و B حادثان حيث :

5 – أمل وتبابين والانحراف المعياري لقانون الاحتمال :

لتكن Ω مجموعة الإمكانيات لتجربة عشوائية نتائجها أعداد حقيقية حيث :

$P_i = P(e_i)$ و $P(\Omega) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ احتمال على Ω ، نضع

$E = \sum_{i=1}^n e_i P_i$ أمل قانون الاحتمال هو العدد E المعرف كما يلي :

$V = \sum_{i=1}^n (e_i - E)^2 P_i$ تبabin قانون الاحتمال هو العدد V حيث

$S = \sqrt{V}$ الانحراف المعياري لقانون الاحتمال هو العدد S حيث

$V = \sum_{i=1}^n e_i^2 P_i - E^2$ يمكن أن نكتب :

6 – المتغير العشوائي :

لتكن Ω المجموعة الشاملة .

كل دالة عددية معرفة على Ω وتأخذ قيمها في \mathbb{R} تسمى متغيراً عشوائياً .

مثال : نرمي ثلاث مرات متتابعة قطعة نقدية متوازنة ، نريح 15 دينار كلما كانت النتيجة (ظهر P) ونخسر 5 دينارات كلما كانت النتيجة

(وجه F) ، ولتكن الربح الجيري الحصول عليه بعد 3 رميات .

قانون الاحتمال لمتغير عشوائي :

ليكن P احتمال معرف على Ω ، X متغير عشوائي معرف على Ω و (Ω) مجموعة متهبة ، عندما نرفق بكل قيمة x من X احتمالات الحوادث $x = x_i$ نقول أنها نعرف قانون احتمال P_x للمتغير العشوائي X .

x_i	المجموع
$P(X = x_i)$	1

مثال :

نسحب كرة من صندوق يحتوي 10 كرات منها 5 بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء ، نرفق بكل كرة بيضاء العدد 2 وبكل كرة العدد 2 - وبكل كرة سوداء العدد 1.

/01 الامل الرياضي للمتغير X هو العدد حيث :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

/02 التباين للمتغير X هو العدد $V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 P_i$

/03 الانحراف المعياري للمتغير X هو العدد $S = \sqrt{V(X)}$

/04 ويمكن كتابة $V(X) = \sum_{i=1}^n e_i^2 P_i - (E(X))^2$



القواعد ، الترتيبات و التوفيقات :

و p عدداً طبيعياً غير معدومين ، نعتبر التجربة سحب p عنصر من مجموعة ذات n عنصراً :

العدد	الترتيب	النكرار	السحب
	م	م	على التوالي بالرجوع : قوائم
	م	غم	على التوالي بدون إرجاع : ترتيبات
	غم	غم	في أن واحد : توفيقات

$$A_n^n = n! = n(n-1)(n-2) \dots \times 2 \times 1 , \quad A_n^p = n(n-1) \times \dots \times (n-p+1)$$

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} , \quad C_1^0 = 1 , \quad C_n^n = 1 , \quad C_n^1 = n$$

امثلة :

- 1) كم عدد من 4 أرقام يمكن تشكيله باستخدام أرقام
- 2) لتكن ، كم عدد من 3 أرقام مختلفة من يمكن تشكيله .
- 3) نريد تشكيل لجنة من رئيس و نائب 1 و نائب 2 من قسم 3 علمي 1 (31 تلميذ) بكم طريقة يمكن تشكيلها .

دستور ثانوي الحد :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p \quad \text{لدينا : } (n \geq 1)$$

الاحتمالات الشرطية :

- **الحوادث المستقلة** : نقول عن حادثين A و B مستقلتين إذا وفقط إذا كان : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- **الاحتمال الشرطي** : ليكن P احتمالاً على المجموعة Ω و A حادثة حيث $0 < P(A) < 1$ من أجل كل حادثة B ،

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{نسمي احتمال "B" علماً أن A محققة "العدد" } P_A(B) \text{ والمعرف كما يلي :}$$

ويمكن الكتابة أيضاً : $P_A(B) = P(B/A)$

مثال : عند رمي زهرة نرد غير مزيف ، ما هو احتمال الحصول على رقم أكبر من 3 علماً أنه فردي .

قانون الاحتمالات الكلية :

أحدثتها العكسية ، \bar{A} أحدثتها العكسية ، A أحدثها غير معروض ،

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$$

سلسلة الاحتمالات

قطعة نقدية غير مزيفة ذات وجه F و ظهر P ، نرمي القطعة 4 مرات متتالية و نعتبر الحوادث التالية :

A : " الحصول على أربعة أوجه "

B : " الحصول على وجهين و ظهرين "

C : " الحصول على ثلاثة أوجه و ظهر "

1) قم بإنشاء شجرة الاحتمالات التي تمتلك هذه الوضعية .

2) إعطاء عدد الحالات الممكنة .

3) احسب احتمال : A ، B ، C

02 كيس A به أقلام 6 زرقاء و 5 حمراء ، و اخر به أقلام 9 زرقاء و 5 حمراء نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس .

1) ما هو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب ؟

2) احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية :

E : " الحصول على قلمين حمراوين " -

F : " الحصول على قلم واحد أحمر " -

G : " الحصول على الأقل على قلم أحمر " -

03 كيس يحتوي على 20 كرية منها 15 بيضاء و 5 سوداء ، نسحب علي التوالي كرتين دون ارجاع ، احسب احتمال

الحوادث التالية :

E : " الكرتين بيضاوين " -

F : " الكرية الأولى سوداء و الثانية بيضاء " -

G : " الكرتين من نفس اللون " -

H : " الكرتين سوداويتين " -

04

نرمي زهرة نرد مزيف أوجهه الستة تحمل الأرقام من 1 إلى 6 بحيث إحتمال ظهور كل وجه معطى كما يلي :

$$p(6)=0,05, p(5)=0,3, p(4)=0,15, p(3)=0,25, p(2)=0,13, p(1)=0,12$$

1 # حسب احتمال الحادثة A ظهور رقم زوجي

2 # حسب احتمال الحادثة B ظهور رقم فردي

3 # حسب احتمال الحادثة C ظهور رقم أولي

4 # حسب احتمال الحادثة D ظهور رقم مضاعف للعدد 3

يحتوي كيس 15 كرية مرقمة من 1 إلى 15 ، نسحب عشوائياً كرية واحدة ونسجل رقمها :

1 # حين المجموعة الشاملة Ω .

2 # حين الحادثة A الحصول على رقم مضاعف للعدد 5 .

3 # حين الحادثة B الحصول على رقم مضاعف للعدد 3 .

4 # حين الحوادث : $A \cap B$ و $\overline{A} \cap \overline{B}$ و $\overline{A} \cap B$ ثم استنتج الحادثين :

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 كرات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 و 3 و 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ،

و 4 ، نسحب عشوائياً من الكيس كرة واحدة

1 # حسب احتمال الحوادث التالية :

: كررة سوداء ، B : كررة بيضاء ، C : كررة تحمل رقم زوجي .

2 # حسب احتمال الحوادث : $B \cup C$ ، $N \cup C$ ، $N \cup B$ ، $B \cap C$ ، $N \cap C$ ، $N \cap B$:

إليك قانون احتمال الآتي :

1 # حسب الامل الرياضي

2 # حسب التباین والاخراف المعياري

x_i	-6	-5	-4	4	5	8
p_i	0,1	0,2	0,05	0,4	0,05	0,2

نعتبر المجموعة $\Omega = \{-1, 0, 2, 5, 6, 10\}$ ونعرف قانون الاحتمال على Ω كما في الجدول :

e_i	-1	0	2	5	6	10
p_i	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	a

1 # عين العدد الحقيقي

2 # حسب الامل لهذا القانون .

3 # حسب التباین ثم الاخراف المعياري لهذا القانون

99 نرمي قطعة نقدية غير مزيفة 3 مرات متتابعة وليكن X المتغير العشوائي يرفق بكل 3 رميات متتابعة عدد الأوجه الظاهرة F

1 # أخطط الحالات الممكنة

2 # أخطط مجموعة قيم X .

3 # عين قانون الاحتمال للمتغير X .

4 # عين الامل الرياضي للمتغير X

5 # حسب التباين والانحراف المعياري للمتغير X .

10 يحتوي وعاء على 6 قرطاسات لا تفرق بينها باللمس كل منها مرقطة بعدد اولي يتبع الى مجموعة الاعداد الأولية الستة

الأولى ، نسحب من الوعاء قريصتان في أن واحد عشوائيا ، وليكن X هو المتغير عشوائيا أي يأخذ مجموع الرقمن اللذان

تحملهما القرصستان المسحوبتان

1 # عين قيم المتغير العشوائي X .

2 # كتب قانون الاحتمال للمتغير X .

3 # حسب الامل الرياضي .

4 # حسب التباين والانحراف المعياري .

11 يرمي لاعب زهرى نرد متوازنين على شكل رباعي أوجه كل منهما تحمل الأرقام 1,2,3,4 وليكن X المعرف كما يلى

(أ) إذا كان كان مجموع الرقمين الظاهرين زوجيا يربع نفس مجموع الرقمين بالدينار .

(ب) إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين فرديا يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار .

1 # عين قيم المتغير العشوائي X

2 # عين قانون احتمال المتغير X

3 # حسب الامل الرياضي ، التباين والانحراف المعياري للمتغير X .

12 مجموعة مكونة من 100 شخص 60% رجال ونعلم أن 20% من الرجال و 25% من النساء يتكلمون الفرنسيه

نختار شخصا عشوائيا من هذه المجموعة ، ما هي احتمالات الحوادث التالية :

1 A = " رجل يتكلم الفرنسيه "

2 B = " امرأة تتكلم الفرنسيه "

3 C = " شخص يتكلم الفرنسيه "

13 نظم 5 لاعبين A, B, C, D, E منافسة في لعبة الشطرنج ، نفرض ان اللاعبين A, B و C لهم نفس الاحتمال للربح

واللاعبين D و E لهم نفس الاحتمال للربح و أن اللاعب A له ثلات مرات حظوظ الربح لللاعب D .

1. احسب احتمال ربح كل لاعب .
2. احسب احتمال ربح D أو E .
3. ما هو احتمال ربح A أو B أو C .
4. ما هو احتمال أن B لا يربح .

14 كيس يحتوي على 8 كرات منها 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء وكرة بيضاء ، نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلات كرات من الكيس ، نسمى X المتغير العشوائي الذي يرفق عدد الالوان المحصل عليها

1. احسب عدد الحالات الممكنة .
2. احسب الاحتمالات التالية : - 3 كرات من نفس اللون - كرة علي الاقل حمراء - كرتين علي الاكثر حمراء
3. ما هي قيمة X .
4. احسب الاحتمالات التالية : $P(x=2), P(x=3)$ واستنتج
5. احسب الامل الرياضي $(X) E$ و التباين $(X) V$ ثم الانحراف المعياري $(X) \delta$

15 يحتوي كيس على اربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0،1،1،2 وأربع كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 1 ، 2 نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلات كرات من الكيس ، ولتكن X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات التي تحمل الرقم 1

1. ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون .
2. ما هو احتمال الحصول على 3 كرات تحمل نفس الرقم .
3. ما هو احتمال الحصول على 3 كرات ارقامها مختلفة مثنية مثني .
4. عين قانون احتمال المتغير العشوائي X
5. احسب الامل الرياضي $(X) E$
6. احسب التباين $(X) V$
7. احسب الانحراف المعياري $(X) \delta$

16 يضم كيس 5 كرات متماثلة منها 3 بيضاء والباقي سوداء، نسحب كرتين عشوائيا ، نعتبر عدد الكرات البضاء المحصل عليها عين قانون احتمال في كل حالة

- (أ) السحب على التوالي دون ارجاع .
- (ب) السحب على التوالي مع الارجاع .
- (ج) السحب دفعة واحدة .

نفرض أن احتمال الازدياد للجنسين (الذكر و الانثى) متساوي مهما كانت رتبة هذه الولادة ، نعتبر مجموعة تمثل

عائلات لها طفلاً وختار منها عشوائياً عائلة :

1. احسب احتمال الحوادث التالية :

A : " العائلة لها ذكران "

B : " الطفل الأكبر ذكر "

C : " العائلة لها على الأقل ذكر "

D : " الطفل الأصغر بنت "

2. إذا علمت أن الطفل الأكبر ذكر احسب احتمال أن العائلة لها ذكران .

3. احسب : $P_A(C)$ ، $P_D(A)$ ، $P_C(A)$.

هدية :

وكنت أضنهما يسيـرات	تكدست في رأسي المشكلات
رأيت كنوز متـلـأـت	دخلت مغـارـةـ الـرـيـاضـيـات
هـندـسـيـةـ وـأـخـرـىـ حـاسـبـيـةـ المـكـونـات	جائـتـيـ الـاـعـدـادـ مـتـتـالـيـاتـ هـذـه
بيـنـ عـمـودـيـنـ مـنـ أـعـمـدةـ الـمـحـدـدـات	أـسـرـعـتـ لـلـخـرـوجـ فـقـيـدـتـيـ الـمـتـسـلـسـلـات
هـربـتـ مـنـ اـحـدـيـ الـمـقـدـوـفـات	قـفـزـتـ إـلـىـ رـأـسـ الـاحـتـمـالـات
فـسـالـتـ عـنـ الـمـنـجـيـات	وـحاـولـتـ تـوـحـيدـ الـمـقـامـات
وـجـدـتـ نـفـسـيـ أـسـيرـ الـفـئـات	قـالـوـ عـلـيـكـ بـالـمـنـحـنـيـات
وـكـلـتـنـيـ قـيـودـ الـمـتـابـيـنـات	تـكـالـبـتـ عـلـيـ أـذـرـعـ الـلـوـغـارـيـتمـات
سـرـتـ وـحـيدـاـ عـلـيـ مـحـورـ السـيـنـات	فـعـلـمـتـ أـنـهـ لـاـ مـفـرـ مـنـ الـرـيـاضـيـات

الموقع الأول لتحضير الفروض والاختبارات في الجزائر

<https://www.dzexams.com>

https://www.dzexams.com/ar/0ap	القسم التحضيري
https://www.dzexams.com/ar/1ap	السنة الأولى ابتدائي
https://www.dzexams.com/ar/2ap	السنة الثانية ابتدائي
https://www.dzexams.com/ar/3ap	السنة الثالثة ابتدائي
https://www.dzexams.com/ar/4ap	السنة الرابعة ابتدائي
https://www.dzexams.com/ar/5ap	السنة الخامسة ابتدائي
https://www.dzexams.com/ar/bep	شهادة التعليم الابتدائي
https://www.dzexams.com/ar/1am	السنة الأولى متوسط
https://www.dzexams.com/ar/2am	السنة الثانية متوسط
https://www.dzexams.com/ar/3am	السنة الثالثة متوسط
https://www.dzexams.com/ar/4am	السنة الرابعة متوسط
https://www.dzexams.com/ar/bem	شهادة التعليم المتوسط
https://www.dzexams.com/ar/1as	السنة الأولى ثانوي
https://www.dzexams.com/ar/2as	السنة الثانية ثانوي
https://www.dzexams.com/ar/3as	السنة الثالثة ثانوي
https://www.dzexams.com/ar/bac	شهادة البكالوريا