دراسة دالة أسية رقم 01 + 02

المسألة 01 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثمّ بيّن أنّ المستقيم الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، و أنّ المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

3) حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المقاربين .

4) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكّل جدول تغيّراتها .

5) أنشئ المنحني (C) و المستقيمات المقاربة.

6) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$.

المسألة 02 :

نعتبر الدالتان f_0 و f_1 المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_0(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ و $f_1(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

و ليكن (C_0) و (C_1) منحناهما البيانيين في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) 1) أحسب نهاية f_0 عند $-\infty$ و $+\infty$ ، ثمّ استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_0) .

2) بيّن أنّ النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$ هي مركز التناظر للمنحنى (C_0) .

3) أدرس تغيّرات الدالة f_0 .

4) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_0) عند النقطة K .

5) أ) بيّن أنّه لدراسة وضعية (T) بالنسبة إلى (C_0) يكفي دراسة إشارة العبارة : $g(x)=2e^x-xe^x-2-x$

ب) أحسب كلا من $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثمّ عيّن مع التبرير إشارة $g''(x)$ ، $g'(x)$ ، $g(x)$ ، و ذلك حسب قيم x .

ج) إستنتج و ضعية المنحنى (C_0) بالنسبة إلى المماس (T) .

د) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_0) .

II) 1) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ و $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=\dfrac{1}{2}$.

2) شكّل جدول تغيّرات الدالة f_1 ، ثمّ أنشئ المنحنى (C_1) في نفس المعلم السابق .

حــل مختصر للمسألة رقم 01

❖) لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

1) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0\end{cases}$.

❖) بما أنّ : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-\dfrac{2e^x}{e^x+1})=0$ ، .

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y=x+1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $-\infty$.

2) أ) التحقّق أنّ : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$.

لدينا : $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، إذن يمكن كتابة : $f(x)=x-1+2-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، أي :

$f(x)=x-1+\dfrac{2e^x+2-2e^x}{e^x+1}$ ، و منه : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ ، و هو المطلوب .

ب) حساب النهاية عند $+\infty$ (نستعمل العبارة الثانية) .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{2}{e^x+1})=0\end{cases}$.

❖) بما أنّ : $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{2}{e^x+1})=0$.

إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب مائل للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

3) تحديد الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمقاربين :

❖) ندرس إشارة : $f(x)-(x+1)=-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ ، نلاحظ أنّ : $-\dfrac{2e^x}{e^x+1}<0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحني (C) يقع تحت المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$.

❖) ندرس إشارة : $f(x)-(x-1)=\dfrac{2}{e^x+1}$ ، نلاحظ أنّ : $\dfrac{2}{e^x+1}>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : المنحني (C) يقع فوق المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$.

4) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f : (نختار الشكل $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$).

❖) الدالة المشتقة : $f'(x)=1+\dfrac{-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}$ ،

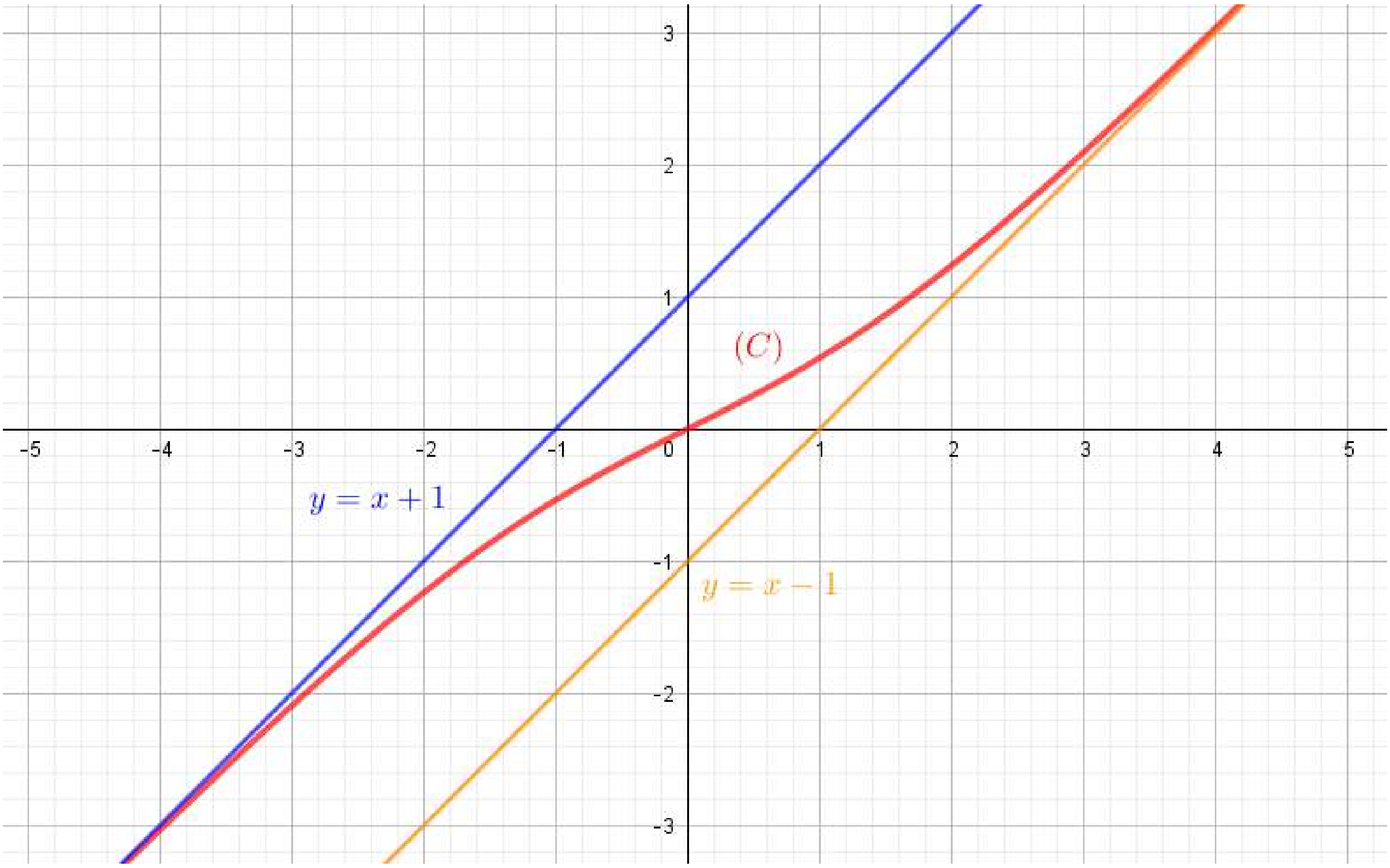
و منه : $f'(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$ ، نلاحظ أنّ : $f'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

إذن : الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

5) الإنشـــــــاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا : $(1-m)(e^x+1)-2e^x=0$ ، أي : $(1-m)(e^x+1)=2e^x$ ، أي : $\dfrac{2e^x}{e^x+1}=1-m$ ، أي :

$-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=m-1$ ، (بإضافة $x+1$) : $x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}=x+m$ ، و منه : $f(x)=x+m$.

إذن : عدد حلول المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ و الذي يوازي المقاربين للمنحنى (C) هما : $y=x+1$ وَ $y=x-1$.

أي أنّ المناقشة البيانية تكون كما يلي :

❖) لما : $m\in\left]-\infty;-1\right]$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

❖) لما : $m\in\left[1;+\infty\right[$ ، المعادلة لا تقبل حلول .

❖) لما : $m\in\left]-1;1\right[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد .

حـل مختصر للمسألة رقم 02

I) 1) حساب نهايات الدالة f_0 :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = 0 \ \ldots \left\{\begin{array}{l}0\\1\end{array}\right.$. المنحني (C_0) يقبل حامل محور الفواصل كمقارب بجوار $-\infty$

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\dfrac{1}{e^x}+1} = 1$. المنحني (C_0) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=1$ ، بجوار $+\infty$.

2) لدينا النقطة $K(0;\dfrac{1}{2})$.

❖) أوّلا : D_{f_0} متناظرة بالنسبة إلى 0 .

❖) ثانيا : نبيّن أنّ : $f_0(2a-x)+f_0(x)=2b$ ، مع : $\left\{\begin{array}{l}a=0\\ b=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x)=1$.

❖) لنحسب : $f_0(-x)+f_0(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x) = \dfrac{e^{-x}\times e^x}{(1+e^{-x})e^x} + \dfrac{e^x}{1+e^x}$ ،

أي : $f_0(-x)+f_0(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + \dfrac{e^x}{1+e^x}$ ، أي : $f_0(-x)+f_0(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^x} = 1$.

إذن : النقطة K هي مركز التناظر للمنحني (C_0) .

3) دراسة تغيّرات الدالة f_0 :

❖) حساب $f_0'(x)$: $f_0'(x) = \dfrac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2} = \dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

نلاحظ أنّ : $f_0'(x)>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، إذن : الدالة f_0 متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

❖) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_0'(x)$	$+$	
$f_0(x)$	0 ↗	1

4) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة K :

$(T): y = f_0(0)(x-0)+f_0(0)$ ، و منه : $(T): y = \dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$ ، لأنّ : $\left\{\begin{array}{l}f_0'(0)=\dfrac{1}{4}\\ f_0(0)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

5) أ) دراسة وضعية (C_0) بالنسبة إلى (T) : ندرس إشارة الفرق $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$

أي ، $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x-2}{4}=\frac{4e^x-x-xe^x-2-2e^x}{4(e^x+1)}$:

و منه : $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{x-2}{4}=\frac{2e^x-xe^x-x-2}{4(e^x+1)}$ ، $f(x)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})=\frac{g(x)}{4(1+e^x)}$.

❖) لدينا : $4(1+e^x)>0$ ، إذن : لدراسة إشارة الفرق يكفي دراسة إشارة $g(x)$.

ب) حساب $g'(x)$ وَ $g''(x)$:

❖) $g'(x)=2e^x-(e^x+xe^x)-1=2e^x-e^x-xe^x-1$ ، و منه : $g'(x)=e^x-xe^x-1$.

❖) $g''(x)=e^x-(e^x+xe^x)=e^x-e^x-xe^x$ ، و منه : $g''(x)=-xe^x$.

- إذن إشارة $g''(x)$ من إشارة $-x$.

❖) إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$ $\nearrow$	0	$\searrow$ $-$	

$g''(0)=0$

❖) إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$		$+$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-$	

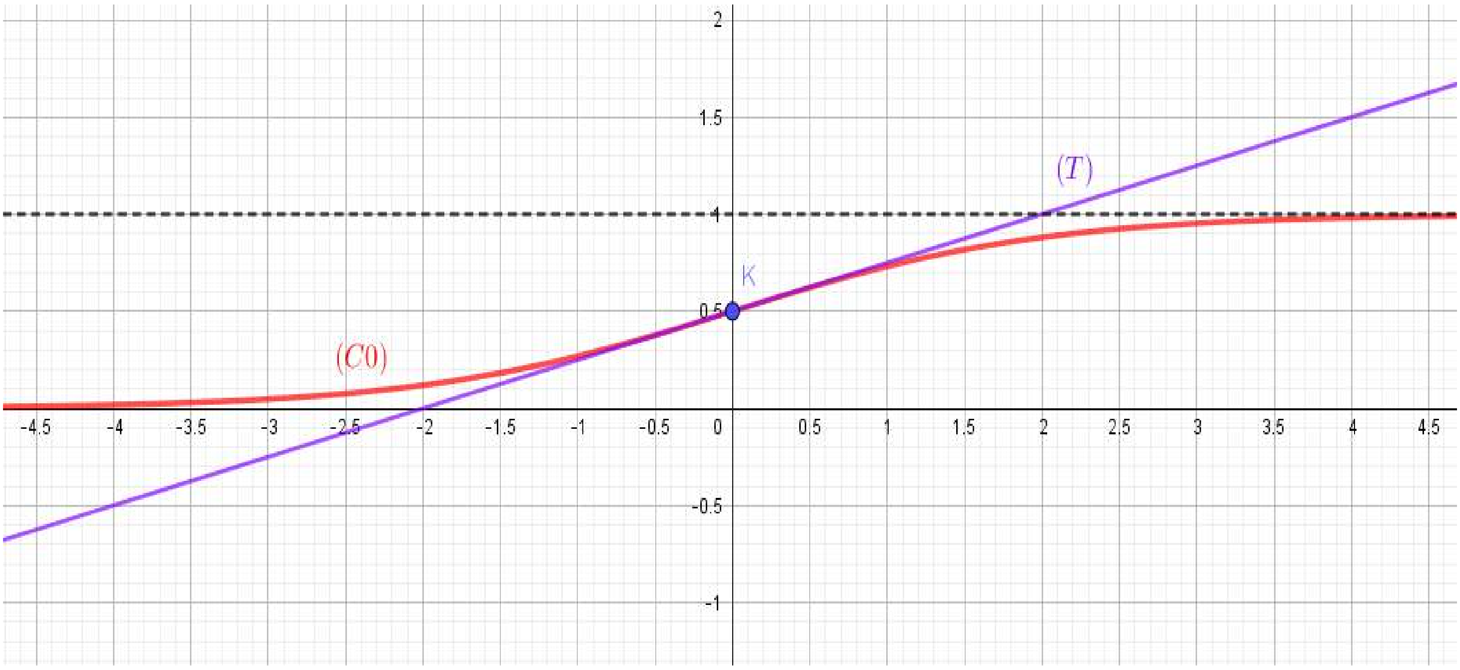
$g'(0)=0$

ج) إشارة : $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$-$	
الوضعية		(C_0) يقع فوق (T)	(C_0) يخترق (T) عند النقطة K	(C_0) يقع تحت (T)	

❖) إستنتاج : النقطة K تعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C_0) .

د) الإنشــــــاء :



II) 1) تكون النقطتان : $M(x;f_0(x))$ وَ $M'(x;f_1(x))$ متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y=\frac{1}{2}$ ،

إذا كان : $\frac{1}{2}=\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$.

❖) نحسب : $\frac{1}{2}=\frac{\frac{e^x+1}{e^x+1}}{2}=\frac{\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{e^x+1}}{2}=\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$.

و منه : M وَ M' متناظرتان بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة : $y=\frac{1}{2}$.

أي أنّ : (C_0) وَ (C_1) متناظران بالنسبة لهذا المستقيم .

2) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_1 :

بما أنّ (C_0) وَ (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y=\frac{1}{2}$ فإنّ : $\frac{1}{2}=\frac{f_0(x)+f_1(x)}{2}$ ،

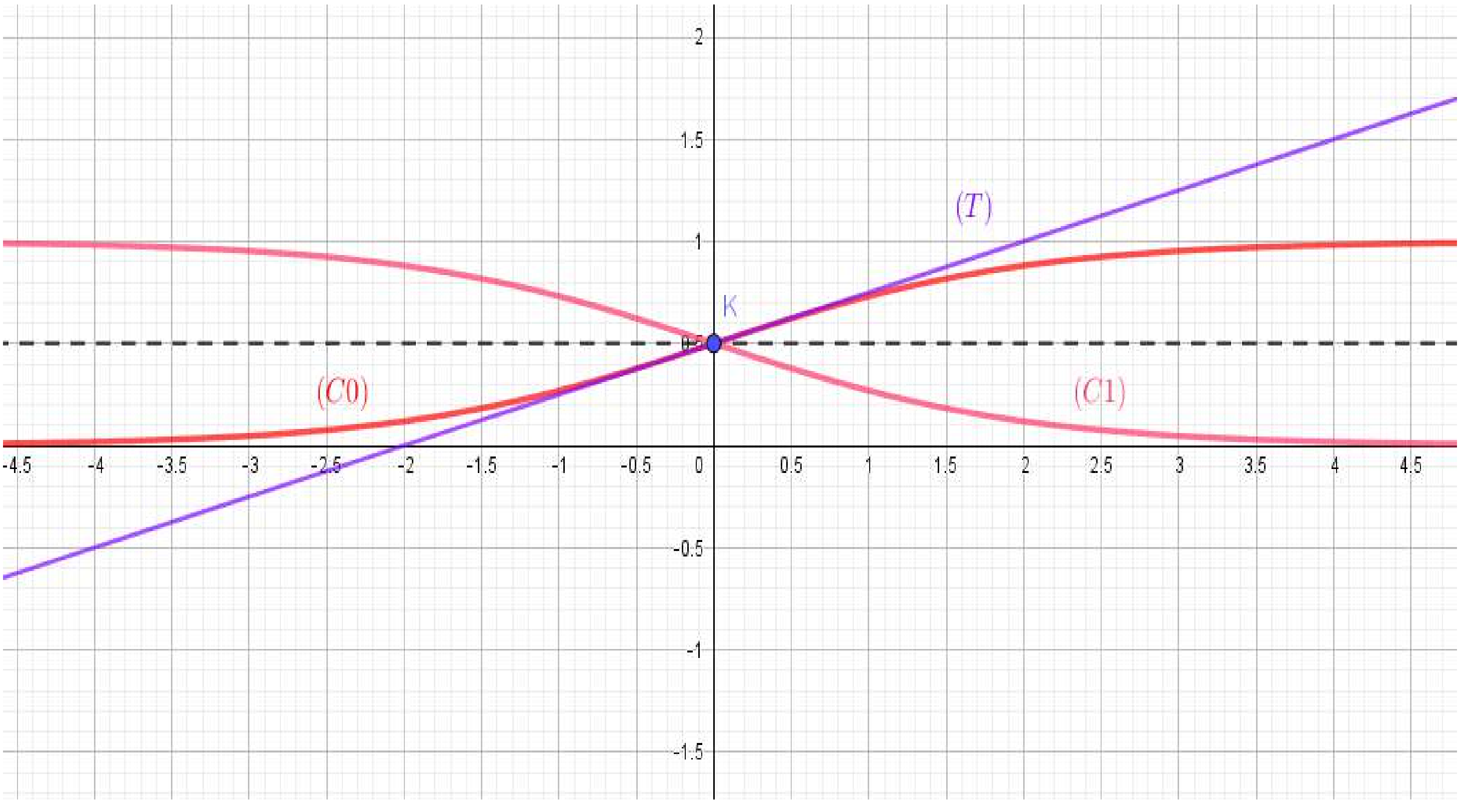
إذن : $\frac{1}{2}=\frac{f_0+f_1}{2}$ ، أي : $f_0+f_1=1$ ، و منه : $f_1=1-f_0$.

و عليه فإنّ : إتجاه تغيّر الدالة f_1 هو عكس إتجاه تغيّر الدالة f_0 .

❖) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$-$
$f_1(x)$	$1 \searrow 0$

❖) الإنشـــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة أسية رقم 03 + 04

المسألة 03 :

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^x-x-1$.

1) أحسب نهايات الدالة g عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.

2) أدرس إتجاه تغيّر الدالة g ، و شكّل جدول تغيّراتها .

3) أحسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسياً .

2) أحسب $f'(x)$ ، ثمّ أدرس إتجاه تغيّر الدالة الدالة f وَ شكّل جدول تغيّراتها .

3) أ) عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

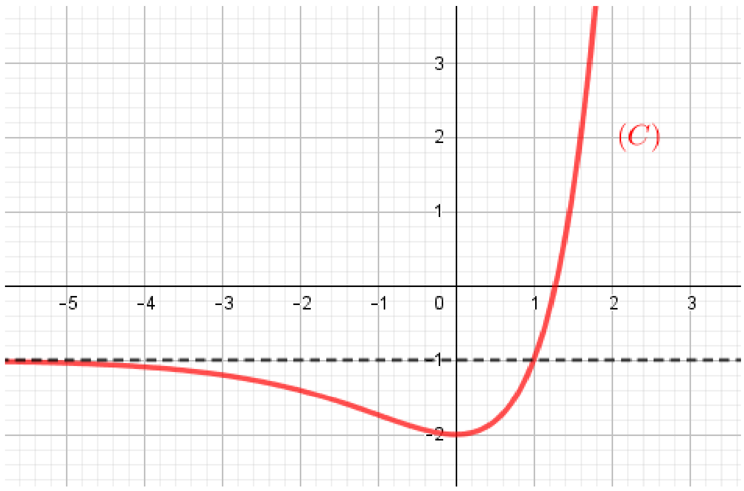
ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المماس (T) .

4) انشئ المماس (T) ، وَ المستقيمات المقاربة ، وَ المنحنى (C) .

5) m وسيط حقيقي ، ناقش بيانياً و حسب قيم m حلول المعادلة : $f(x)=mx$.

المسألة 04 :

I) في الشكل المقابل : (C) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بــ : $g(x)=(ax+b)e^x+c$.



1) بقراءة بيانية :

أ) عيّن $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ ، ثمّ استنتج قيمة c .

ب) عيّن نهاية الدالة g عند $+\infty$.

ج) عيّن كلاً من : $g(0)$ وَ $g'(0)$ ، ثم استنتج قيمتي كل من a وَ b .

2) نفرض فيما يلي : $g(x)=(x-1)e^x-1$.

أ) شكّل جدول تغيّرات الدالة g .

ب) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α محصور بين : $1,2$ وَ $1,3$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في م.م.م.م $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ وَ $+\infty$ ، ثم حدّد المستقيم المقارب بجوار $+\infty$.

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

3) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، وَ شكّل جدول تغيّراتها .

4) بيّن أنّ : $f(\alpha)=\alpha-1$ ، ثمّ استنتج حصراً لــ $f(\alpha)$.

5) أنشئ المنحني (C_f) .

6) ناقش بيانياَ و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x)=f(m)$.

حل مختصر للمسألة رقم 03

I) لدينا : $g(x)=e^{x}-x-1$.

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x}-x-1)=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x})=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty\end{cases}$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x}-x-1)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{e^{x}}{x}-1-\frac{1}{x})=+\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{e^{x}}{x})=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x})=0\end{cases}$.

2) دراسة تغيرات الدالة g ، و تشكيل جدول تغيّراتها :

❖) الدالة المشتقة : $g'(x)=e^{x}-1$.

- تكون $g'(x)\geq 0$ ، أي : $(e^{x}-1\geq 0)$ ، أي : $e^{x}\geq 1$) ، إذا كان : $x\geq 0$.
- تكون $g'(x)\leq 0$ ، أي : $(e^{x}-1\leq 0)$ ، أي : $e^{x}\leq 1$) ، إذا كان : $x\leq 0$.

إذن الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ ، و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $+$	0	$\nearrow$ $+$	$+\infty$

3) نحسب : $g(0)=0$ ، و عليه نستنتج و نلخص إشارة $g(x)$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^{x}-x}$:

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{x}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^{x}}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}-1}=-1$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=0$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x}-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^{x}}{x}-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^{x}}{x}-1}=0$ ، لأنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}}{x}=+\infty$.

❖) التفسير الهندسي :

- بجوار $-\infty$ المنحنى (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=-1$.

- بجوار $+\infty$ المنحني (C) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) ❖ حساب $f'(x)$: $f'(x)=\dfrac{(e^x-x)-(e^x-1)\times x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $(1-x)$ ، أي :

تكون : $f'(x)\geq 0$ إذا كان : $x\leq 1$ وَ تكون : $f'(x)\leq 0$ ، إذا كان : $x\geq 1$.

❖) و عليه : الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

❖) جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↗	$f(1)$	↘	0

$f(1)=\dfrac{1}{e-1}\approx 0,58$.

3) أ) معادلة المماس (T) :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، و منه : $(T): y=x$ ، لأنّ : $\begin{cases} f'(0)=1 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

ب) الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (T) : أي ندرس إشارة الفرق $f(x)-x$:

$f(x)-x=\dfrac{x}{e^x-x}-x=\dfrac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\dfrac{x(1-e^x+x)}{e^x-x}=\dfrac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\dfrac{-x\times g(x)}{e^x-x}$.

❖) لدينا من الجزء الأول : $g(x)\geq 0$ ، أي : $e^x-x-1\geq 0$ ، أي : $e^x-x\geq 1$ ، و منه : $e^x-x\geq 0$.

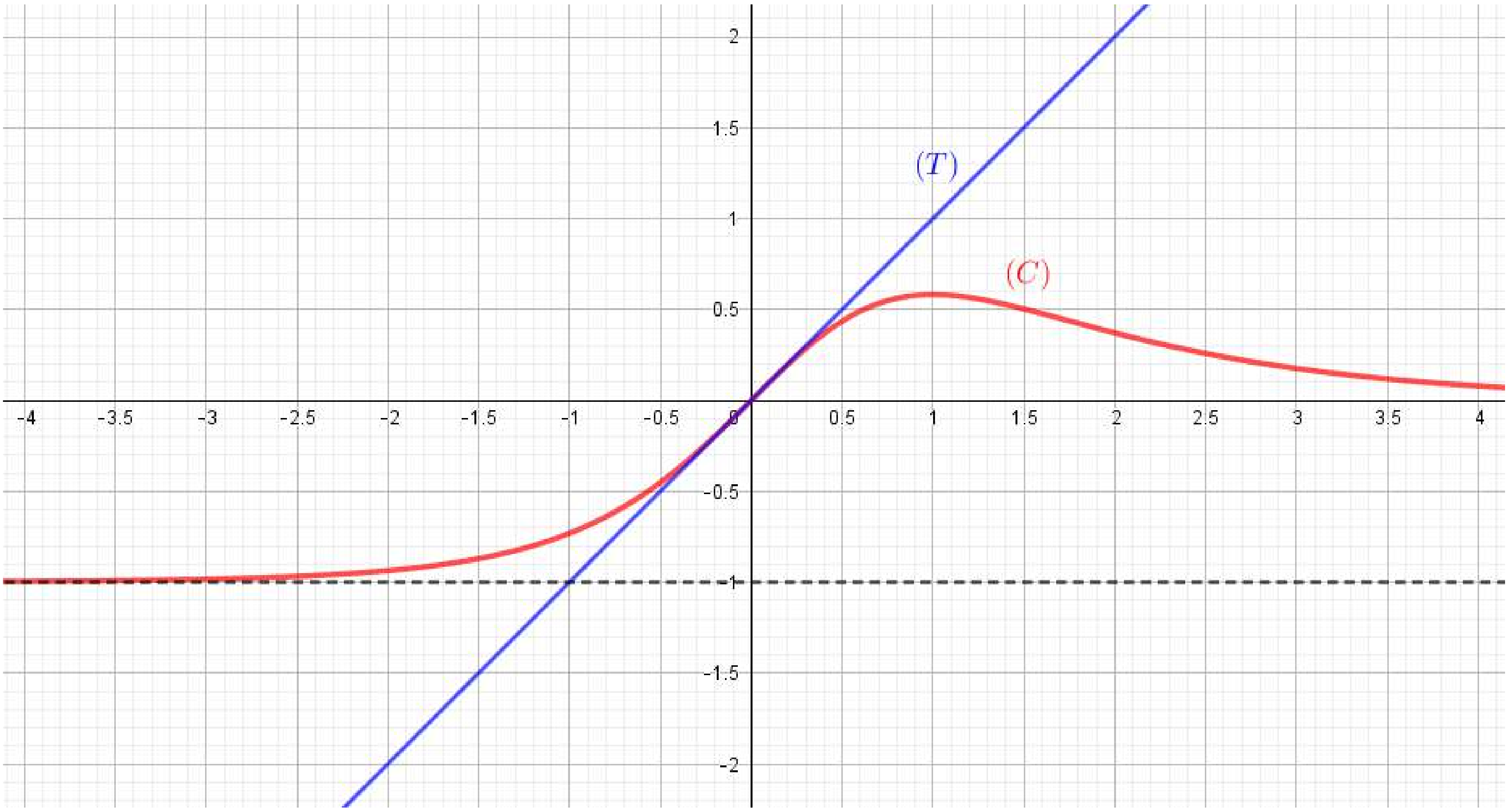
إذن : إشارة $(f(x)-x)$ من إشارة $(-x\times g(x))$ ، و بما أنّ : $g(x)\geq 0$ ، فالإشارة من إشارة $(-x)$.

❖) نلخص الوضعية في الجدول التالي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C) يقع فوق (T)	(C) يخترق (T) في النقطة O	(C) يقع تحت (T)	

ملاحظة : المبدأ O يعتبر نقطة إنعطاف للمنحني (C) .

4) الإنشـــــــاء :



5) المناقشة البيانية :

لدينا : $f(x) = mx$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير يمرّ بالمبدأ O ، (مناقشة دورانية) .

❖) إذا كان : $0 < m < 1$ ، فإنّ : المعادلة تقبل ثلاث حلول .

❖) إذا كان : $m \geq 1$ أو $m \leq 0$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

حل مختصر للمسألة رقم 04

I) 1) بقراءة بيانية :

أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-1$ ، و نعلم أنّ : c = $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(ax+b)e^x+c\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}(\underbrace{axe^x}_{0}+\underbrace{be^x}_{0}+c)=c$. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

إذن نستنتج أنّ : $c=-1$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

ج) لدينا : $g(0)=-2$ و $g'(0)=0$.

- لدينا : $g(0)=-2$ ، أي : $(a\times 0+b)e^0-1=-2$ ، أي : $b-1=-2$ ، و منه : $b=-1$.
- نحسب $g'(x)$: $g'(x)=a\times e^x+(ax+b)e^x=e^x(a+ax+b)$ ، لدينا : $g'(0)=0$ ، أي : $e^0(a+a\times 0-1)=0$ ، أي : $a-1=0$ ، و منه : $a=1$.

إذن : $g(x)=(x-1)e^x-1$.

2) أ) تشكيل جدول تغيّرات الدالة g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

ب) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $[1,2;1,3]$ ، و بما أنّ : $\begin{cases} g(1,2)=-\ldots \\ g(1,3)=+\ldots \end{cases}$ ، أي : $g(1,2)\times g(1,3)<0$.

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $1,2$ و $1,3$.

ج) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) لدينا : $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$.

1) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=-\infty$.

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}=0$.

❖) بجوار $+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل حامل محور الفواصل كمستقيم مقارب .

2) لدينا : $(\Delta): y=x$ ، نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x}{e^x+1}-x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-xe^x-x}{e^x+1}$ ،

و منه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\dfrac{-xe^x}{e^x+1}=0$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(-xe^x)=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1)=1\end{cases}$

إذن : المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

❖) الوضعية : أي ندرس إشارة $\dfrac{-xe^x}{e^x+1}$ ، إذن : الإشارة من إشارة $(-x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$	
الوضعية		(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة O	(C_f) يقع تحت (Δ)	

3) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

❖) نحسب : $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(-x+1)e^x+1}{(e^x+1)^2}=\frac{-\left[(x-1)e^x-1\right]}{(e^x+1)^2}=\frac{-g(x)}{(e^x+1)^2}\ .$$

إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$.

❖) جدول التغيّرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) إثبات أنّ : $f(\alpha)=\alpha-1$.

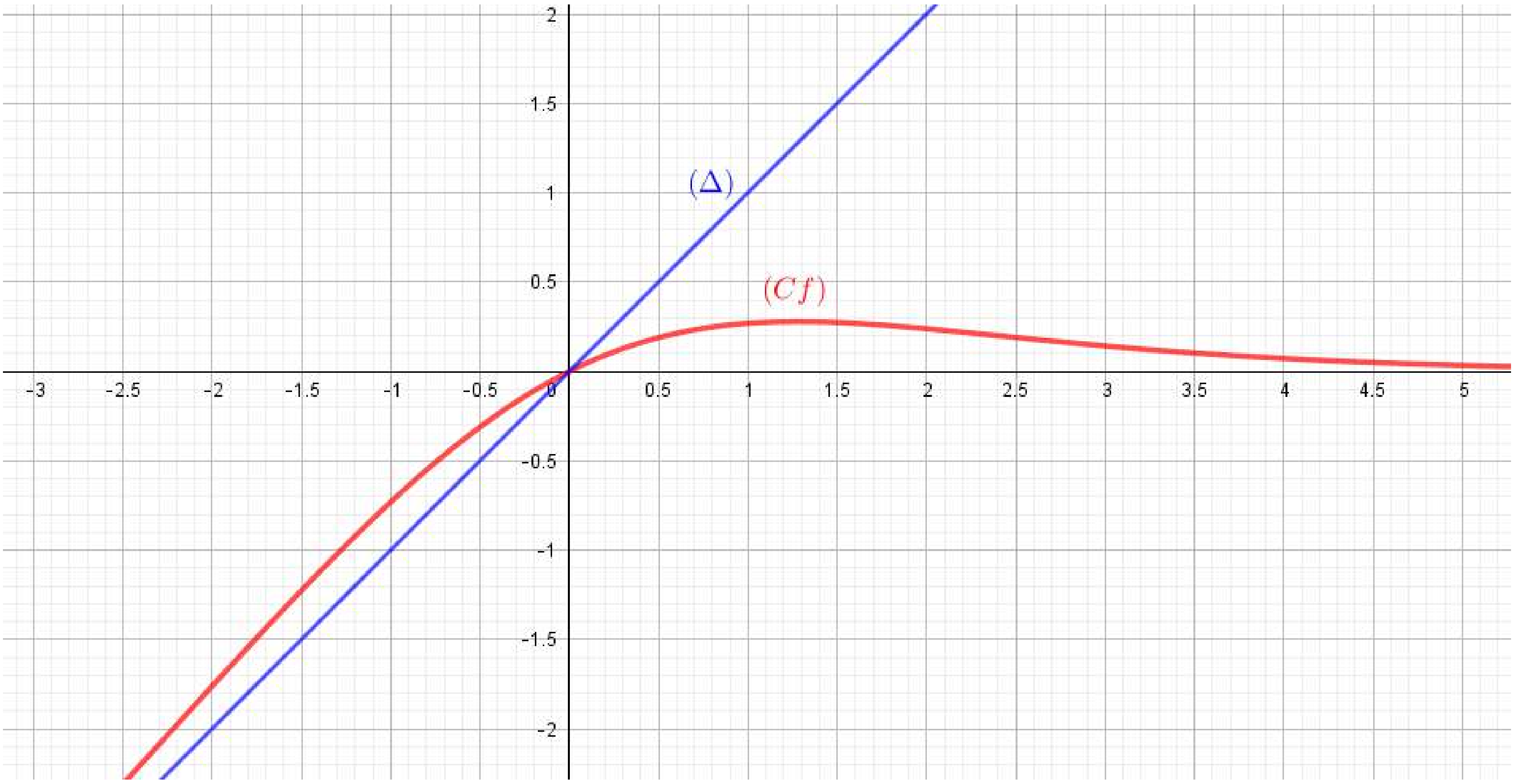
نعلم أنّ : $g(\alpha)=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha-1=0$ ، أي : $(\alpha-1)e^\alpha=1$ ، و منه : $e^\alpha=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

❖) لنحسب : $f(\alpha)$: $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{e^\alpha+1}$ ، أي : $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\dfrac{\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}}=\alpha\times\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$ ،

و منه : $f(\alpha)=\alpha-1$ ، و هو المطلوب.

❖) حصر $f(\alpha)$: لدينا : $1{,}2<\alpha<1{,}3$ ، أي : $0{,}2<\alpha-1<0{,}3$ ، و منه : $0{,}2<f(\alpha)<0{,}3$.

5) الإنشـــــــــاء :



6) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = f(m)$ ، عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و الذي معادلته : $y = f(m)$.

❖) إذا كان : $m \in \left]-\infty;0\right]$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

❖) إذا كان : $m \in \left]0;\alpha\right[\cup \left]\alpha;+\infty\right[$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حلان متمايزان .

❖) إذا كان : $m = \alpha$ ، فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة أسية رقم 05

المسألة 05 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \quad ....; x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

(C) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

الجزء الأوّل :

1) برهن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى (C) .

2) أ) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{f(x)}{x}$ ، و ذلك من أجل كل عدد حقيقي $x>0$.

ب) ماذا يمكن إستنتاجه بالنسبة للدالة f ، و بالنسبة للمنحنى (C) ؟ .

3) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\left]0;+\infty\right[$ تكون : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$.

4) أدرس تغيّرات الدالة f ، و شكل جدول تغيّراتها .

الجزء الثاني :

نعتبر g الدالة المعرّفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1) بيّن أنّه في المجال $\left]0;+\infty\right[$ المعادلتان : $g(x)=0$ وَ $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان .

2) برهن أنّ المعادلة $x^3+x^2+2x-1=0$ تقبل حلاًّ وحيداً α ، حيث : $0,39<\alpha<0,40$.

3) نفرض (T_a) هو المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة a ، حيث : $a>0$.

أ) بيّن أنّ المماس (T_a) يشمل المبدأ O ، إذا وافقط إذا كان : $f(a)-af'(a)=0$.

ب) إستنتج أنّ المماس (T_a) المّــار بالمبدأ يمسّ المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

ج) أنشئ المماس (T_a) ، و المنحنى (C) .

4) بقراءة بيانية ، أعط عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx$ ، و ذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m .

❖ تعطى النتيـــــجة : $f'(\alpha)\approx 2,029$.

حل مختصر للمسألة رقم 05

لدينا : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \quad ....;x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

الجزء الأول:

1) حساب النهاية عند $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، لأنّ: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2})=\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{x^2}{x^2}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-\frac{1}{x}})=1 \end{cases}$.

و منه : عند $+\infty$ المنحني (C) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $(\Delta): y=1$.

2) أ) حساب النهاية : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}......(*)$.

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{x^2+x+1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3})e^{-\frac{1}{x}}$ ، أي :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[(\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})+(\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}})+(\dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}})\right]$ ، أي :

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left[-(-\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}})+(-\dfrac{1}{x})^2e^{-\frac{1}{x}}-(-\dfrac{1}{x})^3e^{-\frac{1}{x}}\right]$ ، بوضع $t=-\dfrac{1}{x}$ ، $\begin{cases} x\to 0 \\ t\to-\infty \end{cases}$ نجد :

$\lim\limits_{t\to-\infty}(*)=\lim\limits_{t\to-\infty}(-te^t+t^2e^t-t^3e^t)=0$ ، لأنّ: $\lim\limits_{t\to-\infty}t^n\times e^t=0$. إذن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

ب) نستنتج أنّ الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 ، و المنحني (C) يقبل عند المبدأ O مماساً هو حامل محور الفواصل .

3) حساب $f'(x)$:

$f'(x)=\dfrac{(2x+1)x^2-2x(x^2+x+1)}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}(\dfrac{x^2+x+1}{x^2})$ ، أي :

$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left[\dfrac{2x^3+x^2-2x^3-2x^2-2x}{x^4}+\dfrac{x^2+x+1}{x^4}\right]$ ، و منه : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، و هو المطلوب .

4) دراسة تغيرات الدالة f :

❖) لدينا : $f'(x)=\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}$ ، إشارة $f'(x)$ من إشارة : $(1-x)$.

إذن : الدالة f متزايدة على المجال $[0;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$3e^{-1}$	$\searrow$	1

الجزء الثاني : $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

1) لدينا : $g(x)=0$ معناه : $f(x)-xf'(x)=0$ ، أي : $\dfrac{x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-x\dfrac{1-x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}=0$ ،

أي : $\left[\dfrac{x^2+x+1}{x^2}-\dfrac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي : $\left[\dfrac{x^3+x^2+x}{x^3}-\dfrac{1-x}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$ ، أي : $\left[\dfrac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x}}=0$

أي : $\dfrac{x^3+x^2+2x-1}{x^3}=0$ ، و منه : $x^3+x^2+2x-1=0$.

إذن : المعادلتان $g(x)=0$ وَ $x^3+x^2+2x-1=0$ متكافئتان من أجل كل $x\in\left]0;+\infty\right[$.

2) لنضع : $h(x)=x^3+x^2+2x-1$ ، أي : $h'(x)=3x^2+2x+2$ ، نلاحظ أنّ : $\Delta<0$ ، و منه إشارة $h'(x)$ موجبة تماما ، إذن : الدالة h متزايدة تماما على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

❖) الدالة h مستمرة و رتيبة على المجال $\left]0,39;0,40\right[$ وَ $\begin{cases}h(0,39)=-...\\h(0,40)=+...\end{cases}$ ، أي : $h(0,39)\times h(0,40)<0$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $0,39$ و $0,40$.

3) أ) معادلة المماس (T_a) هي : $(T_a):y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

لدينا : (T_a) يمر بالمبدأ O معناه أنّ : $O\in(T_a)$ ، أي : $0=f'(a)(0-a)+f(a)$ ، و منه : $f(a)-af'(a)=0$
إذن هي محققة.

ب) لدينا : $f(a)=\dfrac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}$ وَ $f'(a)=\dfrac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}$ ، و علماً أنّ : $f(a)-af'(a)=0$.

إذن : $\dfrac{a^2+a+1}{a^2}e^{-\frac{1}{a}}-a\dfrac{1-a}{a^4}e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي : $\left[\dfrac{a^2+a+1}{a^2}-\dfrac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي :

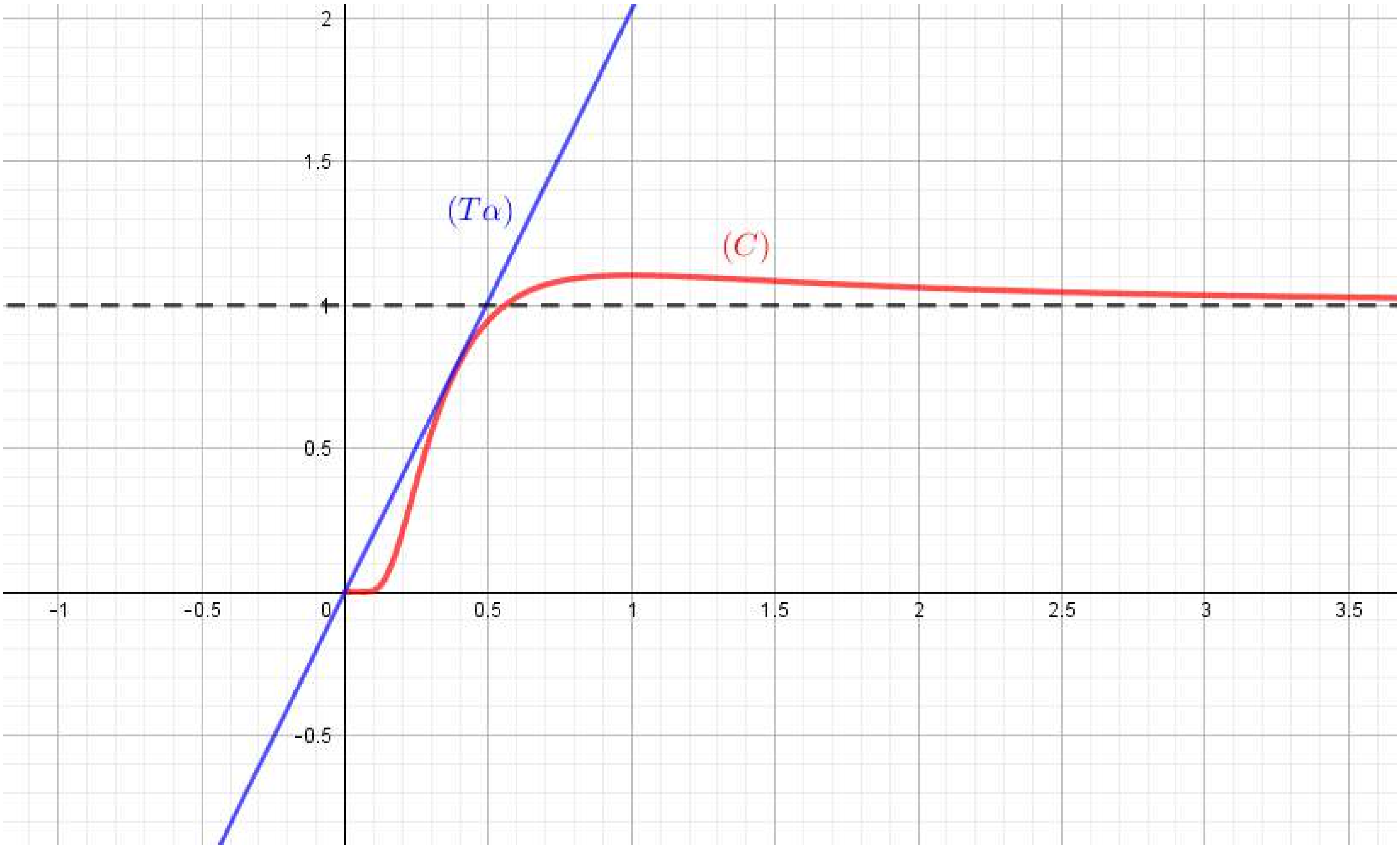
$\left[\dfrac{a^3+a^2+a}{a^3}-\dfrac{1-a}{a^3}\right]e^{-\frac{1}{a}}=0$ ، أي : $\dfrac{a^3+a^2+2a-1}{a^3}=0$ ، و منه : $a^3+a^2+2a-1=0$.

و هذه الأخيرة تقبل حلا وحيدا α ، إذن : $a=\alpha$.

و عليه : فإنّ المماس (T_a) المار بالمبدأ O يمسّ المنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة α .

❖) معادلة المماس : $(T_\alpha):y=2,029x$.

ج) الإنشـــــاء :



4) المناقشة البيانية :

لدينا المعادلة : $f(x) = mx$.

عدد حلول هذه المعادلة هو عدد فواصل نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = mx$ هذا الأخير المار بالمبدأ O ، إذن : هناك مناقشة بيانية دورانية .

❖) إذا كان : $0 < m < 2,029$ فإنّ : المعادلة تقبل حلين متمايزين .

❖) إذا كان : $m \geq 2,029$ أو $m \leq 0$ فإنّ : المعادلة تقبل حل واحد .

كتابة الأستاذ : ب . ع

دراسة دالة أسية ذات الأساس a (رقم 06)

الجزء الأوّل :

1) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كما يلي : $g(x)=3^x-x\ln 3-1$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x>0$ تكون : $g'(x)>0$ ، ثمّ استنتج إتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}^+$.

ب) أحسب : $g(0)$ ، ثم استنتج أنّ : $g(x)>0$ ، و هذا من أجل كل $x>0$.

2) لتكن الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}^+$ بـ : $h(x)=(2-x\ln 3)3^x-1$.

أ) أدرس تغيّرات الدالة h ، وَ شكل جدولٍ تغيّراتها .

ب) بيّن أنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α محصور بين : $1,6$ وَ $1,7$.

ج) إستنتج إشارة الدالة h على $\mathbb{R}^+$.

الجزء الثّاني :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}$.

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x\geq 0$ تكون : $f(x)=\dfrac{1-3^{-x}}{1-x\ln 3\times 3^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسياً .

ج) بيّن أنّه من أجل كل $x\geq 0$ تكون : $f'(x)=\dfrac{h(x)\times \ln 3}{(3^x-x\ln 3)^2}$.

د) أدرس إتجاه تغيّر الدالة f ، و شكل جدول تغيّراتها .

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x\geq 0$ يكون : $f(x)-x\ln 3=\dfrac{(1-x\ln 3)\times g(x)}{3^x-x\ln 3}$.

ب) إستنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) مع المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=x\ln 3$.

3) أ) حدّد معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب) أنشئ المماس (T) وَ المنحنى (C_f) . (الوحدة : $5\ cm$)

حل مختصر للمسألة رقم 06

الجزء الأوّل :

1) لدينا : $g(x)=3^x-x\ln 3-1$ ، أي : $g(x)=e^{x\ln 3}-x\ln 3-1$.

أ) حساب : $g(x)'$: $g(x)'=\ln 3\times e^{x\ln 3}-\ln 3$ ، أي : $g(x)'=\ln 3(e^{x\ln 3}-1)$.

من أجل $x>0$ يكون : $x\ln 3>0$ ، أي : $e^{x\ln 3}>e^0$ ، أي : $e^{x\ln 3}>1$ ، و منه : $e^{x\ln 3}-1>0$.

و بالتالي : $g(x)'>0$ ، و منه : الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}^+$.

ب) لدينا : $g(0)=0$ ، من أجل كل : $x>0$ ، يكون : $g(x)>g(0)$ ، و منه : $g(x)>0$.

2) لدينا : $h(x)=(2-x\ln 3)3^x-1$ ، أي : $h(x)=(2-x\ln 3)e^{x\ln 3}-1$.

أ) دراسة تغيّرات الدالة h :

❖) حساب النهايات :

❖) $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x\ln 3)3^x-1\right]=-\infty$ ، لأنّ : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x\ln 3)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(3^x)=+\infty\end{cases}$.

❖) حساب $h'(x)$: $h'(x)=-\ln 3\times e^{x\ln 3}+\ln 3\times e^{x\ln 3}(2-x\ln 3)=\ln 3\times e^{x\ln 3}\left[-1+(2-x\ln 3)\right]$ ،

و منه : $h'(x)=\ln 3\times e^{x\ln 3}(1-x\ln 3)$ ، إذن : إشارة $h'(x)$ من إشارة : $(1-x\ln 3)$.

لدينا : $1-x\ln 3\geq 0$ ، أي : $-x\ln 3\geq -1$ ، أي : $x\ln 3\leq 1$ ، و منه : $x\leq\dfrac{1}{\ln 3}$.

❖) جدول التغيرات :

x	0		$\dfrac{1}{\ln 3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	$\nearrow$	$\approx 1,7$	$\searrow$	$-\infty$

ب) الدالة h مستمرة و رتيبة على المجال $[1,6;1,7]$ ، وَ $\begin{cases}h(1,6)=+\ldots\\ h(1,7)=-\ldots\end{cases}$ ، أي : $h(1,6)\times h(1,7)<0$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصور بين : $1,6$ وَ $1,7$.

ج) إشارة $h(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	

الجزء الثاني : $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}$.

1) أ) لدينا : $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}=\dfrac{(3^x-1)3^{-x}}{(3^x-x\ln 3)3^{-x}}$ ، و منه : $f(x)=\dfrac{1-3^{-x}}{1-x\ln 3\times 3^{-x}}$.

ب) حساب النهاية عند $+\infty$:

نعلم أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{-x}=0$ وَ أيضاً : $\lim\limits_{x\to+\infty}-x\times 3^{-x}=0$ ، إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-3^{-x}}{1-x\ln 3\times 3^{-x}}=1$.

❖) **التفسير الهندسي :** عند $+\infty$ المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته : $y=1$

ج) حساب $f'(x)$: لدينا : $f(x)=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}=\dfrac{e^{x\ln 3}-1}{e^{x\ln 3}-x\ln 3}$.

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\times e^{x\ln 3}(e^{x\ln 3}-x\ln 3)-(\ln 3\times e^{x\ln 3}-\ln 3)(e^{x\ln 3}-1)}{(e^{x\ln 3}-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\times 3^x(3^x-x\ln 3)-(\ln 3\times 3^x-\ln 3)(3^x-1)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\times 3^x(3^x-x\ln 3)-\ln 3(3^x-1)(3^x-1)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3\left[3^{2x}-3^x\times x\ln 3-3^{2x}+3^x+3^x-1\right]}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، أي :

$f'(x)=\dfrac{\ln 3(-3^x\times x\ln 3+2\times 3^x-1)}{(3^x-x\ln 3)^2}=\dfrac{\ln 3\left[(2-x\ln 3)3^x-1\right]}{(3^x-x\ln 3)^2}$.

و منه : $f'(x)=\dfrac{\ln 3\times h(x)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، و هو المطلوب .

د) دراسة إتجاه تغيّر الدالة f :

❖) لدينا : $f'(x)=\dfrac{\ln 3\times h(x)}{(3^x-x\ln 3)^2}$ ، إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

❖) جدول التغيّرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	1

2) أ) $f(x)-x\ln 3=\dfrac{3^x-1}{3^x-x\ln 3}-x\ln 3=\dfrac{3^x-1-3^x\times x\ln 3+(x\ln 3)^2}{3^x-x\ln 3}$ ، أي :

$f(x)-x\ln 3=\dfrac{3^x-3^x\times x\ln 3-\left[1-(x\ln 3)^2\right]}{3^x-x\ln 3}=\dfrac{3^x(1-x\ln 3)-(1-x\ln 3)(1+x\ln 3)}{3^x-x\ln 3}$ ، أي :

$f(x)-x\ln 3=\dfrac{(1-x\ln 3)(3^x-1-x\ln 3)}{3^x-x\ln 3}$ ، و منه : $f(x)-x\ln 3=\dfrac{(1-x\ln 3)\times g(x)}{3^x-x\ln 3}$.

ب) لدراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) مع المستقيم (D) يكفي دراسة إشارة : $(1-x\ln 3)$ لأنّه من أجل كل $x>0$ تكون : $g(x)>0$ وَ $(3^x-x\ln x)>0$.

❖) نلخص الوضعية في الجدول التالي :

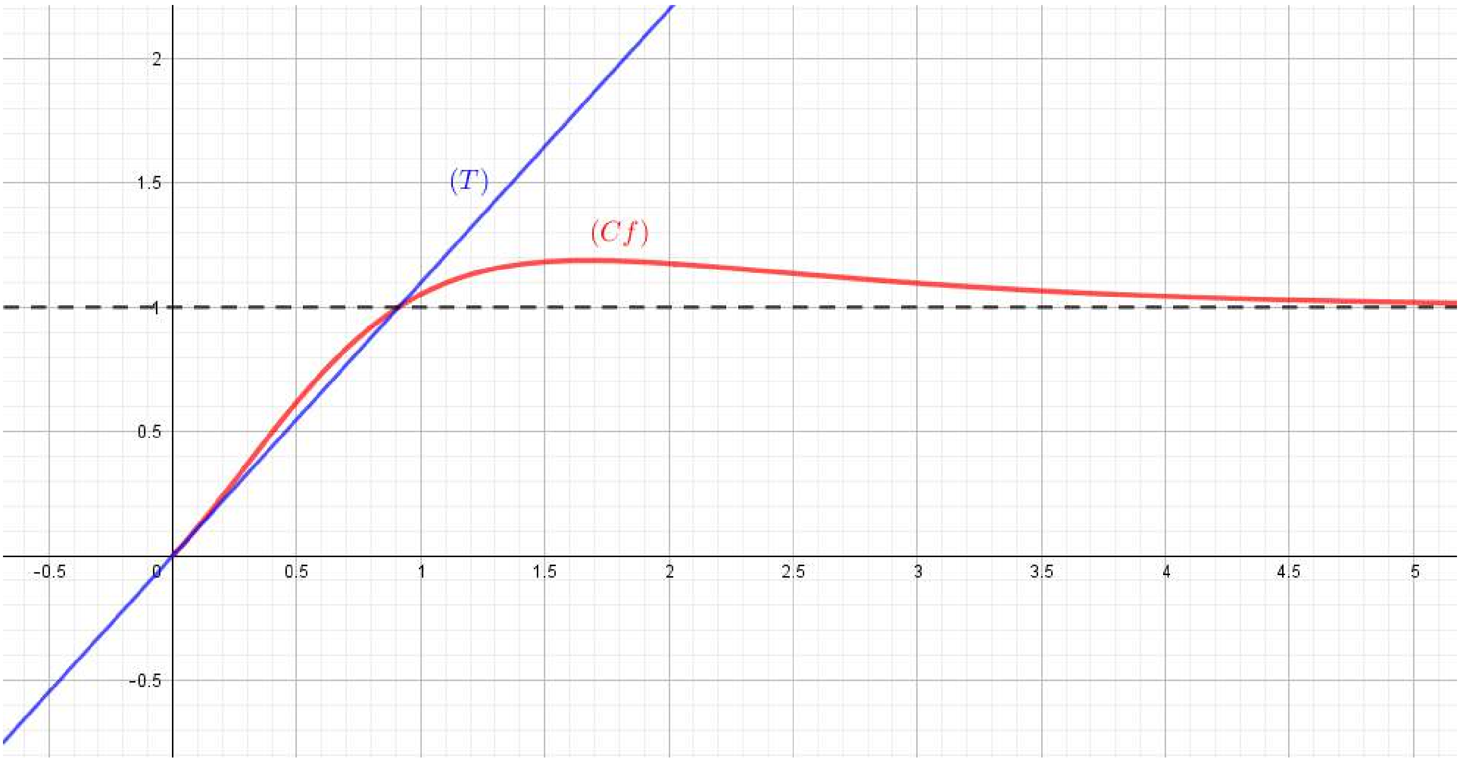
x	0	$\dfrac{1}{\ln 3}$	$+\infty$
$1-x\ln 3$	$+$	0	$-$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D) في النقطة $A(\dfrac{1}{\ln 3};1)$	(C_f) يقع تحت (D)

3) أ) كتابة معادلة المماس (T) :

$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ، لدينا : $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=\ln 3 \end{cases}$ ، و منه : $(T): y=(\ln 3)x$.

❖) نلاحظ أنّ : المماس (T) هو نفسه المستقيم (D) .

ب) الإنشـــــاء :



كتابة الأستاذ : ب . ع