Projet de département : Méthode des moments généralisée

Arthur Bourdon
arthur.bourdon@milliman.com

Contents

1 Contexte

Dans un contexte de gestion des risques financiers, les assureurs cherchent à modéliser l'évolution de certaines variables économiques afin, par exemple, de faire des prédictions ou de calculer des mesures de risque (Value-at-Risk, Expected Shortfall, etc.). Pour cela l'utilisation d'un modèle probabiliste est indispensable.

De manière générale on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé qui représente notre monde, la probabilité $\mathbb{P}$ "physique" mesure la "vraie" probabilité (ou probabilité objective) de chaque évènement. On peut doter cet espace d'une filtration $\mathbb{F}$ qui représente l'information disponible au cours du temps : la probabilité "objective" d'un évènement va varier si un observateur possède de nouvelles informations.

Un modèle probabiliste souvent utilisé en finance est le modèle de Vasicek : ce modèle repose sur une Equation Différentielle Stochastique (EDS) qui décrit le comportement stochastique d'une quantité avec un effet de retour à la moyenne (par exemple le taux d'intérêt court). Ce modèle fait partie de la classe des modèles paramétriques, la loi du phénomène sous-jacent est décrit par un nombre fini de paramètre qu'il convient d'estimer.

La méthode générale de calibration des modèles (paramétriques) est la suivante : on possède plusieurs observations passées du phénomène en question et on cherche à inférer les "bons" paramètres. La méthode principalement utilisée est la maximisation de la vraisemblance : on sait que sous certaines hypothèses l'estimateur du maximum de vraisemblance est un estimateur convergeant asymptotiquement gaussien et asymptotiquement efficace. Cependant d'un point de vue pratique l'estimateur du maximum de vraisemblance présuppose que le modèle est paramétrique : la vraisemblance du modèle est fonction d'un nombre fini de paramètres. Dans le cas des modèles non-paramétriques une autre méthode d'inférence de loi est souvent utilisée : la méthode des moments généralisée. Cette méthode s'affranchit de la connaisance de la forme de la vraisemblance mais peut tout à fait être utilisée pour calibrer des modèles paramétriques tels que le modèle de Vasicek.

Ce projet a pour vocation d'étudier la méthode des moments généralisées dans le cadre du modèle de Vasicek.

2 Modèle de Vasicek

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Sur cet espace on définit un mouvement brownien standard $(W_t)_{t\geq 0}$ ainsi que sa filtration naturelle $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètres (κ, θ, σ) est le processus stochastique solution de l'EDS suivante:

$$dX_t = \kappa\left(\theta - X_t\right)dt + \sigma dW_t \quad , X_0 = Y \quad \mathcal{F}_0 - \text{mesurable} \tag{1}$$

Qui signifie :

- $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathbb{F}$-adapté.
- $(X_t)_{t\geq 0}$ est continu.
- $\forall t \geq 0, X_t = Y + \kappa \int_0^t \kappa(\theta - X_s)ds + \sigma W_t$

avec :

- κ : vitesse de retour à la moyenne
- θ : niveau de retour à la moyenne
- σ : le facteur de volatilité

2.1 Rappels sur les solutions d'EDS

Il est possible d'interpréter cette EDS comme une version perturbée de l'EDO suivante :

$$\dot{X_t} = \kappa\left(\theta - X_t\right) \tag{2}$$

Dans le cas "non perturbé", on a :

$$X_t = e^{-\kappa t}X_0 + \theta\left(1 - e^{-\kappa t}\right)$$

En passant à la limite sur t on constate que θ est bien le niveau de retour à la moyenne (ou la moyenne long-terme) et on constate également que κ contrôle la vitesse à laquelle on s'y dirige. Moralement le terme σdW_t peut-être vu comme une perturbation gaussienne en temps continu et sera défini proprement au 2ème semestre.

2.2 Simulation du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On admettra (voir cours de Calcul stochastique et Finance au 2ème semestre) que la solution de l'EDS est unique et donnée par :

$$X_t = e^{-\kappa t}X_0 + \theta\left(1 - e^{-\kappa t}\right) + \sigma\int_0^t e^{-\kappa(t-s)}dW_s$$

On peut en déduire que :

$$X_{t+h} = e^{-\kappa h}X_t + \theta\left(1 - e^{-\kappa h}\right) + \sigma e^{-\kappa h}\int_t^{t+h} e^{-\kappa(t-s)}dW_s \tag{3}$$

Soit $(t_k = \frac{kT}{n})_{0\leq k\leq n}$, en utilisant l'équation (3) on sait que $(X_{t_k})_k$ est un vecteur gaussien dont on connait explicitement les deux premiers moments, la simulation de $(X_{t_k})_k$ est donc possible. Une propriété intéressante est le fait que les variables aléatoires $\left(\sigma e^{-\kappa(t_{k+1}-t_k)}\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\kappa(t-s)}dW_s)\right)_k$ sont iid de loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa h})\right)$.

En pratique, on peut simuler $(X_{t_k})_k$ de manière itérative :

Algorithm 1 Simulation d'un OU

Require: n : nombre de pas de temps ; κ : vitesse de retour à la moyenne; θ : niveau de retour à la moyenne ; σ : volatilité ; x_0 : valeur de départ ; T : horizon

$h = \frac{T}{n}$

$X = [\ ]$

$X[0] = x_0$

$(Z[1], \cdots, Z[n]) \sim \mathcal{N}(0, I_n)$

for $k = 1, \cdots, n$ **do**

$X[k] = e^{-\kappa h}X[k-1] + \theta\left(1-e^{-\kappa h}\right) + \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1-e^{-2\kappa h})}Z[k]$

end for

3 Etat de l'art des méthodes de calibration

3.1 Estimateur du maximum de vraisemblance

L'article [1] est une bonne référence et étudie l'estimateur du maximum de vraisemblance.

4 Orientation du projet

Dans ce projet vous implémenterez les différentes méthode de moments généralisées pour la calibration du modèle de Vasicek sous la probabilité physique (voir et [2]) qui étudient la méthode des moments généralisée).

Dans un premier temps vous implémenterez une fonction qui génère des trajectoires discrétisées du processus à l'aide de l'algorithme 2.2. Une approche orientée objet est fortement conseillée : coder une classe Vasicek avec comme attributs (κ, θ, σ) et comme méthode `generate(X0,N,n)` qui génère N trajectoires de X sur $[0, 1]$ avec un pas de $\frac{1}{n}$.

Dans un second temps vous simulerez N trajectoires $(X_0, X_{\frac{1}{n}}, X_{\frac{2}{n}}, \cdots, X_1)$ discrétisées du processus grâce au travail précédent dans un contexte de marché non stressé et dans un contexte de marché stressé ($\kappa = 1$, $\theta = 0$ et pour $\sigma \in \{0.5, 1, 2, 5\}$). Il y aura donc N trajectroires pour chaque régime de marché. Dans chaque cas vous étudierez la méthode des moments généralisées sur plusieurs critères :

- Vous évaluerez le temps de calibration.
- Vous étudierez la distribution des paramètres estimées $(\widehat{\kappa}, \widehat{\theta}, \widehat{\sigma})$ et la comparerez aux vrais paramètres (κ, θ, γ). Vous étudierez l'impact de n (lié au pas de discrétisation) sur ces distributions. Le nombre de trajectoires N sera fixée a-priori et permet uniquement d'avoir accès à un échantillon de réalisations i.i.d de $(\widehat{\kappa}, \widehat{\theta}, \widehat{\sigma})$.

Vous comparerez les différents points de cette approche avec l'état de l'art : estimateur du maximum de vraisemblance.

Dans un dernier temps, vous utiliserez cette méthode de calibration sur des données réelles que l'on vous fournira en temps voulu.

References

[1] Cheng Yong Tang and Song Xi Chen. Parameter estimation and bias correction for diffusion processes. *Journal of Econometrics*, 149(1):65–81, 2009.

[2] Alastair R Hall. Generalized method of moments. *Handbook of research methods and applications in empirical macroeconomics*, pages 313–333, 2013.