Projet de département : Méthode des moments généralisée

Arthur Bourdon
arthur.bourdon@milliman.com

1 Quelques ajouts utiles

La méthode des moments généralisée permet d'inférer la loi d'un processus stochastique ergodique et admettant une loi stationnaire. Dans le cadre du processus d'Ornstein-Uhlenbeck issu du modèle de Vasicek on a :

$$X_t = e^{-\kappa t} X_0 + \theta \left(1 - e^{-\kappa t}\right) + \sigma \int_0^t e^{-\kappa(t-s)} dW_s.$$

Donc $X_t \sim \mathcal{N}\left(e^{-\kappa t} X_0 + \theta\left(1 - e^{-\kappa t}\right), \frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-2\kappa t})\right)$. Ainsi $X_t \xrightarrow[t \to \infty]{\mathcal{L}} X_\infty$ avec $X_\infty \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$. Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck admet donc bien une loi stationnaire. De plus il s'agit d'un processus ergodique. L'ergodicité du processus signifie que :

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathbb{E}\left[f(X_\infty)\right] < \infty, \frac{1}{T}\int_0^T f(X_t) dt \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[f\left(X_\infty\right)\right] \text{ p-s.}$$

Ce résultat est également valable en considérant une moyenne discrète sur une grille $(t_k)_{k \geq 0}$ sur $\mathbb{R}^+$:

$$\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \text{ tq } \mathbb{E}\left[f(X_\infty)\right] < \infty, \frac{1}{N}\sum_{k=0}^N f\left(X_{t_k}\right) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[f(X_\infty)\right] \text{ p-s.}$$

Ainsi si nous discrétisons le processus $(X_t)_{t \in [0,T]}$ avec l'algorithme présenté dans la note précédente et si T est relativement grand (cette notion va dépendre des paramètres σ et κ) alors on peut faire l'approximation suivante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n f\left(X_{\frac{kT}{n}}\right) \simeq \mathbb{E}\left[f\left(X_\infty\right)\right]$$

Ce résultat est très utile car il fait le lien entre les moments de la loi stationnaire et les moments ergodiques de la trajectoire discrétisée. Ce résultat est à la base de la méthode des moments généralisées. Dans le cas du modèle de Vasicek on sait que $X_\infty \sim \mathcal{N}\left(\theta, \frac{\sigma^2}{2\kappa}\right)$. Donc on connait tous les moments de X_∞ de manière exacte : $X_\infty \stackrel{\mathcal{L}}{=} \theta + \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et :

- $\mathbb{E}\left[Z^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k k!}$

- $\mathbb{E}\left[Z^{2k+1}\right]=0$

Donc :

- $\mathbb{E}\left[X_\infty^n\right]=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\theta^{n-k}\frac{\sigma^k}{(2\kappa)^{\frac{k}{2}}}\mathbb{E}\left[Z^k\right]$

La méthode des moments généralisée a pour objectif de réduire l'erreur entre les moments ergodiques observés $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n\left(X_{\frac{kT}{n}}\right)^m\right)_{m\geq 0}$ et les moments théoriques de la loi stationnaire $(\mathbb{E}\left[X_\infty^m\right])_{m\geq 0}$ en cherchant les paramètres (κ,θ,σ) optimaux. Cependant la qualité des estimateurs des moments d'ordre élevés se dégrade quand l'ordre du moment augmente : cela peut poser problème car cela limite le nombre de moments à exploiter pour l'inférence. Afin de contourner ce problème nous exploitons le résultat suivant :

$$\forall h>0,(X_t,X_{t+h})_{t\geq 0}\ \text{ admet une loi stationnaire et est ergodique}$$

Pour tout $t\geq 0$, (X_t,X_{t+h}) est un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}\left(\mu,\Sigma\right)$ avec

$$\mu=\left(e^{-\kappa t}X_0+\theta\left(1-e^{-\kappa t}\right),e^{-\kappa(t+h)}X_0+\theta\left(1-e^{-\kappa(t+h)}\right)\right)$$

et

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma^2\frac{1-e^{-2\kappa t}}{2\kappa} & \sigma^2\frac{1-e^{-2\kappa h}}{2\kappa}e^{-\kappa h}\\ \sigma^2\frac{1-e^{-2\kappa t}}{2\kappa}e^{-\kappa h} & \sigma^2\frac{1-e^{-2\kappa(t+h)}}{2\kappa}\end{pmatrix}.$$

Donc la loi stationnaire de $(X_t,X_{t+h})_{t\geq 0}$ est $\mathcal{N}\left((\theta,\theta),\begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{2\kappa} & \frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa h}\\ \frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa h} & \frac{\sigma^2}{2\kappa}\end{pmatrix}\right)$. On peut poser $\Sigma_h=\begin{pmatrix}\frac{\sigma^2}{2\kappa} & \frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa h}\\ \frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa h} & \frac{\sigma^2}{2\kappa}\end{pmatrix}$.

De plus en utilisant l'ergodicité de ce processus il est possible d'approximer les termes non diagonaux de Σ_h pour un grand nombre de valeurs de h. Cela permet d'augmenter considérablement le nombre de moments théoriques tout en conservant une bonne qualité des moments ergodiques associés (ce ne sont que des moments d'ordre 2). L'estimateur ergodique du terme $\frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa h}$ est le suivant :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n X_{t_k}X_{t_k+h}-\left(\hat{\theta}\right)^2$$

où $\hat{\theta}$ est votre estimateur de θ (θ étant le moment d'ordre 1 de X_∞).

2 Résumé

Pour mener à bien le projet il faut être en mesure de comparer les moments ergodiques de la trajectoire avec les moments théoriques suivants :

$$\mathbb{E}\left[X_\infty^n\right]=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\theta^{n-k}\frac{\sigma^k}{(2\kappa)^{\frac{k}{2}}}\mathbb{E}\left[Z^k\right]$$

Avec :

$$\mathbb{E}\left[Z^{2k}\right]=\frac{(2k)!}{2^k k!}$$
$$\mathbb{E}\left[Z^{2k+1}\right]=0$$

De même vous pouvez comparer $\frac{\sigma^2}{2\kappa}e^{-\kappa h}$ avec $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^n X_{t_k}X_{t_k+h}-\left(\hat{\theta}\right)^2$ pour plusieurs valeurs de h.

Il serait intéressant de comparer les deux approches :

- Utilisation des moments "purs" en utilisant également des ordres élevés.
- Utilisation des moments d'ordre 1 et 2 mais en augmentant les données par l'utilisation des covariances.