ECE 313 Notes

Lecture 2: Axioms of Probability

1. Set Operation

$$A \cup B, A \cap B, A^c$$

$\text{In general, union means OR, intersection means AND, complement means NOT.}$

$$A \text{ 和 } B \text{ 的并集，} A \text{ 和 } B \text{ 的交集，} A \text{ 的补集}$$

Notes:

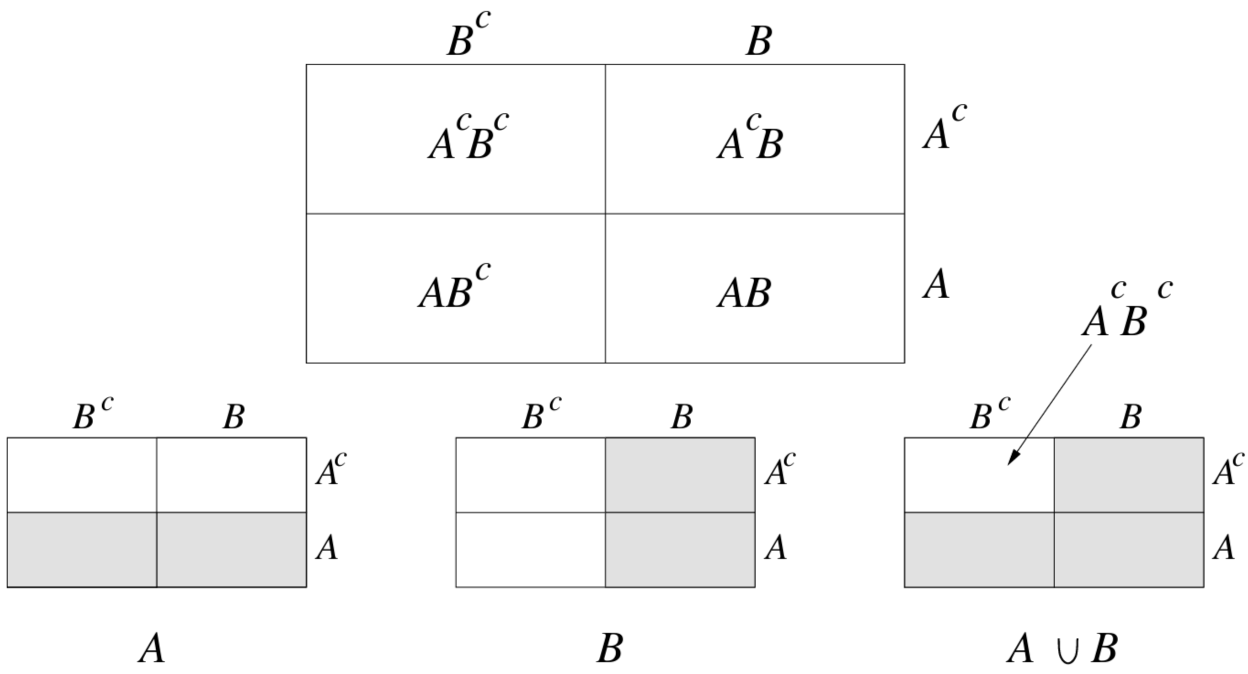
- For any event E, $E \cap E^c = \varnothing$, $E \cup E^c = \Omega$
- Two events A, B are **mutually exclusive** (互斥), if $A \cap B = \varnothing$
- For the two mutually exclusive events A, B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- If A, B are not mutually exclusive,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Karnaugh Map



We can conclude some formulas in this Karnaugh map:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

3. Axioms and Properties

3.1 Event Axioms

集合 $\mathcal{F}$ (表示事件的集合) 需要满足以下三个基本公理：

Axiom E.1 样本空间 (Sample Space) Ω 是一个事件 (i.e. $\Omega \in \mathcal{F}$)

Axiom E.2 如果 A 是一个事件 (event)，那么 A 的补集也是一个事件 (i.e. $if\ A \in \mathcal{F}\ then\ A^c \in \mathcal{F}$)

Axiom E.3 如果 A 和 B 都是事件，那么它们的并集(union) $A \cup B$ 也是一个事件 (i.e. $if\ A, B\ in\ \mathcal{F}\ then\ A \cup B \in \mathcal{F}$) 如果$A_1, A_2, ...$是一系列事件(a list of events)，那么这些事件的并集$A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ 也是一个事件。

3.2 Event Properties

Property e.4 空集 $\varnothing$ 是一个事件（即 $\varnothing \in \mathcal{F}$）。
这是因为 Ω 是一个事件（由 Axiom E.1），而 $\varnothing = \Omega^c$，根据 Axiom E.2 可知 Ω^c 是一个事件，所以 $\emptyset$ 是事件。

Property e.5 如果 A 与 B 都是事件，那么 AB（即 $A \cap B$）也是事件。
这是因为根据 De Morgan 定律有

$$AB = (A^c \cup B^c)^c$$

由 Axiom E.2 可知 A^c、B^c 都是事件，Axiom E.3 可知它们的并集 $A^c \cup B^c$ 是事件，再由 Axiom E.2 知其补集也是事件，即 AB 是事件。

Property e.6 更一般地，若 $B_1, B_2, ...$ 是一系列事件，则它们的交集 $B_1 B_2 \cdots$ 也是事件。
这是因为

$$B_1 B_2 \cdots = (B_1^c \cup B_2^c \cup \cdots)^c$$

由 Property e.5 的证明逻辑可知这一式子是事件。

3.3 Probability Axioms

概率测度 P 需要满足以下三个基本公理：
Axiom P.1 对于任意事件 A，有

$$P(A) \geq 0$$

Axiom P.2 如果 $A, B \in \mathcal{F}$，且 A 与 B 互斥（mutually exclusive），则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

更一般地，若 $E_1, E_2, ...$ 是一组两两互斥（mutually exclusive）的事件（可以是可数无限组），则

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots$$

Axiom P.3

$$P(\Omega) = 1$$

若 Axiom P.1–P.3 成立（且事件公理 Axiom E.1–E.3 也成立），则概率测度 P 会满足一些直觉上合理的性质，我们列出如下：

3.4 Probability Properties

Property p.4 对任意事件 A，有

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

这是因为 A 与其补集 A^c 是互斥的，且 $\Omega = A \cup A^c$，由 Axiom P.2 与 P.3 可得

$$P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$$

Property p.5 对任意事件 A，有

$$P(A) \leq 1$$

这是因为 $P(A) = 1 - P(A^c) \leq 1$，而 $P(A^c) \geq 0$ 由 Axiom P.1 得。

Property p.6

$$P(\varnothing) = 0$$

因为 $\emptyset$ 与 Ω 是互补集，由 p.4 与 Axiom P.3 得

$$P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) = 0$$

Property p.7 若 $A \subseteq B$，则

$$P(A) \leq P(B)$$

因为 $B = A \cup (A^cB)$，而 A 与 A^cB 互斥，且 $P(A^cB) \geq 0$，所以

$$P(B) = P(A) + P(A^cB) \geq P(A)$$

Property p.8

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

因为 $A \cup B = (AB^c) \cup (A^cB) \cup (AB)$，三者互斥，所以

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(AB^c) + P(A^cB) + P(AB) \\ &= (P(AB^c) + P(AB)) + (P(A^cB) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

Property p.9

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

这是对 Property p.8 的三事件扩展，可以类似地进行证明。

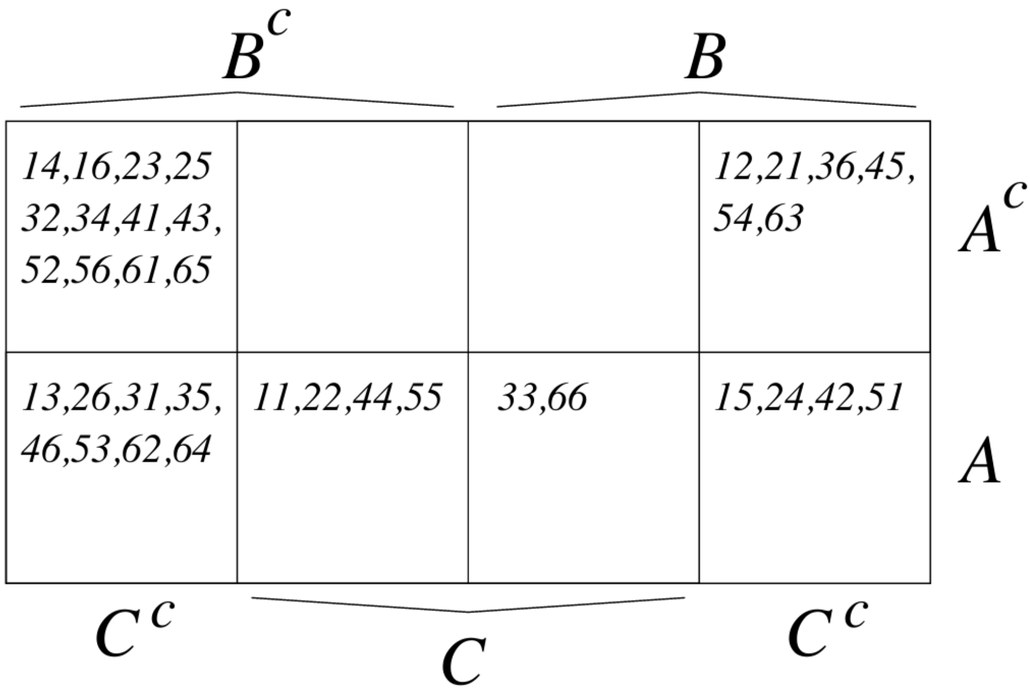
4. Example

There-event Karnaugh Map (On Page 14)

Let an experiment consist of rolling two fair dice, and define the following three events about the numbers showing:

$$\begin{aligned} A &= \{sum\ is\ even\} \\ B &= \{sum\ is\ a\ multiple\ of\ three\} \\ C &= \{the\ numbers\ are\ the\ same\} \end{aligned}$$

Tips: Use the three-event Karnaugh Map



Ω 中共有$6 \times 6 = 36$ 种可能的情况，将它们均填入上图中，

如果要求事件 $A \cap B \cap C$ 发生的概率，可以从图上得知：

$$ABC = \{33, 66\}$$

$$P(ABC) = \frac{|ABC|}{|\Omega|} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Summary

1. 集合运算

- **基本运算**:
  - 并集（$\cup$）表示"或"：$A \cup B$
  - 交集（$\cap$）表示"且"：$A \cap B$
  - 补集（^{c}）表示"非"：A^c
- **互斥事件**
  当 $A \cap B = \varnothing$ 时: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- **非互斥事件**
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. 事件公理

1. **必然事件**：Ω 和空集 $\varnothing$ 都是事件
2. **运算封闭性**：事件对以下运算封闭：
   - 补集：若 A 是事件，则 A^c 也是事件
   - 并集：若 A, B 是事件，则 $A \cup B$ 是事件
   - 交集：若 A, B 是事件，则 $A \cap B$ 是事件

3. 概率公理

1. **非负性** $P(E) \geq 0\ for\ every\ event\ E\ in\ \mathcal{F}$
2. **可加性**（互斥事件）
   $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \quad \text{当}\ E_i \cap E_j = \varnothing\ \text{对}\ i \neq j$
3. **归一性** $P(\Omega) = 1$

4. 重要性质

1. **补事件概率**
   $P(A^c) = 1 - P(A)$
2. **包含关系**
   若 $A \subseteq B$，则 $P(A) \leq P(B)$
3. **容斥原理**：
   - **两事件**
     $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   - **三事件**
     $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$