ECE 313 Notes

Lecture 1: Introduction of Probability

1. Definition of Probability

概率(Probability)是描述事件发生可能性的数学量度，表示一个事件在特定条件下发生的可能性大小。

1.1 Formalizing Probability

概率的基本框架包括以下三个核心概念：

- **Outcomes**：实验的所有可能结果，构成样本空间 Ω。
- **Events**：a set of outcomes. 结果的集合，即 Ω 的子集。
- **Probabilities**：为每个事件分配一个 [0, 1] 之间的数值，表示其发生的可能性。

1.2 Example: Rolling a Die

- **Sample Space**：

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- **Events**：Ω 的子集，例如：
  - 掷出偶数：$\{2, 4, 6\}$
  - 掷出大于 4 的数：$\{5, 6\}$
- **Probability**：假设每个结果等可能，掷出 6 的概率为：

$$P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

- **Every event A** has a probability $P(A) \in [0, 1]$.
- **Every experiment** is modeled by a **probability space** (概率空间—总测度为1的测度空间).

$$Probability\ Space = (\Omega, \mathcal{F}, P)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= set\ of\ outcomes \\ \mathcal{F} &= set\ of\ events \\ P &= probability\ measure \end{aligned}$$

- **If E is an event:**

  $E \subseteq \Omega$

  $E \in \mathcal{F}$

  $P(E) \in [0,1]$

1.3 Example: Toss two fair coin

- **Set of outcomes**: $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$
- **Set of events**: $F = \{\{(H,H)\},\{(H,H),(T,T)\},\ldots,\varnothing\} = 2^\Omega$
- $|F| = 2^4 = 16$

$$P(\{(H,H)\}) = \frac{1}{4}$$
$$P(\{(at\ least\ one\ tails)\}) = P(\{(T,H),(H,T),(T,T)\}) = \frac{3}{4}$$
$$P(\varnothing) = 0$$

- For **every event** $E \subset \Omega, P(E) = \frac{|E|}{4}$

2. Types of Probability Definitions

2.1 Classical Probability

- **Definition**：适用于等可能事件，概率为：

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 的有利结果数}}{\text{总的可能结果数}}$$

- **Example**：掷骰子得到 6 的概率为：$\frac{1}{6}$

2.2 Frequentist Probability

- **Definition**：基于大量重复试验，概率为事件发生的相对频率极限：

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}$$

  其中 n_A 是事件 A 发生的次数，n 是总试验次数。

- **Example**：掷硬币 1000 次，若正面出现 510 次，则正面概率约为 0.51。

2.3 Subjective Probability

- **Definition**：基于个人信念或经验的主观判断。
- **Example**：预测明天会下雨的概率为 70%，基于天气预报和个人经验。

2.4 Axiomatic Probability (Kolmogorov Axioms)

- **Definition**：概率满足以下三条公理：
  1. **Non-negativity**：对于任意事件 A，有 $P(A) \geq 0$。
  2. **Normalization**：样本空间 Ω 的概率为 1，即 $P(\Omega) = 1$。
  3. **Additivity**：对于互不相交的事件 $A_1, A_2, \ldots$：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

- **Significance**：这是现代概率论的数学基础。

Addition: Buffon's Needle Problem

1. Problem Statement

- **Setup**：
  - 在地板上画平行线，线间距为 1 英寸。
  - 随机丢下一根长度为 1 英寸的针。
- **Goal**：计算针与任意一条平行线交叉的概率。

2. Key Variables

- d：针中心到最近平行线的距离，均匀分布在 $[0, 0.5]$。
- θ：针与平行线的夹角，均匀分布在 $[0, \frac{\pi}{2}]$。
- 针长：1 英寸。

3. Condition for Crossing

针与线交叉的条件为：

$$1 \cdot \sin\theta > 2d$$

或：

$$d < \frac{\sin\theta}{2}$$

4. Probability Calculation

- d 和 θ 独立，概率通过积分计算：

$$P = \frac{\text{交叉的总面积}}{\text{总可能面积}}$$

- 总可能面积：$d \in [0, 0.5]$，$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$，面积为：

$$0.5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

- 交叉面积：

$$
\begin{aligned}
\text{交叉面积} &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\frac{\sin\theta}{2}} 1 \, dd \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{2} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} [-\cos\theta]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{2} (0 - (-1)) = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

- 最终概率：

$$
P = \frac{\text{交叉面积}}{\text{总面积}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{\pi} \approx 0.6366
$$

Summary

- 概率定义及核心概念
- 拓展: 概率的定义不同种类 (非上课内容)
- (Addition) Buffon 投针问题展示了几何概率的应用，交叉概率为 $\frac{2}{\pi}$