ECE 313 Notes

Lecture 3: Counting Principles & Conditional Probability

1. Combination Formula (Binomial Coefficient)

The number of ways to choose (k) elements from a set of (n) distinct elements is given by the combination formula:
组合数$\binom{n}{k}$（读作"n选k"）表示从n个不同物品中**无序选取**k个物品的方式总数，计算公式为：

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

where:

- $\binom{n}{k}$ is read as $n\ choose\ k$
- 其中 ! 表示阶乘（如$5! = 5 \times 4 \times \cdots \times 1$）

Example Problem: Defective Chip Detection

Problem Statement:
一批共 n 个电脑芯片中**恰好有1个是次品**。现在**随机抽取**k**个芯片**进行检测：

1. 从n个芯片中选取k个的**所有可能组合数**是多少?
2. **抽中的**k**个芯片包含次品**的概率是多少?

Solution:
Total possible combinations (sample space Ω):

$$\text{Total} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Favorable combinations (containing the defective chip):
必须选中唯一的次品（1种方式），剩下的$k-1$个芯片从$n-1$个正常芯片中选取：

$$\text{Favorable} = \binom{1}{1} \times \binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

Probability calculation:

$$P(\text{defective in sample}) = \frac{\text{Favorable}}{\text{Total}} = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n}$$

Verification:
次品被选中的概率等价于"在k次抽取中选中特定1个次品的机会"，这与从n个物品中随机抽取k个包含特定1个物品的概率一致。

Let (n = 10) chips with 1 defective, and (k = 3) tested:

$$P = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0.3$$

This matches ($\frac{k}{n} = \frac{3}{10}$).

2.Equally Likely Outcomes - Continuous Case

两个“随机”数在区间 $[0,1]$ 中取值：

$$\Omega = \{(x,y) \mid x,y \in [0,1]\}$$

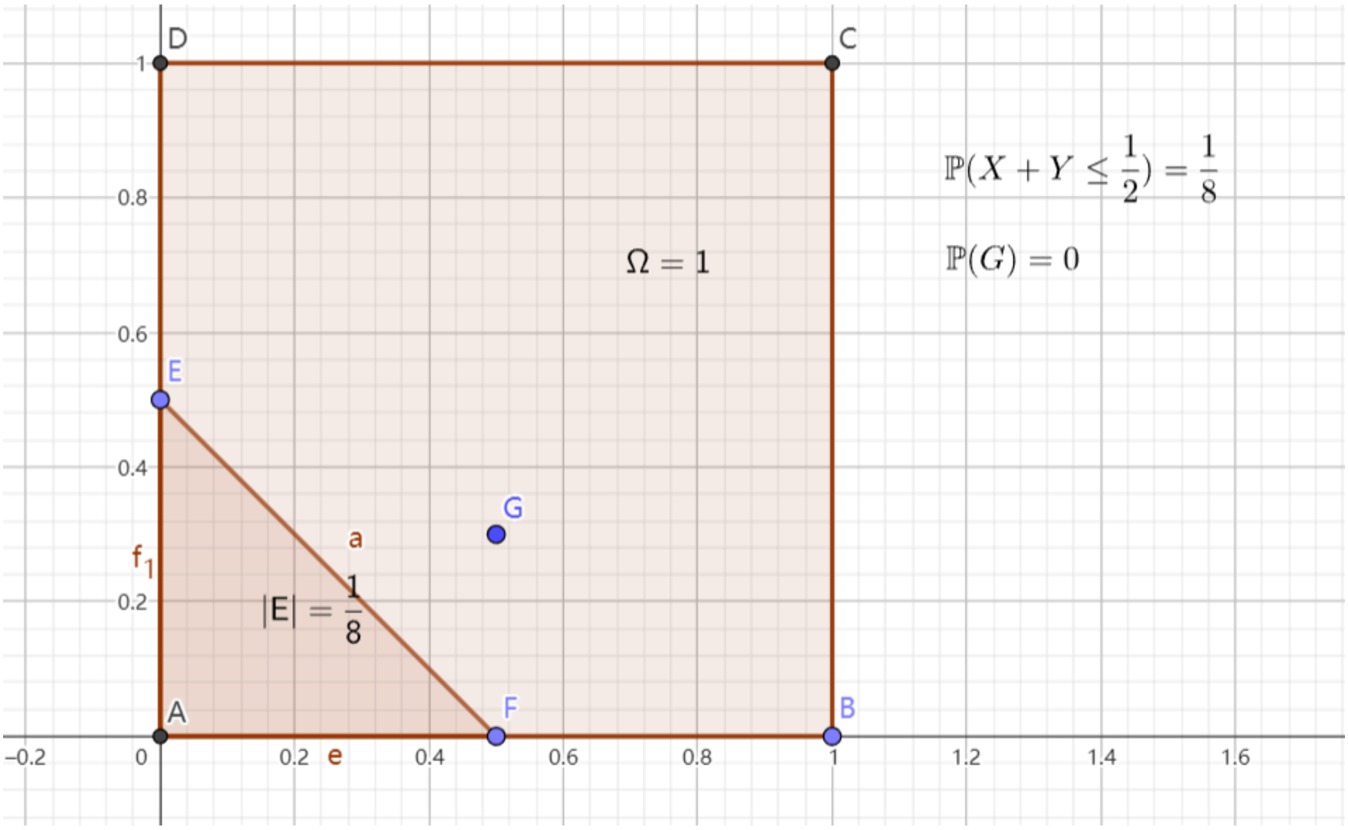
样本空间是单位正方形，面积为 1

如果我们将事件定义为：

$$E = \{x + y \leq \frac{1}{2}\}$$

根据概率公式，我们就可以得到：

$$\mathbb{P}(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = |E|$$



正如上图所示，

根据我们对这个事件的定义，先求出这个范围所占据的面积：

$$|E| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Uniform Law

$$Probability = Area$$

由于随机数落在每个点的位置都是等可能的，所以概率等于面积的比值：

$$\mathbb{P}(X+Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

$$\mathbb{P}((X,Y)=(0.5,0.3))=0$$

Important Tips

- $P=0\neq$ 不可能事件(**Impossible Event**)
- $P=1\neq$ 必然事件(**Certain Event**)

---

3. Conditional Probability (条件概率)

$$P(A|B)=\text{在B发生的条件下，事件A发生的概率}$$

定义：假设$P(B)\neq 0$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

如果$P(B)=0$，那么 $P(A|B)$ 就是未定义的（undefined）

Multiplication Rule(概率乘法定理):

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$$

怎么解释呢？我个人的理解就是把条件概率当成除法，前两项合起来就是 $P(A\cap B)$ 之后又可以和第三项合并最后得到 ABC 事件的概率。

所以假设整一个 Ω 可以分成 A_1 A_2 A_3 那么我们可以得到以下等式：

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+P(A_3)\cdot P(B|A_3)$$

由于我们假设 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$ 所以以上结论证明如下：

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B\cap\Omega)\\&=P(B\cap(A_1\cup A_2\cup A_3))\\&=P((B\cap A_1)\cup(B\cap A_2)\cup(B\cap A_3))\\&=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)=\text{原式}\end{aligned}$$

得到了这个结论后我们可以得到**贝叶斯公式(Bayes’ Rule)**:

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$$

Example: Spam Email

- 2016年所有邮件中有60%是垃圾邮件。$P(A)=0.6$
- 垃圾邮件中有20%包含“Dear”这个词。$P(B|A)=0.2$
- 非垃圾邮件（即正常邮件）中有1%包含“Dear”这个词。$P(B|A^c)=0.01$

你收到了一封包含“Dear”这个词的邮件，那么：**这封邮件是垃圾邮件的概率是多少？**

需要先定义事件：

- A：邮件是垃圾邮件 $P(A)=0.6$
- B：包含“Dear” $P(B\mid A)=0.2$

- 目标事件：$P(A \mid B)$

根据**Bayes' Rule** 我们将数据带入以下公式：

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

还需要求出$P(B)$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$$
$$= 0.12 + 0.004 = 0.124$$

$$P(A|B) = \frac{0.2 \times 0.6}{0.124} \approx 0.968$$

这样我们就可以将已知的概率和可求的概率转化为未知及不好求的概率了。

Summary

- 计数原理的讲解，介绍组合数计算方法
- 条件概率和贝叶斯公式（**Bayes' Rule**）的推导＋应用