ECE 313 Notes

Lecture 5: Expectation Value

1. 随机变量的矩（Moments of Random Variables）

<u>其实不应该在这里介绍这个，但是PPT里面出现了，可能是为了引入随机变量期望和方差的概念，就挺离谱的</u>

<u>详情请见：《普林斯顿概率论读本》P265 那里同时讨论了离散型和连续性随机变量的情况，有兴趣可以阅读（反正我是没兴趣）</u>

1.1 什么是 X 的矩?

矩是总结随机变量 X 不同统计特性的确定性数字。
Example：

- 期望 (Expectation)
- 方差/标准差 (Variance/Standard deviation)
- n 次原点矩 (n-th moment)
- n 次中心矩 (n-th centralized moment)

1.2 不同类型的矩及其定义：

- 原点矩 (Raw Moments): $E[X^n]$
- 中心矩 (Central Moments): $E[(X-\mu)^n]$ （其中 μ 是期望）
- 标准化矩 (Standardized Moments): $E[(X-\mu)^n/\sigma^n]$ （其中 σ 是标准差）
- 阶乘矩 (Factorial Moments): $E[(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$
- 累积量 (Cumulants): 从矩生成函数的对数导出

以上的这些有亿点抽象，其实它们是最一般的情况，通俗一点的例子见下：

原点矩 (Raw Moments):

- $E[X]$：通常称为**均值**或**期望**，表示数据的平均水平。
- $E[X^2]$：二阶原点矩，反映数据值的平方平均，常用在方差计算中。

中心矩 (Central Moments):

- $E[(X-\mu)^2]$：二阶中心矩，通俗称为**方差**，衡量数据的离散程度。
- $E[(X-\mu)^3]$：三阶中心矩，称为**三阶矩**，常用于计算偏态（Skewness）。
- $E[(X-\mu)^4]$：四阶中心矩，称为**四阶矩**，常用于计算峰度（Kurtosis）。

标准化矩 (Standardized Moments):

- $E[(X-\mu)^3/\sigma^3]$：三阶标准化矩，通俗称为**偏态系数**，描述分布的非对称性。
- $E[(X-\mu)^4/\sigma^4]$：四阶标准化矩，称为**峰度系数**，衡量分布的陡峭程度。

2. 期望值 (Expectation Value)

2.1 定义

期望值 $E[X]$ 是随机变量 X 的平均值，表示我们预期 X 取值的加权平均。公式为：

$$E[X] = \sum_{x} x \cdot P(X = x)$$

其中，求和遍历 X 所有可能值 x。

别名

- 均值 (Mean)
- 期望 (Expectation)
- 加权平均 (Weighted Average)
- 质量中心 (Center of Mass)
- 一阶矩 (1st Moment)

2.2 示例

设 X 为掷一个 6 面骰子的结果，

$P(X = x) = \frac{1}{6}$，其中 $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$。

计算期望值：

$$E[X] = \sum_{x=1}^{6} x \cdot P(X = x)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

注意：$E[X] = 3.5$ 不是 X 的实际可能结果，表明期望值不一定是样本空间中的某个值。

2.3 期望值的性质

若 α, β 为常数，则：

- $E[\alpha] = \alpha$
- $E[\alpha X] = \alpha E[X]$
- $E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

2.4 证明

2.4.1 $E[\alpha] = \alpha$

由于 α 是常数，其概率质量函数为 $P(\alpha = \alpha) = 1$，其他值概率为 0。因此：

$$E[\alpha] = \sum_x x \cdot P(x) = \alpha \cdot 1 + 0 = \alpha$$

2.4.2 $E[\alpha X] = \alpha E[X]$

根据定义：

$$E[\alpha X] = \sum_x (\alpha x) \cdot P(X = x)$$

由于 α 是常数，可提出求和号外：

$$= \alpha \sum_x x \cdot P(X = x) = \alpha E[X]$$

2.4.3 $E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$

根据定义：

$$E[\alpha X + \beta] = \sum_x (\alpha x + \beta) \cdot P(X = x)$$

分配求和：

$$= \sum_x (\alpha x \cdot P(X = x) + \beta \cdot P(X = x))$$

拆开求和：

$$= \alpha \sum_x x \cdot P(X = x) + \beta \sum_x P(X = x)$$

由于 $\sum_x P(X = x) = 1$（概率总和为1）：

$$= \alpha E[X] + \beta$$

这些证明基于期望值的线性性质，适用于离散随机变量

2.5 LOTUS $E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$

定义

若 X 是一个离散随机变量，$Y = g(X)$ 是 X 的函数，则 Y 的期望可以通过如下方式计算：

$$E[Y] = E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot P(X = x)$$

> 注意：**不需要先求出 Y 的概率质量函数**，可直接使用 X 的 PMF 计算 $Y = g(X)$ 的期望。
> **解释**

- LOTUS 的核心思想是：如果我们知道随机变量 X 的分布，就可以计算 $g(X)$ 的期望值，而不必显式构造 $Y = g(X)$ 的概率分布。
- 它让我"无意识"地避开了繁琐的转换步骤，**直接套公式就能求期望。**

Example

设随机变量 X 表示一个六面骰子的点数：

$$P(X=x)=\frac{1}{6},\quad x=1,2,3,4,5,6$$

我们想计算 $Y=X^2$ 的期望，即 $E[Y]=E[X^2]$。

使用 LOTUS 公式：

$$E[X^2]=\sum_{x=1}^{6}x^2\cdot P(X=x)=\sum_{x=1}^{6}x^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6}=\frac{91}{6}\approx 15.17$$

适用范围

- 离散型随机变量：使用求和。
- 连续型随机变量：形式为积分：

$$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot f_X(x)\,dx$$

不同的分布类型我都另起了一个文件