

期末复习

◆ 概括所学五章

◆ 期末复习测试 ✓

抓基本点, 把握基本问题总是没错有效的!

第八章 空间解析几何

- 向量及其线性运算
- 数量积、向量积
- 平面及其方程
- 空间直线及其方程
- 曲面及其方程
- 空间曲线及其方程

向量代数*

空间直线与平面*
第9章节6有体现

常常间接考
第9、10、11章均有体现
若直接考, 空间曲线的投影
旋转曲面

第九章 多元函数微分学

- 多元函数极限与连续
- 偏导数
- 全微分
- 多元复合函数的求导法则
- 隐函数的求导法
- 多元函数微分学的几何应用
- 方向导数和梯度
- 多元函数的极值

*概念、计算

求某点的极限, 偏导数, 全微分
连续, 可导, 可微, 偏导连续的关系

基本功*

求二元复合函数的二阶偏导数

应用之一* 曲线的切线
曲面的切平面

偏导数延伸* 梯度 ∇f
可微下方向导数 $= \nabla f \cdot \vec{e}$

应用之二* 某点处方向导数 $_{\max} = |\nabla f|$
极值点与判定; 无条件极值与条件极值问题, 综合的极值问题

第十章 重积分

- 重积分的概念与性质
- 二重积分的计算法
- 三重积分
- 重积分的应用

曲顶柱体的体积
物体的质量

*改变积分次序, 或一种
二次转为另一种二次

*直角坐标下计算
*极坐标下的计算

*直角坐标下计算: 2法
*柱面坐标下计算
*球面坐标下计算

注意对称性

空间曲面的面积 放到第11章节4去

第十一章 曲线曲面积分

- 第一类曲线积分
- 第二类曲线积分与格林公式
- 第一类曲面积分
- 第二类曲面积分与高斯公式

*性质

计算转化为定积分

计算转化为定积分 折线

*闭曲线利用格林公式

*非闭曲线也可格林公式

*积分与路径无关条件 单连通
及等价条件

*性质

计算转化为二重积分

计算转化为二重积分

*闭曲面要利用高斯公式

*非闭曲面也利用高斯公式 或合一法

所有的
兼顾性质
(被积函数
定义在
线面上)

第一类
的兼顾
对称性
(第二类
勿用)

第十二章 无穷级数

- 数项级数的基本性质
- 常数项级数的审敛法
- 幂级数
- 函数展开成幂级数
- 傅里叶级数

判断数项级数的敛散性

收敛域、和函数 以及和数

常用的展开式中最常用公式*

傅氏级数 系数表达与求解*
D氏定理求和函数*

《高等数学》(II) 期末复习测试题 (2020.6.13)

一. 填空题 (本题共6小题, 每小题3分, 满分18分)

1. 设 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $|(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})| =$ _____.

$$\therefore |(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b})| = 2|\vec{b} \times \vec{a}| = 2|\vec{b}||\vec{a}|\sin \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

2. 设 $u(x, y) = e^{xy}$, 则 $du|_{(0,1)} = e^{xy}(ydx + xdy)|_{(0,1)} = dx$.

3. 函数 $u = x^2 + y^2 + \ln z$ 在点 $(1, 1, 1)$ 处沿各方向的方向导数的最大值 = _____. $\nabla u|_{(1,1,1)} = (2x, 2y, \frac{1}{z})|_{(1,1,1)} = (2, 2, 1)$, 其模为 3

4. 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处, 沿着从点 $(1, 2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向的方向导数.

$$\frac{\partial f}{\partial l}|_{(1,2)} = \nabla f \cdot \vec{e} = (2, 4) \cdot \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}.$$

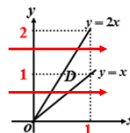
4. 设曲线 $L: x^2 + y^2 = 1$, 则 $\oint_L (2x^2 - xy + 3y^2) ds = 5\pi$.

$$\oint_L xy ds = 0, \quad \oint_L (2x^2 + 3y^2) ds = \oint_L \frac{5}{2}(x^2 + y^2) ds = \frac{5}{2} \oint_L ds = \frac{5}{2} 2\pi = 5\pi$$

4'. 设曲线 $L: x^2 + y^2 = a^2$, 则 $\oint_L e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2 - x) ds$ 的值是 $2\pi a^3 e^{a^2}$.

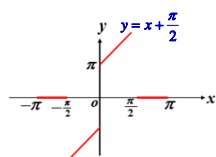
5. $f(x, y)$ 连续, 二次积分 $\int_0^1 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$ 交换积分次序后为

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 f(x, y) dx$$



6. 设 $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$, 又设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数, 则 $S(\frac{9\pi}{4}) =$ _____.

$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上是奇函数



$$S(\frac{9\pi}{4}) = S(\frac{9\pi}{4} - 2\pi) = S(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = -(-x - \frac{\pi}{2})|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4}. \quad f(x) = -f(-x)$$

$$S(\frac{9\pi}{4}) = S(\frac{\pi}{4}) = y|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4}$$

二. 选择题 (本题共6小题, 每小题3分, 满分18分)

1. 设二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, 则在点 $(0, 0)$ 处正确的选项是 (B).

(A) 连续, 偏导数存在 (B) 不连续, 偏导数存在
(C) 连续, 偏导数不存在 (D) 不连续, 偏导数不存在

2. $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续是函数在点 (x_0, y_0) 可微的 (B).

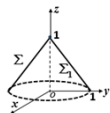
(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充分且必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

二. 选择题 (本题共6小题, 每小题3分, 满分18分)

3. 设 $\Sigma: z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ($z \geq 0$), Σ_1 为 Σ 在第一卦限中的部分, 则选项成立的是 (C).

$$(A) \iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS \quad (B) \iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$$

$$(C) \iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS \quad (D) \iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$$



4. 已知 $F(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $F(x, y)(ydx + xdy)$ 为某一函数的全微分, 则 (C) 成立.

$$P = yF(x, y),$$

$$Q = xF(x, y)$$

$$(A) \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad (B) x \frac{\partial F}{\partial x} = -y \frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = F(x, y) + yF_y(x, y)$$

$$(C) y \frac{\partial F}{\partial y} = x \frac{\partial F}{\partial x} \quad (D) x \frac{\partial F}{\partial y} = y \frac{\partial F}{\partial x} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = F(x, y) + xF_x(x, y)$$

二. 选择题 (本题共6小题, 每小题3分, 满分18分)

5. 若在幂级数的收敛域上有, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$, 则 $a_n =$ (A).

$$(A) \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \quad (B) \frac{(-1)^n}{2^n} \quad (C) \frac{1}{2^{n+1}} \quad (D) \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{x-1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x-1)^n$$

6. 在曲线 $\begin{cases} x = t^3 \\ y = -t^2 \end{cases}$ 的所有切线中与平面 $2x + 4y + 2z + 7 = 0$ 平行的切线 (C). 任一点处 $\vec{T} = (3t^2, -2t, 1) \perp \vec{n} = (2, 4, 2)$
 $\Rightarrow 3t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (3t-1)(t-1) = 0$

(A) 不存在 (B) 有1条 (C) 有2条 (D) 有3条

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases} \quad T = (1, \varphi'(x), \psi'(x))$$

求 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ 在 $(-1, 1, 2)$ 点处的切线方程.

或 $\vec{T} = (1, y'_x, z'_x)|_{(-1, 1, 2)}$, 求 y'_x, z'_x 涉及隐函数组的导数

$$\text{或取 } \vec{T} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2, \quad \begin{aligned} \vec{n}_1 &= (F_x, F_y, F_z)|_{(-1, 1, 2)} \\ \vec{n}_2 &= (G_x, G_y, G_z)|_{(-1, 1, 2)} \end{aligned}$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{0}, \quad \text{或} \begin{cases} x-y+2=0 \\ z-2=0 \end{cases}$$

三. 计算题 (本题共6小题, 每小题5分, 满分30分)

1. 在马鞍面 $z = xy$ 上求一点, 使得这一点的法线与平面 $2x + 3y + z + 2 = 0$ 垂直, 并写出该法线方程.

解 设曲面 $z = xy$ 上所求点为 (x_0, y_0, z_0) ,

则其法向量 $\vec{n} = (y_0, x_0, -1)$,

它平行于平面法向量 $\vec{n}_1 = (2, 3, 1)$, $\frac{y_0}{2} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}$,

即 $x_0 = -3, y_0 = -2$, 从而 $z_0 = 6$, 即所求点为 $(-3, -2, 6)$,

因此得该点的法线方程是 $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{1}$.

2. 求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ 的和.

解 构造幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $R = 1$, 幂级数在 ± 1 点均收敛,

收敛域为 $[-1, 1]$. 记 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$, $x \in [-1, 1]$.

当 $x \in (-1, 1)$, 则 $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, 又 $S(0) = S'(0) = 0$

从而 $S'(x) = -\ln(1-x)$, $S(x) = x + (1-x)\ln(1-x)$.

且 $S(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + (1-x)\ln(1-x)) = 2\ln 2 - 1$,

$S(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + (1-x)\ln(1-x)) = 0$,

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = S(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x), & x \in [-1, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

可见数项级数的和为: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = S(-1) = 2\ln 2 - 1$.

3. 求过点 $(-3, 2, 5)$ 且与两平面 $x - 4z = 3$ 和 $2x - y - 5z = 1$ 的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 \vec{s} ,

根据题意知 $\vec{s} \perp \vec{n}_1 = (1, 0, -4)$, $\vec{s} \perp \vec{n}_2 = (2, -1, -5)$,

$$\text{取 } \vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-4, -3, -1),$$

故所求直线的方程为: $\frac{x+3}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{1}$.

4. 设函数 $z = f(\frac{y}{x}, xy) + g(x-y)$, 其中 f, g 均具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 令 $u = \frac{y}{x}, v = xy, w = x-y$, 则由偏导数的四则法则与链式法则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_1 \frac{\partial u}{\partial x} + f'_2 \frac{\partial v}{\partial x} + g' \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} f'_1 + y f'_2 + g'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2} f'_1 - \frac{y}{x^2} (f''_{11} f'_1 + f''_{12} f'_2 + (g')'_y),$$

$$= -\frac{1}{x^2} f'_1 - \frac{y}{x^2} (f''_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{12} \frac{\partial v}{\partial y}) + f'_2 + y (f''_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + f''_{22} \frac{\partial v}{\partial y}) + g'' \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$= -\frac{y}{x^2} f''_{11} - \frac{y}{x} f''_{12} + \frac{y}{x} f''_{21} + xy f''_{22} - \frac{1}{x^2} f'_1 + f'_2 - g'' \quad (f''_{12} = f''_{21})$$

$$= -\frac{y}{x^2} f''_{11} + xy f''_{22} - \frac{1}{x^2} f'_1 + f'_2 - g''.$$

5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x + 2y + z = 1$ 所围成的闭区域.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad I &= \iiint_{\Omega} d\sigma \int_0^{1-x-2y} x \, dz \\ &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} dy \int_0^{1-x-2y} dz \\ &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{\frac{1-x}{2}} (1-x-2y) \, dy \\ &= \int_0^1 x \cdot [\frac{1}{2}(1-x)^2 - \frac{1}{4}(1-x)^2] \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) \, dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

6. 求面密度 $\rho=1$ 的抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ($0\leq z\leq 1$) 的质量.

解 $\Sigma: z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ($0\leq z\leq 1$)

在 xOy 面上的投影域为 $D_{xy}: x^2+y^2\leq 2$

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dxdy = \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy$$

$$\begin{aligned} \text{可见 } M &= \iint_{\Sigma} 1 dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2} dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+r^2} r dr \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2(3\sqrt{3}-1)\pi}{3}. \end{aligned}$$

四. (本题满分8分)

求三重积分 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z) dv$, 其中区域 Ω 由不等式 $x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1$, $x^2+y^2\leq z^2$ 所确定.

解 首先由对称性有 $I = \iiint_{\Omega} (x+y+z) dv = \iiint_{\Omega} z dv$

球面坐标下 $\Omega: 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq \frac{\pi}{4}, 0\leq r\leq 2\cos\varphi$,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos\varphi} r \cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2^4 \cos\varphi^5}{4} \sin\varphi d\varphi = \frac{7}{6}\pi.$$

先二后一法: 两面的交线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} z dv = \int_0^1 z dz \iint_{D_1: x^2+y^2\leq z^2} d\sigma + \int_1^2 z dz \iint_{D_2: x^2+y^2\leq 1-(z-1)^2} d\sigma \\ &= \int_0^1 z \cdot \pi z^2 dz + \int_1^2 z \cdot \pi(1-(z-1)^2) dz = \frac{1}{4}\pi + \frac{11}{12}\pi = \frac{7}{6}\pi. \end{aligned}$$

五. (本题满分8分)

判定下列级数是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散, 并说明理由.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{3^n}; \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln(n+1)} \quad ** \quad u_n = \frac{1}{n - \ln(n+1)}, \frac{\ln(n+1)}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}$$

解 1. 因 $\lim_{n\rightarrow\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{1}{3} \frac{3n+2}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$, 正项级数 (1) 绝对收敛.

$$\begin{aligned} 2. \text{记 } u_n &= \frac{1}{n \ln(n+1)}, \text{ 由于 } \sum_{k=1}^n |(-1)^k u_k| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \ln(k+1)} \geq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln(x+1)} \\ &= \int_1^{n+1} \frac{dx}{x \ln(x+1)} \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{(x+1) \ln(x+1)} = \ln[\ln(x+1)] \Big|_1^{n+1} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

可见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^k u_k|$ 不收敛;

又 $u_n \downarrow$, 且 $\lim_{n\rightarrow\infty} u_n = 0$, 由 Leibniz 定理知交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 收敛, 故原级数 (2) 条件收敛.

六. (本题满分9分)

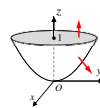
计算 $I = \iiint_{\Sigma} (2x+z) dydz + z dx dy$, 其中 Σ 是旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 及 $z=1$ 之间部分的下侧.

解 作辅助面 $\pi: z=1$ ($(x,y) \in D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$), 取上侧,

则 $\Sigma+\pi$ 形成闭合曲面, 外侧, 且围成区域 Ω ,

设曲面 Σ , Ω 在 xOy 面上的投影为 D_{xy} , 则

$$\Omega: \begin{cases} x^2+y^2\leq z\leq 1 \\ D_{xy}: x^2+y^2\leq 1 \end{cases} \quad \text{由高斯公式, 得:}$$



$$\begin{aligned} I &= \left(\iint_{\Sigma+\pi} - \iint_{\pi} \right) (2x+z) dydz + z dx dy = \iiint_{\Omega} [(2x+z)'_z + (z)'_x] dv \\ &\quad - \iint_{D_{xy}: x^2+y^2\leq 1} 1 dx dy = 3 \iiint_{\Omega} dv - \iint_{D_{xy}} dx dy = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_r^1 dz - \pi = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

六. (本题满分9分)

求曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3z+x) dydz - x^2yz dzdx - x^2z^2 dxdy$, 其中曲面 Σ 为 $z=2-x^2-y^2$, $1\leq z\leq 2$, 取上侧.

解 作取下侧的辅助面 $\Sigma_1: z=1$ ($(x,y) \in D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$)

则 Σ 与 Σ_1 形成闭曲面, 外侧, 且围成区域 Ω , 由高斯公式得

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3z+x) dydz - x^2yz dzdx - x^2z^2 dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (3x^2z+1-x^2z-2x^2z) dv = \iiint_{\Omega} dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_1^{2-r^2} dz = \frac{\pi}{2}, \\ &\text{又 } \iint_{\Sigma_1} (x^3z+x) dydz - x^2yz dzdx - x^2z^2 dxdy = \iint_{D_{xy}} (-x^2) (-dxdy) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\text{故所求曲面积分 } I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} - \iint_{\Sigma_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

六. (本题满分9分)

已知曲面 Σ 是 $z=1-x^2-y^2$ ($z\geq 0$) 的上侧, 求第二类曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3+yz) dydz + (y^3+x^2z) dzdx + (z^2-1+2xy) dxdy **$$

解 作取下侧的辅助面 $\Sigma_1: z=0$, ($(x,y) \in D_{xy}: x^2+y^2\leq 1$)

Σ 与 Σ_1 形成闭曲面, 外侧, 并围成闭区域 Ω , 根据高斯公式, 得

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma+\Sigma_1} (x^3+yz) dydz + (y^3+x^2z) dzdx + (z^2-1+2xy) dxdy \\ &= \iiint_{\Omega} (3x^2+3y^2+2z) dxdydz = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r dr \int_0^{1-r^2} r^2 dz + 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dz \int_0^{1-r^2} dz \\ &= 6\pi \int_0^1 r^3(1-r^2) dr + 2\pi \int_0^1 z(1-z) dz = \frac{5\pi}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{又 } \iint_{\Sigma_1} (x^3+yz) dydz + (y^3+x^2z) dzdx + (z^2-1+2xy) dxdy \\ &= \iint_{\Sigma_1} (2xy-1) dxdy = \iint_{D_{xy}} 1 dxdy = \pi, \text{ 故所求曲面积分 } I = \frac{5\pi}{6} - \pi = -\frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

七. (本题满分9分)

计算 $I = \int_L (e^x \sin y - my^2) dx + (e^x \cos y - m) dy$

其中曲线 L 为由点 $(a, 0)$ 到点 $(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax, y \geq 0, a > 0$.

解 添加辅助线 \overline{OA} , 则由Green公式, 得:

$$I = \int_{L+\overline{OA}} - \int_{\overline{OA}} = \oint_{AMOA} - \int_{\overline{OA}}$$



$$\begin{aligned} \text{其中 } \oint_{AMOA} &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2m \iint_D y dx dy = 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} r^2 dr \\ &= 2m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \cos^3 \theta}{3} \sin \theta d\theta = \frac{2m a^3}{3} \left(-\frac{\cos^4 \theta}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{m a^3}{6}, \end{aligned}$$

$$\text{又 } \int_{\overline{OA}} = \int_{\overline{OA}} (e^x \sin y - my^2) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0,$$

$$\therefore I = \oint_{AMOA} - \int_{\overline{OA}} = \frac{m a^3}{6} - 0 = \frac{m a^3}{6}.$$

七. (本题满分9分)

设 L 是 $|y| = 1 - x^2$ 所表示的曲线, 沿逆时针方向, 计算 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$.

解 适当选取 $\varepsilon > 0$, 作椭圆周 $L_1: x = \frac{\varepsilon}{2} \cos t, y = \varepsilon \sin t$, 即 $4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$

使 L_1 完全含在 L 内, 并取 L_1 为顺时针方向, 记 L 与 L_1 所围区域为 D ,

再记: $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, Q = \frac{x}{4x^2 + y^2}$, 则在区域 D 上有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

由格林公式可知: $\oint_{L+L_1} \frac{ydx - xdy}{2(x^2 + y^2)} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$

$$\text{从而 } \oint_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = -\oint_{L_1} \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2} = -\frac{1}{2} \int_{2\pi}^0 \frac{\varepsilon^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)}{\varepsilon^2} dt = \pi.$$

补充题——极值问题

在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面与三张坐标面所围成的四面体体积最小, 求切点坐标.

解 记 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, 设椭球面上的切点为 $P(x_0, y_0, z_0)$

则椭球面在该点的法向量为 $\vec{n} = (F_x, F_y, F_z)|_{(x_0, y_0, z_0)} = (\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2})$

切平面方程为 $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$

即 $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$, 切平面在三轴上的截距各为 $\frac{a^2}{x_0}, \frac{b^2}{y_0}, \frac{c^2}{z_0}$

则四面体的体积为 $V = \frac{1}{6} \frac{a^2 b^2 c^2}{x_0 y_0 z_0}$.

V 最小值 $\Leftrightarrow \bar{V} = x_0 y_0 z_0$ 最大值 $\Leftrightarrow \bar{V} = \ln x_0 + \ln y_0 + \ln z_0$ 最大值.

构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = \ln x + \ln y + \ln z + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$

构造拉格朗日函数 $L(x, y, z, \lambda) = \ln x + \ln y + \ln z + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1)$

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = \frac{1}{x} + \frac{2x\lambda}{a^2} = 0 \\ L_y = \frac{1}{y} + \frac{2y\lambda}{b^2} = 0 \\ L_z = \frac{1}{z} + \frac{2z\lambda}{c^2} = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}}, y = \frac{b}{\sqrt{3}}, z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

驻点为 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$.

由于四面体体积 V 的最小值是存在的, 且又有唯一驻点,

可见该驻点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ 就是所求的切点.

补充题——极值问题

求椭圆抛物面 $z = x^2 + 2y^2$ 与平面 $3x + 6y + 2z = 27$ 的交线上距离 xOy 面最近的点的坐标.

解 设交线上点 $P(x, y, z)$ 到 xOy 面距离 $d = |z|$, 取 $f(x, y, z) = d^2 = z^2$

两曲面方程为约束方程, 于是

令 $L(x, y, z, \lambda, \mu) = z^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - z) + \mu(3x + 6y + 2z - 27)$

$$\begin{cases} L_x = 2\lambda x + 3\mu = 0 \\ L_y = 4\lambda y + 6\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x$$

$$\begin{cases} L_z = 2z - \lambda + 2\mu = 0 \\ L_\lambda = x^2 + 2y^2 - z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 3x^2$$

$$L_\mu = 3x + 6y + 2z - 27 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = -3,$$

解得 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{4}), (-3, -3, 27)$, 由于 d_{\min} 存在, 且为 $\frac{27}{4}$,

\therefore 最近距离的点就是 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{27}{4})$.

补充题——极值问题

已知曲面 $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$ 与平面 $x + y - z = 0$ 的交线在 xOy 面上的投影为一椭圆, 求该椭圆的面积.

(提示: 椭圆的长, 短半轴实为椭圆周上的点到圆心的最大, 最小距离)

解 交线 $\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影为椭圆: $\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 2xy = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

显然椭圆的中心点是原点. 在椭圆上任取一点 (x, y) , 它到原点距离 $d = \sqrt{x^2 + y^2}$

令 $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(3x^2 + 3y^2 - 2xy - 1)$

$$\text{由 } \begin{cases} L_x = 2(1 + 3\lambda)x - 2\lambda y = 0 \\ L_y = 2(1 + 3\lambda)y - 2\lambda x = 0 \\ L_\lambda = 3x^2 + 3y^2 - 2xy - 1 = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \text{ 知 } y = \pm x, \text{ 代入 } (3) \text{ 得 } \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \begin{matrix} x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{matrix}$$

即得四个驻点 $P_{1,2}(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}), P_{3,4}(\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2\sqrt{2}})$, 且 $d(P_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}, d(P_{3,4}) = \frac{1}{2}$

可见椭圆的长, 短半轴分别是 $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$, 于是面积为 $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \pi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.