



《概率论与数理统计》自我测试卷 03

一、选择题：（每题2分，共20分）

1. 设 A, B 是两个互不相容的事件， $P(B) > 0$ ，则下列各式中一定成立的是【 】。
(A) $P(A) = 1 - P(B)$ ； (B) $P(A|B) = 0$ ；
(C) $P(A|\bar{B}) = 1$ ； (D) $P(\bar{A}\bar{B}) = 0$ 。
2. 若函数 $y = f(x)$ 是一随机变量 X 的概率密度函数，则一定成立的是【 】。
(A) $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ； (B) $f(x)$ 的值域为 $[0, 1]$ ；
(C) $f(x)$ 为非负； (D) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续。
3. 设 (X, Y) 的联合分布律为

		Y	0	1	2
		X			
		-1	$\frac{1}{15}$	t	$\frac{1}{5}$
		1	s	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若 X 和 Y 相互独立，则 (s, t) 取值【 】。

- (A) $\left(\frac{2}{10}, \frac{1}{15}\right)$ ； (B) $\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{10}\right)$ ；
(C) $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{15}\right)$ ； (D) $\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{10}\right)$ 。
4. 若随机变量 X 与 Y 不相关，则与之等价的条件是【 】。
(A) $D(XY) = D(X)D(Y)$ ； (B) $D(X+Y) = D(X-Y)$ ；
(C) $D(XY) \neq D(X)D(Y)$ ； (D) $D(X+Y) \neq D(X-Y)$ 。
5. 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ ，则服从 $N(0, 1)$ 的随机变量是【 】。



- (A) $D(XY) = D(X)D(Y)$; (B) $D(X+Y) = D(X-Y)$;
(C) $D(XY) \neq D(X)D(Y)$; (D) $D(X+Y) \neq D(X-Y)$.
6. 现有10张奖券, 其中8张为2元, 2张为5元. 某人从中随机地无放回抽取3张, 则此人所得奖金的数学期望为【 】.
(A) 6元; (B) 12元;
(C) 7.8元; (D) 9元.
7. 设 X_1, X_2, \dots, X_8 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{10} 为分别来自两个正态总体 $N(-1, 2^2)$ 及 $N(2, 5^2)$ 的样本, 且相互独立, S_1^2 和 S_2^2 分别为两个样本的样本方差, 则服从 $F(7, 9)$ 分布的统计量是【 】.
(A) $\frac{2S_1^2}{5S_2^2}$; (B) $\frac{5S_1^2}{2S_2^2}$;
(C) $\frac{4S_2^2}{25S_1^2}$; (D) $\frac{25S_1^2}{4S_2^2}$.
8. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 已知, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的一个样本, 则 μ 的置信度为95%的置信区间是【 】.
(A) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \right)$; (B) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.025} \right)$;
(C) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05} \right)$; (D) $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.05}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.05} \right)$.
9. 在假设检验中, 显著性水平 α 是指【 】.
(A) $P(\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假}) = \alpha$; (B) $P(\text{接受 } H_1 \mid H_1 \text{ 为假}) = \alpha$;
(C) $P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真}) = \alpha$; (D) $P(\text{拒绝 } H_1 \mid H_1 \text{ 为真}) = \alpha$.
10. 设
$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline p & 0.3 & 0.7 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1 \\ \hline p & 0.3 & 0.7 \end{array}$$
, 若 X, Y 相互独立, 则必有【 】.
(A) $X = Y$; (B) $P(X = Y) = 1$;
(C) $P(X = Y) = 0$; (D) 以上A、B、C都不对.

二、填空题：（每题2分，共16分）

11. 设 A, B, C 为三个随机事件，用 A, B, C 的运算关系表示事件： A, B, C 中不多于一个发生 = _____.
12. 将红、黄、蓝3个球随机地放入4只盒子中，若每只盒子容球数不限，则有3只盒子各放一个球的概率是 _____.
13. 已知 $P(A \cup B) = 0.8$ ， $P(B) = 0.4$ ， $P(A|B) = \text{_____}$ 则.
14. 袋中有1个黑球、2个白球，从中任取2个，则取得黑球数 X 的分布函数 $F(x) = \text{_____}$.
15. 设 X 是区间 $[0, 1]$ 上的连续型随机变量， $P(X \leq 0.3) = 0.8$ ，若 $Y = 1 - X$ ，则当常数 $c = \text{_____}$ 时，有 $P(Y \leq c) = 0.2$.
16. 设 X 和 Y 相互独立且都服从 $N(0, 1)$ ，则随机变量 $Z = 2X - 3Y + 1$ 的概率密度函数 $f(z) = \text{_____}$.
17. 设 X 服从区间 $(-1, 1)$ 内的均匀分布，则 X 和 $Y = |X|$ 的相关系数 $\rho_{XY} = \text{_____}$.
18. 设假设检验中犯第I类错误的概率为 α ，犯第II类错误的概率为 β ，为了同时减少 α 和 β ，只有 _____.

三、计算题：（每题8分，共64分）

19. 设有两台机床加工同样的零件，第一台机床出废品的概率是0.03，第二台机床出废品的概率是0.02. 加工出来的零件混放在一起，并且已知第一台机床加工的零件比第二台机床多一倍. (1) 求任意取出的一个零件是合格品的概率；(2) 如果任意取出的一个零件经过检验后发现是废品，求它是第二台机床加工的概率.



20. (1) 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$, 且

$$P\left(X < \frac{1}{3}\right) = P\left(X > \frac{1}{3}\right), \text{ 求常数 } a \text{ 和 } b.$$

(2) 设随机变量 X 服从 $(0, 1)$ 内的均匀分布, 求 $Y = -2 \ln X$ 的概率密度函数.

21. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} c e^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- (1) 确定常数 c ;
- (2) 讨论 X, Y 的独立性;
- (3) 求 $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 2)$.



22. (1) 证明: 在一次试验中, 事件 A 发生的次数 X 的方差 $D(X) \leq \frac{1}{4}$;

(2) 设 X 为具有二阶矩的随机变量, c 为任意常数, 问: c 为何值时, 取 $E[(X-c)^2]$ 最小值.

23. 设某一复杂的系统由 n 个相互独立的部件组成, 每个部件的可靠性 (即部件正常工作的概率) 为 0.9, 并且必须至少有 80% 的部件工作, 才能使整个系统正常工作. 问: n 至少为多少时才能使系统的可靠性不低于 0.95?



24. 已知随机变量 X 的概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \theta > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，设 X_1, X_2, \dots, X_n

是来自总体 X 的一个样本，求未知参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量。

25. 设随机变量 X 在区间 $(0, \theta)$ 上服从均匀分布，其中 θ 未知。 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本，则 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 。确定 c ，使得 $c\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量。



-
26. (1) 从理论上分析得出结论: 压缩机的冷却用水的温度 $T \sim N(\mu, \sigma^2)$, 升高的平均值不多于 5°C . 现测量了 5 台压缩机的冷却用水的升高温度分别是 $6.4, 4.3, 5.7, 4.9, 1.44$, 问: 在显著水平 $\alpha = 0.05$ 时, 这组数据与理论上分析所得出的结论是否一致?
- (2) 已知纤维的纤度 $T \sim N(1.405, 0.048^2)$. 现抽取了 5 根纤维, 测得纤度为 $1.32, 1.55, 1.36, 1.40, 1.44$, 问: 纤度的总体方差是否正常 (取 $\alpha = 0.05$) ?