《概率论与数理统计》自我测试卷 02

一、选择题：（每题2分，共20分）

1. 已知$P(B)>0$，$A_1A_2=\Phi$，则下列各式不正确的是【　　　】.

(A) $P(A_1\cup A_2|B)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$;　　(B) $P(A_1A_2|B)=0$;

(C) $P(\bar{A}_1\bar{A}_2|B)=1$;　　(D) $P(\bar{A}_1\cup\bar{A}_2|B)=1$.

2. 设A,B,C是三个相互独立的随机事件，且$0<P(C)<1$，则下列四对事件中，不相互独立的是【　　　】.

(A) $A\cup B$与C;　　(B) $\bar{A}C$与$\bar{C}$;

(C) $\overline{A-B}$与$\bar{C}$;　　(D) $\overline{AB}$与$\bar{C}$.

3. 设随机变量X服从指数分布$f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则随机变量$Y=1-\mathrm{e}^{-2X}$【　　　】.

(A) 服从$(0,1)$上的均匀分布;　　(B) 仍服从指数分布;

(C) 服从正态分布;　　(D) 服从参数为2的泊松分布.

4. 设随机变量X和Y相互独立，其分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$，则随机变量$Z=\max(X,\ Y)$的分布函数$F_Z(z)=$【　　　】.

(A) $\max\{F_X(z),\ F_Y(z)\}$;　　(B) $F_X(z)F_Y(z)$;

(C) $\frac{1}{2}[F_X(z)+F_Y(z)]$;　　(D) $F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)$.

5. 随机变量X,Y和$X+Y$的方差满足$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$是X与Y【　　　】.

(A) 不相关的充分条件，但不是必要条件;
(B) 不相关的必要条件，但不是充分条件;
(C) 独立的必要条件，但不是充分条件;
(D) 独立的充分必要条件.

6. 设存在常数$a,b\ (a\ne 0)$，使得概率$P(Y=aX+b)=1$，则必有【　　　】.

(A) $\rho_{XY}=1$;　　(B) $\rho_{XY}=-1$;

(C) $\rho_{XY}=\frac{a}{|a|}$;　　(D) $\rho_{XY}<1$.

7. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 为随机变量序列，a 为常数，则 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 a 是指【　　】.

(A) $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| \ge \varepsilon) = 0$；

(B) $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - a| \ge \varepsilon) = 1$；

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = a$；

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = a) = 1$.

8. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是取自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则 σ^2 的无偏估计量是【　　】.

(A) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$；

(B) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$；

(C) $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$；

(D) $\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^2$.

9. 在假设检验中，记 H_1 为备择假设，则犯第I类错误是指【　　】.

(A) H_1 为真，接受 H_1；

(B) H_1 不真，接受 H_1；

(C) H_1 为真，拒绝 H_1；

(D) H_1 不真，拒绝 H_1.

10. 设 $X \sim N(0, 16)$，$Y \sim N(0, 9)$，X, Y 相互独立，$X_1, X_2, \ldots, X_9$ 和 $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{16}$ 分别为总体 X 和 Y 的一个简单随机样本，则 $\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_9^2}{Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_{16}^2}$ 服从的分布为【　　】.

(A) $F(9, 16)$；

(B) $F(16, 9)$；

(C) $F(9, 9)$；

(D) $F(16, 16)$.

二、填空题：（每题2分，共20分）

11. 设 A, B 为随机事件，已知 $P(\bar{A}) = 0.3$，$P(B) = 0.4$，$P(A - B) = 0.5$，则 $P(B | A \cup \bar{B}) =$ ______________.

12. 一道单项选择题同时列出5个答案，一个考生可能真正理解而选对答案，也可能乱猜一个．假设他知道正确答案的概率为 $\dfrac{1}{3}$，乱猜选对答案的概率为 $\dfrac{1}{5}$．如果已知他选对了，则他确实知道正确答案的概率为 ______________.

方三

13. 设连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ A-x, & 1<x<2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，则 $A=$ __________ .

14. 设测量的随机误差 $X\sim N(0,\,100)$ ，则测量的误差的绝对值大于 19.6 的概率为 __________ .

15. 设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，若随机变量 Y 表示对 X 的三次独立观察中事件 $\left\{X\le\frac{2}{3}\right\}$ 出现的次数，则 $P(Y=0)=$ __________ .

16. 在区间 $(0,\,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之积大于 $\frac{1}{4}$ ”的概率为 __________ .

17. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从参数为 p $(0<p<1)$ 的 $(0-1)$ 分布．令随机变量 $Z=\begin{cases} 1, & X+Y\text{ 为偶数} \\ 0, & X+Y\text{ 为奇数} \end{cases}$ ，要使 X 和 Z 相互独立，则 $p=$ __________ .

18. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为正态总体 $X\sim N(1,\,4)$ 的一个简单随机样本，则随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的联合概率密度函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=$ __________ .

19. 设随机变量 X 服从自由度为 $(n,\,n)$ 的 F 分布，已知 $P(X>\alpha)=0.05$ ，则 $P\left(X>\frac{1}{\alpha}\right)=$ __________ .

20. 设总体 $X\sim N(\mu,\,\sigma^2)$ ，其中 σ^2 已知，为使总体均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间的长度不大于 L ，则样本容量至少应取 __________ （只需给出表达式）.

三、计算题：（每题8分，共56分）

21. 设二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度函数 $f(x, y)=\begin{cases} Axy, & (x, y)\in G \\ 0, & (x, y)\notin G \end{cases}$，其中

$G=\left\{(x, y) \mid 0\le x\le 2,\ 0<y\le x^2\right\}$. 求

(1) 系数A；

(2) X和Y的边缘概率密度函数;

(3) 条件概率密度函数$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$.

22. 设二维连续型随机变量(X, Y)的概率密度函数$f(x, y)=\begin{cases} 3y, & 0<x<y,\ 0<y<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，

随机变量$Z=X-2Y$，求Z的概率密度函数.

韦玉

23. 设(X,Y)的联合分布律为

$Y \backslash X$	0	1
0	0.1	b
1	a	0.4

已知$P(X=1|Y=1)=\dfrac{2}{3}$，求：(1) a,b的值；(2) $\operatorname{cov}(X,2Y)$.

24. 设随机变量$3X+Y$和$2X-3Y$的方差、协方差分别是

$D(3X+Y)=333$, $D(2X-3Y)=280$, $\operatorname{cov}(3X+Y,2X-3Y)=-42$

求随机变量$X-2Y$和$2X+3Y$的方差及协方差.

肖云

25. 农贸市场某种商品每日的价格为$Y_n = Y_{n-1} + X_n \ (n \geq 1)$，其中$Y_n$表示第$n$天该商品的价格，$X_n$表示第$n$天较前一天商品价格的变化.

(1) 写出Y_n与$Y_0, X_1, X_2, \ldots, X_n$之间的关系；

(2) 已知$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$相互独立，且$E(X_n)=0$，$D(X_n)=2 \ (n=1, 2, \ldots)$. 如果今天该商品的价格为100元，用中心极限定理估计18天后该商品的价格在96元与104元之间的概率.

26. 设总体X服从参数为p的几何分布，即$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p, k=1, 2, \ldots$，设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自$X$的一个简单随机样本，求参数$p$的矩估计量和最大似然估计量.

27. 某厂在所生产的汽车蓄电池的说明书上写明：使用寿命的标准差不超过0.9年. 现随机地抽取了10个蓄电池，测得样本的标准差为1.2年，假定蓄电池的使用寿命服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，取显著水平$\alpha=0.05$，试检验$H_0:\sigma^2\ge 0.81, H_1:\sigma^2<0.81$.

四、证明题：（本题4分）

28. 设随机变量X和Y相互独立，且方差$D(X),D(Y),D(XY)$存在，证明：$D(XY)\ge D(X)D(Y)$.

文玉