高等数学第三章测试题答案 (2019.11.8)

一、 求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{((1+x)^{\frac1x}-e)\sin\ln(1+x)}{x\sin x}$ $\quad\sin\ln(1+x)\sim x,\quad x\sin x\sim x^2$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac1x}-e}{x}\overset{(\frac00)\ (L'H)}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac1x}[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}]}{1}$

$=e\lim\limits_{x\to0}[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}]=e\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\ (\frac00)$

$=e\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-1}{2x+3x^2}=-\frac{e}{2}.$

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac32}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$

解 令 $t=\frac1x$， 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}\ (\frac00)$

$=\lim\limits_{t\to+0}\frac{(1+2t)^{-\frac12}-(1+t)^{-\frac12}}{2t}\ (\frac00)$

$=\lim\limits_{t\to+0}\frac{-(1+2t)^{-\frac32}+\frac12(1+t)^{-\frac32}}{2}=-\frac14.$

3. $\lim\limits_{x\to0}(\frac{1}{1-\cos x})^{x^3}$ $\quad$ (∞^0型)

原式 $=\lim\limits_{x\to0}e^{-x^3\ln(1-\cos x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}-x^3\ln(1-\cos x)}$

$=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-\cos x)}{x^{-3}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}\text{及}L-H\text{法则}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-3x^{-4}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{3x^{-4}\cdot\frac12x^2}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac23x^3}=e^0=1.$

4. 设 $f(x)$具有二阶导数 ，当 $x\neq0$时，$f(x)\neq0$

且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac1x}$.

解 ∵ $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac1x}\overset{1^\infty}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}[(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac{x}{f(x)}}]^{\frac{f(x)}{x^2}}$

又 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$， ∴ $f(0)=0$， $f'(0)=0$

且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}\overset{\frac00}{=\!=}\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac12\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\frac12f''(0)=2,$

∴ $\lim\limits_{x\to0}(1+\frac{f(x)}{x})^{\frac1x}=e^2.$

注： $\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}$ 这个极限不可以用 $L'H$ 法则.

二、设 $f(0)=g(0)$, $f'(0)=g'(0)$, 当 $x>0$ 时, $f''(x)<g''(x)$, 证明 ：当 $x>0$ 时，$f(x)<g(x)$.

证法 1 （利用单调性 ）： 令 $F(x)=f(x)-g(x)$

由于 $F''(x)=f''(x)-g''(x)$， 且当$x>0$时, $F''(x)<0$.

表明 $F'(x)\downarrow$， 又$F'(0)=f'(0)-g'(0)=0$,

$\therefore\ \forall x>0$, 恒有 $F'(x)<F'(0)=0$.

而这表明 $F(x)\downarrow$， 又 $F(0)=f(0)-g(0)=0$,

$\therefore\ \forall x>0$， 恒有 $F(x)<F(0)=0$,

即 当 $x>0$ 时， 有 $f(x)<g(x)$. 得证

证法 2 （利用 *Taylor* 定理 ）： 令 $G(x)=f(x)-g(x)$

则 $G(0)=f(0)-g(0)=0$,

$G'(0)=f'(0)-g'(0)=0$,

及 $\forall x>0$, 恒有 $G''(x)=f''(x)-g''(x)<0$,

于是将 $G(x)$在 0 点展成 $n=1$,带有 L氏余项的 *Taylor* 公式

$G(x)=G(0)+G'(0)\cdot x+\frac{1}{2!}G''(\xi)\cdot x^2$

$=\frac12G''(\xi)x^2<0$， 其中 $0<\xi<1$.

$\therefore\ \forall x>0$， 恒有 $G(x)<0$， 即

$\forall x>0$, 恒有 $f(x)<g(x)$成立 . 得证

三、 证明下列不等式

1. 设 $x>0$, 常数 $a>e$, 证明 $(a+x)^a<a^{(a+x)}$ (*)

分析: (*) $\Leftrightarrow a\ln(a+x)<(a+x)\ln a \Leftrightarrow a\ln(a+x)-(a+x)\ln a<0$

证 法1 令 $F(x)=a\ln(a+x)-(a+x)\ln a$, $x\in[0,+\infty)$

由于 $F'(x)=\frac{a}{a+x}-\ln a<\frac{a}{a}-\ln e=0$,

$\forall x>0, F'(x)<0$ 可见 $F(x)\downarrow$, 又 $F(0)=a\ln a-a\ln a=0$,

$\therefore \forall x>0,\ F(x)<F(0)$, 即 $a\ln(a+x)-(a+x)\ln a<0$ 得证

法2 令 $G(t)=\frac{\ln t}{t}$, $t\in[a,+\infty)$

由于 $G'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}<0$, $t\ge a>e$ $\therefore \forall t\ge a,\ G(t)\downarrow$,

可见: $\forall x>0$, 有 $G(a+x)<G(a)$, 即 $\frac{\ln(a+x)}{a+x}<\frac{\ln a}{a}$ 整理即可.

2. 当 $x<1$时, $e^x\le\frac{1}{1-x}$

证 令 $F(x)=(1-x)e^x-1, x\in(-\infty,1]$

则由 $F'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x\begin{cases}>0, & x<0\\ =0, & x=0\\ <0, & x>0\end{cases}$

$\therefore$ $x=0$是$F(x)$的极大值点, 且极大值为 $F(0)=0$,

又在区间端点处: $F(1)=-1<F(0), F(-\infty)=-1<F(0)$,

可见: $F(0)=0$是$F(x)$在$(-\infty,1]$上的最大值, 于是有

$\forall x<1$, 恒有 $F(x)\le F(0)$, 即: $(1-x)e^x-1\le 0$

$\because 1-x>0$, $\therefore e^x\le\frac{1}{1-x}$. 得证

四、证明方程 $\ln x=\frac{x}{2e}$ 恰有两个不同的实根

证 令 $F(x)=\ln x-\frac{x}{2e}, x\in(0,+\infty)$,

$$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2e}=\frac{2e-x}{2ex}=\begin{cases}>0, & 0<x<2e\\ =0, & x=2e\\ <0, & x>2e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{在}(0,\ 2e),\ F(x)\uparrow\\ \text{极大值}: F(2e)=\ln 2>0\\ \text{在}(2e,\ +\infty),\ F(x)\downarrow\end{cases}$$

又 $F(0^+)=\ln 0^+=-\infty$, $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{2e})=-\infty$,

综合讨论可知: 在 $(0,2e)$, $F(x)$由: $-\infty \nearrow \ln 2>0$,

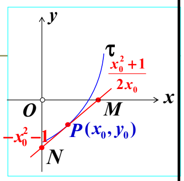
而在 $(2e,+\infty)$, $F(x)$由: $\ln 2 \searrow -\infty$.

可见 $F(x)$在$(0,2e)$与$(2e,+\infty)$内各有一个零点,

即方程 $\ln x-\frac{x}{2e}=0$ 恰有两个不同的实根. 证毕

注: 作辅助函数; 判断增减性; 单调区间端点处的值及符号;
基此及连函的性质可知 函数在各区间有无零点.

五、在曲线 $C: y=x^2-1\ (x>0)$上的点 P处作切线先与坐标轴交于 M, N(见图). 试求点P的坐标使 ΔOMN 的面积最小.



解 设$P(x_0,y_0)$为C上任一点, 则C在$P(x_0,y_0)$处的切线 L的方程为:

L: $y-y_0=2x_0(x-x_0)$

即 $y=2x_0x-x_0^2-1$

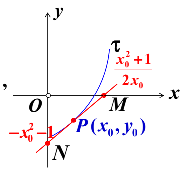
$\therefore$ L在x轴, y轴上的截距分别为 $\frac{x_0^2+1}{2x_0}, -x_0^2-1$.

于是求点 P的坐标归结为求 ΔOMN 的面积 $S(x_0)$最值问题.

由于 $S(x_0)=\frac{1}{2}\left|\frac{x_0^2+1}{2x_0}\right|\cdot\left|x_0^2+1\right|=\frac{1}{4}\frac{(x_0^2+1)^2}{x_0}\quad(x_0>0)$

$$S'(x_0)=\frac{2(x_0^2+1)\cdot 2x_0^2-(x_0^2+1)^2}{4x_0^2}=\frac{(3x_0^2-1)(x_0^2+1)}{4x_0^2}$$

$$S'(x_0)=\frac{(3x_0^2-1)(x_0^2+1)}{4x_0^2}\Rightarrow\begin{cases}>0, & x_0<\frac{1}{\sqrt3}\\ =0, & x_0=\frac{1}{\sqrt3}\\ <0, & x_0>\frac{1}{\sqrt3}\end{cases}$$



$\therefore x_0=\frac{1}{\sqrt3}$是$S(x_0)$在$(0,+\infty)$上的唯一极小值点,

又 $S(x_0)$的最小值是存在的,

$\therefore$ $x_0=\frac{1}{\sqrt3}$就是 $S(x_0)$的最小值点.

从而P点坐标为$x_0=\frac{1}{\sqrt3}, y_0=\frac{-2}{3}$时, $S(x_0)$最小值, 且最小值为:

$S(\frac{1}{\sqrt3})=\frac{1}{4}\cdot\sqrt3\cdot(\frac{1}{3}+1)^2=\frac{4\sqrt3}{9}$.

六、设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶导数且 $f(1)=1$, 证明:

(1) $\exists\xi\in(0,\ 1)$, 使得 $f'(\xi)=1$;

(2) $\exists\eta\in(-1,\ 1)$, 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

证 由于 $f(x)$是奇函数 $\Rightarrow$ $f(0)=0$, 且 $f'(x)$为偶函数

(1) 作辅助函数 $F(x)=f(x)-x,\ x\in[0,\ 1]$.

由于 $F(0)=f(0)-0=0$, $F(1)=f(1)-1=0$,

可见 $F(x)$在$[0,\ 1]$上满足 Rolle 定理三条件,

于是 $\exists\xi\in(0,1)$ 使得: $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=1$;

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数且 $f(1)=1$，证明：

（1）$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

（2）$\exists\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(2) 由于 $f'(-\xi)=f'(\xi)=1$,

作辅助函数 $G(x)=(f'(x)-1)e^{x}$，$x\in[-\xi,\xi]$

$$G(-\xi)=(f'(-\xi)-1)e^{-\xi}=0,$$

$$G(\xi)=(f'(\xi)-1)e^{\xi}=0,$$

可见 $G(x)$ 在 $[-\xi,\xi]$ 上满足 Rolle 定理三条件，

于是 $\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得：

$G'(\eta)=f''(\eta)\ e^{\eta}+(f'(\eta)-1)e^{\eta}=0$，即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

七、已知函数 $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$，试求其单调区间，极值点及极值，图形的凹凸性，拐点，渐近线，并作出函数的图形．

解 (1) 显然点 $x=\pm1$ 是函数的无穷型间断点，故曲线被直线 $x=\pm1$ 分为三支，且为奇函数；

(2) 由 $y'=\dfrac{3x^2+1}{(1-x^2)^3}\begin{cases}>0, & |x|<1\\ <0, & |x|>1\end{cases}$，显然 y 无极值；

又由 $y''=\dfrac{12x(x^2+1)}{(1-x^2)^4}$，$\therefore x=0$ 为可能的拐点；

(3) 列表讨论如下：

x	(-∞，-1)	-1	(-1，0)	0	(0，1)	1	(1，+∞)
y'	-	-∞	+	+	+	∞	-
y''	-	-∞	-	0	+	∞	+
y	↘ 凸	-∞	↗ 凸	拐点 (0，0)	↗ 凹	+∞	↘ 凹

综表可见：

$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 单调减少，而在 $(-1,0)\cup(0,1)$ 单调增加；在定义域 D 上无极值；在 $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ 凸，而在 $(0,1)\cup(1,+\infty)$ 凹，且以 $(0,0)$ 为拐点．

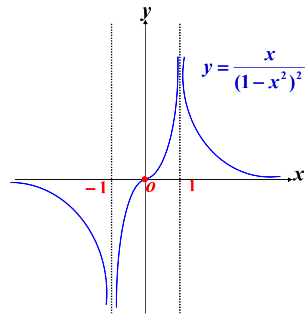
(4) 渐近线：首先 $x=\pm1$ 为两条垂直渐近线，又

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(1-x^2)^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(1-x^2)^2}=0,$$

$\therefore y=0$，即 x 轴为水平渐近线，故有三条渐近线．

(5) 描点绘图：



八、设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$，

其中 $\varphi(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\varphi(0)=1$，

(1) 确定 a 值使 $f(x)$ 为连续函数；(2) 求 $f'(x)$;

解 (1) $\because \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi'(x)+\sin x}{1}=\varphi'(0).$

$\therefore$ 欲使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=\varphi'(0)$.

(2) 当 $x\neq0$ 时，$f'(x)=\dfrac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}$,

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2}\ \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=\!=}\ \lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性．

当 $x=0$ 时，$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\frac{\varphi''(0)+1}{2}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{\varphi''(0)+1}{2}, & x=0\end{cases}$$

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}\ \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\varphi'(x)+\cancel{\sin x})+x(\varphi''(x)+\cos x)-(\varphi'(x)+\cancel{\sin x})}{2x}$$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\varphi''(x)+\cos x}{2}=\dfrac{\varphi''(0)+1}{2}=f'(0)$. $\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续．