中国石油大学(北京)
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM

# 《高等数学Ⅰ》

## 期末试题汇编

CUPK校服平台

# 高等数学复习资料

## 第一章　函数与极限

### 第一节　函数

○函数基础（高中函数部分相关知识）（★★★）

○邻域（去心邻域）（★）

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$$

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$$

### 第二节　数列的极限

○数列极限的证明（★）

【题型示例】已知数列$\{x_n\}$，证明$\lim\limits_{x\to\infty}\{x_n\}=a$

【证明示例】$\varepsilon-N$语言

1．由$|x_n-a|<\varepsilon$化简得$n>g(\varepsilon)$，

$\therefore N=[g(\varepsilon)]$

2．即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=[g(\varepsilon)]$，当$n>N$时，始终有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立，

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\{x_n\}=a$

### 第三节　函数的极限

○$x\to x_0$时函数极限的证明（★）

【题型示例】已知函数$f(x)$，证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

【证明示例】$\varepsilon-\delta$语言

1．由$|f(x)-A|<\varepsilon$化简得$0<|x-x_0|<g(\varepsilon)$，

$\therefore\delta=g(\varepsilon)$

2．即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=g(\varepsilon)$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，始终有不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，

$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

○$x\to\infty$时函数极限的证明（★）

【题型示例】已知函数$f(x)$，证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

【证明示例】$\varepsilon-X$语言

1．由$|f(x)-A|<\varepsilon$化简得$|x|>g(\varepsilon)$，

$\therefore X=g(\varepsilon)$

2．即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=g(\varepsilon)$，当$|x|>X$时，始终有不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

### 第四节　无穷小与无穷大

○无穷小与无穷大的本质（★）

函数$f(x)$无穷小$\Leftrightarrow\lim f(x)=0$

函数$f(x)$无穷大$\Leftrightarrow\lim f(x)=\infty$

○无穷小与无穷大的相关定理与推论（★★）

（定理三）假设$f(x)$为有界函数，$g(x)$为无穷小，则$\lim[f(x)\cdot g(x)]=0$

（定理四）在自变量的某个变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则$f^{-1}(x)$为无穷小；反之，若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq0$，则$f^{-1}(x)$为无穷大

【题型示例】计算：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$（或$x\to\infty$）

1．$\because|f(x)|\leqslant M$ $\therefore$函数$|f(x)|$在$x=x_0$的任一去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内是有界的；

（$\because|f(x)|\leqslant M$，$\therefore$函数$|f(x)|$在$x\in D$上有界；）

2．$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$即函数$g(x)$是$x\to x_0$时的无穷小；

（$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$即函数$g(x)$是$x\to\infty$时的无穷小；）

3．由定理可知$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$

（$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=0$）

### 第五节　极限运算法则

○极限的四则运算法则（★★）

（定理一）加减法则

（定理二）乘除法则

关于多项式$p(x)$、$q(x)$商式的极限运算

设：$\begin{cases}p(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m\\q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n\end{cases}$

则有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}\infty & n<m\\\dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\0 & n>m\end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} & g(x_0)\neq0\\\infty & g(x_0)=0,f(x_0)\neq0\\\dfrac{0}{0} & g(x_0)=f(x_0)=0\end{cases}$$

（特别地，当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$（不定型）时，通常分子分母约去公因式即约去可去间断点便可求解出极限值，也可以用罗比达法则求解）

【题型示例】求值$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

【求解示例】解：因为$x\to3$，从而可得$x\neq3$，所以原式$=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}$

其中$x=3$为函数$f(x)=\frac{x-3}{x^2-9}$的可去间断点

倘若运用罗比达法则求解（详见第三章第二节）：

解：$\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to3}\frac{(x-3)'}{(x^2-9)'}=\lim\limits_{x\to3}\frac{1}{2x}=\frac{1}{6}$

○连续函数穿越定理（复合函数的极限求解）（★★）

（定理五）若函数$f(x)$是定义域上的连续函数，那么，$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}$

【求解示例】$\lim\limits_{x\to3}\sqrt{\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to3}\frac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

### 第六节　极限存在准则及两个重要极限

○夹迫准则（P53）（★★★）

第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$\because\ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin x<x<\tan x$ $\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to0}1}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=1$$

（特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=1$）

○单调有界收敛准则（P57）（★★★）

第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

（一般地，$\lim\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$，其中$\lim f(x)>0$）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

【求解示例】

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$

$=\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)}=\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)}$

$=\left[\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left[\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)\right]}=e^{\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left[\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)\right]}$

$=e^{\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)}=e^1=e$

### 第七节　无穷小量的阶（无穷小的比较）

○等价无穷小（★★）

1. $U\sim\sin U\sim\tan U\sim\arcsin U\sim\arctan U\sim\ln(1+U)\sim\left(e^U-1\right)$

2. $\frac{1}{2}U^2\sim1-\cos U$

（乘除可替，加减不行）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+x\ln(1+x)}{x^2+3x}$

【求解示例】

解：因为$x\to0$，即$x\neq0$，所以原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+x\ln(1+x)}{x^2+3x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)\cdot x}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{3}$

### 第八节　函数的连续性

○函数连续的定义（★）

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$

○间断点的分类（P67）（★）

第一类间断点（左右极限存在）$\begin{cases}\text{跳越间断点（不等）}\\\text{可去间断点（相等）}\end{cases}$

第二类间断点$\begin{cases}\cdots\cdots\\\text{无穷间断点（极限为}\infty\text{）}\end{cases}$

（特别地，可去间断点能在分式中约去相应公因式）

【题型示例】设函数$f(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x<0\\a+x, & x\geq0\end{cases}$应该怎样选择数$a$，使得$f(x)$成为在$R$上的连续函数？

【求解示例】

1. $\because\begin{cases}f(0^-)=e^{2\cdot0^-}=e^1=e\\f(0^+)=a+0^+=a\\f(0)=a\end{cases}$

2. 由连续函数定义$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=e$

$\therefore a=e$

### 第九节　闭区间上连续函数的性质

○零点定理（★）

【题型示例】证明：方程 $f(x)=g(x)+C$ 至少有一个根介于 $a$ 与 $b$ 之间

【证明示例】

1．（建立辅助函数）函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)-C$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
2．$\because \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$（端点异号）
3．$\therefore$ 由零点定理，在开区间 $(a,b)$ 内至少有一点 $\xi$，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)-g(\xi)-C=0$（$0<\xi<1$）
4．这等式说明方程 $f(x)=g(x)+C$ 在开区间 $(a,b)$ 内至少有一个根 $\xi$

## 第二章　导数与微分

### 第一节　导数概念

○高等数学中导数的定义及几何意义（P83）（★★）

【题型示例】已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+1 & , x\le 0 \\ ax+b & , x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 $a$，$b$

【求解示例】

1．$\because \begin{cases} f'_-(0)=e^0=1 \\ f'_+(0)=a \end{cases}$，$\begin{cases} f(0^-)=e^{0^-}+1=e^0+1=2 \\ f(0^+)=b \\ f(0)=e^0+1=2 \end{cases}$

2．由函数可导定义 $\begin{cases} f'_-(0)=f'_+(0)=a=1 \\ f(0^-)=f(0^+)=f(0)=b=2 \end{cases}$

$\therefore a=1,b=2$

【题型示例】求 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线与法线方程（或：过 $y=f(x)$ 图像上点 $[a,f(a)]$ 处的切线与法线方程）

【求解示例】

1．$y'=f'(x)$，$y'|_{x=a}=f'(a)$
2．切线方程：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法线方程：$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

### 第二节　函数的和（差）、积与商的求导法则

○函数和（差）、积与商的求导法则（★★★）

1．线性组合（定理一）：$(\alpha u\pm\beta v)'=\alpha u'+\beta v'$

特别地，当 $\alpha=\beta=1$ 时，有 $(u\pm v)'=u'\pm v'$

2．函数积的求导法则（定理二）：$(uv)'=u'v+uv'$

3．函数商的求导法则（定理三）：$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

### 第三节　反函数和复合函数的求导法则

○反函数的求导法则（★）

【题型示例】求函数 $f^{-1}(x)$ 的导数

【求解示例】由题可得 $f(x)$ 为直接函数，其在定于域 $D$ 上单调、可导，且 $f'(x)\neq 0$；$\therefore \left[f^{-1}(x)\right]'=\dfrac{1}{f'(x)}$

○复合函数的求导法则（★★★）

【题型示例】设 $y=\ln\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)$，求 $y'$

【求解示例】

解：$y'=\dfrac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)'$

$$=\frac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)}}+\frac{\left(x^2+a^2\right)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{2-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

### 第四节　高阶导数

○ $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$（或 $\dfrac{d^n y}{dx^n}=\left[\dfrac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right]'$）（★）

【题型示例】求函数 $y=\ln(1+x)$ 的 $n$ 阶导数

【求解示例】$y'=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$，

$y''=\left[(1+x)^{-1}\right]'=(-1)\cdot(1+x)^{-2}$，

$y'''=\left[(-1)\cdot(1+x)^{-2}\right]'=(-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3}$

……

$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n}$

### 第五节　隐函数及参数方程型函数的导数

○隐函数的求导（等式两边对 $x$ 求导）（★★★）

【题型示例】试求：方程 $y=x+e^y$ 所给定的曲线 $C$：$y=y(x)$ 在点 $(1-e,1)$ 的切线方程与法线方程

【求解示例】由 $y=x+e^y$ 两边对 $x$ 求导

即 $y'=x'+\left(e^y\right)'$ 化简得 $y'=1+e^y\cdot y'$

$\therefore y'=\dfrac{1}{1-e^1}=\dfrac{1}{1-e}$

$\therefore$ 切线方程：$y-1=\dfrac{1}{1-e}(x-1+e)$

法线方程：$y-1=-(1-e)(x-1+e)$

〇参数方程型函数的求导

【题型示例】设参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\gamma(t)\end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

【求解示例】1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\gamma'(t)}{\varphi'(t)}$ 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'}{\varphi'(t)}$

**第六节　变化率问题举例及相关变化率（不作要求）**

**第七节　函数的微分**

〇基本初等函数微分公式与微分运算法则（★★★）

$dy=f'(x)\cdot dx$

## 第三章　中值定理与导数的应用

### 第一节　中值定理

〇引理（费马引理）（★）

〇罗尔定理（★★★）

【题型示例】现假设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$上可导，试证明：$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得$f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0$成立

【证明示例】

1.（建立辅助函数）令$\varphi(x)=f(x)\sin x$

显然函数$\varphi(x)$在闭区间$[0,\pi]$上连续，在开区间$(0,\pi)$上可导；

2．又$\because\varphi(0)=f(0)\sin0=0$

$\varphi(\pi)=f(\pi)\sin\pi=0$

即$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$

3．$\therefore$由罗尔定理知

$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得$f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0$成立

〇拉格朗日中值定理（★）

【题型示例】证明不等式：当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$

【证明示例】

1.（建立辅助函数）令函数$f(x)=e^x$，则对$\forall x>1$，显然函数$f(x)$在闭区间$[1,x]$上连续，在开区间$(1,x)$上可导，并且$f'(x)=e^x$；

2．由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in[1,x]$使得等式$e^x-e^1=(x-1)e^{\xi}$成立，

又$\because e^{\xi}>e^1$，$\therefore e^x-e^1>(x-1)e^1=e\cdot x-e$，

化简得$e^x>e\cdot x$，即证得：当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$

【题型示例】证明不等式：当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$

【证明示例】

1.（建立辅助函数）令函数$f(x)=\ln(1+x)$，则对$\forall x>0$，函数$f(x)$在闭区间$[0,x]$上连续，在开区间$(0,\pi)$上可导，并且$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$；

2．由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in[0,x]$使得等式$\ln(1+x)-\ln(1+0)=\dfrac{1}{1+\xi}(x-0)$成立，

化简得$\ln(1+x)=\dfrac{1}{1+\xi}x$，又$\because\xi\in[0,x]$，

$\therefore f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi}<1$，$\therefore\ln(1+x)<1\cdot x=x$，

即证得：当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$

### 第二节　罗比达法则

〇运用罗比达法则进行极限运算的基本步骤（★★）

1. ☆等价无穷小的替换（以简化运算）
2. 判断极限不定型的所属类型及是否满足运用罗比达法则的三个前提条件

A．属于两大基本不定型（$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$）且满足条件，

则进行运算：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

（再进行1、2步骤，反复直到结果得出）

B．☆不属于两大基本不定型（转化为基本不定型）

⑴$0\cdot\infty$型（转乘为除，构造分式）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}\cdot\ln x$

【求解示例】

$$解:\lim_{x\to0}x^{\alpha}\cdot\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}}}$$

$$=-\frac{1}{a}\lim_{x\to0}x^{\alpha}=0$$

（一般地，$\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}\cdot(\ln x)^{\beta}=0$，其中$\alpha,\beta\in R$）

⑵$\infty-\infty$型（通分构造分式，观察分母）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

【求解示例】

$$解:\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\right)$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0$$

⑶$0^0$型（对数求极限法）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to 0} x^x$

【求解示例】

解：设$y=x^x$，两边取对数得：$\ln y=\ln x^x=x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

对对数取$x\to 0$时的极限：$\lim\limits_{x\to 0}(\ln y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}x=0$，从而有$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^0=1$

(4)$1^\infty$型（对数求极限法）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

【求解示例】

解：令$y=(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$，两边取对数得$\ln y=\dfrac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}$，

对$\ln y$求$x\to 0$时的极限，$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{\substack{L'\\x\to 0}}\dfrac{[\ln(\cos x+\sin x)]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，从而可得

$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^1=e$

(5)$\infty^0$型（对数求极限法）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

【求解示例】

解：令$y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$，两边取对数得$\ln y=\tan x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$，

对$\ln y$求$x\to 0$时的极限，$\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}\left[\tan x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\left(\frac{1}{\tan x}\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'}{=}}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\tan x}\right)'}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin^2 x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{1}=0$，

从而可得$\lim\limits_{x\to 0}y=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^0=1$

○运用罗比达法则进行极限运算的基本思路（★★）

$$\infty-\infty\xrightarrow{(1)}\begin{matrix}\frac{0}{0}\\[4pt]\frac{\infty}{\infty}\end{matrix}\xleftarrow{(2)}0\cdot\infty\xleftarrow{(3)}\begin{cases}0^0\\1^\infty\\\infty^0\end{cases}$$

(1)通分获得分式（通常伴有等价无穷小的替换）

(2)取倒数获得分式（将乘积形式转化为分式形式）

(3)取对数获得乘积式（通过对数运算将指数提前）

## 第三节　泰勒中值定理（不作要求）

## 第四节　函数的单调性和曲线的凹凸性

○连续函数单调性（单调区间）（★★★）

【题型示例】试确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间

【求解示例】

1. ∵函数$f(x)$在其定义域$R$上连续，且可导

∴$f'(x)=6x^2-18x+12$

2. 令$f'(x)=6(x-1)(x-2)=0$，解得：$x_1=1,x_2=2$

3. （三行表）

| $x$ | $(-\infty,1)$ | $1$ | $(1,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

4. ∴函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1],[2,+\infty)$；

单调递减区间为$(1,2)$

【题型示例】证明：当$x>0$时，$e^x>x+1$

【证明示例】

1.（构建辅助函数）设$\varphi(x)=e^x-x-1$，（$x>0$）

2. $\varphi'(x)=e^x-1>0$，（$x>0$）

∴$\varphi(x)>\varphi(0)=0$

3. 既证：当$x>0$时，$e^x>x+1$

【题型示例】证明：当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$

【证明示例】

1.（构建辅助函数）设$\varphi(x)=\ln(1+x)-x$，（$x>0$）

2. $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1<0$，（$x>0$）

∴$\varphi(x)<\varphi(0)=0$

3. 既证：当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$

○连续函数凹凸性（★★★）

【题型示例】试讨论函数$y=1+3x^2-x^3$的单调性、极值、凹凸性及拐点

【证明示例】

1. $\begin{cases} y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2) \\ y'' = -6x + 6 = -6(x-1) \end{cases}$

2. 令$\begin{cases} y' = -3x(x-2) = 0 \\ y'' = -6(x-1) = 0 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

3.（四行表）

| $x$ | $(-\infty,0)$ | $0$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,2)$ | $2$ | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $y''$ | $+$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ |
| $y$ | | $1$ | | $(1,3)$ | | $5$ | |

4. ⑴函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 单调递增区间为 $(0,1),(1,2)$

单调递增区间为 $(-\infty,0),(2,+\infty)$；

⑵函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的极小值在 $x = 0$ 时取到，为 $f(0) = 1$，

极大值在 $x = 2$ 时取到，为 $f(2) = 5$；

⑶函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 在区间 $(-\infty,0),(0,1)$ 上凹，在区间 $(1,2),(2,+\infty)$ 上凸；

⑷函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的拐点坐标为 $(1,3)$

### 第五节　函数的极值和最大、最小值

〇函数的极值与最值的关系（★★★）

⑴设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果 $\exists x_M$ 的某个邻域 $U(x_M) \subset D$，使得对 $\forall x \in \mathring{U}(x_M)$，都适合不等式 $f(x) < f(x_M)$，

我们则称函数 $f(x)$ 在点 $[x_{M,} f(x_M)]$ 处有极大值 $f(x_M)$；

令 $x_M \in \{x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, \ldots, x_{Mn}\}$

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值 $M$ 满足：

$M = \max\{f(a), x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, \ldots, x_{Mn}, f(b)\}$；

⑵设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果 $\exists x_m$ 的某个邻域 $U(x_m) \subset D$，使得对 $\forall x \in \mathring{U}(x_m)$，都适合不等式 $f(x) > f(x_m)$，

我们则称函数 $f(x)$ 在点 $[x_{m,} f(x_m)]$ 处有极小值 $f(x_m)$；

令 $x_m \in \{x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots, x_{mn}\}$

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值 $m$ 满足：

$m = \min\{f(a), x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots, x_{mn}, f(b)\}$；

【题型示例】求函数 $f(x) = 3x - x^3$ 在 $[-1,3]$ 上的最值

【求解示例】

1. $\because$ 函数 $f(x)$ 在其定义域 $[-1,3]$ 上连续，且可导

$\therefore f'(x) = -3x^2 + 3$

2. 令 $f'(x) = -3(x-1)(x+1) = 0$，

解得：$x_1 = -1, x_2 = 1$

3.（三行表）

| $x$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,3]$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

4. 又$\because f(-1) = -2, f(1) = 2, f(3) = -18$

$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 2, f(x)_{\min} = f(3) = -18$

### 第六节　函数图形的描绘（不作要求）

### 第七节　曲率（不作要求）

### 第八节　方程的近似解（不作要求）

## 第四章　不定积分

### 第一节　不定积分的概念与性质

〇原函数与不定积分的概念（★★）

⑴原函数的概念：

假设在定义区间 $I$ 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $F'(x)$，即当自变量 $x \in I$ 时，有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x) \cdot dx$ 成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

⑵原函数存在定理：（★★）

如果函数 $f(x)$ 在定义区间 $I$ 上连续，则在 $I$ 上必存在可导函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$，也就是说：连续函数一定存在原函数（可导必连续）

⑶不定积分的概念（★★）

在定义区间 $I$ 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项 $C$ 的原函数称为 $f(x)$ 在定义区间 $I$ 上的不定积分，即表示为：$\int f(x)dx = F(x) + C$

（$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为积分表达式，$x$ 则称为积分变量）

〇基本积分表（★★★）

〇不定积分的线性性质（分项积分公式）（★★★）

$\int[k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$

### 第二节　换元积分法

〇第一类换元法（凑微分）（★★★）

（$dy = f'(x) \cdot dx$ 的逆向应用）

$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x)dx = \int f[\varphi(x)] \cdot d[\varphi(x)]$

【题型示例】求$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

【求解示例】

解：$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx=\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

【题型示例】求$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

【求解示例】

解：$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}d(2x+1)=\int \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}d(2x+1)$

$=\sqrt{2x+1}+C$

〇第二类换元法（去根式）（★★）

（$dy=f'(x)\cdot dx$的正向应用）

⑴对于一次根式（$a\neq 0,b\in R$）：

$\sqrt{ax+b}$：令$t=\sqrt{ax+b}$，于是$x=\frac{t^2-b}{a}$，

则原式可化为$t$

⑵对于根号下平方和的形式（$a>0$）：

$\sqrt{a^2+x^2}$：令$x=a\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），

于是$t=\arctan\frac{x}{a}$，则原式可化为$a\sec t$；

⑶对于根号下平方差的形式（$a>0$）：

a．$\sqrt{a^2-x^2}$：令$x=a\sin t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），

于是$t=\arcsin\frac{x}{a}$，则原式可化为$a\cos t$；

b．$\sqrt{x^2-a^2}$：令$x=a\sec t$（$0<t<\frac{\pi}{2}$），

于是$t=\arccos\frac{a}{x}$，则原式可化为$a\tan t$；

【题型示例】求$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$（一次根式）

【求解示例】

解：$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx\xrightarrow[\substack{x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\\ dx=tdt}]{t=\sqrt{2x+1}}\int \frac{1}{t}\cdot tdt=\int dt=t+C=\sqrt{2x+1}+C$

【题型示例】求$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$（三角换元）

【求解示例】

解：$\int \sqrt{a^2-x^2}dx\xrightarrow[\substack{t=\arcsin\frac{x}{a}\\ dx=a\cos t}]{x=a\sin t(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2})}a^2\int \cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt$

$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$

## 第三节　分部积分法

〇分部积分法（★★）

⑴设函数$u=f(x)$，$v=g(x)$具有连续导数，则其分部积分公式可表示为：$\int udv=uv-\int vdu$

⑵分部积分法函数排序次序：“反、对、幂、三、指”

〇运用分部积分法计算不定积分的基本步骤：

⑴遵照分部积分法函数排序次序对被积函数排序；

⑵就近凑微分：（$v'\cdot dx=dv$）

⑶使用分部积分公式：$\int udv=uv-\int vdu$

⑷展开尾项$\int vdu=\int v\cdot u'dx$，判断

a．若$\int v\cdot u'dx$是容易求解的不定积分，则直接计算出答案（容易表示使用基本积分表、换元法与有理函数积分可以轻易求解出结果）；

b．若$\int v\cdot u'dx$依旧是相当复杂，无法通过 a 中方法求解的不定积分，则重复⑵、⑶，直至出现容易求解的不定积分；若重复过程中出现循环，则联立方程求解，但是最后要注意添上常数$C$

【题型示例】求$\int e^x\cdot x^2dx$

【求解示例】

解：$\int e^x\cdot x^2dx=\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xd\left(x^2\right)$

$=x^2e^x-2\int x\cdot e^xdx=x^2e^x-2\int x\cdot d\left(e^x\right)$

$=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

【题型示例】求$\int e^x\cdot\sin xdx$

【求解示例】

解：$\int e^x\cdot\sin xdx=-\int e^xd(\cos x)=-e^x\cos x+\int\cos xd\left(e^x\right)$

$=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx=-e^x\cos x+\int e^xd(\sin x)$

$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int\sin xd\left(e^x\right)$

$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

即：$\int e^x\cdot\sin xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int\sin xd\left(e^x\right)$

$\therefore\int e^x\cdot\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

## 第四节　有理函数的不定积分

〇有理函数（★）

设：$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{p(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$

对于有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$，当$P(x)$的次数小于$Q(x)$的次数时，有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$是真分式；当$P(x)$的次数

大于$Q(x)$的次数时，有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$是假分式

○有理函数（真分式）不定积分的求解思路（★）

⑴将有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的分母$Q(x)$分拆成两个没有公因式的多项式的乘积：其中一个多项式可以表示为一次因式$(x-a)^k$；而另一个多项式可以表示为二次质因式$(x^2+px+q)^l$，（$p^2-4q<0$）；

即：$Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$

一般地：$mx+n=m\left(x+\frac{n}{m}\right)$，则参数$a=-\frac{n}{m}$

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

则参数$p=\frac{b}{a},q=\frac{c}{a}$

⑵则设有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的分拆和式为：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}+\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$$

其中

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}$$

参数$A_1,A_2,\ldots,A_k,\begin{cases}M_1\\N_1\end{cases},\begin{cases}M_2\\N_2\end{cases},\ldots,\begin{cases}M_l\\N_l\end{cases}$由待定系数法（比较法）求出

⑶得到分拆式后分项积分即可求解

【题型示例】求$\int\frac{x^2}{x+1}dx$（构造法）

【求解示例】

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)x-(x+1)+1}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int xdx-\int dx+\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)+C$$

## 第五节　积分表的使用（不作要求）

# 第五章　定积分极其应用

## 第一节　定积分的概念与性质

○定积分的定义（★）

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=I$$

（$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，$x$则称为积分变量，$a$称为积分下限，$b$称为积分上限，$[a,b]$称为积分区间）

○定积分的性质（★★★）

⑴$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du$

⑵$\int_a^a f(x)dx=0$

⑶$\int_a^b[kf(x)]dx=k\int_a^b f(x)dx$

⑷（线性性质）

$$\int_a^b[k_1f(x)+k_2g(x)]dx=k_1\int_a^b f(x)dx+k_2\int_a^b g(x)dx$$

⑸（积分区间的可加性）

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

⑹若函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上满足$f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)dx>0$；

（推论一）

若函数$f(x)$、函数$g(x)$在积分区间$[a,b]$上满足$f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$；

（推论二）$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$

○积分中值定理（不作要求）

## 第二节　微积分基本公式

○牛顿-莱布尼兹公式（★★★）

（定理三）若果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

○变限积分的导数公式（★★★）（上上导－下下导）

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)}f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

【题型示例】求$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$

【求解示例】

解：$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{(x^2)'}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{-1}\cdot0-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}\right)}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot e^{-\cos^2 x}+\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}\cdot 2\sin x\cos x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left[e^{-\cos^2 x}(\sin x+\cos x)\cdot 2\sin x\cos x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=\frac{1}{2e}$$

**第三节　定积分的换元法及分部积分法**

〇定积分的换元法（★★★）

⑴（第一换元法）

$$\int_a^b f\left[\varphi(x)\right]\cdot\varphi'(x)dx=\int_a^b f\left[\varphi(x)\right]\cdot d\left[\varphi(x)\right]$$

【题型示例】求 $\int_0^2\frac{1}{2x+1}dx$

【求解示例】

解：$\int_0^2\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2x+1}d(2x+1)=\frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]\Big|_0^2$

$=\frac{1}{2}\left[\ln5-\ln1\right]=\frac{\ln5}{2}$

⑵（第二换元法）

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

a．$\exists\alpha,\beta$，使得 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

b．在区间 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上，$f\left[\varphi(t)\right],\varphi'(t)$ 连续

则：$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$

【题型示例】求 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

【求解示例】

解：$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx\xrightarrow[\substack{x=0,t=1\\x=4,t=3}]{t=\sqrt{2x+1}>0,x=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}}\int_1^3\frac{\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}}{t}dx$

$=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t^2+3}{t}\cdot t\cdot dt=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3x\right)\Big|_1^3$

$=9-\frac{5}{3}=\frac{22}{3}$

⑶（分部积分法）

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$\int_a^b u(x)dv(x)=\left[u(x)v(x)\right]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$$

〇偶倍奇零（★★）

设 $f(x)\in C[-a,a]$，则有以下结论成立：

⑴若 $f(-x)=f(x)$，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

⑵若 $f(-x)=-f(x)$，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

**第四节　定积分在几何上的应用（暂时不作要求）**

**第五节　定积分在物理上的应用（暂时不作要求）**

**第六节　反常积分（不作要求）**

如：不定积分公式 $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ 的证明。很多同学上课时无法证明，那么在学期结束时，我给出这样一种证明方法以说明问题：

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx\xrightarrow[t=\arctan x]{x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)}\int\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot(\tan t)'\cdot dt$$

$$=\int\frac{1}{\sec^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\cdot dt=\int\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\cdot dt=\int\ dt$$

$$=t+C=\arctan x+C$$

如此，不定积分公式 $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ 也就很容易证明了，希望大家仔细揣摩，认真理解。

# 中国石油大学(北京)2006-2007 学年第一学期

# 《高等数学》(Ⅰ) 期末试卷(A)参考答案与评分标准( 2007.1.24. )

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | | | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | |
| 得分 | 15 | 15 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 8 | 8 | 13 | 8 | 8 | 100 |

**一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）**

1. 设 $f(x)$连续，且$\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x-1$, 则 $f(1) =$ $\underline{\quad \dfrac{1}{3\sqrt[3]{4}} \quad}$.

2. 曲线 $r = \sqrt{2}\sin\theta$ 含在曲线 $r^2 = \cos 2\theta$内部的部分曲线之长是 $\underline{\quad \dfrac{\sqrt{2}\pi}{3} \quad}$.

3. 曲线 $f(x) = \dfrac{x + 4\sin x}{5x - 2\cos x}$的水平渐近线是 $\underline{\quad y = \dfrac{1}{5} \quad}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{n}} + \sqrt{\dfrac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\dfrac{n}{n}}\right)\cdot\dfrac{1}{n} =$ $\underline{\quad \dfrac{2}{3} \quad}$.

5. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \cos x, & x \ge 0 \end{cases}$ 在$x = 0$处连续，则$a =$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

**二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求）**

1. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续, 若 $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = k\int_0^{2\pi} f(\sin\dfrac{x}{2})dx$, 则 $k =$ ( $A$ ).

$(A)\ \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $(B)\ 1$ $\qquad$ $(C)\ 2$ $\qquad$ $(D)\ 4$

2. 设函数 $f(x)$具有二阶可导，且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$. $\Delta x$为自变量$x$在点$x_0$处的增量，$\Delta y$与$dy$分别为 $f(x)$在点$x_0$处的增量与微分，若$\Delta x > 0$, 则下述正确的是 ( $B$ ).

$(A)\ 0 < \Delta y < dy$ $\qquad$ $(B)\ 0 < dy < \Delta y$ $\qquad$ $(C)\ \Delta y < dy < 0$ $\qquad$ $(D)\ dy < \Delta y < 0$

3. 设非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足关系式：$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, 则必有 ( $C$ ).

$(A)\ \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \vec{b}$ $\qquad$ $(B)\ \vec{a} = \vec{b}$ $\qquad$ $(C)\ \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ $\qquad$ $(D)\ \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

4. 关于曲线 $y = e^{\arctan x}$ 的凹凸性及拐点，下列描述正确的是 ( $D$ ).

$(A)$ 凸, 无拐点　　$(B)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 内凸, 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 内凹, 拐点为 $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$

$(C)$ 凹, 无拐点　　$(D)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}]$ 内凹, 在 $[\frac{1}{2},+\infty)$ 内凸, 拐点为 $(\frac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}})$

5.设当 $x\to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x\sin x^n$ 是比 $e^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正整数 $n$ 等于 (　$B$　).

$(A)$ 1　　$(B)$ 2　　$(C)$ 3　　$(D)$ 4

**三、按照要求完成下列各问题(本题共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分)**

1. 设 $f(x)=(x^{100}-1)\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续, $\varphi(1)=2$, 求 $f'(1)$.

**【解】** $f'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^{100}-1)\varphi(x)-0}{x-1}$ ........................ 3 分

$=\lim\limits_{x\to1}(x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1)\cdot\lim\limits_{x\to1}\varphi(x)=100\cdot\varphi(1)=200$. ........................ 5 分

2. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t^2-\arctan(t^2)\\ y=\ln(1+t^4)\end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

**【解】** $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3}{1+t^4}\times\frac{1}{2t-\frac{2t}{1+t^4}}=\frac{2}{t^2}$, ........................ 2 分

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dy}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}\times\frac{1}{\frac{dx}{dt}}$ ........................ 4 分

$=(\frac{2}{t^2})'\times\frac{1}{(t^2-\arctan(t^2))'}=(-\frac{4}{t^3})\times\frac{1}{2t-\frac{2t}{1+t^4}}=-2t^{-8}(1+t^4)$. ........................ 5 分

3. $\int\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx.$

**【解】** 原式 $=\int x\,d(\frac{1}{1+e^{-x}})=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{dx}{1+e^{-x}}$ ........................ 3 分

$=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{e^x dx}{1+e^x}=\frac{x}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^x)+C.$ ........................ 5 分

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}.$

**【解】** 原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}]}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$ ........................ 3 分

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}} = e^{-\frac{1}{2}}$. ........ 5 分

5. 计算 $I_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x|dx$, 其中 $n$ 为自然数.

**【解】** 令 $u = n\pi - x$, 则: $I_n = \int_{n\pi}^{0}(n\pi - u)\,|\sin u|\cdot \mathrm{d}(\,n\pi - u\,)$ ........ 3 分

$= n\pi\int_0^{n\pi}|\sin u|\mathrm{d}u - \int_0^{n\pi}u\,|\sin u|\,\mathrm{d}u$

$= n^2\pi\int_0^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u - \int_0^{n\pi}x\,|\sin x|\,\mathrm{d}x$ ........ 4 分

$= 2n^2\pi\, I_1 - I_n \qquad \therefore\quad I_n = n^2\pi\, I_1 = n^2\pi$. ........ 5 分

**四、(本题满分 8 分)** 求过点 $M(2,-1,3)$ 且与直线 $L: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{1}$ 相交, 又与平面 $\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0$ 平行的直线方程.

**【解】** 过 $M$ 点作 // 平面 $\pi$ 的一个平面 $\pi_1$: $3(x-2) - 2(y+1) + (z-3) = 0$

即 $3x - 2y + z - 11 = 0 \cdots\cdots(1)$ ........ 3 分

又 $L: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \qquad \cdots\cdots \quad (2) \\ z = -2 + t \end{cases}$

$\because$ $L$ 与 $\pi_1$ 的交点正是 $L$ 与所求直线的交点.

于是将(2)代入(1) $\Rightarrow t_0 = \dfrac{10}{9}$, 再代入 (2), 得交点 $M_0(\dfrac{29}{9}, -\dfrac{10}{9}, -\dfrac{8}{9})$, ........ 6 分

可见所求直线方程为: $\dfrac{x-2}{\frac{29}{9}-2} = \dfrac{y+1}{-\frac{10}{9}+1} = \dfrac{z-3}{-\frac{8}{9}-3}$, 即: $\dfrac{x-2}{11} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-3}{-35}$. ........ 8 分

**五、(本题满分 8 分)** 试判断方程 $\ln x = \dfrac{x}{2e}$ 的实根个数.

**【解】** 令 $F(x) = \ln x - \dfrac{x}{2e}$, $x \in (0, +\infty)$, ........ 2 分

由 $F'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2e} = \dfrac{2e - x}{2ex} \Rightarrow \begin{cases} > 0, 0 < x < 2e \\ = 0, x = 2e \\ < 0, x > 2e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{在}\,(0, 2e), \quad F(x)\uparrow \\ \text{极大值为}\ F(2e) = \ln 2 > 0, \\ \text{在}\,(2e, +\infty), \quad F(x)\downarrow \end{cases}$ ........ 5 分

又 $F(0^+) = \ln 0^+ = -\infty, F(2e) = \ln 2 > 0, F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{2e}) = -\infty$, ........ 7 分

综合讨论可知: 在 $(0,2e)$, $F(x)$ 由: $-\infty \nearrow \ln 2 > 0$, 而在 $(2e,+\infty)$, $F(x)$ 由: $\ln 2 \searrow -\infty$.

可见 $F(x)$ 在 $(0,2e)$ 与 $(2e,+\infty)$ 内各有一个零点, 即方程 $\ln x - \dfrac{x}{2e} = 0$ 恰有两个不同的实根. ........ 8 分

六、(本题满分 **13** 分)设 $D_1$ 是抛物线 $y=4x^2$ 和三条直线 $x=1, y=0, x=a\ (0<a<1)$

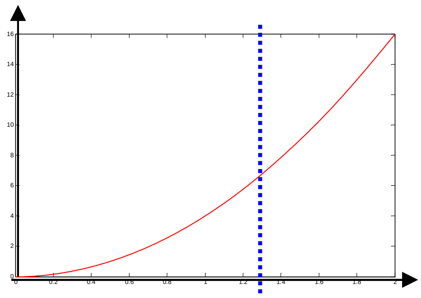
所围区域,$D_2$ 是抛物线 $y=4x^2$ 与两条直线 $x=a, y=0$ 所围区域. 试求:

**(1) 由 $D_1$ 绕 $x$ 轴旋转所得旋转体的体 积 $V_1$;**

**(2) 由 $D_2$ 绕 $y$ 轴旋转所得旋转体的体 积 $V_2$;**

**(3) 求 $a$, 使 $V_1+V_2$ 达到最大.**

**【解】**



(1) $\because\ x\in[a,\ 1],\ dV_1=\pi y^2dx,$

$\therefore\ V_1=\int_a^1\pi y^2dx=\int_a^1\pi(4x^2)^2dx=16\pi\int_a^1x^4dx=\frac{16\pi}{5}x^5\Big|_a^1=\frac{16\pi}{5}(1-a^5).$ .................... 4 分

(2) $\because\ x\in[0,\ a],\ dV_2=2\pi x|y|dx,$ ( 或 $y\in[0,\ 4a^2],\quad dV_2=\pi x^2(y)\,dy=\frac{\pi}{4}y\,dy$ )

$\therefore\ V_1=2\pi\int_0^a x|y|dx=8\pi\int_0^a x^3dx=\frac{8\pi}{4}x^4\Big|_0^a=2\pi a^4.$ (或 $V_1=\frac{\pi}{4}\int_0^{4a^2}y\,dy=\frac{\pi}{8}y^2\Big|_0^{4a^2}=2\pi a^4$)

........................................................................................................................................ 8 分

**(3) 由** $V=V_1+V_2=\frac{16\pi}{5}(1-a^5)+2\pi a^4$

由 $\frac{dV}{da}=-16\pi a^4+8\pi a^3\overset{令}{=}0\Rightarrow a=0$ (舍去), 或 $2a-1=0$, 即 $a=\frac{1}{2}$. ......................... 11 分

又 $\frac{d^2V}{da^2}\Big|_{a=\frac{1}{2}}=[-16\times4\pi a^3+8\times3\pi a^2]\Big|_{a=\frac{1}{2}}=-2\pi<0,$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 为极大值点,即最大值点, 故当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $V=V_1+V_2$ 达到最大值 ............................................ 13 分

七、(本题满分 **8** 分)设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可导, 且

$$f(a)\cdot f(b)>0,\ \ f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0.$$

则存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

**【证】作辅助函数** $F(x)=e^{-x}f(x),\ x\in[a,b],$ ........................................ 2 分

$\because f(a)$与$f(b)$同号， 而 $f(a)$与$f(\frac{a+b}{2})$异号， $\therefore f(\frac{a+b}{2})$与 $f(b)$异号.

$\therefore$ 由零点存在定理，$\exists\xi_1\in(a,\ \frac{a+b}{2}),\ \xi_2\in(\frac{a+b}{2},b)$，使得 $f(\xi_1)=0,\ \ f(\xi_2)=0.$ ......... 5 分

可见 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上满足$RolleTH$ 3条件，于是$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$使得：

$F'(\xi)=e^{-\xi}[f'(\xi)-f(\xi)]=0,$

$\because e^{-\xi}\neq 0,\therefore f'(\xi)-f(\xi)=0,$ 即 $f'(\xi)=f(\xi).$ 得证. ........................................ 8 分

八、（本题满分 8 分）设 $f(x)$在$[\,0\,,1]$上有连续导数， $f(0)=0$，且$0<f'(x)\leq 1$,试证：

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\geq\int_0^1 f^3(x)dx.$$

**【证】令** $F(x)=\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt,\ x\in[0,1].$ ........................................ 2 分

$\because\ \ F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)dt-f^3(x)=f(x)[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)].$ ........................................ 4 分

又令 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x),$ ........................................ 6 分

由 $G'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$, 及$0<f'(x)\leq 1,$

$\therefore\ \forall x\in(0,1],\ f(x)\uparrow>f(0)=0,$ 且 $1-f'(x)\geq 0,$ 即 $G'(x)\geq 0,$

$\therefore\ \forall x\in[0,1],G(x)\uparrow\geq G(0)=0,$

可见 $F'(x)\geq 0,$ 即 $F(x)\uparrow\geq F(0)=0,$ 特别地 $F(1)\geq F(0)=0.$

即 $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2-\int_0^x f^3(t)dt\geq 0,$ 从而 $\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2\geq\int_0^x f^3(t)dt,$ 得证 . .. 8 分

◆◆◆

# 中国石油大学(北京)2007—2008 学年第一学期

# 《高等数学》(Ⅰ) 期末试卷(A)参考答案与评分标准( 2008.1.21.)

| 题号 | 一 | 二 | | | | | | | | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | **20** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **5** | **8** | **8** | **8** | **10** | **6** | **100** |

一、填空题（本题共 **5** 小题，每小题 **4** 分，满分 **20** 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x-3}{2x+1})^{x+1}=$ $\underline{\qquad e^{-2}\qquad}$.

2. 设函数 $y=f(x)$由方程 $x^y+\ln x=y^4$ 所确定，则其在点 (1,1)处的导数是 ： $\underline{\dfrac{1}{2}}$ .

3.若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax}-1}{\arctan x}, & x>0\\ b, & x=0\\ \dfrac{|\sin x|}{x}+2, & x<0\end{cases}$ 在$x=0$连续， 则 $a=$ $\underline{\quad 1\quad}$,$b=$ $\underline{\quad 1\quad}$.

4.$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+x\cos x)\sin^4 x\,dx=$ $\underline{\quad 2\times I_6=2\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{16}\quad}$ .

5.若反常积分$\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^p x}$收敛,那么$p$应该满足的条件是 : $\underline{\quad P>1\quad}$.

二、计算下列各题（本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，满分 **40** 分）

1. 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{4-3\sin^2 x}$.

【解】原式 $\displaystyle=\int\frac{dx}{1+3\cos^2 x}=\int\frac{1}{\sec^2 x+3}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx$ ........................................................ (2分)

$\displaystyle=\int\frac{d\tan x}{\tan^2 x+2^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{\tan x}{2}+C.$ ◆.................................................................................. (5分)

2.判断函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$是否有极值点， 并求曲线 $y=f(x)$的拐点.

【解】由于 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}>0\quad(x\neq 0)$, $\therefore$ $f(x)$没有极值，即无极值点；....................... (2分)

又由于 $f''(x)=(\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^3})e^{-\frac{1}{x}}=\dfrac{1-2x}{x^4}e^{-\frac{1}{x}}\underset{\text{令}}{=\!=}0$， 得： $x=\dfrac{1}{2}$

且当$x<\dfrac{1}{2}$时, $f''(x)>0$, 又当$x>\dfrac{1}{2}$时, $f''(x)<0$, 可见 $(\dfrac{1}{2},\ e^{-2})$为曲线的拐点 .◆............ (5分)

3. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=\int_0^{\arctan t} u\tan u\,du \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】$\because\ \dfrac{dy}{dt}=\arctan t\cdot\tan(\arctan t)\cdot\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t\arctan t}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{1+t^2}$，

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{2}\arctan\ t$ ............ (2分)

$\therefore\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{dy}{dx})=\dfrac{d}{dt}(\dfrac{dy}{dx})\times\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=(\dfrac{1}{2}\arctan t)'_t\times\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+t^2}\times\dfrac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{4t}$. ◆. (5分)

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+n})$.

【解】由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{n+n})=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+i}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\dfrac{1}{n}\cdots\cdots(*)$ ....... (2分)

取 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，将$[0,1]$ $n$等分，并取 $\xi_i=\dfrac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 ............ (4分)

$(*)===\lim\limits_{\|\Delta\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+\frac{i}{n}}\dfrac{1}{n}\ =\ \int_0^1\dfrac{dx}{1+x}=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2$. ◆ ............ (5分)

5. 设 $f(x)$在$x=0$点连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\,f(\dfrac{2}{n})$.

【解法一】取$x=\dfrac{2}{n}$，则由海因定理得: ............ (2分)

$\lim\limits_{n\to\infty}n\,f(\dfrac{2}{n})=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2\times 3=6$. ◆ ............ (5分)

【解法二】由于 $f(x)$在$x=0$点连续，$\therefore\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x)=3\cdot 0=0$，

$\therefore\ f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$， ............ (3分)

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}n\,f(\dfrac{2}{n})=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=2f'(0)=2\times 3=6$. ◆ ............ (5分)

6. 求极坐标系下曲线 $r=a(1-\cos\theta)$ $(a>0)$ 的全长.

【解】 $s=2s_1=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2(\sin\theta)^2}\ d\theta$ ........................ (3分)

$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\theta)}\ d\theta=4a\int_0^{\pi}|\sin\frac{\theta}{2}|\,d\theta$ ........................ (4分)

$\underline{\underline{令t=\frac{\theta}{2}}}\quad 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,2\,dt=8a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt=8a.$ ◆ ........................ (5分)

7. 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$, 求 $\int_0^1 x\,f(x)dx.$

【解】$\because\ f(1)=0,\quad f'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x$ ........................ (1分)

$\therefore\int_0^1 x\,f(x)dx=\int_0^1 f(x)d(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}f'(x)dx$ ........................ (3分)

$=0-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}d(-x^4)=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e^{-1}-1).$ ◆ ........................ (5分)

8. 设 $F(x)=\int_0^x t\,f(x^2-t^2)dt$, 其中函数 $f$ 是可微, 且 $f(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}.$

【解】令 $u=x^2-t^2$, $\frac{t:0\to x}{u:x^2\to0}$ , $dt=-\frac{1}{2t}du$

$\Rightarrow\ F(x)=\int_{x^2}^0 t\,f(u)\,(-\frac{1}{2t})\,du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du$ ........................ (2分)

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\frac{F(x)}{x^4}\ \underline{\underline{\frac{0}{0}型}}\ \lim\limits_{x\to0}\frac{F'(x)}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\,f(x^2)}{4x^3}=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)}{x^2}$ ........................ (4分)

$=\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}=\frac{1}{4}f'(0).$ ◆ ........................ (5分)

三、(**本题满分 8 分**) 设 $x>0$, 常数 $a>e$, 证明 : $(a+x)^a<a^{(a+x)}.$

【证法一】分析 由: $a\ln(a+x)<(a+x)\ln a$, 往证: $a\ln(a+x)-(a+x)\ln a<0.$

令$F(t)=a\ln t-t\ln a,\quad x>0,\quad t\in[a,a+x]$, ........................ (3分)

由于 $F'(t)=\frac{a}{t}-\ln a<\frac{a}{a}-\ln e=0$, 可见 $F(t)\downarrow$, ........................ (6分)

又$F(a)=a\ln a-a\ln a=0,$

$\therefore\quad\forall t\in(a,a+x],\quad F(t)<F(0),\qquad$ 特别有: $F(a+x)<F(a)$

即　$a\ln(a+x)-(a+x)\ln a<0$. ........................................................................ (8分)

【证法二】令$G(t)=\dfrac{\ln t}{t},t\in[a,+\infty)$ ........................................................................ (3分)

由于 $G'(x)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}<0,\ t\ge a>e\ \therefore\ \forall t\ge a, G(t)\downarrow$, ........................................ (6分)

可见对$\forall x>0$,有$G(a+x)<G(a)$, 即$\dfrac{\ln(a+x)}{a+x}<\dfrac{\ln a}{a}$ 移项即可. ◆ ....................................... (8分)

**四、(本题满分 8 分)** 设 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$,

证明: (1) $\exists\,\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $f(\eta)=\eta$;

(2) 对$\forall$实数 $\lambda$, 必存在 $\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

【证】(1)　设$F(x)=f(x)-x$,　则$F(x)$在$[0,1]$上连续, ........................................................ (2分)

由于　$F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0$,

于是由零点定理知　: $\exists\,\eta\in(\frac{1}{2},1)$,　使得 $F(\eta)=0$,　亦即　$f(\eta)=\eta$ .　............................ (4分)

(2)　对$\forall$实数$\lambda$,　令 $G(x)=(f(x)-x)\cdot e^{-\lambda x}$, 则: $G(x)$在 $[0,\eta]$上连续 , 在 $(0,\eta)$ 内可导 ,

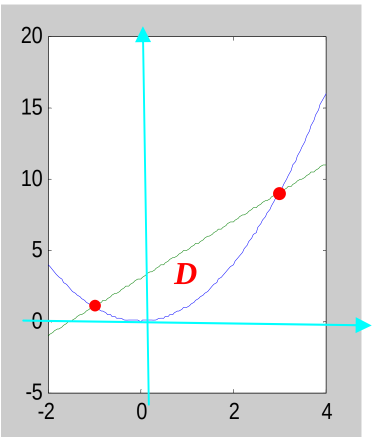
且　$G(0)=G(\eta)=0$,　即$G(x)$在$[0,\eta]$上满足 *RolleTH* 三条件 . ................................ (6分)

于是由 *RolleTH* 知,　$\exists\,\xi\in(0,\eta)\subseteq(0,1)$, 有 :

$$G'(\xi)=[(f'(x)-1)e^{-\lambda x}-\lambda(f(x)-x)\,e^{-\lambda x}]\Big|_{x=\xi}=[f'(\xi)-1-\lambda(f(\xi)-\xi)]\cdot e^{-\lambda\xi}=0$$

$\because e^{-\lambda\xi}\ne 0,\quad \therefore\quad f'(\xi)-1-\lambda(f(\xi)-\xi)=0$,　　即 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$. ◆ ...... (8分)

**五、(本题满分 8 分)** 求由曲线 $y=x^2$, $y=2x+3$ 所围平面图形的面积 $A$, 并求该平面图形绕 $x$轴旋转一周所得旋转体 的体积.




【解】联立方程$\begin{cases}y=x^2\\y=2x+3\end{cases}$ .得 :

$\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ 与$\begin{cases}x=3\\y=9\end{cases}$. 故两曲线的交点为: $(-1,\ 1)$, $(3,\ 9)$.

$\therefore D\ \begin{cases}-1\le x\le 3\\x^2\le y\le 2x+3\end{cases}$.

(1)　于是所求平面图形的面 积$A=\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)dx$

$=[x^2+3x-\frac{1}{3}x^3]_{-1}^{3}=(9-1)+3(3+1)-\frac{1}{3}(27+1)$

$=20-\frac{28}{3}=\frac{32}{3}.$ ............ (4分)

(2)【解法一】曲线 $y=2x+3\ (-1\le x\le 3)$绕 $x$轴旋转一周所得旋转体 的体积

$V_1=V_{大锥体}-V_{小锥体}=\frac{\pi}{3}\times 9^2\times(3+\frac{3}{2})-\frac{\pi}{3}\times 1^2\times(-1+\frac{3}{2})=\frac{\pi}{6}(9^3-1),$ ............ (6分)

又曲线 $y=x^2\,(-1\le x\le 3)$绕 $x$轴旋转一周所得旋转体 的体积

$V_2=\pi\int_{-1}^{3}y^2dx=\pi\int_{-1}^{3}x^4dx=\pi\frac{1}{5}[x^5]_{-1}^{3}=\frac{\pi}{5}(3^5+1),$ ............ (7分)

于是所求旋转体的的体 积$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(9^3-1)-\frac{\pi}{5}(3^5+1).$ ............ (8分)

$=\frac{364\pi}{3}-\frac{244\pi}{5}=\frac{1088\pi}{15}.$

【解法二】$V=\pi\int_{-1}^{3}(2x+3)^2dx-\pi\int_{-1}^{3}x^4dx$ ............ (7分)

$=\pi\frac{1}{6}[(2x+3)^3\ ]_{-1}^{3}-\frac{1}{5}[x^5\ ]_{-1}^{3}=\frac{1088\ \pi}{15}.$ ◆ ............ (8分)

**六、(本题满分 10 分)(1)求过 $M_0(2,1,-2)$ 且与直线** $L_1:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-1}$**,**
**直线** $L_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$ **都平行的平面方程;**
**(2)已知直线** $L:\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ **与平面** $\Pi:3x-y+2z-5=0$ **的交点为 $M_0$,在平面 $\Pi$ 上求过点 $M_0$ 且与直线 $L$ 垂直的直线方程.**

**【解】**(1) 由题意可知:$\vec{s}_1=(3,2,-1),\quad \vec{s}_2=(1,2,1),$ ............ (1分)

且所求平面的法线向量$\vec{n}\perp\vec{s}_1,\vec{n}\perp\vec{s}_2\Rightarrow\vec{n}\,//\,\vec{s}_1\times\vec{s}_2.$

故取$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&2&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=4\,(1,-1,1\,),$ ............ (3分)

于是过$M_0(2,1,-2)$并以$\vec{n}$为法线向量的平面方程是:

$(x-2)-(y-1)+(z+2)=0,$ 即 $x-y+z+1=0.$ ............ (5分)

(2)【解法一】将$L$的参数方程$\begin{cases}x=5t+7\\y=t+4\\z=4t+5\end{cases}$代入 $\Pi:3x-y+2z-5=0$中, 得$t=-1.$

$\therefore\begin{cases}x=2\\y=3,\\z=1\end{cases}$ 即交点为$M_0(2,3,1).$ ............ (7分)

又$L$的方向向量$\vec{s}=(5,1,4)$, 于是过$M_0(2,3,1)$,法线向量为$\vec{s}$的平面方程是:

$5(x-2)+(y-3)+4(z-1)=0$, 即 $5x+y+4z-17=0$. ........................................ (9分)

故所求的直线一般方程是: $\begin{cases}3x-y+2z-5=0\\5x+y+4z-17=0\end{cases}$. ........................................ (10分)

【解法二】已知直线的方向向量 $\vec{s}_0=(5,\ 1,\ 4)$, 平面的法线向量 $\vec{n}_0=(3,\ -1,\ 2)$, ......... (6分)

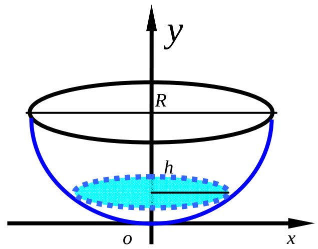
取所求直线的方向向量 $\vec{s}$ 为: $\vec{s}=\vec{s}_0\times\vec{n}_0=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&4\\3&-1&2\end{vmatrix}=2(3,\ 1,\ -4)$, ...................... (8分)

于是过 $M_0(2,3,1)$, 方向向量为 $\vec{s}$ 的直线的对称方程是: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$. ◆ ....... (10分)

七、(**本题满分 6 分**) 以每秒 $a$ 的流量往半径为 $R$ 的半球形水池内注水,

(1) 求在池中水深 $h\ (0<h<R)$ 时水面上升的速率;

(2) 若再将满池水全部抽出, 至少需作功多少?




【解】如图所示建立坐标系.

半圆方程 $x^2+(y-R)^2=R^2\ (0\le y\le R)$.

半圆上任意一点, 其坐标满足: $x^2=R^2-(y-R)^2=2Ry-y^2\ (0\le y\le R)$.

(1) 因已知半球可看作此半圆绕 $y$ 轴旋转而成的立体, 故半球内高为 $h$ 的球缺的体积,

即水深为 $h$ 时水池内水的体积为: $V=\int_0^h \pi x^2dy=\int_0^h \pi(2Ry-y^2)dy$

又设水深 $h$ 时已注水的时间为 $t$, 则 $V=V(h)=\int_0^h \pi(2Ry-y^2)dy$, 且 $h=h(t)$ .................. (2分)

上式两边对 $t$ 求导, 得: $\dfrac{dV}{dt}=\pi(2Rh-h^2)\dfrac{dh}{dt}$

即 $a=\pi(2Rh-h^2)\dfrac{dh}{dt}$, 故: $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi(2Rh-h^2)}$. ........................................ (3分)

(2) 将满池的水全部抽出所需的功, 即将池内水全部提升到池沿高度所需的功.

$\forall[y-dy,y]\subseteq[0,R]$, 向上抽出该薄层水, 克服重力作用所做的功:

$\Delta W\approx(R-y)_{(\text{水中位移})}\rho g\pi x^2dy$, 又 $x^2=2Ry-y^2$,

即功元素 $dW=\rho g\pi(2Ry-y^2)(R-y)dy$. ........................................ (5分)

$W=\int_0^R \rho g\pi(2Ry-y^2)(R-y)dy$ ........................................

$=\pi\rho g\int_0^R(2R^2y-3Ry^2+y^3)dy=\dfrac{\pi\rho g}{4}R^4$ ($\rho$ 是水的密度). ........................ (6分)

◆◆◆

# 中国石油大学(北京)2008 - 2009 学年第一学期

# 《高等数学》(Ⅰ) 期末考试试题(A)参考答案与评分标准 (2009. 1. 12.)

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 得分 | 18 | 18 | 30 | 15 | 6 | 8 | 5 | 100 |

**一、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分）**

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+2a}{x-a})^x=8$，则 $a=$ __$\ln 2$__.

2. 设 $f(x)$连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt=$ __$a\ f(a)$__.

3. 已知$\int\frac{f'(\ln x)}{x}dx=x^2+C$，　则 $f(x)=$ __$e^{2x}+C$__.

4. 当 $x\to 0^+$时，若$\arctan(\sin(e^{\sqrt{x}}-1))\sim x^{\alpha}$，　则 $\alpha=$ __$\frac{1}{2}$__.

5 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}})=$ __$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}$__.

6. $\int_{-1}^1\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sin^2 x\,dx=$ __$0$__.

**二、选择题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求）**

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\cos x-x\sin\frac{1}{x}, & x<0\\ e^{-\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$，则$x=0$是 $f(x)$的(　$B$　).

$(A)$ 可去间断点　　$(B)$ 跳跃间断点　　$(C)$ 振荡间断点　　$(D)$ 连续点

2. 设 $f(x)$在$x_0$点的某邻域内具有三阶连续导数　若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，

而 $f'''(x_0)\neq 0$，　则下列论述正确的是 (　$C$　).

$(A)$ 点$x_0$是函数$f(x)$的极大值点　　　　$(B)$ 点$x_0$是函数$f(x)$的极小值点

$(C)$ 点$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点　　$(D)$ 点$(x_0,f(x_0))$不是曲线$y=f(x)$的拐点

3. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f(x)>0$，则方程$\int_a^x f(t)\,dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}=0$ 在$(a,b)$内( $B$ ).

$(A)$ 无实根　　$(B)$ 仅有一个实根　　$(C)$ 有相异的两实根　　$(D)$ 有相同的两实根

4. 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\,dx$, $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)\,dx$,则下列成立的是(　$D$　).

$(A)\ I_1 = I_2$　　$(B)\ I_2 < 1 < I_1$　　$(C)\ I_1 > I_2 > 1$　　$(D)\ I_1 < 1 < I_2$

5. 若$\int_0^{+\infty}(x+2)^p\,dx$收敛，则$P$应满足(　$B$　).

$(A)\ P > -1$　　$(B)\ P < -1$　　$(C)\ P > 1$　　$(D)\ P < 1$

6. 设对任意$x$，$f(x)$满足 $f(1+x) = 2f(x)$，且 $f'(0) = a\ (a \neq 0)$，则 $f'(1) = $(　$A$　).

$(A)\ 2a$　　$(B)\ a$　　$(C)\ 0$　　$(D)$ 不存在

**三、按照要求完成下列各问题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）**

1. 设 $f(x) = 2^{|a-x|}$ (其中$a$为实常数)，求 $\dfrac{d\,f(x)}{dx}$.

**【解】**$\because\ f(x) = \begin{cases} 2^{a-x}, & x < a \\ 1\ , & x = a \\ 2^{x-a}, & x > a \end{cases}$. 则 $f'(x) = \begin{cases} -2^{a-x}\ln 2, & x < a \\ 2^{x-a}\ln 2, & x > a \end{cases}$; ......................................3 分

但在点$x = a$处，由于 $f'_+(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{2^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta x\ln 2}{\Delta x} = \ln 2.$

$f'_-(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{2^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{-\Delta x\ln 2}{\Delta x} = -\ln 2.$

$\therefore f(x)$在$x = a$处不可导 ......................................................................................................6 分

综上可得：$f'(x) = \begin{cases} -2^{a-x}\ln 2, & x < a \\ \text{不存在}, & x = a \\ 2^{x-a}\ln 2, & x > a \end{cases}$. ◆ ..........................................................................6 分

2. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x = \cos 2 - \int_0^{t^2}\dfrac{\sin u}{2\sqrt{u}}\,du \\ y = \cos(t^2) \end{cases}$ $(t > 0)$确定，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

**【解】**$\because$　$\dfrac{dy}{dt} = -2t\sin(t^2)$，$\dfrac{dx}{dt} = -2t\,\dfrac{\sin(t^2)}{2t} = -\sin(t^2)$, ..................................................2 分

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 2t$; ....................................................................................................................4 分

$\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\times\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = (2t)'_t\times\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{2}{-\sin(t^2)} = -\dfrac{2}{\sin(t^2)}$. ◆ ...............................6 分

3. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

**【解】** 原式 $=\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int (1-\sqrt{1-x^2})d(-\frac{1}{x})$ ............ 2 分

$=\frac{-1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ............ 4 分

$=\frac{-1+\sqrt{1-x^2}}{x}+\arcsin x+C.$ ◆ ............ 6 分

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,[\frac{1}{x}]$

**【解】** 当 $x>0$ 时, $\because\ \frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le \frac{1}{x}$, ............ 2 分

两端同乘 $x$, 得: $\because\ 1-x<x\,[\frac{1}{x}]\le 1$, ............ 4 分

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$, 于是由夹逼定理, 有: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,[\frac{1}{x}]=1.$ ◆ ............ 6 分

5. 设非负连续函数 $f(x)$ 满足: $f(x)\cdot f(-x)=1, x\in(-\infty,+\infty)$, 求积分 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}dx.$

**【解法一】** 令 $x=-t$, 则 $I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(-t)}{1+f(-t)}(-dt)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(-x)}dx \quad \cdots\cdots(1)$ ............ 2 分

$\because f(x)\cdot f(-x)=1$, $\therefore\ f(-x)=\frac{1}{f(x)}$ 代入(1) 得:

$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\ f(x)}{1+f(x)}dx\cdots(2)$ ............ 4 分

于是由(1), (2)有:

$I=\frac{1}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\ f(x)}{1+f(x)}dx\right]=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1.$ ◆ ............ 6 分

**【解法二】** $\because I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x}{1+f(x)}dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+f(x)}dx \overset{记}{=\!=} I_1+I_2$ ............ 1 分

对于 $I_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos x\,dx}{1+f(x)} \overset{令\ x=-t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos(-t)}{1+f(-t)}(-dt)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,dt}{1+f(-t)}$ ............ 3 分

于是 $I=I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\cos x}{1+f(-x)}+\frac{\cos x}{1+f(x)}]dx$

$\underline{\underline{\text{由 } f(x)f(-x)=1}}\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\cos x}{1+\frac{1}{f(x)}}+\frac{\cos x}{1+f(x)}]dx$ ........................ 5 分

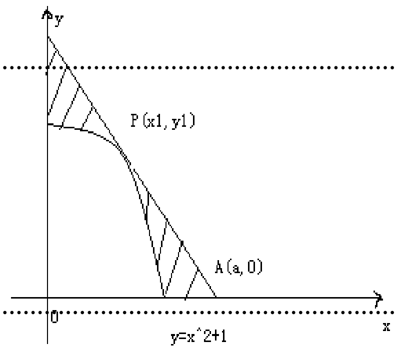
$=\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\frac{\cos x\ f(x)}{1+f(x)}+\frac{\cos x}{1+f(x)}]dx\right]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1.$◆ ........................ 6 分

**四、（本题共有 3 题，第 1、2 题各 6 分，第 3 题 3 分，满分 15 分）**

1. 在抛物线 $y=-x^2+1$ 上找一点 $P(x_1,y_1)$，其中 $x_1\ge 0$, 过点 $P$ 作抛物线的切线，使得此切线、抛物线及两个坐标轴所围图形面积最小.

**【解】**抛物线上点 $P(x_1,y_1)$ 处的切线方程为 $y-y_1=-2x_1(x-x_1)$， 即 $y=-2x_1x+x_1^2+1$，

设此切线交 $x$ 轴于点 $A(a,0)$，交 $y$ 轴于点 $B(0,\ b)$，




则 $a=\frac{1}{2}(x_1+\frac{1}{x_1}),\ b=x_1^2+1$，所围图形的面积： ........................ 2 分

$A=\frac{1}{2}ab-\int_0^1(-x^2+1)\,dx=\frac{1}{4}(x_1^3+2x_1+\frac{1}{x_1})-\frac{2}{3}$，

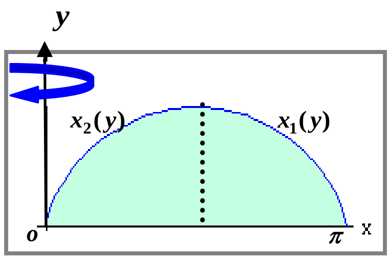
由 $\frac{dA}{dx_1}=\frac{1}{4}(3x_1^2+2-\frac{1}{x_1^2})\ \underline{\underline{\ \text{令}\ }}\ 0$，得驻点 $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$， ........................ 4 分

又 $\left.\frac{d^2A}{dx_1^2}\right|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}=\left.\frac{1}{4}(6x_1+\frac{2}{x_1^3})\right|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}}>0$，$\therefore$ $A$ 在 $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 取得最小值，即点 $P\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{3}\right)$ 为所求.◆....... 6 分

2. 求由 $y=\sin x\ (0\le x\le\pi)$ 与 $y=0$ 围成平面图形绕 $y$ 轴旋转一周而成的旋转体的体积

**【解法一】**由切片法，有：$V_y=\int_0^1\pi x_1^2\,dy-\int_0^1\pi x_2^2\,dy$ ........................ 2 分

$=\pi\int_0^1[(\pi-\arcsin y)^2-(\arcsin y)^2]dy$




$=\pi\int_0^1(\pi^2-2\pi\arcsin y)dy=\pi^3-2\pi^2\int_0^1\arcsin y\,dy$ ........................ 5 分

$= \pi^3 - 2\pi^2\,( y\arcsin y\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy) = \pi^3 - 2\pi^2\,(\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-y^2}\Big|_0^1) = 2\pi^2.$ ◆ .................................... 6 分

**【解法二】** 由圆柱壳法，有：$V_y = \int_0^{\pi} 2\pi x\,|y(x)|\,dx$ .................................................................... 2 分

$= 2\pi\int_0^{\pi} x|\sin x|dx = 2\pi\int_0^{\pi} x\sin x dx$ .................................................................................... 4 分

$= 2\pi[-x\cos x + \sin x]_0^{\pi} = 2\pi^2.$ ◆ ........................................................................................................ 6 分

3. 给出极坐标下计算双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 全长的积分表达式.

**【解】** 由曲线关于两轴的对称性知：弧长 $=4*$ 曲线在第一象限部分的长

而在极坐标下双纽线在第一象限的方程是：$r^2 = a^2\cos 2\theta \quad (0 \le \theta \le \frac{\pi}{4})$.

则双纽线全长的积分表达式为：$S = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,d\theta$ ........................................................................ 2 分

$= 4a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}$ . ◆ ........................................................................................................................ 3 分

**五、（本题满分 6 分）** 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，试证：$\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

**【证】** 令 $F(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$，$0 < x < \frac{\pi}{2}$ ........................................................................................ 1 分

$F'(x) = \sec^2 x - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 = (\tan x + x)(\tan x - x)$ ............................................................ 3 分

再令 $G(x) = \tan x - x > 0$,

$G'(x) = \sec^2 x - 1 \Rightarrow \quad G(x)\uparrow \Rightarrow$ 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$G(x) = \tan x - x > G(0) = 0$ ............................ 5 分

即：$\tan x > x$，从而 $F'(x) > 0$，即 $F(x)\uparrow$

故当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$F(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} > F(0) = 0.$ 即：$\tan x > x + \frac{x^3}{3} \quad (0 < x < \frac{\pi}{2})$. ◆ ............ 6 分

**六、（本题共有 2 小题，每小题 4 分，满分 8 分）**

1. 求平行于平面 $6x + y + 6z + 5 = 0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

**【解】** 设所求平面为：$6x + y + 6z - D = 0$ ........................................................................................ 2 分

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{D}{6}} + \frac{y}{D} + \frac{z}{\frac{D}{6}} = 1$，由于 $V = \frac{1}{6}\left|\frac{D}{6}D\frac{D}{6}\right| = 1 \quad \Rightarrow D = \pm 6$ ................................................ 3 分

所求平面方程为：$6x + y + 6z - 6 = 0$ 与 $6x + y + 6z + 6 = 0.$ ◆ ................................................ 4 分

2. 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $L$: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

**【解】** 首先过$M$点作$\perp$直线$L$的平面$\pi$: $3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$

即 $3x+2y-z-5=0$ ........................................ 2 分

$\because$ $L$与$\pi$的交点正是$L$与所求直线的交点.

$\therefore$ 再求直线$L$与平面$\pi$的交点$N$: 由$L$的参数参数方程: $\begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1 \\ z=-t \end{cases}$ 代入$\pi$中, 得 $t=\dfrac{3}{7}$

于是交点 $N(\dfrac{2}{7},\dfrac{13}{7},-\dfrac{3}{7})$, ........................................ 3 分

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}=(\dfrac{2}{7}-2,\ \dfrac{13}{7}-1,\ -\dfrac{3}{7}-3)=(-\dfrac{12}{7},\dfrac{6}{7},-\dfrac{24}{7})=-\dfrac{6}{7}(2,-1,4)$

故所求直线方程为: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$. ◆ ........................................ 4 分

**七、(本题满分 5 分)** 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $|f''(x)|\le 4$, 试证:

$$|f(\frac{a+b}{2})|\le\frac{(b-a)^2}{2}.$$

**【证】** 将 $f(x)$在$\dfrac{a+b}{2}$点处Taylor展开, 得:

$f(x)=f(\dfrac{a+b}{2})+f'(\dfrac{a+b}{2})(x-\dfrac{a+b}{2})+\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-\dfrac{a+b}{2})^2$, $\xi$介于$\dfrac{a+b}{2}$, $x$之间. ........................ 2 分

取 $x=a, x=b$, 分别有:

$$0=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_1)\frac{(b-a)^2}{4},\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2}$$

$0=f(\dfrac{a+b}{2})+f'(\dfrac{a+b}{2})\dfrac{b-a}{2}+\dfrac{1}{2}f''(\xi_2)\dfrac{(b-a)^2}{4}$, $\dfrac{a+b}{2}<\xi_2<b$ ........................................ 3 分

上两式相加, 得:

$0=2f(\dfrac{a+b}{2})+\dfrac{1}{8}(b-a)^2[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)]$, 注意 $|f''(\xi_i)|\le 4\ (i=1,2)$, ................................ 4 分

则有: $|f(\dfrac{a+b}{2})|=\dfrac{1}{16}(b-a)^2|f''(\xi_1)+f''(\xi_2)|$

$\le\dfrac{1}{16}(b-a)^2[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]\le\dfrac{1}{2}(b-a)^2$. ◆◆◆ ........................................ 5 分

# 中国石油大学(北京)2009-2010 学年第一学期

# 《高等数学》(Ⅰ) 期末考试试卷 A 答案 （ 考试时间: 2010.1.25 ）

**班级：________ 姓名：_________ 学号：__________ 分数：_______**

| 题号 | 一 | 二 | 三 | | | | | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | | | | |
| 得分 | | | | | | | | | | | | | |

说明：1. 本试卷共 6 页；

2. 答案必须写在该题后的横线上、或圆括号中、或写在该题下方空白处，不得写在草稿纸中，否则，该题答案无效.

**一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）**

1. 若$\varphi'(x)$存在，$y=\varphi(\sec^2 x)+\arcsin x$，则$dy=\underline{\left[\varphi'(\sec^2 x)2\sec^2 x\tan x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]dx}$.

2. 设函数$y(x)$由方程$\sin(xy)+\dfrac{1}{y-x}=1$所确定,则在曲线$y=y(x)$上对应于$x=0$的点处的切线方程为$\underline{y=2x+1}$.

3. $\int_a^{a+2\pi}(1+\sin^5 x)dx=\underline{2\pi}$ ($a$为任意实数).

4. $\int_0^{+\infty}\dfrac{x}{(1+x)^3}dx=\underline{\dfrac{1}{2}}$.

5. (注：*非工商学院学生做此小题*)半圆形闸门半径为 $R$，将其垂直放入水中，且直径与水面齐. 设水密度$\rho=1$，若坐标原点取在圆心，$x$ 轴正向朝下，则闸门所受水压力 $P$ 的定积分表达式为$P=\underline{\int_0^R 2gx\sqrt{R^2-x^2}dx}$.

5. (注：*工商学院学生做此小题*)设星形线的方程为$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t \quad (a>0)$，则其弧长 $s$ 的定积分表达式为$s=\underline{12a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t dt}$.

**二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 在每小题所给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求）**

1. 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数$f(x)$的间断点，其结论为( B ).

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点$x=1$

(C) 存在间断点$x=0$　　(D) 存在间断点$x=-1$

2. 设$\alpha(x)=\int_0^{\sin x}\sin 2t\,dt,\ \beta(x)=\int_0^{2x}\ln(1+t)\,dt$，则当$x\to 0$时，( D ).

(A) $\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小　　(B) $\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小

(C) $\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小　　(D) $\alpha(x)$与$\beta(x)$同阶但非等价无穷小

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中$g(x)$是有界函数，则$f(x)$在$x=0$处( $C$ ).

(A) 极限不存在　　(B) 连续不可导

(C) 可导　　(D) 极限存在，但不连续

4. 双纽线$r^2=\cos 2\theta$所围成的图形的面积可用定积分表示为( $A$ ).

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta$　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta$

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\,d\theta$　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\,d\theta$

5. 方程$y''+5y'+6y=e^x-e^{-3x}$的特解形式是( $C$ ).

(A) $y=ae^x+be^{-3x}$　　(B) $y=axe^x+bxe^{-3x}$

(C) $y=ae^x+bxe^{-3x}$　　(D) $y=axe^x+be^{-3x}$ ($a,b$为待定常数)

**三、按照要求完成下列各问题（本题共 5 小题，每小题 6 分，满分 30 分）**

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}.$$

2. 方程$\begin{cases}x=\ln\sin t\\ y=\cos t+t\sin t\end{cases}$ 确定 $y$ 为 $x$ 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

【解】 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}=t\sin t,$　　（3 分）

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(t\sin t)'}{x'(t)}=\sin t\tan t+t\sin t.$　　（6 分）

3. 求$\int\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}dx.$

【解】 $\int \frac{\ln x}{(1-x)^2}dx = \int \ln x d\left(\frac{1}{1-x}\right)$ **（1 分）**

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{x}dx$$ **（3 分）**

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$ **（4 分）**

$$= \frac{\ln x}{1-x} - \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| + C$$ **（6 分）**

4. 求微分方程 $y' + y\tan x = \cos x$ 的通解.

【解】 这是一阶线性非奇次微分方程，其中 $P(x) = \tan x, Q(x) = \cos x.$

则方程的通解为

$$y = e^{-\int \tan x dx}\left(\int \cos x e^{\int \tan x dx}dx + C\right)$$

$$= \cos x\left(\int \cos x \frac{1}{\cos x}dx + C\right)$$

$$= (x+c)\cos x.$$

5. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^2}{2} + e^{-x}$，求 $f(x)$.

【解】 $\int_0^x f(t-x)dt \underline{\underline{令u=t-x}} \int_{-x}^0 f(u)du$

于是 $\int_0^{-x} f(u)du = \frac{x^2}{2} - e^{-x}$, 两边求导，得

$-f(-x) = x + e^{-x}$，则有$f(x) = x - e^x$.

**四、（本题满分 8 分）**

对任意$x>0$, 曲线$y=f(x)$满足：$f(x) - xf'(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$，

且此曲线过点$(1,0)$，在该点处的切线平行于直线$y=x$，求此曲线方程$y=f(x)$.

【解】 由条件得 $x[f(x) - xf'(x)] = \int_0^x f(t)dt,$

两边对$x$求导并整理得

$xf''(x) + f'(x) = 0,$ 即 $xy'' + y' = 0,$

令$y' = P,$ $y'' = \frac{dP}{dx},$ 则 $x\frac{dP}{dx} = -P,$

$\ln|P| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow P = \frac{C_1}{x},$ 即$y' = \frac{C_1}{x},$

又由已知条件， $y'(1) = 1,$ 则$C_1 = 1,$ $y' = \frac{1}{x}.$

$\therefore y=\ln x+C_2,$ 又由已知条件，$y(1)=0,$ 则 $C_2=0,$

故 $f(x)=\ln x$ 为所求

**五、（本题满分 8 分）**

证明不等式：$x\ge e\ln x \quad (0<x<+\infty).$

【证】设 $f(x)=x-e\ln x$，$f'(x)=1-\dfrac{e}{x}\triangleq 0\Rightarrow x=e,$ 为唯一驻点.

当 $0<x<e$ 时, $f'(x)<0,$ $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递减,

当 $e<x<+\infty$ 时, $f'(x)>0,$ $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递增,

从而 $f(x)$ 在 $x=e$ 处取得极小值 $f(e)=0$，显然 $f(e)=0$ 也为函数在 $(0,+\infty)$ 的最小值,

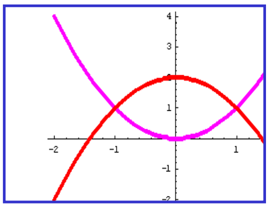
从而在 $(0,+\infty)$ 上, $f(x)\ge f(e)=0,$ 即 $x\ge e\ln x,\ 0<x<+\infty.$

**六、（本题满分 12 分）**

设曲线 $y=x^2$, 与 $y=2-x^2$ 所围图形为 $D$, 求：(1) $D$ 的面积；

(2) $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积；(3) $D$ 绕 $y$ 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解】(1) $S_D=\int_{-1}^{1}(2-x^2-x^2)dx=4\int_0^1(1-x^2)dx=\dfrac{8}{3}$



(2) $V_x=2\pi\int_0^1[(2-x^2)^2-(x^2)^2]dx$

$=2\pi\int_0^1(4-2x^2)dx=\dfrac{20\pi}{3}$

(3) $V_y=\pi\left[\int_0^1(\sqrt{y})^2dy+\int_1^2(\sqrt{2-y})^2dy\right]=\pi.$(切片法)

$V_y=2\pi\int_0^1 x[(2-x^2)-x^2]dx=\pi.$（柱壳法）

**七、（本题满分 6 分）** 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1,$

（1）证明：点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（2）试写出 $f(x)$ 的带有拉格朗日余项的麦克劳林公式, 再证明：

若 $f(1)=0,$ 则在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'''(\xi)=0.$

【证】 (1) 由条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=1$ 知，$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，

$f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=6>0,$ 则在 $\overset{o}{U}(\delta)$ 内 $\dfrac{f''(x)}{x}>0,$

从而 $f''(x)<0, x\in(-\delta,0)$; $f''(x)>0, x\in(0,\delta)$, 异号,

则点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(2) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{3!}x^3=\dfrac{f'''(\xi)}{6}x^3,$ 其中 $\xi$ 在 $0,x$ 之间,

把 $f(1)=0$ 代入上式，有 $\dfrac{f'''(\xi)}{6}=0,$ 而 $\xi\in(0,1)$，

即在区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$，使 $f'''(\xi)=0.$

**八.（本题满分 6 分）**

设 $k>0, y=kx^2$ 与 $y=\sin x\ (0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 在 $x=t$ 处相交. 记 $S_1$ 为 $y=kx^2$ 与 $y=\sin x$ 围成的面积，$S_2$ 为 $y=\sin x$ ， $y=\sin t$ 与 $x=\frac{\pi}{2}$ 围成的面积.试证：$S(t)=S_1+S_2$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内必有唯一最小值.

【证】曲线交点为 $(t,\sin t)$ ，且 $\sin t=kt^2$，因此 $k=\frac{\sin t}{t^2}$，

$$S_1=\int_0^t\left(\sin x-\frac{\sin t}{t^2}x^2\right)dx=1-\cos t-\frac{1}{3}t\sin t,$$

$$S_2=\int_t^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\sin t)dx=\cos t-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\sin t,$$

$$S(t)=1+\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)\sin t$$

$$S'(t)=\frac{2}{3}\sin t+\left(\frac{2}{3}t-\frac{\pi}{2}\right)\cos t,\ S'(0)=-\frac{\pi}{2}<0,\ S'(\frac{\pi}{2})=\frac{2}{3}>0,$$

因此 $\exists t_0\in(0,\frac{\pi}{2})$, 使 $S'(t_0)=0$,

又 $S''(t)=\frac{4}{3}\cos t+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}t\right)\sin t,$

当 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$S''(t)>0\Rightarrow S'(t)\uparrow$，则 $t_0$ 为 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内唯一驻点，

所以 $S(t_0)$ 为 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内的唯一最小值.

# 2010 级《高等数学》（I）期末考试试卷(A)　2011.1.17

## 答案及评分标准

**一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）：**

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ 的渐近线方程为 $\underline{x=0, y=1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\underline{1}$

3. 已知：$\int f'(x^3)dx = x^3 + C$，$C$ 为任意常数，则 $f(x)=\underline{\dfrac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C}$

4. 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 $\underline{y=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}}$

5. 当 $x\to 0$ 时 $3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 与 $x^n$ 为同阶无穷小量，则 $n=\underline{5}$

6. $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\underline{1}$

二、**选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求）**

**1 B　2D　3 B　4 D　5 A**

1、函数 $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$ 满足的一个微分方程是（B）

（A）$y''-y'-2y=3xe^x$　（B）$y''+y'-2y=3e^x$

（C）$y''+y'-2y=3xe^x$　（D）$y''-y'-2y=3e^x$

2 设 $\boldsymbol{f(x)}$ 为已知连续函数，且 $I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)dx,$ 则 $I$ 的值（D）

（A）依赖于 $s$ 、$t$

（B）依赖于 $s$ 、$t$ 、$x$

（C）依赖于 $t$ 、$x$，不依赖于 $s$

（D）依赖于 $s$，不依赖于 $t$

3、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上连续，则 $d[\int f(x)dx]$ 等于（B）

（A） $f(x)$　　　　（B） $f(x)dx$

（C） $f(x)+C$　　　（D） $f'(x)dx$

4、下列命题正确的是（D）

（A）设 $(x_0, f(x_0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点，则 $x=x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点。

（B） $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点， $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶可导，则 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0$ 。

（C）若 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 只有一个驻点 $x_0$，且 $x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内的最小值。

（D）若 $f'_-(b)<0$，则 $f(b)$ 不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值。

5 心形线： $r=a(1+\cos\theta)$ 所围成的区域面积可用定积分表示为（A）

（(A） $\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$　　　　（B） $\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$

（C） $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$　　　　（D） $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$

**三、求解下列各题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）**

1、 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 内具有二阶导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$,

（1）求 $\boldsymbol{f(0)}$;（2）求 $\boldsymbol{f'(0)}$；

（3）根据上述两结果写出 $f(x)$ 带有拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式。

解： $$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}x=0$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

其中 $\xi$ 介于 $0, x$ 之间

2、　求极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{\sqrt{n}}\underline{\underline{\text{转化为函数极限}}}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x^2}=0$$

3　$y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$，求 $dy$

解：
$$y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x},$$

$$y'==e^{\frac{1}{x}\ln x}(\frac{1-\ln x}{x^2})=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$$

$$dy=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)dx$$

四　**求解下列各题（本题共 3 小题，每小题 6 分，满分 18 分）**

1、计算 $\int\dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx$

解　$\int\dfrac{\ln\cos x}{\cos^2 x}dx=\tan x\cdot\ln\cos x+\int\tan^2 xdx$

$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\int(\sec^2 x-1)dx\ .$$

$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\tan x-x+C$$

2 计算 $\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx$

解：$\int_{-\pi}^{\pi}(1+x)\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx$

$$=2\int_0^{\pi}|\cos x|\sin xdx$$

$$=2[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\sin xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\sin xdx]=2$$

3、已知连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f(\dfrac{t}{2})dt+\ln 2$，求 $f(x)$

解：设$u=\dfrac{t}{2}$，$f(x)=2\int_0^x f(u)du+\ln 2$，（1）

对（1）式两边求导得　$f'(x)=2f(x)$，解得$f(x)=Ce^{2x}$，

$f(0)=C$，将$x=0$带入$f(x)=\int_0^{2x} f(\dfrac{t}{2})dt+\ln 2$，得　$f(0)=\ln 2$，$\therefore C=\ln 2$

$f(x)=e^{2x}\ln 2$

**五、（本题满分7分）**

设函数$f(x)=xe^{x+1}+\dfrac{1}{2}$，讨论$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内零点的个数。

解　$$f'(x)=e^{x+1}(x+1)\begin{cases}<0, & x<-1\\ =0, & x=-1\\ >0, & x>-1\end{cases}$$

$x=-1$是$f(x)$的最小值点，且$f(-1)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(xe^{x+1})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

由介值定理，在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内必存在$f(x)$的零点。

又由于$f(x)$在$(-\infty,-1)$与$(-1,+\infty)$内均单调，所以每个区间只有一个零点。

$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内零点的个数为2。

**六、（本题满分6分）**证明不等式$\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$

证明：设$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}, g(\dfrac{\pi}{2})=0$

$$g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

$$=\frac{\cos x}{x^2}(x-tgx)<0\Rightarrow g(x)\searrow,\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

$g(x)>g(\dfrac{\pi}{2})=0$，即$\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}>0$，即$\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$。

**七、（本题满分6分）** 设$f(x)$在区间$[0,1]$上可微，且满足条件$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx$，

证明：存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

证明：设$F(x)=xf(x)$,

由积分中值定理，存在$\eta\in(0,\dfrac{1}{2})$，使$\int_0^{\frac{1}{2}} xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)dx=\dfrac{1}{2}F(\eta)$

$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}F(\eta)=F(\eta)\because F(x)=xf(x),\therefore F(1)=f(1),$

$\therefore F(1)=F(\eta)$ $F(x)$在$[\eta,1]$上连续，在$(\eta,1)$可导，由罗尔定理

存在$\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得$F'(\xi)=0$即$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

**八、（本题满分9分）**设$f(x)$满足$y'-\frac{3}{x}y=-6x$, 且由曲线$y=f(x)$与直线$x=1$及$x$轴所围成的平面图形D绕$x$轴旋转一周得旋转体的体积最小，求满足要求的$f(x)$

解：　$y'-\frac{3}{x}y=-6x$, 通解$y=Cx^3+6x^2$,

所以旋转体的体积为$V(C)=\pi\int_0^1 y^2dx=\pi\int_0^1(Cx^3+6x^2)^2dx=\pi(\frac{C^2}{7}+2C+\frac{36}{5})$

$V'(C)=\pi(\frac{2}{7}C+2)=0, C=-7, V''(C)=\frac{2}{7}\pi>0$

$C=-7$取得极小，也是最小值。所求函数为$f(x)=6x^2-7x^3$

中国石油大学（北京）2011—2012 学年第一学期

# 《高等数学》（Ⅰ）期末考试试卷（A 卷）参考答案

（考试时间：2012.1.9）

| 题　号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **满分值** | 15 | 15 | 24 | 12 | 14 | 10 | 10 | **100** |

**一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）**

1. 设 $F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数．则 $\int f(\frac{1}{x})\frac{dx}{x^2}\ (x\neq 0)=$ $\underline{\quad -F(\frac{1}{x})+C \quad}$.

2. 函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1}$的第二类间断点是$\underline{\quad x=0 \quad}$.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x\sin^2 x+\cos x)\,dx=$ $\underline{\quad 2 \quad}$.

4. 当$x\to 0$时, 若 $(\sin x-\tan x)\tan x$与$x^{\alpha}$是同阶无穷小, 则$\alpha=$ $\underline{\quad 4 \quad}$.

5. 若$\int_0^{+\infty} x\,(1+x^2)^P\,dx$ 收敛，则$\boldsymbol{P}$ 应满足 $\underline{\quad \boldsymbol{P}<-1 \quad}$.

**二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）**

1. 设$\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$均为非负数列, 且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\infty$,则必有( $D$ ).

$(A)$ $x_n<y_n$对任意 n成立　　　　$(B)$ $y_n<z_n$对任意 n成立

$(C)$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_nz_n$不存在　　　　$(D)$ 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}y_nz_n$不存在

2. $f(x)$在$x_0$点处连续是 $|f(x)|$在$x_0$点处连续的 ( $A$ ).

$(A)$ 充分条件　$(B)$ 必要条件　$(C)$ 充分必要条件　$(D)$ 非充分也非必要条件

3. 设函数 $f(x)$ 在 $\boldsymbol{x}=0$ 处连续, 下列命题<u>错误</u>的是 ( $D$ ).

$(A)$ 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$　　　　$(B)$ 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则 $f'(0)$存在

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在, 则 $f(0)=0$　　　　(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则 $f'(0)$存在

4. 设二阶线性微分方程 $y''+\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=e^x$,有三个特解 $y_1=e^x,\ y_2=e^x+e^{\frac{x}{2}},\ y_3=e^x+e^{-x}$,
则该方程的通解是 ( $A$ ).

(A) $e^x+C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}$  (B) $e^x+C_1(e^x+e^{\frac{x}{2}})+C_2(e^x+e^{-x})$

(C) $C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}$  (D) $C_1(e^x+e^{\frac{x}{2}})+C_2(e^x+e^{-x})$

注意：下一题需分专业，工商管理学院及政法的 学生做 $1^\circ$，其它学院的学生做 $2^\circ$.

5.$1^\circ$. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则下列不等式成立的是（ $B$ ）.

(A) $f'(0)>f(1)-f(0)>f'(1)$  (B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f'(0)>f(0)-f(1)>f'(1)$  (D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

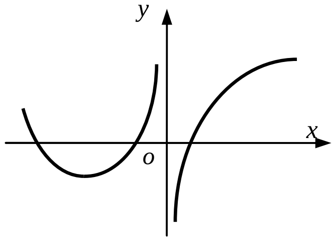
5.$2^\circ$. 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数 $f'(x)$ 的图形如图所示，则 $f(x)$有（ $B$ ）.

(A) 一个极小值点和一个极大值点

(B) 两个极小值点和两个极大值点

(C) 一个极小值点和两个极 大值点

(D) 两个极小值点和一个极 大值点



图： 导函数 $f'(x)$的图形

三、（本题共 4 小题，每小题 6 分，满分 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}((x+1)e^{\frac{1}{x}}-x)$.

【解】法一：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}(x(e^{\frac{1}{x}}-1)+e^{\frac{1}{x}})=\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)+\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$ ........................................ 3 分

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1+1=2.$$ ◆ ........................................ 6 分

法二：令 $t=\frac{1}{x}$，则原式 $=\lim\limits_{t\to0}((\frac{1}{t}+1)e^t-\frac{1}{t})=\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t)e^t-1}{t}$ ........................................ 3 分

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t+(1+t)e^t}{1}=2.$$ ◆ ........................................ 6 分

2. 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$（其中 $a>0$）在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的二阶导数 .

【解】 $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a-a\cos t}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$ ........................................ 2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)\frac{1}{a-a\cos t}=\frac{\cos t-1}{a(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2},$$ .......... 5 分

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{-1}{a}.$$ ◆ ........................................ 6 分

3. 求不定积分 $\int \frac{x}{2+x^4}dx$.

【解】 原式 $=\int \frac{\frac{1}{2}d\ (x^2)}{2+x^4}=\frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(\sqrt{2})^2+(x^2)^2}$ …………………… **3 分**

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan \frac{x^2}{\sqrt{2}}+C.$ ◆ …………………… **6 分**

4. 求定积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

【解】令 $x=\sin t$, 原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$ …………………… **2 分**

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)}{\cos t+\sin t}dt=\frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}dt)$ …………………… **4 分**

$=\frac{1}{2}(t+\ln|\cos t+\sin t|)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$ ◆ …………………… **6 分**

法二:原式 $\xrightarrow{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt\xrightarrow{u=\frac{\pi}{2}-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u+\cos u}du$, …………………… **4 分**

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin t}{\cos t+\sin t}dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} du=\frac{\pi}{4}.$ ◆ …………………… **6 分**

**四、（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）**

1. 求微分方程 $y''+y'-2y=3e^x$ 的通解.

【解】$1^\circ$ 特征方程为: $r^2+r-2=0$, 特征根为: $r_1=1$, $r_2=-2$,

$\therefore$ 齐次方程的通解为: $Y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$; …………………… **3 分**

$2^\circ$ 又非齐次项 $f(x)=3e^x \Rightarrow P_0, \cdot \lambda=1=r_1$, 设原方程一特解 $y^*=Axe^x$, 并代入原方程, 得:

$2A+2Ax+A+Ax-2Ax=3 \quad \Rightarrow \ A=1$, 即 $y^*=xe^x$; …………………… **5 分**

$3^\circ$ $\therefore$ 原方程的通解为: $y(x)=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-2x}+xe^x$. ◆ …………………… **6 分**

2. 当 $\Delta x\to 0$ 时, 函数 $y(x)$ 在任意点处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$ (其中 $\alpha$ 是比 $\Delta x$ 高阶的无穷小), 且 $y(0)=\pi$, 求 $y(1)$.

【解】由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}$, 并取 $\Delta x\to 0$ 的极限, 得: $y'=\frac{y}{1+x^2}$

$\therefore$ 该问题是微分方程的初 值问题 $\begin{cases} y'=\frac{y}{1+x^2}. \\ y(0)=\pi \end{cases}$ …………………… **2 分**

解该一阶变量可分离方 程, 得: $\int_\pi^y \frac{dy}{y}=\int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$ …………………… **4 分**

$\Rightarrow y=\pi e^{\arctan x}$, $\quad \therefore y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$. ◆ …………………… **6 分**

**或者：分离变量、两端积分，得：** $\int \frac{dy}{y}=\int \frac{dx}{1+x^2}+\ln|C|$

$\Rightarrow \ln\frac{y}{C}=\arctan x \quad \Rightarrow \quad y=Ce^{\arctan x}$ ........................................................................................ **4 分**

将 $y(0)=\pi$ 代入通解中得：$C=\pi$

$\Rightarrow$ 所求特解为 $y=\pi e^{\arctan x}$ ........................................................................................ **5 分**

从而 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}x}$. ◆ ........................................................................................ **6 分**

五、(本题共 **2** 小题，第一小题 **6** 分、第二小题 **8**，满分 **14** 分)

1. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长 ( 其中 $a>0$ ).

【解】 $s=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}d\theta$ ........................................ **4 分**

$=4a\int_0^{\pi}|\cos\frac{\theta}{2}|d\theta=8a$ ◆ ........................................................................ **6 分**

2. 设抛物线 $y=ax^2+bx$, 当 $x\in[0,1]$ 时, $y\ge 0$. 试确定 $a,b$ 的值, 使得该抛物线与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形的面积为 $\frac{4}{3}$, 且使得该图形绕 $x$ 轴旋转一周所成的旋转体的体积最小.

【解】由题意可得:

$S=\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{4}{3}$ (1)...... **2 分**

$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi[\frac{a^2}{5}x^5+\frac{ab}{2}x^4+\frac{b^2}{3}x^3]|_0^1=\pi(\frac{a^2}{5}+\frac{ab}{2}+\frac{b^2}{3})$ (2) ..... **4 分**

将（1）带入（2）并消去 b 可得

$V(a)=\pi[\frac{a^2}{5}+a(\frac{4}{3}-\frac{a}{3})+\frac{4}{3}(\frac{4}{3}-\frac{a}{3})^2]$ (3)

由 $V'(a)=\pi(\frac{4}{5\cdot 3^3}a+\frac{4}{3^3})=\frac{4\pi}{5\cdot 3^3}(a+5)\overset{令}{=}0$，得 $a=-5,b=6$ 是唯一的驻点.

又 $V''(a)=\frac{4}{135}>0$，故当 $a=-5,b=6$ 时，旋转体的体积最小. ◆ ..................................................... **8 分**

六、(本题满分 10 分)

注意 : 本题需分专业 , 工商管理学院及政法的 学生做 $1^\circ$, 其它学院的学生做 $2^\circ$.

$1^\circ$. 设函数 $f(x)=\int_0^x\frac{\tan t}{t}dt, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, (1) 试求 $f'(x)$; (2) 给出 $f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

$2^\circ$. 设函数 $f(x)=\int_0^{\tan x}\frac{\arctan t}{t}dt, x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, (1) 求 $f'(x)$; (2) 给出 $f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

【解】$1^o$、（1）当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\frac{\tan x}{x}$

当 $x$=0 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{\tan t}{t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$ ........................................ 4 分

（2）当 $x$=0 时， $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\tan x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$

当 $x\neq 0$ 时， $f''(x)=\dfrac{x\sec^2 x-\tan x}{x^2}$ ........................................................................................... 7 分

令 $g(x)=x\sec^2 x-\tan x$，显然 $g(0)=0$

$g'(x)=\sec^2 x+2x\sec^2 x\tan x-\sec^2 x=2x\sec^2 x\tan x>0$， $g(x)$ 单调增加.

又 $g(0)=0$，故当 $x>0$ 时， $g(x)>g(0)=0$，当 $x<0$ 时， $g(x)<g(0)=0$ .

因此当 $x>0$ 时， $f''(x)>0$，当 $x<0$ 时， $f''(x)<0$ . 所以 $(0,0)$ 是函数 $f(x)$ 的唯一拐点，$(-\dfrac{\pi}{2},0)$

是函数 $f(x)$ 的凸区间，$(0,\dfrac{\pi}{2})$ 是函数 $f(x)$ 的凹区间. ◆ ............................................................ 10 分

$2^o$ 、（1）当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\dfrac{x}{\tan x}\sec^2 x=\dfrac{x}{\sin x\cos x}=\dfrac{2x}{\sin 2x}$

当 $x$=0 时， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\tan x}\frac{\arctan t}{t}dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x}{\tan x}\sec^2 x}{1}=1$ .................... 4 分

（2）当 $x$=0 时， $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2x}{\sin 2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin 2x}{2x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-2\cos 2x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x}{2}=0$

当 $x\neq 0$ 时， $f''(x)=2\times\dfrac{\sin 2x-2x\cos 2x}{\sin^2 2x}$ ............................................................................... 7 分

令 $g(x)=\sin 2x-2x\cos 2x$，显然 $g(0)=0$

$g'(x)=2\cos 2x-2\cos 2x+4x\sin 2x=4x\sin 2x>0$， $g(x)$ 单调增加.

又 $g(0)=0$，故当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，当 $x<0$ 时，$g(x)<g(0)=0$．

因此当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$．所以 $(0,0)$ 是函数 $f(x)$ 的唯一拐点，$(-\frac{\pi}{2},0)$ 是函数 $f(x)$ 的凸区间，$(0,\frac{\pi}{2})$ 是函数 $f(x)$ 的凹区间．◆ ........................................................................ 10 分

七、（本题满分 10 分）

(1) 证明：对任意正整数 n，都有 $\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立；

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$（$n=1,2,\cdots$），证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证】（1）令 $f(x)=\ln(1+x), x\in[0,+\infty)$，显然 $\forall x>0$, $f(x)$ 在 $[0,x]$ 连续，在 $(0,x)$ 可导，由拉格朗日中值定理可得 $\exists\xi\in(0,x)$ 使得 $f(x)-f(0)=\ln(1+x)=\frac{1}{1+\xi}x$，

又 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$，故 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$．

取 $x=\frac{1}{n}$，即得 $\frac{1}{1+n}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$． ........................................................................ 5 分

**注意：利用单调性也可证明该不等式！**

（2）、$a_{n+1}-a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$

$\therefore\{a_n\}$ 是单调递减数列.

由（1）知，$\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$，有

$$\ln 2-\ln 1<1$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}$$

$\therefore\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$

故有 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(n+1)-\ln n=\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}>0$，$\therefore\{a_n\}$ 有下界.

即 $\{a_n\}$ 是单调递减有下界数列，由单调有界定理知，数列 $\{a_n\}$ 有极限．◆◆◆ ............................ 10 分

# 2012 级《高等数学》（I）期末考试试卷(理科 A 卷)答案及评分标准

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 的水平渐近线方程为 $\underline{\qquad y=0 \qquad}$.

2. 设 $y=f^2(f(x))$，其中 $f(x)$ 可导，则 $\mathrm{d}y=$ $\underline{\qquad 2f(f(x))f'(f(x))f'(x)\mathrm{d}x \qquad}$.

3. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5 x+\sin^5 x)\mathrm{d}x=$ $\underline{\qquad \dfrac{16}{15} \qquad}$.

4. 阿基米德螺线 $\rho=2\theta$ 上相应于 $\theta$ 从 0 到 $2\pi$ 的一段弧与极轴所围图形的面积

$=$ $\underline{2\int_0^{2\pi}\theta^2\mathrm{d}\theta=\dfrac{16\pi^3}{3}}$.　(注：写出任意一项均给满分)

5．微分方程 $y''+y=xe^x+\cos x$ 的特解的形式为：(注：本题不必求出特解中的待定系数)

$\underline{(Ax+B)e^x+x(C\cos x+D\sin x)+E\cos x+F\sin x}$.

( 注：特解为: $y^*=\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{2}\right)e^x+\dfrac{x}{2}\sin x$，$A=\dfrac{1}{2},B=-\dfrac{1}{2},D=\dfrac{1}{2}$

符合上述一般形式，可以正确表示此特解的均为正确答案)

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求）

1． $x=0$ 是函数 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{3x}$ 的（　A　）。

(A)　可去间断点；　(B)　振荡间断点；　(C)　无穷间断点；　(D)　跳跃间断点。

2. 若当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ 是比 $\dfrac{1}{x+1}$ 高阶的无穷小，则（　C　）。

(A)　$a=0$，$b=1$，$c=1$；　(B)　$a=0$，$b=1$，$c$ 为任意常数；

(C)　$a\neq 0$，$b$，$c$ 为任意常数；　(D)　$a$，$b$，$c$ 均可取任意常数。

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n+1000}$ 的值是（　A　）。

(A)　$e$；　(B)　$e^{1000}$；　(C)　$e^{1001}$；　(D)　其它值。

4. 若 $F(x)=\int_0^x(2t-x)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上二阶可导且 $f'(x)>0$，则（　D　）。

(A) 函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极大值；

(B) 函数 $F(x)$ 必在 $x=0$ 处取得极小值；

(C) 函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值，点 $(0,F(0))$ 也不是曲线 $y=F(x)$ 的拐点；

(D) 函数 $F(x)$ 在 $x=0$ 处没有极值，但点 $(0,F(0))$ 为曲线 $y=F(x)$ 的拐点。

5. 若 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 为 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的 $n$ 阶泰勒多项式，则 $a_n=$（ B ）。

(A) 1； (B) $(-1)^n$； (C) $\dfrac{1}{n}$； (D) $\dfrac{(-1)^n}{n}$。

**三、按照要求完成下列各问题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）**

1．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x^2\ln(1+x)}$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\tan x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$.

(3 个等价无穷小( $\tan x\sim x$, $\ln(1+x)\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ ), 洛必达法则与结果各 1 分)

2. 方程 $\begin{cases}x=t-\arctan t\\ y=t-\ln(1+t^2)\end{cases}$ 确定 $y$ 为 $x$ 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 与 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1-\frac{1}{1+t^2}}=\left(\dfrac{t-1}{t}\right)^2$ ( 2 分, 两个导数各 1 分)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2\left(1-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{t^2}{1+t^2}}=\frac{2(t-1)(1+t^2)}{t^5}$$ ( $\dfrac{dy}{dx}$ 对 $t$ 求导 1 分, 除以 $\dfrac{dx}{dt}$ 1 分)

(整理结果总体给 1 分, 结果错一个或两个均扣 1 分)

3．若 $x^y=y^x$ 确定 $y$ 为 $x$ 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

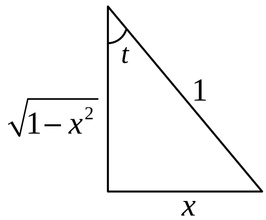
解: 两边取对数得: $y\ln x=x\ln y$ （取对数 1 分）

两边分别关于 $x$ 求导数得: $\dfrac{dy}{dx}\ln x+\dfrac{y}{x}=\ln y+\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}$ （求导给 2-3 分）

移项得: $\left(\ln x-\dfrac{x}{y}\right)\dfrac{dy}{dx}=\ln y-\dfrac{y}{x}$

从而 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln y - \dfrac{y}{x}}{\ln x - \dfrac{x}{y}} = \dfrac{xy\ln y - y^2}{xy\ln x - x^2}$ （结果给 1-2 分，视情况而定，不整理结果也给满分）

4. 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$




解法一：令 $x=\sin t$，$t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$。 则 $\mathrm{d}x=\cos t\ \mathrm{d}t$ （2 分）

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t\cos t}\mathrm{d}t=\int\csc^2 t\ \mathrm{d}t=-\cot t+C$$ （2 分）（积分和任意常数各 1 分）

由右图知：$\cot t=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$， 从而 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$ （1 分）

解法二：令 $x=\dfrac{1}{t}$。 $$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{-\dfrac{1}{t^2}}{\dfrac{1}{t^2}\sqrt{1-\dfrac{1}{t^2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{-t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$$

从而 $$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\ \mathrm{d}(t^2-1)=-\sqrt{t^2-1}+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C$$

（上述步骤总体 5 分， 视实际情况而定，一般地：代换整理 2 分，积分回代 2 分， 任意常数 1 分）

5. 求定积分 $\displaystyle\int_0^1 \arctan\sqrt{x}\ \mathrm{d}x.$

解：令 $u=\sqrt{x}$ (1 分)

$$\int_0^1\arctan\sqrt{x}\ \mathrm{d}x=\int_0^1\ \arctan u\ \mathrm{d}u^2=u^2\arctan u\Big|_0^1-\int_0^1\ \frac{u^2}{1+u^2}\ \mathrm{d}u$$ （分部积分 2 分）

$$=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 1-\frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}-(u-\arctan u)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}-1$$ （拆项积分 2 分）

6. 求星形线 $\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$ 的全长。

解 星形线的全长为：$S=4\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-6\cos^2 t\sin t)^2+(6\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t$ （公式、求导和对称性各 1 分）

$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\mathrm{d}t=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2t)\mathrm{d}(2t)=12$$ （积分 2 分）

**四、按照要求求解下列微分方程 (本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)**

1.  求解初值问题 $y' + 2xy = 4x$， $y\big|_{x=0} = 1$.

解：$P(x) = 2x$， $Q(x) = 4x$

$$y = Ce^{-\int(2x)dx} + e^{-\int(2x)dx}\int 4xe^{\int(2x)dx}\mathrm{d}x = Ce^{-x^2} + 2e^{-x^2}\int e^{x^2}\mathrm{d}x^2 = Ce^{-x^2} + 2$$

由 $y\big|_{x=0} = 1$ 可得：$y\big|_{x=0} = C = -1$。

从而 $y = 2 - e^{-x^2}$。 （公式 3 分， 积分 2 分， 确定常数 1 分）

**2.** 求微分方程 $(1+y^2)y'' = 2yy'^2$ 的通解。

解：令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p(y)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$。

原方程化为： $(1+y^2)p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 2yp^2$， 若 $p \neq 0$，则 $(1+y^2)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 2yp$。 （2 分）

分离变量得 $\dfrac{1}{p}\mathrm{d}p = \dfrac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y$， 两边分别积分得：$\ln|p| = \ln(1+y^2) + C$。 （2 分）

从而有 $p = \pm e^C(1+y^2) = C_1(1+y^2)$， 其中 $C_1$ 为任意常数。 若 $p = 0$，则 $C_1 = 0$。 （1 分）

又由 $y' = p(y)$ 可得， $y' = C_1(1+y^2)$， 分离变量并积分得：$\arctan y = C_1x + C_2$。

或 $y = \tan(C_1x + C_2)$， 其中 $C_1, C_2$ 为任意常数。 （1 分）

**五、（本题满分 6 分）** 证明方程 $3x - 1 - \int_0^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内有唯一的实根。

证明： 令 $F(x) = 3x - 1 - \int_0^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x$， 则函数 $F(x)$ 在[0，1]上连续可导。

(2 分， 不说明连续性扣 1 分)

$F(0) = -1$， $F(1) = 2 - \int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x > 2 - \int_0^{\frac{1}{2}}1\mathrm{d}x = \dfrac{3}{2} > 0$

由零点定理知在(0,1)上至少存在一点 $\xi$， 使得 $F(\xi) = 0$，

从而方程 $3x - 1 - \int_0^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。 （2 分）

又 $F'(x)=3-\dfrac{x}{1+\sin\dfrac{x^2}{2}}>3-x>2>0$， 因此 $F(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调增，从而在区间 $(0,1)$ 上至多存在一个零点。也即方程 $3x-1-\int_0^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至多存在一个实根。

综上方程 $3x-1-\int_0^{\frac{x^2}{2}}\dfrac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=0$ 在区间 $(0,1)$ 内存在唯一的实根。（2 分）

六、（**本题满分 6 分**）求曲线 $y=xe^{-\frac{x}{2}}\left(x\geq 0\right)$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得到的延展到无穷远的旋转体体积.

解： 由题意， 该旋转体的体积为：

$$V=\int_0^{+\infty}\pi x^2e^{-x}\mathrm{d}x \qquad (2\text{ 分})$$

$$=-\pi\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{d}e^{-x}=-\pi\left.\frac{x^2}{e^x}\right|_0^{+\infty}+2\pi\int_0^{+\infty}e^{-x}x\mathrm{d}x=-2\pi\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}e^{-x} \qquad (2\text{ 分})$$

$$=-2\pi\left.\frac{x}{e^x}\right|_0^{+\infty}+2\pi\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=-2\pi\left.e^{-x}\right|_0^{+\infty}=2\pi \qquad (2\text{ 分})$$

七、（**本题满分 7 分**） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导， 且 $\int_0^{\frac{1}{4}}xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}f(1)$，求证在 $(0,1)$ 内至少存在一点 $\xi$， 使得 $f'(\xi)+\dfrac{f(\xi)}{\xi}=0.$

证明：由积分中值定理知：存在 $\eta\in(0,\dfrac{1}{4})$，使得：$\int_0^{\frac{1}{4}}xf(x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}\eta f(\eta)$ （2 分）

令 $F(x)=xf(x)$， 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导。（2 分）

由于 $\int_0^{\frac{1}{4}}xf(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}f(1)$， 因此：$\eta f(\eta)=f(1)$ 。

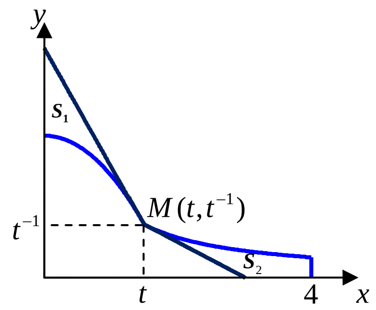
从而：$F(\eta)=\eta f(\eta)=f(1)=F(1)$，（1 分）

由罗尔中值定理， 在区间 $(\eta,1)$ 上存在一点 $\xi$，使得 $F'(\xi)=0$， 即：

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0$$

由于 $\xi\in(\eta,1),\eta\in(0,\dfrac{1}{4})$， 故 $\xi\in(0,1)$ 。 上式两端同除以 $\xi$ 即得结论。 （2 分）

八、（**本题满分 9 分**）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(A-x^2), & x<t\\ x^{-1}, & x>t\end{cases}$ 在点 $t(0<t<2)$ 处连续，曲线 $y=f(x)$ 与




该曲线在点 $M(t,t^{-1})$ 处的左切线以及 $y$ 轴所围成的面积记为 $S_1$，曲线 $y=f(x)$ 与该曲线在点 $t$ 处的右切线、$x$ 轴以及直线 $x=4$ 所围成的面积记为 $S_2$，写出函数 $f(x)$ 定义中 $A$ 所满足的条件，并求使得 $S=S_1+S_2$ 为最小的 $t$。

解：由 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(A-x^2), & x<t\\ x^{-1}, & x>t\end{cases}$ 在点 $t(0<t<2)$ 处连续可得：

$$\frac{1}{2}(A-t^2)=t^{-1}，\quad 从而 A=t^2+\frac{2}{t}。\qquad （1 分）$$

$f(x)$ 在点 $M(t,t^{-1})$ 处的左导数 $f'_-(t)=-t,$ 从而左切线的方程为 $y-\dfrac{1}{t}=-t(x-t)$；

$f(x)$ 在点 $M(t,t^{-1})$ 处的右导数 $f'_+(t)=-\dfrac{1}{t^2}$，从而右切线的方程为：$y-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x-t)$。

右切线与 $x$ 轴的交点 $(x^*,0)$ 满足 $0-\dfrac{1}{t}=-\dfrac{1}{t^2}(x^*-t)$， 从而 $x^*=2t$

（**以上各 1 分**）

$$S_1=\int_0^t \frac{1}{t}-t(x-t)-\frac{1}{2}(A-x^2)\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{d}x=\left.\frac{(x-t)^3}{6}\right|_0^t=\frac{t^3}{6} \qquad （2 分）$$

$$S_2=\int_t^4\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}=\ln 4-\ln t-\frac{1}{2} \qquad （1 分）$$

$$S(t)=S_1(t)+S_2(t)=\frac{t^3}{6}-\ln t+\ln t-\frac{1}{2}，\qquad S'(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{t}=0\Rightarrow t=\sqrt[3]{2}。\qquad （1 分）$$

驻点唯一， 从而 $t=\sqrt[3]{2}$ 即为所求。 (1 分)

好好复习，预祝你考试顺利！
期末考试时间：2018.1.12
9:30~11:30
带齐证件和文具用品！
计算器也很必要。