期中复习——训练题（2019.11.17 发出）

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 当$x\to 0$时，$(1+2x)^x-\cos x\sim a\,x^2$，则$a=$______________.

2. 函数$\ln[e^{\sin x}(2x+1)]$的 n 阶导数是______________.

3.函数$f(x)=a^x$ ($0<a\neq 1$) 带有拉格朗日余项的二阶麦克劳林公式是

______________.

4. 设 $f(x)=(x^{2019}-1)\,g(x)$，其中$g(x)$在 $x=1$处连续，$g(1)=a$. 则$f'(1)=$______________.

5. 曲线 $y=\sqrt[3]{1-x^3}$ 的渐近线是______________.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $x=0$ 是函数 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{2x}$ 的（　　）.

(A) 可去间断点； (B) 振荡间断点； (C) 无穷间断点； (D) 跳跃间断点.

2.当 $n\to\infty$时，无穷小$\dfrac{1}{n}$，$\dfrac{1}{n^\alpha}(0<\alpha<1)$，$\sqrt[n]{n}-1$，$1-\cos\dfrac{1}{n}$的阶由左向右依次升高的选项是 (　　).

(A) $\dfrac{1}{n^\alpha}(0<\alpha<1)$， $\sqrt[n]{n}-1$， $\dfrac{1}{n}$， $1-\cos\dfrac{1}{n}$ (B) $\dfrac{1}{n^\alpha}(0<\alpha<1)$， $\dfrac{1}{n}$， $\sqrt[n]{n}-1$， $1-\cos\dfrac{1}{n}$

(C) $\dfrac{1}{n^\alpha}(0<\alpha<1)$， $\dfrac{1}{n}$， $1-\cos\dfrac{1}{n}$， $\sqrt[n]{n}-1$ (D) $\sqrt[n]{n}-1$， $\dfrac{1}{n^\alpha}(0<\alpha<1)$， $\dfrac{1}{n}$， $1-\cos\dfrac{1}{n}$

3. 设对于$\forall \boldsymbol{x}$，有$\varphi(\boldsymbol{x})\le f(\boldsymbol{x})\le g(\boldsymbol{x})$，且$\lim\limits_{x\to\infty}(g(\boldsymbol{x})-\varphi(\boldsymbol{x}))=\boldsymbol{0}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}f(\boldsymbol{x})$（　　）.

(A) 存在且为 0 (B) 存在但不一定为 0 (C) 不一定存在 (D) 一定不存在

4. 设 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+f'^2(x)=x$，且 $f'(0)=0$，则下列选项成立的是 (　　).

(A) $f(0)$是$f(x)$的极小值 (B) $f(0)$是$f(x)$的极大值

(C) $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点 (D) $f(0)$既非$f(x)$的极值，$(0,f(0))$也非曲线$y=f(x)$的拐点

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(\dfrac{x^2}{2})^n}$ $(x\ge 0)$，则$f(x)$的不可导点是 (　　).

(A) $x=0$ (B) $x=1$ (C) $x=0$，$x=2$ (D) $x=1$，$x=2$

三、按照要求，求解下列各题（本题共 8 个小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{(e^x-1)\ln(1+x^2)}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=\arctan x+x^y$ 所确定，求 dy.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n+1}\right)$.

5. 设 $\begin{cases} x=\ln(1+t^4) \\ y=t^2-\arctan(t^2) \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

6. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, 定义 $x_{n+1}=\sin x_n$, $n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7 求数列 $\{\sqrt[n]{n}\}$ 的最大值.

8. 试讨论方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 有几个实根.

四、证明题（本题共有 2 个小题，每小题 7 分，满分 14 分）

1. 设 $0<a<b$, 证明 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{b+a}$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 且在 $(0,3)$ 内可微, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$. 试证明 $\exists\,\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$

试分析下面三问题， 如何作辅助函数.

1．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)\cdot f(b)>0$, $f(a)\cdot f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. 则存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

2．设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f(1)=f(0)$, 证明 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $2f'(\xi)=(1-\xi)f''(\xi)$.

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=\dfrac{1}{3}$. 证明:

$\exists\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

五、作图题（本题满分 8 分）

试讨论函数 $f(x)=2x+\dfrac{1}{x-1}$ 的基本性态，即增减性, 凹凸性, 以及极值, 拐点, 并作函数的图形.

六、应用题（本题满分 8 分）

假定足球门的宽度为 4 米, 在距离右门柱 6 米处一球员沿垂直于底线的方向带球前进, 问：该球员应在离底线多少米处射门才能获得最大的射门张角. ◆◆◆