期中复习——训练题（2019.11.17 发出）

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 当$x\to 0$时，$(1+2x)^x-\cos x\sim a\,x^2$，则$a=$ $\frac{5}{2}$.

• 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2x)^x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+2x)}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\text{“}\sim\text{”}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot 2x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}$

$=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

2. 函数$\ln[e^{\sin x}(2x+1)]$的n阶导数是 $\sin(x+\frac{n\pi}{2})+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(2x+1)^n}2^n$.

• 由于 $\left(\ln(e^{\sin x}(2x+1))\right)^{(n)}=\sin^{(n)}x+\left(\ln(2x+1)\right)^{(n)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})+\left(\frac{2}{2x+1}\right)^{(n-1)}$

$=\sin(x+\frac{n\pi}{2})+\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(2x+1)^n}2^n$.

3. 函数$f(x)=a^x$ （$0<a\neq 1$）带有拉格朗日余项的二阶麦克劳林公式是

$a^x=f(x)=1+\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\frac{\ln^3 a\, a^{\theta x}}{3!}x^3$，$0<\theta<1$.

• 由于 $f(0)=1$，$f^{(k)}(x)=(e^{x\ln a})^{(k)}=a^x\cdot\ln^k a$，$f^{(k)}(0)=\ln^k a$，$k\geq 1$.

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(\theta x)}{3!}x^3$，即

$a^x=1+\ln a\,x+\frac{\ln^2 a}{2!}x^2+\frac{\ln^3 a\,a^{\theta x}}{3!}x^3$. （$0<\theta<1$）

4. 设$f(x)=(x^{2019}-1)\,g(x)$，其中$g(x)$在$x=1$处连续，$g(1)=a$. 则$f'(1)=$ $2019\cdot a$.

• 由导数定义 $f'(1)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^{2019}-1)g(x)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{2018}+x^{2017}+\cdots+x+1)}{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2019\cdot a$

*

5. 曲线$y=\sqrt[3]{1-x^3}$的渐近线是 $y=-x$.

• 由于 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}-1}=-1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}+x)\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{t^3-1}+1}{t}$ (洛必达略) …

$\overset{\text{“}\sim\text{”}}{=}-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-t^3}-1}{t}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{3}t^3}{t}=0$，仅一条斜渐近线$y=-x$.

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $x=0$ 是函数 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{2x}$ 的（ A ）.

(A) 可去间断点；　(B) 振荡间断点；　(C) 无穷间断点；　(D) 跳跃间断点.

• 由于 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{2x}=0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 无定义，∴ $x=0$ 为可去间断

2.*当 $n\to\infty$ 时, 无穷小 $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^{\alpha}}(0<\alpha<1)$, $\sqrt[n]{n}-1$, $1-\cos\dfrac{1}{n}$ 的阶由左向右依次升高的选项是 (A).

(A) $\dfrac{1}{n^{\alpha}}(0<\alpha<1)$, $\sqrt[n]{n}-1$, $\dfrac{1}{n}$, $1-\cos\dfrac{1}{n}$　(B) $\dfrac{1}{n^{\alpha}}(0<\alpha<1)$, $\dfrac{1}{n}$, $\sqrt[n]{n}-1$, $1-\cos\dfrac{1}{n}$

(C) $\dfrac{1}{n^{\alpha}}(0<\alpha<1)$, $\dfrac{1}{n}$, $1-\cos\dfrac{1}{n}$, $\sqrt[n]{n}-1$　(D) $\sqrt[n]{n}-1$, $\dfrac{1}{n^{\alpha}}(0<\alpha<1)$, $\dfrac{1}{n}$, $1-\cos\dfrac{1}{n}$

• 关键是 $\sqrt[n]{n}-1$ 的阶次. $\sqrt[n]{n}-1=e^{\frac{\ln n}{n}}-1\sim\frac{\ln n}{n}$，其与 $\frac{1}{n^{\alpha}}$ 的阶谁高呢？

又由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n}-1}{\frac{1}{n^{\alpha}}}\overset{\text{"}\sim\text{"}}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}\ln n}{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{1-\alpha}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{1-\alpha}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(1-\alpha)x^{1-\alpha}}=0$

∴ $\sqrt[n]{n}-1=o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$，故四个无穷小的阶由低至高依次是 $\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\sqrt[n]{n}-1$, $\frac{1}{n}$, $1-\cos\frac{1}{n}$.

3. 设对于 $\forall x$, 有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)-\varphi(x))=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$（ C ）.

(A) 存在且为 0　(B) 存在但不一定为 0　(C) 不一定存在　(D) 一定不存在

• 由题意. $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)\Rightarrow 0=\varphi(x)-\varphi(x)\le f(x)-\varphi(x)\le g(x)-\varphi(x)\to 0$

可以推知. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-\varphi(x))=0$，但 $\not\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 一定存在！故选(C)

4. 设 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+f'^{2}(x)=x$, 且 $f'(0)=0$, 则下列选项成立的是 (C).

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　(D) $f(0)$ 既非 $f(x)$ 的极值, $(0,f(0))$ 也非曲线 $y=f(x)$ 的拐点

• 由于 $f''(x)=x-f'^{2}(x)$，$f''(0)=0$ 拐点的必要条件满足，又 $f'''(0)=(1-2f'(x)\cdot f''(x))\big|_{x=0}=1\ne 0$

故选(C)．如果还要问为什么该点就是拐点，为什么 $f(0)$ 不是极值 见下：

▲ $f'''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-f''(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x}=1>0\Rightarrow f''(x)\begin{cases}<0, & x\in(-\delta,0)\Rightarrow f\text{凸}\\ >0, & x\in(0,\delta)\Rightarrow f\text{凹}\end{cases}$ ∴ $(0,f(0))$ 拐点

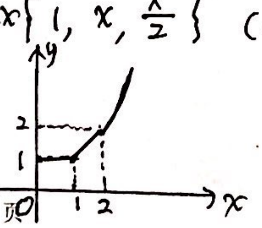
▲ 显然 $f'''(x)$ 连续，~~由 $\lim\limits_{x\to 0}f'''(x)$~~ $=f'''(0)=1>\frac{1}{2}>0$，∴ 存在 $U(0)$，有 $f'''(x)>\frac{1}{2}>0$. 从而 将 $f(x)$ Maclaurin展 $f(x)=f(0)+f'''(\xi)\frac{x^3}{3!}$, $\xi\in U$ 显然 $f(0)$ 非极大小值.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{n}+\left(\dfrac{x^{2}}{2}\right)^{n}}$　$(x\ge 0)$, 则 $f(x)$ 的不可导点是 (D).

(A) $x=0$　(B) $x=1$　(C) $x=0$, $x=2$　(D) $x=1$, $x=2$

• 由夹逼定理知. $\sqrt[n]{1^{n}+x^{n}+\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n}}\longrightarrow\max\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right\}$　$(n\to\infty)$

∴ $f(x)=\max\left\{1,\ x,\ \frac{x^2}{2}\right\}$
$$=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ x, & 1<x\le 2\\ \frac{x^2}{2}, & x>2\end{cases}$$



显然 $x=1,2$ 均为 $f(x)$ 的不可导点. 找由：
$f'_{\mp}(1)=\begin{cases}0\\1\end{cases}$, $f'_{\mp}(2)=\begin{cases}1\\2\end{cases}$ 可知.

三、按照要求，求解下列各题（本题共 8 个小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+2^{x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.　　$(1^{\infty}$型$)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2^x-1}{2}\right)^{\frac{2}{2^x-1}}\right]^{\frac{2^x-1}{2x}}$，　又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln 2}-1}{2x}=\frac{\ln 2}{2}$，

$\therefore$ 原式 $=e^{\frac{\ln 2}{2}}=e^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{(e^{x}-1)\ln(1+x^{2})}$.　　$(\frac{0}{0}$型$)$

或 $\sin x\cdot(1-\cos x)\cdot\frac{1}{\cos x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\tan x-(1+\sin x)}{x\cdot x^2(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}\overset{L'H}{=}\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{3x^2}$

$\overset{L'H}{=}\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x+\sin x}{2x}=\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{2}{\cos^3 x}+1\right)\cdot\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{1}{12}\cdot 3=\frac{1}{4}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=\arctan x+x^{y}$ 所确定，求 dy.

解　方程两端关于 x 求导，得

$y'=\frac{1}{1+x^2}+x^y(y\ln x)'=\frac{1}{1+x^2}+x^y\left(\frac{y}{x}+\ln x\, y'\right)$

$\Rightarrow y'=\frac{\frac{1}{1+x^2}+yx^{y-1}}{1-x^y\ln x}$，　$\therefore dy=y'dx=\frac{\frac{1}{1+x^2}+yx^{y-1}}{1-x^y\ln x}dx$.

4. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{2}\left(\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)$.

解　令 $f(x)=\arctan x$，$x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right]$，应用Lagrange中值定理，有

$\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1+\xi^2}\,\frac{1}{n(n+1)}$，$\frac{1}{n+1}<\xi<\frac{1}{n}$.

从而原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\frac{1}{(1+\xi^2)\,n(n+1)}=\lim\limits_{\xi\to 0}\frac{1}{1+\xi^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

5. 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^{4})\\ y=t^{2}-\arctan(t^{2})\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\frac{d^{2}y}{dx^{2}}$.

解　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{2t}{1+t^4}}{\frac{4t^3}{1+t^4}}=\frac{2t\cdot(1+t^4-1)}{4t^3}=\frac{t^2}{2}$；

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=t\cdot\frac{1}{\frac{4t^3}{1+t^4}}=\frac{1+t^4}{4t^2}$.

6. 设数列$\{x_n\}$满足 $0<x_1<\pi$, 定义 $x_{n+1}=\sin x_n$, $n=1,2,\Lambda\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 ∵ $0<x_1<\pi$， $0<x_2=\sin x_1<x_1$，可见 $0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n$，∴$\{x_n\}\downarrow$；

又 $x_n>0$，$n=1,2,\cdots$，∴$\{x_n\}$下方有界，故由单调有界收敛准则知：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\geq 0$，由 $\sin x_n=x_{n+1}$ 取极限有：$\sin A=A\Rightarrow A=0$.

7 求数列$\{\sqrt[n]{n}\}$的最大值.

解 设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，$x\in[1,+\infty)$. 由 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}(\frac{1}{x}\ln x)'=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$，

∴驻点 $x=e$. 又 $x\in[1,e)$，$f'(x)>0\Rightarrow f(x)\uparrow\Rightarrow 1<\sqrt{2}$；

而 $x\in(e,+\infty)$，$f'(x)<0\Rightarrow f(x)\downarrow\Rightarrow\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\cdots$

又 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{2}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}$，可见 $\max\{1,\sqrt{2},\sqrt[3]{3},\cdots\}=\sqrt[3]{3}$.

8. 试讨论方程 $x^2=x\sin x+\cos x$ 有几个实根.

解 令 $f(x)=x^2-x\sin x-\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 显然 $f(x)$处处连续可导（且偶）.

由 $f'(x)=2x-x\cos x=x(2-\cos x)\overset{令}{=}0\Rightarrow$ 驻点 $x=0$.

注意 $f(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2(1-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2})=+\infty$，同理 $f(+\infty)=+\infty$，$f(0)=-1$

下面列表说明：

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\searrow -1$	-1	$-1\nearrow +\infty$

显然 $f(x)$有2个零点，即方程 $f(x)=0$ 有2个实根.

四、证明题（本题共有2个小题，每小题7分，满分14分）

1. 设 $0<a<b$，证明 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(b-a)}{b+a}$.

证明：分析 $\ln\frac{b}{a}>\frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1}$，视 $x=\frac{b}{a}$，则有 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$.

令 $F(x)=(\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1})$，$x\in[1,+\infty)$.

由 $F'(x)=(\ln x-2+\frac{4}{x+1})'=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，$x>1$

∴ $F(x)\uparrow$，从而 $\forall x>1$，$F(x)>F(1)=0$，即 $\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}>0$.

即 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$，即 $x=\frac{b}{a}>1$ 亦如 得证.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续, 且在 $(0,3)$ 内可微, 且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$. 试证明 $\exists\xi\in(0,3)$, 使得 $f'(\xi)=0$

证: $\because f(x)\in C[0,3]$, $\therefore$ 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大,小值分别为 M, m,

则 $m\leq f(0), f(1), f(2)\leq M$, 即 $m\leq\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leq M$, 据综合

应用介值与最值定理, $\exists x_0\in[0,2]$ 使 $f(x_0)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$;

又 $f(x)$ 在 $[x_0,3]$ 上满足 Rolle TH 三条件, 故 $\exists\xi\in(x_0,3)\subset(0,3)$

使 $f'(\xi)=0$, 得证.

试分析下面三问题, 如何作辅助函数.

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a)\cdot f(b)>0$, $f(a)\cdot f(\frac{a+b}{2})<0$. 则存在点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

思路: 令 $F(x)=f(x)e^{-x}$, $x\in[a,b]$.

$f(x)$ 在 $[a,\frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2},b]$ 内各至少有一个零点 ξ_1, ξ_2.

可见 $F(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]\subset[a,b]$ 上满足 Rolle TH 三条件! ...

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(1)=f(0)$, 证明 $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $2f'(\xi)=(1-\xi)f''(\xi)$.

思路: 由结果反推. $-2f'(x)+(1-x)f''(x)=0\Rightarrow -2(1-x)f'(x)+(1-x)^2f''(x)=0$.

$\Rightarrow ((1-x)^2\cdot f'(x))'=0$; 注意. $\exists x_0\in(0,1)$ 有 $f'(x_0)=0$.

$\therefore$ 设 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$, 显然 $F(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上满足 Rolle TH 三条件! ...

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{3}$. 证明: $\exists\xi\in(0,\frac{1}{2}),\eta\in(\frac{1}{2},1)$, 使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

思路: 由结果反推. $f'(\xi)-\xi^2+f'(\eta)-\eta^2=0\Rightarrow (f(x)-\frac{1}{3}x^3)'\Big|_{x=\xi}+(f(x)-\frac{1}{3}x^3)'\Big|_{x=\eta}=0$

可见 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$, 分别在 $[0,\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},1]$ 上应用 Lagrange

中值定理! 即可.

五、作图题（本题满分 8 分）

试讨论函数$f(x)=2x+\dfrac{1}{x-1}$的基本性态，即增减性，凹凸性，以及极值，拐点，并作函数的图形.

解：1° 显然 $x=1$ 将曲线分成两支. $D: x\neq 1$.

2°. $y'=2-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{2(x-1)^2-1}{(x-1)^2}\overset{令}{=}0 \Rightarrow (x-1)^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow |x-1|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x=1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$y''=\dfrac{2}{(x-1)^3}\begin{cases}>0, & x>1 \Rightarrow 曲线凹\\ <0, & x<1 \Rightarrow 曲线凸.\end{cases}$

3°. 列表讨论.

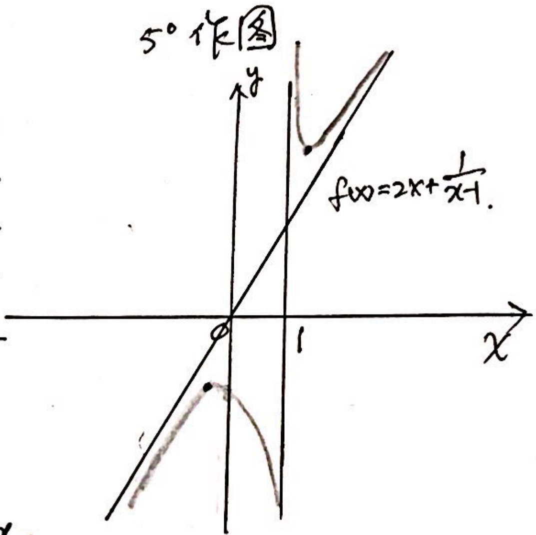
x	$(-\infty,1-\frac{1}{\sqrt{2}})$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(1-\frac{1}{\sqrt{2}},1)$	1	$(1,1+\frac{1}{\sqrt{2}})$	$1+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(1+\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$
y'	+	0	−	不存在	−	0	+
y''	−		−		+		+
y	↗ 凸	极大值 $2(1-\sqrt{2})$	凸 ↘		↘ 凹	极小值 $2(1+\sqrt{2})$	↗ 凹

4 渐近线. 垂直渐近线 $x=1$;

又 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+\frac{1}{x-1}}{x}=2$,

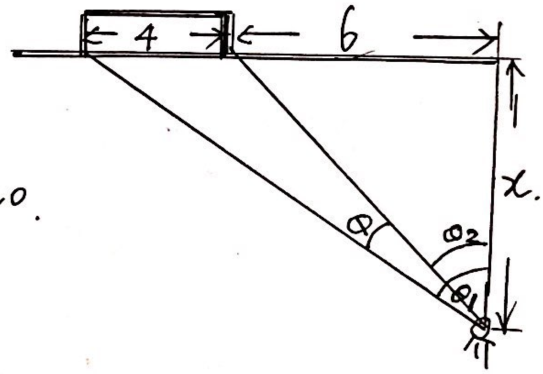
$b=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$, 斜渐近线 $y=2x$.

5° 作图



六、应用题（本题满分 8 分）

假定足球门的宽度为 4 米，在距离右门柱 6 米处一球员沿垂直于底线的方向带球前进，问：该球员应在离底线多少米处射门才能获得最大的射门张角.



解. 设球员距离底线的垂直距离为 x 米，

此时张角 θ 与垂直距离 x 满足:

$\theta=\theta_1-\theta_2=\arctan\dfrac{10}{x}-\arctan\dfrac{6}{x}$, $x\geqslant 0$.

由于 $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{1}{1+(\frac{10}{x})^2}(-\dfrac{10}{x^2})-\dfrac{1}{1+(\frac{6}{x})^2}(-\dfrac{6}{x^2})$

$=\dfrac{-10}{x^2+100}+\dfrac{6}{x^2+36}=\dfrac{240-4x^2}{(x^2+100)(x^2+36)}\overset{令}{=}0$.

得唯一驻点 $x=\sqrt{60}$，由于问题的最值存在且驻点唯一.

故它就是最佳射门位置. 即:

当球员在距底线 $\sqrt{60}$ 米处射门所获得的张角最大.