一、填空题（请在下列空格处填上正确答案，共 5 题，每小题 3 分，共 15 分）

1、已知$f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+70)$，则$f'(0)=$ 70! 。

2、$y=\sec x-\csc x$,则$y'|_{x=\frac{\pi}{4}}=$ $2\sqrt{2}$ 。

3、若$f'(x_0)$存在,$\lim\limits_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=2$,则$f'(x_0)=$ 1 。

4、$d\arctan x^2=$ $\frac{1}{1+x^4}$ $dx^2=$ $\frac{2x}{1+x^4}$ $dx$(第一空2分，第二空1分)。

5、已知$y=\ln(1+x)$则$y^{(n)}(0)=$ $(-1)^{n-1}(n-1)!$ 。

二、选择题（请将下列各题的正确答案填在题后的括号内，共 5 题，每小题 3 分，共 15 分）

1、$f(0)=0$,则$f(x)$在点$x=0$可导的充分条件是 （ B ）

A、$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cos h)$存在　　B、$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-e^h)$存在

C、$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(h)-f(-h)]$存在　　D、$\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$存在

2、函数$f(x)$在$x=x_0$处可导是$f(x)$在$x=x_0$处连续的 （ B ）

A、必要不充分条件　　B、充分不必要条件

C、充要条件　　D、非充分也非必要条件

3、函数$y=f(u)$在$u$处可导,$u=e^x$,则$\frac{dy}{dx}=$ （ B ）

A、$f'(e^x)$　　B、$f'(e^x)e^x$

C、$[f(e^x)]'e^x$　　D、$f'(u)$

4、$y=f(x)$在$x_0$ 处可导,则$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y-dy}{\Delta x}=$ （ A ）

A、0　　B、-1

C、1　　D、$\infty$

5、$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$，则$\frac{d^2x}{dy^2}=$ （ C ）

A、$\frac{1}{y''}$　　B、$-\frac{y''}{y'^2}$　　C、$-\frac{y''}{y'^3}$　　D、$-\frac{1}{y''y'}$

三、计算题（计算下列各题，共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1、$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$

解：$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 3分

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$ 2分

2、求由 $e^y+xy-e=0$ 所确定的隐函数的导数 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

解：方程左右两边分别对 $x$ 求导：

$e^y\cdot y'+y+xy'=0$ 2分

$\therefore y'=\frac{-y}{e^y+x}$ 1分

当 $x=0$ 时，$y=1$ 1分

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{-1}{e}$ 1分

3、 求由$\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$所确定的函数的导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\underline{\dfrac{t}{2}}$ 1′ 3分

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\underbrace{\dfrac{d(\frac{dy}{dx})}{dt}}_{1'}\Big/\dfrac{dx}{dt}=\underbrace{\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}}_{1'}$ 2分

4、$y=x^{\frac{1}{x}}$，求$\dfrac{dy}{dx}$

解：法一：$\ln y=\frac{1}{x}\ln x$ 方程左右两边对x求导 2分

$\dfrac{y'}{y}=-\dfrac{1}{x^2}\ln x+\dfrac{1}{x^2}$ 2分

$\therefore y'=y(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})$

$=\underbrace{x^{\frac{1}{x}}}_{y\ -1'}(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2})$ 1分

法二：

$y=e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$

$\therefore y'=e^{\frac{1}{x}\ln x}(\frac{1}{x}\ln x)'$

$=e^{\frac{1}{x}\ln x}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\ln x)$

5、用微分近似计算 $\tan 136^\circ$

解：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ ✓

$\underline{\tan(136^\circ)=\tan(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{180})}$ 1′，$f(x)=\tan x$，$x_0=\frac{3}{4}\pi$，$\Delta x=\frac{\pi}{180}$

$\therefore \tan(136^\circ)\approx\underline{\tan(\frac{3}{4}\pi)+\sec^2(\frac{3}{4}\pi)\cdot\frac{\pi}{180}}$ 4分 2′

$=-1+(\sqrt{2})^2\frac{\pi}{180}\approx-0.965$ 1分

6、$y=x^2e^x$，求$y^{(50)}$

解：莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\, u^{(n-k)}v^{(k)}$ 1分

令 $e^x=u$，$x^2=v$

$(e^x)^{(n)}=e^x$， $x^{(n)}=0\ (n=3\cdots\cdots)$

$\therefore (x^2e^x)^{(50)}=e^{x(50)}x^2+50e^{x(49)}\cdot 2x+\frac{50\times 49}{2}\cdot e^{x(48)}\cdot 2+0$ 4分

$=x^2e^x+100xe^x+2450e^x$ 1分

四、证明题（共两题，总分 20 分）

1、（8 分）证明$f(x)$在$x_0$点处可导的充要条件为$f(x)$在$x_0$点处可微。

证明："⇒" $f(x)$在$x_0$点可导，$\therefore \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$（$\alpha$是$\Delta x\to 0$时的无穷小） 2分

$\therefore \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$ 2分

$\therefore f(x)$在$x_0$点可微且（$dy=f'(x_0)\Delta x$）

"⇐" $f(x)$在$x_0$点可微则 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 2分

$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$ 左右两边取极限 1分

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A$ 1分

$\therefore f(x)$在$x_0$可导且$f'(x_0)=A$

2、（12分）

若$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$且$f(x)$可导，证明$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$点处可导的充要条件。

证：$F'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)(1+\sin x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)+f(x)\sin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)\sin x}{x}$

$=f'_+(0)+f(0)$

$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)(1-\sin x)-f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)\sin x}{x}$

$=f'_-(0)-f(0)$.

$f(0)=0 \Rightarrow F'_+(0)=F'_-(0)$，即$F(x)$在0处可导。

若$F(x)$在0处可导，则$F'_+(0)=F'_-(0)$ 即 $f(0)=0$。

五（12分）讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求$f'(x)$并讨论$f'(x)$的连续性。

五（12分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求$f'(x)$并讨论$f'(x)$的连续性。

解：4分 $x\neq 0$，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

5分 $x=0$，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{2}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=$

即 $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ ~~极~~极限不存在 2分



∴ $f'(x)$在$x=0$不连续，在$x\neq 0$的其他处连续，且$x=0$为振荡间断

1分

六、（8分）落在水面上的石头，产生同心波纹。若最外一圈波的半径的增大速率总是6m/s，问在2s末扰动水面面积增大的速率为多少？

解：$S=\pi r^2$ 2分 $r=v\cdot t$ 1分

∴ $\frac{ds}{dt}=2\pi r\frac{dr}{dt}$ 3分

∴ $\frac{ds}{dt}\Big|_{t=2}=2\pi\cdot(6\times 2)\cdot 6$

$=144\pi\ (m^2/s)$ 2分