《概率论与数理统计》自我测试卷 01

一、是非题：（每题1分，共7分）

1. 设 $P(A)=0$，则随机事件 A 和任何随机事件 B 一定相互独立.【　　】
2. 连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 与其分布函数 $F(x)$ 未必相互唯一确定.【　　】
3. 若 X 和 Y 都是标准正态随机变量，则 $X+Y\sim N(0,\ 2)$.【　　】
4. 设有分布律 $P\left(X=(-1)^{n+1}\dfrac{2^n}{n}\right)=\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$，则 X 的数学期望存在.【　　】
5. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ 相互独立，且均服从参数为 λ 的指数分布，则 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 依概率收敛于 $\dfrac{1}{\lambda}$.【　　】
6. 区间估计的置信度 $1-\alpha$ 的提高会降低区间估计的精确度.【　　】
7. 在假设检验中，显著水平 α 是指 $P\left(拒绝H_0 \middle| H_0为假\right)=1-\alpha$.【　　】

二、选择题：（每题3分，共15分）

8. 设连续型随机变量 X 的密度函数满足 $f(x)=f(-x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则 $P(|X|>2005)=$【　　】.

(A) $2-F(2005)$;　　　　(B) $2F(2005)-1$;

(C) $1-2F(2005)$;　　　　(D) $2[1-F(2005)]$.

9. 设二维随机变量 $(X,\ Y)$ 服从 G 上的均匀分布，G 的区域由曲线 $y=x^2$ 和 $y=x$ 所围，则 $(X,\ Y)$ 的联合概率密度函数为【　　】.

(A) $f(x,\ y)=\begin{cases}6, & (x,\ y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$;　　(B) $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{6}, & (x,\ y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$;

(C) $f(x,\ y)=\begin{cases}2, & (x,\ y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$;　　(D) $f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & (x,\ y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$.

10. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0, 0.5, 0.5, 0)$，$Z = X - Y$，则方差 $D(|Z|) =$【　　】.

(A) 0;　　　　(B) 1;

(C) $1 + \dfrac{2}{\pi}$;　　　　(D) $1 - \dfrac{2}{\pi}$.

11. 设总体 $X \sim b(1, p)$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$\bar{X}$ 为样本均值，则 $P\left(\bar{X} = \dfrac{k}{n}\right) =$【　　】.

(A) p;　　　　(B) $p^k (1-p)^{n-k}$;

(C) $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$;　　　　(D) $C_n^k (1-p)^k p^{n-k}$.

12. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 为未知参数，样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 的样本方差为 S^2，对假设检验 $H_0: \sigma \geq 2, H_1: \sigma < 2$，显著水平为 α 的拒绝域是【　　】.

(A) $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$;　　　　(B) $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$;

(C) $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$;　　　　(D) $\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha}(n)$.

三、填空题：（每题3分，共15分）

13. 已知 $P(A) = 0.7$，$P(B) = 0.4$，$P(\overline{AB}) = 0.8$，则 $P(A | A \cup \bar{B}) =$ ______________.

14. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，则 $Z = |X - Y|$ 的分布函数 $F_Z(z) =$ ___________________.

15. 设 $E(X) = 1$，$E(Y) = 2$，$D(X) = 1$，$D(Y) = 4$，$\rho_{XY} = 0.6$，$Z = (2X - Y + 1)^2$，则数学期望 $E(Z) =$ _______________.

16. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，由切比雪夫不等式可知，概率 $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$ 的取值区间为 ___________ 与 ___________ 之间.

17. 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是来自总体 $X \sim \chi^2(n)$ 分布的样本，$\bar{X}$ 是样本均值，则 $E(\bar{X}) =$ _________，$D(\bar{X}) =$ _________.

四、计算题：（18～20题每题9分，21～23每题10分，共57分）

18. 设一盒乒乓球有6个新球，4个旧球，不放回抽取，每次任取1个，共取两次.

(1) 求第二次才取到新球的概率；

(2) 发现其中之一是新球，求另一个也是新球的概率.

19. 某酒吧柜台前有吧凳7张，现有2个客人进来随机入座（之前无人就座）.

(1) 求这2人就座相隔凳子数的分布律和数学期望；

(2) 若服务员预言这2人之间至少相隔2张凳子，求服务员预言为真的概率.

20. 设随机变量 X 在 $(0,\alpha)$ 上随机地取值，服从均匀分布，当观察到 $X=x\ (0<x<\alpha)$ 时，Y 在区间 (x,α) 内任一子区间上取值的概率与子区间的长度成正比. 求:

(1) (X, Y) 的联合概率密度函数 $f(x,y)$；

(2) Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

21. 某学校东区食堂为提高服务质量，决定对就餐率 p 进行调查. 某天中午随机地对用过餐的同学进行了抽样调查. 设调查了 n 个同学，其中在东区食堂用过餐的学生数为 X. 若要求以大于95%的概率保证调查所得的就餐率与 p 之间的误差上下在10%以内，问：n 应取多大（用中心极限定理）？

22. 设总体 $X \sim f(x)=\dfrac{1}{2\theta}e^{-\frac{|x|}{\theta}}, \theta>0, -\infty<x<+\infty$ (θ 未知)，且 $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为来自 X 的一个样本. 求:

(1) θ 的矩估计量;

(2) θ 的最大似然估计量.

23. 自动包装机加工袋装食盐，每袋盐的净重 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ, σ^2 未知，按规定每袋盐的标准重量为500克，标准差不能超过10克. 某天为检查机器的工作情况，随机地抽取6袋，测得样本均值 $\bar{x}=495.3$ 克，样本均方差 $s=13.74$ 克. 问：通过检验期望 μ 和方差 σ^2 来判断包装机该天的工作是否正常 $(\alpha=0.05)$？

附表： $\Phi(1.285)=0.9$， $\Phi(1.645)=0.95$， $\Phi(1.96)=0.975$， $\Phi(2.33)=0.99$

$t_{0.025}(5)=2.571$， $t_{0.025}(6)=2.447$， $t_{0.05}(5)=2.015$， $t_{0.05}(6)=1.943$

$\chi^2_{0.05}(5)=11.071$， $\chi^2_{0.05}(6)=12.592$， $\chi^2_{0.025}(5)=12.833$， $\chi^2_{0.025}(6)=14.449$

五、证明题：（本题6分）

24. 设 A,B,C 是不能同时发生但两两相互独立的随机事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\rho$.

证明：ρ 可能取的最大值为 $\dfrac{1}{2}$.