第二章　概 括　(2019. 10. 30)

1. 导数的概念，及几何意义；高阶导数
2. 怎样判定函数在一点是否可导; 不可导几何特点 : 角点, 尖点
   连续之下不可导：要么 无切线,要么有平行于 y轴的切线
3. 可导性与连续性的关系 ； 可导性与可微性的关系 ；
   函数的增量与函数的微 分的关系
4. 基本初等函数的导数公 式与一整套求导法则 ;
①四则; ②反函数; ③复合函数; ④隐函数; ⑤对数求导法;
⑥参数方程的函数 ;
⑦几个函数的 n阶导数公式；高阶导数的 *Leibniz* 公式
5. 基本初等函数的微分公 式及求微分法则
值得一提 : 用定义求微分 ; 形式不变性
6. 微分学的简单应用 : 求曲线的切线法线 ; 速率问题及近似计算

本章要求

● 会求各种函数的导数、及高阶导数.

特别是：1. 幂指函数的导数.
2. 隐函数的导数.
3. 由参数方程所确定函数的二阶导数.
4. 分段函数的可导性，及导函数的连续性的讨论.
在分段点处一定要用定义求，或者需求左右导数 !
个别非分段函数在特殊点也要用定义; 带绝对值, 带根号的要注意.
5. 反函数的导数.
6. n 阶导数 (函数代数和、两个函数乘积的形式).

●微分定义; 微分与增量; 其意义(近似计算); 微分的形式不变形.

●可导性、可微性、连续性的关系.

● 此章的应用问题：相关变化率问题.

第二章自测题答案 (2019. 10. 30)

一、填空题 (15分)

1. 设 $f(t)\neq 0$处处可导, 且 $f'(t)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(t+h)-f(t-3h)}=$ $\underline{\dfrac{1}{4f'(t)}}$.

2. 设 $y=x(\sin x)^{\cos x}$，则 $y'=$ $\underline{x(\sin x)^{\cos x}\left(\dfrac{1}{x}-\sin x\cdot\ln\sin x+\dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)}$

3. $d(\underline{\ln(1+e^x)+C})=\dfrac{1}{1+e^x}d(e^x)$.

4. 设 $x+y=\arctan y$，则 $dy=$ $\underline{-(1+\dfrac{1}{y^2})dx}$.

$\sin x\approx\sin 0+(\sin x)'\big|_{x=0}\cdot x=0+\cos 0\cdot x=x$

5. 利用函数微分可以得到 , $\sin x\approx$ ______ (当 $|x|<<1$ 时, x为弧度).

二、选择题　(15分)

1. 已知 $f(x)$ 在$x=1$处连续，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$，则 $f'(1)=$ (*C*).
   (*A*) 0　(*B*) 1　(*C*) 2　(*D*) 4

2. 就函数 $y=f(x)$而言，下列描述正确的是 (*C*).
   (*A*) 可导性与连续性等价　(*B*) 可导但不一定可微
   (C) 可导性与可微性等价　(*D*) 可微但不一定可导

3. 设 $f(x)=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$，则 $f(x)$ 的不可导点的个数是 (*A*).
   (*A*) 0个　(*B*) 1个　(*C*) 2个　(*D*) 3个

4. 设 $f(x)$可导, 且 $f'(x_0)\neq\dfrac{1}{2}$，则当$\Delta x\to 0$时, $f(x)$在x_0点处的微分dy是(*B*).
   (*A*) 与Δx 是等价无穷小　(*B*) 与Δx 是同阶无穷小
   (C) 比Δx 低阶的无穷小　(*D*) 比Δx 高阶的无穷小

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$，则 $f^{(n)}(0)=$ (*A*).
   (*A*) $(-1)^n n!\,(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$　(*B*) $(-1)^{n+1}n!\,(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$　(*C*) $(-1)^n\dfrac{n!}{2^{n+1}}$　(*D*) $(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{2^{n+1}}$

三、计算题　(30分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$点处可微，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

解 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$

$=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x_0)-x_0\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}]=f(x_0)-x_0f'(x_0).$

2. 设 $y=1+xe^{xy}$，求 $y''(0)$.

解　方程两端关于 x求导 :

$y'=e^{xy}+xe^{xy}(y+xy')\cdots(*)$ $\xrightarrow{\text{取}x=0\ (\text{即}y=1)}$ $y'\big|_{x=0}=1$;

再在(*)两端对 x求导 :

$y''=e^{xy}[(y+xy')\cdot(2+xy+x^2y')+2xy'+x^2y'']$

$\xrightarrow{\text{取 }x=0,\,y=1\text{ 及 }y'|_{x=0}=1}$ $y''\big|_{x=0}=2.$

3. 设 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 确定 y是 x的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$,

$y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dy'}{dt}\cdot\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{-1}{1-\cos t}\cdot\dfrac{1}{1-\cos t}=-\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}.$

4. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在点$(0,0)$ 处相切, $a\neq 0$为常数,
   求 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{a}{n})$.

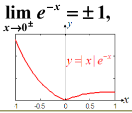
解　由题意知，$f(0)=0$，且 $f'(0)=(\sin x)'\big|_{x=0}=1$,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}nf(\dfrac{a}{n})=a\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(\frac{a}{n})-f(0)}{\frac{a}{n}-0}$ $\xlongequal{\text{定义}}$ $af'(0)=a.$

5. 判断 $f(x)=|x|e^{-x}$ 在$x=0$点是否可导，说明理由.

解　由于 $f'_{\pm}(0)=\lim\limits_{x\to0^{\pm}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^{\pm}}\dfrac{|x|e^{-x}}{x}=\pm\lim\limits_{x\to0^{\pm}}e^{-x}=\pm1,$

即 $f'_{+}(0)\neq f'_{-}(0)$,　$\therefore$ $f(x)$在 $x=0$ 点不可导.



6. 设 $f(x)$为单调函数，$g(x)$为其反函数，已知 $f(1)=2$, $f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $f''(1)=1$,　求反函数的二阶导数 $g''(2)$.

解　$f(x)\big|_{x=1}=2\Rightarrow g(y)\big|_{y=2}=1$,　由于 $g'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$,

$$\therefore g''(y)=\frac{d}{dy}\Big(\frac{1}{f'(x)}\Big)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{f'(x)}\Big)\frac{dx}{dy}=-\frac{f''(x)\cdot g'(y)}{f'^2(x)}=-\frac{f''(x)}{f'^3(x)}$$

从而 $g''(2)=g''(y)\big|_{y=2}=-\dfrac{f''(x)}{f'^3(x)}\Big|_{x=1}=-\dfrac{f''(1)}{f'^3(1)}=-\dfrac{1}{(-\frac{1}{\sqrt{3}})^3}=3\sqrt{3}.$

四. (8分)

设$f(x)$满足：$\forall x$, $f(1+x)=2f(x)$, 且 $f'(0)=3$, 求$f'(1)$.

解　由 $f(1+x)=2f(x)$ $\xrightarrow{取\,x=0}$ $f(1)=2f(0)$

$$\text{则 } f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{2f(\Delta x)-2f(0)}{\Delta x}$$

$$=2\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$=2f'(0)=6.$$

五. (8分)　设 $f(x)=x^2\sin2x$, 求 $f^{(20)}(x)$.

解　设 $u=\sin2x$, $v=x^2$, 则由　$(u\cdot v)^{(20)}=\sum\limits_{k=0}^{20}C_{20}^{k}u^{(20-k)}v^{(k)}$

以及 $(\sin2x)^{(n)}=2^n\sin(2x+\dfrac{n\pi}{2})$,　得

$$f^{(20)}(x)=(\sin2x)^{(20)}\cdot x^2+20(\sin2x)^{(19)}\cdot(x^2)'+\frac{20(20-1)}{2!}(\sin2x)^{(18)}\cdot(x^2)''+0$$

$$=2^{20}\sin(2x+\frac{20\pi}{2})x^2+20\cdot2^{19}\sin(2x+\frac{19\pi}{2})\cdot2x+\frac{20\cdot19}{2!}2^{18}\sin(2x+\frac{18\pi}{2})\cdot2$$

$$=2^{20}\sin(2x+10\pi)x^2+20\cdot2^{20}\sin(2x+\frac{19\pi}{2})x+95\cdot2^{20}\sin(2x+9\pi)$$

$$=2^{20}(x^2\sin2x-20x\cos2x-95\sin2x)$$

六. (8分)

设函数 $f(x)$在 $x=a$ 点可导，且 $f(a)\neq0$,　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

解　　注意是　1^{∞}型的极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}\right)^{\frac{f(a)}{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}}\right]^{\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}n}$$

$$\text{又 }\lim_{n\to\infty}\frac{f(a+\frac{1}{n})-f(a)}{f(a)}n\ \overset{记\,\Delta x=\frac{1}{n}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{1}{f(a)}\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{f'(a)}{f(a)},$$

$\therefore$ 原极限 $=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

七. (8分)

设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ ax+b, & x\geq0\end{cases}$, 确定常数 a与b, 使 $f(x)$处处可导.

解　$\because$ 可导必连续　$\Rightarrow$ $f(0^-)=1\equiv f(0^+)=b$

$\therefore$ $b=1$;

又 $\because$ 可导 $\Rightarrow$ $f'_-(0)=f'_+(0)$

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to-0^-}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,　$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to+0^-}\dfrac{ax+b-b}{x}=a$

$\therefore$ $a=1$.

八. (8分)

设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x^3, & x\leq0\end{cases}$, 讨论$f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性.

解　$x>0$时, $f'(x)\overset{法则}{=\!=}2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot(\dfrac{-1}{x^2})=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,

$x<0$时, $f'(x)\overset{法则}{=\!=}3x^2$,

$x=0$时, $f'_+(0)\overset{定义}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x}=0$,

$f'_-(0)\overset{定义}{=\!=}\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^3-0}{x}=0$,

$f'_-(0)=f'_+(0)=0$, $\therefore$ $f'(0)=0$　且 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 3x^2, & x\leq0\end{cases}$

当$x\neq0$时, $f'(x)$分别被两个初等函数表 示, 故 $f'(x)$连续

又 $f'(0^+)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x})\nexists$　$\therefore$ $f'(x)$在$x=0$不连续

可见 $f'(x)$ 除$x=0$不连续外，处处连续