《高等数学》第三章测试题　　2019.11.9 发出

一、求下列极限

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{((1+x)^{\frac{1}{x}}-1)\sin\ln(1+x)}{x\sin x}$　　2. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\,)$　　3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1-\cos x}\right)^{x^3}$

4. 设$f(x)$具有二阶导数 ，当$x\neq 0$时，$f(x)\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，

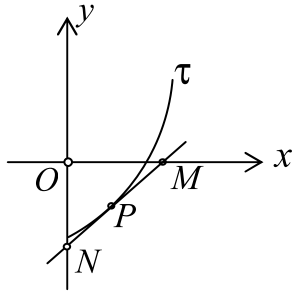
求$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{f(x)}{x})^{\frac{1}{x}}$.

二、设$f(0)=g(0), f'(0)=g'(0)$，当$x>0$时，$f''(x)<g''(x)$，证明：当$x>0$时，$f(x)<g(x)$.

三、证明下列不等式

1. 设$x>0$，常数$a>e$，　证明 $(a+x)^a<a^{(a+x)}$　　　　2. 当$x<1$时，$e^x\leq\dfrac{1}{1-x}$

四、证明方程$\ln x=\dfrac{x}{2e}$恰有两个实根.



五、在曲线$\tau: y=x^2-1\,(x>0)$上的点P处作τ的切线，与坐标轴交于M, N点（见图）. 试求点P的坐标使ΔOMN的面积最小.

六、设奇函数$f(x)$在$[-1,\ 1]$上具有二阶导数且$f(1)=1$，　证明:

（1）$\exists\xi\in(0,\ 1)$，使得$f'(\xi)=1$；

（2）$\exists\eta\in(-1,\ 1)$，使得$f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

七、已知函数$y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$，试求其单调区间,极值点及极值，图形的凹凸性，拐点，渐近线，并作出函数的图形.

八、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中函数$g(x)$具有二阶连续的导数，且$g(0)=1$，

（1）确定a值使$f(x)$为连续函数；

（2）求$f'(x)$；

（3）讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性.　◆◆◆