2019级《高等数学Ⅰ》期末复习测试题 (120分钟) 2019.12.31

一、填空题（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x}{x}=$ $\underline{\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{2}{x}=0}$ （∵ 无穷小乘有界变量仍无穷小）

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $f'(0)=$ $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1}$

3. 若 $\int\dfrac{f(u)}{u}du=F(u)+C$，则 $\int f(x^{\alpha})\dfrac{dx}{x}(\alpha>1)=$ $\underline{\int\frac{f(x^{\alpha})}{x^{\alpha}}\frac{1}{\alpha}d(x^{\alpha})=\frac{1}{\alpha}F(x^{\alpha})+C}$.

3′. 函数 $f(x)=x\ln x$ 在 $x=1$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(1)$ $(n\geq 2)$ 是 $\underline{\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-2)}\Big|_{x=1}}=(-1)^{n-2}(n-2)!=(-1)^{n}(n-2)!$

4. $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\dfrac{x\cos x}{1+x^4}+|\sin^3 x|\right)dx=$ $\underline{2\int_0^{\pi}\sin^3 x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\frac{8}{3}}$.

·先用夹逼准则！失败后再用积分和式的极限.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$ $\underline{\qquad\qquad}$ $\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$.

5′. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}=$ $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^{1+\frac{1}{n}}}{n(1-e^{\frac{1}{n}})}\overset{\sim}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(-\frac{1}{n})}=e-1}$ 或 $\int_0^1 e^x dx=e-1$.

二、选择题（本题共5小题，每小题3分，满分15分）

1. 当 $x\to 0$ 时，e^x-1-x 是较 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 的（ D ）. 1. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

(A) 高阶无穷小　(B) 低阶无穷小　(C) 同阶无穷小　(D) 等价无穷小

2. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 有（ C ）条渐近线.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

2. 由于 $y=\dfrac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)}$，显然 $x=-1$ 是可去间断点，$x=1$ 是无穷间断点，∴ $x=1$ 为一条垂直渐近线；又 $\lim\limits_{x\to\infty}y=1$，∴ $y=1$ 为水平渐近线，故有2条.

3. 方程 $\ln x=\dfrac{x}{2e}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有（ 2/B ）个不同的实根

3′. 方程 $5x-2-\int_0^x\dfrac{dt}{1+t^2}=0$ 在区间 $(0,1)$ 内实根的个数是（ 1/C ）.

(A) 3　(B) 2　(C) 1　(D) 0

4. 设函数 $f(x)=1-\ln(1+x^3)$，则下列选项正确的是（ C ）.

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

(C) $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点　(D) $f(0)=1$ 非极值，$(0,1)$ 非曲线的拐点

4. ① $y'=\dfrac{-3x^2}{1+x^3}$，$x=0$ 驻点，且 y' 在0左右不变号，∴ $x=0$ 非极值点；② $y''=-\dfrac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$，$x=0$，$y''=0$，且 y'' 在0左右侧变号，∴ $(0,1)$ 是拐点，选择C.

4'. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{x^2}=1$，则下列选项正确的是（ A ）.

(A) $f(0)$是$f(x)$的极小值　　(B) $f(0)$是$f(x)$的极大值

(C) $(0,f(0))$是曲线$y=f(x)$的拐点　　(D) $f(0)$非$f(x)$的极值，$(0,f(0))$非曲线$y=f(x)$的拐点

4' ① 显然，$x=0$ 是 $f'(x)=f''(x)=0$ 的点，即前题下的极值点，拐点，的必要条件，
② 由极限知 $\exists\ \mathring{U}(0,\delta)$ 有 $f''(x)>0$，$\therefore f''(x)$ 不变号 非拐点，! ③ 又 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\xi)}{2}x^2$
$>f(0)$ 或者
由 $f'(x)\uparrow \Rightarrow$ $-\delta$　0　δ　x
$f'(x)<0$，$f'(0)=0$，$f'(x)>0$
$\Downarrow$　　$\Downarrow$
$f(x)\downarrow$　　$f(x)\uparrow$
可见 $f(0)$ 为极小值. 选A.

5. 反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=$（ C ）.

(A) ∞　　(B) π　　(C) $\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{d(e^x)}{e^{2x}+1}=\arctan(e^x)\Big|_0^{+\infty}=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}$，选 C.

三、计算下列各题（本题共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.　　1'. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{\ln(1+x^2)\,(e^x-1)}$.

$\xlongequal{令 t=\frac{1}{x}} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{t}\sin t}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}\xlongequal{\frac{0}{0}}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}\xlongequal{\sim}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$.

2. 设 $y=x^{\sin x}+e^y+\arcsin\dfrac{1}{3}$，求 dy.

$dy=y'dx$.

或由 $dy=d(e^{\sin x\ln x})+d(e^y)=x^{\sin x}\,d(\sin x\ln x)+e^y dy$

$\therefore dy=\dfrac{1}{1-e^y}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)dx$. 注意 dx 千万不要丢了！

3. 设 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t^2}{2t}=\dfrac{t}{2}$;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\dfrac{1}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$.

4. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{1+\cos 2x}$.

$=\displaystyle\int x\frac{dx}{2\cos^2x}=\frac{1}{2}\int x\,d\tan x=\frac{1}{2}\left(x\tan x-\int\tan x\,dx\right)$

$=\dfrac{1}{2}(x\tan x+\ln|\cos x|)+C$.

5. 求定积分 $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

法1. 配方后利用导出公式. 原式 $=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,d(x-1)$

$=\left(\frac{x-1}{2}\sqrt{1-(x-1)^2}+\frac{1}{2}\arcsin(x-1)\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

法2. 令 $1-x=\sin t$, 原式 $=\int_0^1\sqrt{1-(1-x)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sqrt{1-\sin^2 t}\,(-\cos t)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=I_2=\frac{\pi}{4}.$

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(1+2t)^{\frac{1}{t}}\,dt}{1-\cos x}$.

本题利用等价无穷小代换，积分上限函数的导数，洛必达法则，重要极限公式第二个.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}(1+2t)^{\frac{1}{t}}\,dt}{\frac{1}{2}x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}\cdot 2x}{x}$

$\overset{1^\infty}{=}2\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}\right]^2=2e^2.$

6.′ 设 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,dt$, 求 $\int_0^\pi f(x)\,dx$.

由于 $f(\pi)=\int_0^\pi\frac{\sin t}{\pi-t}\,dt$, $f'(x)=\frac{\sin x}{\pi-x}$.

$\int_0^\pi f(x)\,d\underset{v}{x}=f(x)\cdot x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x f'(x)\,dx=\pi f(\pi)-\int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{\pi-x}\,dx$

$=\int_0^\pi \pi\frac{\sin x}{\pi-x}\,dx-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}\,dx=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}\,dx=\int_0^\pi\sin x\,dx=2.$

四、(本题满分 8 分) 试证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x>\frac{2x}{\pi}$. (提示从 $\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}>0$ 入手)

证. 令 $F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$

由于 $F'(x)=\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}=\frac{x\cos x-\tan x\cos x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

又令 $G(x)=x-\tan x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2})$

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, $G'(x)=1-\sec^2 x=-\tan^2 x<0$, $\therefore G(x)\downarrow\Rightarrow G(x)=x-\tan x<G(0)=0$,

从而 $F'(x)<0\Rightarrow F(x)\downarrow$, 即:

$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$, 都有 $F(x)>F(\frac{\pi}{2})=0$, 可见: $\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}>0$, 移项整理即可.

五、(本题满分 8 分)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)\neq 0$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}=\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

证 分析. $(*)$ $g(\xi)\int_a^b f(x)dx - f(\xi)\int_a^b g(x)dx = \left(\int_a^x g(t)dt\cdot\int_a^b f(x)dx - \int_a^x f(t)dt\cdot\int_a^b g(x)dx\right)'_{x=\xi}=0$

可见作辅助函数及 Rolle 定理即可.

令 $F(x)=\int_a^x g(t)dt\cdot\int_a^b f(x)dx-\int_a^x f(t)dt\cdot\int_a^b g(x)dx$，显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理三条件，且 $F(a)=F(b)=0$，$\therefore \exists\xi\in(a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$，即 $(*)$ 成立.

又 $g(x)\neq0$ 在 $[a,b]$ 上连续，从而不变号，$\therefore\int_a^b g(x)dx\neq0$，对 $(*)$ 整理即可。

备选题　设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内具有二阶导数，且

$\int_1^2 f(x)\,dx=f(2)$，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+f(x)}{x-1}=0$，试证明存在 $\xi\in(0,2)$ 使得 $f'(\xi)+f''(\xi)=0$.

证. 本题主要用到了积分中值定理、罗尔定理及作辅助函数等.

由 $\int_1^2 f(x)dx \overset{\exists\xi_1\in[1,2]}{=\!=\!=} f(\xi_1)(2-1)=f(\xi_1)=f(2)$，$\therefore\exists\xi_2\in(\xi_1,2)\subset(1,2)$ 有

$f'(\xi_2)=0$；又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+f(x)}{x-1}\overset{\text{洛}}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{1}=f'(1)=0$；

从而令 $F(x)=f'(x)e^x$，$x\in[1,\xi_2]$

显然 $F(x)$ 在 $[1,\xi_2]$ 上满足 Rolle TH 3 条件，且 $F(1)=F(\xi_2)=0$，

$\therefore\exists\xi\in(1,\xi_2)\subset(1,2)\subset(0,2)$ 使 $F'(\xi)=f''(\xi)e^\xi+f'(\xi)e^\xi=0$，$\because e^\xi\neq0$，

六、(本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分)　故有 $f''(\xi)+f'(\xi)=0$.

1. 求微分方程 $(x+1)y'+(x+2)y=1$ 的通解.

$\Rightarrow y'+\dfrac{x+2}{x+1}y=\dfrac{1}{x+1}$

$\therefore$ 原方程通解为 $y=e^{-\int\frac{x+2}{x+1}dx}\left(C+\int\dfrac{1}{x+1}e^{\int\frac{x+2}{x+1}dx}dx\right)$

$=e^{-x-\ln(x+1)}\left(C+\int\dfrac{1}{x+1}e^{x}(x+1)dx\right)$

$=\dfrac{e^{-x}}{x+1}\left(C+\int e^x dx\right)$

$=\dfrac{e^{-x}}{x+1}(C+e^x)=\dfrac{1}{x+1}(Ce^{-x}+1)$.

1′. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x+2\int_0^x \sin t f(t)dt=x+1$, 试求函数 $f(x)$.

问题为求解一初值问题：$\begin{cases} f'(x)+\tan x\, f(x)=\dfrac{1}{\cos x} \\ f(0)=1 \end{cases}$.　(略)

2. 已知连续的凸曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=1$, 且其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 求该曲线 $y=y(x)$.

· 曲线上任一点处的曲率 $K\overset{\Delta}{=}\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right| \xlongequal[\frac{d\alpha}{dx}=\frac{y''}{1+\tan^2\alpha}]{y'=\tan\alpha} \left|\dfrac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{ds}{dx}}\right| = \dfrac{|y''|}{1+y'^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$

$$=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

∴ 由题意：$K=\dfrac{-y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \dfrac{1}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$，又曲线在(0,1)处切线 $y=1$,

∴ 问题归为初值问题：$\begin{cases} \dfrac{-y''}{1+y'^2}=1 & ① \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 & ② \end{cases}$

令 $y'=p(x)$，①化为：$\dfrac{1}{1+p^2}\dfrac{dp}{dx}=-1$ ——— 可分离变量方程.

分离变量得并积分：$\arctan p \Leftarrow \int_0^p \dfrac{dp}{1+p^2}=-\int_0^x dx \Rightarrow -x$

∴ $p=-\tan x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\tan x$，直接积分得：

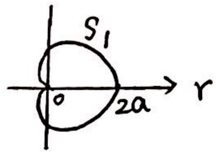
$y-1=\int_1^y dy=-\int_0^x \tan x\,dx=+\ln\cos x\Big|_0^x=\ln|\cos x|-0$

∴ $y=1+\ln|\cos x|$.

七、(本题共 3 小题，每小题 4 分，满分 12 分)

1. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$ 的全长.

解　$ds=\sqrt{r^2+r'^2}\,d\theta=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2(-\sin\theta)^2}\,d\theta=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta.$



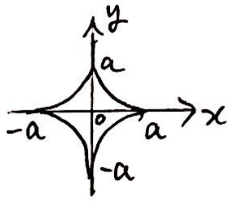
$\therefore S=2S_1$

$=2\int_0^{\pi}a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=2a\int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$

$=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$

注：下限≤上限.

2. 求星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ $(a>0)$ 所围图形的面积 .



解. $A=4A_1$

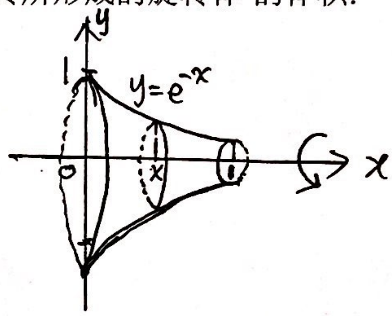
$=4\int_0^a y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,dt$

$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\,dt$

$=12a^2(I_4-I_6)=12a^2\,\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$

3. 求曲线 $y=e^{-x}, x=0, x=1$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体 的体积.

解. $V_x=\pi\int_0^1 y^2(x)\,dx$



$=\pi\int_0^1 e^{-2x}\,dx$

$=\pi\int_0^1 e^{-2x}\,\frac{1}{-2}\,d(-2x)$

$=-\frac{\pi}{2}(e^{-2x})\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}(1-e^{-2}).$

注：面、体及线 抓基本情形是关键.