

2019 级《高等数学 I》期末复习测试题 (120 分钟) 2019.12.31

一、填空题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = \underline{\hspace{10em}}$.

2. 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{10em}}$.

3. 若 $\int \frac{f(u)}{u} du = F(u) + C$, 则 $\int f(x^\alpha) \frac{dx}{x} (\alpha > 1) = \underline{\hspace{10em}}$.

3'. 函数 $f(x) = x \ln x$ 在 $x=1$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(1)$ ($n \geq 2$) 是 $\underline{\hspace{10em}}$.

4. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x \cos x}{1+x^4} + |\sin^3 x| \right) dx = \underline{\hspace{10em}}.$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) = \underline{\hspace{10em}}.$

5'. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n}{n}}}{n} = \underline{\hspace{10em}}.$

二、选择题 (本题共 5 小题, 每小题 3 分, 满分 15 分)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - 1 - x$ 是较 $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ 的 ().

- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小 (C) 同阶无穷小 (D) 等价无穷小

2. 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 有 () 条渐近线.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 方程 $\ln x = \frac{x}{2e}$ 在 $(0, +\infty)$ 内有 () 个不同的实根

3'. 方程 $5x - 2 - \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = 0$ 在区间 $(0, 1)$ 内实根的个数是 ().

- (A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

4. 设函数 $f(x) = 1 - \ln(1+x^3)$, 则下列选项正确的是 ().

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点 (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点
 (C) $(0, 1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 (D) $f(0)=1$ 非极值, $(0, 1)$ 非曲线的拐点

4'. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f'(0)=0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x^2}=1$, 则下列选项正确的是() .

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 非 $f(x)$ 的极值, $(0, f(0))$ 非曲线 $y=f(x)$ 的拐点

5. 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = ()$.

(A) ∞

(B) π

(C) $\frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{\pi}{4}$

三、计算下列各题 (本题共 6 小题, 每小题 5 分, 满分 30 分)

1. 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - x \sin \frac{1}{x}\right)$.

1'. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{\ln(1+x^2)(e^x - 1)}$.

2. 设 $y = x^{\sin x} + e^y + \arcsin \frac{1}{3}$, 求 dy .

3. 设 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

4. 求不定积分 $\int \frac{x \, dx}{1 + \cos 2x}$.

5. 求定积分 $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2} \, dx$.

6. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (1+2t)^{\frac{1}{t}} dt}{1 - \cos x}$.

6'. 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$, 求 $\int_0^\pi f(x) \, dx$.

四、(本题满分 8 分) 试证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x > \frac{2x}{\pi}$. (提示从 $\frac{\sin x}{x} - \frac{2}{\pi} > 0$ 入手)

五、证明 (本题满分 8 分)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(x) \neq 0$, 证明 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $\frac{\int_a^b f(x) \, dx}{\int_a^b g(x) \, dx} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}$.

备选题 设 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内具有二阶导数, 且

$\int_1^2 f(x) \, dx = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+f(x)}{x-1} = 0$, 试证明存在 $\xi \in (0, 2)$ 使得 $f'(\xi) + f''(\xi) = 0$.

六、(本题共 2 小题, 每小题 6 分, 满分 12 分)

1. 求微分方程 $(x+1)y' + (x+2)y = 1$ 的通解.
- 1'. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x) \cos x + 2 \int_0^x \sin t f(t) dt = x+1$, 试求函数 $f(x)$.
2. 已知连续的凸曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线为 $y = 1$, 且其上任意一点 (x, y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$, 求该曲线 $y = y(x)$.

七、(本题共 3 小题, 每小题 4 分, 满分 12 分)

1. 求心形线 $r = a(1 + \cos\theta)$ ($a > 0$) 的全长.
2. 求星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ ($a > 0$) 所围图形的面积 .
3. 求曲线 $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$ 及 x 轴所围图形绕 x 轴旋转所形成的旋转体的体积.