《高等数学》第二章自测题 (2019. 10. 30)

一、 填空题（每小题 3 分，本题满分 15 分）

1. 设$f(t)\neq 0$处处可导，且 $f'(t)\neq 0$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(t+h)-f(t-3h)}=$ ________.

2. 设函数 $y=x(\sin x)^{\cos x}$, 则 $y'=$ ________.

3. $d($ ________ $)=\dfrac{1}{1+e^x}\,d(e^x)$.

4. 设 $x+y=\arctan y$, 则 $dy=$ ________.

5. 利用函数微分可以得到, $\sin x\approx$ ________ (当 $|x|<<1$时, x为弧度).

二、 选择题（每小题 3 分，本题满分 15 分）

1. 已知函数 $f(x)$在$x=1$处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$, 则 $f'(1)=($ $)$.

$(A)\ 0$ $(B)\ 1$ $(C)\ 2$ $(D)\ 4$

2. 就函数 $y=f(x)$而言，下列描述正确的 是 ( ).

(A) 可导性与连续性等价 (B) 可导但不一定可微

(C) 可导性与可微性等价 (D) 可微但不一定可导

3. 设$f(x)=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$, 则$f(x)$ 的不可导点的个数是 ( ).

(A) 0个 (B) 1个 (C) 2个 (D) 3个

4. 设 $f(x)$可导, 且 $f'(x_0)\neq\dfrac{1}{2}$, 则当$\Delta x\to 0$时, $f(x)$在x_0点处的微分dy是( ).

(A) 与Δx 是等价无穷小 (B) 与Δx 是同阶无穷小

(C) 比Δx 低阶的无穷小 (D) 比Δx 高阶的无穷小

5. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, 则$f^{(n)}(0)=($ $)$.

$(A)\ (-1)^n n!\ (1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$ $(B)\ (-1)^{n+1}n!(1-\dfrac{1}{2^{n+1}})$ $(C)\ (-1)^n\dfrac{n!}{2^{n+1}}$ $(D)\ (-1)^{n+1}\dfrac{n!}{2^{n+1}}$

三、求解下列问题（每小题 **5** 分，本题满分 **30** 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点处可微，求 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$.

2. 设 $y=1+xe^{xy}$，求 $y''(0)$.

3. 设 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 确定 y 是 x 的函数，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4. 设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\sin x$ 在点 $(0,0)$ 处相切，$a\neq 0$ 为常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty} nf(\dfrac{a}{n})$.

5. 判断 $f(x)=|x|e^{-x}$ 在 $x=0$ 点是否可导，说明理由.

6. 设 $y=f(x)$ 为单调函数，$x=\boldsymbol{g}(y)$ 为其反函数，已知 $f(1)=2$，$f'(1)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$f''(1)=1$，

求反函数的二阶导数 $\boldsymbol{g}''(2)$.

四、本题满分 **8** 分　设 $f(x)$ 满足：$\forall x,\ f(1+x)=2f(x)$，且 $f'(0)=3$，求 $f'(1)$.

五、本题满分 **8** 分　设 $f(x)=x^2\sin 2x$，求 $f^{(20)}(x)$.

六、本题满分 **8** 分　设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

七、本题满分 **8** 分　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<0\\ ax+b, & x\geq 0\end{cases}$，确定常数 a 与 b，使 $f(x)$ 处处可导.

八、本题满分 **8** 分　设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ x^3, & x\leq 0\end{cases}$，试讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续性. ◆