



## 《概率论与数理统计》自我测试卷 03

### 一、选择题：（每题2分，共20分）

1. 设  $A, B$  是两个互不相容的事件， $P(B) > 0$ ，则下列各式中一定成立的是

【      】.

(A)  $P(A) = 1 - P(B)$ ;

(B)  $P(A|B) = 0$ ;

(C)  $P(A|\bar{B}) = 1$ ;

(D)  $P(\overline{AB}) = 0$ .

2. 若函数  $y = f(x)$  是一随机变量  $X$  的概率密度函数，则一定成立的是 【      】.

(A)  $f(x)$  的定义域为  $[0, 1]$ ;

(B)  $f(x)$  的值域为  $[0, 1]$ ;

(C)  $f(x)$  为非负;

(D)  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续.

3. 设  $(X, Y)$  的联合分布律为

$Y$	0	1	2
$X$			
-1	$\frac{1}{15}$	$t$	$\frac{1}{5}$
1	$s$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若  $X$  和  $Y$  相互独立，则  $(s, t)$  取值 【      】.

(A)  $\left(\frac{2}{10}, \frac{1}{15}\right)$ ;

(B)  $\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{10}\right)$ ;

(C)  $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{15}\right)$ ;

(D)  $\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{10}\right)$ .

4. 若随机变量  $X$  与  $Y$  不相关，则与之等价的条件是 【      】.

(A)  $D(XY) = D(X)D(Y)$ ;

(B)  $D(X+Y) = D(X-Y)$ ;

(C)  $D(XY) \neq D(X)D(Y)$ ;

(D)  $D(X+Y) \neq D(X-Y)$ .

5. 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}$ ， $x \in (-\infty, +\infty)$ ，则服从

$N(0, 1)$  的随机变量是 【      】.



- (A)  $D(XY) = D(X)D(Y)$ ; (B)  $D(X+Y) = D(X-Y)$ ;  
(C)  $D(XY) \neq D(X)D(Y)$ ; (D)  $D(X+Y) \neq D(X-Y)$ .
6. 现有10张奖券, 其中8张为2元, 2张为5元. 某人从中随机地无放回抽取3张, 则此人所得奖金的数学期望为 【      】.
- (A) 6元; (B) 12元;  
(C) 7.8元; (D) 9元.
7. 设  $X_1, X_2, \dots, X_8$  和  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$  为分别来自两个正态总体  $N(-1, 2^2)$  及  $N(2, 5^2)$  的样本, 且相互独立,  $S_1^2$  和  $S_2^2$  分别为两个样本的样本方差, 则服从  $F(7, 9)$  分布的统计量是 【      】.
- (A)  $\frac{2S_1^2}{5S_2^2}$ ; (B)  $\frac{5S_1^2}{2S_2^2}$ ;  
(C)  $\frac{4S_2^2}{25S_1^2}$ ; (D)  $\frac{25S_1^2}{4S_2^2}$ .
8. 设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\sigma^2$  已知,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的一个样本, 则  $\mu$  的置信度为95%的置信区间是 【      】.
- (A)  $\left( \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \right)$ ; (B)  $\left( \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.025} \right)$ ;  
(C)  $\left( \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.05} \right)$ ; (D)  $\left( \bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.05}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{0.05} \right)$ .
9. 在假设检验中, 显著性水平  $\alpha$  是指 【      】.
- (A)  $P(\text{接受 } H_0 | H_0 \text{ 为假}) = \alpha$ ; (B)  $P(\text{接受 } H_1 | H_1 \text{ 为假}) = \alpha$ ;  
(C)  $P(\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 为真}) = \alpha$ ; (D)  $P(\text{拒绝 } H_1 | H_1 \text{ 为真}) = \alpha$ .
10. 设  $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline p & 0.3 & 0.7 \end{array}$ ,  $\begin{array}{c|cc} Y & 0 & 1 \\ \hline p & 0.3 & 0.7 \end{array}$ , 若  $X, Y$  相互独立, 则必有 【      】.
- (A)  $X=Y$ ; (B)  $P(X=Y)=1$ ;  
(C)  $P(X=Y)=0$ ; (D) 以上A、B、C都不对.



## 二、填空题：（每题2分，共16分）

11. 设  $A, B, C$  为三个随机事件，用  $A, B, C$  的运算关系表示事件： $A, B, C$  中不多于一个发生 = \_\_\_\_\_ .
12. 将红、黄、蓝3个球随机地放入4只盒子中，若每只盒子容球数不限，则有3只盒子各放一个球的概率是 \_\_\_\_\_ .
13. 已知  $P(A \cup B) = 0.8$  ,  $P(B) = 0.4$  ,  $P(A|\bar{B}) =$  \_\_\_\_\_ 则 .
14. 袋中有1个黑球、2个白球，从中任取2个，则取得黑球数  $X$  的分布函数  $F(x) =$  \_\_\_\_\_ .
15. 设  $X$  是区间  $[0, 1]$  上的连续型随机变量， $P(X \leq 0.3) = 0.8$  , 若  $Y = 1 - X$  , 则当常数  $c =$  \_\_\_\_\_ 时，有  $P(Y \leq c) = 0.2$  .
16. 设  $X$  和  $Y$  相互独立且都服从  $N(0, 1)$  , 则随机变量  $Z = 2X - 3Y + 1$  的概率密度函数  $f(z) =$  \_\_\_\_\_ .
17. 设  $X$  服从区间  $(-1, 1)$  内的均匀分布，则  $X$  和  $Y = |X|$  的相关系数  $\rho_{XY} =$  \_\_\_\_\_ .
18. 设假设检验中犯第I类错误的概率为  $\alpha$  , 犯第II类错误的概率为  $\beta$  , 为了同时减少  $\alpha$  和  $\beta$  , 只有 \_\_\_\_\_ .

## 三、计算题：（每题8分，共64分）

19. 设有两台机床加工同样的零件，第一台机床出废品的概率是0.03，第二台机床出废品的概率是0.02. 加工出来的零件混放在一起，并且已知第一台机床加工的零件比第二台机床多一倍. (1) 求任意取出的一个零件是合格品的概率；(2) 如果任意取出的一个零件经过检验后发现是废品，求它是第二台机床加工的概率.



20. (1) 设随机变量  $X$  的概率密度函数  $f(x) = \begin{cases} ax+b, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 且

$$P\left(X < \frac{1}{3}\right) = P\left(X > \frac{1}{3}\right), \text{ 求常数 } a \text{ 和 } b.$$

(2) 设随机变量  $X$  服从  $(0, 1)$  内的均匀分布, 求  $Y = -2\ln X$  的概率密度函数.

21. 设二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数

$$f(x, y) = \begin{cases} ce^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 确定常数  $c$ ;

(2) 讨论  $X, Y$  的独立性;

(3) 求  $P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 2)$ .



22. (1) 证明：在一次试验中，事件  $A$  发生的次数  $X$  的方差  $D(X) \leq \frac{1}{4}$ ；

(2) 设  $X$  为具有二阶矩的随机变量， $c$  为任意常数，问： $c$  为何值时，取  $E[(X-c)^2]$  最小值。

23. 设某一复杂的系统由  $n$  个相互独立的部件组成，每个部件的可靠性（即部件正常工作的概率）为 0.9，并且必须至少有 80% 的部件工作，才能使整个系统正常工作。问： $n$  至少为多少时才能使系统的可靠性不低于 0.95？



24. 已知随机变量  $X$  的概率密度  $f(x; \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, \theta > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$  , 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$

是来自总体  $X$  的一个样本, 求未知参数  $\theta$  的矩估计量和最大似然估计量.

25. 设随机变量  $X$  在区间  $(0, \theta)$  上服从均匀分布, 其中  $\theta$  未知.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个样本, 则  $\theta$  的最大似然估计量  $\hat{\theta} = X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . 确定  $c$ , 使得  $c\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计量.



26. (1) 从理论上分析得出结论：压缩机的冷却用水的温度  $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，升高的平均值不多于  $5^\circ\text{C}$ 。现测量了5台压缩机的冷却用水的升高温度分别是6.4、4.3、5.7、4.9、1.44，问：在显著水平  $\alpha = 0.05$  时，这组数据与理论上分析所得出的结论是否一致？
- (2) 已知纤维的纤度  $T \sim N(1.405, 0.048^2)$ 。现抽取了5根纤维，测得纤度为1.32、1.55、1.36、1.40、1.44，问：纤度的总体方差是否正常（取  $\alpha = 0.05$ ）？