

# **Variabel Kompleks (VARKOM)**

**Pertemuan 4 : Daerah dan lintasan pada bidang kompleks**

**Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT**

**Versi 02: Agustus 2018**

# Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah kali ini adalah menyampaikan teknik-teknik untuk menyatakan suatu wilayah dan batas wilayah, serta lintasan pada bidang kompleks.

Materi ini berguna dan menjadi landasan dari materi tentang integral lintasan pada bagian selanjutnya dari MK ini.

# Daftar Isi

**1 Bidang kompleks**

**2 Lintasan**

**3 Latihan**

# Bidang kompleks

- 1 Suatu variabel kompleks

$$z = x + yi$$

dapat mengambil sebarang nilai  $x$  dan  $y$ .

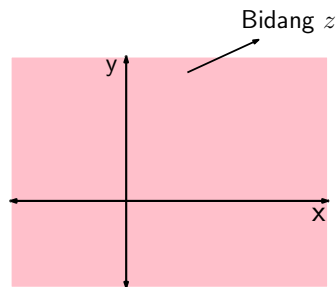
- 2 jika

$$-\infty < x < \infty$$

dan

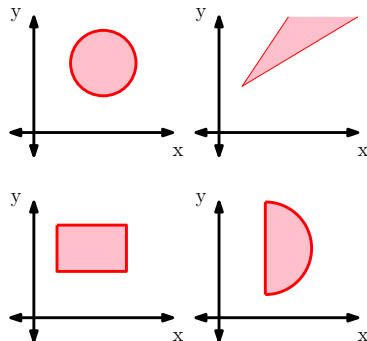
$$-\infty < y < \infty$$

maka variabel  $z$  mengambil bidang kompleks sepenuh.



# Bidang kompleks

- ➊ Kita dapat menyeleksi sebagian dari bidang kompleks sesuai keinginan.
- ➋ Penyeleksian dapat dilakukan dengan mengatur :
  - ➊ Modulus:  $|z|$
  - ➋ Argumen:  $\angle z$
  - ➌ Kombinasi Modulus dan Argumen
  - ➍ bagian Riil:  $Re(z)$
  - ➎ bagian Imaginer:  $Im(z)$
  - ➏ Kombinasi Riil dan Imaginer
  - ➐ Kombinasi semua



# Bidang Kompleks : notasi Polar

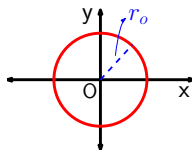
$z = |z| e^{i\angle z}$ ,  $|z|$  : modulus, dan  $\angle z$  : argumen.

Mengatur **Modulus**.

❶  $|z| = r_0$  menyatakan lingkaran:

❶ pusat di  $O(0,0)$

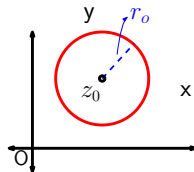
❷ jari-jari  $r_0$



❷  $|z - z_0| = r_0$  menyatakan lingkaran:

❶ pusat di  $z_0$

❷ jari-jari  $r_0$



# Bidang Kompleks : notasi Polar

Cobalah sketsa:

1  $|z| = 2$

2  $|z| = 3$

3  $|z - (1 + i)| = 2$

4  $|z + 1 + 2i| = 3$

# Bidang Kompleks : notasi Polar

Mengatur area dengan **Modulus**.

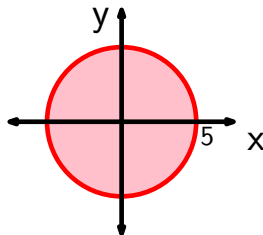
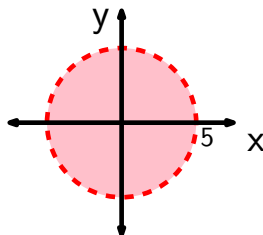
1 Area di dalam lingkaran dinyatakan dengan  $<$  atau  $\leq$

2 Area di luar lingkaran dinyatakan dengan  $>$  atau  $\geq$

3  $|z| < 5$

4  $|z| \leq 5$

5 Gambarkan :  $|x| \geq 5$





# Bidang Kompleks : notasi Polar

Gambarkan:

1  $|z - 1 - i| < 5$

2  $|z + i| \leq 5$

3  $|z + 1| \geq 5$

4 Variasi :  $|2z + 1| \geq 5^a$

---

<sup>a</sup>bagi kedua ruas dengan 2

# Bidang Kompleks : notasi Polar

Gambarkan:

1  $3 \leq |z| < 5$

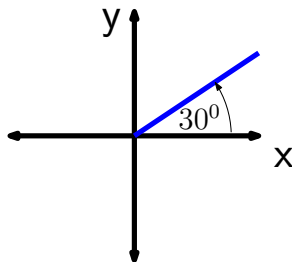
2  $3 \leq |z - 1 - i| < 5$

3  $3 \leq |z + 1| \leq 5$

# Bidang Kompleks : notasi Polar

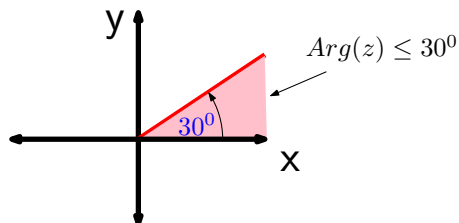
Mengatur **Argumen**.

- 1  $Arg(z) = \theta_0$
- 2 adalah garis lurus dengan sudut  $\theta_0$  terhadap sumbu riil.
- 3 Contoh :  $Arg(z) = 30^\circ$
- 4 Gambarkan :  $Arg(z) = 135^\circ$

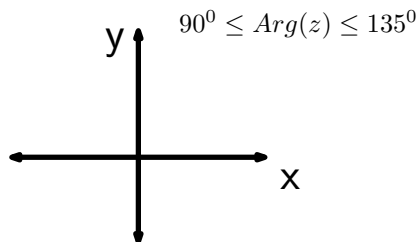


Dengan mengambil sudut argumen  $[0^{\circ} - 360^{\circ}]$ , gambarkan:

1  $\text{Arg}(z) \leq 30^{\circ}$

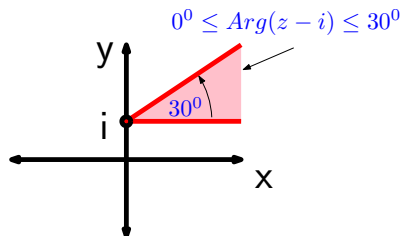


2  $90^{\circ} \leq \text{Arg}(z) \leq 135^{\circ}$

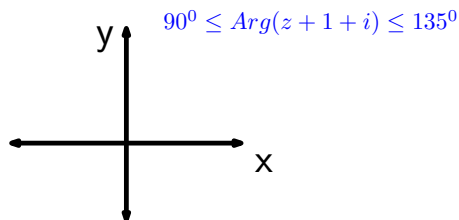


Menggeser pusat koordinat:

❶  $0 \leq \text{Arg}(z - i) \leq 30^\circ$

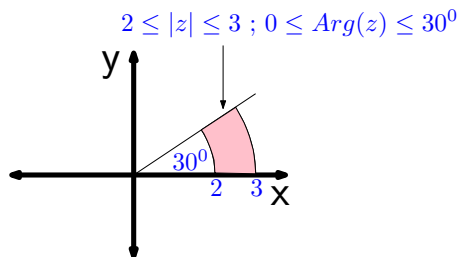


❷  $90 \leq \text{Arg}(z + 1 + i) \leq 135^\circ$

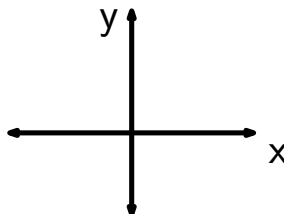


Mengatur **Modulus** dan **Argumen** sekaligus:

1  $2 \leq |z| \leq 3$  dan  
 $0^\circ \leq \text{Arg}(z) \leq 30^\circ$



2  $1 \leq |z| \leq 4$  dan  
 $90^\circ \leq \text{Arg}(z) \leq 135^\circ$



## Bidang Kompleks pada notasi Polar

Beberapa soal review:

Gambar:

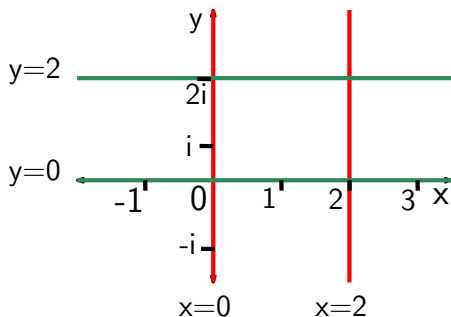
- ➊ Gambarkan :  $|z + 2| \leq 1$
- ➋  $|z + 2| \leq 1$  adalah area bagian dalam lingkaran tersebut.
- ➌ Gambarkan :  $|z + 1 - 2i|$
- ➍ Gambarkan :  
 $35^\circ \leq \arg(z) \leq 100^\circ$
- ➎ Gambarkan :  
 $35^\circ \leq \arg(z + 1 + i) \leq 100^\circ$

# Bidang kompleks pada notasi Kartesian

Mengatur **bagian** Riil dan **Imaginer**.

Jika  $z = x + iy$ , maka

- 1  $Re(z) = 0$  ekuivalen dengan  $x = 0$
- 2  $Re(z) = 2$  ekuivalen dengan  $2 = 0$
- 3  $Im(z) = 0$  ekuivalen dengan  $y > 0$
- 4  $Im(z) = 2$  ekuivalen dengan  $y = 2$



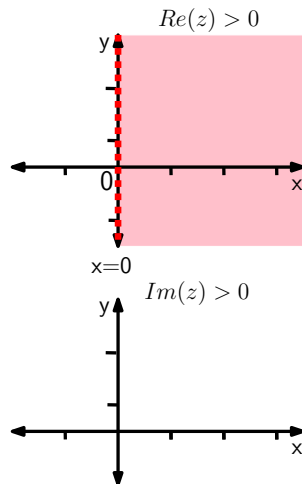


# Bidang kompleks pada notasi Kartesian

Seleksi area **bagian** Riil dan **Imaginer** dilakukan dengan tanda  $<$  atau  $\leq$  atau  $>$  atau  $\geq$ .

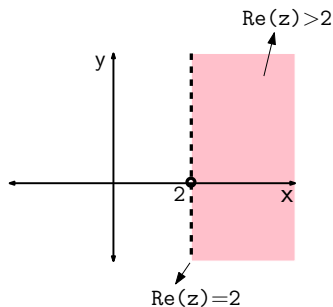
1  $Re(z) > 0$  ekuivalen dengan  $x > 0$

2  $Im(z) > 0$  ekuivalen dengan  $y > 0$



# Bidang kompleks pada notasi Kartesian

Mengatur **bagian Riil** dan **Imaginer**.



3 Gambar daerah :  $Re(z) > 2$

Cobalah :

5 Gambarkan daerah :  $Re(z) \leq 4$

6 Gambarkan daerah :  
 $2 < Re(z) \leq 4$

# Bidang kompleks

Gambarkan:

①  $\text{Im}(z) > -2$

②  $-2 < \text{Im}(z) \leq 4$

③  $-2 < \text{Im}(z) \leq 4$   
dan  $\text{Re}(z) > 2$

④  $-2 < \text{Im}(z) \leq 4$   
dan  
 $0 \leq \text{Re}(z) \leq 2$

1	2
3	4

# Bidang kompleks

Variasi lain:

➊ Gambarkan :

$$\operatorname{Re}(z + 2 + 3i) < 5$$

➋ Jawab :

$$\operatorname{Re}(z + 2 + 3i) < 5$$

$$\operatorname{Re}(x + yi + 2 + 3i) < 5$$

$$\operatorname{Re}((x + 2) + (y + 3i)) < 5$$

$$x + 2 < 5$$

$$x < 3$$

$$\text{Atau: } \operatorname{Re}(z) < 3$$

Gambar:

# Bidang kompleks

Variasi lain:

**1 Gambarkan :**

$$\text{Im}(2z - 3 + 4i) < 7$$

Gambar:

**2 Jawab :**

$$\text{Im}(2z - 3 + 4i) < 7$$

$$\text{Im}(2(x + yi) - 3 + 4i) < 7$$

$$\text{Im}(2x + 2yi - 3 + 4i) < 7$$

$$\text{Im}((2x - 3) + (2y + 4)i) < 7$$

$$2y + 4 < 7$$

$$y < \frac{3}{2}$$

$$\text{Atau: } \text{Im}(z) < \frac{3}{2}$$

# Bidang Kompleks

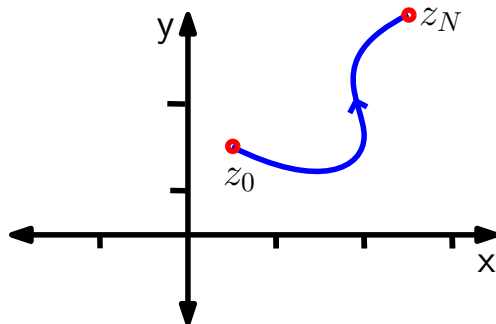
Variasi lain:

- 1 **Gambar** :  $Re(z) \leq Im(z)$
- 2 **Gambar** :  $Re(z) \leq Im(z + 3i)$
- 3 **Gambar** :  $Re(z + 5 + 3i) \leq Im(z + 4 - 2i)$

## Definisi Lintasan

Lintasan adalah arah tempat kedudukan berupa **kurva** pada bidang kompleks:

- 1 Memiliki titik awal ( $z_0$ )
- 2 Memiliki titik akhir ( $z_N$ )



## Persamaan parameterik lintasan

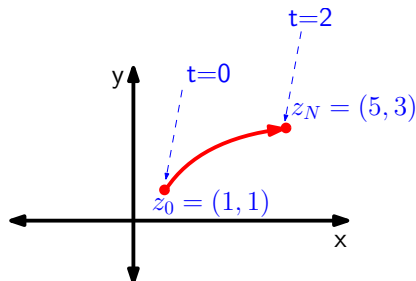
Cara termudah menyatakan lintasan adalah dengan persamaan parameterik:

- 1  $z = x + iy$
- 2  $x$  dan  $y$  adalah fungsi  $t$
- 3 Contoh:

$$z = (t^2 + 1) + i(t + 1)$$

dengan  $0 \leq t \leq 2$   
(misalnya)

- 4 titik awal :  $t = 0 \rightarrow$   
 $z_0 = 1 + i$ , titik ujung  
 $z_N = 5 + 3i$

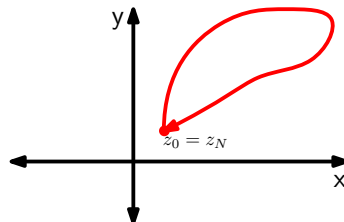
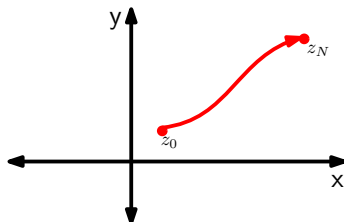




# Lintasan tertutup dan tidak tertutup

Lintasan tertutup : titik ujung bertemu titik awal  $z_N = z_0$

Lintasan tak tertutup : titik ujung tidak bertemu titik awal  $z_N \neq z_0$



# Lintasan pada bidang kompleks

**Gambarkan** lintasan pada bidang kompleks:

$$z = x(t) + iy(t)$$

dengan:

❶  $x(t) = -t + 1$

❷  $y(t) = t^3$

❸  $-1 \leq t \leq 1$

<b>t</b>	-1	-0,5	0	0.5	1
<b>z</b>	2-i	0,5-i0,125	...	...	...

## Latihan 4

Gambarkan:

➊  $1 \leq |z + 2i| \leq 3$

➋  $45^\circ \leq \text{Arg}(z + 1 + 2i) \leq 180^\circ$

➌  $|z| \leq 3$  dan  $\text{Re}(z) \geq 2$

➍  $z = x + iy$ , dengan

➊  $x = 2t$

➋  $y = \sqrt{4 - t}$

➌  $0 \leq t \leq 4$