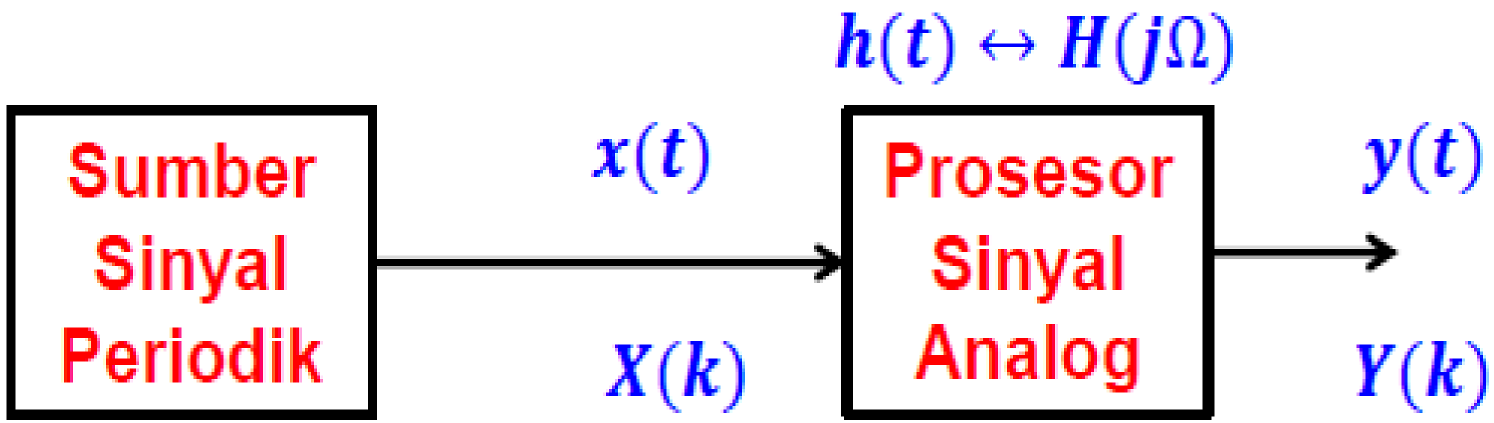
Pengolahan Sinyal Dalam Waktu Kontinyu

Bab 3. Deret Fourier

Elektronika Analog



Analisis dan Sintesis

Dosen:

Suhartono Tjondronegoro

Isi Kuliah

- Bab 0. Pendahuluan.
- Bab 1. Sinyal Waktu Kontinyu.
- Bab 2. Sistem Waktu Kontinyu.
- **Bab 3. Deret Fourier.**
- Bab 4. Transformasi Fourier.
- Bab 5. Transformasi Laplace.
- Bab 6. Pengantar Filter Analog.
- Bab 7. Pengantar Sistem Umpan Balik Linier.

Bab 4. Deret Fourier Waktu Kontinyu

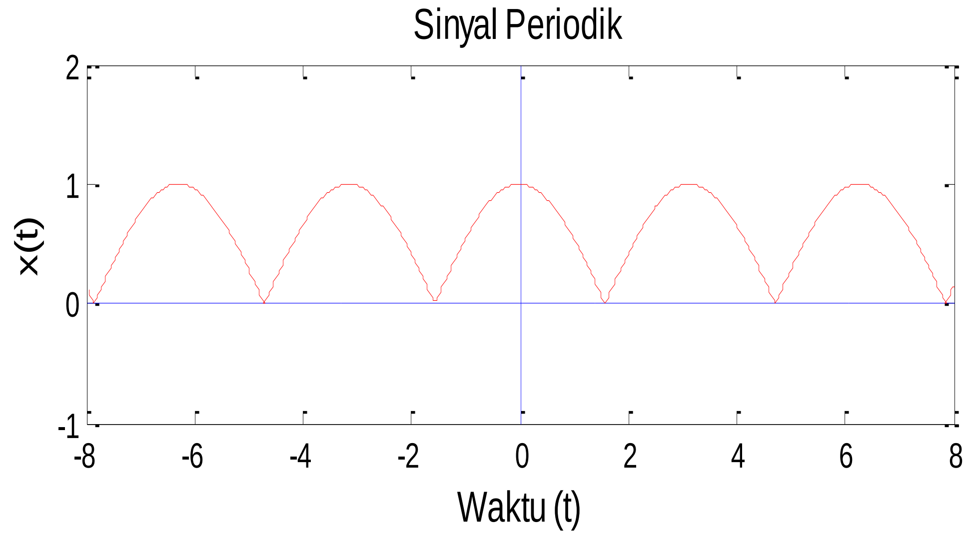
- Sinyal Periodik Waktu Kontinyu.
- Deret Fourier Waktu Kontinyu (DFWK).
- Konvergensi DFWK.
- Perhitungan Koefisien DFWK.
- Perhitungan Koefisien DFWK dengan Inspeksi.
- DFWK Invers.
- Representasi DFWK untuk gelombang segi-empat.
- Deret Fourier Trigonometri untuk Sinyal Periodik.
- Pendekatan gelombang segi-empat.
- Rangkaian RC dengan masukan sinyal periodik.
- Sifat-Sifat DFWK

Sinyal Periodik Waktu Kontinyu (1)

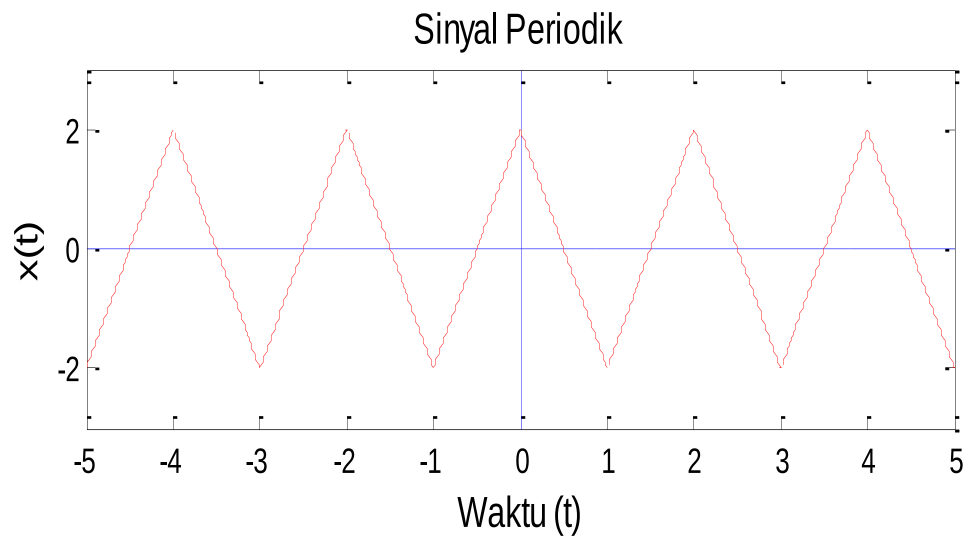
- Sinyal periodik $x(t)$ adalah suatu fungsi waktu yang memenuhi kondisi $x(t) = x(t + T) \quad untuk\ semua\ t$, dimana T adalah konstanta positif.
- Bila kondisi ini dipenuhi untuk $T = T_0$, maka kondisi juga dipenuhi oleh $T = 2T_0$, $3T_0$, $4T_0$, ...
- Nilai terkecil T yang memenuhi $x(t) = x(t + T)$ disebut perioda fundamental sinyal $x(t)$.
- Perioda fundamental T mendefinisikan durasi satu siklus penuh sinyal $x(t)$.
- Frekuensi fundamental $f = \frac{1}{T}$ dalam hertz (Hz).
- Frequensi angular $\Omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ dalam radians per detik.

Sinyal Periodik Waktu Kontinyu (2)

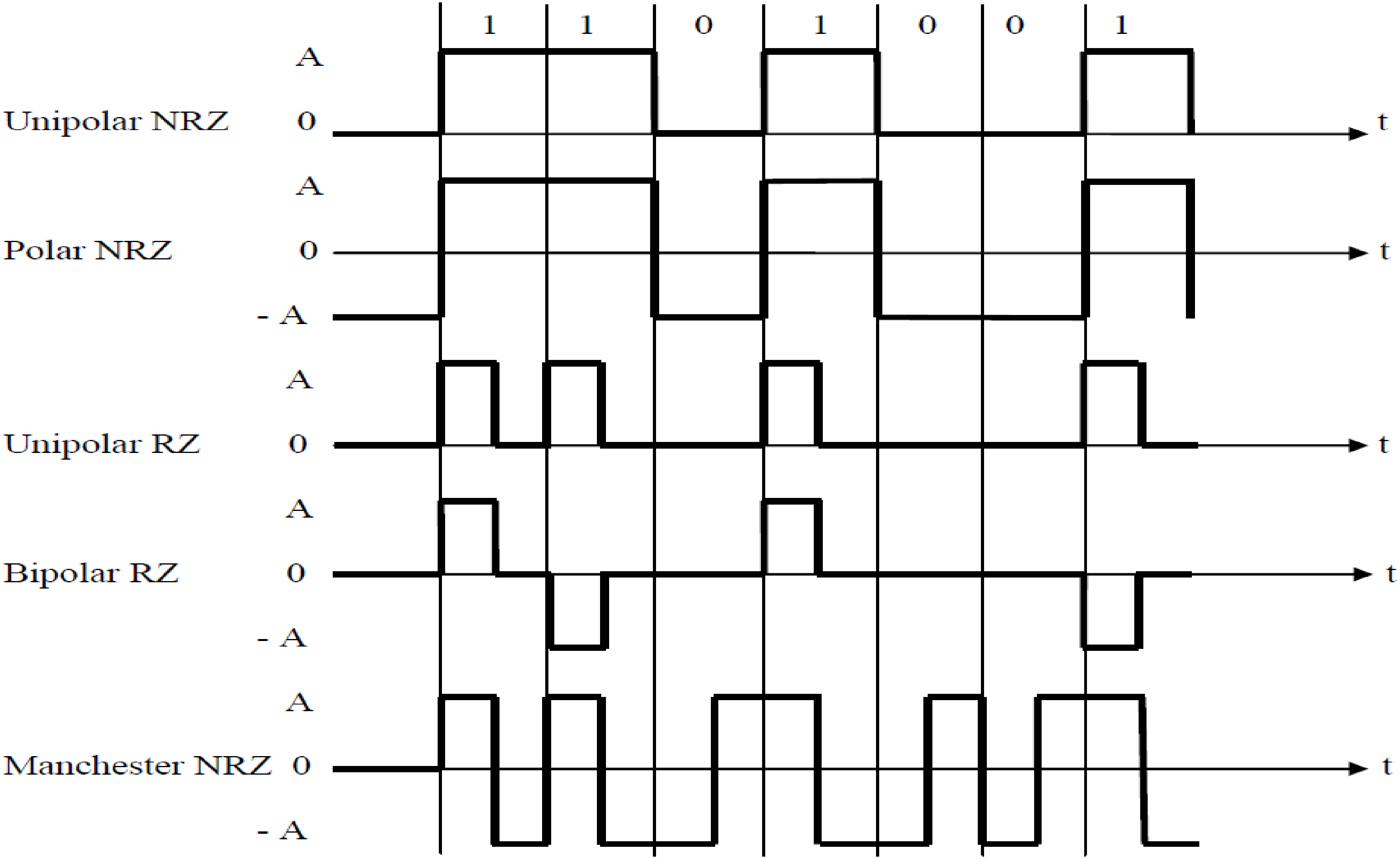
- Gelombang $abs(\cos t)$
- $x(t) = x(t+T)$
- $x(t) = \text{abs}(\cos t)$
- Diselang: $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}.$



- Gelombang segitiga
- $x(t) = x(t+T)$
- $x(t) = \text{segitiga}(t)$
- Diselang: $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}.$



Formats Pensinyalan Biner



Deret Fourier (DF) Waktu Kontinyu (1)

- Sinyal periodik waktu kontinyu direpresentasikan dengan Deret Fourier (DF)
- DF sinyal $x(t)$ dengan perioda fundamental T dan frekuensi fundamental $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, dinyatakan dengan persamaan:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\Omega_0 t} \qquad (3.1)$$

dimana

$$X[k] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \qquad (3.2)$$

- $X[k]$ adalah koefisien DF sinyal $x(t)$.
- Pasangan DF $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k]$
- Bentuk DF yang dinyatakan dengan persamaan (3.1) dan (3.2) disebut **DF eksponensial**.

Deret Fourier (DF) Waktu Kontinyu (2)

- Koefisien DF $X[k]$ dikenal sebagai representasi kawasan frekuensi sinyal $x(t)$, karena tiap koefisien DF dikaitkan dengan satu sinusoid kompleks dengan frekuensi berbeda.
- Variabel k menentukan frekuensi sinusoid kompleks yang terkait dengan $X[k]$.
- Representasi DF sering dipakai di-engineering untuk melakukan analisa pengaruh sistem-sistem terhadap sinyal periodik.

DF Trigonometri untuk Sinyal Periodik (1)

- Untuk sinyal $x(t)$ periodik dan riil, maka

$$x(t) = B[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \{B[k]\cos(k\Omega_0 t) + A[k]\sin(k\Omega_0 t)\}$$

dimana

$$B[0] = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

$$B[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\Omega_0 t)\,dt$$

$$A[k] = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\Omega_0 t)\,dt$$

DF Trigonometri untuk Sinyal Periodik (2)

- Kita lihat bahwa $B[0] = X[0]$, me-representasikan nilai rata-rata sinyal (dalam waktu).
- $B[k] = X[k] + X[-k]$
- $A[k] = j(X[k] - X[-k])$

Konvergensi Deret Fourier

- Kondisi Dirichlet:
  - $x(t)$ nilainya terbatas.
  - $x(t)$ mempunyai jumlah maxima dan minima terbatas dalam satu perioda.
  - $x(t)$ mempunyai jumlah diskontinyuitas terbatas dalam satu perioda.

Perhitungan Koefisien Deret Fourier

- Perhitungan Langsung:

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

- Mendapatkan $X[k]$ dengan cara inspeksi:
  - Bila $x(t)$ dapat dinyatakan dalam besaran sinusoid, maka lebih mudah mendapatkan $X[k]$ dengan cara inspeksi.
  - Methoda inspeksi didasarkan kepada penjabaran sinusoid riil dalam besaran sinusoid kompleks, dan membandingkan tiap besaran sinusoid kompleks ke besaran terkait di-persamaan (3.1).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\Omega_0 t}$$

Perhitungan Langsung (1)

- DF eksponensial:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\Omega_0 t}$$

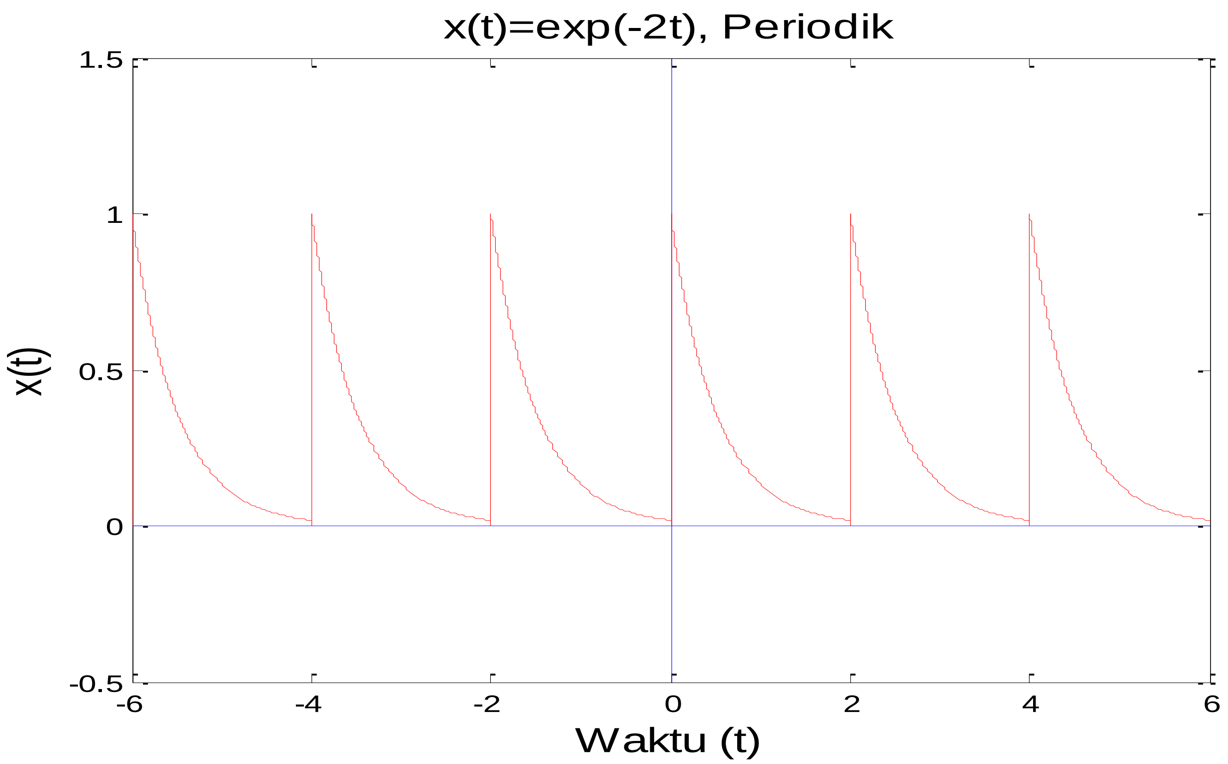
- DF trigonometri:

$$x(t) = B[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \{B[k]\cos(k\Omega_0 t) + A[k]\sin(k\Omega_0 t)\}$$

- $B[0] = X[0$
- $B[k] = X[k] + X[-k]$
- $A[k] = j(X[k] - X[-k])$

Perhitungan Langsung (2)

- Tentukan koefisien DF untuk sinyal $x(t)$



- Perioda $x(t)$ adalah $T = 2$, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{2} = \pi$

Perhitungan Langsung (3)

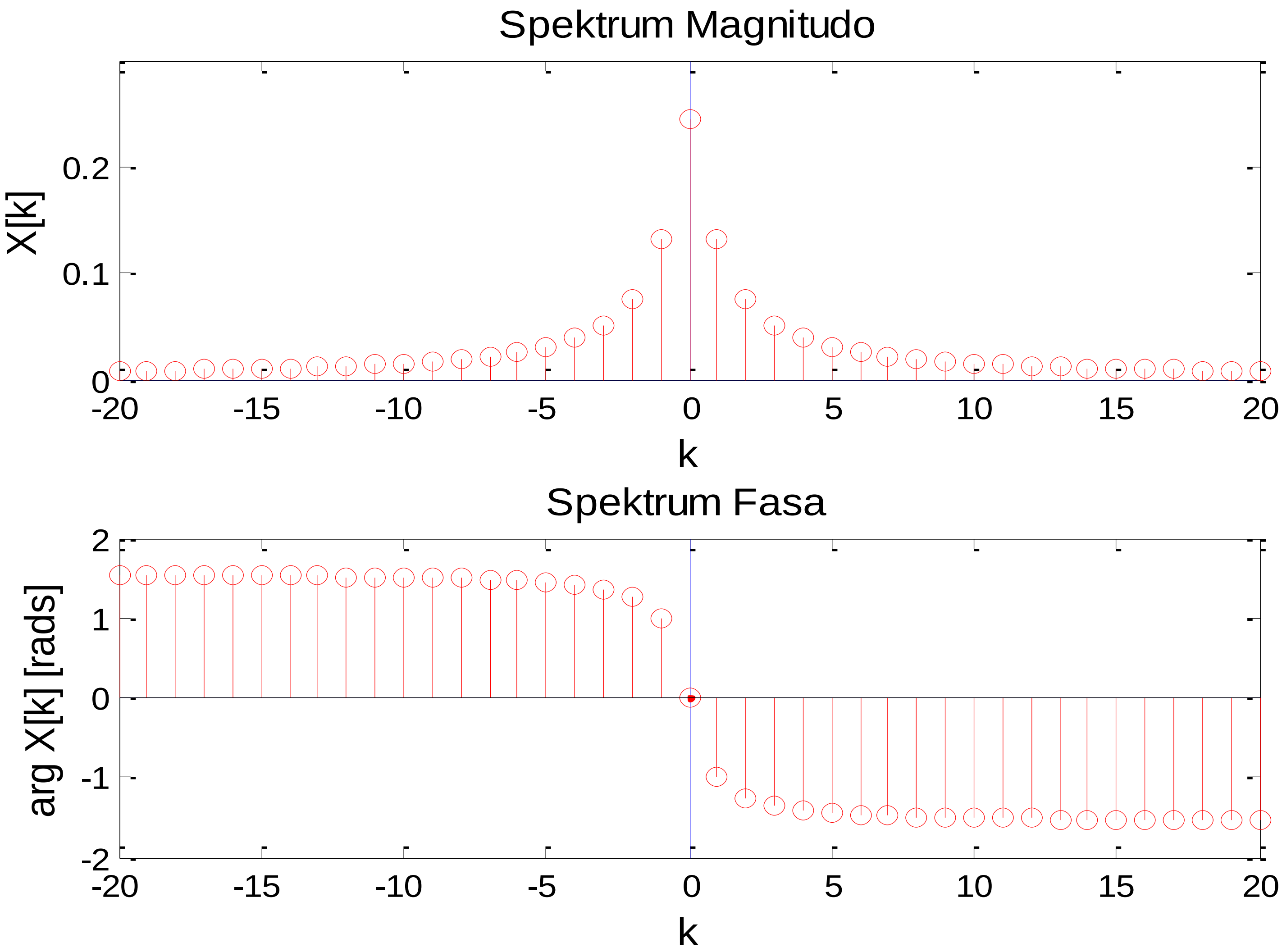
- $x(t) = e^{-2t}, 0 \le t \le 2$

$$X[k] = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-2t}e^{-jk\pi t}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t}dt$$

$$X[k] = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t}dt$$

- $X[k] = \frac{-1}{2(2+jk\pi)} e^{-(2+jk\pi)t}\Big|_0^2$
- $X[k] = \frac{1}{4+jk2\pi}(1 - e^{-4}e^{-jk2\pi})$
- $X[k] = \frac{1-e^{-4}}{4+jk2\pi}$, since $e^{-jk2\pi} = 1$, $0 < k < \infty$

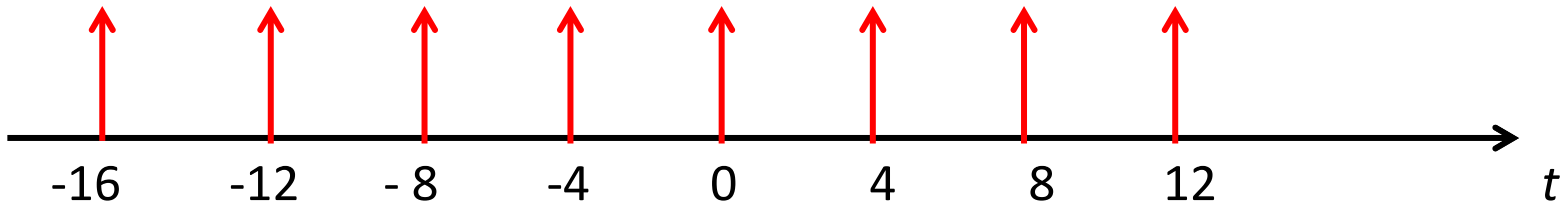
Perhitungan Langsung (4)



Koefisien DF untuk Deretan Impuls-Impuls (1)

- Tentukan koefisien DF untuk sinyal terlihat pada gambar dibawah ini:

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4l)$$



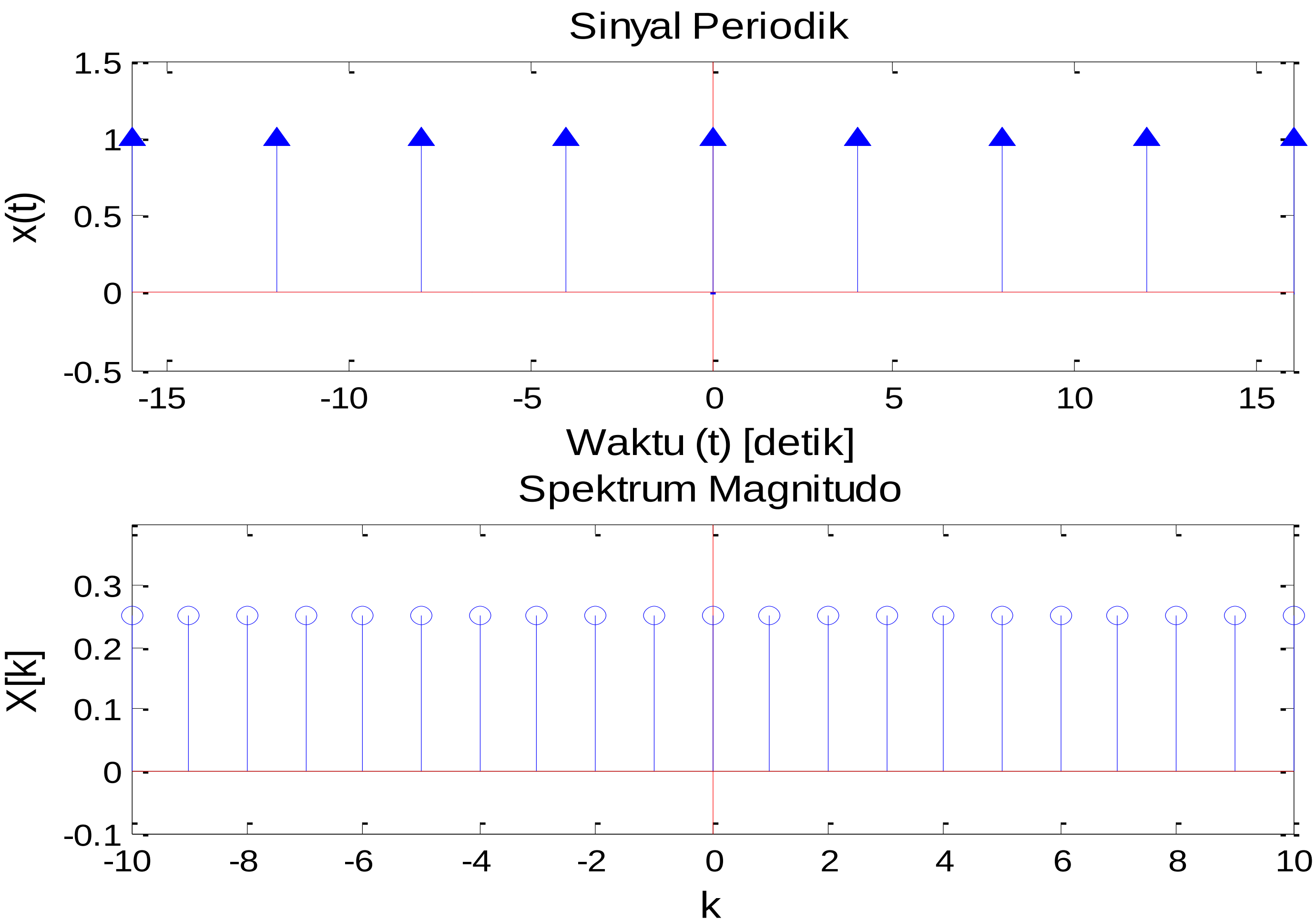
- Perioda fundamental sinyal $x(t)$ adalah $T = 4$, dan tiap perioda sinyal ini mengandung satu impuls.
- Sinyal $x(t)$ adalah simetris genap:

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} \delta(t)e^{-jk\frac{2\pi}{2}t}dt$$

- $X[k] = \frac{1}{4}$. Spektrum magnitudo adalah konstant dan spektrum phasa adalah nol.

Koefisien DF untuk Deretan Impuls-Impuls (2)

- **Deretan impuls-impuls dan spektrum-nya:**

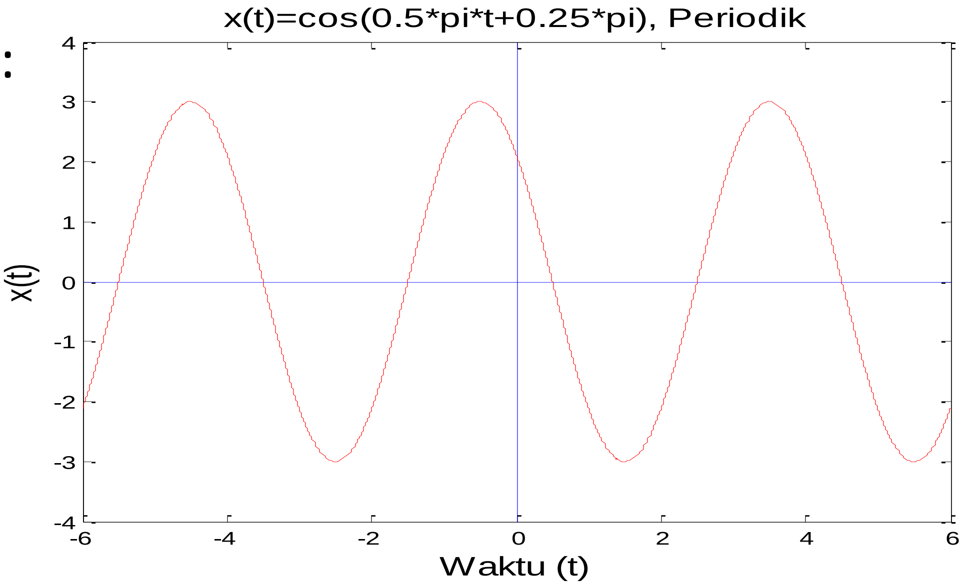


Perhitungan Koefisien DF, Cara Inspeksi (1)

- Tentukan representasi DF sinyal:

  $x(t) = 3\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})$

  memakai metoda inspeksi.



- $\Omega_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{4}$,
- perioda fundamental $x(t)$ adalah $T = 4$.

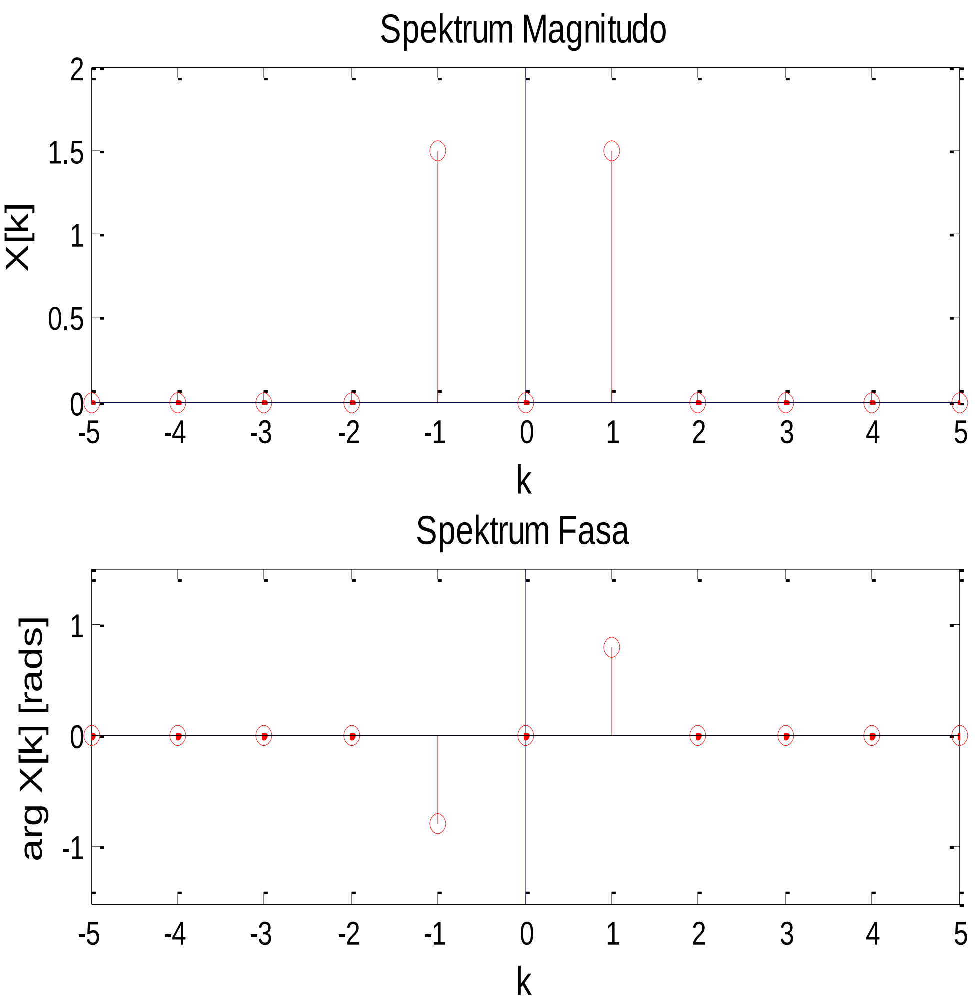
Persamaan: $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k)e^{jk\Omega_0 t}$$

- Memakai rumus Euler: $x(t) = 3\,\dfrac{e^{j\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{4}\right)}}{2}$
- $x(t) = \frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{\pi}{2}t} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j\frac{\pi}{2}t}$

Perhitungan Koefisien DF, Cara Inspeksi (2)

- $X[k] = \begin{cases} \frac{3}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}} & k = -1 \\ \frac{3}{2} e^{j\frac{\pi}{4}} & k = 1 \\ 0 & nilai\ lain \end{cases}$

- Spektrum Magnitudo
- dan Spektrum phasa



DF Invers (1)

- Dapatkan sinyal dikawasan waktu $x(t)$ yang terkait dengan koefisien DF $X[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j\frac{k\pi}{20}}$. Diasumsikan bahwa perioda fundamental adalah $T = 2$.
- Solusi: masukkan nilai-nilai $X[k]$ dan $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ ke:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\Omega_0 t}$$

- Menghasilkan:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{j\frac{k\pi}{20}} e^{jk\pi t} + \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} e^{j\frac{k\pi}{20}} e^{jk\pi t}$$

DF Invers (2)

- Perhitungan:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{j\frac{k\pi}{20}} e^{jk\pi t} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^l e^{-j\frac{l\pi}{20}} e^{-jl\pi t}$$

- Diperoleh:

$$x(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right) e^{j\left(\pi t + \frac{\pi}{20}\right)}} + \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right) e^{-j\left(\pi t + \frac{\pi}{20}\right)}} - 1$$

$$x(t) = \frac{3}{5 - 4cos\left(\pi t + \frac{\pi}{20}\right)}$$

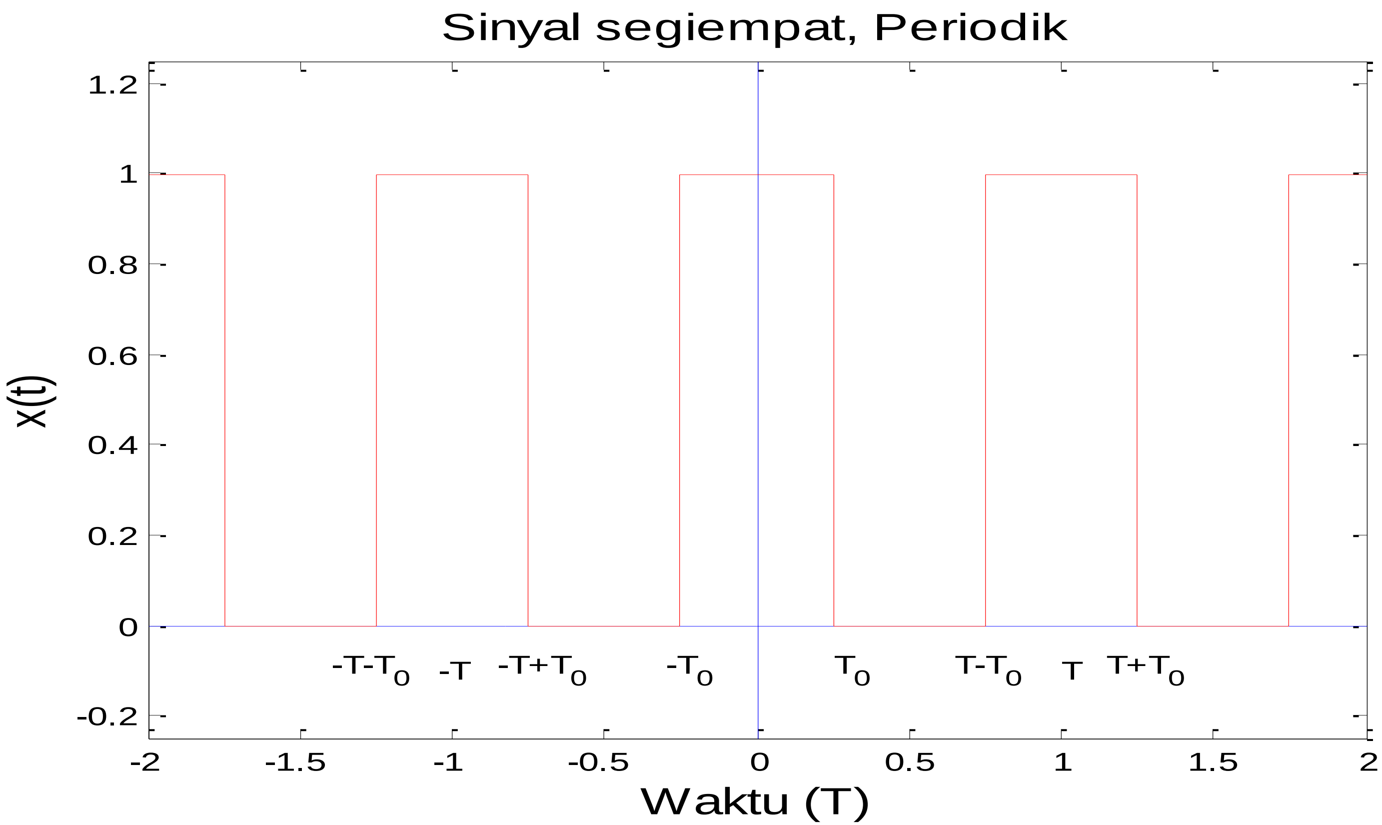
- Pasangan DF:

$$x(t) = \frac{3}{5 - 4cos\left(\pi t + \frac{\pi}{20}\right)} \overset{DF,\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{j\frac{k\pi}{20}}$$

- $\Omega_0 = \pi$ rad/detik.

DF Gelombang Segi-Empat (1)

- Tentukan representasi DF gelombang segi-empat:



- Solusi: Perioda adalah T, dimana $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

DF Gelombang Segi-Empat (2)

- Karena sinyal $x(t)$ simetri genap, maka perhitungan:

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

- Integrasi dilakukan pada selang: $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$.

$$X[k] = \frac{1}{T}\int_{-T_0}^{T_0} e^{-jk\Omega_0 t}dt = \frac{-1}{Tjk\Omega_0}e^{-jk\Omega_0 t}\Big|_{-T_0}^{T_0}, \qquad k \neq 0$$

$$X[k] = \frac{2}{Tk\omega_0}\left(\frac{e^{jk\Omega_0 T_0} - e^{-jk\Omega_0 T_0}}{2j}\right), \qquad k \neq 0$$

$$X[k] = \frac{2sin(k\Omega_0 T_0)}{Tk\Omega_0}, \qquad k \neq 0$$

DF Gelombang Segi-Empat (3)

$$X[k] = \frac{2sin(k\Omega_0 T_0)}{Tk\Omega_0}, \qquad k \neq 0$$

Untuk $k = 0$: $$X[0] = \frac{1}{T}\int_{-T_0}^{T_0} dt = \frac{2T_0}{T}$$

Memakai aturan L'Hopital's:

$$\lim_{k\to 0}\frac{2sin(k\Omega_0 T_0)}{Tk\Omega_0} = \frac{2T_0}{T}$$

- $X[k]$ nilainya riil, dengan memakai $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

Diperoleh $$X[k] = \frac{2sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_0\right)}{k2\pi}$$

DF Gelombang Segi-Empat (4)

- **Bentuk Eksponensial:**

$$X[k] = \frac{2\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_0\right)}{k2\pi}, \qquad k \neq 0$$

$$X[0] = \frac{2T_0}{T}$$

- **DF Trigonometri:**

$$B[0] = X[0] = \frac{2T_0}{T}$$

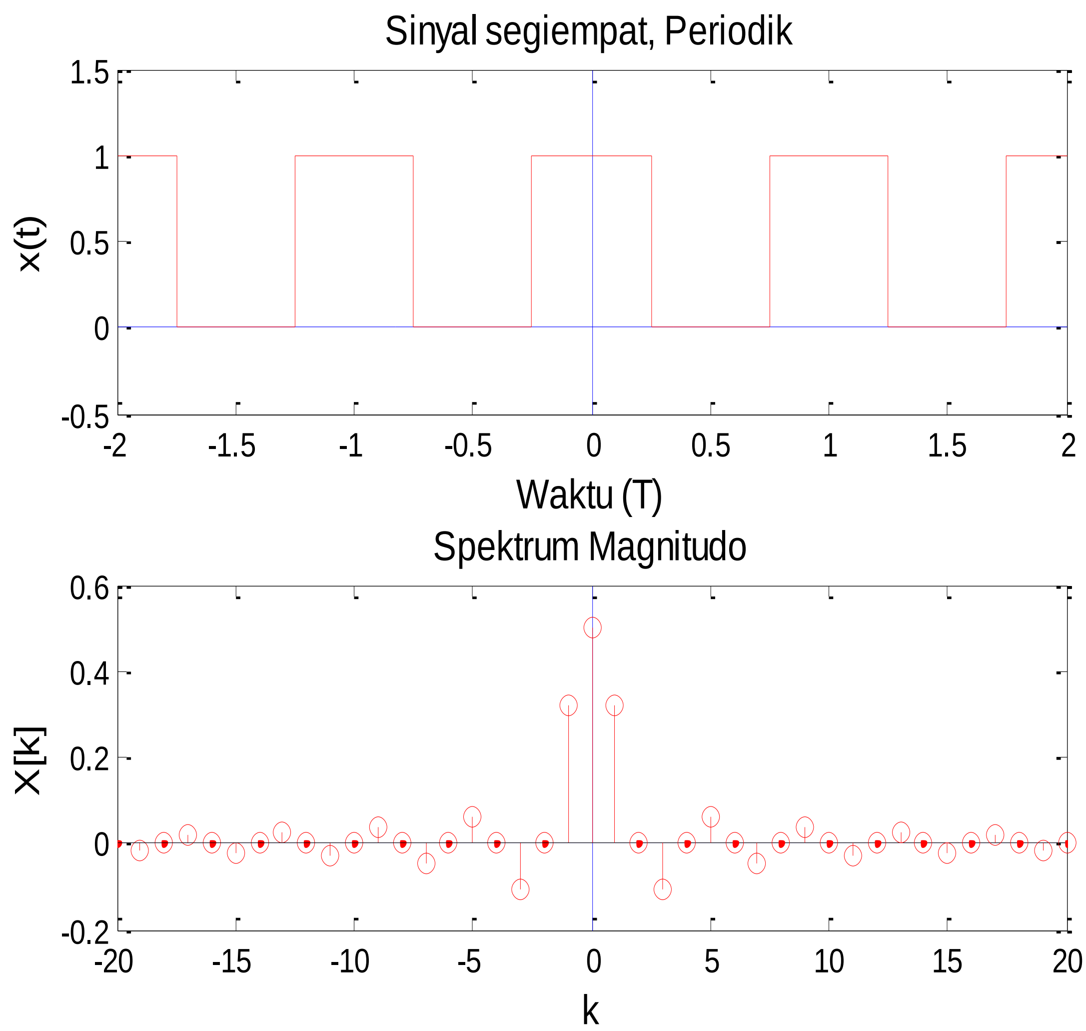
$$B[k] = X[k] + X[-k] = \frac{2\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_0\right)}{k\pi}, \qquad k \neq 0$$

$$A[k] = 0 \;\; karena\; x(t)\; fungsi\; genap$$

$$\text{Maka } x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B[k]\cos(k\Omega_0 t)$$

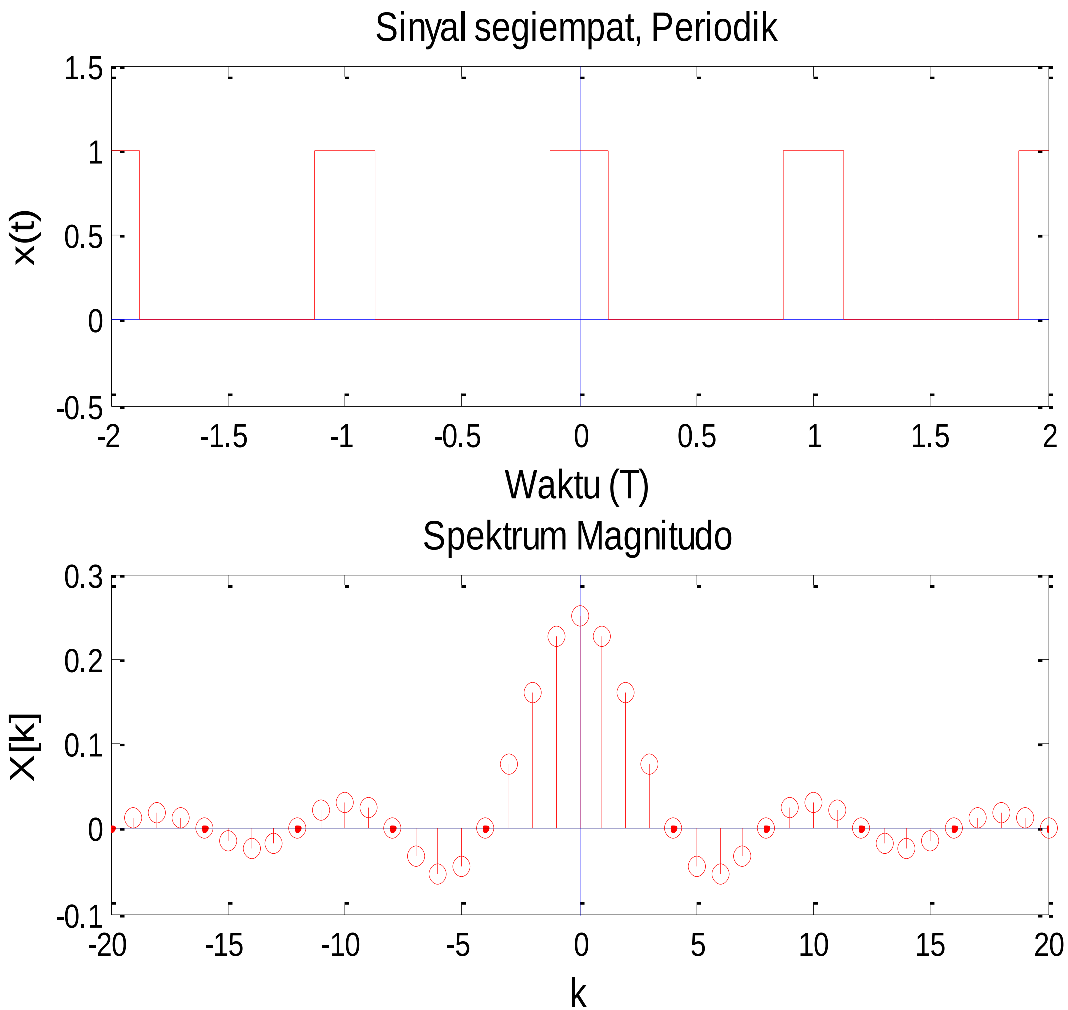
DF Gelombang Segi-Empat (5)

- $\frac{T_0}{T} = \frac{1}{4}$
- $X[k] = \frac{2\sin(0{,}5\pi k)}{k2\pi}$, $k \neq 0$
- $X[0] = 0{,}5$



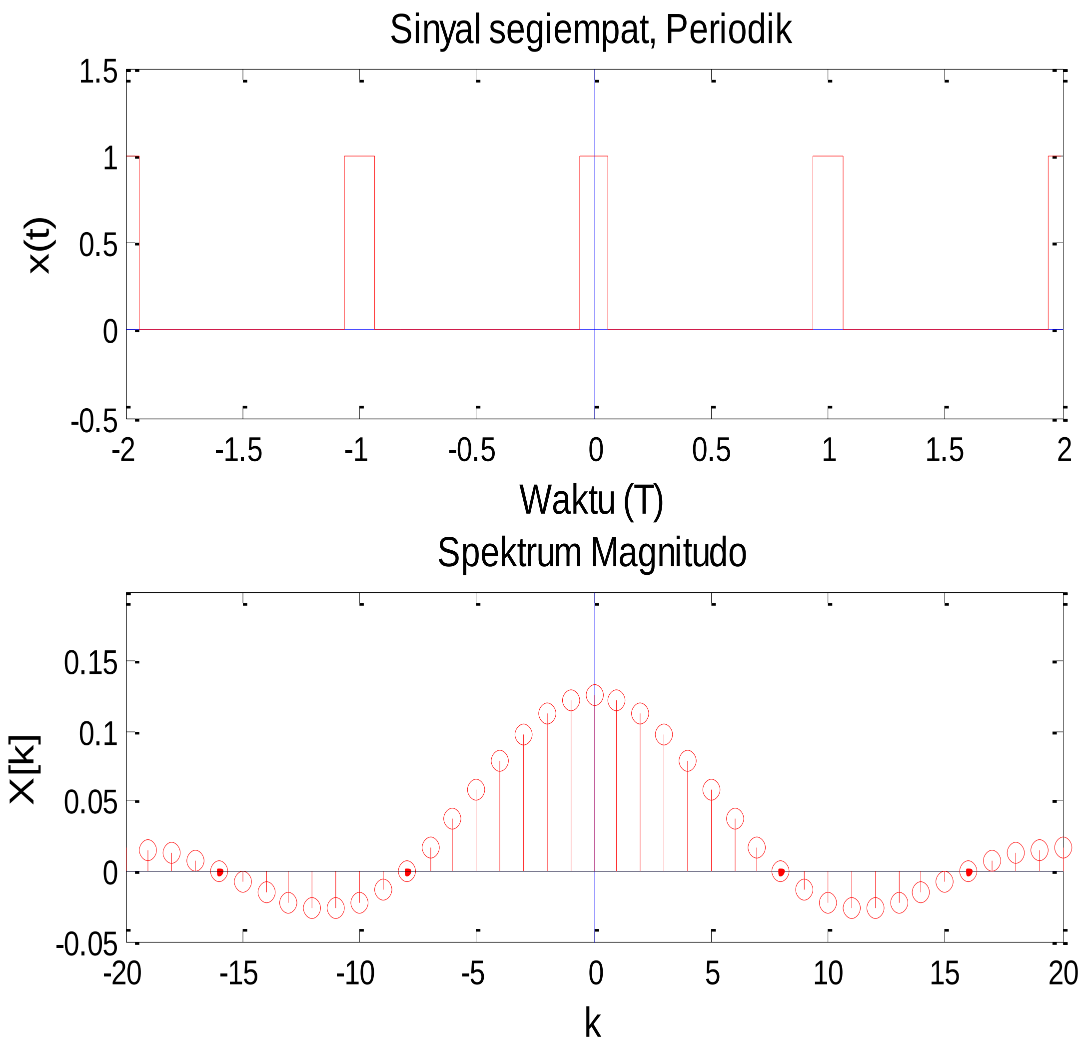
DF Gelombang Segi-Empat (6)

- $\frac{T_0}{T} = \frac{1}{8}$
- $X[k] = \frac{2\sin(0{,}25\pi k)}{k2\pi}$, $k \neq 0$
- $X[0] = 0{,}25$

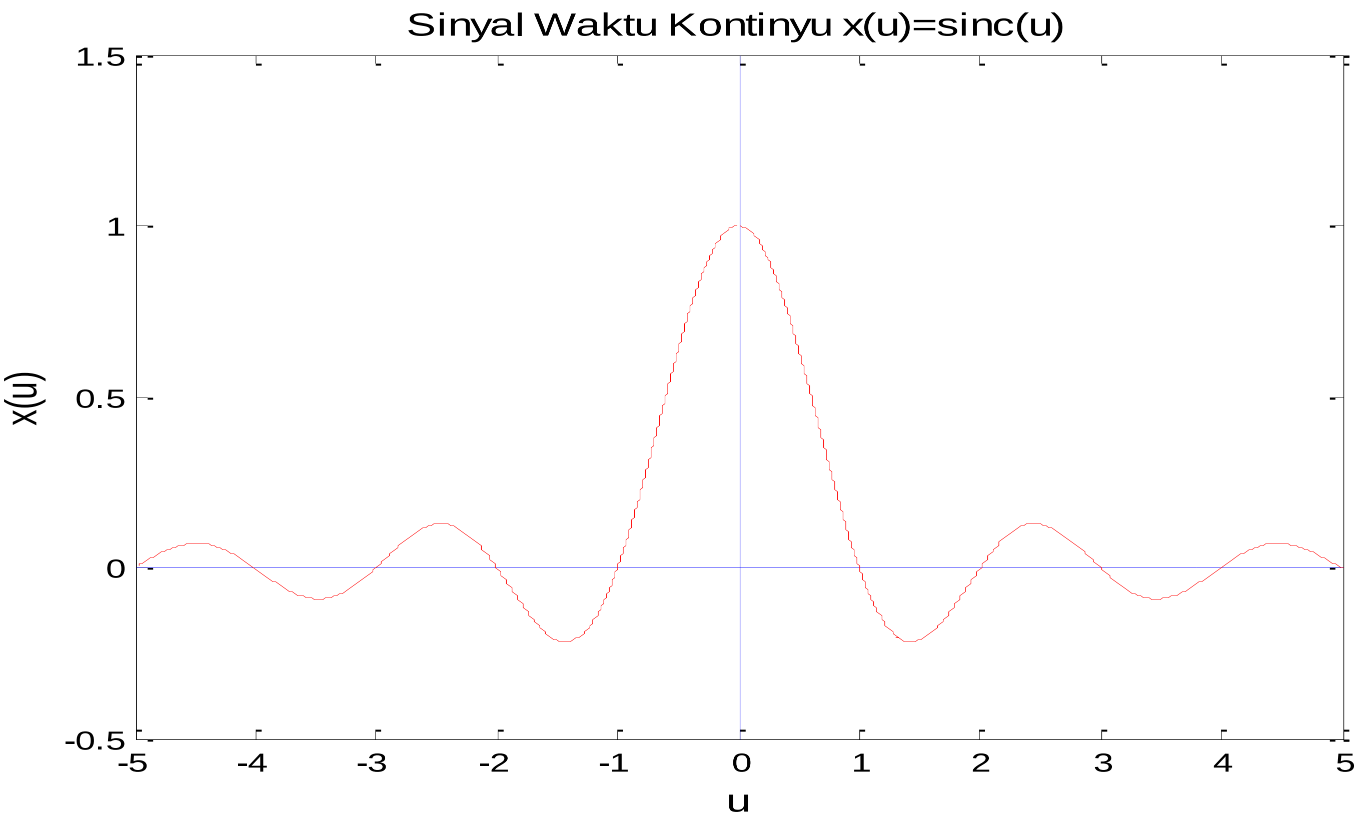


DF Gelombang Segi-Empat (7)

- $\frac{T_0}{T} = \frac{1}{16}$
- $X[k] = \frac{2\sin(0{,}125\pi k)}{k2\pi}$, $k \neq 0$
- $X[0] = 0{,}125$



Fungsi $\text{sinc}(u) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}$



$$X[k] = \frac{2\sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_0\right)}{k2\pi} = \frac{2T_0}{T}\frac{\sin\left(\pi\frac{k2T_0}{T}\right)}{\pi\frac{k2T_0}{T}} = \frac{2T_0}{T}\frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = \frac{2T_0}{T}\text{sinc}\left(k\frac{2T_0}{T}\right)$$

Pendekatan "Partial-Sum" Gel. Segi-Empat (1)

- **Exponential FS**:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\Omega_0 t} \qquad \text{atau}$$

Trigonometric FS: untuk sinyal riil $x(t)$

$$x(t) = B[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \{B[k]\cos(k\Omega_0 t) + A[k]\sin(k\Omega_0 t)\}$$

- **Pendekatan "partial-sum":**

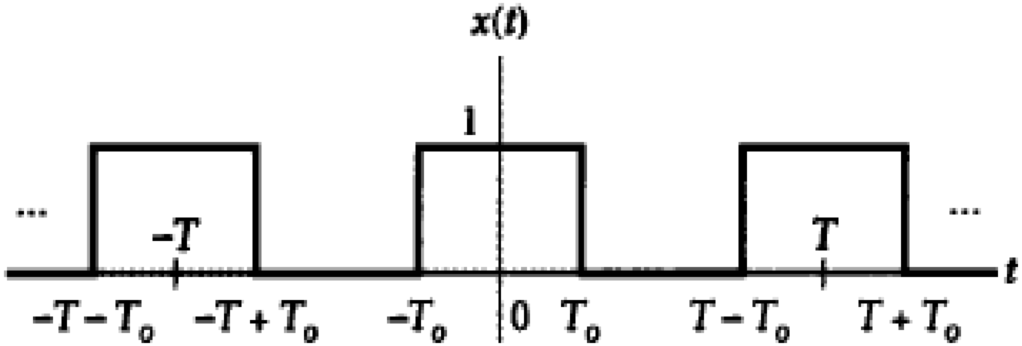
$$\hat{x}_J(t) = \sum_{k=-J}^{J} X[k]e^{jk\Omega_0 t}$$

Atau untuk sinyal $x(t)$ riil dan fungsi genap:

$$\hat{x}_J(t) = \sum_{k=0}^{J} B[k]\cos(k\Omega_0 t)$$

Contoh "Partial-Sum" Gel. Segi-Empat (1)

- Perhatikan gelombang segi-empat dengan $T = 1$ dan $\frac{T_0}{T} = \frac{1}{4}$:

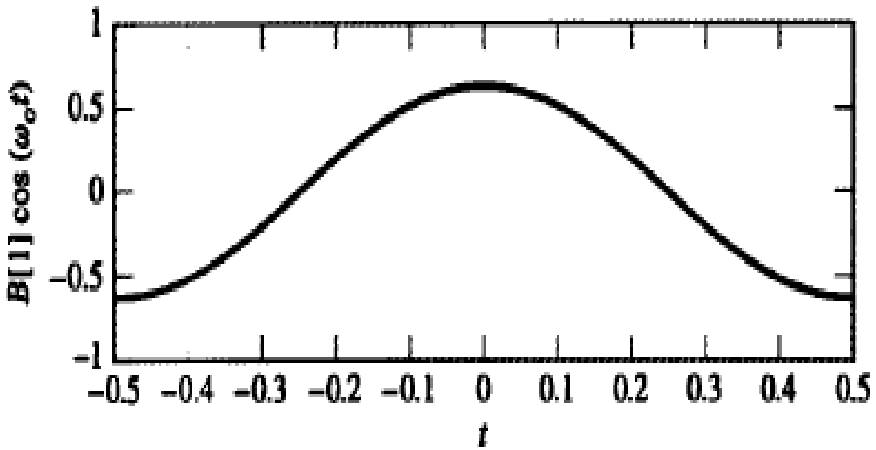


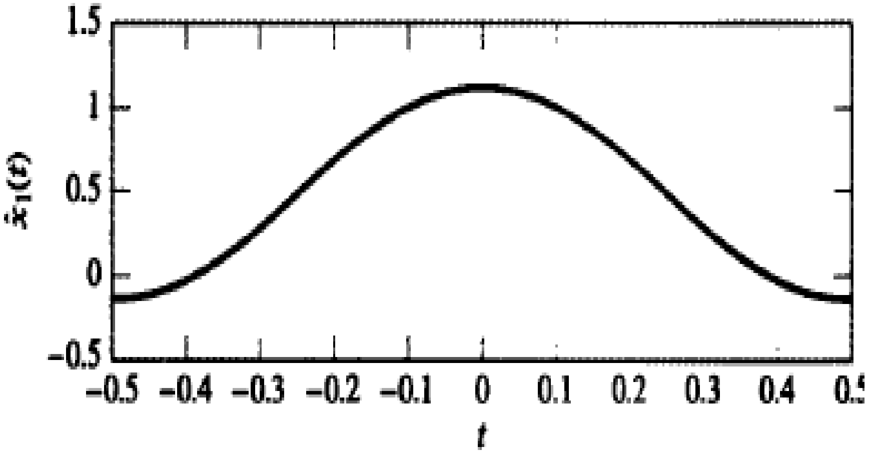
- **Trigonometric FS**:
- Untuk gelombang segi-empat $x(t)$ dengan $T = 1$ and $\frac{T_0}{T} = \frac{1}{4}$:

$$\hat{x}_J(t) = B[0] + \sum_{k=1}^{J} B[k] \cos(k\Omega_0 t)$$

Contoh “Partial-Sum” Gel. Segi-Empat (2)

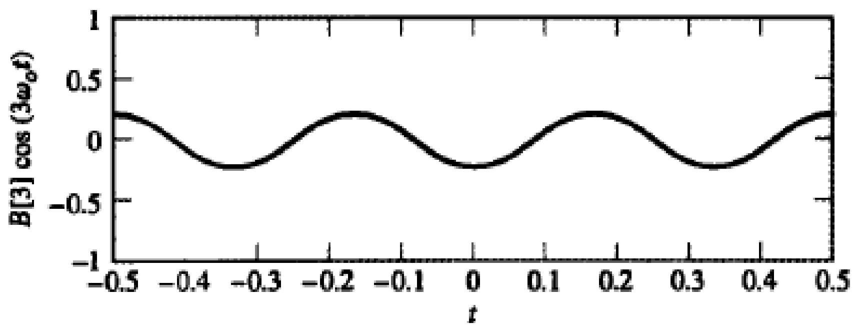
- We have: $B[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0 \\ \left(\frac{2}{k\pi}\right)(-1)^{\frac{k-1}{2}}, & k \text{ odd}, \\ 0, & k \text{ even} \end{cases}$
- $J = 1$: $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\Omega_0 t)$

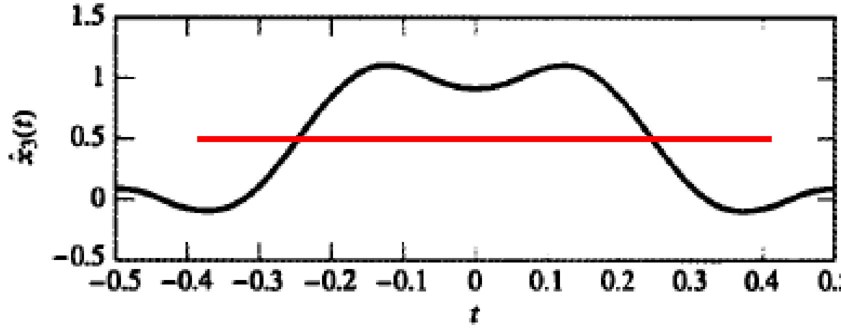




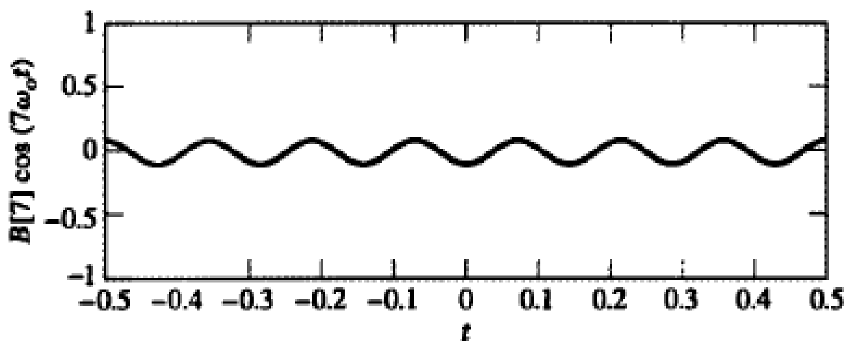
Contoh “Partial-Sum” Gel. Segi-Empat (3)

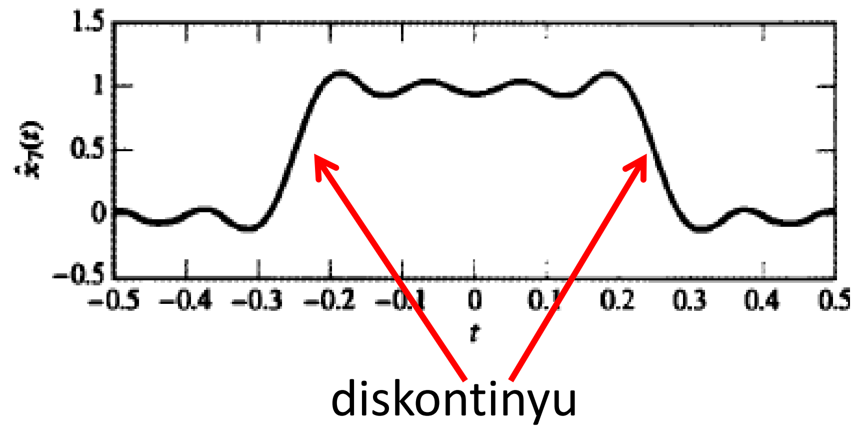
- $J = 3: \hat{x}_3(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\Omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\Omega_0 t)$





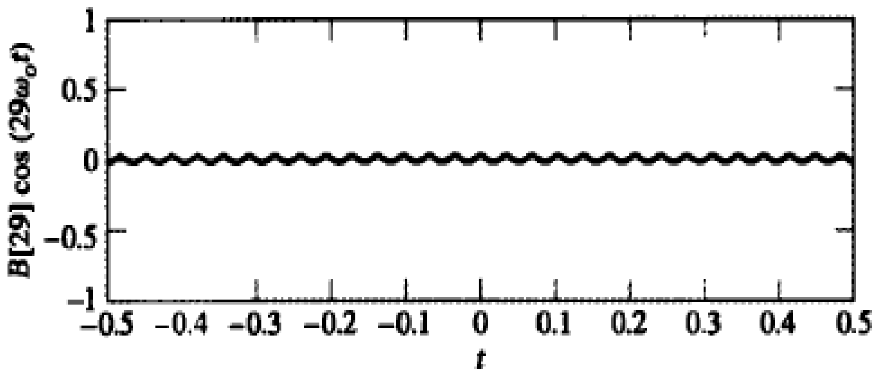
- $\hat{x}_7(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\Omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\Omega_0 t) + \cdots - \left(\frac{2}{7\pi}\right)\cos(7\Omega_0 t)$

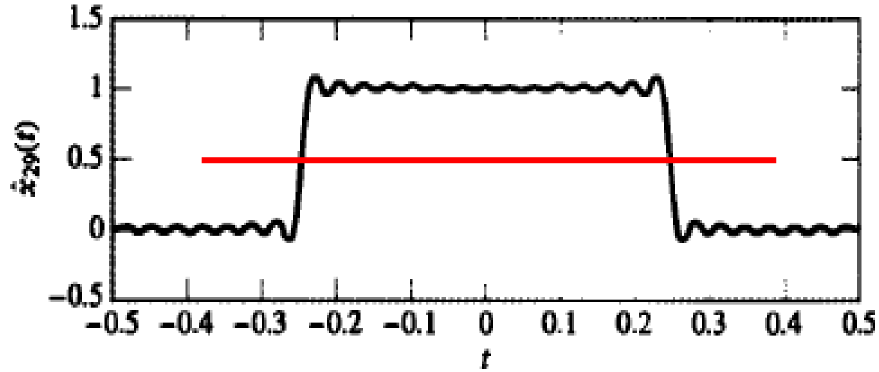




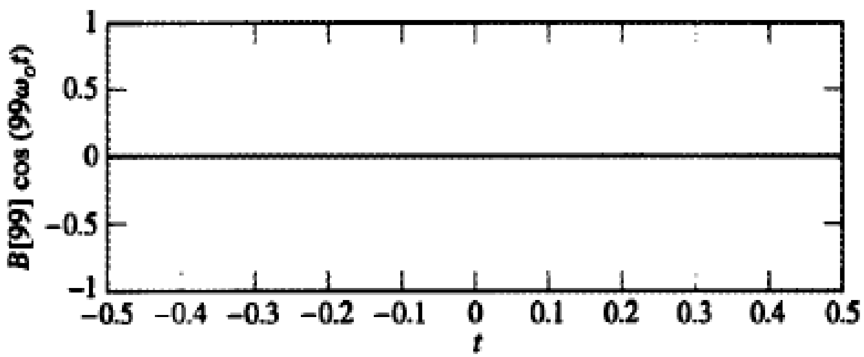
Contoh "Partial-Sum" Gel. Segi-Empat (4)

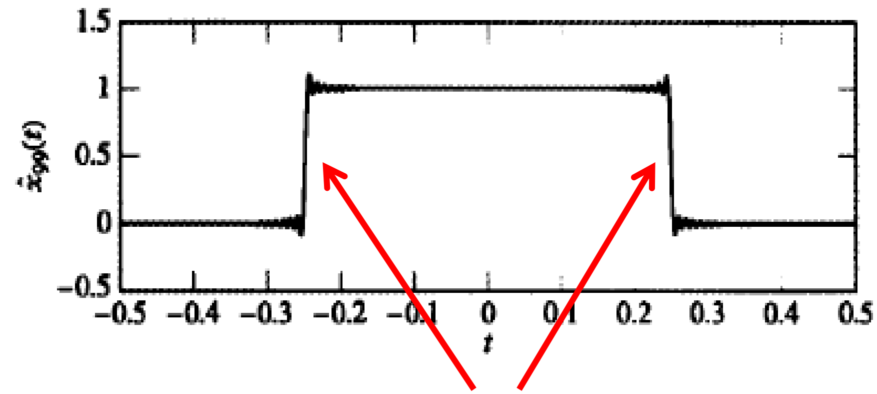
- $\hat{x}_{29}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(\Omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\Omega_0 t) + \cdots - \left(\frac{2}{29\pi}\right)\cos(29\Omega_0 t)$





- $\hat{x}_{99}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}cos(\Omega_0 t) - \frac{2}{3\pi}\cos(3\Omega_0 t) + \cdots - \left(\frac{2}{99\pi}\right)\cos(99\Omega_0 t)$





diskontinyu

Square-Wave Partial-Sum Approximation (5)

- **Kita catat bahwa**:
- Tiap pendekatan "partial-sum" melewati nilai rata-rata $(1/2)$ pada bagian diskontinyu.
- Pada tiap sisi bagian diskontinyu, pendekatan ini memperlihatkan adanya "ripple".
- Untuk nilai sembarang J terbatas, nilai maksimum "ripple" kira-kira 9% dari nilai diskontinyu.
- "Ripple" didekat diskontinyu pada "partial sum" DF disebut "Phenomena Gibbs".

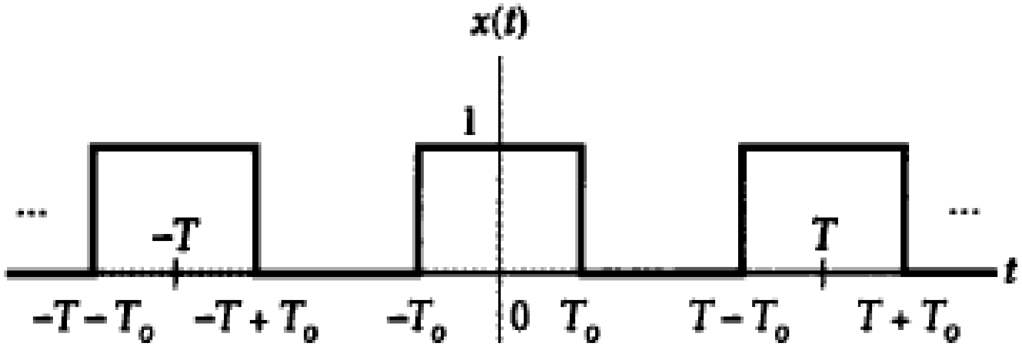
Rangkaian RC Dengan Masukan Periodik (1)

- Memakai sifat linier dan representasi DF gelombang segi-empat untuk menentukan keluaran SLTBTW.
- Masukan:

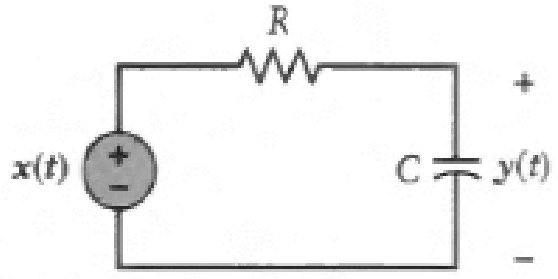
$$\frac{T_0}{T} = \frac{1}{4}$$

$$T = 1 \ \text{sec}$$

$$RC = 0.1 \ \text{sec}$$



- Rangkaian RC:



- Dapatkan representasi DF keluaran $y(t)$ rangkaian RC sebagai respons terhadap masukan segi-empat.

Rangkaian RC Dengan Masukan Periodik (2)

- **Solusi:**
- Bila masukan $x(t)$ terhadap sebuah SLTBTW dinyatakan sebagai penjumlahan sinusoid terbobot, keluaran SLTBTW $y(t)$ juga merupakan penjumlahan sinusoid terbobot.
- Bobot ke$-k$ di keluaran $y(t)$ dinyatakan dengan hasil kali bobot ke-k di masukan $x(t)$ dengan respons frekuensi SLTBTW $H(j\Omega)$, $H(j\Omega)$ dihitung pada frekuensi sinusoid ke-k.
- Bila:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\Omega_0 t}$$

- Maka keluaran adalah:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\Omega_0)X[k]e^{jk\Omega_0 t}$$

Rangkaian RC Dengan Masukan Periodik (3)

dimana $H(j\Omega)$ adalah respons frekuensi SLTBTW.

$$y(t) \overset{FS;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} Y[k] = H(jk\Omega_0)X[k].$$

- Respons frekuensi rangkaian RC:

$$H(j\Omega) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\Omega + \frac{1}{RC}}$$

- Koefisien DFS sinyal masukan segi-empat:

$$X[k] = \frac{2sin\left(k\frac{2\pi}{T}T_0\right)}{k2\pi}$$

Rangkaian RC Dengan Masukan Periodik (4)

- Dengan nilai $RC = 0.1$ detik, $\Omega_0 = 2\pi$, dan $\frac{T_0}{T} = \frac{1}{4}$,

  Diperoleh:

$$H(jk\Omega_0) = \frac{10}{jk2\pi + 10} \quad dan\ Y[k] = \frac{10}{jk2\pi + 10} \frac{sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}$$

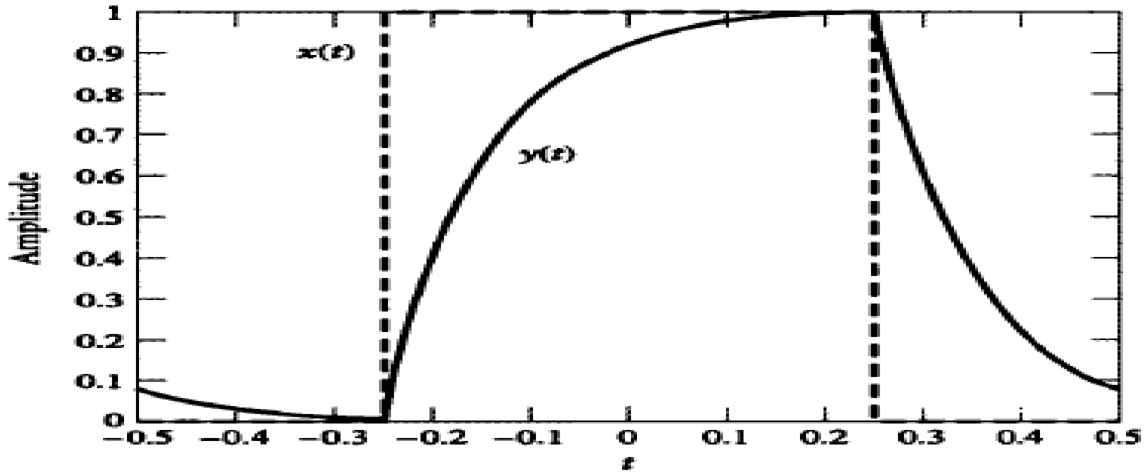
- Bila $k \rightarrow \text{membesar, maka } Y[k] \rightarrow 0$ sebanding dengan $\frac{1}{k^2}$,

  $y(t)$ dapat dihitung dengan sejumlah koefisien DF.

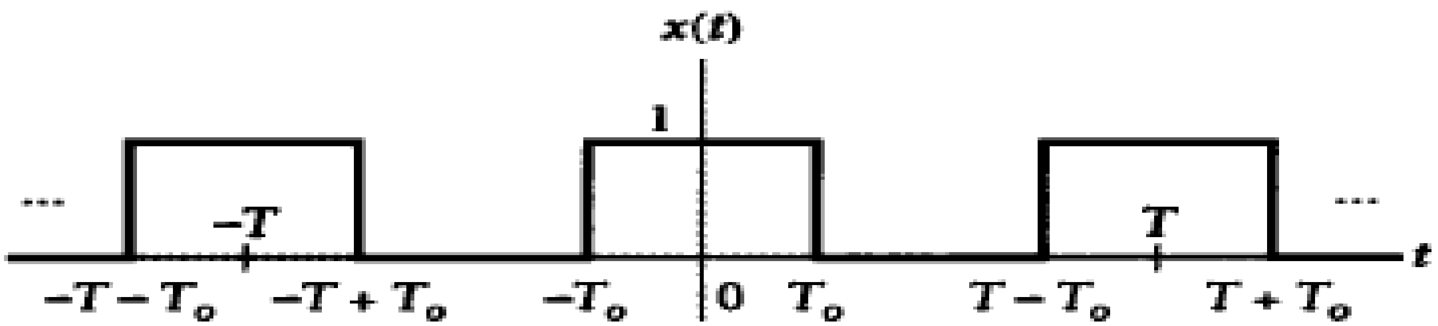
Rangkaian RC Dengan Masukan Periodik (5)

- $y(t)$ memakai pendekatan:

$$y(t) \approx \sum_{k=-100}^{100} Y[k] e^{jk\Omega_0 t}$$

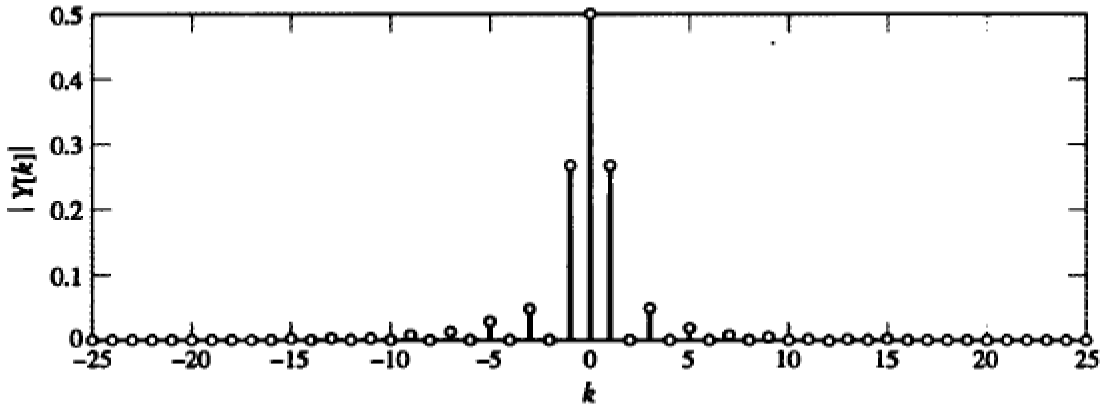


- $x(t)$

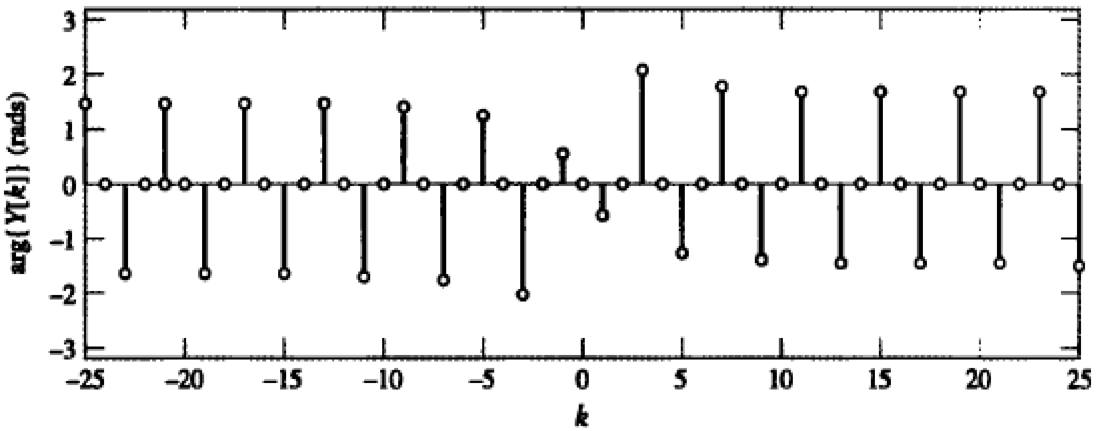


Rangkaian RC Dengan Masukan Periodik (5)

- Magnitudo $|Y[k]|$



- Phasa $\arg\{Y[k]\}$ (rads)



Sifat-Sifat Deret Fourier

- Linieritas.
- Simetris.
- Konvolution.
- Differensiasi dikawasan waktu.
- Pergeseran waktu.
- Pergeseran frekuensi.
- Pengskalaan waktu.
- Pembalikan waktu.
- Perkalian dua sinyal periodik.
- Teorema Parseval's.
- Integrasi sinyal periodik.

Sifat Linier

- Bila $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k]$ dan $y(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} Y[k]$
- Maka:

$$z(t) = ax(t) + by(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} Z(k) = aX[k] + bY[k]$$

- Diasumsikan bahwa sinyal-sinyal yang dijumlahkan mempunya perioda dasar yang sama.

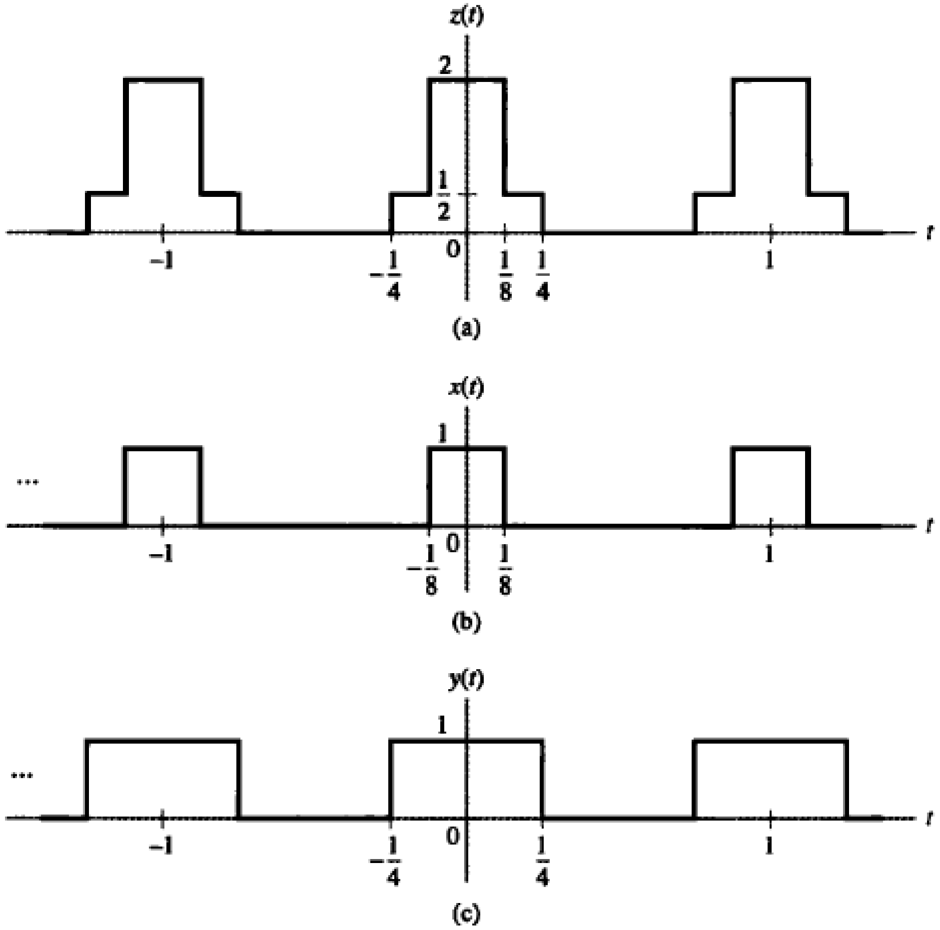
Contoh:

- Bila $z(t)$ adalah sinyal periodik:
- $z(t) = \frac{3}{2}x(t) + \frac{1}{2}y(t)$
- $x(t) \overset{DF;2\pi}{\Longleftrightarrow} X[k]$

$$X[k] = \left(\frac{1}{k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

- $y(t) \overset{DF;2\pi}{\Longleftrightarrow} Y[k]$

$$Y[k] = \left(\frac{1}{k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$



- Sifat linier:

$$z(t) \overset{DF;2\pi}{\Longleftrightarrow} Z[k]$$

$$Z[k] = \left(\frac{3}{2k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{2k\pi}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

Sifat Simetris

- **Waktu Kontinyu:**
- Bila $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k]$, maka:

Untuk $x(t)$ riil, maka $x(t) = x^*(t) \rightarrow X^*[k] = X[-k]$

$\mathrm{Ri}\{X[k]\} = \mathrm{Ri}\{X[-k]\}$, dan

$\mathrm{Im}\{X[k]\} = -\mathrm{Im}\{X[-k]\}$

Untuk $x(t)$ murni imajiner, maka $x(t) = -x^*(t) \rightarrow X^*[k] = -X[-k]$

$\mathrm{Re}\{X[k]\} = -\mathrm{Re}\{X[-k]\}$, dan

$\mathrm{Im}\{X[k]\} = \mathrm{Im}\{X[-k]\}$

- $x(t)$ riil dan simetris genap:

$X^*[k] = X[k]$, maka $X[k]$ adalah riil.

- $x(t)$ riil dan simetris ganjil:

$X^*[k] = -X[k]$, maka $X[k]$ adalah imajiner.

Konvolusi Sinyal Periodik

- Bila $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X(k)$ dan $z(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} Z(k)$

  Definisikan konvolusi periodik 2 sinyal waktu kontinyu, masing-masing mempunyai perioda T, sebagai

$$y(t) = x(t) \circledast z(t) = \int_0^T x(\tau)z(t-\tau)d\tau$$

  Simbol $\circledast$ menyatakan bahwa integrasi dilakukan pada selang satu perioda sinyal-sinyal yang terlibat. Hasil konvolusi $y(t)$ juga periodik dengan perioda T; maka, DF adalah representasi yang sesuai untuk ke-tiga sinyal: $x(t)$, $z(t)$, dan $y(t)$.

- $y(t) = x(t) \circledast z(t) \overset{DF;\Omega_0=\frac{2\pi}{T}}{\Longleftrightarrow} Y[k] = T.X[k]Z[k]$

Differensiasi di Waktu

- Deret Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\Omega_0 t}$$

- Differensiasi terhadap waktu kontinyu:

$$\frac{d}{dt}x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]j\Omega_0 e^{j\Omega_0 t}$$

- Diperoleh bahwa: $\frac{d}{dt}x(t) \xLeftrightarrow{DF;\Omega_0} jk\Omega_0 X[k]$

Sifat "Time-Shift"

- **Waktu kontinyu:**
- Bila $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k]$
- Maka $x(t - t_0) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} e^{-jk\Omega_0 t_0} X[k]$

- Bila sebuah sinyal digeser dikawasan waktu, magnitudo koefisien Deret Fourier tidak berubah dan memberikan pergeseran phasa yang merupakan fungsi linier frekuensi.

Sifat "Frequency-Shift"

- **Frekuensi kawasan kontinyu:**
- Bila $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k]$
- Maka $e^{jk_0\Omega_0 t}x(t) \overset{FS;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k-k_0]$

- Pergeseran frekuensi berhubungan dengan perkalian fungsi di-kawasan waktu dengan sebuah sinusoid kompleks dimana frekuensinya sama dengan pergeseran tersebut.

Perkalian Dua Sinyal

- **Waktu kontinyu:**
- Bila $x(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k]$ dan $y(t) \overset{DF;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} Y[k]$

Hasil perkalian: $z(t) = x(t)y(t)$

- Maka $z(t) = x(t)y(t) \overset{FS;\Omega_0=\frac{2\pi}{T}}{\Longleftrightarrow} Z[k] = X[k] * Y[k]$

dimana

$$X[k] * Y[k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Y[k-m]$$

adalah konvolusi tidak-periodik koefisien-koefisien DF, dengan syarat bahwa $x(t)$ dan $y(t)$ mempunyai perioda yang sama.

- Bila perioda fundamental $x(t) \neq$ perioda $y(t)$, maka koefisien DF $X[k]$ dan $Y[k]$ harus ditentukan dengan memakai perioda fundamental sinyal hasil perkalian.

Pengskalaan Waktu (1)

- Bila $x(t)$ adalah sinyal periodik, maka $z(t) = x(at)$ juga periodik. Diasumsikan bahwa $a > 0$. Bila $x(t)$ mempunyai perioda fundamental T, maka $z(t)$ mempunyai perioda fundamental $\frac{T}{a}$.
  Bila frekuensi fundamental $x(t)$ adalah ω_0, maka frequensi fundamental $z(t)$ adalah $a\omega_0$
- Bila $x(t) \overset{DF;\omega_0}{\Longleftrightarrow} X(k)$

$$Z[k] = \frac{a}{T}\int_{0}^{T/a} z(t)e^{-jka\omega_0 t}dt = \frac{a}{T}\int_{0}^{T/a} x(at)e^{-jka\omega_0 t}dt$$

perubahan variabel: $\tau = at$, maka $d\tau = adt$, sehingga:

$$Z[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T/a} x(\tau)e^{-jk\omega_0 \tau}d\tau = X[k], dengan\ a\omega_0$$

Pengskalaan Waktu (2)

- Maka $z(t) = x(at) \overset{DF;a\omega_0}{\Longleftrightarrow} Z[k] = X(k),\ a > 0.$

  Koefisien DF dari $x(t)$ dan $x(at)$ sama; operasi pengskalaan waktu mengubah jarak frekuensi harmonisa dari ω_0 ke $a\omega_0$.

- Contoh:
- Sinyal periodik: $x(t) \overset{DF;\omega_0=\pi}{\Longleftrightarrow} X[k] = e^{-jk\frac{\pi}{2}}|k|e^{-2|k|}$
- Bila $y(t) = x(3t)$, maka

$$y(t) \overset{DF;\omega_0=\frac{\pi}{3}}{\Longleftrightarrow} Y[k] = e^{-jk\frac{\pi}{2}}|k|e^{-2|k|}$$

Hubungan Parseval

- Hubungan Parseval menyatakan bahwa energi atau daya sinyal di-kawasan waktu adalah sama dengan energi atau daya di-kawasan frekuensi.
- Hubungan Parseval:
- Waktu kontinyu:

$$\frac{1}{T}\int_{0}^{T} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X[k]|^2$$

- Waktu diskrit:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Alphabet Greek

Α	α	Alpha		Ι	ι	Iota		Ρ	ρ	Rho
Β	β	Beta		Κ	κ	Kappa		Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma		Λ	λ	Lambda		Τ	τ	Tau
Δ	δ	Delta		Μ	μ	Mu		Υ	υ	Upsilon
Ε	ε	Epsilon		Ν	ν	Nu		Φ	ϕ	Phi
Ζ	ζ	Zeta		Ξ	ξ	Xi		Χ	χ	Chi
Η	η	Eta		Ο	o	Omicron		Ψ	ψ	Psi
Η	θ	Theta		Π	π	Pi		Ω	ω	omega

Tugas Mandiri

1. Signals and Systems; Simon Haykin, Barry Van Veen; 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc. 2004. Bab 3.
2. Signals and Systems; Hwei P. Hsu; McGraw-Hill, 1995. Bab 5 dan 6.
3. Signals and Systems; Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab; 2nd edition, Prentice-Hall, 1997. Bab 3.

- **Bab 3. Deret Fourier.**
- **Selesai.**