Telkom University

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 8 : Fungsi Bentuk Kompak, Bentuk Terurai, Fungsi Harmonik, Persamaan Cauchy-Riemann, dan Fungsi Holomorfik (Bagian II)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Agustus 2018

Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah tentang **Fungsi Bentuk Kompak, Bentuk Terurai, Fungsi Harmonik, Persamaan Cauchy-Riemann, dan Fungsi Holomorfik** (Bagian II) ini adalah melanjutkan materi sebelumnya, yang kali ini difokuskan pada persamaan PCR sebagai syarat fungsi terurai differentiable, serta indikator bahwa kedua komponen **U** dan **V** adalah harmonik

Catatan awal

1. Pada materi Bagian I disebutkan bahwa syarat suatu fungsi terurai $f(x+iy) = U(x+iy) + V(x+iy)$ dapat dikembalikan ke bentuk kompak adalah
   - U dan V harmonik
   - U dan V memenuhi PCR
2. Pada Bagian II ini akan ditunjukkan bahwa, jika U dan V memenuhi PCR, maka otomatis U dan V adalah harmonik.
3. Dengan fakta ini, untuk menunjukkan $f(x+iy) = U(x+iy) + V(x+iy)$ dapat dikembalikan ke $f(z)$, maka cukup ditunjukkan bahwa U dan V memenuhi PCR.
4. Pernyataan:
   1. $f(x+iy) = U(x+iy) + V(x+iy)$ differentiable
   2. $f(x+iy) = U(x+iy) + V(x+iy)$ holomorfik
   3. U dan V memenuhi PCR
   4. $f(x+iy) = U(x+iy) + V(x+iy)$ dapat dikembalikan ke $f(z)$

   adalah pernyataan yang ekivalen.

Daftar Isi

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Persamaan Cauchy-Riemann berimplikasi pada keharmonikan fungsi U dan V:

1. U(x,y) dan V(x,y) pada $f(x+iy) = U(x)$ memenuhi PCR maka U dan V sudah pasti harmonik.
2. **Bukti**: Jika PCR terpenuhi, maka

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \tag{1}$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \tag{2}$$

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Turunkan ruas kiri dan kanan Pers.(1) terhadap x dan Pers.(2) terhadap y diperoleh:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Jumlahkan (3) dan (4) persamaan diperoleh:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = 0$$

sehingga U harmonik.

3. Pembuktian V harmonik dapat dilanjutkan sebagai latihan.

Turunan fungsi dalam bentuk terurai

Jika f(x+iy) memenuhi PCR, maka $f'(x+iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$

1. **Contoh** : Tentukan turunan dari fungsi $f(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy$. **Jawab** :
2. U_x=$2x$, $U_y = -2y$
3. V_x=$2y$, $V_y = 2x$
4. PCR terpenuhi
5. $f'(x+iy) = U_x + iV_x$=$2x + i2y = 2(X + IY)$

Jika dilakukan pada bentuk kompak:

$f(x+iy) = x^2 - y^2 + i2xy \qquad \Rightarrow \qquad f(z) = z^2$

$f'(x+iy) = 2(x+iy) \qquad \Rightarrow \qquad f'(z) = 2z$

Turunan fungsi dalam bentuk terurai

Contoh lain : Tentukan turunan dari $f(x+iy) = x^2 + iy^2$, **Jawab** :

1. U_x=$2x$, $U_y = 0$
2. V_x=0, $V_y = 2y$
3. $U_x \neq V_y$ sehingga PCR tidak terpenuhi
4. Karena PCR tidak terpenuhi, maka $f(x+iy)$ tidak differentiable, atau $f'(x+iy)$ tidak ada.

Turunan fungsi dalam bentuk terurai

Contoh lain lagi: Tentukan turunan dari $f(x+iy) = xy - ixy$,
Jawab :

1. $U_x = \cdots\cdots, U_y = \cdots\cdots$
2. $V_x = \cdots\cdots, V_y = \cdots\cdots$
3. ....
4. ....

Mencari sekawan harmonik

PCR dapat digunakan untuk mencari sekawan harmonik.

$f(x+iy) = xy + iV(x,y)$. Tentukan V(x,y) sekawan harmonik dari $U = xy$. **Jawab** :

1. $U = xy$ adalah fungsi harmonik, oleh karena itu ada sekawan harmoniknya.
2. $U_x{=}y$, $U_y = x$
3. $V_x{=}\frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$
4. PCR syarat 1 : $U_x = V_y \Rightarrow y = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V = \frac{1}{2}y^2 + g(x)$
5. Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x: $\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$
6. PCR syarat 2 : $U_y = -V_x \Rightarrow x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow x = g'(x)$
7. $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
8. Sehingga: $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$, c suatu konstanta.

Mencari sekawan harmonik

PCR dapat digunakan untuk mencari sekawan harmonik.

$f(x+iy) = xy + iV(x,y)$. Tentukan V(x,y) sekawan harmonik dari $U = xy$. **Jawab** :

1. $U = xy$ adalah fungsi harmonik, oleh karena itu ada sekawan harmoniknya.
2. $U_x = y$, $U_y = x$
3. $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$
4. PCR syarat 1 : $U_x = V_y \Rightarrow y = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V = \frac{1}{2}y^2 + g(x)$
5. Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x: $\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$
6. PCR syarat 2 : $U_y = -V_x \Rightarrow x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow x = g'(x)$
7. $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
8. Sehingga: $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$, c suatu konstanta.

Mencari sekawan harmonik

Contoh lain: Tentukan V(x,y) sekawan harmonik dari $U = 5x + 7$.
Jawab :

1. Pertama periksa apakah U harmonik:
   ....
2. U_x=...................., U_y = ...
3. $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$
4. PCR syarat 1 :
   $U_x = V_y \Rightarrow$ .... $\Rightarrow V =$ ....
5. Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x: $\frac{\partial V}{\partial x} =$ ....
6. PCR syarat 2 : $U_y = -V_x \Rightarrow$ .... $= -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow$
   .... = ...
7. $g'(x) =$ .... $\Rightarrow g(x) =$ ....
8. Sehingga: $V =$ ....

Mencari sekawan harmonik

Contoh lain lagi: Adakah V(x,y) yang merupakan sekawan harmonik dari $U = x^2$? **Jawab** :

1. Pertama periksa apakah U harmonik:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Oleh karena itu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow \text{U tidak harmonik!}$$

2. Oleh karena U tidak harmonik, maka U tidak memiliki sekawan harmonik.

Metode Milne-Thomson

Jika fungsi terurai $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ differentiable atau holomorfik, maka $f(x+iy)$ dapat dijadikan bentuk kompak f(z) dengan metode Milne-Thomson[1] sebagai berikut:

1. tentukan $f'(x+iy)$, yaitu : $f'(x+iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$
2. Ditinjau suku $\frac{\partial U}{\partial x}$
3. substitusi $\frac{\partial U}{\partial x} \to f'(z)$, $x \to z$ dan $y \to 0$
4. Selesaikan $f'(z)$ untuk memperoleh $f(z)$.
5. cari konstanta c pada f(z) dengan substitusi z=x+iy pada f(z) dan membandingkannya dengan f(x+iy) semula.

[1] Milne and Thomson, On the Relation of an Analytic Function of z to Its Real and Imaginary Parts, The Mathematical Gazette, 1937

Metode Milne-Thomson

Dengan metode Milne-Thomson, ubah bentuk terurai $f(x+iy) = x^2 - y^2 + 5 + 2ixy$ menjadi bentuk $f(z)$. **Jawab:**

1. $f'(x+iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = 2x + i2y$
2. $\frac{\partial U}{\partial x} = 2x$
3. substitusi $\frac{\partial U}{\partial x} \to f'(z)$, $x \to z$ dan $y \to 0$
4. $f'(z) = 2z$
5. dengan demikian $f(z) = z^2 + c$
6. mencari c: substitusikan z=x+iy pada f(z) diperoleh $f(x+iy) = x^2 - y^2 + c + i2xy$ dan dibandingkan dengan $f(x+iy) = x^2 - y^2 + 5 + i2xy$ semula, diperoleh c = 5
7. Sehingga $f(z) = z^2 + 5$

Metode Milne-Thomson

Contoh lain: Dengan metode Milne-Thomson, ubah bentuk terurai $f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3xy^2 - y^3 - 10)$ menjadi bentuk $f(z)$. **Jawab:**

1. $f'(x+iy) =$ ....
2. $\frac{\partial U}{\partial x} =$ ....
3. substitusi $\frac{\partial U}{\partial x} \to f'(z)$, $x \to z$ dan $y \to 0$
4. $f'(z) =$ ....
5. dengan demikian $f(z) =$ ....
6. mencari c: ....
7. Sehingga $f(z) =$ ....

Penutup

1. Mengubah bentuk kompak $f(z)$ ke bentuk terurai f(x+iy) mudah dilakukan, dan f(x+iy) yang berasal dari f(z) bersifat holomorfik dan differentiable.
2. Pengubahan bentuk $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ ke bentuk f(z) memerlukan syarat bahwa U dan V harmonik dan memenuhi PCR
3. Salah satu metode memperoleh f(z) dari f(x+iy) yang holomorfik adalah dengan metode Milne-Thomson
4. Pada bagian selanjutnya tentang Integral, akan dilihat bahwa setiap fungsi holomorfik memiliki sifat integral yang tidak bergantung lintasan.

Latihan

1. Jika ada, tentukan turunan dari fungsi terurai berikut :
   1. $f(x+iy) = 3x+5+i(3y-2)$
   2. $f(x+iy) = 3x+5+i(3z-2)$
   3. $f(z) = \sin z$
   4. $f(z) = \sin(2z)$
2. Tentukan sekawan harmonik dari ?
   1. $U(x,y) = x-y$
   2. $U(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$
3. Dengan metode Milne-Thomson, ubah f(x+iy) holomorfik berikut menjadi f(z).
   1. $f(x+iy) = 2x+7+i(2y-11)$
   2. $f(x+iy) = e^x \cos y - i(e^x \sin y + 5)$
   3. $f(x+iy) = x^2+5x+2-y^2+i(2xy+5y+i)$