

# **Variabel Kompleks (VARKOM)**

**Pertemuan 6 : Fungsi kompleks**

**Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT**

**Versi : Agustus 2018**

## Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah kali ini adalah memaparkan **konsep fungsi pada bidang kompleks, daerah asal dan daerah hasil**, serta **titik singular pada fungsi**.

Konsep fungsi berguna sebagai **landasan** pembahasan selanjutnya tentang **limit, kontinuitas, derivatif, dan integral**.

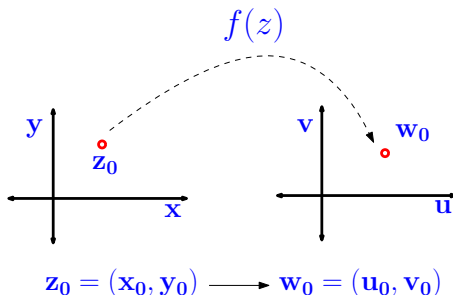
# Daftar Isi

- ➊ Fungsi kompleks
- ➋ Invers Fungsi
- ➌ Titik Singular
- ➍ Fungsi sepotong-sepotong

# Fungsi kompleks

Fungsi kompleks  $f(z)$  menyatakan **pemetaan** dari **bidang kompleks asal  $z$  (domain)** ke **bidang kompleks hasil  $w$  (range)** dengan suatu pola yang diatur oleh  $f(z)$ .

- 1 setiap titik  $z_0(x_0, y_0)$  pada bidang kompleks asal  $z$  dipetakan ke titik  $w_0(u_0, v_0)$  pada bidang kompleks  $w$ .



# Fungsi Kompleks

Pada umumnya, pemetaan:  $z \rightarrow w$  memetakan:

- 1 Titik ke titik
- 2 Lintasan ke lintasan
- 3 Daerah ke daerah
- 4 dan kemungkinan lainnya (lintasan ke titik, daerah ke garis, daerah ke titik, dsb.)

# Fungsi kompleks

Pemetaan titik ke titik

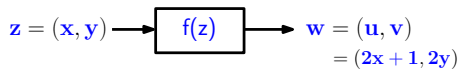
❶ **Contoh:**  $f(z) = 2z + 1$   
maka:

❷ setiap titik  $z = x + iy$   
akan dipetakan ke:

$$\begin{aligned} w &= f(z) = 2z + 1 \\ &= 2(x + iy) + 1 \\ &= (2x + 1) + i2y \end{aligned}$$

❸  $u(x,y) = 2x + 1$

❹  $v(x,y) = 2y$



$$(0,0) \longrightarrow (1,0)$$

$$(1,0) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$

$$(2,0) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$

$$(2,1) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$

# Fungsi kompleks

- 1 Contoh lain:  $f(z) = z^2$
- 2 setiap titik  $z = x + iy$  akan dipetakan ke:

$$\begin{aligned}
 w = f(z) &= z^2 \\
 &= (x + iy)^2 \\
 &= (\dots\dots\dots) + i(\dots\dots\dots)
 \end{aligned}$$

$$z = (x, y) \longrightarrow \boxed{f(z)} \longrightarrow w = (u, v) \\
 = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$$

$$(0,0) \longrightarrow ( \dots\dots , \dots\dots )$$

$$(1,0) \longrightarrow ( \dots\dots , \dots\dots )$$

$$(2,0) \longrightarrow ( \dots\dots , \dots\dots )$$

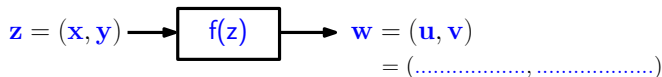
$$(2,1) \longrightarrow ( \dots\dots , \dots\dots )$$

# Fungsi kompleks

❶ Contoh lain lagi:  $f(z) = |z| + 1$

❷  $u(x,y) = \dots + i \dots$

❸  $v(x,y) = \dots + i \dots$



$$(0,0) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$

$$(1,0) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$

$$(2,0) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$

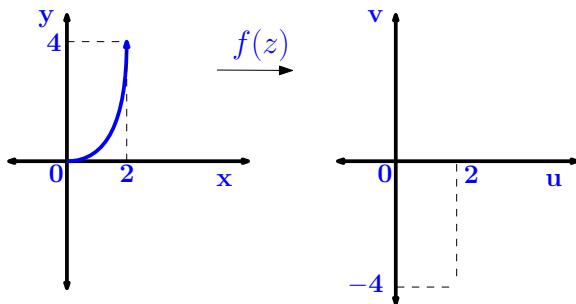
$$(2,1) \longrightarrow ( \dots , \dots )$$



# Fungsi Kompleks

Pemetaan Lintasan ke Lintasan:

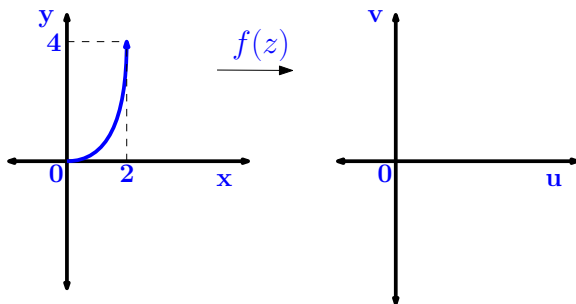
- ➊ Misal  $f(z) = \bar{z}$
- ➋ Lintasan  $c : z = t + it^2, 0 \leq t \leq 2$  akan dipetakan ke
- ➌ lintasan  $c' : w = f(z) = \bar{z} = t - it^2, 0 \leq t \leq 2$



# Fungsi Kompleks

Pemetaan Lintasan ke Lintasan:

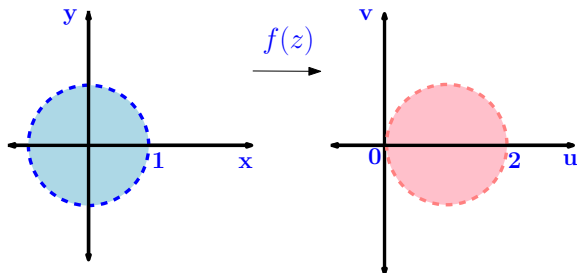
- ➊ Contoh lain:  $f(z) = 2z + 1$
- ➋ Lintasan  $c : z = t + it^2, 0 \leq t \leq 2$  akan dipetakan ke
- ➌ lintasan  $c' : w = f(z) = \dots\dots\dots + i\dots\dots\dots, 0 \leq t \leq 2$



# Fungsi Kompleks

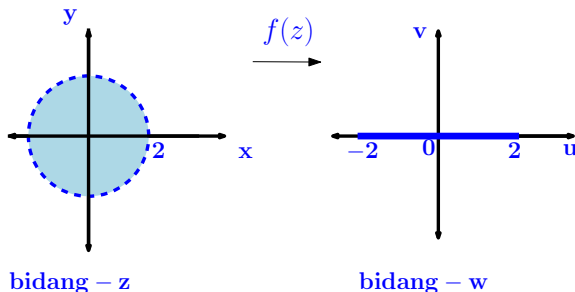
Pemetaan daerah ke daerah:

- ➊ Misal  $f(z) = z + 1$
- ➋ Daerah  $D : |z| < 1$  akan dipetakan ke
- ➌ daerah  $D'$ :
- ➍ yaitu:  $f(z) = w = z + 1$  atau  $z = w - 1$  atau  $|z| = |w - 1|$ ;  
 $|z| < 1$  menjadi  $|w - 1| < 1$



# Fungsi Kompleks

- 1 Tidak selalu  $f(z)$  memetakan suatu daerah ke daerah.
- 2 Terdapat pemetaan  $f(z)$  yang memetakan dari daerah ke garis.
- 3 Contoh: Kemana  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$  memetakan daerah  $|z| < 2$  ?  
**Jawab:**  $w = f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ . Dengan demikian, setiap titik  $z = x + iy$  dengan  $|x + iy| \leq 2$  dipetakan ke  $w = x$  dengan  $|x| < 2$ .



# Fungsi Kompleks

- 1 Fungsi yang memetakan suatu daerah menjadi garis menunjukkan ada 2 atau lebih titik yang dipetakan ke titik yang sama
- 2 Pada  $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ 
  - (1,0) dipetakan ke (1,0)
  - (1,1) dipetakan ke (..... , .....)
  - (1,2) dipetakan ke (..... , .....)
- 3 Fungsi pemetaan dari banyak ke satu seperti ini tidak memiliki invers

# Invers Fungsi Kompleks

Fungsi  $f(z)$  memetakan  $z$  ke  $w$ . Fungsi invers dari  $f(z)$ , yaitu  $g(z) = f^{-1}(z)$  sebaliknya memetakan  $w$  kembali ke  $z$ .

- 1 Contoh:  $w = f(z) = 2z + 1$
- 2 Fungsi ini memetakan  $(1,1)$  ke  $(3,2)$
- 3 sebaliknya  $g(z) = \frac{z-1}{2}$ , memetakan kembali  $(3,2)$  ke  $(1,1)$ .
- 4 Fungsi  $g(z) = \frac{z-1}{2}$  adalah invers dari  $f(z) = 2z + 1$

# Invers Fungsi Kompleks

Untuk mencari fungsi invers dari  $f(z) = w$ , maka gantikan  $w \rightarrow z$  dan  $z \rightarrow w$ , setelah itu selesaikan persamaan dalam  $w$ .

❶ **Contoh:** tentukan invers dari  $f(z) = 2z + 1$

❷ **Jawab:**  $f(z) = w = 2z + 1$ . Gantikan :  $w \rightarrow z$  dan  $z \rightarrow w$ , kita peroleh  $z = 2w + 1$ . Selesaikan dalam  $w$ :

$$\begin{aligned} z &= 2w + 1 \\ \Leftrightarrow 2w &= z - 1 \\ \Leftrightarrow w &= \frac{z-1}{2} \end{aligned}$$

❸ dengan demikian,  $g(z) = f^{-1}(z) = \frac{z-1}{2}$

# Invers Fungsi Kompleks

➊ Inverse dari fungsi  $f(z) = 5z + 3$  adalah .....

➋ Inverse dari fungsi  $f(z) = \frac{1}{z}$  adalah .....

➌ Inverse dari fungsi  $f(z) = \frac{z}{z+1}$  adalah .....



## Titik Singular

**Titik singular** : Pada beberapa fungsi, tidak semua titik dapat dipetakan ke titik lain.

- ➊ **contoh:**  $f(z) = \frac{1}{z+1}$ , maka titik asal  $z = -1$  dipetakan ke  $\infty$  (bukan titik).
- ➋ Pada fungsi  $f(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{z+2}$ , titik  $z = -2$  tidak dapat dipetakan karena titik petanya berbentuk  $\frac{0}{0}$  (bukan titik).
- ➌ Titik yang dipetakan ke  $\infty$ ,  $-\infty$ , bentuk  $\frac{0}{0}$ , bentuk  $0^0$  disebut titik singular.
- ➍ Titik singular dari  $f(z) = \frac{z+1}{z^2-1}$  adalah ..... dan .....
- ➎ Adakah titik singular pada fungsi  $f(z) = 2z^2 + 1$  ?

## Fungsi sepotong-sepotong

**Dimungkinkan** untuk melakukan **pemetaan** dengan **fungsi berbeda** untuk **daerah yang berbeda**. **Contoh:**

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq |z| \leq 1 \\ \frac{1}{z} & \text{untuk } |z| > 1 \end{cases}$$

- ➊ daerah perbatasan adalah daerah transisi antar dua fungsi. ( $|z| = 1$  pada contoh di atas)
- ➋ Fungsi sepotong-sepotong dapat digunakan untuk menghapus titik singular.
- ➌ Adakah titik singular untuk  $f(z)$  di atas?
- ➍ Meski fungsi sepotong-sepotong dapat menghapus titik singular, namun ada resiko fungsi tidak memiliki limit dan tidak kontinyu di daerah perbatasan.

# Latihan

- 1 Tentukan  $u(x,y)$  dan  $v(x,y)$  dari fungsi berikut:
  - 1  $f(z) = (2z + 1) + i(z - 2)$
  - 2  $f(z) = -\frac{2i}{z-i}$
  - 3  $f(z) = (r + i)e^{-i\theta}$
  - 4  $f(x) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$
- 2 Suatu fungsi  $f(z) = 1/z$ . Sketsa kemanakah lintasan  $z = t^2 + it$  dengan  $1 \leq t \leq 2$  dipetakan!
- 3 Suatu fungsi  $f(z) = 1/z$ . Sketsa kemana daerah  $D$   $|z| < 1$  dipetakan!
- 4 Tentukan inverse dari fungsi kompleks:  $f(z) = \frac{z+1}{z+2}$
- 5 Apakah syarat suatu fungsi kompleks memiliki inverse?