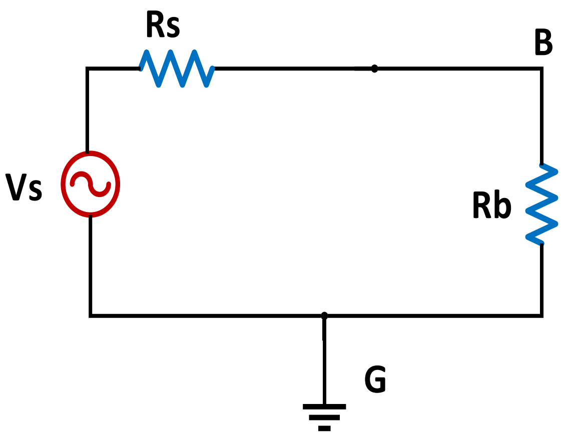
Transfer daya maksimum

$$V_s(t) = A\ \sin(2\pi\ f\ t)$$



Arus yang mengalir pada **Rs** sama nilainya dengan arus yang mengalir pada **Rb** yaitu

$$I_s = I_b = \frac{A}{R_s + R_b}$$

$$I_s(t) = \frac{A}{R_s + R_b}\ \sin(2\pi\ f\ t)$$

Karena sumber sinyal **Vs** adalah tegangan AC berupa sinussoidal maka **jelas arus yang mengalir** pada Rs dan Rb juga arus AC sinussoidal .

Daya rata-rata pada beban Rb : $P_L = \frac{1}{2}\,(I_b)^2\, R_b$

Misalkan amplituda tegangan A = 100 Volt , contoh hasil perhitungan untuk beberapa nilai Rs dan Rb sbb :

Rs (Ohm)	Rb (Ohm)	Is = Ib (Ampere)	PL (Watt)
100	10	0,90909	4,13
100	20	0,83333	6,94
100	30	0,76923	8,88
100	50	0,66667	11,11
100	80	0,55556	12,35
100	90	0,52632	12,47
100	**100**	**0,50000**	**12,50**
100	110	0,47619	12,47
100	120	0,45455	12,40
100	150	0,40000	12,00

Bila Rs = 200 Ohm , berapakah nilai Rb agar daya pada Rb yaitu PL mencapai maksimal ?

Bila Rs = R Ohm , berapakah nilai Rb agar daya pada Rb yaitu PL mencapai maksimal ?

Misalkan Rs = R dan Rb = x maka diperoleh persamaan

$$I_s = I_b = \frac{A}{R + X} \quad ; \quad P_L = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{R + X}\right)^2 X$$

$$P_L = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{R + X}\right)^2 X = \frac{A^2}{2} \frac{X}{R^2 + 2\,R\,X + X^2}$$

Perhatikan bahwa PL mencapai maksimum bila nilai

$$\frac{X}{R^2 + 2\,R\,X + X^2} \quad mencapai\ maksimum$$

Dicari nilai x agar fungsi : $y(x) = \frac{x}{R^2+2\,R\,x+ x^2,}$ *mencapai maksimum*

Gunakan teori Kalkulus

$y(x_c)$ mencapai nilai maksimum atau minimum bila :

Nilai turunan yaitu : $y'(x = x_c) = 0$

$$y(x) = \frac{x}{R^2 + 2\,R\,x + x^2,} = \frac{u(x)}{h(x)}$$

Maka : $y'(x) = \frac{u'(x)\ h(x) - h'(x)\ u(x)}{\left(h(x)\right)^2}$

$$u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1$$

$$h(x) = R^2 + 2\,R\,x + x^2 \rightarrow h'(x) = 2x + 2\,R$$

Maka : $y'(x) = \frac{R^2+2\,R\,x+ x^2 - (2x+2\,R)x}{\left(R^2+2\,R\,x+ x^2\right)^2}$

$y'(x)$ = 0 bila : $R^2 + 2\,R\,x + x^2 - (2x + 2\,R)x = 0$

Maka : $R^2 + 2\,R\,x + x^2 = 2(x + R)x$

$$(x + R)\,(x + R) = 2(x + R)x$$

$$(x + R) = 2x \rightarrow maka\ :\ x = R$$

Jadi bila x = R maka $y(x = R)$ mencapai nilai maksimum

Artinya transfer daya maksimum terjadi bila Rb = Rs

Misal : $Z_A = \; X + j\,Y$ **maka konyugate** Z_A **=** $Z_A{}^{*} = \; X - jY$

Penyesuai impedansi bentuk L

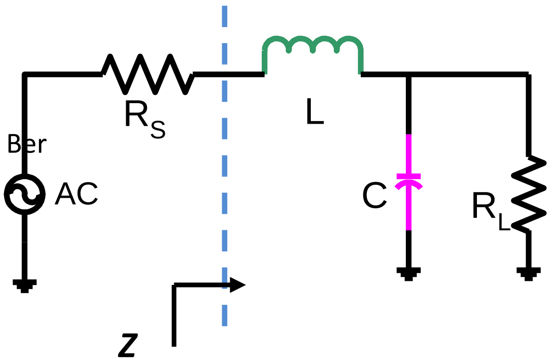
Perhatikan gbr di bawah ini , dikehendaki daya yang diserap oleh beban (R_L) mencapai maksimal pada frekuensi yang dikendaki , misal pada frekuensi f_r

Berarti pada frekuensi f_r tsb nilai $Z^{*} = \; Z_s$

INGAT Syarat matching : $Z^{*} = \; Z_s \; , \; Z_s = \; R_s + \; j\,0 \; = \; R_s$

Karena Z_s **resistip murni** berarti $nilai \;\; Z^{*} \, harus \; = \; R_s$

Kita akan mencari nilai L dan C yang menghasilkan kondisi " match" pada frekuensi f_r



$Z = \;\; L\; seri\,(\,paralel\; C \;\; dgn \; R_L\,)$

$paralel\; C \;\; dg \; R_L = Z_x = \dfrac{X_C \;\; R_L}{X_C + \; R_L}$

Maka : $Z = \; j\,\omega L \; + \; Z_x$

$X_C = \frac{1}{j\,\omega C}$; $\omega = 2\pi f$; $j = \sqrt{-1}$ **, missal kondisi match pada** $\omega = \; \omega_r$

$$Z_x = \frac{\dfrac{1}{j\,\omega C} \;\; R_L}{\dfrac{1}{j\,\omega C} + \; R_L} = \frac{R_L}{(1 + \; j\,\omega C\, R_L)} = \frac{R_L\,(1 - j\,\omega C\, R_L)}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2}$$

$$Z_x = \frac{R_L\,(1 - j\,\omega C\, R_L)}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2} = \frac{R_L \;\, - j\,\omega C\, R_L{}^2}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2} = \frac{R_L}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2} - \frac{j\,\omega C\, R_L{}^2}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2}$$

$$Z = \; j\,\omega L \; + \; Z_x$$

$$Z = \; j\,\omega L \; + \; \frac{R_L}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2} \; - \; \frac{j\,\omega C\, R_L{}^2}{1 + \omega^2\, C^2 \;\; R_L{}^2}$$

$$Z \;=\; \frac{R_L}{1+\omega^2\,C^2\;{R_L}^2} + \;j\,\omega L - \;\frac{j\,\omega C\,{R_L}^2}{1+\omega^2\,C^2\;{R_L}^2}$$

Dari syarat di atas telah diketahui bahwa $Z^*\,harus = R_s$ pada $\omega = \omega_r$, jadi :

$$Z^* = \;\frac{R_L}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2} - \,j\,\omega_r L + \;\frac{j\omega_r\,C\,{R_L}^2}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2} \;=\; R_s \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\;(1)$$

Perhatikan bahwa kondisi pers (1) hanya dapat dipenuhi untuk nilai ω tertentu

$$Z^* = \;\frac{R_L}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2} - \,j\,\omega_r L \;+\; \frac{j\omega_r\,C\,{R_L}^2}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2} \;=\; R_s \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\;(1)$$

Perhatikan bahwa kesimpulannya :

1). $\boldsymbol{nilai}\;:\;\frac{R_L}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2}\quad \boldsymbol{harus} \;=\; R_s$

2). $\boldsymbol{nilai}\;:\quad -\,j\,\omega_r L + \;\frac{j\,\omega_r C\,{R_L}^2}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2}\quad \boldsymbol{harus} =\; 0$

Misal dikehendaki kondisi match terjadi pada frek 5 Mhz , berarti :

$$\omega_r = 2\,\pi\,f_r = \;\;2\,\pi\;\times 2\;\times\;10^6$$

$\frac{R_L}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2} = R_s$, misalkan nilai R_S dan R_L telah ditentukan (diketahui)

Maka : $\frac{R_L}{R_s} \;=\; 1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2$

$$\frac{R_L}{R_s} - 1 \;=\; {\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2$$

$$\frac{R_L - R_s}{R_s} \;=\; {\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2 \quad maka\;:\;C \;=\; \sqrt{\frac{R_L - R_s}{{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2\;R_s}} \;\boxed{=\;\frac{1}{\omega_r R_L}\;\sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}} \;=\; C}$$

Jadi nilai C bisa dihitung dengan syarat : $R_L > R_s$

Dari syarat point 2) :

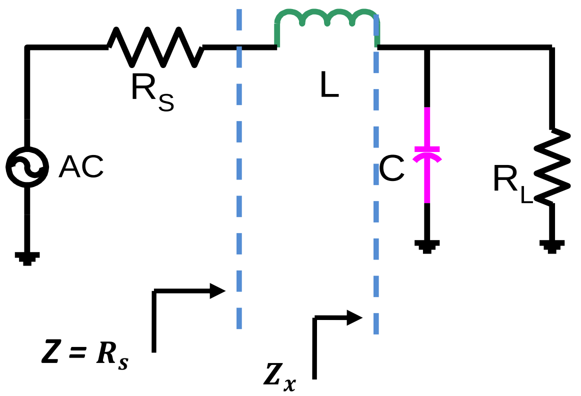
$-\;j\omega_r\,L + \;\frac{j\,\omega_r\,C\,{R_L}^2}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2} = 0$ ***maka nilai L dapat dihitung yaitu :***

$$j\,\omega_r L \;=\; \frac{j\,\omega_r\,C\,{R_L}^2}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2}\quad jadi\quad L = \frac{C\,{R_L}^2}{1+{\omega_r}^2\,C^2\;{R_L}^2}\quad ,\qquad substitusikan\;\;nilai\;\;C$$

$$L = \frac{{R_L}^2 \, \frac{1}{\omega_r R_L} \sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}}}{1 + \; \omega_r{}^2 \; {R_L}^2 \, \frac{1}{{\omega_r}^2 \; {R_L}^2} \, \frac{R_L - R_s}{R_s}} = \frac{\frac{R_L}{\omega_r} \sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}}}{1 + \frac{R_L - R_s}{R_s}}$$

$$L = \frac{\frac{R_L}{\omega_r} \sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}}}{\frac{R_s + R_L - R_s}{R_s}} = \frac{\frac{R_L}{\omega_r} \sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}}}{\frac{R_L}{R_s}} = \frac{R_s}{\omega_r} \sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}}$$

$$\boxed{L \quad = \frac{1}{\omega_r} \sqrt{R_s \; R_L - \quad {R_s}^2} \qquad atau \;\; \omega_r \, L = \sqrt{R_s \; R_L - \quad {R_s}^2}}$$



Misal sumber tegangan AC adalah :

$V_s(t) = \; A \; \sin(\omega t)$ dan

misal : $R_L = 5 \, R_s$

Berapa daya disipasi pada beban R_L ?

Bila benar tercapai kondisi match maka haruslah disipasi pada R_L = disipasi pada R_s

Jadi : $disipasi\ pada\ R_s = \;\; P_s = \frac{1}{2}(I_s)^2 \, R_s \;\; = disipasi\ pada\ R_L = \; P_L = \; \frac{1}{2}(I_L)^2 \, R_L$;

Factor pengali $\frac{1}{2}$ adalah karena sinyal berupa sinusoidal

$$Jadi \quad (I_s)^2 \, R_s \quad harus \; = \; (I_L)^2 \, R_L \qquad ; \; I_s = \; amplituda\ arus\ pada \; R_s$$

Kita buktikan

$$I_s = \frac{A}{R_s + \; Z} = \frac{A}{R_s + \; R_s} \;\; = \frac{A}{2 \, R_s} \quad maka \; :$$

$$(I_s)^2 \, R_s = \quad \left(\frac{A}{2 \, R_s}\right)^2 \; R_s = \frac{A^2}{4 \, R_s}$$

Menggunakan hukum Kirchov pada phasor tegangan : $\; V_{R_s} + \; V_L + \; V_{R_L} = \;\; A$

$I_s R_s + \; I_s \; j \, \omega L \;\; + V_{R_L} = \;\; A \;\;$;

$$\omega_r L = \sqrt{R_s\ R_L - \ R_s^{\ 2}} \ = \sqrt{R_s\, 5\, R_s - \ R_s^{\ 2}} \ = \sqrt{4\, R_s^{\ 2}} \ = 2\, R_s$$

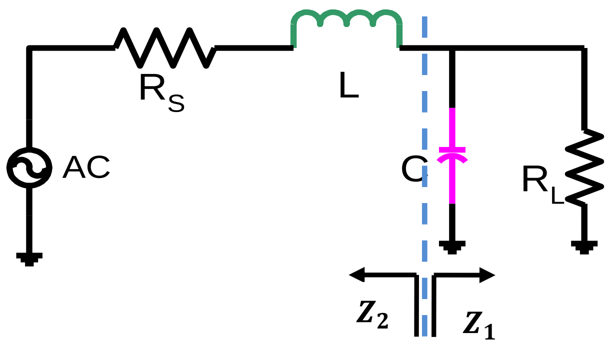
$$V_{R_L} = \ A - I_s R_s - I_s\ j\ \omega_r\ L \ = A - I_s R_s - 2j\, I_s\, R_s = \ A - \frac{A}{2\, R_s} R_s - 2j\ \frac{A}{2\, R_s}\ R_s$$

$$V_{R_L} = A - \frac{A}{2} - \ jA = \frac{A}{2} - jA \quad ; \quad amplituda\ tegangan\ pd\ \ R_L = A_{R_L} = \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + \ A^2}$$

$$A_{R_L} = \sqrt{\frac{5}{4} A^2} = A\ \sqrt{\frac{5}{4}} \ ;\ amplituda\ arus\ pd\ \ R_L = I_L = \frac{A_{R_L}}{R_L} = \frac{A\sqrt{\frac{5}{4}}}{R_L} = \frac{A\sqrt{\frac{5}{4}}}{5\, R_s} = \frac{A}{2\ \times \sqrt{5}\, R_s}$$

$$(I_L)^2\, R_L = \left(\frac{A}{2\ \times \sqrt{5}\, R_s}\right)^2\ 5\, R_s = \frac{A^2}{4\ \times 5\, R_s^{\ 2}}\ 5\, R_s = \frac{A^2}{4\, R_s} = \quad (I_s)^2\, R_s \qquad (\,terbukti\,)$$

Penurunan rumus matching konfigurasi L dengan cara lain



Z_2 dipandang sbg impedansi sumber

$Z_2 = R_s + j\,\omega L$

Kondisi match bila :

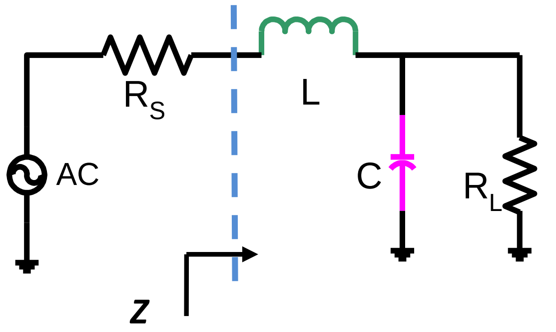
$Z_2 \ = \ Z_1^{\,*}$ **atau** $Z_2^{\,*} = \ Z_1$

Dengan menerapkan syarat : $Z_2^{\,*} = \ Z_1$ maka diperoleh :

$$R_s - j\,\omega_r L \ = \frac{\frac{R_s}{j\,\omega_r\ C}}{R_s + \frac{1}{j\,\omega_r\, C}} = \frac{R_L}{(1 + j\,\omega_r\, C\, R_L)} = \frac{R_L\,(1 - j\,\omega_r C\, R_L)}{1 + \omega_r^{\,2}\, C^2\ R_L^{\,2}} = \frac{R_L}{1 + \omega_r^{\,2}\, C^2\ R_L^{\,2}} - \frac{j\,\omega_r\, C\, R_L^{\,2}}{1 + \ \omega_r^{\,2}\ C^2\ R_L^{\,2}}$$

Maka : $R_s = \dfrac{R_L}{1 + \omega_r^{\,2}\, C^2\ R_L^{\,2}}$ dan $\omega_r L \ = \dfrac{\omega_r\, C\, R_L^{\,2}}{1 + \ \omega_r^{\,2}\ C^2\ R_L^{\,2}}$

Soal -1 :



Pada gbr disamping diketahui :

Sumber tegangan :

$$V_s(t) = 10\ \cos(2\pi\ \times 500000\ t)$$

$$R_s = 50\ Ohm\ \ ;\ R_L = 150\ Ohm$$

1). **Hitung nilai L dan C agar daya rata-rata pada beban $\boldsymbol{R_L}$ mencapai maksimal**

2). **Berapa nilai daya rata-rata maksimal pada beban $\boldsymbol{R_L}$ tersebut**

3). **Berapa Amplituda tegangan sinyal pada beban pada kondisi match**

4). **Berapa nilai daya rata-rata pada beban $\boldsymbol{R_L}$ tersebut bila sumber sinyal berupa sinyal DC dengan tegangan 10 Volt**

5). **Berapa nilai daya rata-rata pada beban $\boldsymbol{R_L}$ tersebut bila sumber sinyal berupa sinyal AC dengan Amplituda 10 Volt , frekuensi 5 GHz .**

SOLUSI :

1). $$\boldsymbol{C = \frac{1}{\omega_r R_L}\sqrt{\frac{R_L - R_s}{R_s}}\ \ ;\ \ L = \frac{1}{\omega_r}\sqrt{R_s\ R_L - \ R_s^{\ 2}}}$$

$$\boldsymbol{C = \frac{1}{2\pi \times 500000\ \times 150}\sqrt{\frac{150 - 50}{50}} =}$$

$$\boldsymbol{L = \frac{1}{2\pi\ \times\ 500000}\sqrt{50\ \times 150 -\ \ 50^{\ 2}} =}$$

2). Pada kondisi transfer daya maksimum maka $\boldsymbol{Z = R_s}$, maka :

Arus $\boldsymbol{I_s}$ yang mengalir pada $\boldsymbol{R_s}$ adalah sebesar $\frac{10}{\boldsymbol{R_s + Z}} = \frac{10}{\boldsymbol{50 + 50}} = 0{,}1\ \text{A}$

Pada kondisi transfer daya maksimum : Nilai daya pd $\boldsymbol{R_s}$ = daya pada $\boldsymbol{R_L}$

Nilai daya rata-rata tsb sebesar = $\boldsymbol{P_S = \frac{1}{2}(I_S)^2\ R_S\ = P_L = \frac{1}{2}(I_L)^2\ R_L}$

$$P_L = \frac{1}{2}(0,1)^2 \times 150 =$$