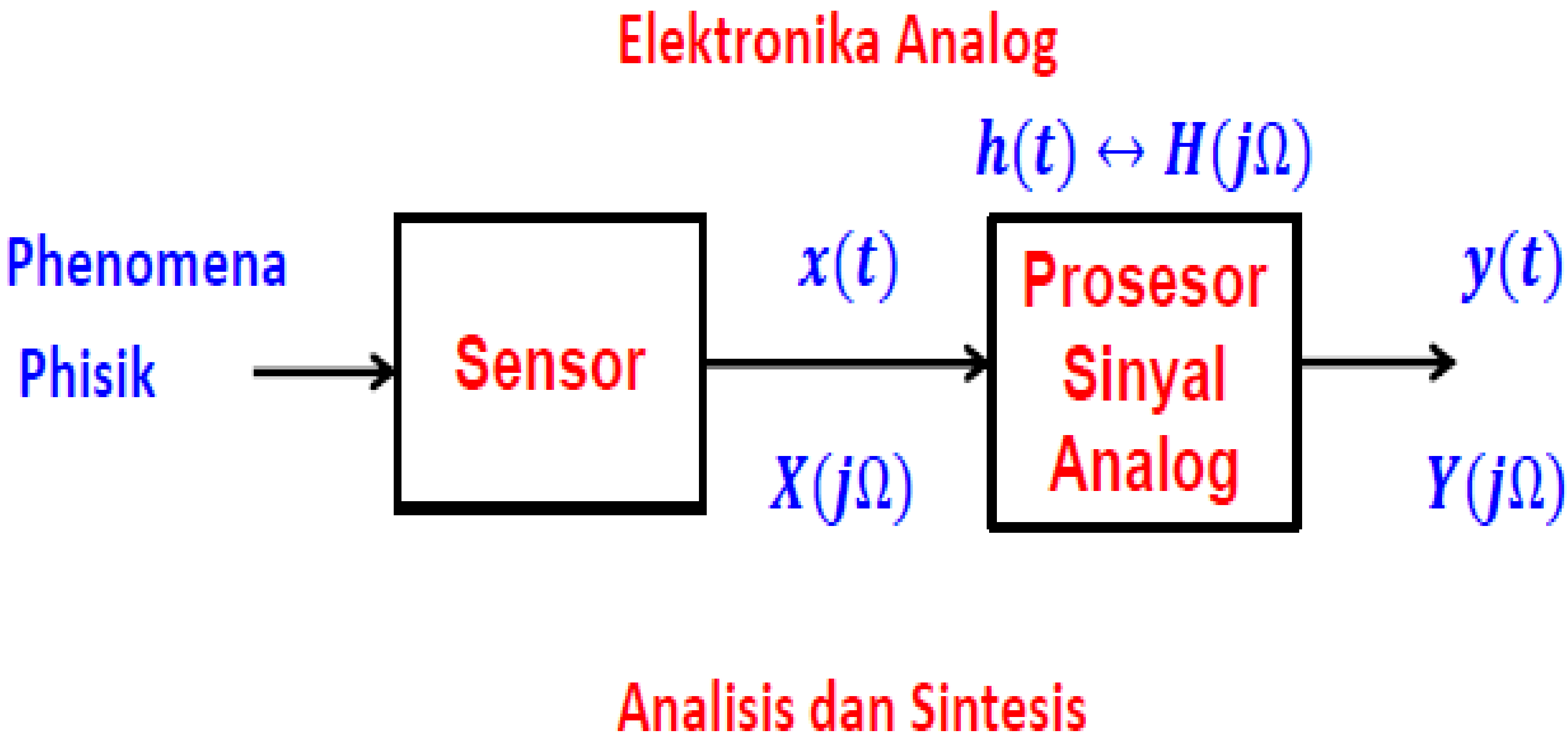
Pengolahan Sinyal Dalam Waktu Kontinyu

Bab 4. Transformasi Fourier



Dosen:

Suhartono Tjondronegoro

Isi Kuliah

- Bab 0. Pendahuluan.
- Bab 1. Sinyal Waktu Kontinyu.
- Bab 2. Sistem Waktu Kontinyu.
- Bab 3. Deret Fourier.
- **Bab 4. Transformasi Fourier.**
- Bab 5. Transformasi Laplace.
- Bab 6. Pengantar Filter Analog.
- Bab 7. Pengantar Sistem Umpan Balik Linier.

Bab 5. Transformasi Fourier

- Sinusoidal kompleks dan Respons Frekuensi SLWK-TBTW.
- Sinyal Tidak Periodik Waktu Kontinyu.
- Transformasi Fourier (TF) / Transformasi Fourier Waktu Kontinyu (TFWK).
- TF Sinyal Eksponensial Riil Menurun.
- TF Pulsa Rectangular.
- TF Sinyal Impuls Satuan.
- Karakteristik Sinyal Komunikasi Digital.
- Sifat-Sifat Transformasi Fourier.

Respons Frekuensi Sistem LWK-TBTW (1)

- Respons SLWK-TBTW terhadap masukan sinusoidal dipakai untuk melihat tingkah laku sistem, yang disebut **respons frekuensi** sistem.
- Perhatikan sebuah SLWK-TBTW dengan respons impuls $h(t)$, mendapat masukan sinusoidal kompleks dengan amplitudo satu: $x(t) = e^{j\Omega t}$.

Keluaran sistem:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{j\Omega(t-\tau)}d\tau$$

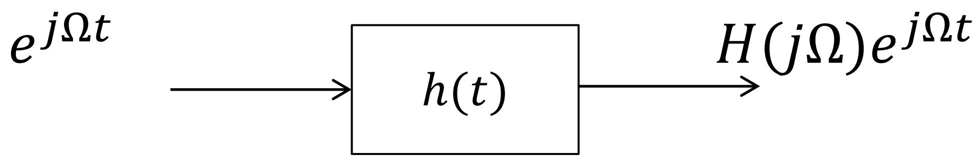
$$y(t) = e^{j\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau = e^{j\Omega t}H(j\Omega) = H(j\Omega)e^{j\Omega t}$$

dimana kita definisikan

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$

Respons Frekuensi Sistem LWKTBTW (2)

- Keluaran sistem adalah sinusoid kompleks dengan frekuensi yang sama sinyal masukan, dikalikan dengan bilangan kompleks $H(j\Omega)$.
- Hubungan: $y(t) = H(j\Omega)e^{j\Omega t}$.



- Faktor skala kompleks $H(j\Omega)$ bukan fungsi waktu t, tetapi hanya fungsi frekuensi Ω dan disebut **respons frekuensi** sistem waktu kontinyu.
- Respons frekuensi bernilai kompleks:

$$H(j\Omega) = H_R(j\Omega) + jH_I(j\Omega)$$

Dalam bentuk polar: $H(j\Omega) = |H(j\Omega)|e^{j\arg\{H(j\Omega)\}}$

$|H(j\Omega)|$ adalah respons magnitudo.

$\arg\{H(j\Omega)\}$ adalah respons phasa.

- Keluaran: $y(t) = |H(j\Omega)|e^{j(\Omega t + \arg\{H(j\Omega)\})}$.

Fungsi Eigen dan Nilai Eigen (1)

- Sinusoids kompleks $\Psi(t) = e^{j\Omega t}$ adalah **fungsi eigen** SLWKTBTW T yang terkait dengan **nilai eigen** $\lambda = H(j\Omega)$, karena Ψ memenuhi solusi masalah nilai eigen yang dinyatakan dengan $H\{\Psi(t)\} = \lambda\Psi(t)$.

$$\Psi(t) \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow \lambda\Psi(t)$$

- Effek sistem terhadap sinyal masukan fungsi eigen adalah perkalian skalar: keluaran dinyatakan oleh perkalian sinyal masukan dengan sebuah bilangan kompleks.

$$e^{j\Omega t} \longrightarrow \boxed{\;T\;} \longrightarrow H(j\Omega)e^{j\Omega t}$$

- Dengan menuliskan sinyal sembarang sebagai superposisi fungsi eigen terbobot, kita transformasikan operasi konvolusi menjadi perkalian.

Fungsi Eigen dan Nilai Eigen (2)

- Masukan SLWKTBTW adalah penjumlahan M buah sinusoid kompleks terbobot:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{j\Omega_k t}$$

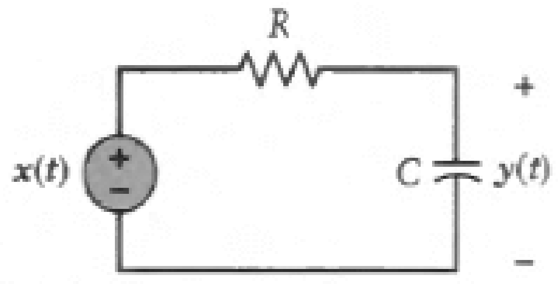
- Bila $e^{j\Omega_k t}$ adalah **fungsi eigen** sistem dengan **nilai eigen** $H(j\Omega_k)$, maka tiap komponen masukan, $a_k e^{j\Omega_k t}$, menghasilkan komponen keluaran $a_k H(j\Omega_k) e^{j\Omega_k t}$. Keluaran sistem dinyatakan sebagai:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{M} a_k H(j\Omega_k) e^{j\Omega_k t}$$

- Keluaran SLWKTBTW adalah penjumlahan M buah sinusoid kompleks terbobot, bobot masukan a_k diubah oleh **respons frekuensi sistem** $H(j\Omega_k)$. Operasi konvolusi, $h(t) * x(t)$, menjadi operasi perkalian, $a_k H(j\Omega_k) e^{j\Omega_k t}$, karena $x(t)$ dinyatakan sebagai penjumlahan fungsi eigen.

Respons Frekuensi Rangkaian RC (1)

- Rangkaian RC:



- Respons impuls: $h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$
- Respons frekuensi:

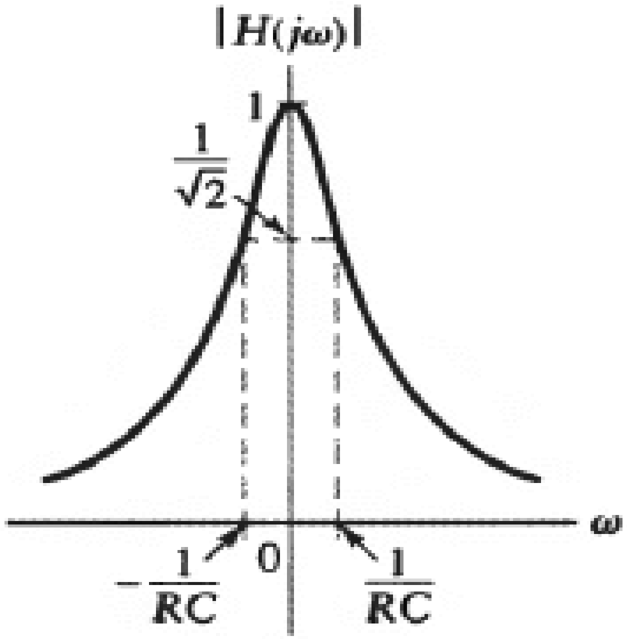
$$H(j\Omega) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau$$

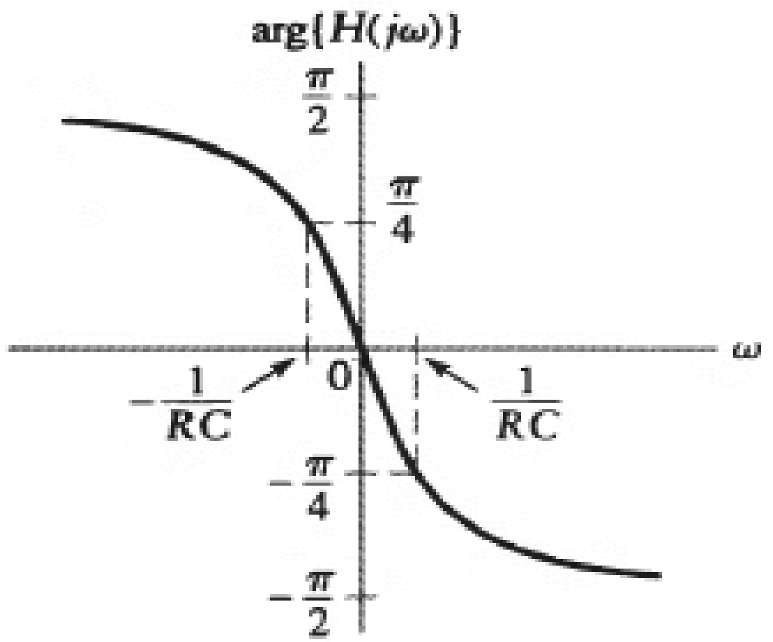
$$H(j\Omega) = \frac{1}{RC} \int_{0}^{\infty} e^{-\left(j\Omega + \frac{1}{RC}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{RC} \frac{-1}{\left(j\Omega + \frac{1}{RC}\right)} e^{-\left(j\Omega + \frac{1}{RC}\right)\tau} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{RC} \frac{-1}{\left(j\Omega + \frac{1}{RC}\right)} (0 - 1) = \frac{\frac{1}{RC}}{j\Omega + \frac{1}{RC}}$$

Respons Frekuensi Rangkaian RC (2)

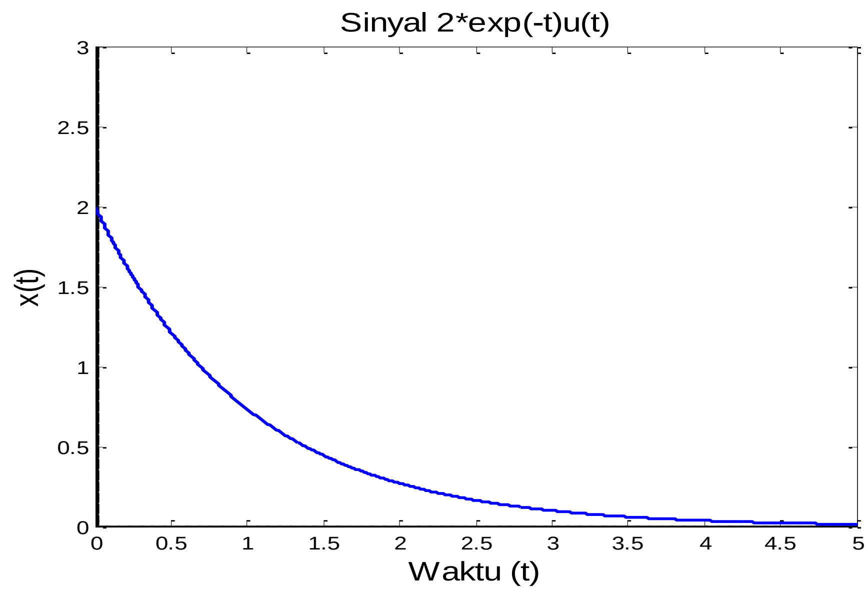
- Respons magnitudo: $|H(j\Omega)| = \dfrac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\Omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}}$
- Respons phasa: $\arg\{H(j\Omega)\} = -\arctan(\Omega RC)$
- Respons magnitudo Respons phasa
- $|H(j\Omega)|$ $arg\{H(j\Omega)\}$



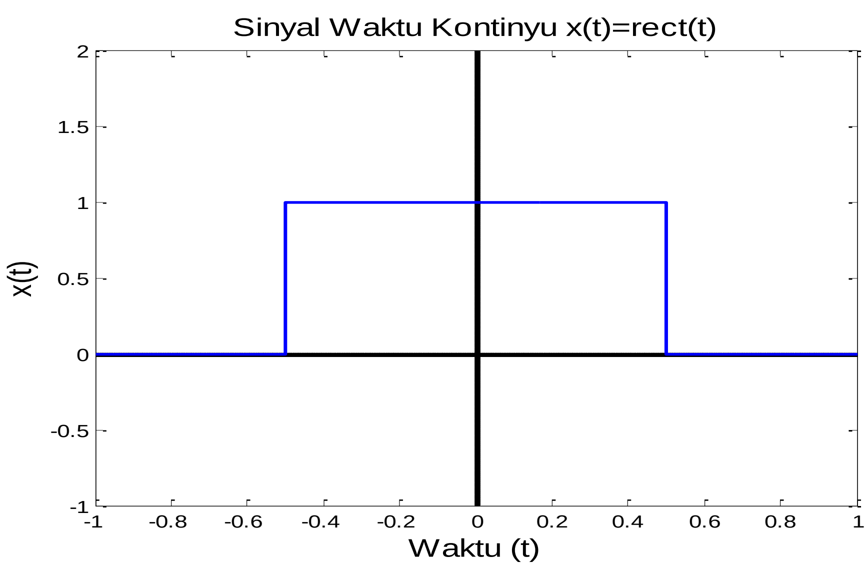


Sinyal Tidak Periodik Waktu Kontinyu

- **Contoh:**
- $x(t) = 2.e^{-t}u(t)$



- $x(t) = \begin{cases} 1 & -0,5 < t < 0,5 \\ 0 & |t| > 0,5 \end{cases}$



Transformasi Fourier

- Transformasi Fourier (TF) dipakai untuk merepresentasikan sinyal tidak periodik waktu kontinyu, sebagai superposisi sinusoid kompleks.
- Representasi TF sebuah sinyal waktu kontinyu $x(t)$ merupakan sebuah integral pada seluruh interval frekuensi:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \qquad (4.1)$$

dimana

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \qquad (4.2)$$

- Pasangan TF $x(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$

Kondisi Dirichlet

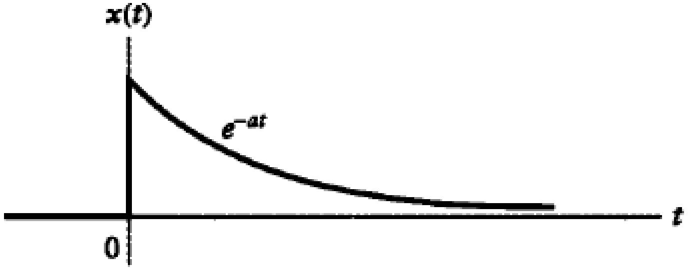
- Nilai absolut $x(t)$ dapat diintegrasikan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

- $x(t)$ mempunyai sejumlah maxima, minima, dan diskontinyuitas yang terbatas di-interval sembarang terbatas.
- Ukuran tiap diskontinyuitas terbatas.

TF Sinyal Eksponensial Riil Menurun (1)

- Dapatkan TF sinyal
- $x(t) = e^{-at}u(t)$



- TF tidak konvergen untuk $a \leq 0$,

$$\int_0^\infty e^{-at}dt = \infty$$

- Untuk $a > 0$:

$$X(j\omega) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-j\Omega t}dt$$

$$X(j\Omega) = \int_0^\infty e^{-(a+j\Omega)t}dt$$

$$X(j\Omega) = -\frac{1}{a+j\Omega}e^{-(a+j\Omega)t}\Big|_0^\infty$$

$$X(j\Omega) = \frac{1}{a+j\Omega}$$

Magnitudo:

$$|X(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\Omega^2}}$$

Sebagai fungsi Ω

Phasa:

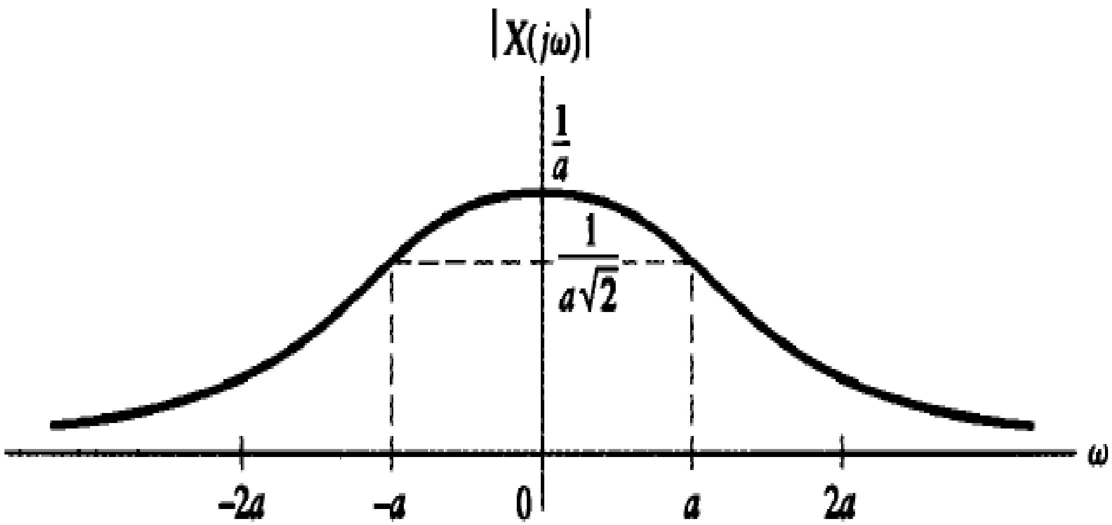
$$\arg\{X(j\Omega)\} = -\arctan(\Omega/a)$$

Sebagai fungsi ω

TF Sinyal Eksponensial Riil Menurun (2)

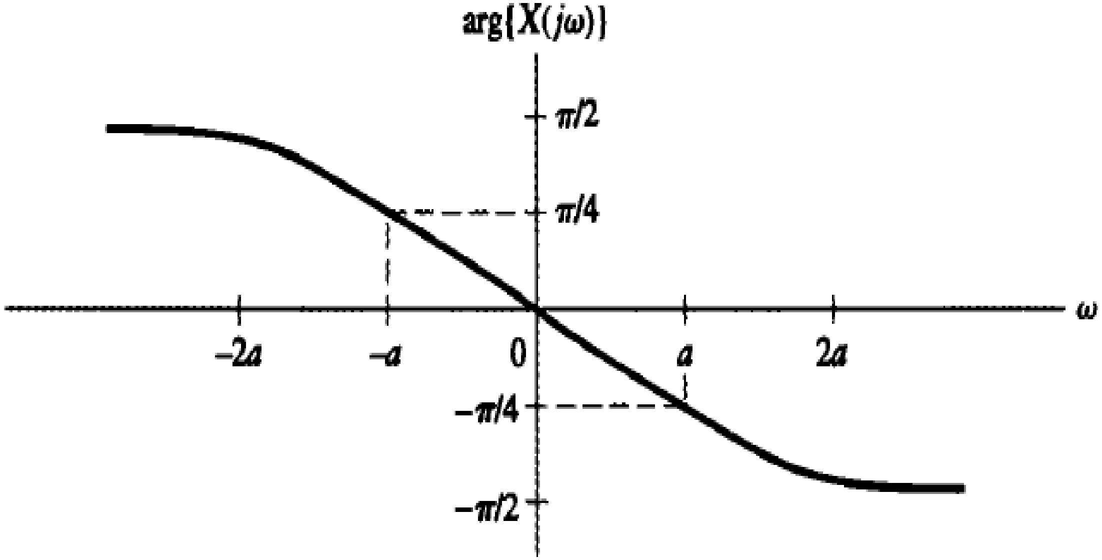
- **Spektrum Magnitudo:**

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\Omega^2}}$$



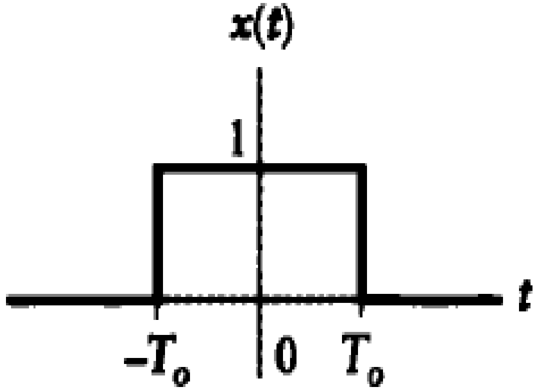
- **Spektrum Phasa:**

$$\arg\{X(j\Omega)\}$$
$$= -\arctan(\Omega/a)$$



TF Pulsa Rectangular (1)

- Dapatkan TF sinyal $x(t) = \begin{cases} 1 & -T_0 < t < T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases}$



TF konvergen untuk $T_0 < \infty$.

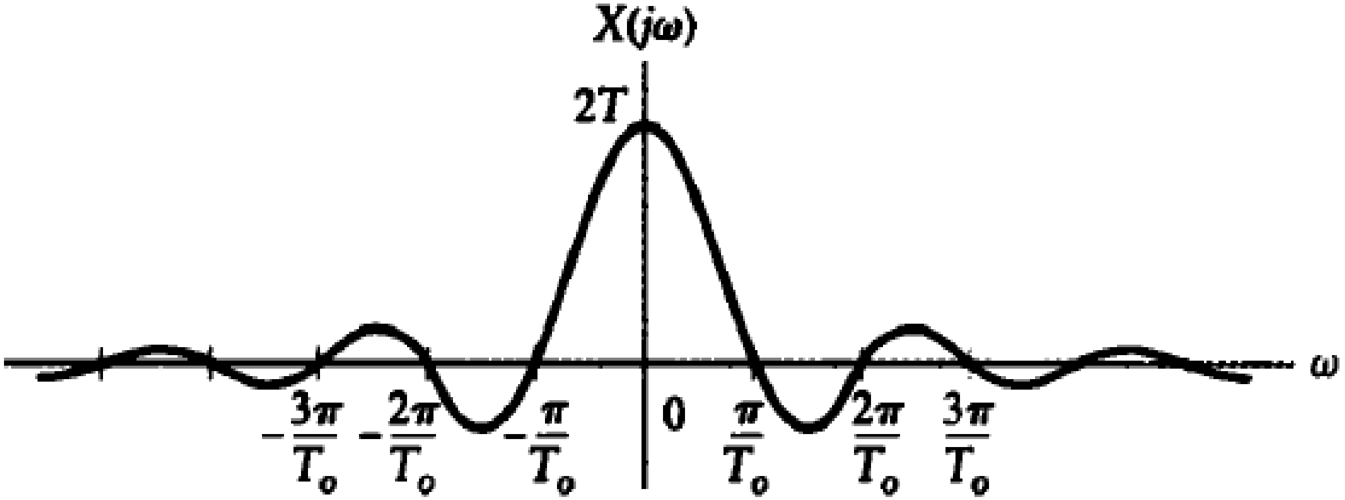
$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-T_0}^{T_0} e^{-j\Omega t}dt$$

$$X(j\Omega) = -\frac{1}{j\Omega}e^{-j\Omega t}\Big|_{-T_0}^{T_0} = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega T_0), \qquad \Omega \neq 0$$

- Untuk $\Omega = 0$, Aturan L'Hopital: $\lim_{\omega \to 0} \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega T_0) = 2T_0$

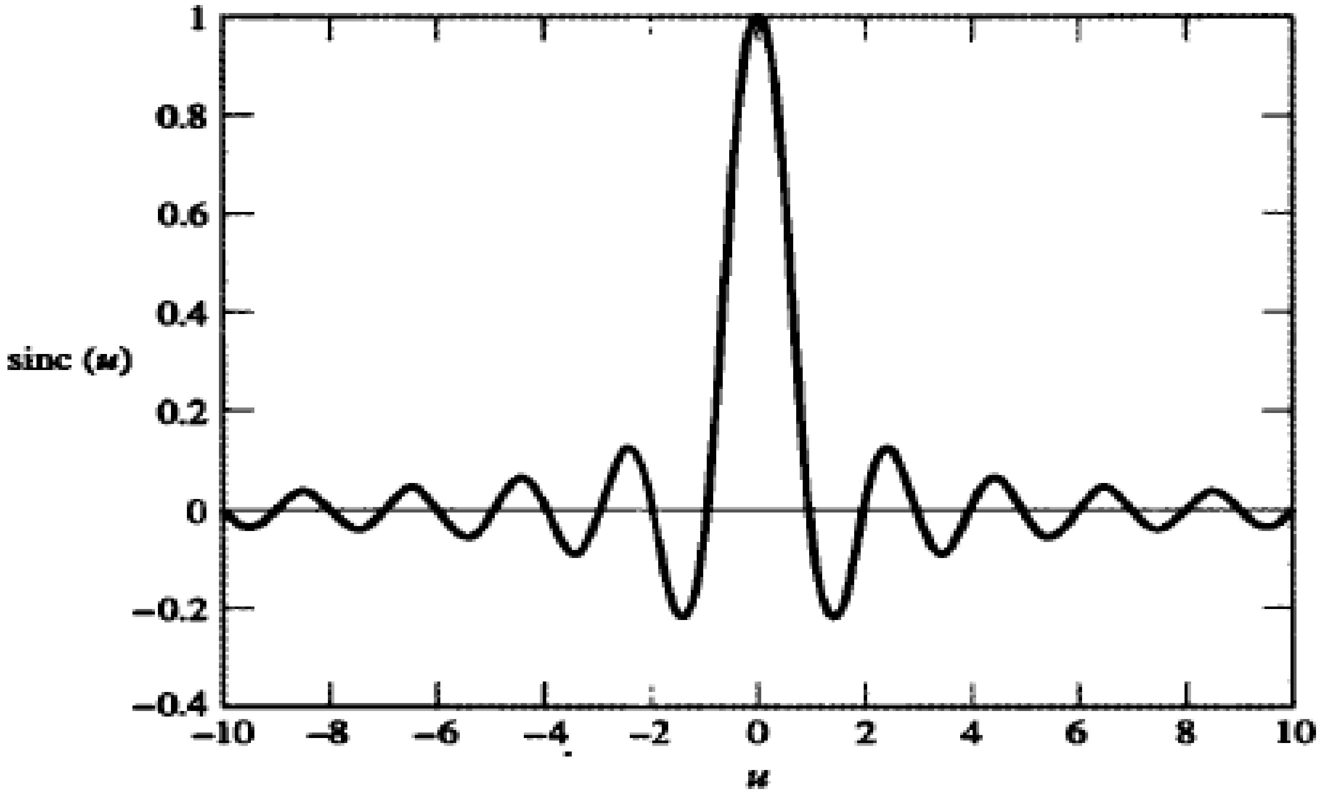
TF Pulsa Rectangular (2)

- Spektrum Magnitudo: $|X(j\Omega)| = \begin{cases} 2\left|\dfrac{\sin(\Omega T_0)}{\Omega}\right| & \Omega \neq 0 \\ 2T_0 & \Omega = 0 \end{cases}$



- Spektrum Phasa: $\arg\{X(j\Omega)\} = \begin{cases} 0 & \dfrac{\sin(\Omega T_0)}{\Omega} > 0 \\ \pi & \dfrac{\sin(\Omega T_0)}{\Omega} < 0 \end{cases}$

Fungsi $\mathrm{sinc}(u) = \dfrac{\sin(\pi u)}{\pi u}$

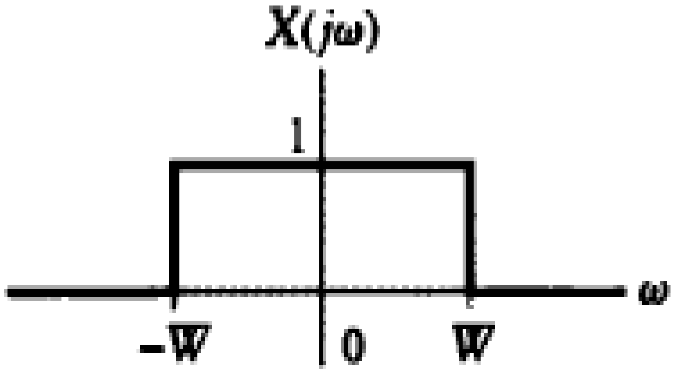


$$X(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T_0)}{\Omega} = 2T_0 \frac{\sin\left(\pi \dfrac{\Omega T_0}{\pi}\right)}{\pi \dfrac{\Omega T_0}{\pi}} = 2T_0 \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} = 2T_0 \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega T_0}{\pi}\right)$$

TF Invers Spektrum Rectangular (1)

- Dapatkan TF invers
- Spektrum:

$$X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & -W < \Omega < W \\ 0 & |\Omega| > W \end{cases}$$



- Kandungan frekuensi sinyal ada di frekuensi rendah.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\Omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi t} e^{j\Omega t} \Big|_{-W}^{W}$$

Diperoleh:

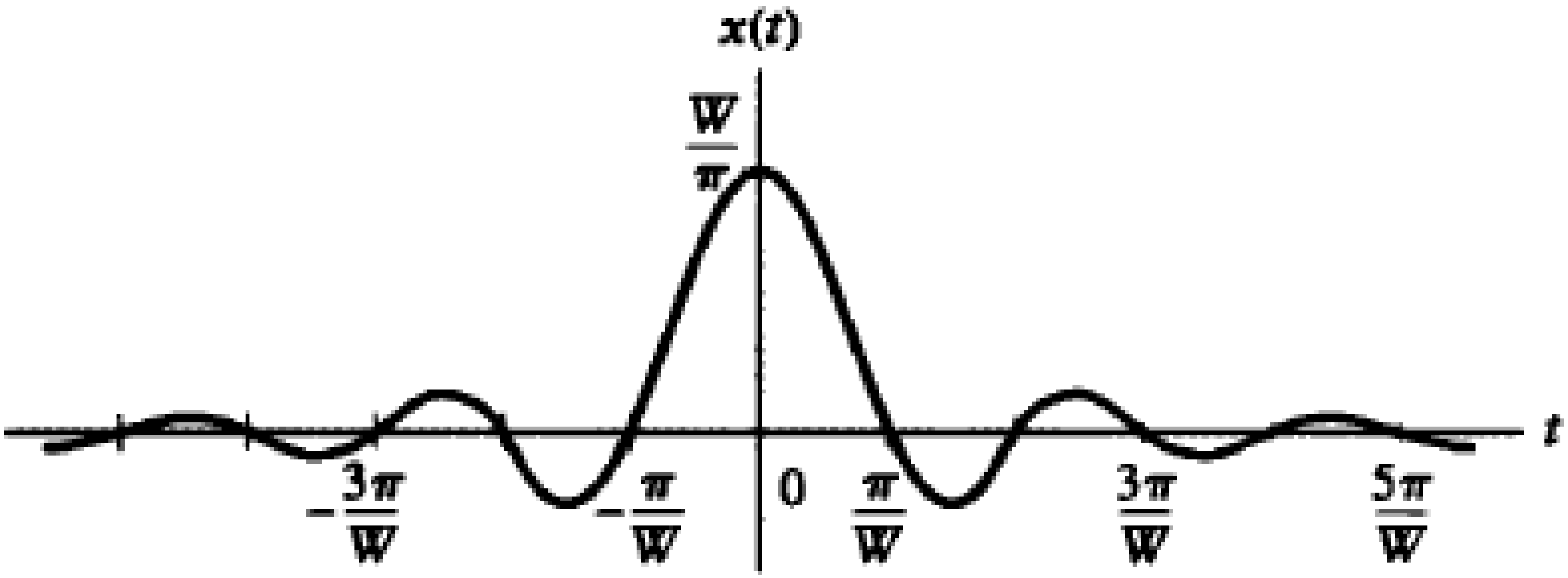
$$x(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(Wt), \;\; t \neq 0$$

- Untuk $t = 0$,
- Aturan L'Hopital:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{\pi t} \sin(Wt) = \frac{W}{\pi}$$

TF Invers Spektrum Rectangular (2)

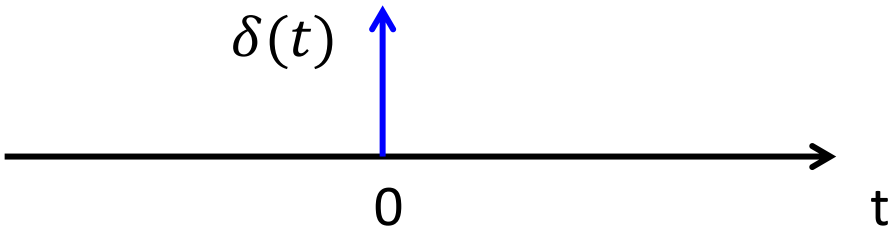
- $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi t}\sin(Wt) & t \neq 0 \\ \frac{W}{\pi} & t = 0 \end{cases}$ atau $x(t) = \begin{cases} \frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) & t \neq 0 \\ \frac{W}{\pi} & t = 0 \end{cases}$



- Dikawasan frekuensi: lebar bidang frekuensi terbatas, dikawasan waktu: durasi sinyal tidak terbatas.

TF Impuls Satuan

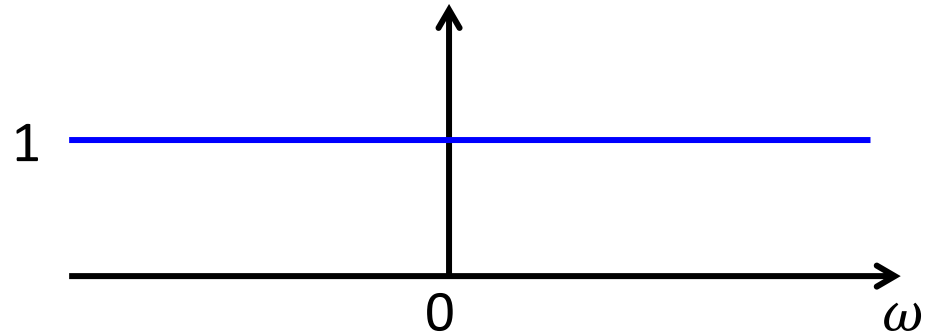
- Dapatkan TF sinyal $x(t) = \delta(t)$



- Sinyal $x(t)$ ini tidak memenuhi kondisi Dirichlet, karena ada diskontinyuitas di $t = 0$.

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\Omega t}dt = 1$$

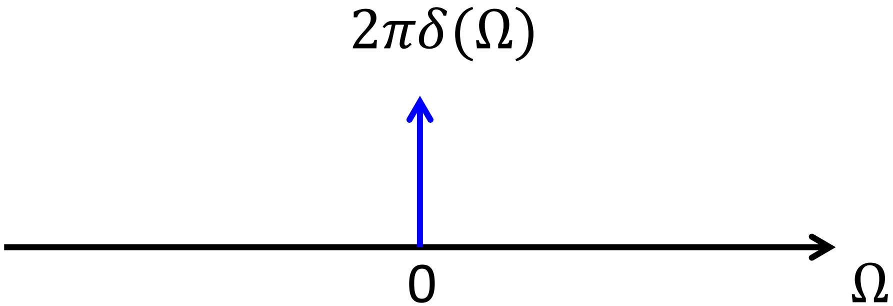
- Pasangan TF: $\delta(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} 1$



- Kandungan frekuensi sinusoid kompleks sinyal impuls satuan terdistribusi dari frekuensi $\Omega = -\infty$ sampai $\Omega = \infty$.

TF Invers Spektrum Impuls

- Dapatkan TF invers spektrum impuls: $X(j\Omega) = 2\pi\delta(\Omega)$



- Spektrum $X(j\Omega)$ ini mempunyai diskontinyuitas di $\Omega = 0$.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = 1$$

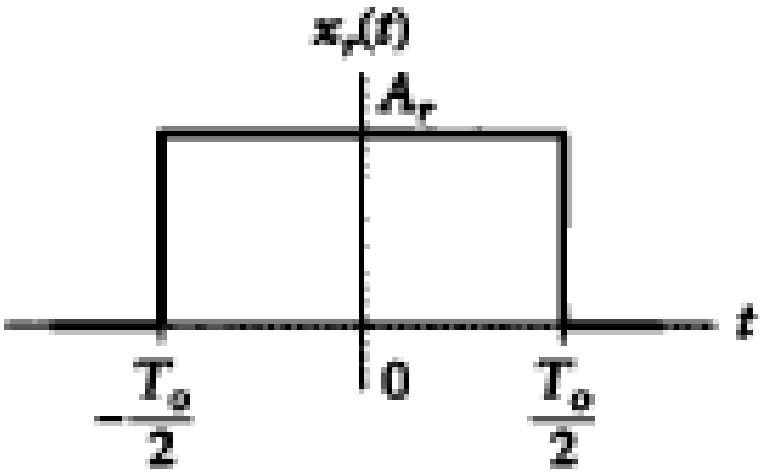
- Pasangan TF: $1 \overset{FT}{\Leftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$
- Kandungan frekuensi sinyal dc terkonsentrasi seluruhnya di $\Omega = 0$.

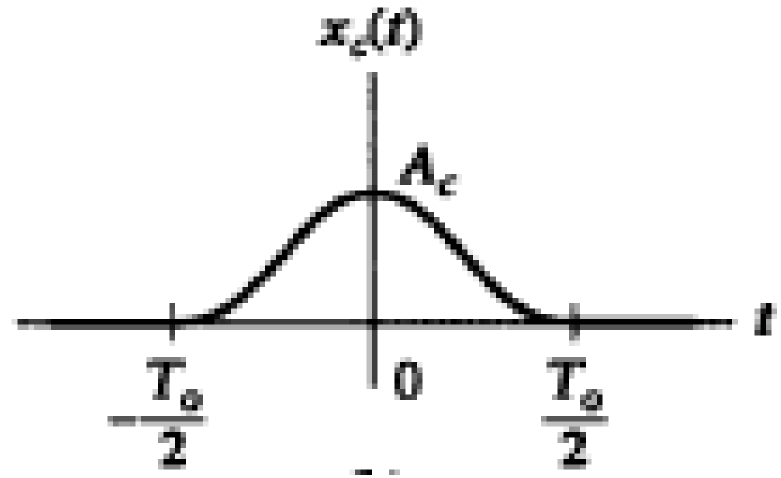
Pasangan TF $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\omega)$

$x(t)$	$X(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\Omega)$
$x(t) = e^{-at}u(t)$	$X(j\Omega) = \dfrac{1}{a + j\Omega}$
$x(t) = \begin{cases} 1 & -T_0 < t < T_0 \\ 0 & \lvert t\rvert > T_0 \end{cases}$	$X(j\Omega) = \begin{cases} \dfrac{2}{\Omega}\sin(\Omega T_0) & \Omega \neq 0 \\ 2T_0 & \Omega = 0 \end{cases}$
$x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi t}\sin(Wt) & t \neq 0 \\ \dfrac{W}{\pi} & t = 0 \end{cases}$	$X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & -W < \Omega < W \\ 0 & \lvert\Omega\rvert > W \end{cases}$

Sistem Komunikasi Digital

- Binary Phase Shift Keying (BPSK)
- Bentuk Pulsa yang dipakai di komunikasi BPSK
- Rectangular pulse $x_r(t)$ Raised cosine pulse $x_c(t)$



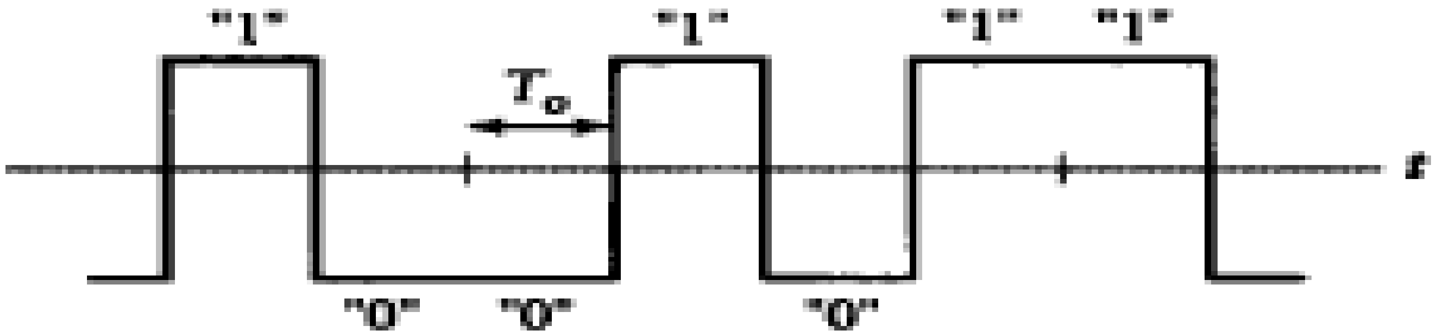


$$x_r(t) = \begin{cases} A_r, & |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

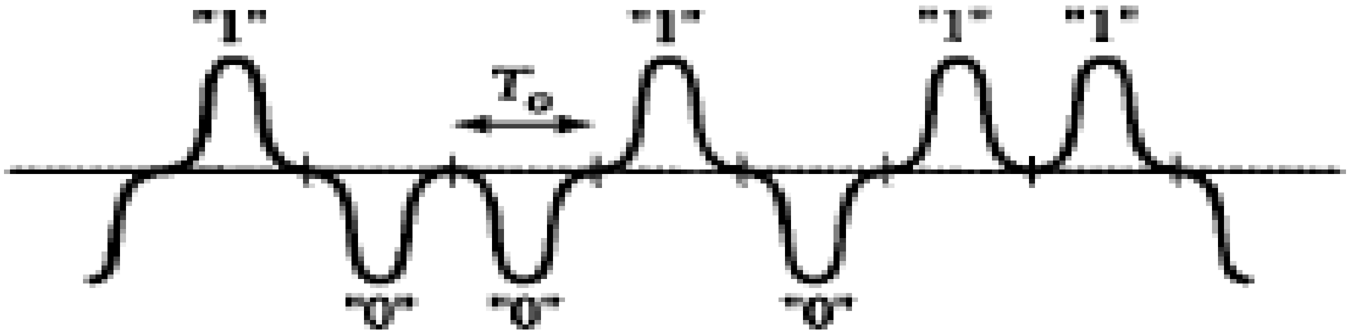
$$x_c(t) = \begin{cases} \left(\frac{A_c}{2}\right)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right)\right), & |t| < \frac{T_0}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

Sinyal BPSK

- **Bentuk Pulsa Rectangular**



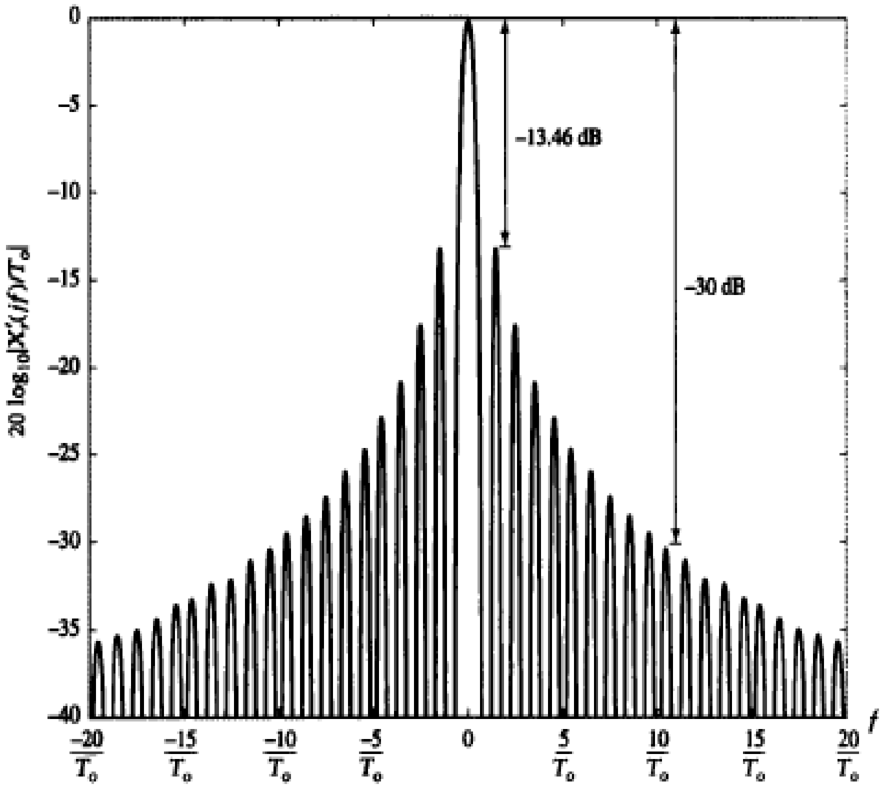
- **Bentuk Pulsa "Raised cosine"**

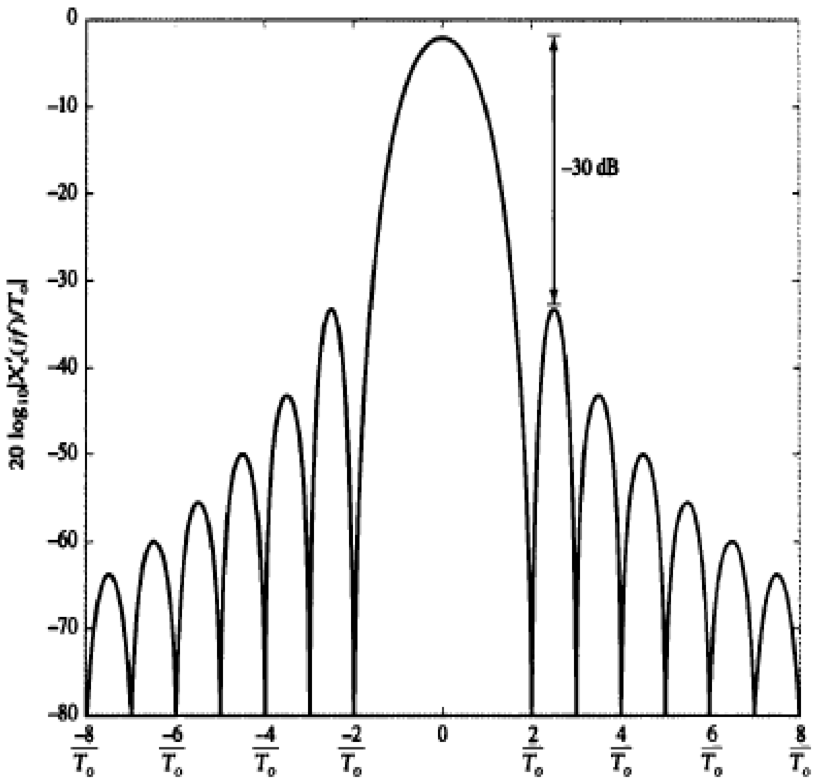


Spektrum

- **Spektrum Pulsa Rectangular dalam dB (normalisasi T_0)**

Spectrum Pulsa "Raised-Cosine" dalam dB (normalisasi T_0)





Sifat-Sifat TF

- Linieritas
- Simetris
- Konvolusi
- Differensiasi
- Integrasi
- Pergeseran Waktu (Time-Shift)
- Pergeseran Frekuensi (Frequency-Shift)
- Perkalian (Multiplication)
- Pen-skalaan (Scaling)
- Hubungan Parseval (Praseval Relationship).
- Hasil kali Waktu-Bandwidth (Time-Bandwidth Product)
- Dualitas

Sifat Linier

- Bila $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$ dan $y(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega)$
- Maka: $z(t) = ax(t) + by(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Z(j\Omega) = aX(j\Omega) + bY(j\Omega)$
- Sifat linier dipakai untuk mendapatkan representasi Fourier signal yang dibangun dari penjumlahan sinyal-sinyal yang TF-nya sudah diketahui.

Sinyal Tidak Periodik	Transformasi Fourier
$x(t)$	$X(j\Omega)$
$y(t)$	$Y(j\Omega)$
$ax(t) + by(t)$	$aX(j\Omega) + bY(j\Omega)$

Sifat Simetris

- Bila $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$, maka:

  Untuk $x(t)$ riil, maka $x(t) = x^*(t) \rightarrow X^*(j\Omega) = X(-j\Omega)$

  $\mathrm{Re}\{X(j\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\Omega)\}$, dan

  $\mathrm{Im}\{X(j\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\Omega)\}$

  Untuk $x(t)$ murni imajiner, maka $x(t) = -x^*(t)$

  $\rightarrow X^*(j\Omega) = -X(-j\Omega)$

  $\mathrm{Re}\{X(j\Omega)\} = -\mathrm{Re}\{X(-j\Omega)\}$, dan

  $\mathrm{Im}\{X(j\Omega)\} = \mathrm{Im}\{X(-j\Omega)\}$

- $x(t)$ riil dan simetris genap:

  $X^*(j\Omega) = X(j\Omega)$, maka $X(j\Omega)$ riil.

- $x(t)$ riil dan simetris ganjil:

  $X^*(j\Omega) = -X(j\Omega)$, maka $X(j\Omega)$ imajiner.

Sistem LWK-TBTW (1)

- Hubungan: $y(t) = H(j\Omega)e^{j\Omega t}$.

$$e^{j\Omega t} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow H(j\Omega)e^{j\Omega t}$$

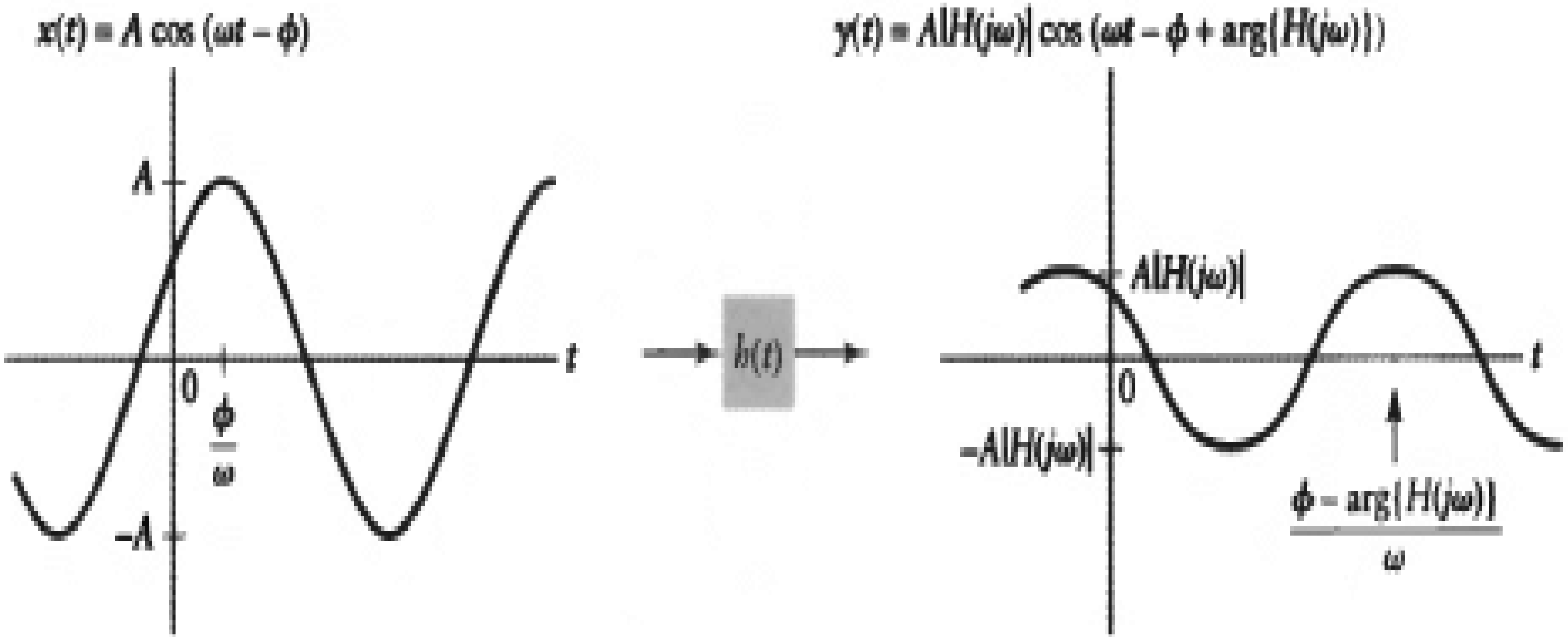
- Sinusoid Kompleks $\Psi(t) = e^{j\Omega t}$ adalah **fungsi eigen SLTBTW** T yang terkait dengan **nilai eigen** $\lambda = H(j\Omega)$, karena Ψ memenuhi persoalan nilai eigen yang dijelaskan oleh persamaan $H\{\Psi(t)\} = \lambda\Psi(t)$.
- Didefinisikan $H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$.
- $H(j\Omega)$ adalah TF respons impuls $h(t)$.
- $e^{j\Omega t} = \cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)$.

Sistem LTBTW (2)

- Bila sinyal masukan: $x(t) = A\cos(\Omega t - \phi)$
- Bila respons impuls riil: $h(t)$ dan $h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} H(j\Omega)$
- Memakai rumus Euler: $x(t) = \left(\frac{A}{2}\right) e^{j(\Omega t - \phi)} + \left(\frac{A}{2}\right) e^{-j(\Omega t - \phi)}$
- Sinyal keluaran: $y(t) = H(j\Omega) e^{j\Omega t}$
- $y(t) =$ $|H(j\Omega)| \left(\frac{A}{2}\right) e^{j(\Omega t - \phi + \arg\{H(j\Omega)\})} + |H(-j\Omega)| \left(\frac{A}{2}\right) e^{-j(\Omega t - \phi - \arg\{H(-j\Omega)\})}$
- Kondisi Simetris: $|H(j\Omega)| = |H(-j\Omega)|$ dan $\arg\{H(j\Omega)\} = -\arg\{H(-j\Omega)\}$
- Maka:
- $y(t) = |H(j\Omega)| A\cos(\Omega t - \phi + \arg\{H(j\Omega)\})$

Sistem LTBTW (2)

- Sistem mengubah amplitudo masukan sinusoid dengan $|H(j\Omega)|$ dan phasa dengan $\arg\{H(j\Omega)\}$



- Ref 1, hal 257

Sifat Konvolusi (1)

- Perhatikan konvolusi dua sinyal tidak periodik waktu kontinyu, sinyal-sinyal $x(t)$ dan $h(t)$, dari definisi:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

TF invers:

$$x(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega(t-\tau)}d\Omega$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}e^{-j\Omega\tau}d\Omega \right] d\tau$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau \right] X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

Sifat Konvolusi (2)

- Karena:

$$H(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\Omega\tau}d\tau$$

- Maka:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega)X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

- Hasil akhir:

$$y(t) = h(t) * x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)$$

Sifat Konvolusi (3)

- Bila $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$ dan $y(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega)$

  Maka:

  $$z(t) = x(t) * y(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Z(j\Omega) = X(j\Omega)Y(j\Omega)$$

  Disimpulkan bahwa konvolusi antara $x(t)$ dengan $y(t)$ dikawasan waktu, menjadi perkalian antara Transformasi Fourier-nya.

- Bila $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$ dan $h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} H(j\Omega)$

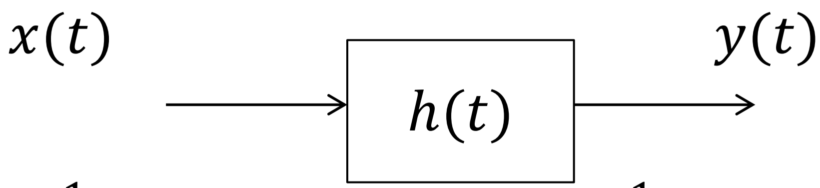
  maka: $y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$

  sehingga:

  $$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} \text{ dan } X(j\Omega) = H^{inv}(j\Omega)Y(j\Omega)$$

Penyelesaian Masalah Konvolusi di Kawasan Frekuensi (1)

- SLTBTW: Hubungan: $y(t) = x(t) * h(t)$.



Bila $x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t)$, dan $h(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(2\pi t)$

Dapatkan sinyal keluaran: $y(t) = x(t) * h(t)$.

- Solusi:

Masalah ini sangat sulit untuk diselesaikan di kawasan waktu.

$$x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi \\ 0, & |\Omega| > \pi \end{cases}$$ sinyal low-pass, BW = π

$$h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < 2\pi \\ 0, & |\Omega| > 2\pi \end{cases}$$ sinyal low-pass, BW = 2π

Penyelesaian Masalah Konvolusi di Kawasan Frekuensi (2)

- Karena $y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)H(j\Omega) = Y(j\Omega)$

  Diperoleh bahwa $Y(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \pi \\ 0, & |\Omega| > \pi \end{cases}$

  Sehingga $y(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t)$

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(2\pi t)} \longrightarrow y(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(\pi t)$$

- Perhatikan soal ini, akan dibahas lagi di pengantar filter analog.

Perhitungan TF Invers Dengan Memakai Sifat Konvolusi (1)

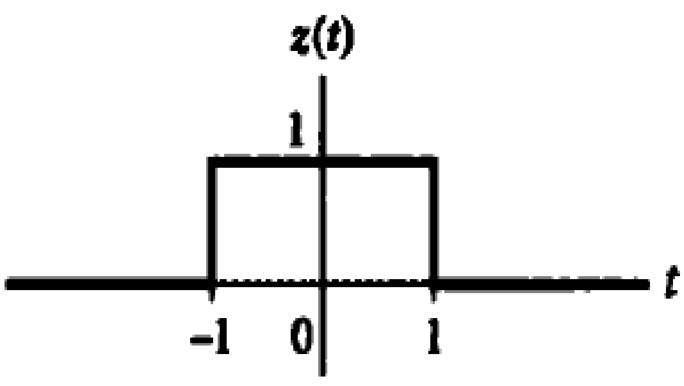
- Memakai sifat konvolusi untuk mendapatkan $x(t)$, dimana

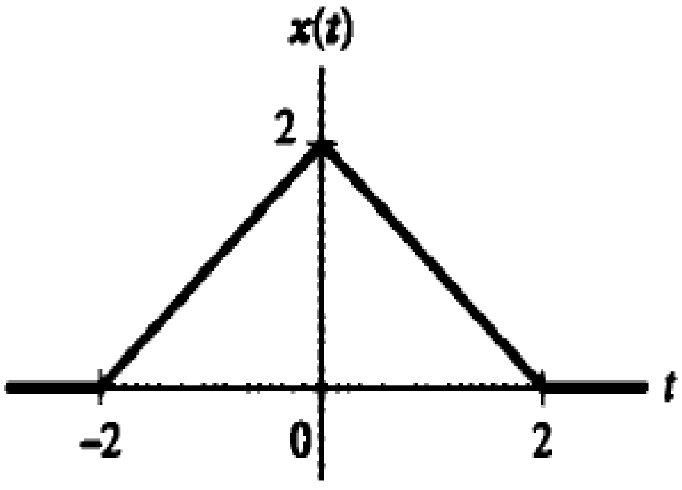
$$x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{4}{\Omega^2}\sin^2(\Omega)$$

- Solusi:
- Kita bisa tulis $X(j\Omega) = \frac{4}{\Omega^2}\sin^2(\Omega) = Z(j\Omega)Z(j\Omega)$,
- Dimana $Z(j\Omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega)$.
- Sifat konvolusi: $z(t) * z(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Z(j\Omega)Z(j\Omega)$,
- sehingga $x(t) = z(t) * z(t)$
- Sedangkan $z(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases} \overset{FT}{\Leftrightarrow} Z(j\Omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega)$.

Perhitungan TF Invers Dengan Memakai Sifat Konvolusi (2)

- $z(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$, and $x(t) = z(t) * z(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$
- $x(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ 2 + t, & -2 \leq t < 0 \\ 2 - t, & 0 \leq t < 2 \\ 0. & t \geq 2 \end{cases} \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{4}{\Omega^2} \sin^2(\Omega).$



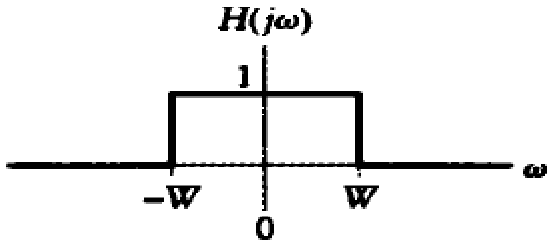


Penapisan (Filtering)

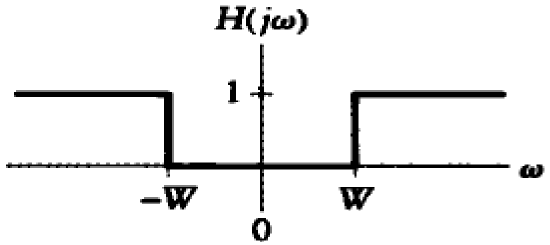
- $y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$
- Representasi perkalian di kawasan frekuensi memberikan pengertian tentang penapisan (filtering).

Response Frequency filter ideal.

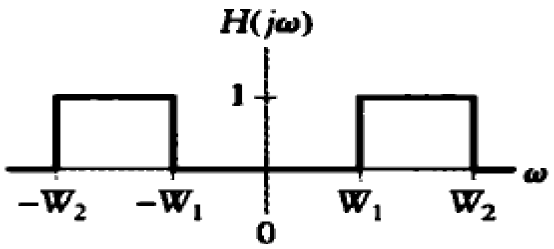
- **Low-pass filter**
- **Filter Lolos Rendah**



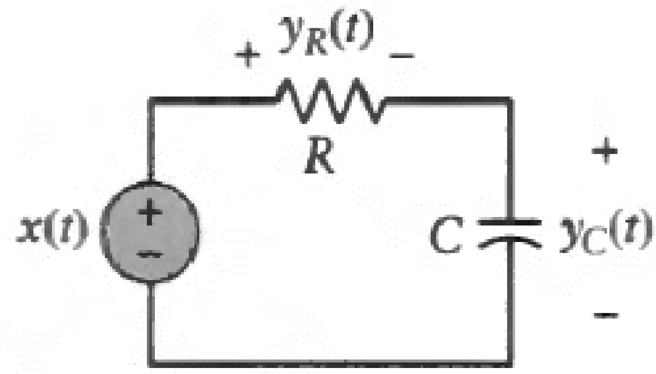
- **High-pass filter**
- **Filter Lolos Tinggi**



- **Band-pass filter**
- **Filter Lolos Tengah**



Rangkaian RC: Penapisan (1)



- Rangkaian RC:

  $y_R(t)$: tegangan di-resistor

  $y_C(t)$: tegangan di-capacitor

- Respons Impuls: $h_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$.

  Terlihat bahwa $y_R(t) = x(t) - y_c(t)$.

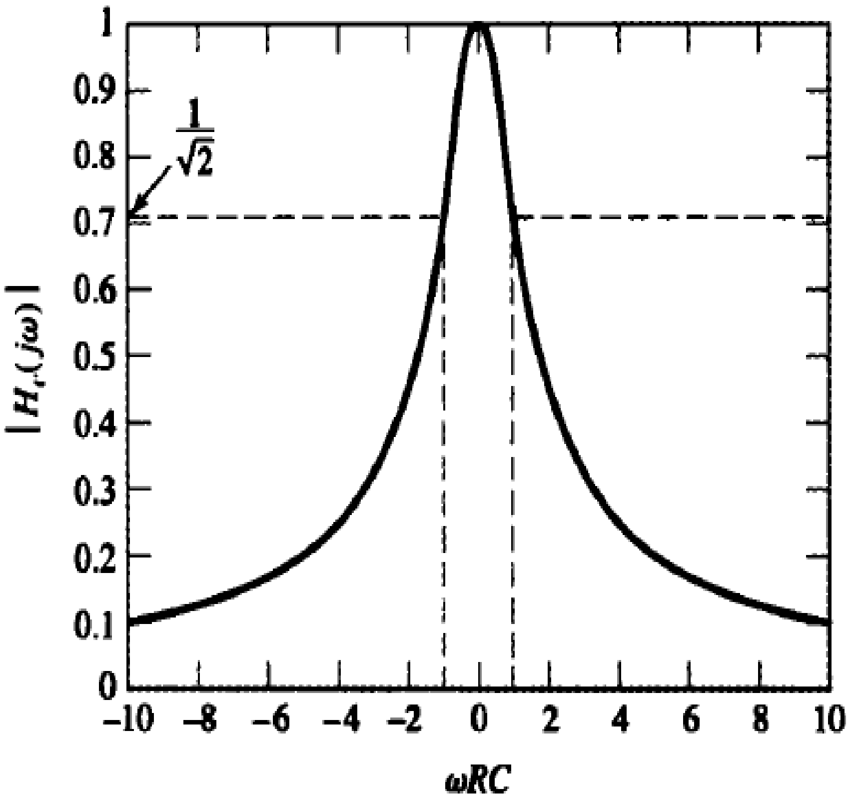
  Bila $x(t) = \delta(t)$, maka $h_R(t) = \delta(t) - h_C(t) = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$.

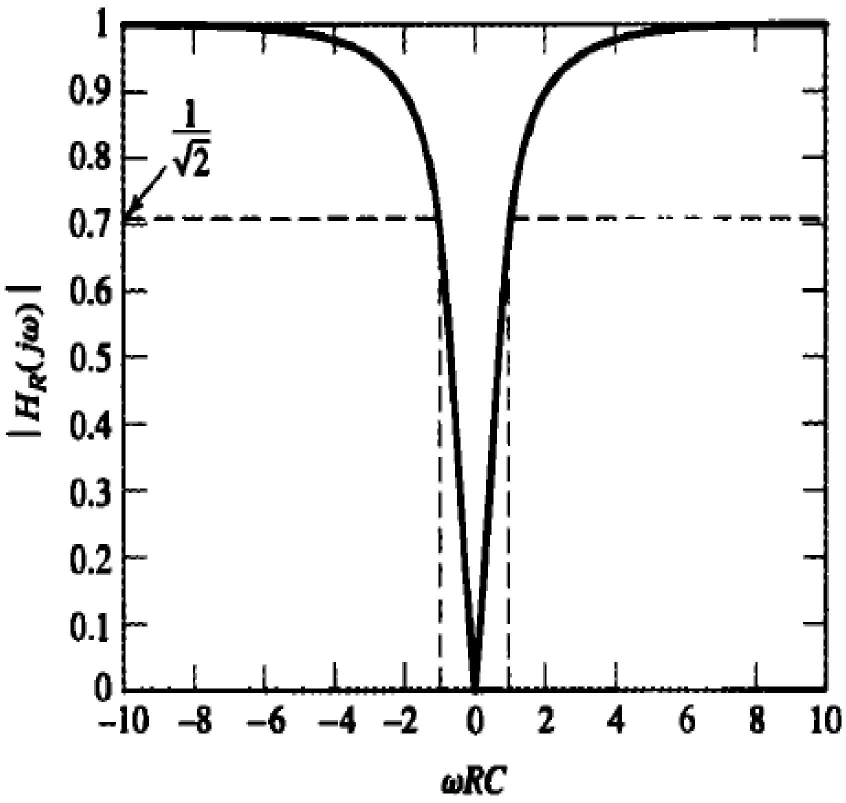
$$h_C(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} H_C(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega RC + 1}$$

$$h_R(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} H_R(j\Omega) = 1 - H_C(j\Omega) = 1 - \frac{1}{j\Omega RC + 1} = \frac{j\Omega RC}{j\Omega RC + 1}$$

Rangkaian RC: Penapisan (2)

- $|H_C(j\Omega)|$ $|H_R(j\Omega)|$

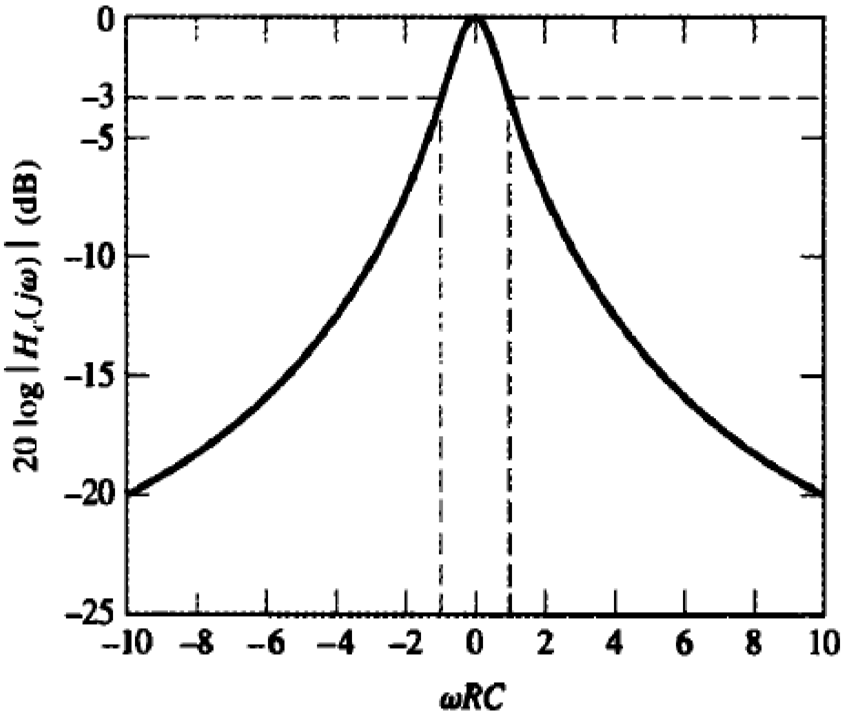


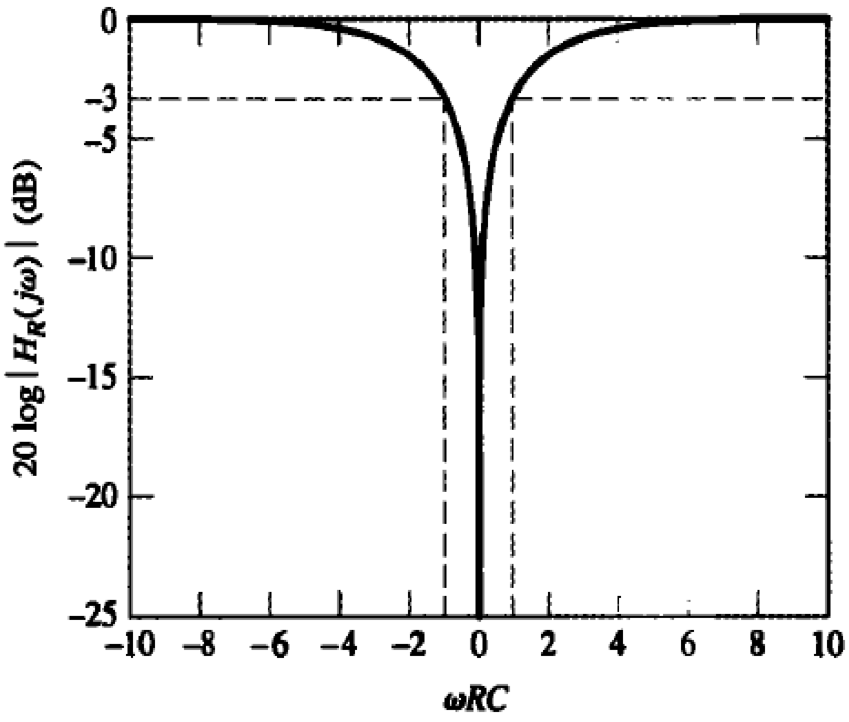


- Skala Linier

Rangkaian RC: Penapisan (2)

- $20\log|H_C(j\omega)| \quad (\mathrm{dB})$ $\qquad$ $20\log|H_R(j\omega)| \quad (dB)$

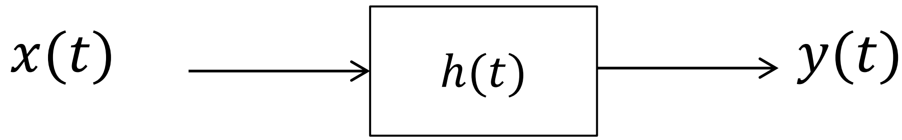




- Rentang dari 0 dB sampai -25 dB

Identifikasi Sistem, Input dan Output diketahui

- Keluaran SLTBTW terhadap masukan $x(t) = e^{-2t}u(t)$
- Adalah $y(t) = e^{-t}u(t)$.



- Dapatkan respons frekuensi dan respons impuls sistem ini.
- Solusi: $x(t) = e^{-2t}u(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{1}{2+j\Omega}$.

$$y(t) = e^{-t}u(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$$

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{2+j\Omega}{1+j\Omega} = \frac{1+j\Omega}{1+j\Omega} + \frac{1}{1+j\Omega} = 1 + \frac{1}{1+j\Omega}$$

$$h(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$$

Differensiasi terhadap Waktu (1)

- Transformasi Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

Differensiasi:

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) j\Omega e^{j\Omega t} d\Omega$$

Terlihat bahwa:

$$\frac{d}{dt} x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} j\Omega X(j\Omega)$$

Differensiasi sinyal di-kawasan waktu, memberikan perkalian transformasi Fourier-nya dengan $j\Omega$ (di-kawasan frekuensi).

Differensiasi terhadap Waktu (2)

- **Contoh**:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}u(t)\right) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{j\Omega}{a+j\Omega}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}u(t)\right) = -ae^{-at}u(t) + e^{-at}\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}u(t)\right) = -ae^{-at}u(t) + \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-at}u(t)\right) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{-a}{a+j\Omega} + 1 = \frac{j\Omega}{a+j\Omega}$$

Differensiasi Terhadap Frekuensi (1)

- Transformasi Fourier

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

Differensiasi:

$$\frac{d}{d\Omega}X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\Omega t}dt$$

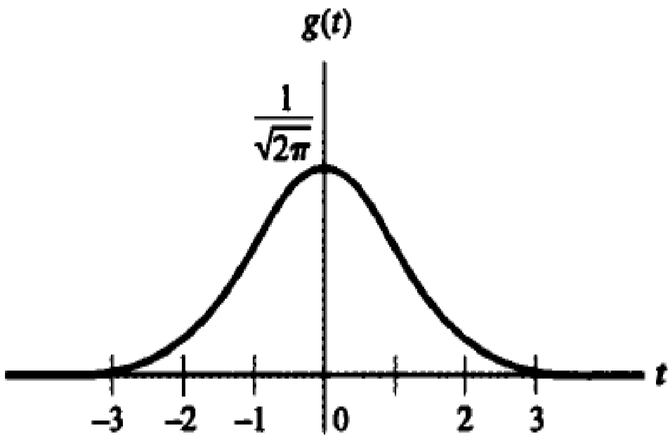
Terlihat bahwa:

$$-jtx(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{d}{d\Omega}X(j\Omega)$$

Differensiasi TF di-kawasan frekuensi, memberikan perkalian sinyal dengan $-jt$ di-kawasan waktu.

Differensiasi Terhadap Frekuensi (2)

- **Contoh**:
- Pulsa Gaussian



$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Tentukan TF sinyal pulsa Gaussian

- Differensiasi terhadap waktu:

$$\frac{d}{dt} g(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = -\frac{2t}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = -tg(t)$$

- Differensiasi terhadap waktu:

$$\frac{d}{dt} g(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} j\Omega G(j\Omega) \Rightarrow -tg(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} j\Omega G(j\Omega)$$

Differensiasi terhadap waktu:

$$-jtg(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{d}{d\Omega} G(j\Omega) \Rightarrow -tg(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j} \frac{d}{d\Omega} G(j\Omega)$$

Differensiasi Terhadap Frekuensi (3)

- Maka:

$$j\Omega G(j\Omega) = \frac{1}{j}\frac{d}{d\Omega}G(j\Omega) \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}G(j\Omega) = -\Omega G(j\Omega)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(t) &= -tg(t) \\ \frac{d}{d\Omega}G(j\Omega) &= -\Omega G(j\Omega) \end{aligned}\right\} \Rightarrow G(j\Omega) = ce^{-\frac{\Omega^2}{2}}$$

$$G(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-j\Omega t} dt$$

Differensiasi Terhadap Frekuensi (4)

Terlihat bahwa:

$$G(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Sedangkan

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Jadi $c = 1$, diperoleh

$$g(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} G(j\Omega) \Rightarrow\Rightarrow \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}} \overset{FT}{\Leftrightarrow} e^{-\frac{\Omega^2}{2}}$$

Integrasi (1)

- Operasi integrasi hanya terhadap variabel tidak bebas kontinyu.
- Definisikan:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Rightarrow \frac{d}{dt}y(t) = x(t)$$

- Bila $y(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega)$, maka $\frac{d}{dt}y(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} j\Omega Y(j\Omega)$.
- Persamaan $\frac{d}{dt}y(t) = x(t)$,
- maka $j\Omega Y(j\Omega) = X(j\Omega) \Rightarrow Y(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega}X(j\Omega)$.

Integrasi (2)

- Persamaan $Y(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega)$
- Berlaku untuk semua Ω, kecuali di $\Omega = 0$.
- Persamaan $\frac{d}{dt} y(t) = x(t)$
- Merusak komponen DC sinyal $y(t)$ dan implikasinya adalah

$$X(j0) \;\; harus\ nol$$

- Hasil yang benar adalah:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\Omega} X(j\Omega) + \pi X(j0)\delta(\Omega)$$

TF Fungsi step satuan (1)

- Fungsi step satuan:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

- Karena $\delta(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} 1$, dari persamaan:

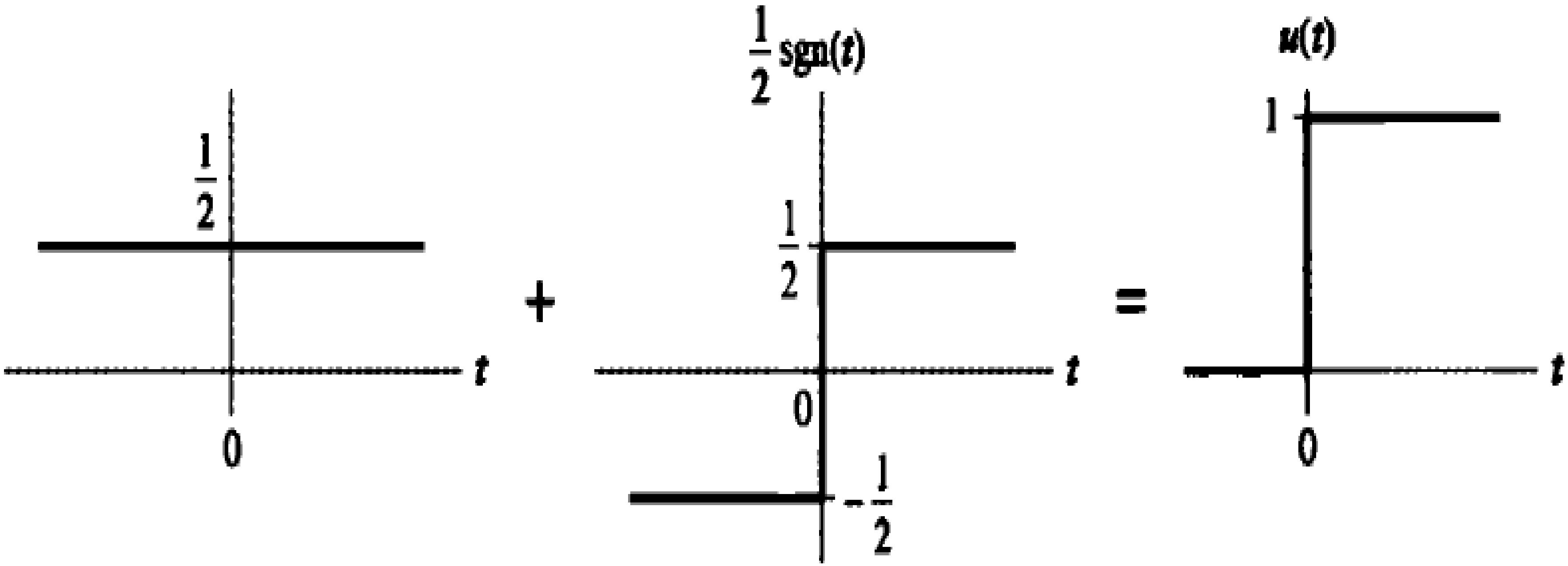
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\Omega}X(j\Omega) + \pi X(j0)\delta(\Omega)$$

- Dengan mengganti $x(t) = \delta(t)$, diperoleh bahwa:

$$u(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

TF Fungsi step satuan (2)

- Bila $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$, dimana $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$

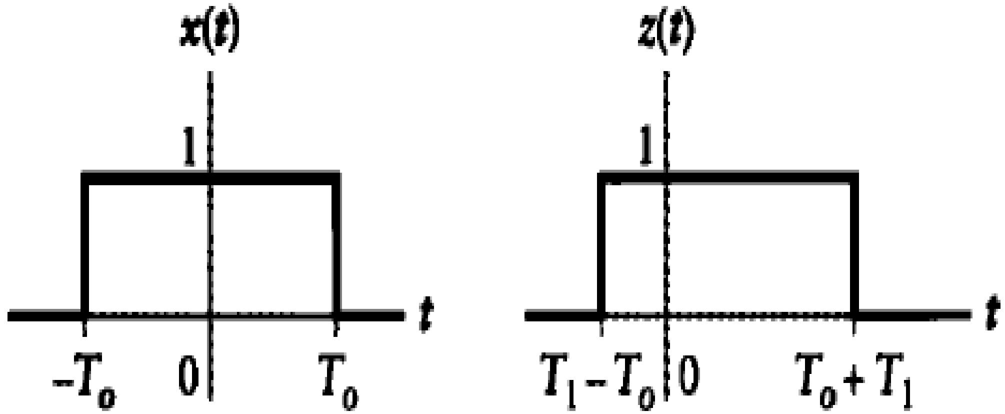


TF Fungsi step satuan (3)

- Diperoleh $\frac{1}{2} \overset{FT}{\Leftrightarrow} \pi\delta(\Omega)$.
- Bila $\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \overset{FT}{\Leftrightarrow} S(j\Omega)$.
- Maka $\frac{d}{dt} sgn(t) = 2\delta(t)$, sehingga $j\Omega S(j\Omega) = 2$.
- $\mathrm{sgn}(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} S(j\Omega) = \begin{cases} \frac{2}{j\Omega}, & \Omega \neq 0 \\ 0, & \Omega = 0 \end{cases}$
- Hasil akhir: $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$

Sifat "Time-Shift"

- Bila $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$
- Maka $x(t - t_0) \overset{FT}{\Leftrightarrow} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$
- Bila sinyal digeser dalam waktu, magnitudo Transformasi Fourier tidak berubah dan memberikan pergeseran phasa yang fungsi linier frekuensi.
- Contoh:



- $X(j\omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega T_0)$, maka $Z(j\Omega) = e^{-j\Omega T_1}\frac{2}{\Omega}\sin(\Omega T_0)$

Sifat "Frequency-Shift"

- Bila $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$, maka $e^{j\gamma t}x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X\big(j(\Omega - \gamma)\big)$
- Pergeseran frekuensi berhubungan dengan perkalian di-kawasan waktu oleh sinusoid kompleks dimana frekuensi-nya sama dengan besarnya pergeseran frekuensi.
- Contoh: tentukan TF pulsa sinusoidal kompleks
- $z(t) = \begin{cases} e^{j10t}, & |t| < \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$
- Bisa ditulis: $z(t) = e^{j10t}.x(t)$, dimana $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \pi \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$
- Kita tahu bahwa $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega\pi)$.
- Sifat Freq-shift: $e^{j10t}x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j(\Omega - 10))$.
- Diperoleh: $z(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Z(j\Omega) = \frac{2}{\Omega - 10}\sin((\Omega - 10)\pi)$.

Sifat Perkalian (1)

- Bila $x(t)$ dan $z(t)$ adalah tidak periodik.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\alpha) e^{j\alpha t} d\alpha$$

- dan

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z(j\beta) e^{j\beta t} d\beta$$

$$y(t) = x(t)z(t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\alpha) Z(j\beta) e^{j(\alpha+\beta)t} d\alpha d\beta$$

Sifat Perkalian (2)

- Perubahan variabel $\beta = \Omega - \alpha$ untuk mendapatkan

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\alpha)Z\big(j(\Omega-\alpha)\big)d\alpha\right]e^{j\Omega t}d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * Z(j\Omega)\right]e^{j\Omega t}d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} Y(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$$

- Diperoleh

$$y(t) = x(t)z(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X(j\Omega) * Z(j\Omega)$$

- Dimana

$$X(j\Omega) * Z(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\alpha)Z(j\beta)d\alpha$$

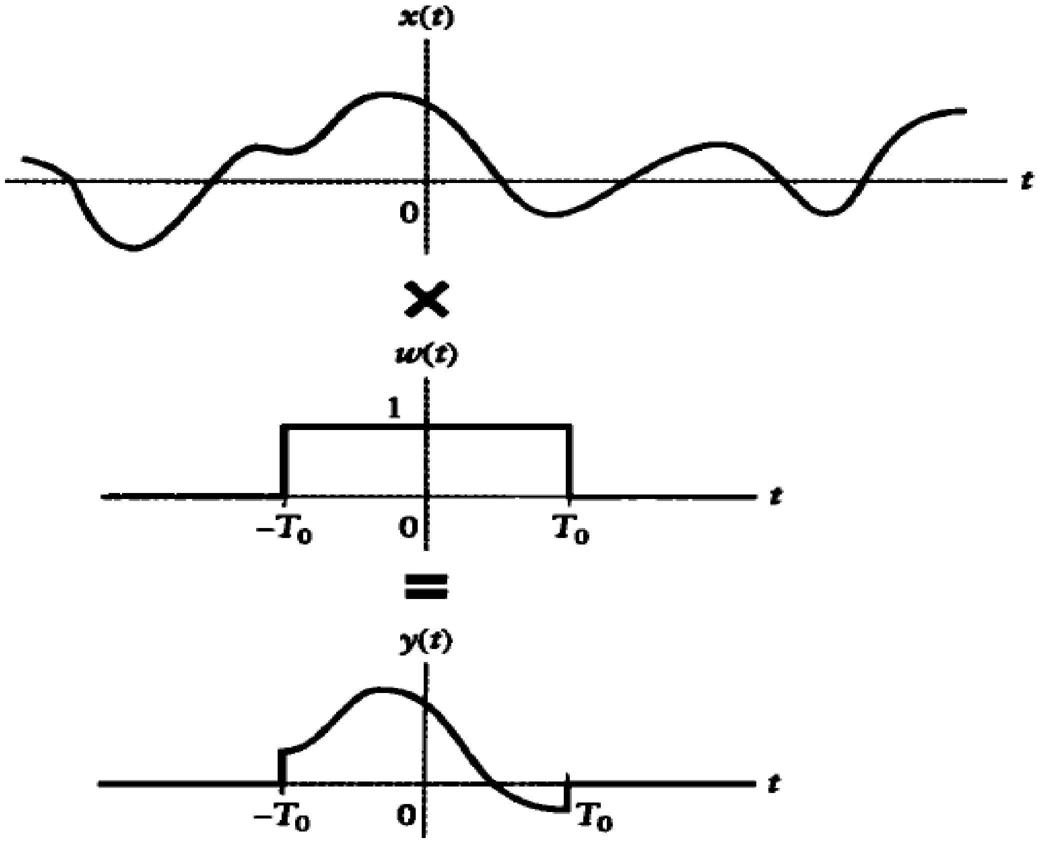
Sifat Perkalian (3)

- Sifat perkalian memungkinkan kita untuk mempelajari pemotongan sinyal di-kawasan waktu, dan akibatnya di-kawasan frekuensi.
- Proses pemotongan sinyal disebut “windowing”.

- Signal $x(t)$.

- Fungsi “Window” $w(t)$ adalah “rectangular window”

- Sinyal ter”window” $y(t) = x(t)w(t)$.



Sifat Perkalian (4)

- Contoh:
- $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$
- $w(t)$ adalah rectangular window.

$w(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} W(j\Omega)$

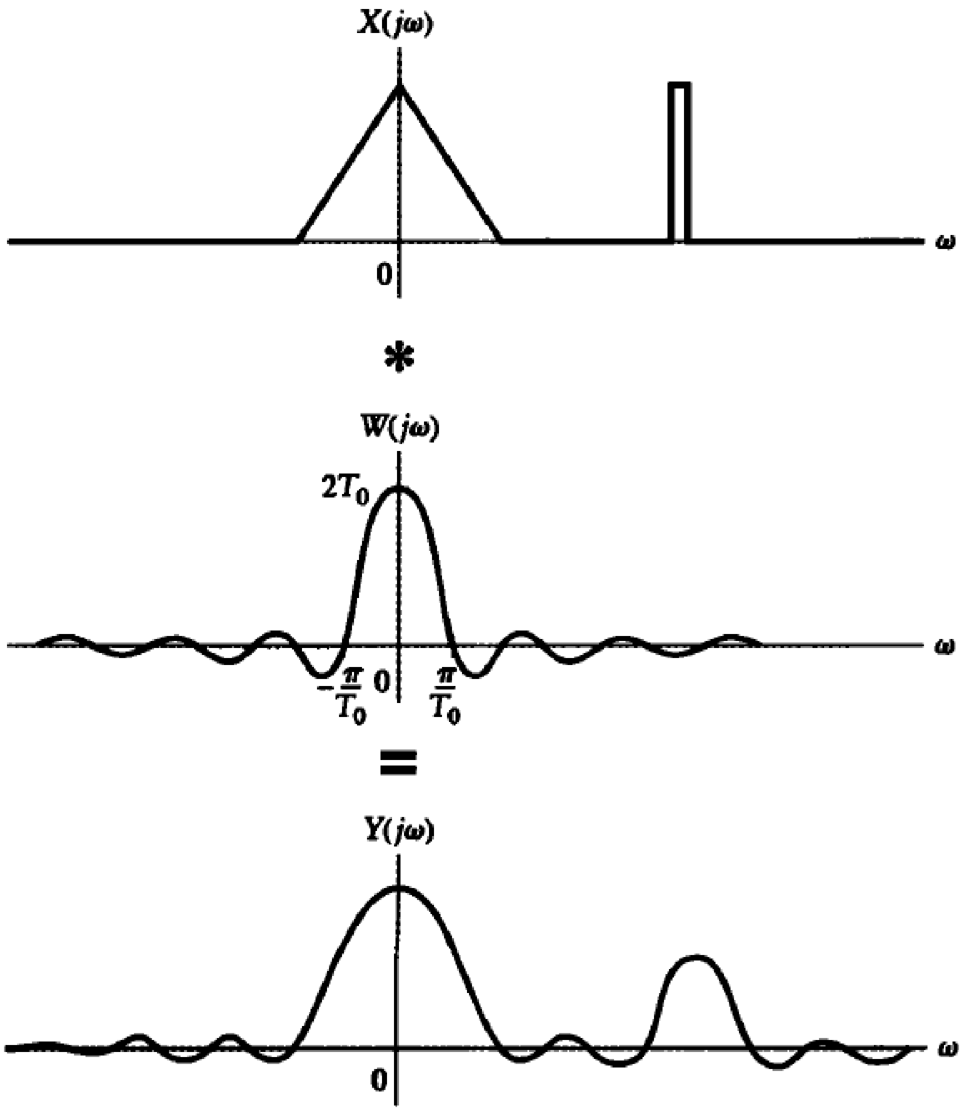
$W(j\Omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega T_0)$

- Sinyal ter"window"

$y(t) = x(t)w(t)$.

$y(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega)$

$Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * W(j\Omega)$



Sifat Penskalaan (1)

- Bila $z(t) = x(at)$, dimana a adalah konstanta, maka:

$$Z(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\Omega t}dt$$

- Ubah variabel $\tau = at$, untuk mendapatkan

$$Z(j\Omega) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{a}\right) \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\left(\frac{\Omega}{a}\right)\tau}d\tau, & a > 0 \\ \left(\dfrac{1}{a}\right) \displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} x(\tau)e^{-j\left(\frac{\Omega}{a}\right)\tau}d\tau, & a < 0 \end{cases}$$

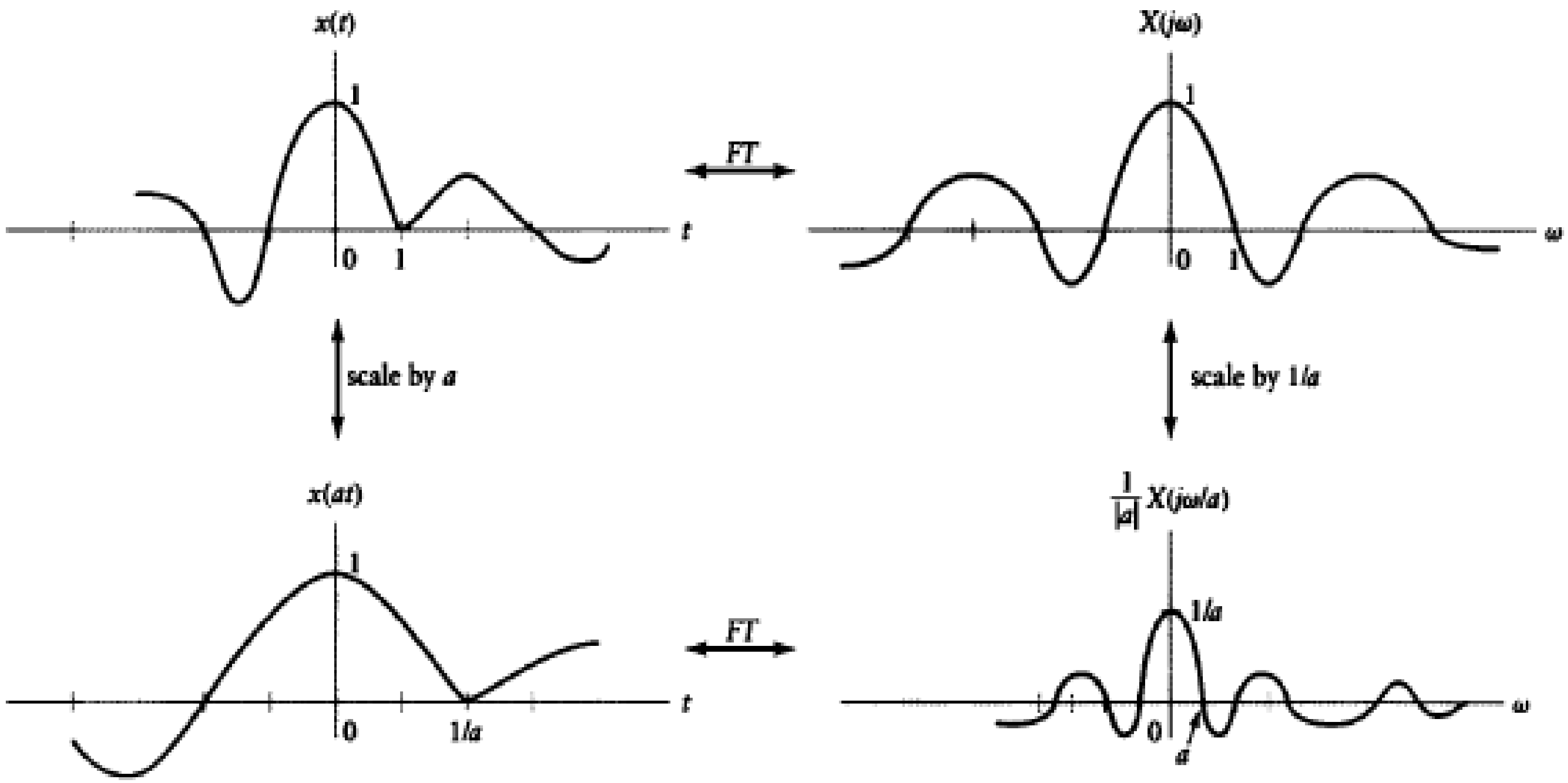
- Dua integral digabung

$$Z(j\Omega) = \left(\frac{1}{|a|}\right) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\left(\frac{\Omega}{a}\right)\tau}d\tau$$

Sifat Penskalaan (2)

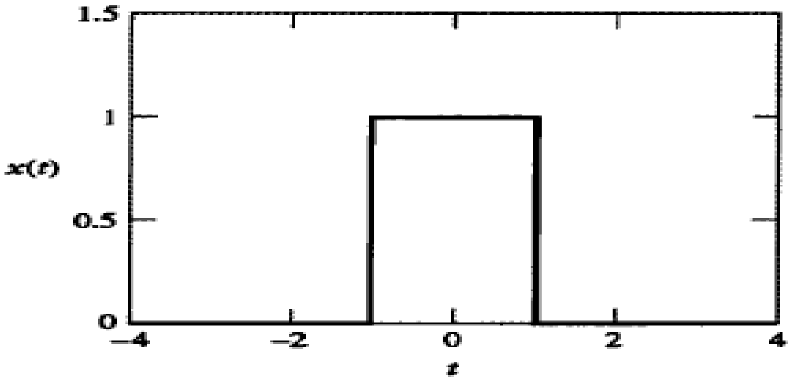
$$z(t) = x(at) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \left(\frac{1}{|a|}\right) X\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$$

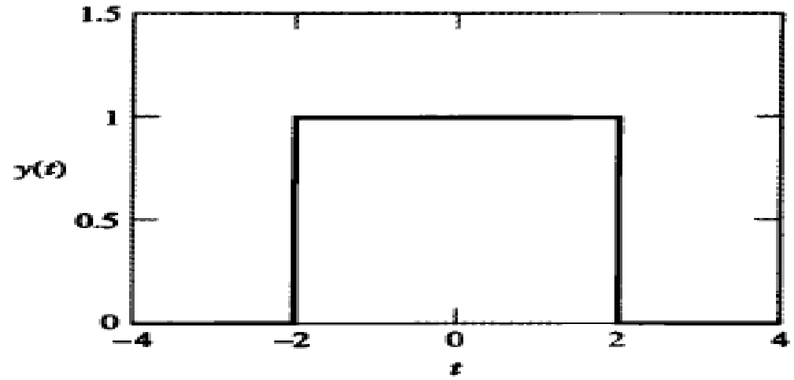
- Asumsi bahwa $0 < a < 1$ adalah konstanta.



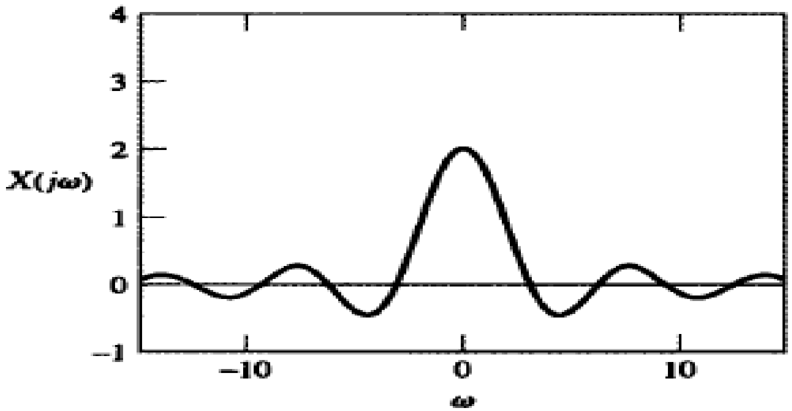
Sifat Penskalaan (2)

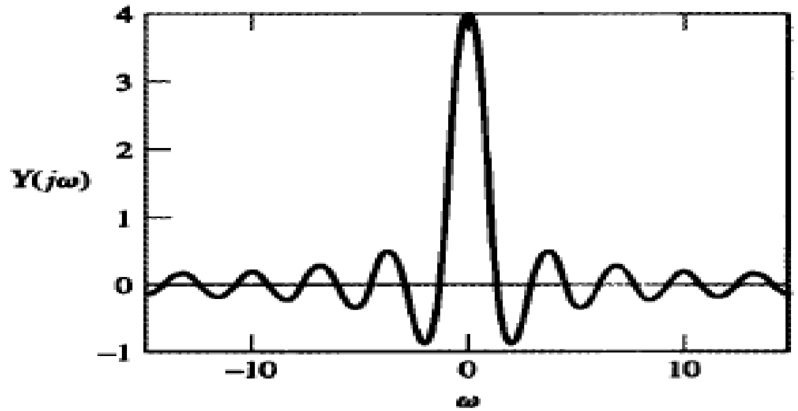
- $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ $\qquad y(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 2 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases} = x\left(\frac{t}{2}\right)$





- $X(j\Omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(\Omega)$ $\qquad Y(j\omega) = 2X(j2\Omega) = \frac{2}{\Omega}\sin(2\Omega)$





Hubungan Parseval (1)

- Hubungan Parseval menyatakan bahwa energi atau daya sinyal di-kawasan waktu adalah sama dengan energi atau daya di-kawasan frekuensi.
- Energy didalam sinyal tidak periodik kawasan waktu kontinyu:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega \Rightarrow x^*(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega)e^{-j\Omega t}d\omega$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega)e^{-j\Omega t}d\Omega\right]dt$$

$$E_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\Omega t}dt\right\}d\Omega$$

Hubungan Parseval (2)

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(j\Omega) X(j\Omega) d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega$$

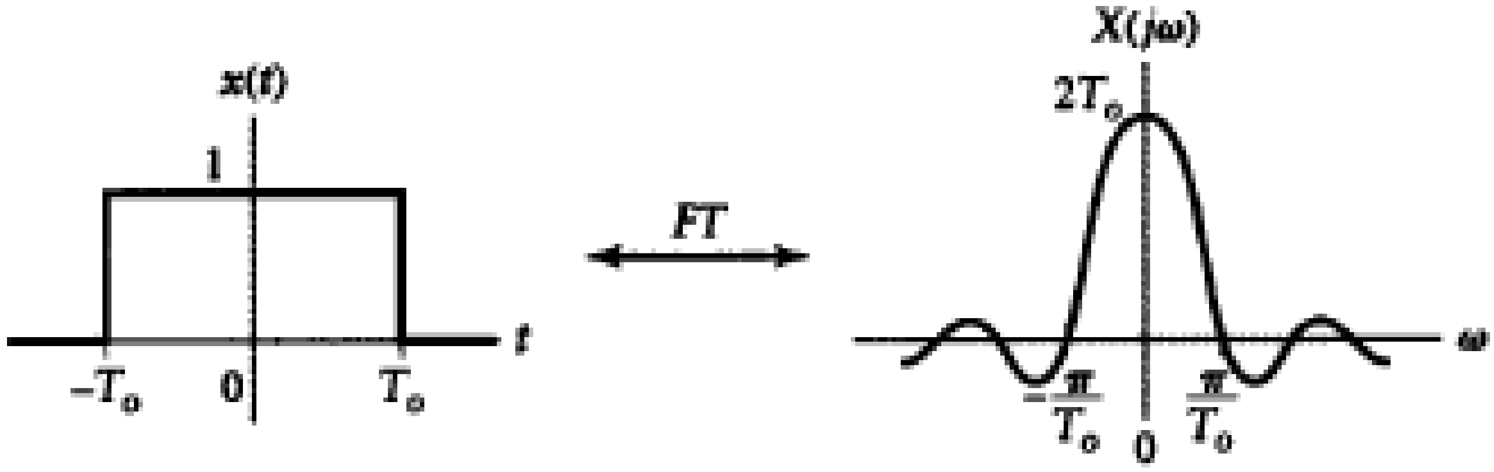
- Kesimpulan:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 \, d\Omega$$

- Energi representasi sinyal di-kawasan waktu sama dengan energi representasi sinyal di-kawasan frekuensi, di-normalisasi terhadap 2π.
- Besaran $|X(j\Omega)|^2$ yang digambarkan sebagai fungsi Ω disebut "**energy spectrum**" sinyal.

Perkalian "Time-Bandwidth" (1)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T_0)}{\Omega}$$

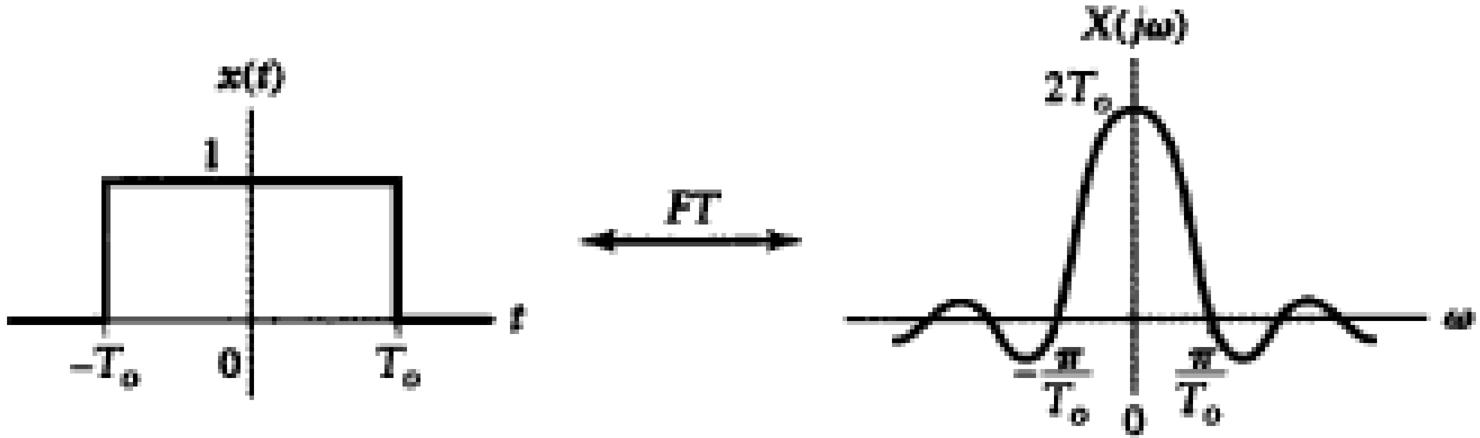


- Durasi effektif sinyal $x(t)$:

$$T_d = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}}$$

Perkalian "Time-Bandwidth" (2)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = \frac{2\sin(\Omega T_0)}{\Omega}$$



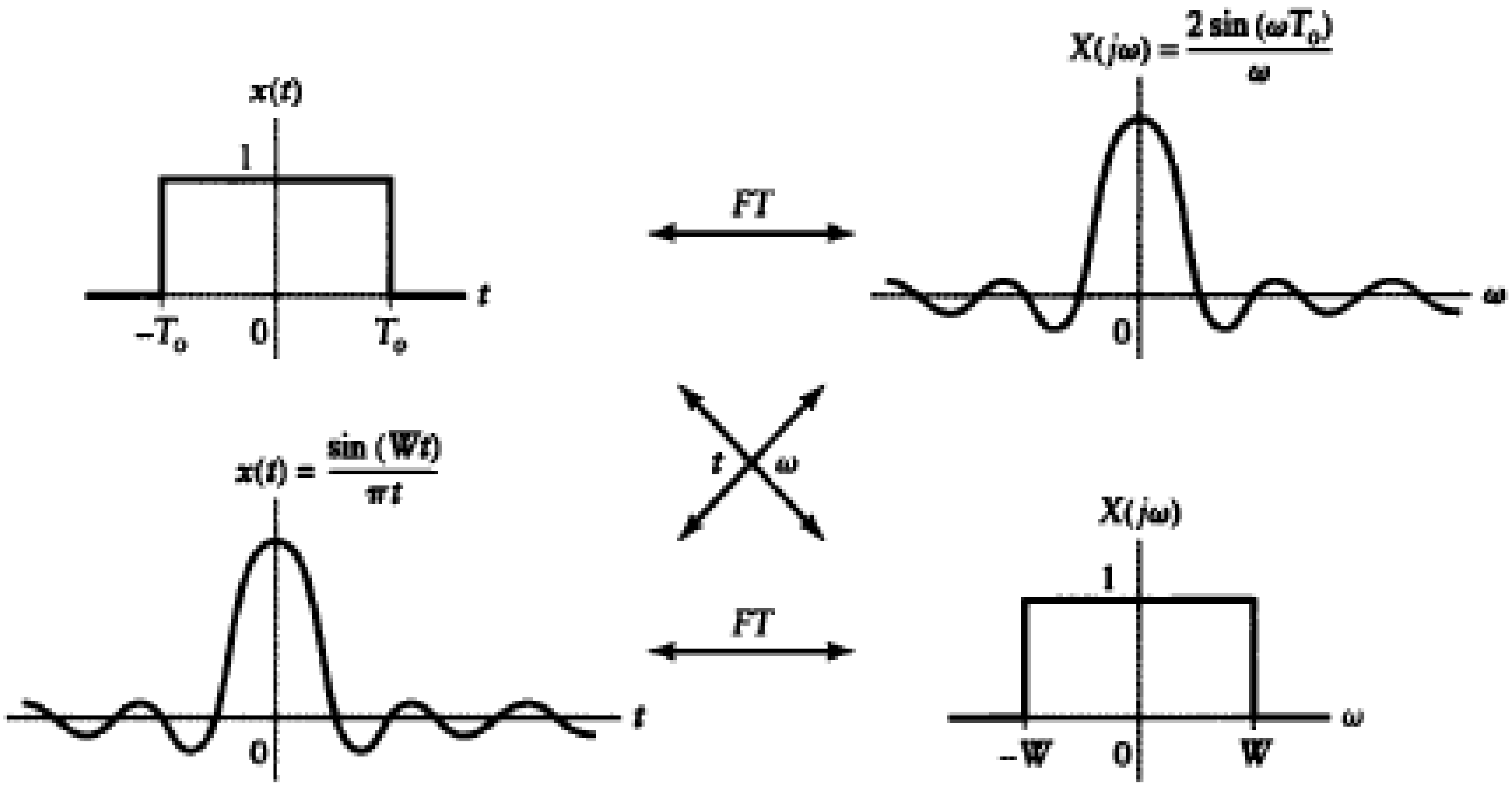
- Bandwidth $x(t)$:

$$B_w = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 |X(j\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(j\Omega)|^2 d\Omega}}$$

$$T_d B_w \ge \frac{1}{2}$$

Dualitas (1)

- Pulsa rectangular di-kawasan waktu atau di-kawasan frekuensi berhubungan dengan fungsi sinc di-kawasan frekuensi atau di-kawasan waktu:



Dualitas (2)

- Impuls di-kawasan waktu ber-transformasi ke frekuensi konstan, sedangkan konstanta di-kawasan waktu ber-transformasi ke impuls di-kawasan frekuensi.

$$\delta(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} 1 \text{ dan } 1 \overset{TF}{\Leftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$$

- Konvolusi di-satu kawasan berhubungan dengan modulasi di-kawasan lain.

$$x(t) * y(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)Y(j\Omega) \text{ dan } x(t)y(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2\pi} X(j\Omega) * Y(j\Omega)$$

- Differensiasi di-satu kawasan berhubungan dengan perkalian oleh variabel bebas di-kawasan lain.

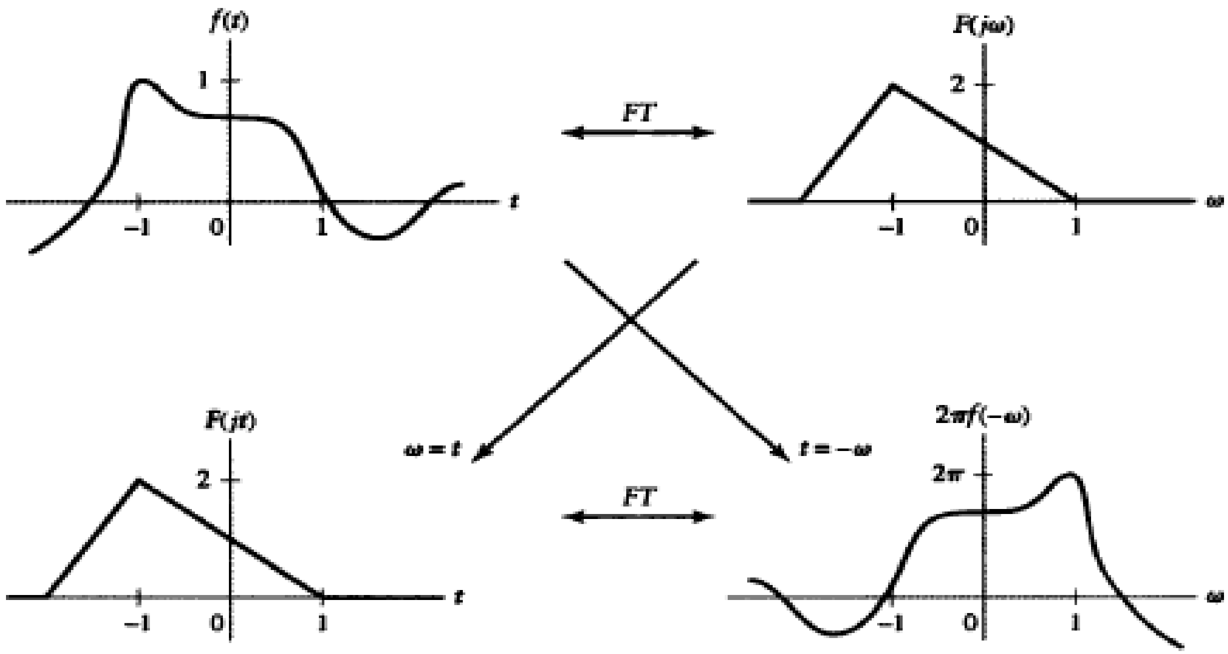
$$\frac{d}{dt}x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} j\Omega X(j\Omega) \text{ dan } -jtx(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{d}{d\Omega}X(j\Omega)$$

Sifat Dualitas Transformasi Fourier

- $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)e^{j\Omega t}d\Omega$ dan $X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt.$
- Bila ada pasangan TF: $f(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} F(j\Omega),$

  maka kita dapat menukar waktu dan frekuensi untuk mendapatkan

  pasangan TF baru: $F(jt) \overset{FT}{\Leftrightarrow} 2\pi f(-\Omega).$



TF Invers (1)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (4.1)$$

dimana

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (4.2)$$

- Pasangan TF $x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$

$$X(j\Omega) = \frac{b_M (j\Omega)^M + \cdots + b_1 (j\Omega) + b_0}{(j\Omega)^N + a_{N-1} (j\Omega)^{N-1} + \cdots + a_1 (j\Omega) + a_0} = \frac{B(j\Omega)}{A(j\Omega)}$$

TF Invers (2)

- Menentukan TF invers dengan memakai ekspansi pecahan parsial.
- Dengan asumsi bahwa $M < N$.
- Bila $M \geq N$, maka kita dapat memakai “long division” untuk menyatakan $X(j\Omega)$ dalam bentuk:

$$X(j\Omega) = \sum_{k=0}^{M-N} f_k (j\Omega)^k + \frac{\tilde{B}(j\Omega)}{A(j\Omega)}$$

- Derajat $\tilde{B}(j\Omega)$ lebih kecil satu daripada derajat $A(j\Omega)$, maka ekspansi pecahan parsial dapat dipakai untuk menentukan TF invers dari $\frac{\tilde{B}(j\Omega)}{A(j\Omega)}$.
- $A(j\Omega) = (j\Omega)^N + a_{N-1}(j\Omega)^{N-1} + \cdots + a_1(j\Omega) + a_0$.
- Akar-akar $A(j\Omega)$ adalah d_k, $k = 1, 2, \dots, N$.

TF Invers (3)

- Akar-akar dapat diperoleh dari: $v^N + a_{N-1}v^{N-1} + \cdots + a_1 v + a_0 = 0.$
- Maka

$$X(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k}{\prod_{k=1}^{N} (j\Omega - d_k)}$$

- Dengan asumsi bahwa akar-akar berbeda,

$$X(j\Omega) = \sum_{k=1}^{N} \frac{C_k}{j\Omega - d_k}$$

- Dimana koefisien-koefisien $C_k, k = 1, 2, \dots, N$, ditentukan dengan menyelesaikan persamaan linier sistem atau dengan methoda residu.
- Diperoleh: $e^{dt}u(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \frac{1}{j\Omega - d}$ untuk $d < 0.$
- Pasangan ini juga berlaku bila d adalah kompleks, dengan catatan bahwa $\mathrm{Ri}\{d\} < 0.$

Contoh TF invers (1)

- Respos frekuensi:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega)^2 + 25.000 j\Omega + 100.000}$$

- Dapatkan respons impuls $h(t)$.
- Mendapatkan $h(t)$ dengan cara ekspansi pecahan parsial.

$$H(j\Omega) = \frac{1}{(j\Omega + 20.000)(j\Omega + 5.000)}$$

- Akar-akar penyebut adalah $d_1 = -20.000$, dan $d_2 = -5.000$.

$$\frac{1}{(j\Omega + 20.000)(j\Omega + 5.000)} = \frac{C_1}{j\Omega + 20.000} + \frac{C_2}{j\Omega + 5.000}$$

- Perhitungan koefisien:

$$C_1 = \left. \frac{(j\Omega + 20.000)}{(j\Omega + 20.000)(j\Omega + 5.000)} \right|_{j\Omega = -20.000} = -\frac{1}{15.000}$$

Contoh TF invers (2)

$$C_2 = \left.\frac{(j\Omega + 5.000)}{(j\Omega + 20.000)(j\Omega + 5.000)}\right|_{j\Omega=-5.000} = \frac{1}{15.000}$$

- Diperoleh:

$$H(j\Omega) = \frac{-1/15.000}{j\Omega + 20.000} + \frac{1/15.000}{j\Omega + 5.000}$$

- Sehingga respons impuls:

$$h(t) = \frac{1}{15.000}\left(e^{-5.000t} - e^{-20.000t}\right)u(t)$$

Persamaan Differensial Linier Koefisien Konstan (1)

- PDLKK:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{d^{tk}} x(t)$$

- Dilakukan TF terhadap 2 sisi:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k Y(j\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k X(j\Omega)$$

- Rasio:

$$\frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k} = H(j\Omega)$$

Persamaan Differensial Linier Koefisien Konstan (2)

- Respons frekuensi:

$$H(j\Omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\Omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\Omega)^k}$$

- Contoh:
- PDLKK sebuah SLWK-TBTW

$$\frac{d}{dt} y(t) + a y(t) = x(t)$$

$$j\Omega Y(j\Omega) + a Y(j\Omega) = X(j\Omega)$$

- Respons frekuensi:

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{1}{j\Omega + a}$$

$$H(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + a} \Rightarrow h(t) = e^{-at} u(t$$

Menghubungkan TF ke DF (1)

- Representasi DF sinyal periodik $x(t)$ adalah:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\Omega_0 t}$$

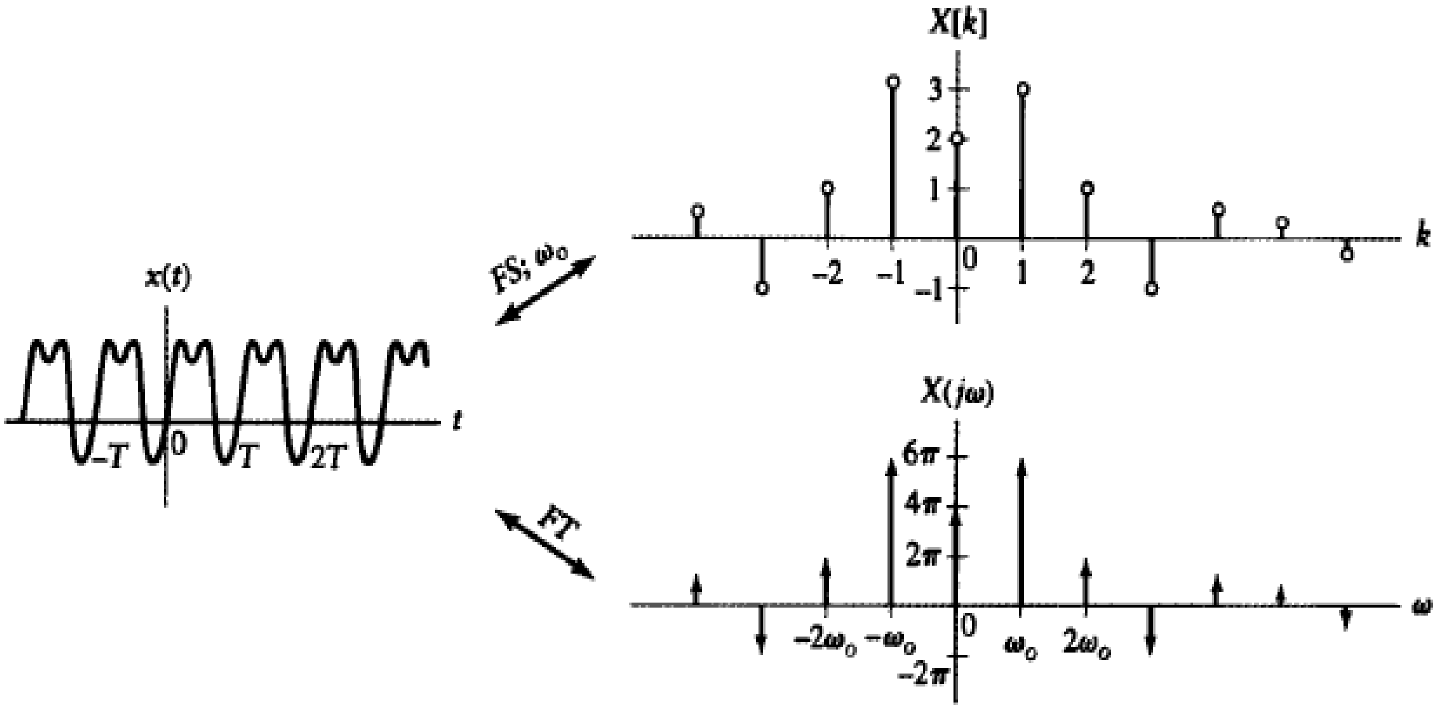
- dimana Ω_0 adalah frekuensi fundamental $x(t)$.
- Ingat bahwa $1 \overset{FT}{\Leftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega)$.
- Sifat pergeseran frekuensi: $e^{j\gamma t}x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j(\Omega - \gamma))$.
- Diperoleh $e^{jk\Omega_0 t} \overset{FT}{\Leftrightarrow} 2\pi\delta(\Omega - k\Omega_0)$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]e^{jk\Omega_0 t} \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- TF sinyal periodik adalah deretan impuls-impuls yang terpisah dengan jarak frekuensi fundamental Ω_0

Menghubungkan TF ke DF (2)

- Representasi DF dan TF sinyal periodik waktu kontinyu



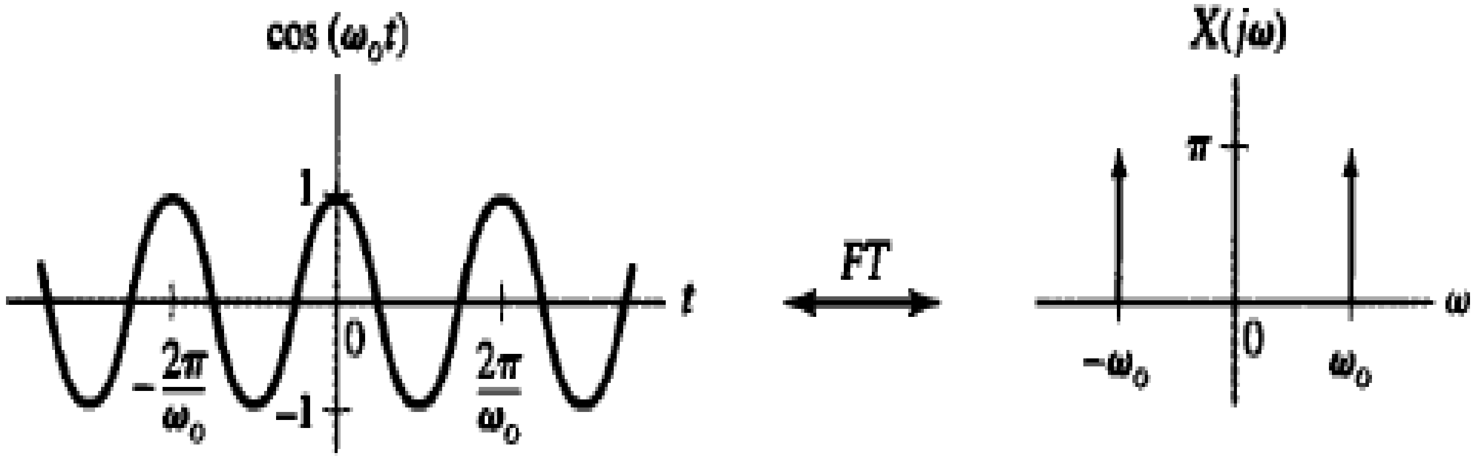
- Impuls ke-k mempunyai "strength" $2\pi X[k]$, dimana $X[k]$ adalah koefisien DF ke-k.
- Bentuk $X(j\Omega)$ identik dengan bentuk $X[k]$.

TF Cosinus

- $x(t) = \cos(\Omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 t}$.
- $\cos(\Omega_0 t) \overset{FS;\Omega_0}{\Longleftrightarrow} X[k] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & k \neq \pm 1 \end{cases}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] e^{jk\Omega_0 t} \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k] \delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- Diperoleh $\cos(\Omega_0 t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} \pi\delta(\Omega - \Omega_0) + \pi\delta(\Omega + \Omega_0)$.



TF Deretan Impuls Satuan

- Deretan Impuls

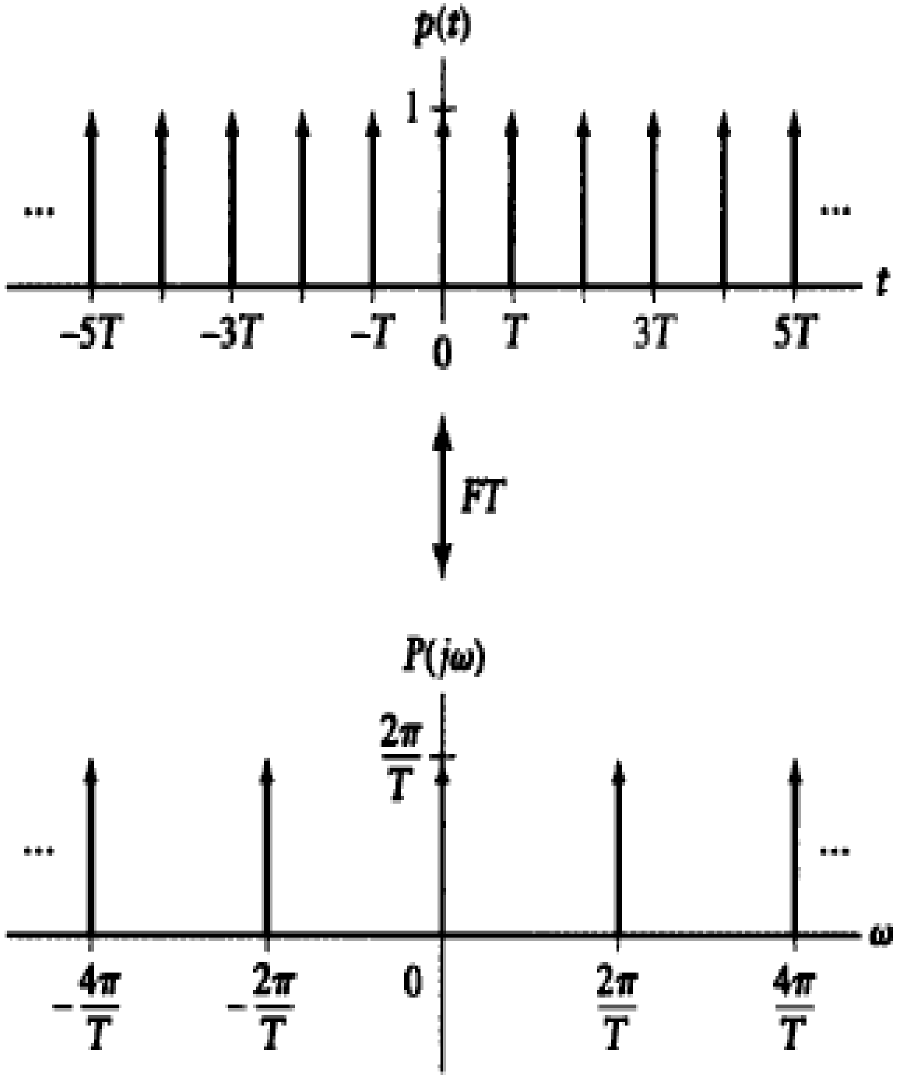
$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

- $p(t)$ adalah periodik dengan perioda fundamental T, $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

$$P[k] = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$P[k] = \frac{1}{T}$$

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_0)$$



Konvolusi Sinyal Periodik dan Tidak Periodik (1)

- Konvolusi dikawasan $t \Leftrightarrow$ Perkalian dikawasan Ω.

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = X(j\Omega)H(j\Omega)$$

- TF sinyal periodik:

$$x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} X(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\,\delta(\Omega - k\Omega_0)H(j\Omega)$$

- Sifat pergeseran (waktu) impuls

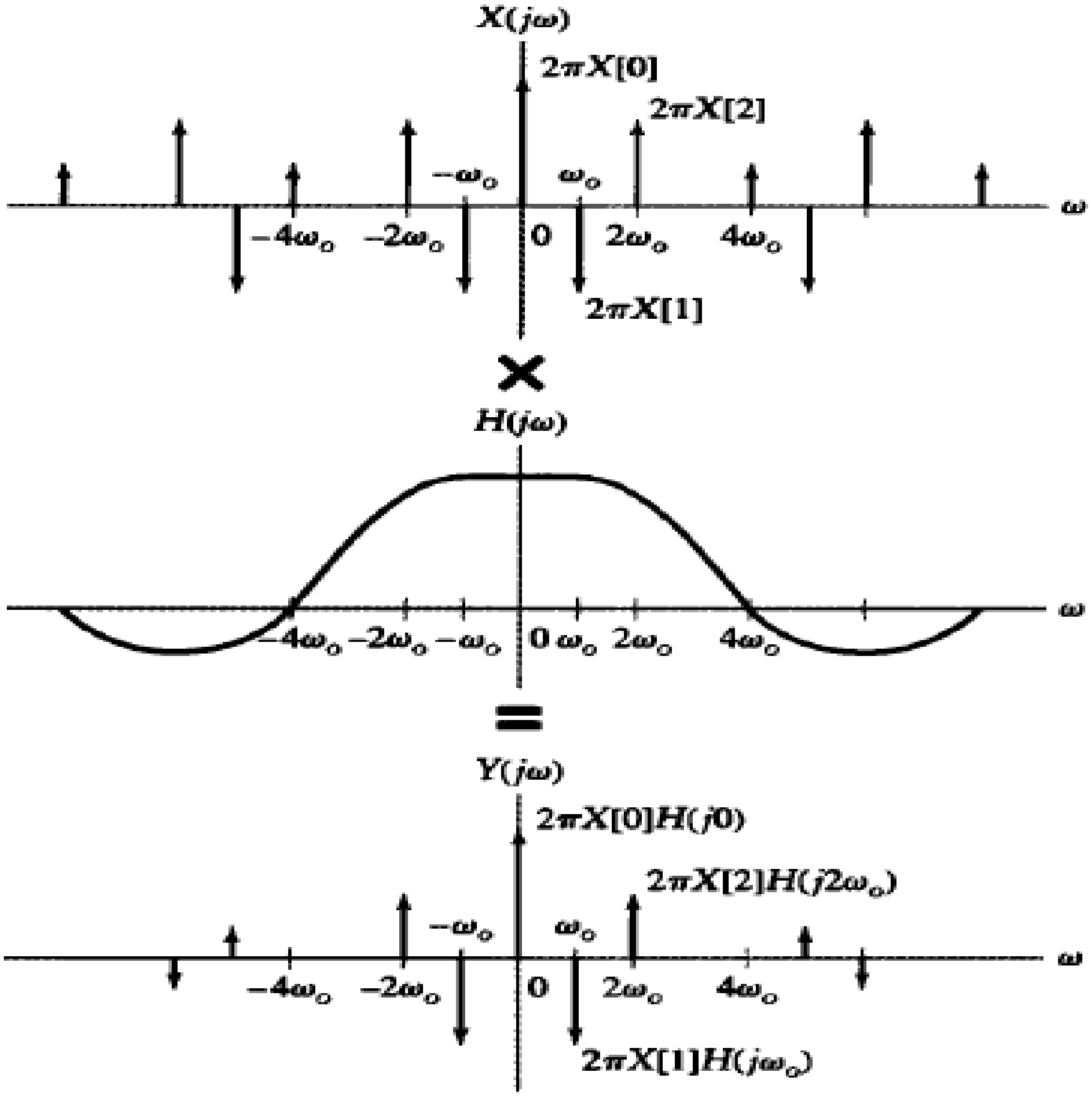
$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\Omega_0)X[k]\,\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

Konvolusi Sinyal Periodik dan Tidak Periodik (2)

- $X(j\Omega)$

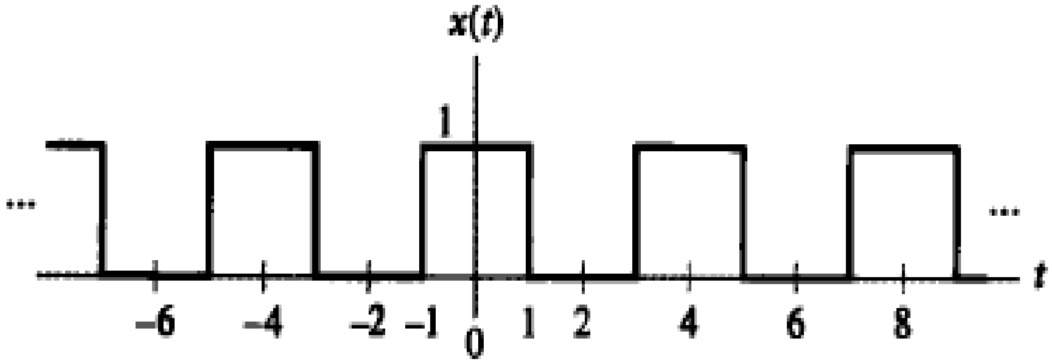
- $H(j\Omega)$

- $Y(j\Omega)$



SLTBTW Dengan Masukan Periodik (1)

- Masukan:



$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(2\pi t)} \longrightarrow y(t)$$

- $h(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} H(j\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \pi \\ 0, & |\Omega| > \pi \end{cases}$

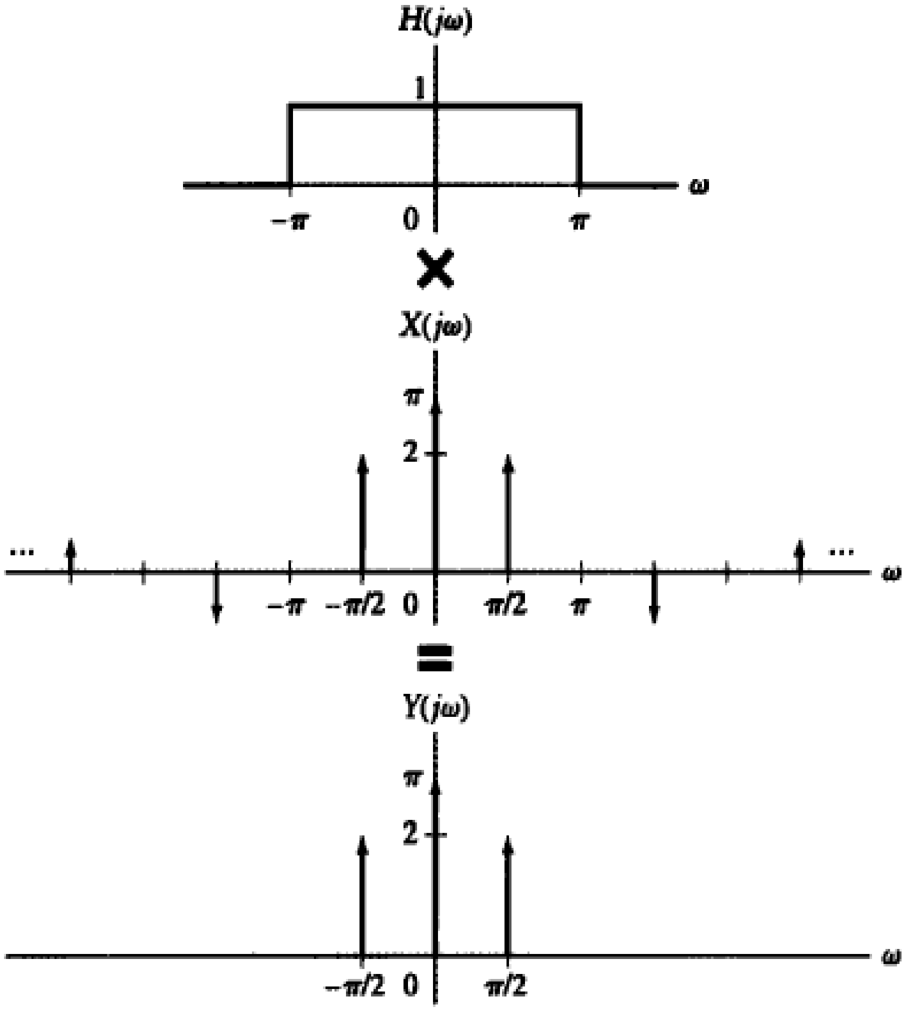
$$X(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\frac{\pi}{2})}{k}\,\delta\left(\Omega - k\frac{\pi}{2}\right)$$

SLTBTW Dengan Masukan Periodik (2)

- $Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)$

- $Y(j\Omega) = 2\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right)$
  $+\pi\delta(\Omega) + 2\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)$

- $y(t) = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{\pi}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$



Perkalian Sinyal Periodik dengan Tidak Periodik (1)

- Sifat Perkalian:

$$y(t) = g(t)x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi} G(j\Omega) * X(j\Omega)$$

- $x(t)$ adalah sinyal periodik

$$y(t) = g(t)x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = G(j\Omega) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\delta(\Omega - k\Omega_0)$$

- Sifat pergeseran impuls

$$y(t) = g(t)x(t) \overset{FT}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]G(j(\Omega - k\Omega_0))$$

- Lihat ref 1, hal 351.

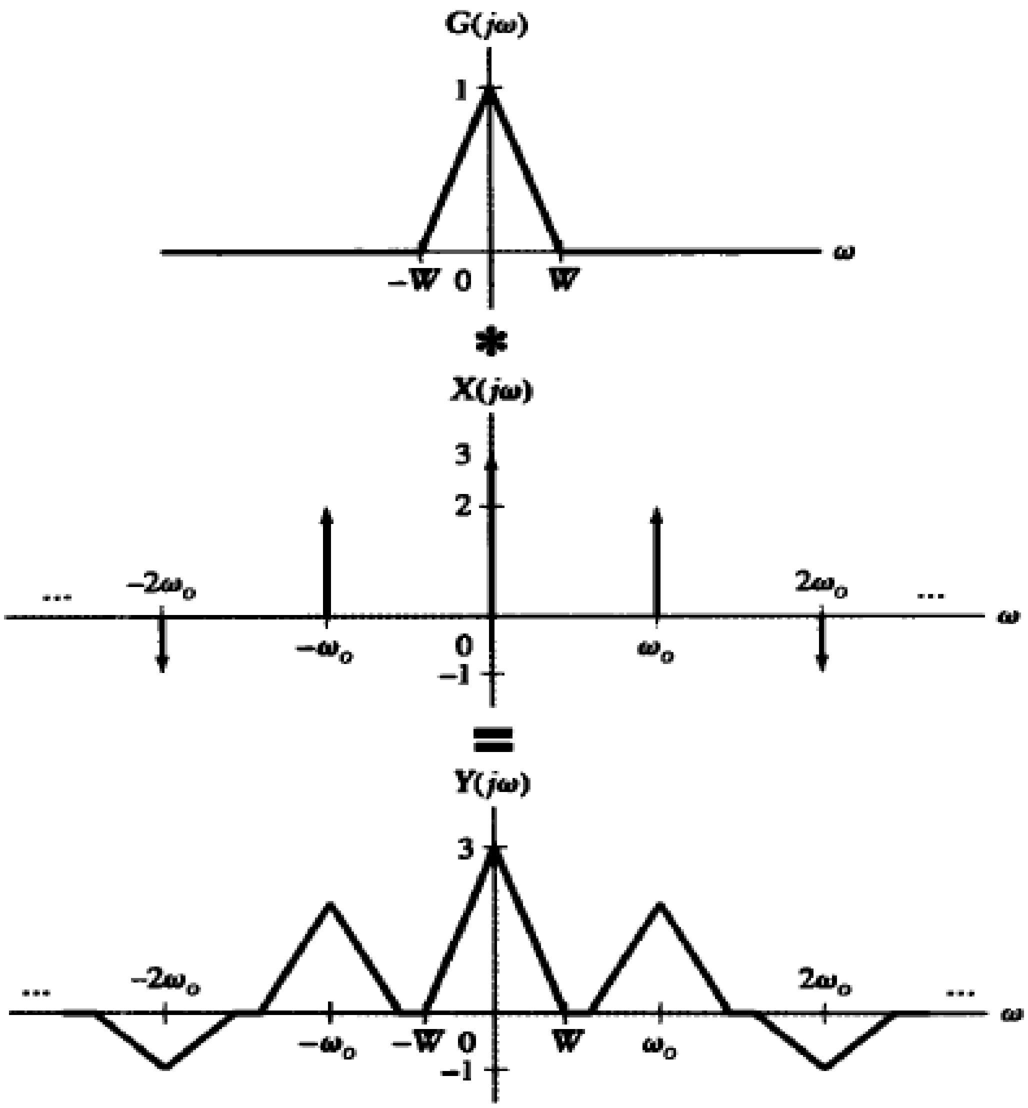
Perkalian Sinyal Periodik dengan Tidak Periodik (2)

- $g(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} G(j\Omega)$

- $x(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} X(j\Omega)$

$$y(t) = g(t)x(t) \overset{TF}{\Leftrightarrow} Y(j\Omega)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]G(j(\Omega - k\Omega_0))$$



Hubungan Antara DF dengan TF (1)

- Bila $x(t)$ mempunyai durasi T_0: $x(t) = 0,\ t < 0$ atau $t \geq T_0$.
- Buat sinyal periodik:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t + mT)$$

dimana $T \geq T_0$ dengan cara membuat $x(t)$ periodik.

- Koefisien DF $\tilde{x}(t)$:

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \tilde{x}(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{T}\int_{0}^{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

- Lihat ref 1, hal 395.

Hubungan Antara DF dengan TF (2)

- TF $x(t)$:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t}dt = \int_{0}^{T_0} x(t)e^{-j\Omega t}dt$$

- Kesimpulan:

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{T} X(j\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}$$

- Koefisien DF adalah cuplikan-cuplikan TF, dinormalisasi terhadap T.

Alphabet Greek

A	α	Alpha		I	ι	Iota		P	ρ	Rho
B	β	Beta		K	κ	Kappa		Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma		Λ	λ	Lambda		T	τ	Tau
Δ	δ	Delta		M	μ	Mu		Y	υ	Upsilon
E	ε	Epsilon		N	ν	Nu		Φ	ϕ	Phi
Z	ζ	Zeta		Ξ	ξ	Xi		X	χ	Chi
H	η	Eta		O	o	Omicron		Ψ	ψ	Psi
H	θ	Theta		Π	π	Pi		Ω	ω	omega

Tugas Mandiri

1. Signals and Systems; Simon Haykin, Barry Van Veen; 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc. 2004. Bab 3.
2. Signals and Systems; Hwei P. Hsu; McGraw-Hill, 1995. Bab 5.
3. Signals and Systems; Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab; 2nd edition, Prentice-Hall, 1997. Bab 4.

- **Bab 4. Transformasi Fourier.**
- **Selesai.**