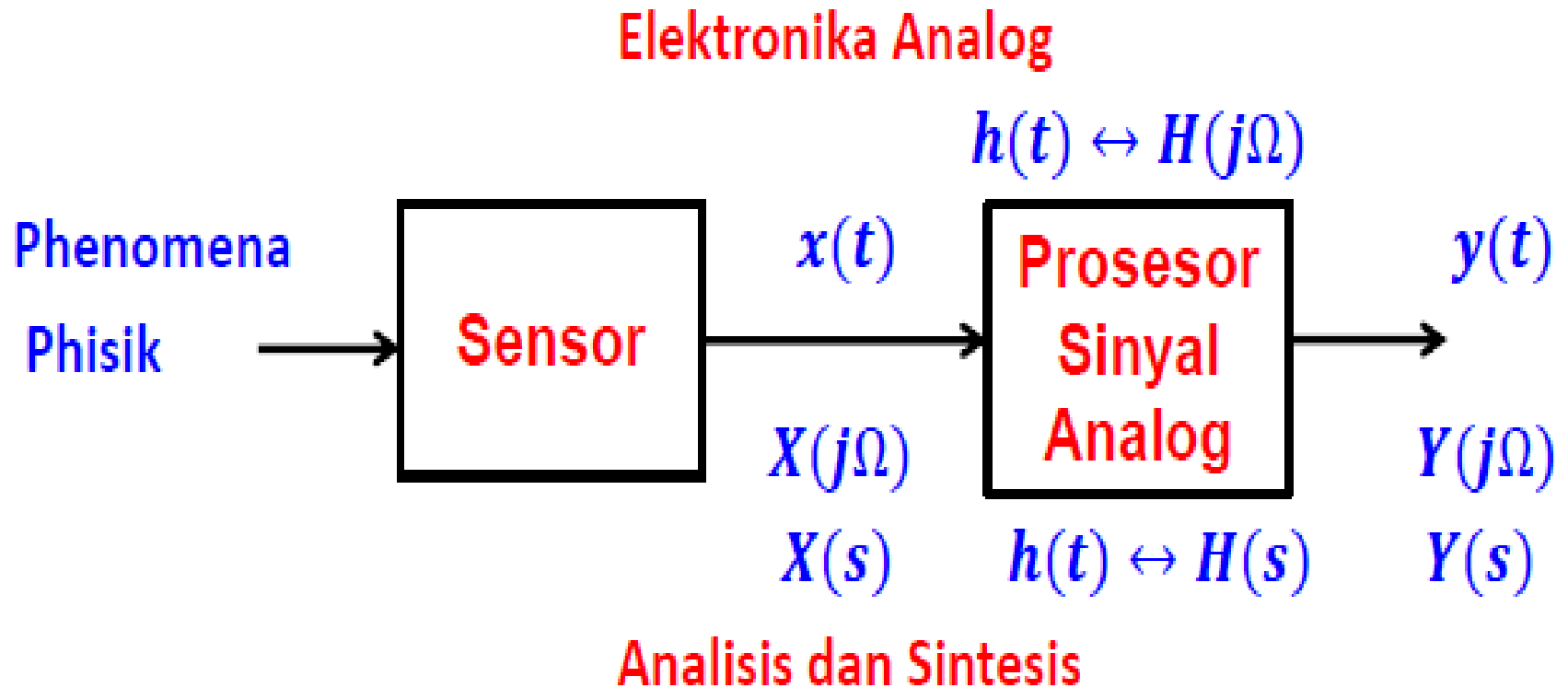


Pengolahan Sinyal Dalam Waktu Kontinyu

Bab 5. Transformasi Laplace



Dosen:

Suhartono Tjondronegoro

Isi Kuliah

- Bab 0. Pendahuluan.
- Bab 1. Sinyal.
- Bab 2. Sistem.
- Bab 3. Deret Fourier.
- Bab 4. Transformasi Fourier.
- **Bab 5. Transformasi Laplace.**
- Bab 6. Pengantar Filter Analog.
- Bab 7. Pengantar Sistem Umpan Balik Linier.

Bab 5. Transformasi Laplace

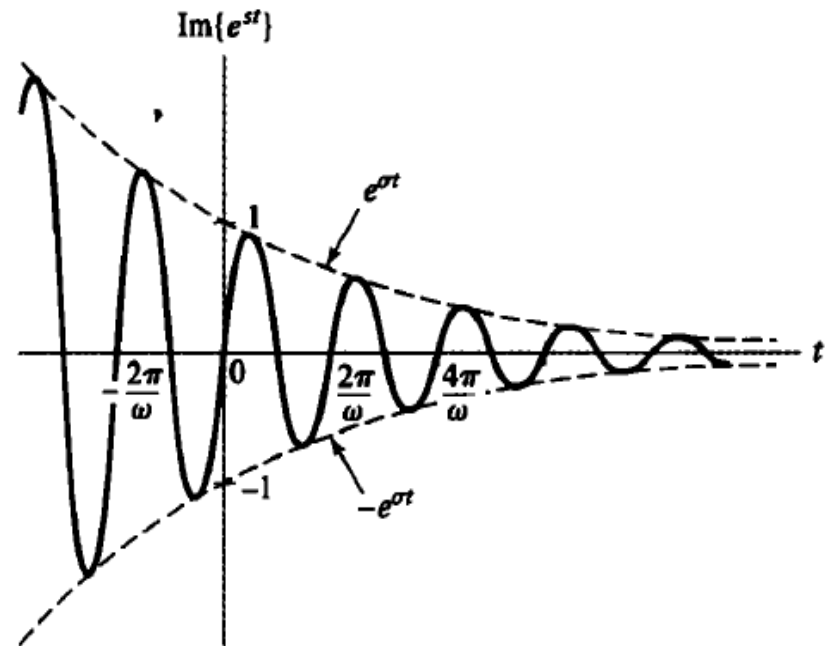
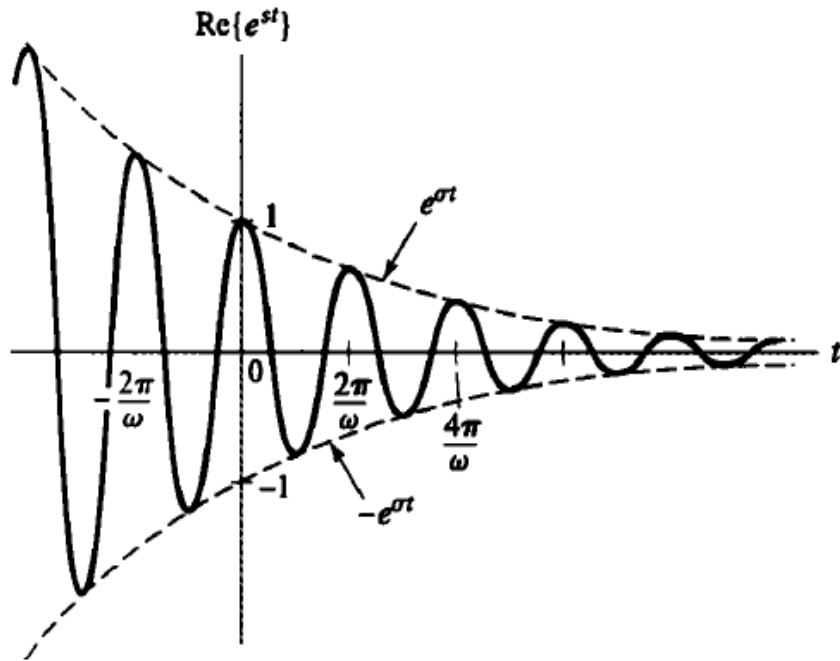
- Pendahuluan.
- Transformasi Laplace.
- Transformasi Laplace Unilateral.
- Sifat-Sifat Transformasi Laplace Unilateral.
- Transformasi Laplace Unilateral Invers.
- Penyelesaian Persamaan Differensial dengan kondisi awal.
- Metoda Transformasi Laplace di Analisis Rangkaian.
- Sifat-Sifat Transformasi Laplace Bilateral.
- Sifat-Sifat Daerah Konvergensi.
- Transformasi Laplace Bilateral Invers.
- Fungsi Transfer / Fungsi Sistem.
- Kausalitas dan Stabilitas Sistem.
- Menentukan Respons Frekuensi Response dari Pole-Pole and Zero-Zero.

Pendahuluan

- Representasi sinyal dan sistem dalam waktu kontinyu berdasarkan sinyal-sinyal eksponensial kompleks.
- Transformasi Laplace memberikan karakterisasi yang lebih secara umum sistem-sistem linier tidak berubah terhadap waktu dan interaksinya dengan sinyal-sinyal, dibandingkan dengan metoda Fourier.
- Transformasi Laplace dapat dipakai untuk melakukan analisis masalah-masalah sinyal-sinyal waktu kontinyu yang tidak “absolutely integrable”.

Eksponensial Kompleks dengan Frekuensi Kompleks

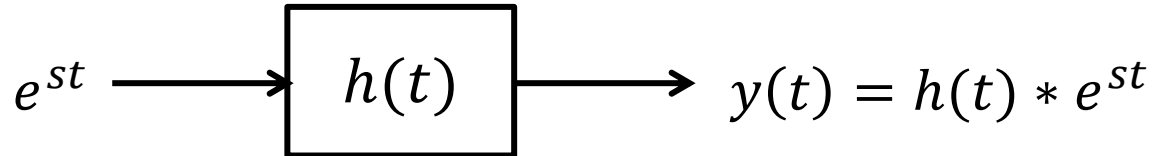
- Bila $e^{st} = e^{\sigma t} \cos(\Omega t) + je^{\sigma t} \sin(\Omega t)$



- Bagian riil dari e^{st} adalah cosinus teredam secara eksponensial.
- Bagian imajiner dari e^{st} adalah sinus teredam secara eksponensial.
- Faktor redaman σ nilainya negatif, Ω adalah frekuensi.

Sifat Fungsi Eigen e^{st} (1)

- Perhatikan memasukkan sinyal $x(t) = e^{st}$ ke sistem linier tidak berubah terhadap waktu dengan respons impuls $h(t)$.



- Keluaran sistem adalah $y(t) = T\{x(t)\} = h(t) * x(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

$$y(t) = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

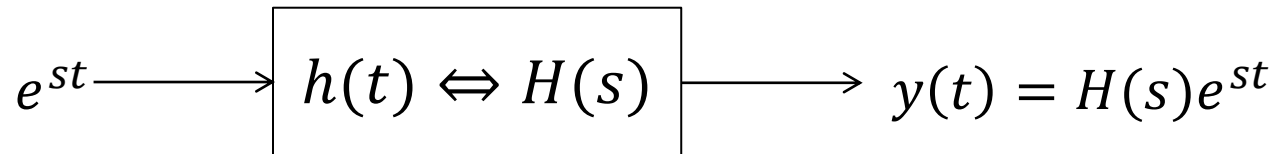
- Didefinisikan **Fungsi Transfer atau Fungsi Sistem**:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Kita dapat tulis $y(t) = H\{e^{st}\} = H(s)e^{st}$.

Sifat Fungsi Eigen e^{st} (2)

- Respons sistem terhadap masukan e^{st} adalah perkalian sinyal masukan dengan fungsi transfer $H(s)$.



- Sebuah fungsi eigen adalah sebuah sinyal yang masuk ke sistem tanpa dimodifikasi kecuali dikalikan oleh sebuah skalar.
- Dikatakan bahwa e^{st} adalah fungsi eigen sistem linier tidak berubah terhadap waktu dan $H(s)$ adalah nilai eigen yang terkait.
- Fungsi transfer bernilai kompleks

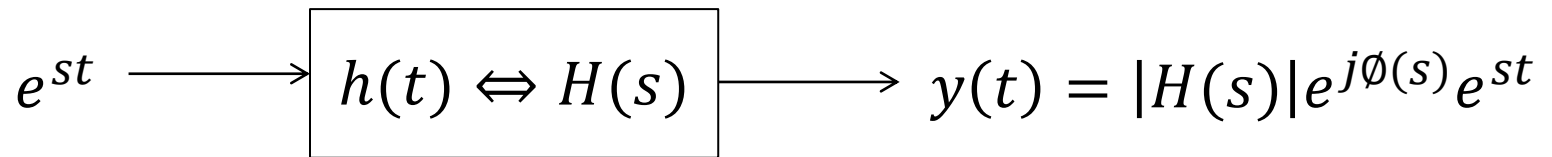
$$H(s) = H_R(s) + jH_I(s)$$

Dalamn bentuk polar $H(s) = |H(s)|e^{j\phi(s)}$

$|H(s)|$ dan $\phi(s)$ adalah magnitudo dan phasa dari $H(s)$.

- Sinyal keluaran: $y(t) = |H(s)|e^{j\phi(s)}e^{st}$.

Sifat Fungsi Eigen e^{st} (3)



- Dengan memakai $s = \sigma + j\omega$, akan diperoleh
$$y(t) = |H(\sigma + j\Omega)|e^{\sigma t}e^{j\Omega t + \phi(\sigma + j\Omega)}$$
$$y(t) = |H(\sigma + j\omega)|e^{\sigma t} \cos(\Omega t + \phi(\sigma + j\omega))$$
$$+ j|H(\sigma + j\Omega)|e^{\sigma t} \sin(\Omega t + \phi(\sigma + j\omega)).$$
- Sistem merubah amplitudo masukan dengan $|H(\sigma + j\Omega)|$ dan menggeser fasa komponen sinusoidal dengan $\phi(\sigma + j\Omega)$.
- Sistem tidak merubah faktor redaman σ atau frekuensi sinusoidal Ω sinyal masukan.

Representasi Transformasi Laplace (1)

- Fungsi transfer:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

- Substitusi $s = \sigma + j\Omega$:

$$H(\sigma + j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-(\sigma + j\Omega)t} dt$$

$$H(\sigma + j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [h(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\Omega t} dt$$

- $H(\sigma + j\Omega)$ adalah Transformasi Fourier dari $h(t)e^{-\sigma t}$.

$$h(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

Representasi Transformasi Laplace (2)

$$h(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$h(t) = e^{\sigma t} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\sigma + j\Omega) e^{(\sigma + j\Omega)t} d\Omega$$

- Substitusi $s = \sigma + j\Omega$ dan $d\Omega = \frac{ds}{j}$, diperoleh

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} H(s) e^{st} ds$$

Representasi Transformasi Laplace (3)

- Persamaan:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

memberikan indikasi bagaimana menentukan $H(s)$ dari $h(t)$.

- Persamaan:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} H(s)e^{st} ds$$

menyatakan $h(t)$ sebagai fungsi $H(s)$.

- $H(s)$ adalah transformasi Laplace dari $h(t)$ dan $h(t)$ adalah transformasi Laplace invers dari $H(s)$.

Kita mempunyai notasi: $h(t) \xLeftrightarrow{L} H(s)$

Representasi Transformasi Laplace (3)

- Transformasi Laplace dari $x(t)$ adalah

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Transformasi Laplace invers dari $X(s)$ adalah

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

Persamaan ini menyatakan bahwa sinyal $x(t)$ sebagai superposisi terbobot dari eksponensial kompleks e^{st} .

Bobot-bobot proporsional dengan $X(s)$.

- Kita mempunyai notasi: $x(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} X(s)$

Konvergensi

- Transformasi Laplace adalah transformasi Fourier dari $x(t)e^{-\sigma t}$.
- Kondisi yang perlu agar transformasi Laplace konvergen adalah $x(t)e^{-\sigma t}$ secara absolut dapat diintegrasikan.
- Kita harus mempunyai kondisi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

- Rentang nilai σ dimana transformasi Laplace konvergen disebut **daerah konvergensi (DK) / region of convergence (ROC)**.
- Transformasi Laplace ada untuk sinyal-sinyal yang tidak mempunyai transformasi Fourier.

Pole-Pole dan Zero-Zero

- Bentuk umum $X(s)$:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

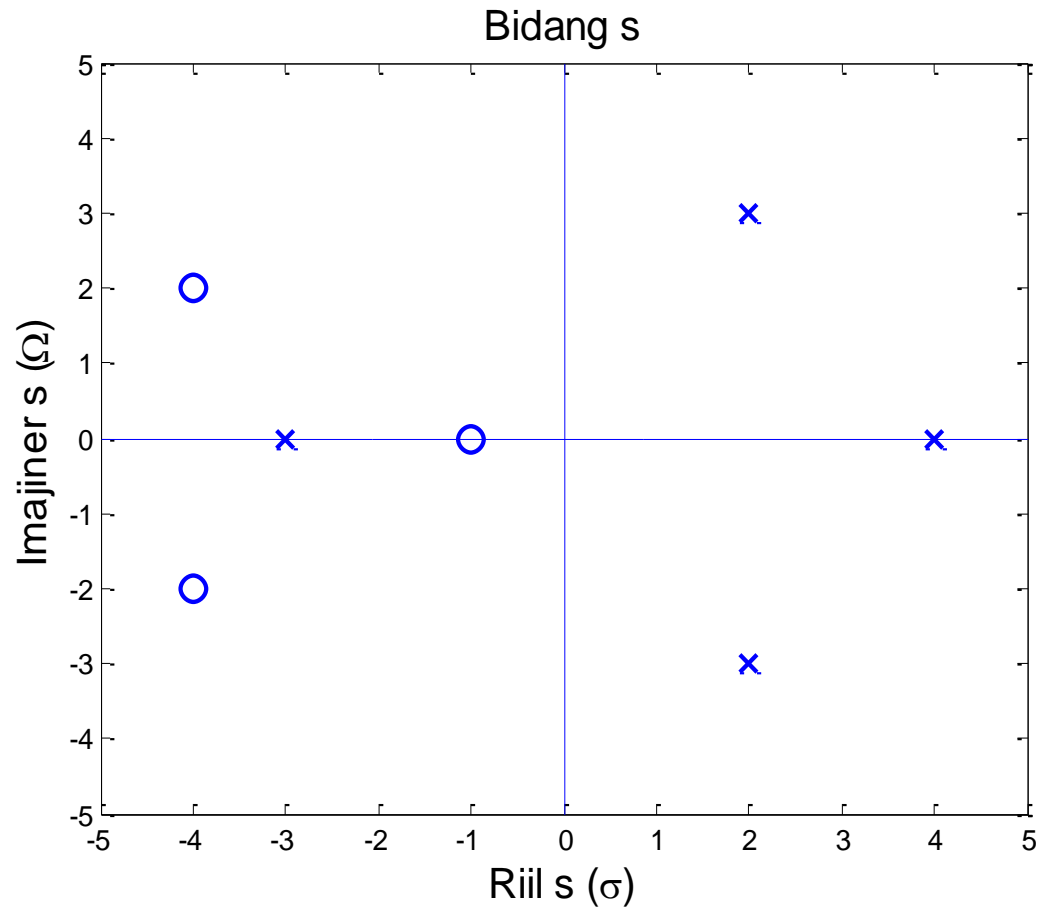
- Faktorisasi $X(s)$ sebagai perkalian besaran-besaran yang mengandung akar-akar polinomial pembilang $N(s)$ dan polinomial penyebut $D(s)$:

$$X(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

- c_k adalah akar-akar $N(s)$, disebut zero-zero dari $X(s)$.
- d_k adalah akar-akar $D(s)$, disebut pole-pole dari $X(s)$.

Bidang s

- Bidang kompleks s menggambarkan frekuensi kompleks s secara grafik.
- Sumbu Horizontal: σ
- Sumbu Vertical: $j\Omega$
- $X(j\Omega) = X(s)|_{\sigma=0}$
- Contoh
 - **Zero-zero**
di $s = -1$, dan
di $s = -4 \pm j2$
 - **Pole-pole**
di $s = -3$, dan
di $s = 2 \pm j3$, $s = 4$



Transformasi Laplace untuk Sinyal Eksponensial Kausal (1)

- Sinyal $x(t) = e^{at}u(t)$, a adalah riil.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}dt = \frac{-1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty}$$

Kita gunakan $s = \sigma + j\Omega$,

$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\Omega - a} e^{-(\sigma-a)t} e^{-j\Omega t} \Big|_0^{\infty}$$

Bila $\sigma > a$, maka $e^{-(\sigma-a)t} \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow \infty$,

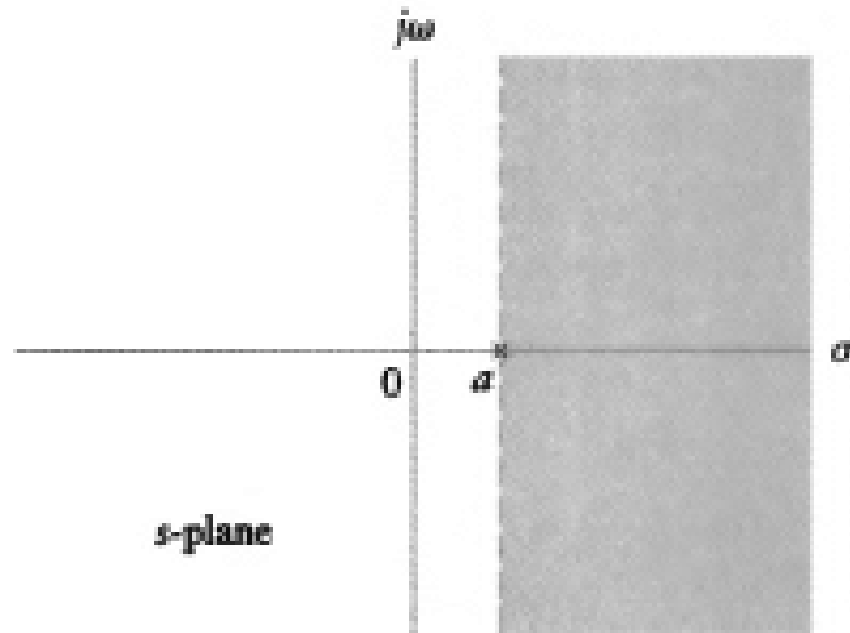
$$X(s) = \frac{-1}{\sigma + j\Omega - a} (0 - 1), \quad \sigma > a,$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ Riil}(s) > a$$

$X(s)$ tidak ada untuk $\sigma \leq a$, karena integral tidak konvergen.

Transformasi Laplace untuk Sinyal Eksponensial Kausal (2)

- DK untuk $x(t) = e^{at}u(t)$, a adalah riil, adalah $\sigma > a$, ekuivalen dengan, $\text{Riil}(s) > a$



- pole terletak di $s = a$

Transformasi Laplace untuk Sinyal Eksponensial Anti Kausal (1)

- Sinyal $x(t) = -e^{at}u(-t)$, a adalah riil.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} -e^{at}u(-t)e^{-st}dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s-a)t}dt = \frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_{-\infty}^0$$

Kita gunakan $s = \sigma + j\Omega$,

$$X(s) = \frac{1}{\sigma + j\Omega - a} e^{-(\sigma-a)t} e^{-j\Omega t} \Big|_{-\infty}^0$$

Bila $\sigma < a$, maka $e^{-(\sigma-a)t} \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow -\infty$,

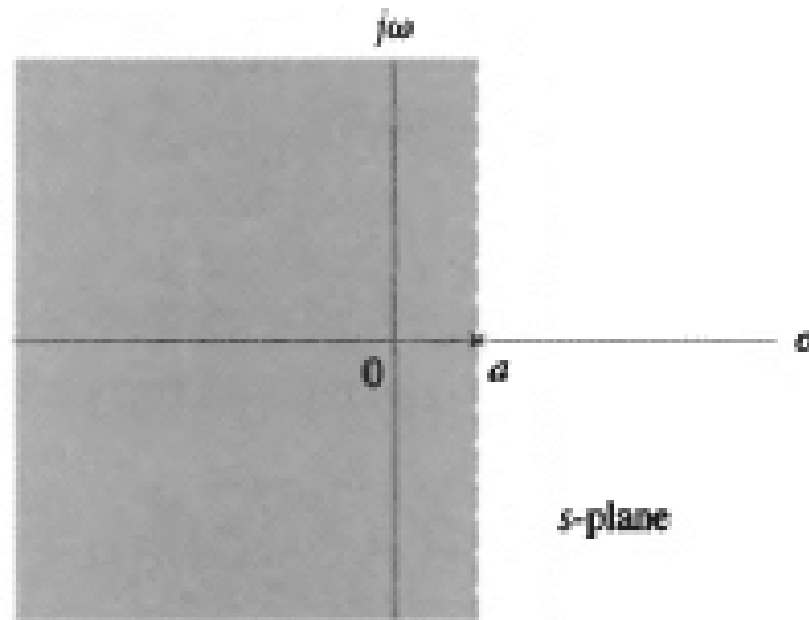
$$X(s) = \frac{1}{\sigma + j\Omega - a} (1 - 0), \quad \sigma < a,$$

$$X(s) = \frac{1}{s-a}, \text{ Riil}(s) < a$$

$X(s)$ tidak ada untuk $\sigma \geq a$, karena integral tidak konvergen.

Transformasi Laplace untuk Sinyal Eksponensial Anti Kausal (2)

- DK untuk $x(t) = -e^{at}u(-t)$, a adalah riil, adalah $\sigma < a$, ekuivalen dengan, $\text{Riil}(s) < a$



- pole terletak di $s = a$

Transformasi Laplace untuk Sinyal Eksponensial Kausal dan Anti Kausal

- Perbandingan

$x(t)$	$X(s)$	DK
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Riil}(s) > a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Riil}(s) < a$

Transformasi Laplace Unilateral

- Transformasi Laplace unilateral terhadap sinyal $x(t)$ didefinisikan dengan

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Batas bawah 0^- mengandung arti bahwa kita memasukkan diskontinuitas dan impuls-impuls yang terjadi di $t = 0$ didalam integral.

- Transformasi Laplace invers terhadap $X(s)$ adalah

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

- Kita nyatakan hubungan $x(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s)$
- TL Unilateral: $e^{at}u(t) \xLeftrightarrow{L_u} \frac{1}{s-a}$ adalah ekuivalen dengan

TL Bilateral: $e^{at}u(t) \xLeftrightarrow{L} \frac{1}{s-a}$ dengan DK $\text{Re}\{s\} > a$.

Contoh-Contoh

$$x(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$x(t) = \delta(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

$$x(t) = u(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{1}{-s} e^{-st} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$x(t) = u(t + 3) \xLeftrightarrow{L_u} X(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{1}{-s} e^{-st} \right|_{0^-}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

$$x(t) = u(t - 3) \xLeftrightarrow{L_u} X(s) = \int_3^{\infty} e^{-st} dt = \left. \frac{1}{-s} e^{-st} \right|_3^{\infty} = \frac{1}{s} e^{-3s}$$

Sifat-Sifat Transformasi Laplace Unilateral

- Linieritas
- Pengskalaan
- Pergeseran waktu (Time-Shift)
- Pergeseran dikawasan s (s -Domain Shift)
- Konvolusi
- Differensiasi di kawasan s
- Integrasi
- Teorema nilai awal dan akhir (Initial and Final Value Theorems)

Sifat Linearitas

- Diasumsikan bahwa: $x(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s)$ and $y(t) \xLeftrightarrow{L_u} Y(s)$
- $z(t) = ax(t) + by(t)$.

$$Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} \{ax(t) + by(t)\}e^{-st} dt$$

$$Z(s) = a \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt + b \int_{0^-}^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

- $Z(s) = aX(s) + bY(s)$.
- Linearitas : $ax(t) + by(t) \xLeftrightarrow{L_u} aX(s) + bY(s)$

Sifat Pengskalaan

- Hubungan: $x(t) \xLeftrightarrow{Lu} X(s)$ dan $z(t) = x(at)$

$$z(t) \xLeftrightarrow{Lu} Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(at)e^{-st} dt$$

- Perubahan variabel $\tau = at, a > 0 \rightarrow d\tau = a dt \rightarrow dt = \frac{d\tau}{a}$.

$$Z(s) = \frac{1}{a} \int_{0^-}^{\infty} x(\tau) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau} d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{for } a > 0$$

- Pengskalaan: $x(at) \xLeftrightarrow{Lu} \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$ for $a > 0$

Sifat Pergeseran Waktu (Time Shift Property)

- Hubungan: $x(t) \xLeftrightarrow{Lu} X(s)$ dan $z(t) = x(t - \tau)$

$$z(t) \xLeftrightarrow{Lu} Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt$$

- Perubahan variabel $m = t - \tau \rightarrow dm = dt$.

$$Z(s) = \int_{-\tau}^{\infty} x(m) e^{-s\tau} e^{-sm} dm = e^{-s\tau} \int_{-\tau}^{\infty} x(m) e^{-sm} dm$$

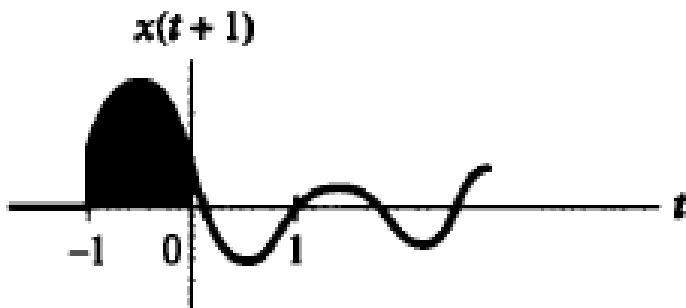
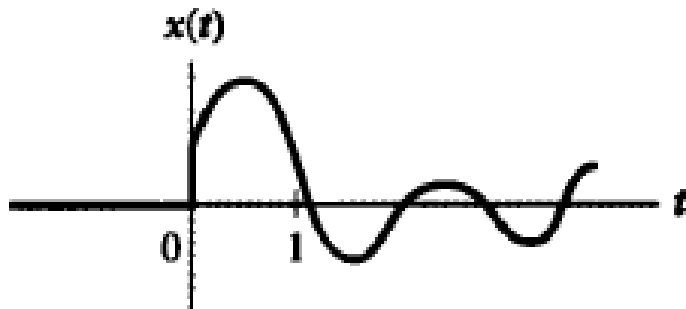
- Bila $x(t - \tau)u(t) = x(t - \tau)u(t - \tau)$, maka

$$Z(s) = e^{-s\tau} \int_{0^-}^{\infty} x(m) e^{-sm} dm = e^{-s\tau} X(s)$$

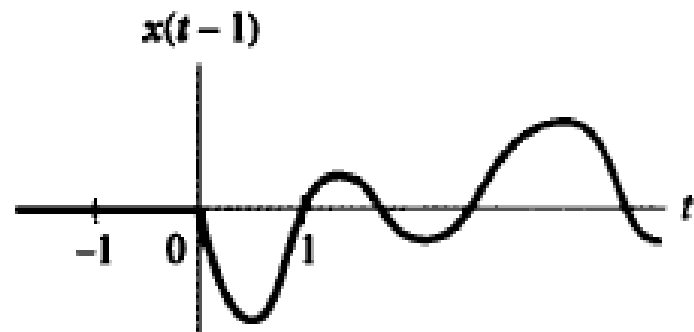
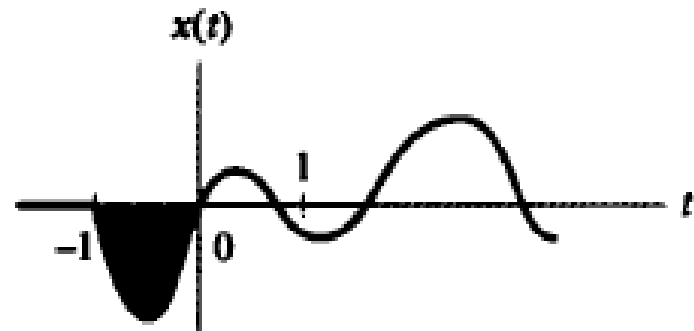
- Pergeseran waktu: $x(t - \tau) \xLeftrightarrow{Lu} e^{-s\tau} X(s)$ untuk semua τ
dimana berlaku $x(t - \tau)u(t) = x(t - \tau)u(t - \tau)$

Pergeseran waktu dimana sifat pergeseran waktu TLU tidak berlaku

- Bagian dari $x(t)$ yang $\neq 0$ yang terjadi pada saat $t \geq 0$ di geser ke arah $t < 0$



- Bagian dari $x(t)$ yang $\neq 0$ yang terjadi pada saat $t < 0$ di geser ke arah $t \geq 0$



Sifat Pergeseran dikawasan s (s Domain Shift Property)

- Hubungan : $x(t) \xLeftrightarrow{Lu} X(s)$ dan $z(t) = e^{s_0 t} x(t)$

$$z(t) \xLeftrightarrow{Lu} Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{s_0 t} x(t) e^{-st} dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-(s-s_0)t} dt$$

$$Z(s) = X(s - s_0)$$

- Pergeseran dikawasan s (s -Domain Shift):

$$e^{s_0 t} x(t) \xLeftrightarrow{Lu} X(s - s_0)$$

Sifat Konvolusi (Convolution Property) (1)

- Diasumsikan bahwa: $x(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s)$ dan $y(t) \xLeftrightarrow{L_u} Y(s)$

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{0^-}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$$

- $x(t)$ dan $y(t)$ adalah kausal

$$z(t) \xLeftrightarrow{L_u} Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left(\int_{0^-}^{\infty} x(\tau)y(t - \tau)d\tau \right) e^{-st} dt$$

- Perubahan variabel $m = t - \tau \rightarrow dm = dt$.

Sifat Konvolusi (Convolution Property) (2)

$$Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} \left(\int_{0^-}^{\infty} x(\tau)y(m)d\tau \right) e^{-s\tau} e^{-sm} dm$$

$$Z(s) = \left(\int_{0^-}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau} d\tau \right) \left(\int_{0^-}^{\infty} y(m)e^{-sm} dm \right) = X(s)Y(s)$$

- Konvolusi: $x(t) * y(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s)Y(s)$

Sifat ini hanya berlaku bila $x(t) = 0$ dan $y(t) = 0$ untuk $t < 0$.

Sifat Differensiasi dikawasan s

- Hubungan: $x(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s)$ dan $z(t) = -tx(t)$

$$z(t) \xLeftrightarrow{L_u} Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} -tx(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} x(t) \frac{d}{ds}(e^{-st})dt$$

$$Z(s) = \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{ds}(x(t)e^{-st})dt$$

- Diassumsikan $\int_{0^-}^{\infty} (.)dt$ dan $\frac{d}{ds} (.)$ dapat dipertukarkan posisinya

$$Z(s) = \frac{d}{ds} \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \frac{d}{ds} X(s)$$

- Differensiasi dikawasan s: $-tx(t) \xLeftrightarrow{L_u} \frac{d}{ds} X(s)$

Contoh (1)

- Dapatkan TLU terhadap $x(t) = (-e^{3t}u(t)) * (tu(t))$.
- Memakai

$$e^{at}u(t) \xLeftrightarrow{L_u} \frac{1}{s-a}$$

- diperoleh

$$-e^{3t} \xLeftrightarrow{L_u} \frac{-1}{s-3}$$

- dan

$$u(t) \xLeftrightarrow{L_u} \frac{1}{s}$$

Contoh (1) - lanjutan

- Differensiasi dikawasan s , kita peroleh

$$tu(t) \stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s^2}$$

- Konvolusi $x(t) = (-e^{3t}u(t)) * (tu(t)) \stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} X(s)$
- Diperoleh:

$$X(s) = \left(\frac{-1}{s-3} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) = \frac{-1}{s^2(s-3)}$$

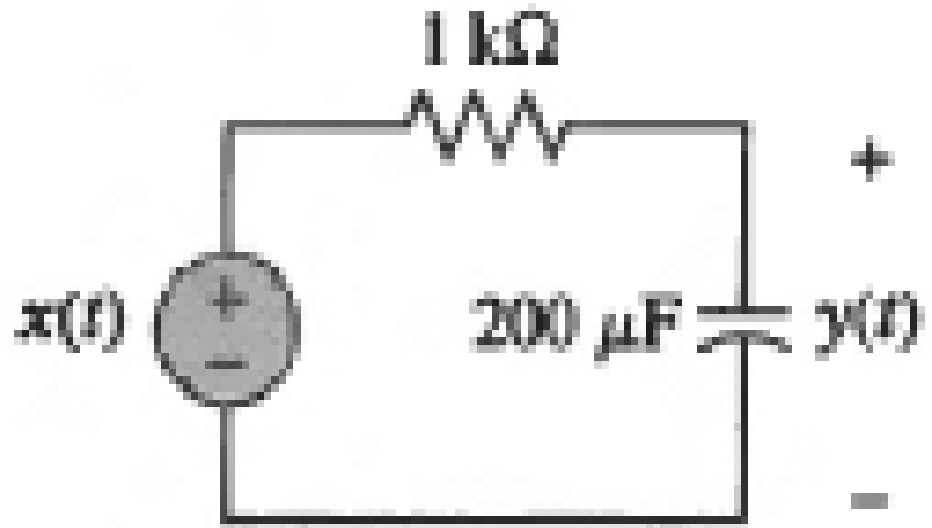
Contoh (2)

- Keluaran filter RC:
Dapatkan TLU keluaran rangkaian RC untuk masukan $x(t) = te^{2t}u(t)$.
- Solusi:
- $x(t)$ sinyal kausal.
- Respons impuls:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t) = 5e^{-5t} u(t)$$

Respons impuls kausal, maka keluaran $y(t) = x(t) * h(t)$ dalam kawasan s :

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{5}{s + 5} X(s)$$



Contoh (2) - lanjutan

- Kita punya

$$e^{2t}u(t) \stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s-2}$$

- dan

$$-tx(t) \stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} \frac{d}{ds} X(s)$$

- Maka

$$x(t) = te^{2t}u(t) \stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} \frac{1}{(s-2)^2}$$

- Akhirnya

$$Y(s) = \frac{5}{(s-2)^2(s+5)}$$

- Spektrum $X(j\Omega)$ tidak ada.

Sifat Differensiasi dikawasan waktu (1)

- Hubungan: $x(t) \xLeftrightarrow{L_u} X(s)$
- Differensiasi dikawasan waktu:

$$\frac{d}{dt}x(t) \xLeftrightarrow{L_u} \int_{0^-}^{\infty} \left(\frac{d}{dt}x(t) \right) e^{-st} dt$$

- Integrasi parsial

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$
$$\frac{d}{dt}x(t) \xLeftrightarrow{L_u} x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- Karena $X(s)$ ada, $x(t)e^{-st} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$.
- Kita peroleh $\frac{d}{dt}x(t) \xLeftrightarrow{L_u} sX(s) - x(0^-)$.

Sifat Differensiasi dikawasan waktu (2)

- Bentuk umum sifat differensiasi:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \xLeftrightarrow{L_u} s^n X(s) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) \Big|_{t=0^-} - s \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} x(t) \Big|_{t=0^-} - \dots \\ - s^{n-2} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} - s^{n-1} x(0^-) \end{aligned}$$

- Differensiasi ke 2:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) \xLeftrightarrow{L_u} s^2 X(s) - \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} - s x(0^-)$$

- Differensiasi ke 3:

$$\frac{d^3}{dt^3} x(t) \xLeftrightarrow{L_u} s^3 X(s) - \frac{d^2}{dt^2} x(t) \Big|_{t=0^-} - s \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} - s^2 x(0^-)$$

Verifikasi Sifat Differensiasi

- Bila $x(t) = e^{at}u(t)$, dapatkan TL dari $\frac{d}{dt}x(t)$.

- Perhitungan langsung:

$$\frac{d}{dt}(e^{at}u(t)) = ae^{at}u(t) + \delta(t) \xLeftrightarrow{L_u} \frac{a}{s-a} + 1 = \frac{s}{s-a}$$

- Sifat Differensiasi:

$$\frac{d}{dt}x(t) \xLeftrightarrow{L_u} sX(s) - x(0^-) = \frac{s}{s-a} - 0 = \frac{s}{s-a}$$

Sifat Integrasi

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xLeftrightarrow{Lu} \frac{x^{(-1)}(0^-)}{s} + \frac{X(s)}{s}$$

dimana

$$x^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$$

adalah luas dibawah $x(t)$ dari $t = -\infty$ ke $t = 0^-$

Teorema nilai awal dan nilai akhir

Initial and Final Value Theorems

- Teorema nilai awal:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = x(0^+)$$

- Teorema nilai awal tidak berlaku terhadap fungsi rasional $X(s)$ dimana derajat polinomial pembilang lebih besar atau sama dengan derajat polinomial penyebut.

- Teorema nilai akhir:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = x(\infty)$$

- Teorema nilai akhir berlaku hanya bila semua pole-pole $X(s)$ ada di sebelah kiri bidang s , dengan paling banyak satu pole di $s = 0$.

Contoh:

- Sinyal:

$$x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t) \xLeftrightarrow{L_u} \frac{5}{s} + \frac{2}{s+2} = \frac{7s+10}{s(s+2)}$$

- Nilai awal:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{7s+10}{s(s+2)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{7s+10}{s+2} = 7$$

- Nilai akhir:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{7s+10}{s(s+2)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{7s+10}{s+2} = 5$$

Transformasi Laplace Unilateral Invers (1)

- Diandaikan:

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Bila $M \geq N$, kita memakai pembagian panjang:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k + \tilde{X}(s)$$

- dimana

$$\tilde{X}(s) = \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$$

- $\tilde{B}(s)$ mempunyai derajat lebih rendah satu dari derajat $A(s)$, memakai metoda ekspansi pecahan parsial (EPP) (the partial-fraction expansion (PFE) method) untuk menentukan transformasi Laplace invers dari $\tilde{X}(s)$.

Transformasi Laplace Unilateral Invers (2)

- Dengan kondisi bahwa impuls dan derivatifnya adalah nol di $t = 0^-$, transformasi Laplace invers

$$\sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k$$

- Memakai:

$$\delta(t) \xLeftrightarrow{L_u} 1 \text{ dan } \frac{d}{dt}x(t) \xLeftrightarrow{L_u} sX(s) - x(0^-)$$

- diperoleh

$$\sum_{k=0}^{M-N} c_k \delta^{(k)}(t) \xLeftrightarrow{L_u} \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k$$

- dimana $\delta^{(k)}(t)$ menyatakan derivasi ke k dari impuls $\delta(t)$.

Transformasi Laplace Unilateral Invers (3)

- Faktorisasi

$$\tilde{X}(s) = \frac{b_P s^P + b_{P-1} s^{P-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Kita peroleh

$$\tilde{X}(s) = \frac{b_P s^P + b_{P-1} s^{P-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

- dimana $P < N$.

Bila semua pole-pole d_k berbeda, memakai partial fraction expansion:

$$\tilde{X}(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}$$

A_k ditentukan dengan memakai metoda residue.

- TL invers tiap suku didapat dari bentuk:

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xLeftrightarrow{Lu} \frac{A_k}{s - d_k}$$

Transformasi Laplace Unilateral Invers (4)

$$\tilde{X}(s) = \frac{b_P s^P + b_{P-1} s^{P-1} + \dots + b_1 s + b_0}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

- dimana $P < N$.

Bila pole d_k diulang r kali, maka ada r suku didalam partial fraction expansion terkait dengan pole tersebut,

$$\frac{A_{i1}}{s - d_i}, \frac{A_{i2}}{(s - d_i)^2}, \dots, \frac{A_{ir}}{(s - d_i)^r}$$

- TL invers tiap suku diperoleh dengan memakai

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xLeftrightarrow{Lu} \frac{A_k}{s - d_k} \text{ dan } -tx(t) \xLeftrightarrow{Lu} \frac{d}{ds} X(s)$$

untuk mendapatkan:

$$\frac{A t^{n-1}}{(N-1)!} e^{d_k t} u(t) \xLeftrightarrow{Lu} \frac{A}{(s - d_k)^n}$$

Inversi dengan Partial Fraction Expansion (PFE) (1)

- Dapatkan TL invers dari

$$X(s) = \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2}$$

- Memakai partial fraction expansion:

$$X(s) = \frac{A_1}{s + 1} + \frac{A_2}{s + 2} + \frac{A_3}{(s + 2)^2}$$

$$A_1 = (s + 1) \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2} \Big|_{s=-1} = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left\{ (s + 2)^2 \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2} \right\} \Big|_{s=-2} = -1$$

$$A_3 = (s + 2)^2 \frac{3s + 4}{(s + 1)(s + 2)^2} \Big|_{s=-2} = 2$$

Inversi dengan Partial Fraction Expansion (PFE) (2)

- Diperoleh:

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

- dan

$$x(t) = e^{-t}u(t) - 2e^{-2t}u(t) + 2te^{-2t}u(t)$$

Inversi Transform Laplace Rasional Improper (1)

- Dapatkan TL invers dari

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$$

- Memakai pembagian panjang:

$$2s^3 - 9s^2 + 4s + 10 : s^2 - 3s - 4 = 2s - 3$$

$$\underline{2s^3 - 6s^2 - 8s}$$

$$-3s^2 + 12s + 10$$

$$\underline{-3s^2 + 9s + 12}$$

$$3s - 2$$

Inversi Transform Laplace Rasional Improper (2)

- Kita tulis:

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{3s - 2}{s^2 - 3s - 4}$$

- Memakai PFE, kita peroleh:

$$X(s) = 2s - 3 + \frac{1}{s + 1} + \frac{2}{s - 4}$$

- Dan:

$$x(t) = 2\delta^{(1)}(t) - 3\delta(t) + e^{-t}u(t) + 2e^{4t}u(t)$$

EPP / PFE, pole-pole kompleks (1)

- Bila

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

- Ekspansi Pecahan Parsial / Partial-Fraction Expansion (FPE) dipakai untuk pole riil atau pole kompleks.
- Pole kompleks umumnya menghasilkan koefisien ekspansi bernilai kompleks dan fungsi eksponensial kompleks (fungsi waktu).
- Bila koefisien-koefisien di $D(s)$ adalah riil, maka semua pole-pole kompleks berbentuk pasangan complex-conjugate.
- Dalam hal $X(s)$ mempunyai koefisien-koefisien bernilai riil, artinya terkait dengan sinyal waktu riil, perhitungan aljabar bisa disederhanakan dengan cara kombinasi complex –conjugate poles di partial-fraction expansion untuk menjamin agar diperoleh koefisien ekspansi bernilai riil dan transformasi Laplace invers bernilai riil.

EPP / PFE, pole-pole kompleks (2)

- Diandaikan bahwa $\alpha + j\omega_0$ dan $\alpha - j\omega_0$: adalah sepasang pole-pole complex-conjugate.
- Suku-suku derajat 1 yang terkait dengan ke-2 pole-pole di PFE dapat ditulis sebagai:

$$\frac{A_1}{s - \alpha - j\omega_0} + \frac{A_2}{s - \alpha + j\omega_0}$$

- Agar

$$\frac{A_1}{s - \alpha - j\omega_0} + \frac{A_2}{s - \alpha + j\omega_0}$$

- Menyatakan sinyal bernilai riil, A_1 dan A_2 harus complex conjugates satu dengan yang lain.

EPP / PFE, pole-pole kompleks (3)

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{s - \alpha - j\omega_0} + \frac{A_2}{s - \alpha + j\omega_0} &= \frac{B_1s + B_2}{(s - \alpha - j\omega_0)(s - \alpha + j\omega_0)} \\ &= \frac{B_1s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

dimana kedua B_1 dan B_2 nilainya riil.

$$\frac{B_1s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} = \frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} + \frac{C_2\omega_0}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}$$

dimana $C_1 = B_1$ dan

$$C_2 = \frac{(B_1\alpha + B_2)}{\omega_0}$$

EPP / PFE, pole-pole kompleks (4)

- Kita punya persamaan:

$$\begin{aligned}\frac{A_1}{s - \alpha - j\omega_0} + \frac{A_2}{s - \alpha + j\omega_0} &= \frac{B_1 s + B_2}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} \\ &= \frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} + \frac{C_2\omega_0}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

- Diperoleh:

$$\begin{aligned}C_1 e^{\alpha t} \cos(\omega_0 t) u(t) &\stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} \frac{C_1(s - \alpha)}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2} \\ C_2 e^{\alpha t} \sin(\omega_0 t) u(t) &\stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} \frac{C_2\omega_0}{(s - \alpha)^2 + \omega_0^2}\end{aligned}$$

EPP / PFE, pole-pole kompleks (5)

- Contoh:
- Dapatkan transformasi Laplace invers dari:

$$X(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2}$$

Solusi:

$$X(s) = \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2} = \frac{4s^2 + 6}{(s - 1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{4s^2 + 6}{(s - 1)\{(s + 1)^2 + 1\}}$$

$$X(s) = \frac{A}{s - 1} + \frac{B_1s + B_2}{(s + 1)^2 + 1}$$

$$A = X(s)(s - 1) \Big|_{s=1} = \frac{4s^2 + 6}{(s + 1)^2 + 1} \Big|_{s=1} = 2$$

EPP / PFE, pole-pole kompleks (6)

- Kita peroleh:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{4s^2 + 6}{s^3 + s^2 - 2} = \frac{2}{s - 1} + \frac{B_1 s + B_2}{(s + 1)^2 + 1} \\ &= \frac{2\{(s + 1)^2 + 1\} + (B_1 s + B_2)(s - 1)}{s^3 + s^2 - 2} \end{aligned}$$

kita dapatkan $B_1 = 2$ and $B_2 = -2$.

Maka:

$$X(s) = \frac{2}{s - 1} + \frac{2s - 2}{(s + 1)^2 + 1} = \frac{2}{s - 1} + 2 \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1} - 4 \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$$

Kita peroleh:

$$x(t) = 2e^t u(t) + 2e^{-t} \cos(t) u(t) - 4e^{-t} \sin(t) u(t)$$

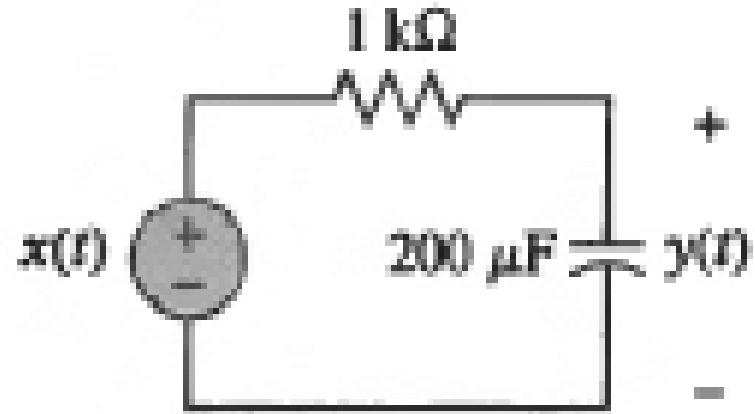
Penyelesaian PD dengan kondisi awal (1)

- Aplikasi utama dari TLU didalam analisis sistem adalah penyelesaian (solusi) PD dengan kondisi awal \neq nol.
- Kondisi awal masuk didalam solusi sebagai nilai-nilai sinyal dan derivasinya yang terjadi pada saat $t = 0^-$ (waktu nol), ada didalam sifat differensiasi TLU yang dinyatakan dengan persamaan:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \xLeftrightarrow{L_u} s^n X(s) - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x(t) \Big|_{t=0^-} - s \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} x(t) \Big|_{t=0^-} \\ - \dots - s^{n-2} \frac{d}{dt} x(t) \Big|_{t=0^-} - s^{n-1} x(0^-) \end{aligned}$$

Penyelesaian PD dengan kondisi awal (2)

- Contoh: analisis rangkaian RC
- Dapatkan $y(t)$
- Bila $x(t) = \left(\frac{3}{5}\right) e^{-2t} u(t)$
- Dengan kondisi awal: $y(0^-) = -2$.
- Solusi: persamaan differensial:



$$\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

Untuk $RC = 0.2\text{ sec}$:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5x(t)$$

Penyelesaian PD dengan kondisi awal (3)

$$\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 5x(t)$$

TLU terhadap kedua sisi PD dan memakai sifat differensiasi

$$sY(s) - y(0^-) + 5Y(s) = 5X(s)$$

- Penyelesaian perhitungan $Y(s)$:

$$Y(s) = \frac{1}{s+5} [5X(s) + y(0^-)]$$

$$x(t) = \left(\frac{3}{5}\right) e^{-2t} u(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s) = \frac{3/5}{s+2}$$

dan kondisi awal $y(0^-) = -2$.

$$Y(s) = \frac{3}{(s+2)(s+5)} + \frac{-2}{s+5} = \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+5} + \frac{-2}{s+5} = \frac{1}{s+2} - \frac{3}{s+5}$$

$$y(t) = e^{-2t} u(t) - 3e^{-5t} u(t)$$

Metoda TLU untuk menyelesaikan PD (1)

- TL memberikan separasi yang jelas antara respons natural response sistem terhadap kondisi awal dan respons forced sistem yang terkait dengan input.

$$\frac{d^N}{dt^N} y(t) + a_{N-1} \frac{d^{N-1}}{dt^{N-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) =$$
$$b_M \frac{d^M}{dt^M} x(t) + b_{M-1} \frac{d^{M-1}}{dt^{M-1}} x(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} x(t) + b_0 x(t),$$

Diperoleh $A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s)$,

dimana $A(s) = s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1s + a_0$

$$B(s) = b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0$$

$$C(s) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} \frac{d^l}{dt^l} y(t) \Big|_{t=0^-}$$

diassumsikan bahwa input = 0 untuk $t < 0$.

$C(s) = 0$ bila semua kondisi awal di $y(t)$ adalah nol, dan

$B(s)X(s) = 0$ bila masukan $x(t)$ adalah nol.

Metoda TLU untuk menyelesaikan PD (2)

- $A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s)$
- Dipisahkan efek kondisi awal terhadap $y(t)$ dan terhadap masukan (input) dengan menulis

$$Y(s) = \frac{B(s)X(s)}{A(s)} + \frac{C(s)}{A(s)} = Y^{(f)}(s) + Y^{(n)}(s)$$

- Besaran $Y^{(f)}(s)$ menyatakan komponen respons sistem terkait dengan masukan (input), atau **respons forced** sistem. Besaran tersebut juga merepresentasikan keluaran (output) bila kondisi awal = nol.
- Besaran $Y^{(n)}(s)$ menyatakan komponen keluaran (output) akibat kondisi awal, atau **respons natural** sistem. Besaran ini merepresentasikan keluaran (output) bila masukan (input) = nol.

Contoh mendapatkan Respons Forced dan Respons Natural (1)

- Memakai TLU untuk menentukan keluaran sistem dengan persamaan

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 6y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 6x(t)$$

terhadap masukan $x(t) = u(t)$. Assumsi kondisi awal disistem adalah

$$y(0^-) = 1 \text{ and } \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0^-} = 2.$$

Tentukan $y^{(f)}(t)$ dan $y^{(n)}(t)$.

- Solusi: memakai sifat differensiasi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(t) &\stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} sG(s) - g(0^-) \\ \frac{d^2}{dt^2} g(t) &\stackrel{L_u}{\Leftrightarrow} s^2 G(s) - \left. \frac{d}{dt} g(t) \right|_{t=0^-} - s g(t) \Big|_{t=0^-} \end{aligned}$$

dan lakukan TLU dikedua sisi PD

Contoh mendapatkan Respons Forced dan Respons Natural (2)

$$\frac{d^2}{dt^2} y(t) + 5 \frac{d}{dt} y(t) + 6y(t) = \frac{d}{dt} x(t) + 6x(t)$$

$$(s^2 + 5s + 6)Y(s) - \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0^-} - sy(0^-) - 5y(0^-) = (s + 6)X(s)$$

Diperoleh

$$Y(s) = \frac{(s + 6)X(s)}{s^2 + 5s + 6} + \frac{sy(0^-) + \left. \frac{d}{dt} y(t) \right|_{t=0^-} + 5y(0^-)}{s^2 + 5s + 6}$$

Contoh mendapatkan Respons Forced dan Respons Natural (3)

$$x(t) = u(t) \stackrel{TLU}{\iff} X(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y^{(f)}(s) = \frac{s+6}{s(s+2)(s+3)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{s+3} \stackrel{TLU}{\iff} y^{(f)}(t)$$

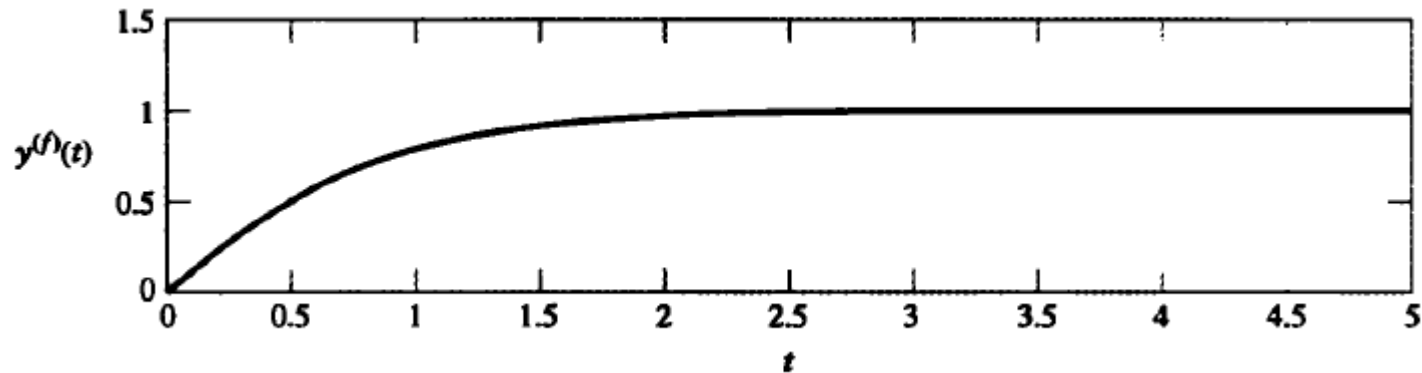
$$Y^{(n)}(s) = \frac{s+2+5}{(s+2)(s+3)} = \frac{s+7}{(s+2)(s+3)} = \frac{5}{s+2} - \frac{4}{s+3} \stackrel{TLU}{\iff} y^{(n)}(t)$$

$$y(t) = y^{(f)}(t) + y^{(n)}(t)$$

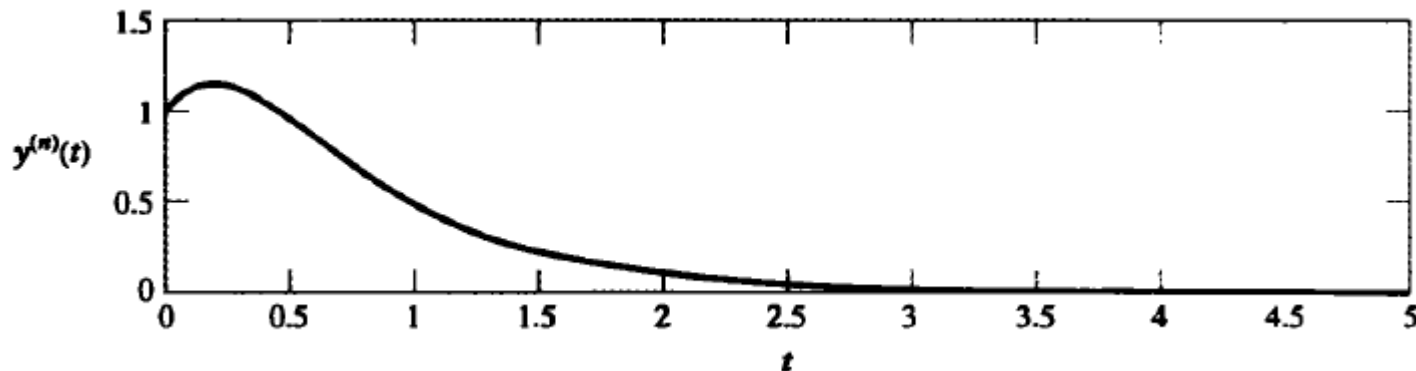
- Respons Forced $y^{(f)}(t) = u(t) - 2e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$
- Response Natural $y^{(n)}(t) = 5e^{-2t}u(t) - 4e^{-3t}u(t)$

Contoh mendapatkan Respons Forced dan Respons Natural (4)

- Forced Response $y^{(f)}(t) = u(t) - 2e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

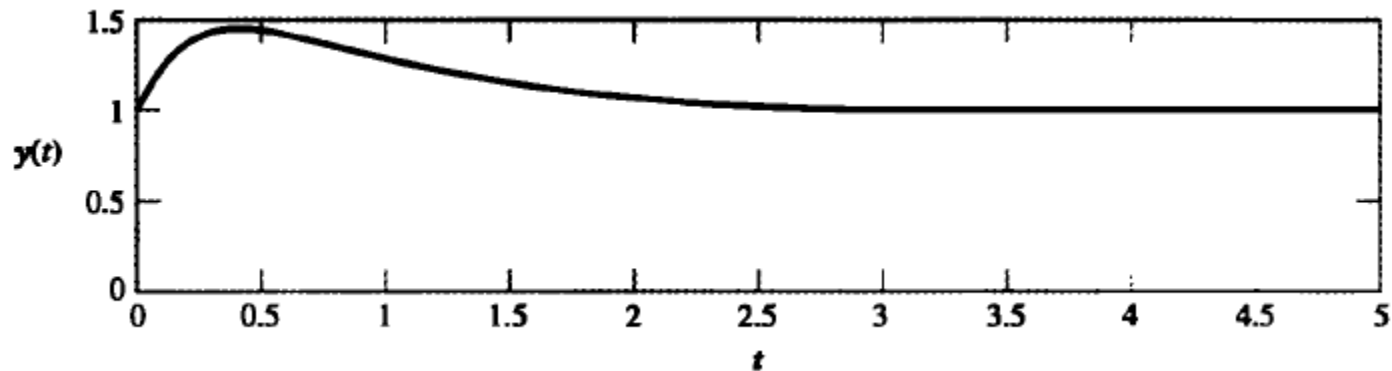


- Natural response $y^{(n)}(t) = 5e^{-2t}u(t) - 4e^{-3t}u(t)$



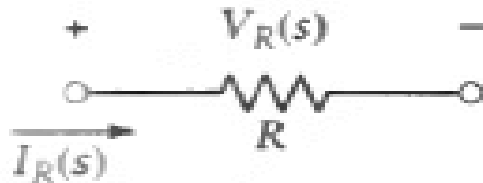
Contoh mendapatkan Respons Forced dan Respons Natural (5)

- Keluaran sistem $y(t) = y^{(f)}(t) + y^{(n)}(t)$
- Forced Response $y^{(f)}(t) = u(t) - 2e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$
- Natural response $y^{(n)}(t) = 5e^{-2t}u(t) - 4e^{-3t}u(t)$



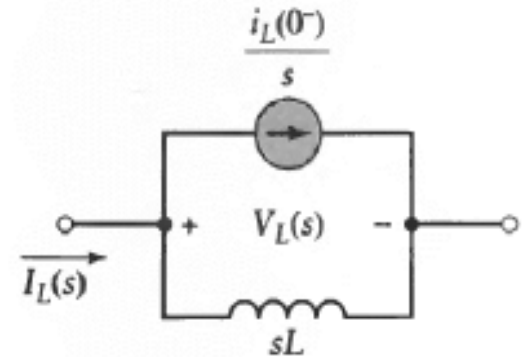
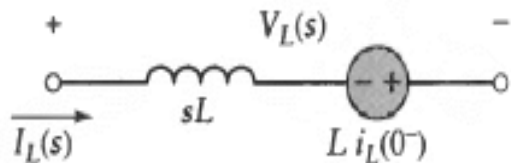
Metoda didalam Analisis Rangkaian: Memakai Transformasi Laplace (1)

- Sifat differensiasi dan integrasi TL dapat dipakai didalam analisis rangkaian yang mengandung elemen capacitor dan inductor, analisis rangkaian dapat diselesaikan langsung dalam bentuk TL, dibandingkan dengan cara menuliskan PD dikawasan waktu.
- Hal ini dicapai dengan mengganti elemen Resistive, Capacitive, dan Inductive dengan ekivalen TL nya.
- **Elemen resistive R:**
- $v_R(t) = Ri_R(t) \Rightarrow V_R(s) = RI_R(s)$

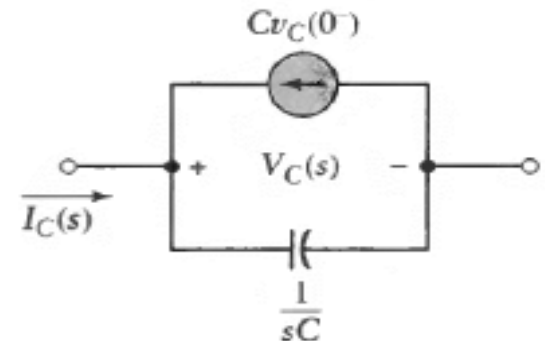
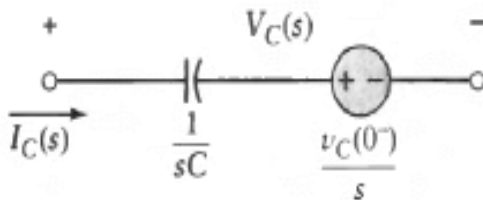


Laplace Transform: Methods in Circuit Analysis (2)

- **Elemen inductor L:** $\frac{d}{dt}g(t) \xLeftrightarrow{Lu} sG(s) - g(0^-)$
- $v_L(t) = L \frac{d}{dt} i_L(t) \Rightarrow V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-)$



- **Elemen capacitor C:** $\int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \xLeftrightarrow{Lu} \frac{g^{(-1)}(0^-)}{s} + \frac{G(s)}{s}$
- $v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{0^-}^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0^-) \Rightarrow V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0^-)}{s}$



Rangkaian orde 1 (1)

- Memakai model TL rangkaian untuk menentukan tegangan $y(t)$ didalam rangkaian, dengan tegangan masukan:

$$x(t) = 3e^{-10t}u(t) \text{ V.}$$

Tegangan di-capacitor

pada waktu $t = 0^-$ adalah 5 V.

- Solusi:**

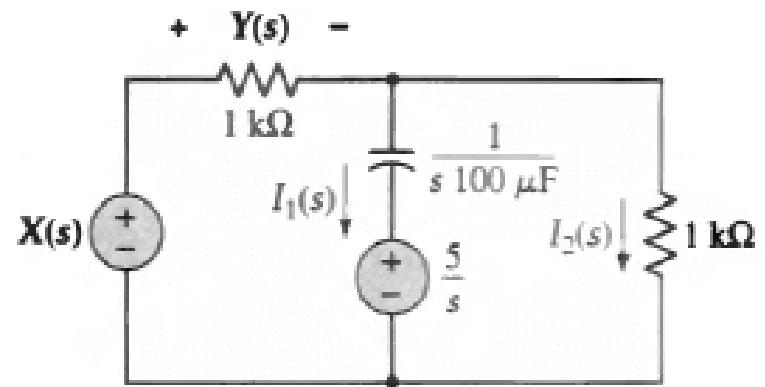
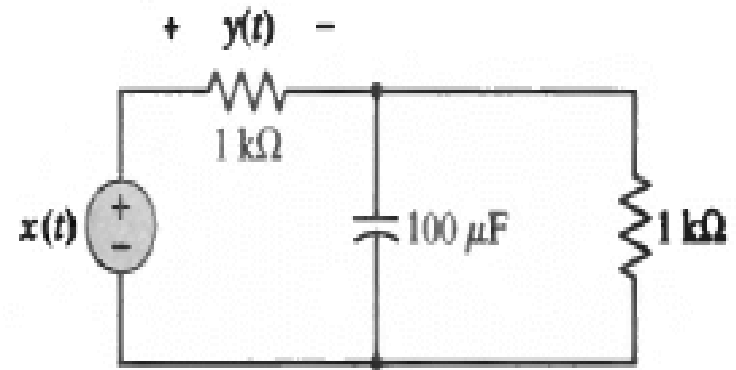
Rangkaian tertransformasi Laplace:

$$Y(s) = 1000(I_1(s) + I_2(s))$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC}I_1(s) + \frac{v_C(0^-)}{s}$$

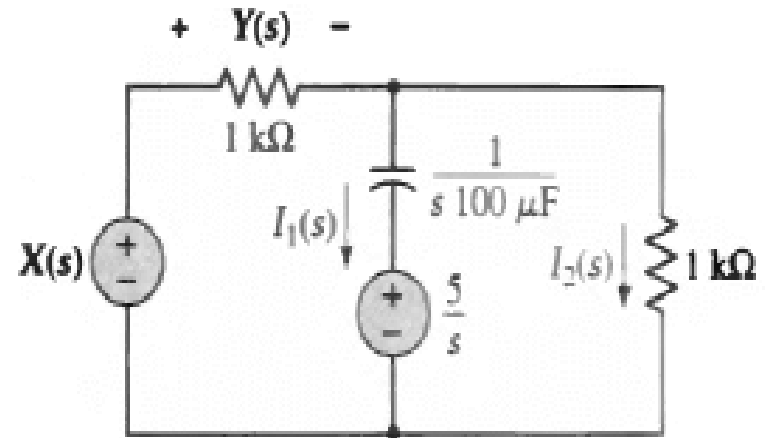
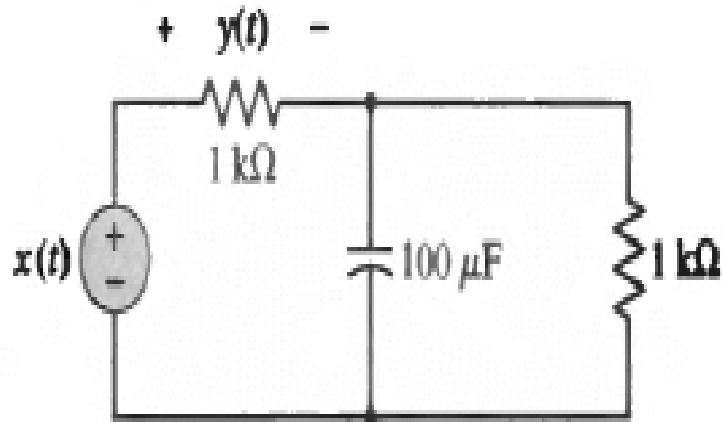
$$X(s) = Y(s) + \frac{1}{s(10^{-4})}I_1(s) + \frac{5}{s}$$

$$X(s) = Y(s) + 1000I_2(s)$$



Rangkaian orde 1 (2)

- Diperoleh $Y(s) = X(s) \frac{s+10}{s+20} - \frac{5}{s+20}$
- Dengan $x(t) = 3e^{-10t}u(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s) = \frac{3}{s+10}$
- Didapat $Y(s) = \frac{-2}{s+20}$
- Disimpulkan bahwa: $y(t) = -2e^{-20t}u(t) \text{ V}$



Transformasi Laplace Bilateral (TLB)

- TLB dipakai untuk sinyal $x(t)$ pada waktu $t \geq 0$ dan $t < 0$:

$$x(t) \overset{L}{\Leftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- TLB cocok untuk perhitungan sinyal dan sistem tidak kausal.
- Akan didiskusikan perbedaan yang penting antara sifat-sifat TLU dengan TLB.

TLB untuk Sinyal-Sinyal yang \neq nol untuk $t < 0$

<i>Signal</i>	<i>Bilateral Transform</i>	<i>ROC</i>
$\delta(t - \tau), \tau < 0$	$e^{-s\tau}$	for all s
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$-tu(-t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s + a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\text{Re}\{s\} < -a$

Sifat-Sifat TLB

- Sifat **linearitas, penskalaan, pergeseran dikawasan s , konvolusi, dan differensiasi dikawasan s** , identik untuk TLB dan TLU, meskipun operasi yang terkait dengan sifat-sifat tersebut dapat mengubah daerah konvergensi (region of convergence (ROC)).
- Sifat-sifat TLB seperti pergeseran waktu (**time-Shift**), **differensiasi dikawasan waktu, dan integrasi dikawasan waktu** sedikit berbeda dengan TLU.
- Teorema nilai awal dan akhir (Initial and Final Value Theorems)

Signal	Unilateral Transform $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_+} X(s)$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_+} Y(s)$	Bilateral Transform $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$ $y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Y(s)$	ROC $s \in R_x$ $s \in R_y$
$ax(t) + by(t)$	$aX(s) + bY(s)$	$aX(s) + bY(s)$	At least $R_x \cap R_y$
$x(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$ if $x(t - \tau)u(t) = x(t - \tau)u(t - \tau)$	$e^{-s\tau} X(s)$	R_x
$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$	$X(s - s_0)$	$R_x + \text{Re}\{s_0\}$
$x(at)$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$\frac{R_x}{ a }$
$x(t) * y(t)$	$X(s)Y(s)$ if $x(t) = y(t) = 0$ for $t < 0$	$X(s)Y(s)$	At least $R_x \cap R_y$
$-tx(t)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	$\frac{d}{ds} X(s)$	R_x
$\frac{d}{dt} x(t)$	$sX(s) - x(0^-)$	$sX(s)$	At least R_x
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau + \frac{X(s)}{s}$	$\frac{X(s)}{s}$	At least $R_x \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\}$

Sifat-Sifat Transformasi Laplace Unilateral.

No	Sifat	$x(t)$	$X(s)$
1	Superposisi	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
2	Pengskalaan waktu	$x(at)$ untuk $a > 0$	$\frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$
3	Perkalian-exp	$e^{s_0 t} x(t)$	$X(s - s_0)$
4	Perkalian-cos	$\cos(\alpha t)x(t)$	$0,5[X(s + j\alpha) + X(s - j\alpha)]$
5	Perkalian-sin	$\sin(\alpha t)x(t)$	$j0,5[X(s + j\alpha) - X(s - j\alpha)]$

Sifat-Sifat Transformasi Laplace Unilateral.

No	Sifat	$x(t)$	$X(s)$
6	Pergeseran waktu	$x(t - \tau),$ $x(t - \tau)u(t - \tau), \tau > 0$	$e^{-s\tau} X(s)$
7	Perkalian waktu	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
8		$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
9	Turunan	$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
10		$x''(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	$s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$

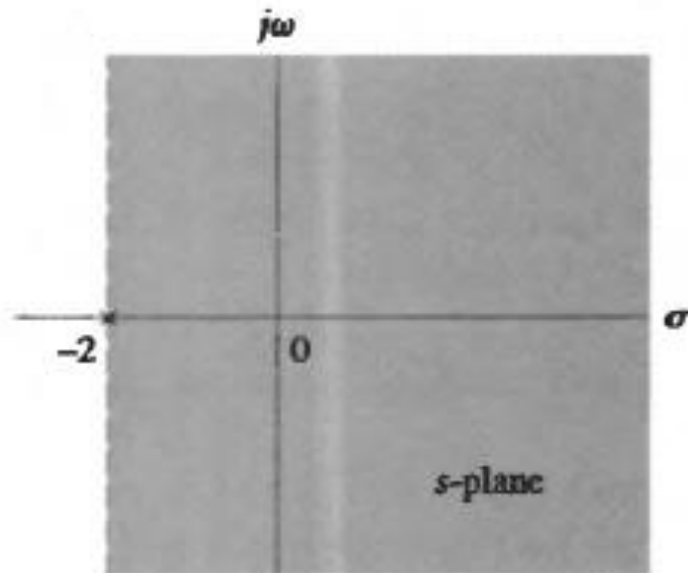
Sifat-Sifat Transformasi Laplace Unilateral.

No	Sifat	$x(t)$	$X(s)$
11	Turunan	$x^{(n)}(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{n-1}x(0^-) - \dots - x^{(n-1)}(0^-)$
12	Integral	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ $\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{x^{(-1)}(0^-)}{s} + \frac{X(s)}{s}, x^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau) d\tau$ $\frac{X(s)}{s}$
13	Konvolusi	$x(t) * h(t)$	$X(s)H(s)$

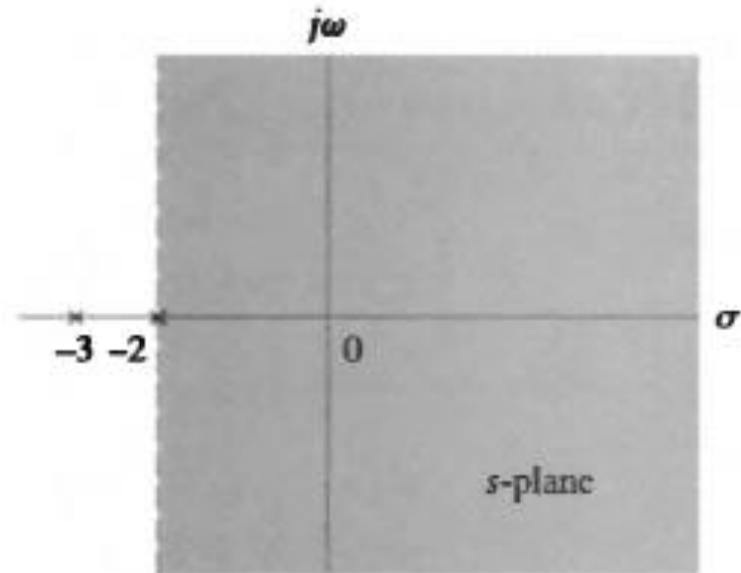
Effek Penghilangan Pole-Zero di DK (1)

- Diketahui $x(t) = e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{1}{s+2}$, dengan DK Riil(s) > -2
dan $y(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t) \xleftrightarrow{L} Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$,
dengan DK Riil(s) > -2 .

DK $x(t)$



DK $y(t)$



Effek Penghilangan Pole-Zero di DK (2)

- Bila $z(t) = x(t) - y(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

$$Z(s) = X(s) - Y(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)(s+3)} = \frac{(s+3)-1}{(s+2)(s+3)} = \frac{(s+2)}{(s+2)(s+3)}$$

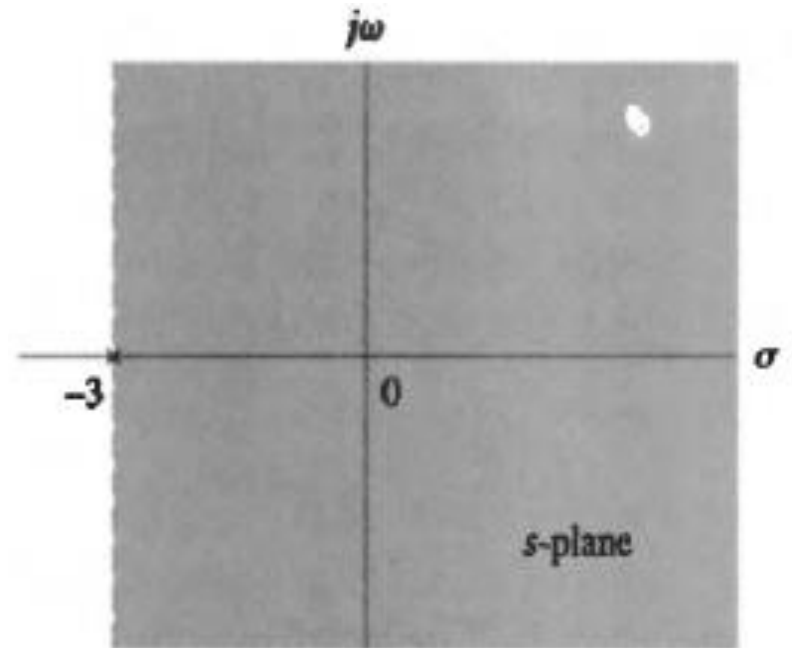
Ada zero $Z(s)$ terletak di $s = -2$ menghilangkan pole di $s = -2$,

$$Z(s) = \frac{1}{s+3}, \text{ dengan DK Riil}(s) > -3.$$

Pengurangan menghilangkan sinyal

$e^{-2t}u(t)$ dikawasan waktu;

konsekwensinya, DK diperbesar.



Memakai Sifat Pergeseran Waktu dan Differensiasi Transformasi Laplace Bilateral

- Dapatkan TL dari $x(t) = \frac{d^2}{dt^2} (e^{-3(t-2)} u(t-2))$
- Solusi:
- Kita tahu bahwa $e^{-3t} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+3}$, dengan DK Riil(s) > -3 .
- Sifat pergeseran waktu $x(t-\tau) \xleftrightarrow{L} e^{-s\tau} X(s)$ implikasinya bahwa $e^{-3(t-2)} u(t-2) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+3} e^{-2s}$, dengan DK Riil(s) > -3 .
- Memakai sifat differensiasi waktu $\frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{L} sX(s)$, dengan DK R_x .
- Differensiasi 2 kali:

$$x(t) = \frac{d^2}{dt^2} (e^{-3(t-2)} u(t-2)) \xleftrightarrow{L} X(s) = \frac{s^2}{s+3} e^{-2s},$$

dengan DK Riil(s) > -3 .

Sifat-Sifat Daerah Konvergensi (1)

- TLB tidak unik, kecuali DK nya ditentukan.

$x(t)$	$X(s)$	DK
$e^{at}u(t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Reil}(s) > a$
$-e^{at}u(-t)$	$\frac{1}{s-a}$	$\text{Reil}(s) < a$

- Akan diperlihatkan bagaimana DK terkait dengan karakteristik sinyal $x(t)$.
- **DK tidak mengandung pole**. Bila TL konvergen, maka nilai $X(s)$ terbatas didalam DK.

Bila d adalah sebuah pole $X(s)$, artinya $X(d) = \pm\infty$, sehingga TL tidak konvergen di d . Jadi, $s = d$ tidak terletak didalam DK.

Sifat-Sifat Daerah Konvergensi (2)

- Konvergensi TLB untuk sebuah sinyal $x(t)$, implikasinya adalah

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

untuk sejumlah nilai-nilai σ .

- Kuantitas σ adalah bagian riil s , DK hanya bergantung kepada σ ; bagian imajiner s tidak mempengaruhi konvergensi.
- Implikasinya bahwa **DK merupakan papan parallel terhadap sumbu $j\Omega$ dibidang s .**
- Bila $x(t)$ adalah sinyal durasi terbatas; $x(t) \neq 0$ for $a < t < b$.
- Kita dapat memperoleh konstanta A sehingga $|x(t)| \leq A$, maka

$$I(\sigma) \leq \int_a^b A e^{-\sigma t} dt = \begin{cases} \frac{-A}{\sigma} [e^{-\sigma t}]_a^b, & \sigma \neq 0 \\ A(b-a), & \sigma = 0 \end{cases}$$

Terlihat bahwa $I(\sigma)$ nilainya terbatas untuk semua nilai σ terbatas, kesimpulannya bahwa **DK untuk sinyal durasi terbatas adalah seluruh bidang s .**

Sifat-Sifat Daerah Konvergensi (3)

- Kita tulis $I(\sigma) = I_-(\sigma) + I_+(\sigma)$, dimana

$$I_-(\sigma) = \int_{-\infty}^0 |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

dan

$$I_+(\sigma) = \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt$$

Agar $I(\sigma) < \infty$, kedua $I_-(\sigma)$ dan $I_+(\sigma)$ harus terbatas. Implikasinya bahwa $|x(t)|$ harus terbatas. Andaikata bisa membatasi $|x(t)|$ untuk $t > 0$ dan $t < 0$ dengan mendapatkan konstanta terkecil $A > 0$ dan σ_p sehingga $|x(t)| \leq Ae^{\sigma_p t}$, $t > 0$, dan konstanta terbesar σ_n sehingga $|x(t)| \leq Ae^{\sigma_n t}$, $t < 0$.

Sifat-Sifat Daerah Konvergensi (4)

- Sinyal $x(t)$ yang memenuhi batas diatas, disebut **“exponential order”**.
 $|x(t)|$ membesar tidak lebih cepat dari $e^{\sigma_p t}$ untuk $t > 0$ dan $e^{\sigma_n t}$ untuk $t < 0$.
- Memakai batas “exponential order” terhadap $|x(t)|$,

$$I_-(\sigma) \leq A \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma_n - \sigma)t} dt = \frac{A}{\sigma_n - \sigma} \left[e^{(\sigma_n - \sigma)t} \right]_{-\infty}^0$$

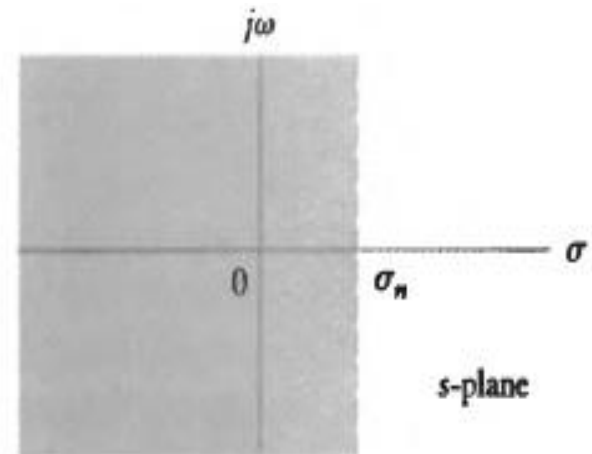
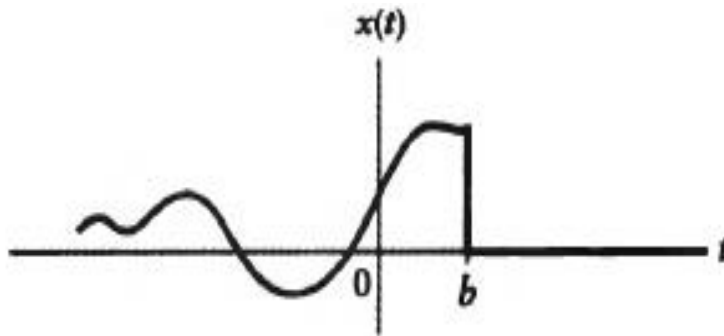
dan

$$I_+(\sigma) \leq A \int_0^{\infty} e^{(\sigma_p - \sigma)t} dt = \frac{A}{\sigma_p - \sigma} \left[e^{(\sigma_p - \sigma)t} \right]_0^{\infty}$$

- $I_-(\sigma) < \infty$ bila $\sigma < \sigma_n$ dan $I_+(\sigma) < \infty$ bila $\sigma > \sigma_p$.
- $I(\sigma) < \infty$ untuk nilai σ dimana kedua $I_-(\sigma)$ dan $I_+(\sigma) < \infty$.
- Maka, TL konvergen untuk $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$. Bila $\sigma_p > \sigma_n$, maka tidak ada nilai σ yang membuat TLB konvergen.

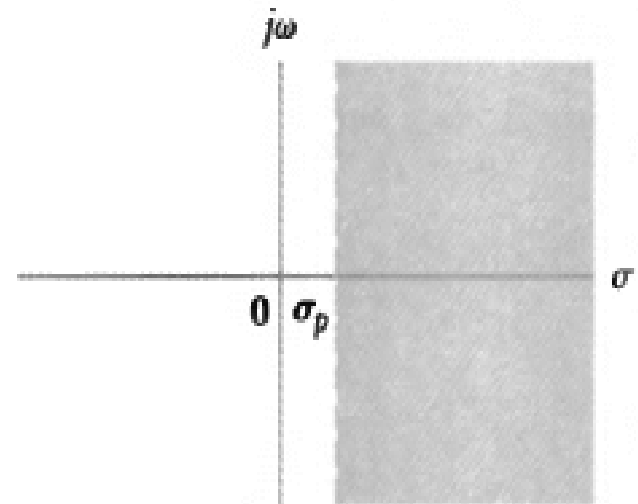
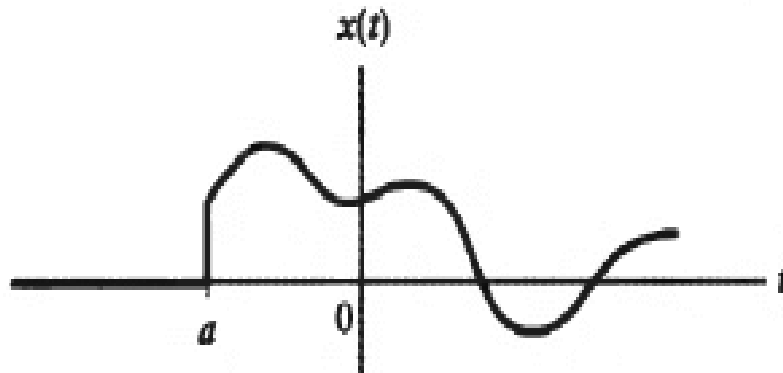
Sifat-Sifat Daerah Konvergensi (5)

- Sinyal sisi kiri adalah sinyal $x(t) \neq 0$ untuk $t < b$.
- Bila $x(t)$ adalah exponential order, maka DK sinyal sisi kiri adalah $\sigma < \sigma_n$



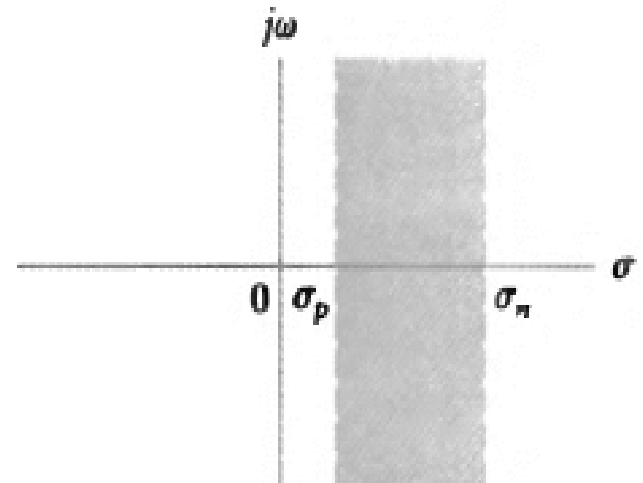
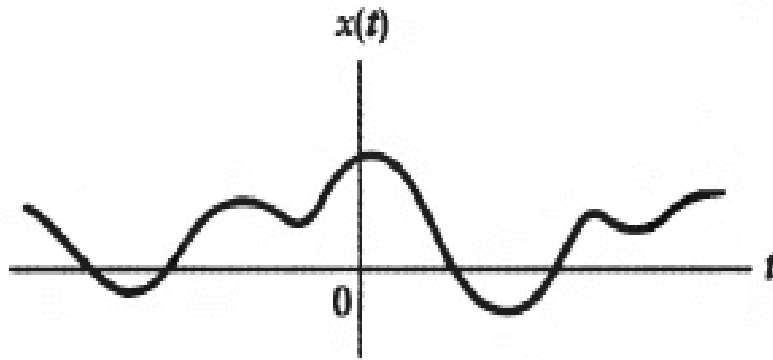
Properties of ROC (6)

- Sinyal sisi kanan adalah sinyal $x(t) \neq 0$ untuk $t > a$.
- Bila $x(t)$ adalah exponential order, maka DK sinyal sisi kanan adalah $\sigma > \sigma_p$



Properties of ROC (7)

- Sinyal dua sisi adalah sinyal $x(t) \neq 0$ untuk $-\infty < t < \infty$.
- Bila $x(t)$ adalah exponential order, Maka DK sinyal dua sisi adalah $\sigma_p < \sigma < \sigma_n$.



DK Penjumlahan Eksponensial (1)

- Bila: $x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(-t)$
Tentukan DK yang terkait dengan TLB tiap sinyal.
- Solusi:

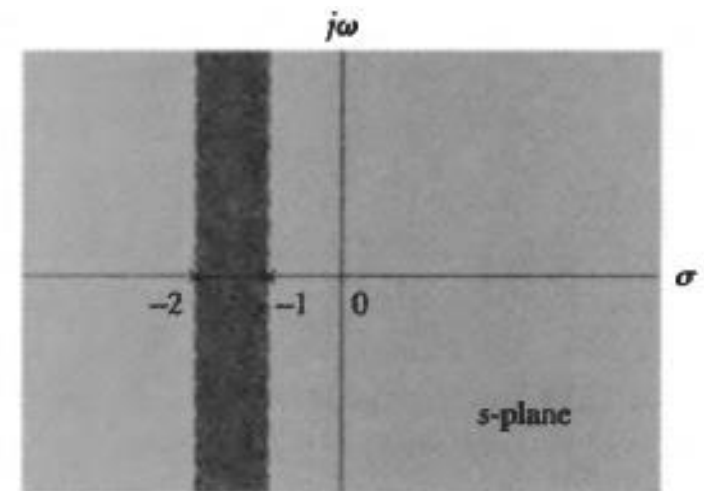
$$I_1(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(1+\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(2+\sigma)t} dt$$
$$I_1(\sigma) = \frac{-1}{1+\sigma} \left[e^{-(1+\sigma)t} \right]_{-\infty}^0 + \frac{-1}{2+\sigma} \left[e^{-(2+\sigma)t} \right]_0^{\infty}$$

suku ke 1 konvergen untuk $\sigma < -1$,

suku ke 2 konvergen untuk $\sigma > -2$,

Kedua suku konverge untuk $-2 < \sigma < -1$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$



DK Penjumlahan Eksponensial (2)

- Bila: $x_2(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(-t)$.
Tentukan DK yang terkait dengan TLB tiap sinyal.
- Solusi:

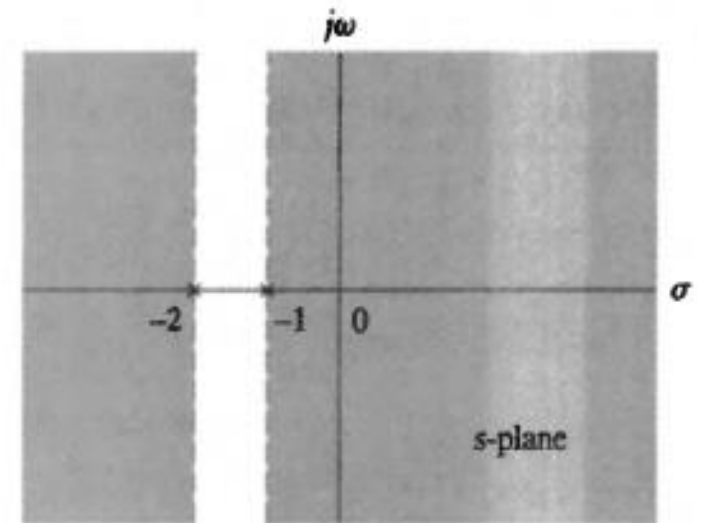
$$I_2(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)| e^{-\sigma t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(2+\sigma)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(1+\sigma)t} dt$$
$$I_2(\sigma) = \frac{-1}{2+\sigma} \left[e^{-(2+\sigma)t} \right]_{-\infty}^0 + \frac{-1}{1+\sigma} \left[e^{-(1+\sigma)t} \right]_0^{\infty}$$

suku ke 1 konvergen untuk $\sigma < -2$,

suku ke 2 konvergen untuk $\sigma > -1$,

Tidak ada nilai σ yang membuat
kedua suku konvergen

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



Inversi Transform Laplace Bilateral (1)

- Harus memakai DK untuk menentukan TLB invers yang unik. Diandaikan

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Bila $M \geq N$, kita memakai pembagian panjang:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k + \tilde{X}(s)$$

Dimana $\tilde{X}(s) = \frac{\tilde{B}(s)}{A(s)}$, derajat $\tilde{B}(s)$ lebih rendah satu daripada $A(s)$, $\tilde{X}(s)$ dinyatakan memakai EPP / PFE dalam suku pole tidak berulang:

$$\tilde{X}(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - d_k}$$

Diperoleh:

$$\sum_{k=0}^{M-N} c_k \delta^{(k)}(t) \stackrel{L}{\Leftrightarrow} \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k$$

Inversi Transform Laplace Bilateral (2)

- Dimana $\delta^{(k)}(t)$ adalah turunan ke k dari impuls $\delta(t)$.
- DK $\tilde{X}(s)$ sama dengan DK $X(s)$ karena TL impuls dan turunannya konvergen disemua titik dibidang s .
- Ada 2 kemungkinan untuk TLB invers untuk tiap suku di EPP $\tilde{X}(s)$,
- Kita bisa memakai pasangan transformasi sisi kanan:

$$A_k e^{d_k t} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{A_k}{s - d_k}, \text{ dengan DK Riil}(s) > d_k$$

atau pasangan transformasi sisi kiri:

$$-A_k e^{d_k t} u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{A_k}{s - d_k}, \text{ dengan DK Riil}(s) < d_k$$

- DK yang terkait dengan $X(s)$ menentukan apakah transformasi invers yang dipilih sisi kanan atau sisi kiri.
- DK sinyal eksponensial sisi kanan terletak di kanan pole, sedangkan DK sinyal eksponensial sisi kiri terletak di kiri pole.
- Sifat linearitas menyatakan bahwa DK $X(s)$ adalah interseksi dari DK masing-masing suku di EPP / PFE.

Inversi TLB rasional “proper” (1)

- Dapatkan TLB invers dari:

$$X(s) = \frac{-5s - 7}{(s + 1)(s - 1)(s + 2)}, \text{ dengan DK } -1 < \text{Re}(s) < 1$$

- Solusi: memakai EPP / PFE:

$$X(s) = \frac{1}{s + 1} - \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{s + 2}$$

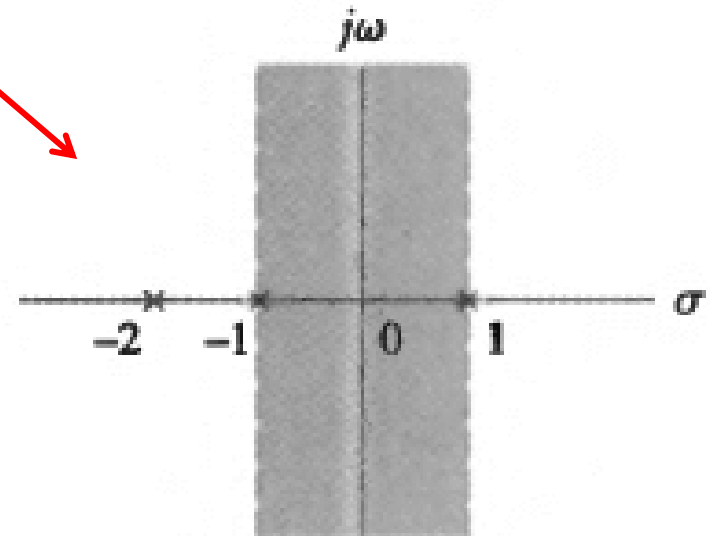
DK dan lokasi pole-pole

TLB invers tiap suku diperoleh dengan memakai hubungan antara lokasi pole-pole dan DK:

- pole suku pertama di $s = -1$.

DK disebelah kanan pole,

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1}$$



Inversi TLB rasional “proper” (2)

- pole suku kedua di $s = 1$.

DK disebelah kiri pole,

$$2e^t u(-t) \stackrel{L}{\Leftrightarrow} -\frac{2}{s+1}$$

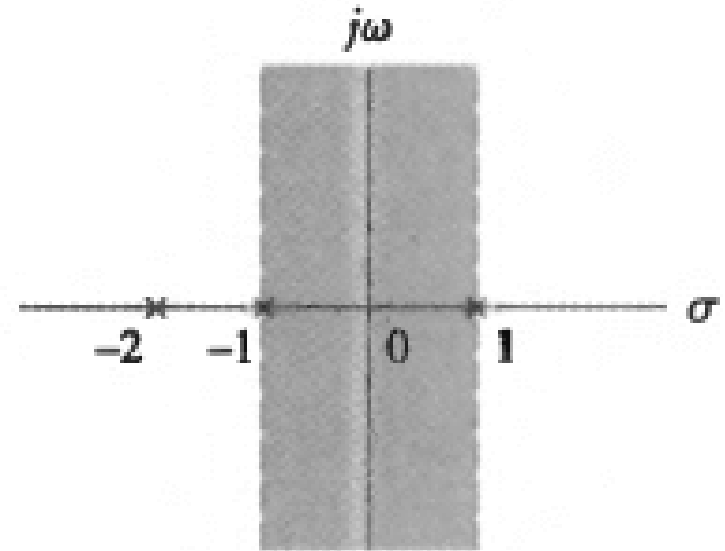
- pole suku ketiga di $s = -2$.

DK disebelah kanan pole,

$$e^{-2t} u(t) \stackrel{L}{\Leftrightarrow} \frac{1}{s+2}$$

- Gabungkan semua suku, diperoleh

$$x(t) = e^{-t} u(t) + 2e^t u(-t) + e^{-2t} u(t).$$



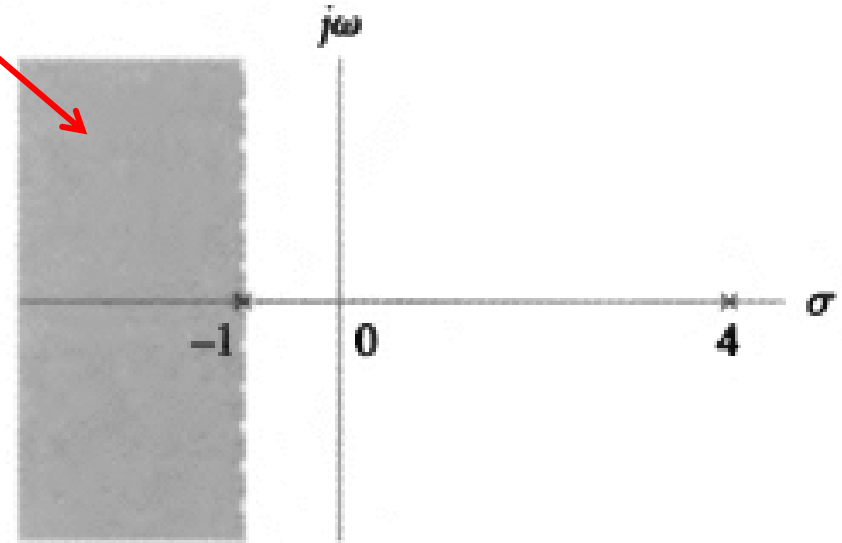
Inversi TLB rasional tidak “proper”

- Dapatkan TLB invers dari:

$$X(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}, \text{ dengan DK Riil}(s) < -1$$

- Solusi: $X(s) = 2s - 3 + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-4}$, $\text{Re}(s) < -1$.

DK dan lokasi pole-pole
DK ada disebelah kiri kedua pole.
Dipilih TLB invers sis kiri.



$$x(t) = 2\delta^{(1)}(t) - 3\delta(t) - e^{-t}u(-t) - 2e^{4t}u(-t)$$

Fungsi Transfer (FT) / Fungsi Sistem (FS)

- Fungsi transfer SLTBTW:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

- Keluaran SLTBTW: $y(t) = h(t) * x(t)$, persamaan ini berlaku untuk $h(t)$ dan $x(t)$, tidak tergantung apakah $h(t)$ dan $x(t)$ kausal atau tidak kausal. Memakai TLB:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- Maka fungsi transfer: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$
- Definisi diatas berlaku untuk nilai-nilai s dimana $X(s) \neq \text{nol}$.
- Contoh:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) - 3x(t)$$
$$H(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Fungsi Transfer dan Deskripsi Sistem: Persamaan Differensial (1)

- Persamaan differensial:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

- Masukan e^{st} adalah fungsi eigen dari SLTBTW, dengan nilai eigen sama dengan fungsi transfer $H(s)$.
- Bila $x(t) = e^{st}$, maka $y(t) = e^{st} H(s)$.
- Diperoleh

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\} \right) H(s) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\}$$

Fungsi Transfer dan Deskripsi Sistem: Persamaan Differensial (2)

- Bila $x(t) = e^{st}$, maka $y(t) = e^{st}H(s)$, diperoleh

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\} \right) H(s) = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\}$$

- Memakai

$$\frac{d^k}{dt^k} \{e^{st}\} = s^k e^{st}$$

- Sehingga

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

- $H(s)$ adalah rasio polynomial dalam s dan disebut **fungsi transfer rational**.

Fungsi Transfer dan Deskripsi Sistem: Persamaan Differensial (3)

- Fungsi transfer

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

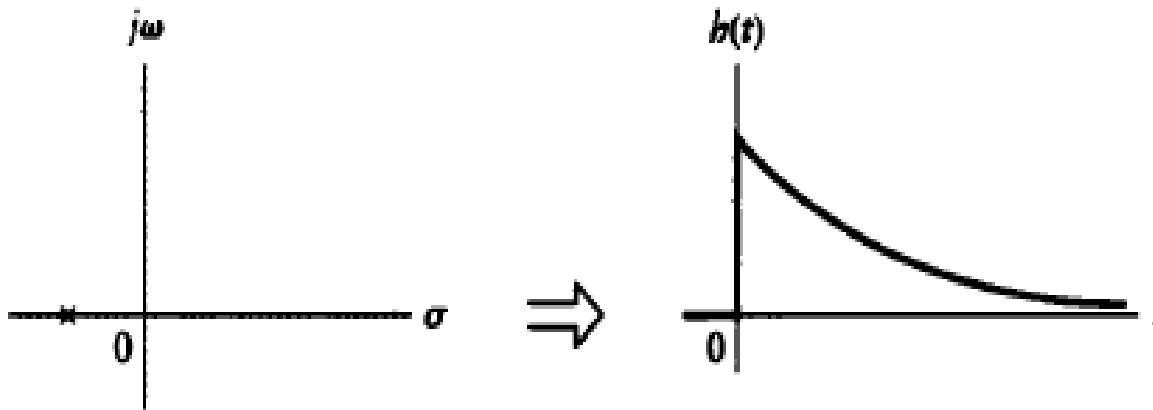
- Fungsi transfer dapat dinyatakan dalam bentuk pole-zero, dengan melakukan faktorisasi terhadap polynomial pembilang dan penyebut:

$$H(s) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}$$

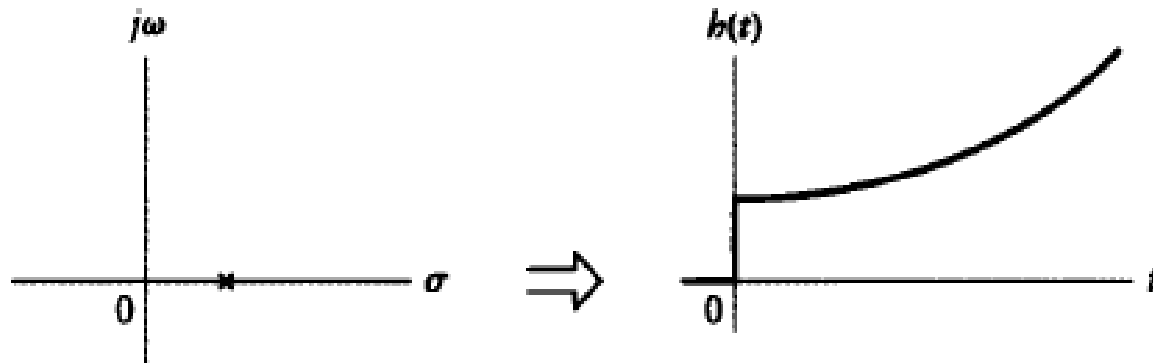
- c_k dan d_k adalah zero-zero dan pole-pole sistem.
- Dengan mengetahui pole-pole, zero-zero, dan faktor gain $\tilde{b} = \frac{b_M}{a_N}$, dapat menjelaskan fungsi transfer $H(s)$ dan mendeskripsikan SLTBTW.
- Pole-pole dari sistem adalah akar-akar persamaan karakteristik.

Kausalitas dan Stabilitas (1)

- Respons impuls $h(t) \xLeftrightarrow{L} H(s)$
- $h(t)$ sistem kausal adalah nol untuk $t < 0$.

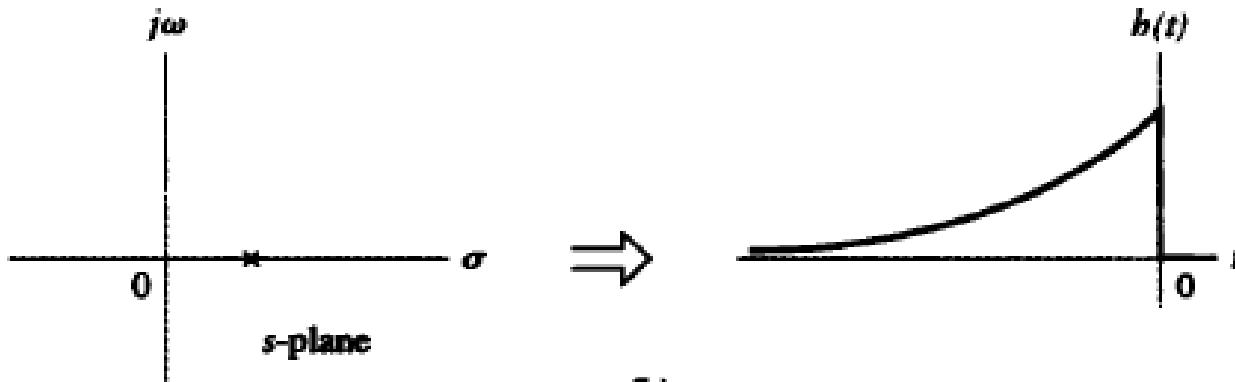


- Contoh sistem yang tidak stabil:

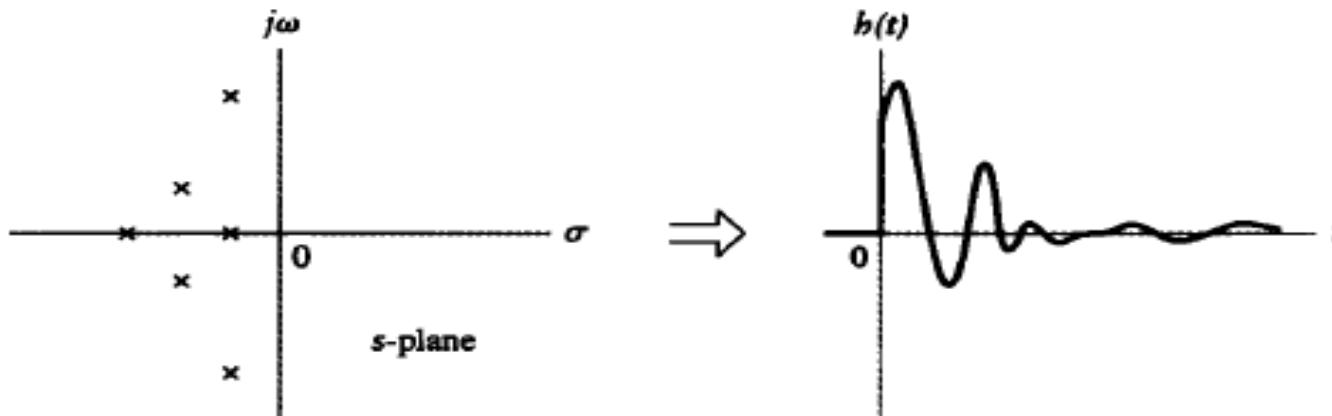


Kausalitas dan Stabilitas (2)

- Respons impuls $h(t) \xLeftrightarrow{L} H(s)$
- Contoh sistem tidak kausal:



- Sistem yang stabil dan Kausal



Sistem Invers

- Respons impuls sistem inverse, $h^{inv}(t)$ memenuhi kondisi:

$$h^{inv}(t) * h(t) = \delta(t)$$

- Fungsi transfer sistem invers: $H^{inv}(s)H(s) = 1$.

$$H^{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} \rightarrow H^{inv}(s) = \frac{\prod_{k=1}^N (s - d_k)}{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (s - c_k)}$$

- Sebuah sistem dengan fungsi transfer $H(s)$ dan mempunyai semua pole dan zero disebelah kiri bidang s , disebut sistem **fasa minimum**.
- Sifat penting sistem **fasa minimum** adalah hubungan yang unik antara respons magnitudo and respons fasa.
- Respons fasa sistem **fasa minimum** dapat secara unik ditentukan dari respons magnitudo dan timbal-balik.

Menentukan Respons Frekuensi dari Pole dan Zero (1)

- Lokasi pole-pole dan zero-zero di bidang s memberikan gambaran terhadap respons frekuensi sistem.
- Response frekuensi $H(j\Omega)$ diperoleh dari fungsi transfer $H(s)|_{s=j\Omega}$.

$$H(s) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (j\Omega - c_k)}{\prod_{k=1}^N (j\Omega - d_k)}$$

- Akan dibahas magnitudo dan phasa $H(j\omega)$, memakai teknik grafik untuk menentukan respons frekuensi.
- Response magnitudo untuk nilai Ω_0 tetap:

$$|H(j\Omega_0)| = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M |j\Omega_0 - c_k|}{\prod_{k=1}^N |j\Omega_0 - d_k|}$$

- Persamaan diatas merupakan rasio hasil kali suku-suku yang berbentuk $|j\Omega_0 - g|$, dimana g adalah sebuah pole atau zero.

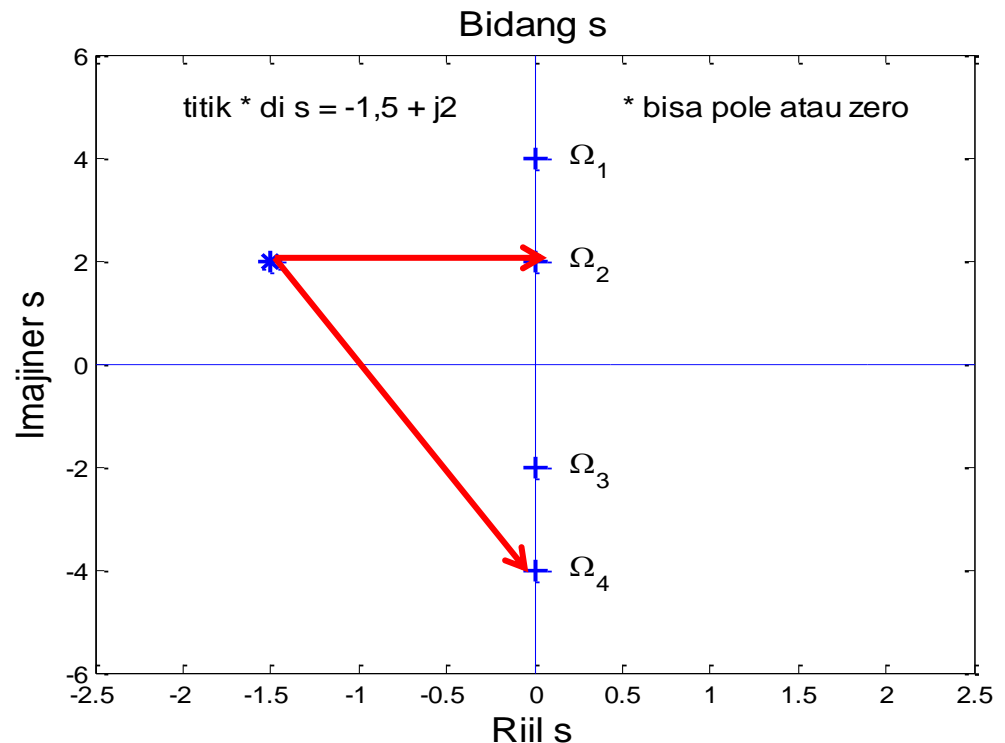
Menentukan Respons Frekuensi dari Pole dan Zero (2)

Faktor $(j\Omega_0 - g)$ adalah bilangan kompleks yang dapat direpresentasikan di bidang s sebagai sebuah vektor dari titik g ke titik $j\Omega_0$. Panjang vektor adalah $|j\Omega_0 - g|$.

- Vektor $j\Omega - g$ untuk beberapa nilai Ω

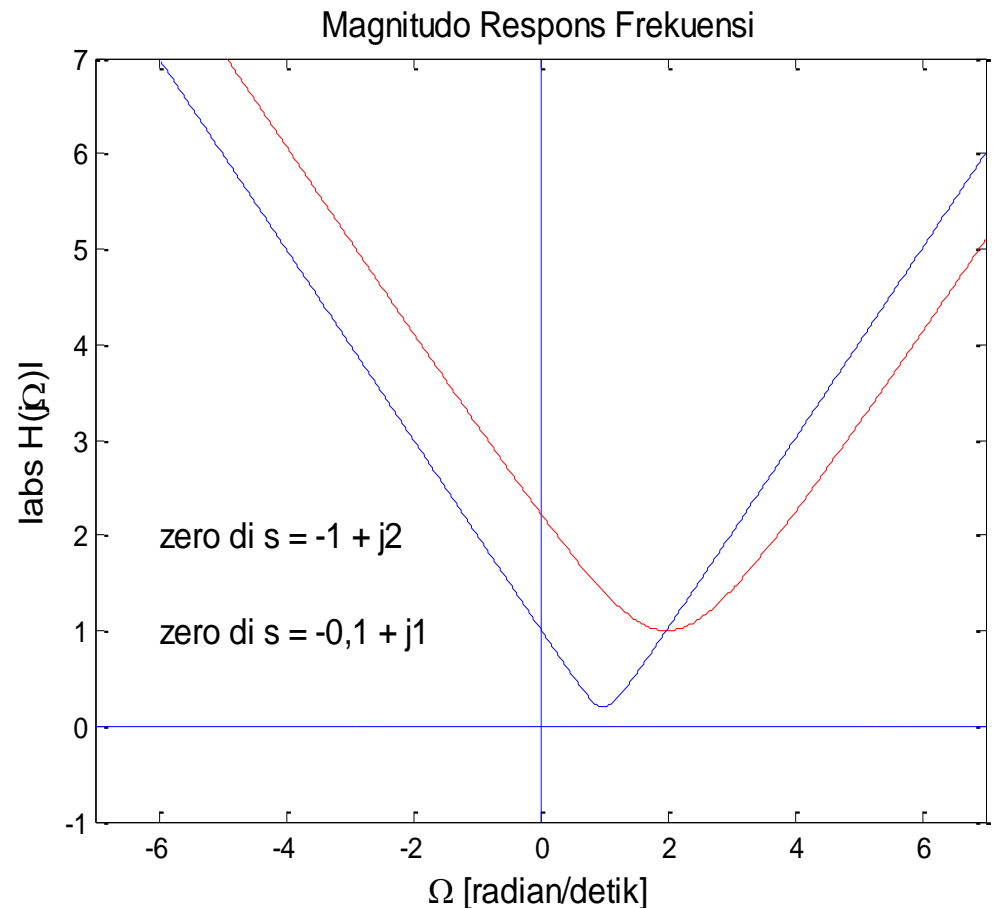
- Untuk zero:
 $|j\Omega_0 - g|$

- Untuk pole:
 $\frac{1}{|j\Omega_0 - g|}$



Menentukan Respons Frekuensi dari Pole dan Zero (3)

- Bila g adalah zero, maka $|j\Omega - g|$ berpengaruh ke pembilang $|H(j\Omega)|$
- Respons Magnitudo terkait dengan zero
- $|j\Omega + 1 - j2|$
- $|j\Omega + 0,1 - j|$

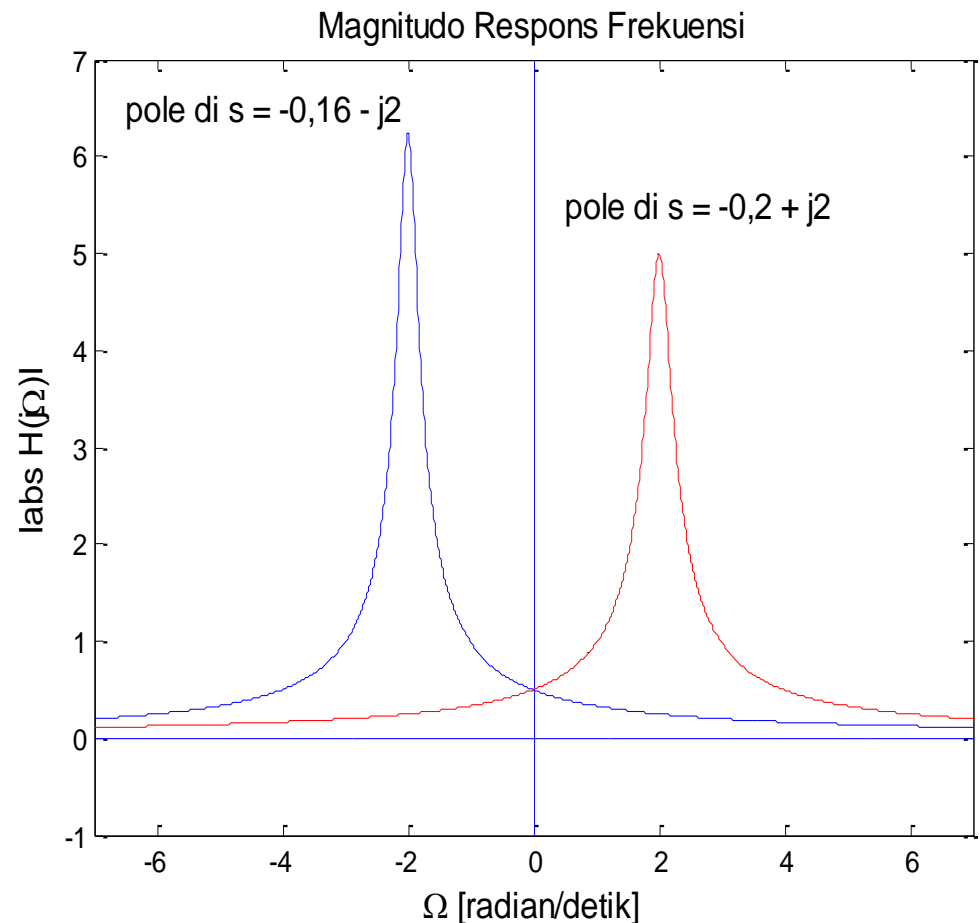


Menentukan Respons Frekuensi dari Pole dan Zero (4)

- Bila g adalah pole, maka $|j\Omega - g|$ berpengaruh ke penyebut $|H(j\Omega)|$
- Respons Magnitudo terkait dengan pole

$$\frac{1}{|j\Omega + 0,16 + j2|}$$

$$\frac{1}{|j\Omega + 0,2 - j2|}$$



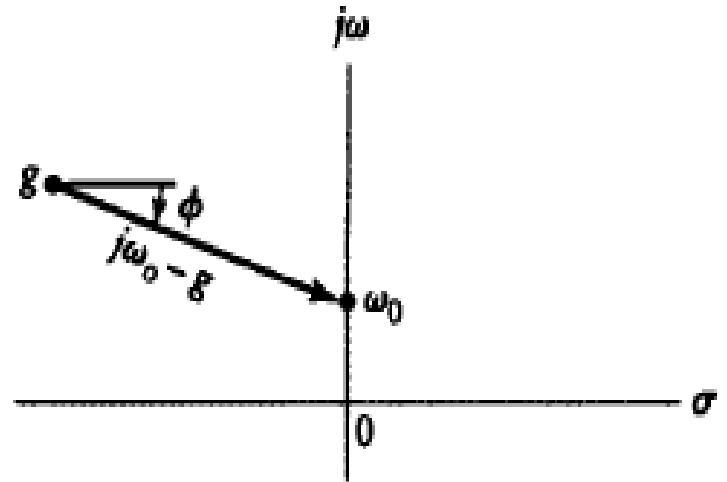
Menentukan Respons Frekuensi dari Pole dan Zero (5)

$$H(s) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (s - c_k)}{\prod_{k=1}^N (s - d_k)} \Rightarrow H(j\Omega) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (j\Omega - c_k)}{\prod_{k=1}^N (j\Omega - d_k)}$$

- Phasa $H(j\Omega)$ dapat dievaluasi dalam besaran phasa yang terkait dengan tiap pole dan zero.

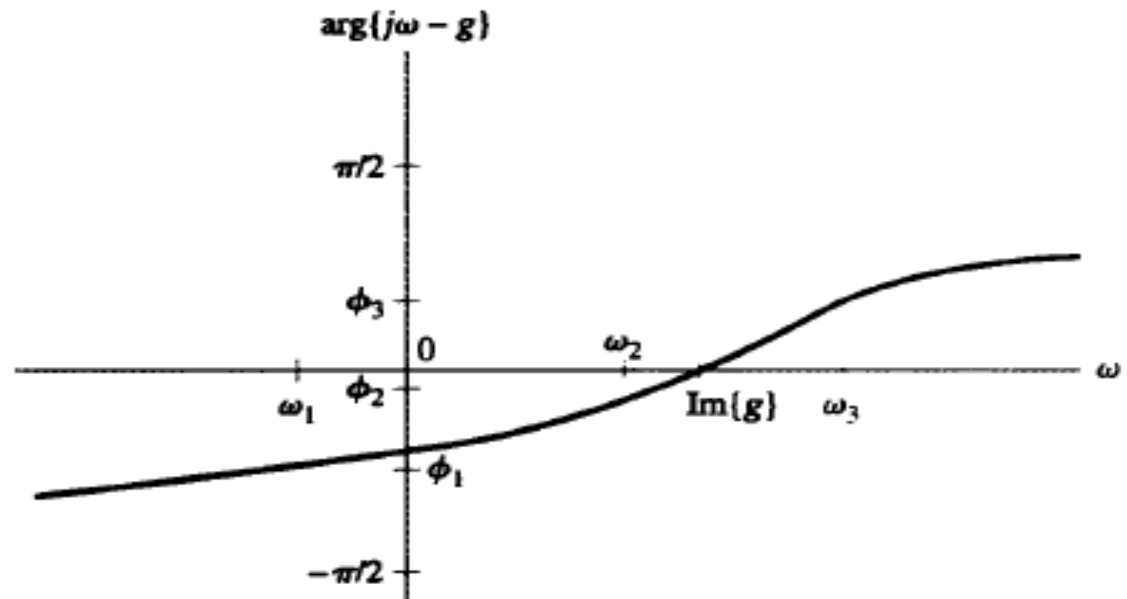
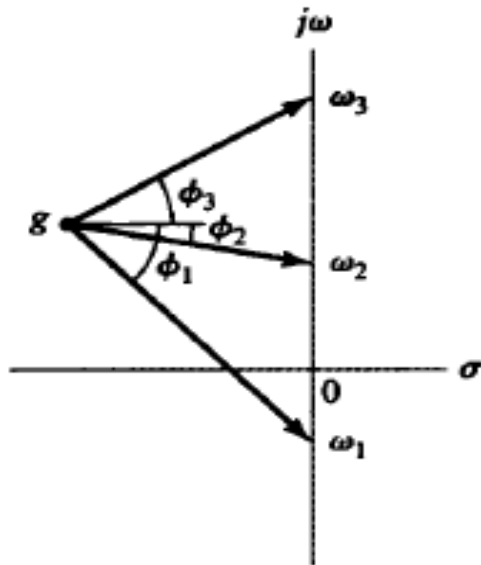
$$\arg\{H(j\Omega)\} = \arg\{\tilde{b}\} + \sum_{k=1}^M \arg\{j\Omega - c_k\} - \sum_{k=1}^N \arg\{j\Omega - d_k\}$$

- Sudut phasa vektor adalah ϕ , didefinisikan terhadap garis horizontal melalui g .



Menentukan Respons Frekuensi dari Pole dan Zero (6)

- Sudut phasa $j\omega - g$.



- Vektor dari g ke $j\Omega$ untuk beberapa nilai Ω .

Plot $\arg\{j\Omega - g\}$ sebagai fungsi kontinu Ω .

Grafik Respons Magnitudo dan Respon Fasa (1)

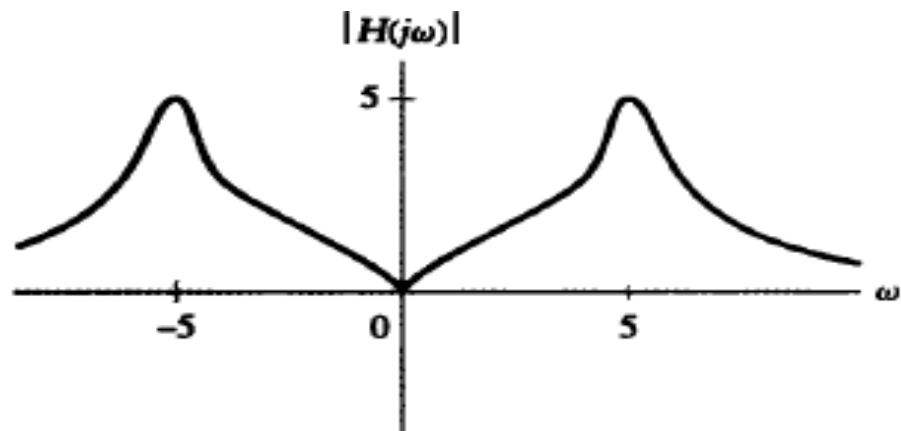
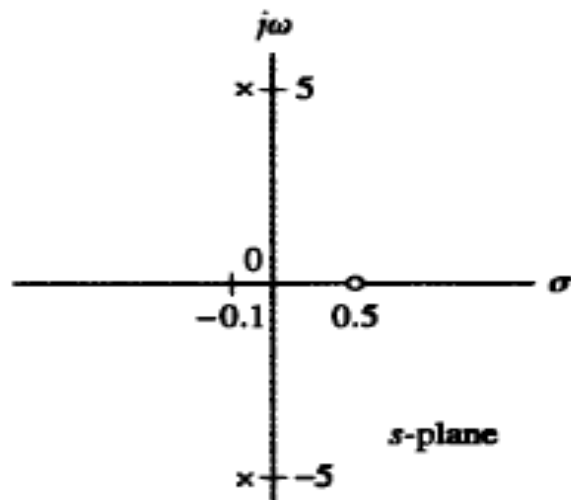
- Sketsa respons magnitudo dan respons fasa SLTBTW dengan FT:

$$H(s) = \frac{(s - 0.5)}{(s + 0.1 - j5)(s + 0.1 + j5)}$$

- Solusi: zero di $s = 0.5$ dan pole-pole di $s = -0.1 \pm j5$.

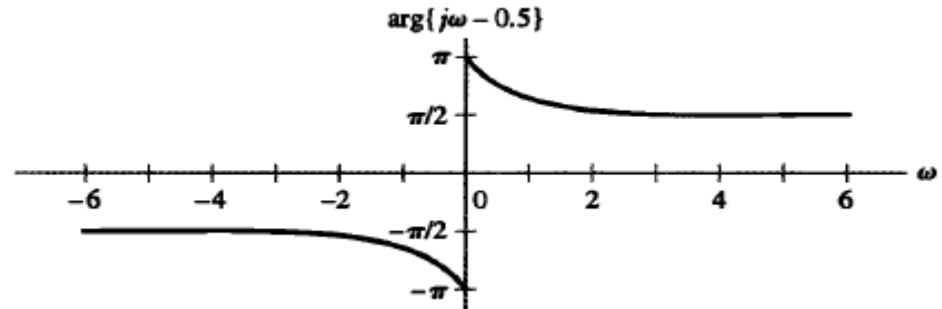
- $|H(j0)| = \frac{0.5}{|0.1 - j5||0.1 + j5|} \approx \frac{0.5}{5^2} = 0.02$.

- $|H(j5)| = \frac{|j5 - 0.5|}{|0.1||j10 + 0.1|} \approx \frac{5}{0.1(10)} = 5$.

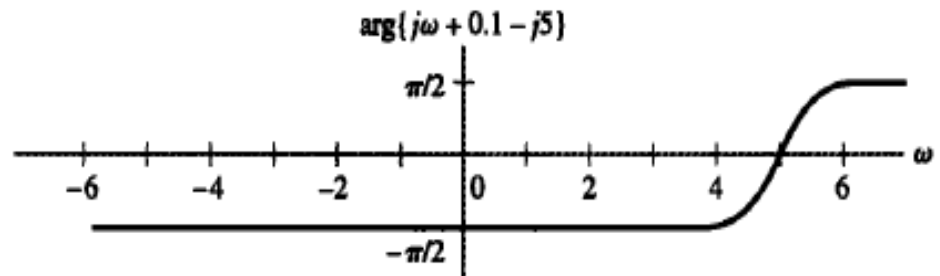


Grafik Respons Magnitudo dan Respon Fasa (2)

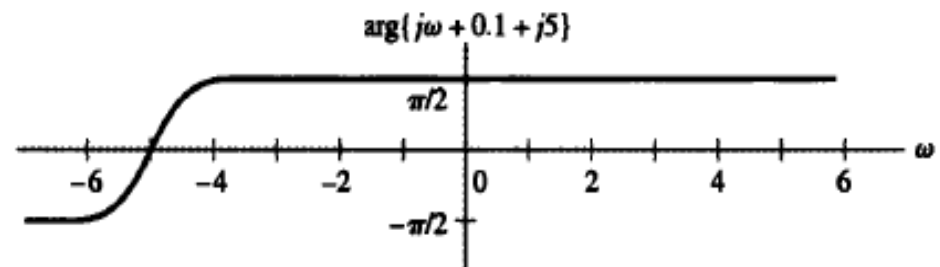
- Respons fasa
- Terkait dengan zero
- di $s = 0.5$.



- Respons fasa
- Terkait dengan pole
- di $s = -0.1 + j5$.



- Respons fasa
- Terkait dengan pole
- di $s = -0.1 - j5$.



Grafik Respons Magnitudo dan Respon Fasa (3)

$$H(s) = \frac{(s - 0.5)}{(s + 0.1 - j5)(s + 0.1 + j5)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{(j\Omega - 0.5)}{(j\Omega + 0.1 - j5)(j\Omega + 0.1 + j5)}$$

- The magnitude response
- $|H(j\Omega)|$
- The phase response
- $\arg\{H(j\Omega)\}$

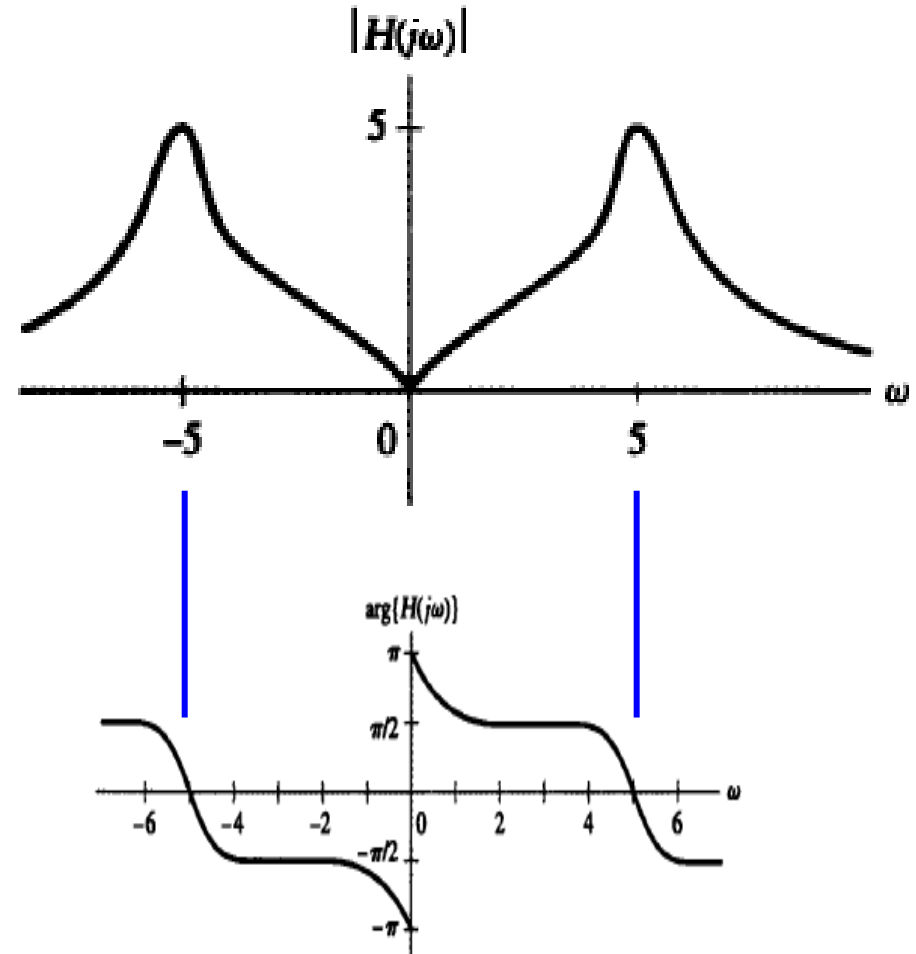


Diagram Bode

- Cara menggambar $H(j\Omega)$ dengan memakai pendekatan **Diagram Bode** atau **Plot Bode**.
- Diagram Bode menggambarkan:
- Respons magnitudo sistem dalam dB sebagai fungsi logaritma frekuensi, dan
- Respons fasa dalam derajat sebagai fungsi logaritma frekuensi.
- Dengan asumsi SLTBTW, semua pole-pole dan zero-zero riil.

$$H(j\Omega) = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (j\Omega - c_k)}{\prod_{k=1}^N (j\Omega - d_k)}$$

Diagram Bode

- Diagram Bode sistem:
- **Response magnitudo dalam dB:**

$$|H(j\Omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\Omega}{c_k} \right| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\Omega}{d_k} \right|$$

- **Response fasa:**

$$\arg\{H(j\Omega)\} = \arg K + \sum_{k=1}^M \arg \left(1 - \frac{j\Omega}{c_k} \right) - \sum_{k=1}^N \arg \left(1 - \frac{j\Omega}{d_k} \right)$$

- **Faktor gain:**

$$K = \frac{\tilde{b} \prod_{k=1}^M (-c_k)}{\prod_{k=1}^N (-d_k)}$$

Diagram Bode Faktor Pole orde 1 (1)

- Response magnitudo dalam dB:

$$|H(j\Omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K + \sum_{k=1}^M 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\Omega}{c_k} \right| - \sum_{k=1}^N 20 \log_{10} \left| 1 - \frac{j\Omega}{d_k} \right|$$

- Perhatikan faktor pole:

$$\left(1 + \frac{j\Omega}{\Omega_b} \right) = \left(1 + \frac{j\Omega}{1} \right), \Omega_b = 1$$

- Kontribusi faktor pole ini terhadap $|H(j\Omega)|_{dB}$ adalah

$$-20 \log_{10} \left| 1 + \frac{j\Omega}{1} \right| = -10 \log_{10}(1 + \Omega^2)$$

- Untuk $\Omega \ll 1$: $-20 \log_{10} |1 + j\Omega| \approx -20 \log_{10} 1 = 0$ dB.
- Untuk $\Omega \gg 1$: $-20 \log_{10} |1 + j\Omega| \approx -10 \log_{10} |\Omega|^2 = -20 \log_{10} |\Omega|$ dB.

Diagram Bode Faktor Pole orde 1 (2)

- Respons Magnitudo: $H(j\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$
- Untuk $\Omega \ll 1$: $-20 \log_{10}|1 + j\Omega| \approx -20 \log_{10} 1 = 0$ dB.
- Untuk $\Omega \gg 1$: $-20 \log_{10}|1 + j\Omega| \approx -10 \log_{10}|\Omega|^2 = -20 \log_{10}|\Omega|$ dB.

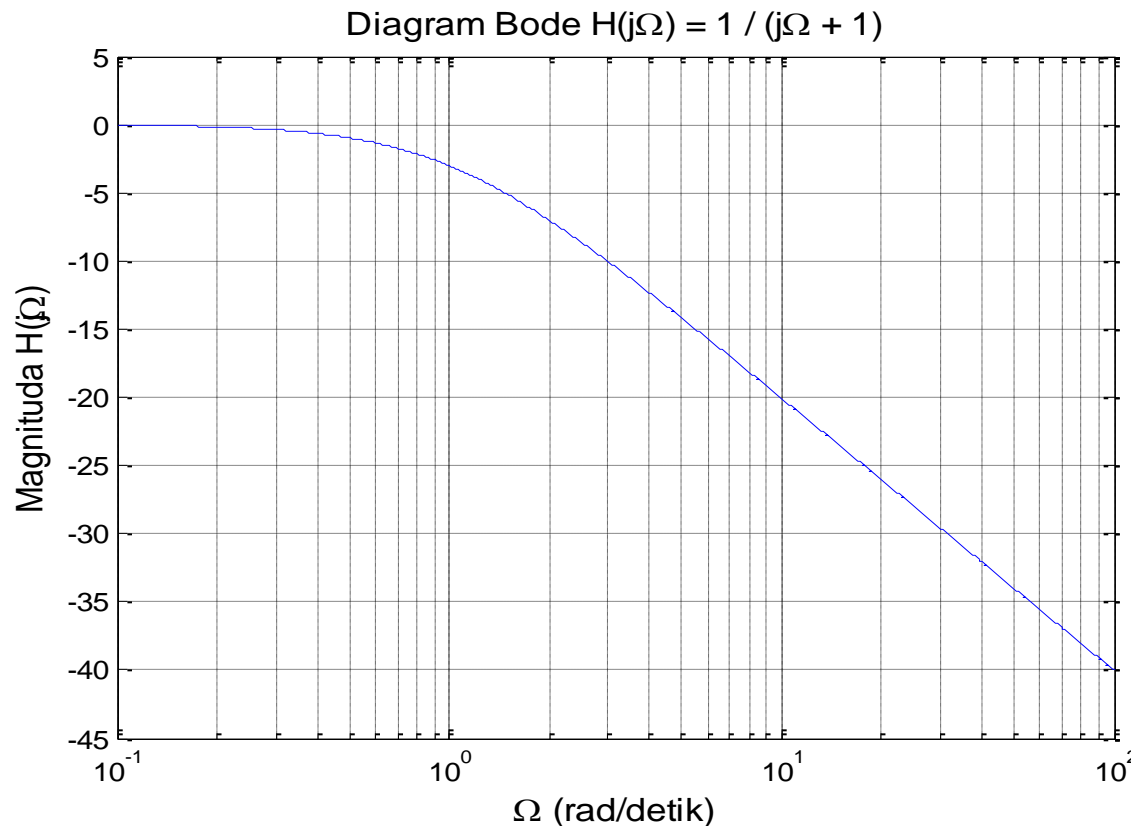


Diagram Bode Faktor Pole orde 1 (3)

- Respons Fasa faktor pole orde 1: $H(j\Omega) = \frac{1}{1+j\Omega}$
 $-\arg\{1 + j\Omega\} = -\arctan(\Omega)$

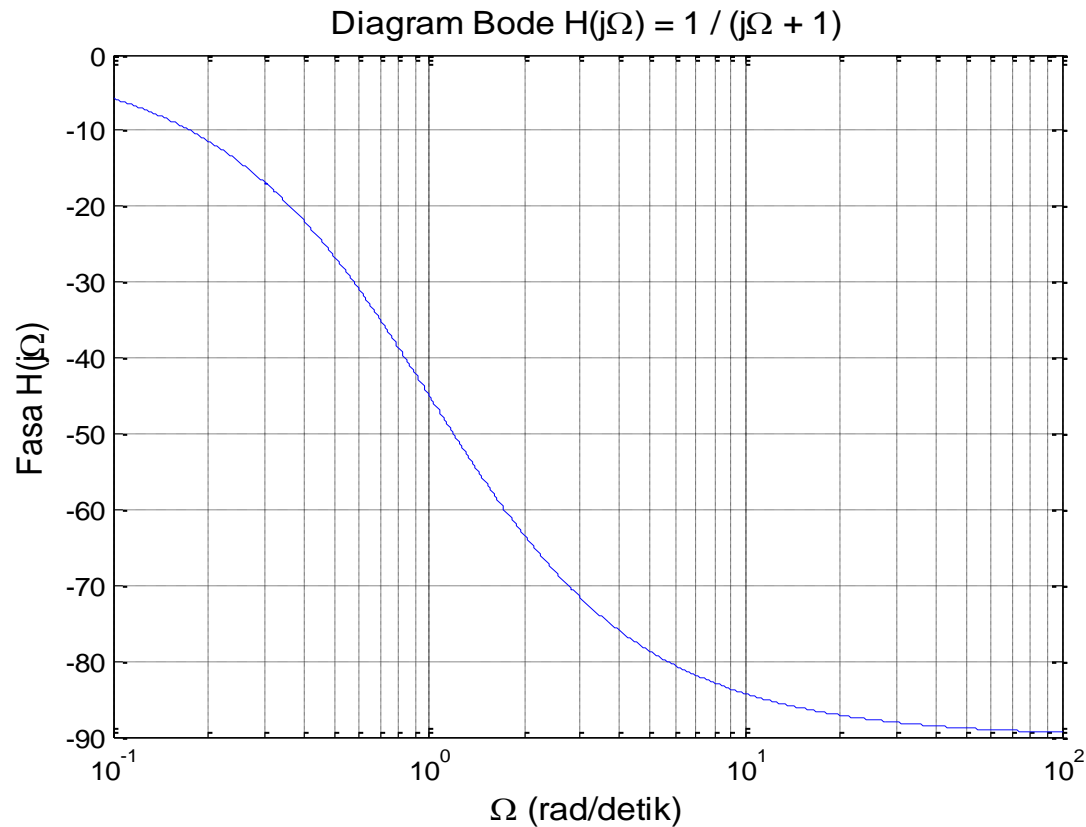


Diagram Bode Faktor Pole orde 2 (1)

- $H(s)$ orde 2:

$$Q(s) = \frac{1}{1 + 2\varepsilon s + s^2}$$

- Pole pole $H(s)$: $s = -\varepsilon \pm j\sqrt{1 - \varepsilon^2}$, diasumsikan $\varepsilon \leq 1$.
- Respons frekuensi:

$$H(j\Omega) = \frac{1}{1 - \Omega^2 + j2\varepsilon\Omega}$$

- Magnitudo:

$$|H(j\Omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\varepsilon^2}$$

- Fasa:

$$\arg\{Q(j\Omega)\} = -\arctan\left(\frac{2\varepsilon\Omega}{1 - \Omega^2}\right)$$

- Untuk $\Omega \ll 1$: $|H(j\Omega)|_{dB} \approx -20 \log_{10} 1 = 0$ dB.
- Untuk $\Omega \gg 1$: $|H(j\Omega)|_{dB} \approx -20 \log_{10} \Omega^2 \approx -40 \log_{10}(\Omega)$ dB

Diagram Bode Faktor Pole orde 2 (2)

- Magnitudo: $|H(j\Omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2}$
- $(\text{Error})_{\Omega=1} = -20 \log_{10}(2\zeta)$ dB.

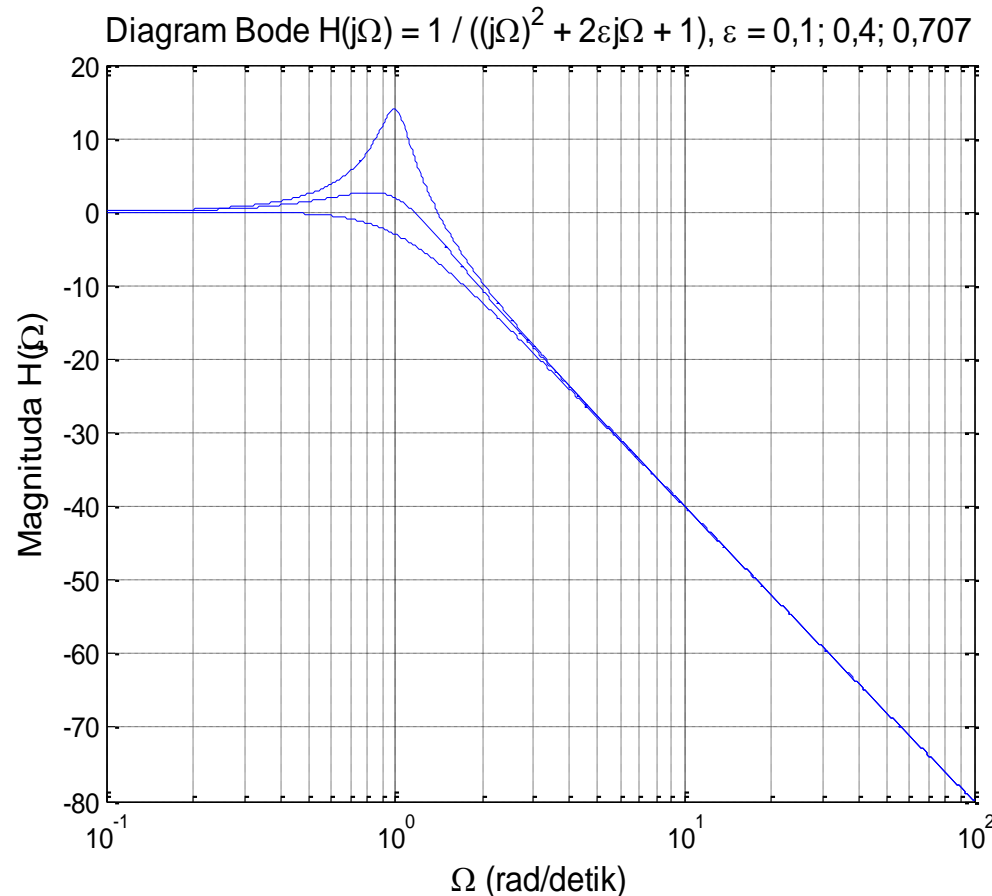


Diagram Bode Faktor Pole orde 2 (3)

- Fasa: $\arg\{Q(j\Omega)\} = -\arctan\left(\frac{2\varepsilon\Omega}{1-\Omega^2}\right)$
- $\arg\{Q(j)\} = -90$ degrees.

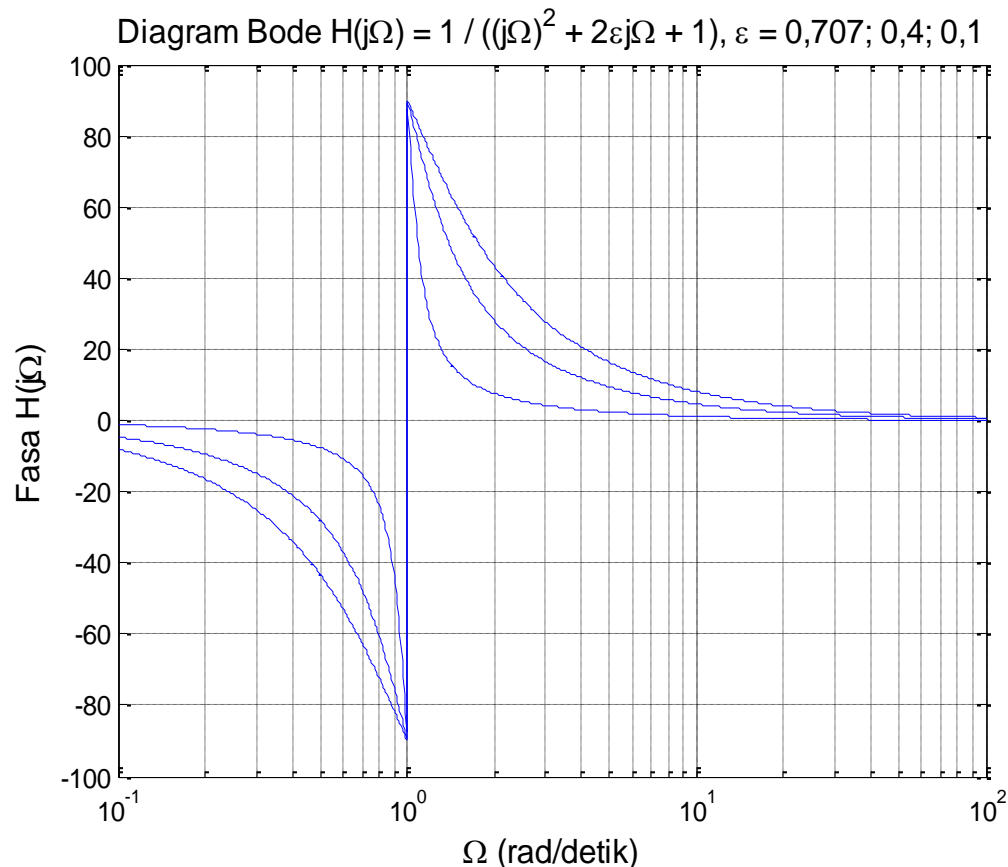


Diagram Bode Pole dan Zero (1)

- Gambar diagram Bode (magnitude dan fasa) untuk SLTBTW:

$$H(s) = \frac{5(s + 10)}{(s + 1)(s + 50)}$$

- Solusi:

$$H(j\Omega) = \frac{5(j\Omega + 10)}{(j\Omega + 1)(j\Omega + 50)} = \frac{50 \left(1 + \frac{j\Omega}{10}\right)}{(1 + j\Omega)50 \left(1 + \frac{j\Omega}{50}\right)}$$

$$H(j\Omega) = \frac{\left(1 + \frac{j\Omega}{10}\right)}{(1 + j\Omega) \left(1 + \frac{j\Omega}{50}\right)}$$

- Dua pole dengan frekuensi: $\Omega = 1$ dan $\Omega = 50$.
- Satu zero dengan frekuensi: $\Omega = 10$.

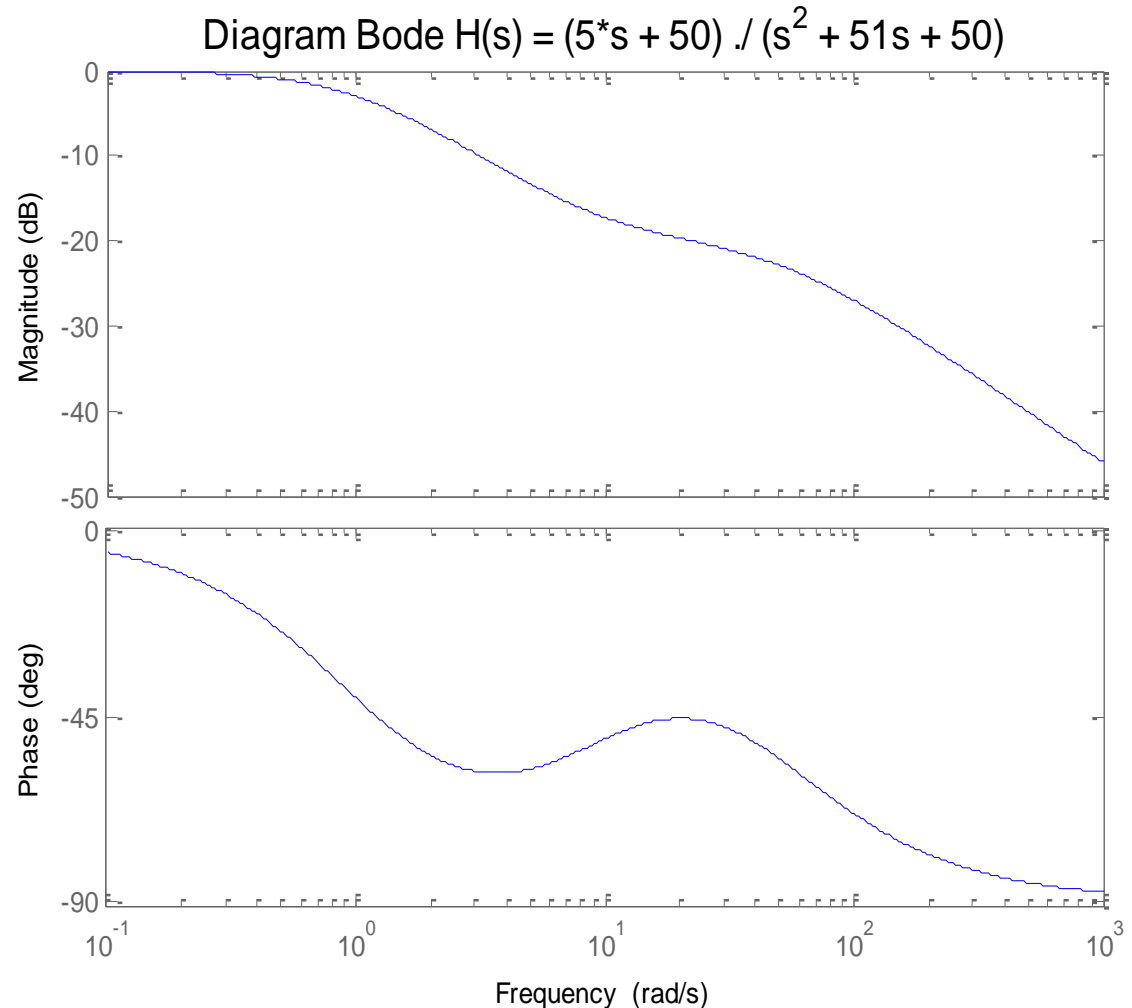
Diagram Bode Pole dan Zero (2)

- **Magnitudo:**

- Pole
- $\Omega = 1$ dan $\Omega = 50$
- Zero
- $\Omega = 10$

- **Fasa:**

- Pole
- $\Omega = 1$ dan $\Omega = 50$
- Zero
- $\Omega = 10$



Tugas Membaca

1. Signals and Systems; Simon Haykin, Barry Van Veen; 2nd edition, John Wiley & Sons, Inc. 2004. Chapter 6.
2. Signals and Systems; Alan V. Oppenheim, Alan S. Willsky, S. Hamid Nawab; 2nd edition, Prentice-Hall, 1997. Chapter 9.

- **Akhir**

Bab 5. Transformasi Laplace