Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

Silabus :

Bab I	Matriks dan Operasinya
Bab II	Determinan Matriks
Bab III	Sistem Persamaan Linear
Bab IV	Vektor di Bidang dan di Ruang
Bab V	Ruang Vektor
Bab VI	Ruang Hasil Kali Dalam
Bab VII	Transformasi Linear
Bab VIII	Ruang Eigen

Ruang Hasilkali Dalam (RHD)

Sub Pokok Bahasan

- Definisi RHD
- Himpunan Ortonormal
- Proses *Gramm Schmidt*

Aplikasi RHD :

bermanfaat dalam beberapa metode optimasi, seperti metode *least square* dalam peminimuman *error* dalam berbagai bidang rekayasa.

Definisi RHD

Misalnya V adalah suatu ruang vektor, dan $\bar{u}, \bar{v} \in V$

maka notasi < , > dinamakan

hasil kali dalam

jika memenuhi keempat aksioma sebagai berikut:

1. $< \bar{u}, \bar{v} > \; = \; < \bar{v}, \bar{u} >$ (Simetris)
2. $< \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} > \; = \; < \bar{u}, \bar{w} > + < \bar{v}, \bar{w} >$ (Aditivitas)
3. untuk suatu $k \in$ R, $< k\bar{u}, \bar{v} > \; = \; < \bar{u}, k\bar{v} > \; = k < \bar{u}, \bar{v} >$

   (Sifat Homogenitas)
4. $< \bar{u}, \bar{u} > \geq 0$, untuk setiap $\bar{u}$

   dan $< \bar{u}, \bar{u} > = 0 \;\Leftrightarrow\; \bar{u} = \bar{0}$

   (Sifat Positifitas)

Jika V merupakan suatu ruang hasil kali dalam, maka norm (panjang) sebuah vektor $\bar{u}$ dinyatakan oleh : $\| \bar{u} \|$

yang didefinisikan oleh : $\| \bar{u} \| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2} \geq 0$

Contoh 1 :

Ruang Hasil Kali Dalam Euclides (R^n)

Misalkan $\bar{u}, \bar{v} \in R^n$ maka $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$

$$\| \bar{u} \| = \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle^{1/2} \geq 0$$

$$= (u_1^2 + u_2^2 + \ldots\ldots + u_n^2)^{½}$$

Contoh 2 :

Misalnya $W \subseteq R^3$ yang dilengkapi dengan operasi hasil kali $<\bar{u}, \bar{v}> = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3$,

dimana $\bar{u}, \bar{v} \in W$

Buktikan bahwa W adalah ruang hasilkali dalam

Jawab :

Misalkan $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in W$

$$\begin{aligned} <\bar{u}, \bar{v}> &= 2u_1v_1 + u_2v_2 + 3u_3v_3 \\ &= 2\,v_1u_1 + v_2u_2 + 3v_3u_3 \\ &= <\bar{v}, \bar{u}> \qquad \text{(terbukti simetris)} \end{aligned}$$

(ii) $< \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} > \; = \; <(u_1+v_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3),\ (w_1,\ w_2,\ w_3)>$

$= 2(u_1+ v_1)w_1 + (u_2+v_2)w_2 + 3(u_3+v_3)w_3$

$= 2u_1w_1+2v_1w_1+u_2w_2 +v_2w_2+3u_3w_3+3v_3w_3$

$= 2u_1w_1+u_2w_2+3u_3w_3+2v_1w_1+v_2w_2+3v_3w_3$

$= < \bar{u}, \bar{w} > + < \bar{v}, \bar{w} >$ (bersifat aditivitas)

(iii) untuk suatu $k \in$ R,

$< k\bar{u}, \bar{v} > \; = \; <(ku_1,\ ku_2,\ ku_3),\ (v_1,\ v_2,\ v_3)>$

$= 2ku_1v_1 + ku_2v_2 + 3ku_3v_3$

$= k2u_1v_1 + ku_2v_2 + k.3u_3v_3$

$= k < \bar{u}, \bar{v} > \; = \; < \bar{u}, k\bar{v} >$ (bersifat homogenitas)

(iv) $< \bar{u}, \bar{u} > = 2u_1^2 + u_2^2 + 3u_3^2$

Jelas bahwa $< \bar{u}, \bar{u} >^{1/2} \geq 0$ untuk setiap $\bar{u}$

dan $< \bar{u}, \bar{u} > = 0$ hanya jika $\bar{u} = \bar{0}$

Contoh 3 :

Tunjukan bahwa $< \bar{u}, \bar{v} > = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 - 3u_1 v_1$

bukan merupakan hasil kali dalam

Jawab :

Perhatikan

$$< \bar{u}, \bar{u} > = 2u_1^2 + u_2^2 - 3u_3^2$$

Pada saat $3u_3^2 > u_1^2 + 2u_2^2$

maka

$$< \bar{u}, \bar{u} > \leq 0 \longleftarrow$$

Tidak memenuhi

Sifat positivitas

Contoh 4 :

Diketahui $<\bar{u},\bar{v}>= ad + cf$

dimana $\bar{u} = (a,b,c)$ dan $\bar{v} = (d,e,f)$

Apakah $<\bar{u},\bar{v}>$ merupakan hasil kali dalam?

Jawab :

Jelas bahwa $<\bar{u},\bar{u}>= (a^2 + c^2) \geq 0$

Misalkan $\bar{u} = (0, 2, 0)$ diperoleh $<\bar{u},\bar{u}>= 0$

Padahal ada $\bar{u} \neq \bar{0}$

Aksioma terakhir tidak terpenuhi.
Jadi

$<\bar{u},\bar{v}> = ad + cf$ **bukan** merupakan hasil kali dalam.

Himpunan Ortonormal

Sebuah himpunan vektor pada ruang hasil kali dalam dinamakan himpunan **ortogonal**

jika semua pasangan vektor yang berbeda dalam himpunan tersebut adalah ortogonal (saling tegak lurus).

Himpunan **ortonormal** ➔ himpunan ortogonal yang setiap vektornya memiliki panjang (normnya) satu.

Secara Operasional

Misalkan, $T = \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, ..., \bar{c}_n\}$ pada suatuRHD

T dikatakan himpunan vektor *ortogonal* jika

$< \bar{c}_i, \bar{c}_j > = 0$ untuk setiap $i \neq j$

Sedangkan, T dikatakan himpunan vektor *ortonormal* **jika** untuk setiap i berlaku $\| \bar{c}_i \| = 1$

Contoh 5 :

1. $$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Pada RHD Euclides, *A* bukan himpunan ortogonal.

2. $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pada RHD Euclides, *B* merupakan himpunan ortonormal.

3. $$C = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Pada RHD Euclides, *C* merupakan himpunan ortonormal.

Misalkan

$$S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$$

adalah basis ortonormal untuk RHD V

Jika $\bar{u}$ adalah sembarang vektor pada V, maka

$$\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n$$

Perhatikan bahwa, untuk suatu i berlaku :

$$< \bar{u}, \bar{v}_i > = < k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + \ldots + k_n\bar{v}_n, \bar{v}_i >$$

$$= k_1 < \bar{v}_1, \bar{v}_i > + k_2 < \bar{v}_2, \bar{v}_i > + \ldots + k_i < \bar{v}_i, \bar{v}_i > + \ldots + k_n < \bar{v}_n, \bar{v}_i >$$

Karena S merupakan himpunan ortonormal dan

$< \bar{v}_i, \bar{v}_j > = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $< \bar{v}_i, \bar{v}_i > = 1$ untuk setiap i

Sehingga, untuk setiap i berlaku

$$< \bar{u}, \bar{v}_i >= k_i$$

Kombinasi linear $\bar{u} = k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + ... + k_n\bar{v}_n$

Ditulis menjadi

$$\bar{u} =< \bar{u}, \bar{v}_1 > \bar{v}_1 + < \bar{u}, \bar{v}_2 > \bar{v}_2 + ... + < \bar{u}, \bar{v}_n > \bar{v}_n$$

Contoh 6 :

Tentukan kombinasi linear dari $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

pada RHD Euclides berupa bidang yang dibangun

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ dan } \bar{v} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Jawab :

$$\bar{a} = k_1\bar{u} + k_2\bar{v}$$

$$\bar{a} = < \bar{a}, \bar{u} > \bar{u} + < \bar{a}, \bar{v} > \bar{v}$$

Perhatikan …..
u dan v mrp
Basis ortonormal

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \bar{u} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \bar{v}$$

$$\bar{a} = 1/\sqrt{2}\ \bar{u} + \left(-1/\sqrt{2}\right)\bar{v}$$

Proses *Gramm-Schmidt*

$$S = \{ \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ \dots \ \bar{c}_n \}$$

basis bagi suatu RHD V

$$\Big\downarrow$$

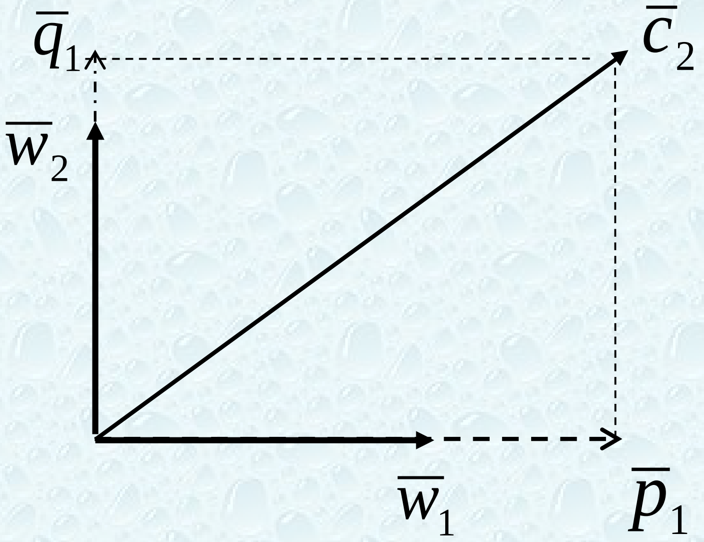
$$B = \{\bar{w}_1, \ \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n\}$$

basis ortonormal bagi V

Langkah yang dilakukan

1. $\bar{w}_1 = \dfrac{\bar{c}_1}{\left\| \bar{c}_1 \right\|}$

2. Langkah kedua $\bar{c}_2 \longrightarrow \bar{w}_2$



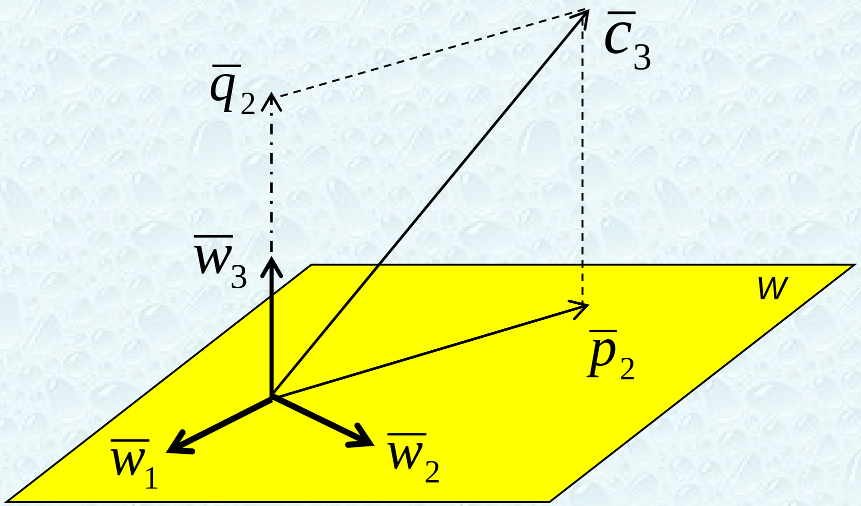
$$\bar{p}_1 = proy_{\bar{w}_1} \bar{c}_2 = \frac{< \bar{c}_2 , \bar{w}_1 > \bar{w}_1}{\left\| \bar{w}_1 \right\|} =< \bar{c}_2 , \bar{w}_1 > \bar{w}_1$$

$$\bar{q}_1 = \bar{c}_2 - \bar{p}_1$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\bar{c}_2 - < \bar{c}_2 , \bar{w}_1 > \bar{w}_1}{\left\| \bar{c}_2 , < \bar{c}_2 , \bar{w}_1 > \bar{w}_2 \right\|} \Longrightarrow$$

Vektor satuan searah $\bar{q}_1$

3. Langkah ketiga $\bar{c}_3 \longrightarrow \bar{w}_3$



$$\bar{p}_2 = proy_W \bar{c}_3 = < \bar{c}_3, \bar{w}_1 > \bar{w}_1 + < \bar{c}_3, \bar{w}_2 > \bar{w}_2 \qquad \bar{q}_2 = \bar{c}_3 - \bar{p}_2$$

$$\bar{w}_3 = \frac{\bar{c}_3 - < \bar{c}_3, \bar{w}_1 > \bar{w}_1 + < \bar{c}_3, \bar{w}_2 > \bar{w}_2}{\left\| \bar{c}_3 - < \bar{c}_3, \bar{w}_1 > \bar{w}_1 + < \bar{c}_3, \bar{w}_2 > \bar{w}_2 \right\|} \Longrightarrow$$

Vektor satuan Yang tegak lurus Bidang W

Contoh 7 :

Diketahui :

$$B = \left\{ \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

B merupakan basis pada RHD Euclides di R^3.

Transformasikan basis tersebut menjadi basis Ortonormal

Jawab :

Langkah 1.

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Langkah 2

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2}{\left\|\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2\right\|}$$

Sementara itu, $\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2 = \bar{u}_2 - \langle \bar{u}_2 , \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Karena itu,

$$\left\|\bar{u}_2 - proy_{\bar{v}_1}\bar{u}_2\right\| = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{9}} = \tfrac{\sqrt{6}}{3}$$

sehingga :

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Langkah 3

$$\bar{v}_3 = \frac{\bar{u}_3 - proy_W \bar{u}_3}{\left\| \bar{u}_3 - proy_W \bar{u}_3 \right\|}$$

Sementara itu,

$$\bar{u}_3 - proy_W \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle \bar{v}_1 - \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle \bar{v}_2$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

sehingga :

$$\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Jadi,

$$\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

merupakan **basis ortonormal** untuk ruang vektor R^3 dengan hasil kali dalam Euclides

Contoh 8 :

Diketahui bidang yang dibangun oleh $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

merupakan subruang
dari RHD Euclides di R^3

Tentukan proyeksi orthogonal dari vektor

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pada bidang tersebut.

Jawab :

Diketahui

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

merupakan basis bagi subruang pada RHD tsb.

Karena $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

Selain membangun subruang pada RHD

himpunan tsb juga saling bebas linear

(terlihat bahwa ia tidak saling berkelipatan).

Langkah awal :

Basis tersebut ➔ basis ortonormal.

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$$

$$= \frac{(1\ ,0\ ,1)}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{(1\ ,0\ ,1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,0\ ,\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Perhatikan bahwa : $\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle = <(0\ ,1\ ,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,0\ ,\frac{1}{\sqrt{2}} \right)>$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga:

$$\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 = (0, 1, 1) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

Akibatnya :

$$\left\| \bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 \right\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{6}{4}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

Akhirnya, diperoleh

$$\overline{w}_2 = \frac{\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \overline{w}_1 \rangle \overline{w}_1}{\left\| \bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \overline{w}_1 \rangle \overline{w}_1 \right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2}\sqrt{6}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right) =$$

Jadi Basis Orthonormal bagi bidang tsb

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

Proyeksi Orthogonal Vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

pada bidang tersebut adalah

$$\mathrm{Pr}\,oy_{\,W}\,\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 + \langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2$$

Perhatikan bahwa :

$$\langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle = <(1, 1, 1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)>$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2}$$

Sementara itu :

$$< \overline{u}, \overline{w}_2 > = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Dengan demikian,

$$\text{Proy}_W\,\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 + \langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Contoh 9 :

Diketahui bidang yang dibangun oleh $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

merupakan subruang dari RHD Euclides

Tentukan proyeksi orthogonal dari vektor $\bar{u}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

pada bidang tersebut.

Jawab

Jelas bahwa $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

merupakan basis bagi bidang tersebut, karena

$\bar{v}_1$ dan $\bar{v}_2$ saling bebas linear

Basis tersebut akan ditransformasikan menjadi basis ortonormal.

$$\bar{w}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$$

$$= \frac{(1\ ,0\ ,1)}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (1)^2}}$$

$$= \frac{(1\ ,0\ ,1)}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ ,0\ ,\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Perhatikan bahwa :

$$\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle = <(0\,,1\,,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sehingga:

$$\langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{2}\right)$$

akibatnya

$$\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 = (0\,,1\,,1) - \left(\frac{1}{2}\,,0\,,\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\,,1\,,\frac{1}{2}\right)$$

Proyeksi Orthogonal Vektor $\bar{u}$ pada bidang W adalah:

$$Proy_W\,\bar{u} = \langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 + \langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}_2 = \frac{\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1}{\left\| \bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_1 \right\|}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right)}{\frac{1}{2}\sqrt{6}}$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Jadi Basis Orthonormal bagi bidang tersebut adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

Latihan Bab VI

1. Periksa apakah operasi berikut merupakan hasil kali dalam atau bukan

   a. $< \bar{u}, \bar{v} > \; = \; u_1{}^2 v_1 + u_2 v_2{}^2$ di R^2

   b. $< \bar{u}, \bar{v} > \; = \; u_1 v_1 + 2u_2 v_2 - u_3 v_3$ di R^3

   c. $< \bar{u}, \bar{v} > \; = \; u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1$ di R^3

2. Tentukan nilai k sehingga vektor $(k, k, 1)$ dan vektor $(k, 5, 6)$ adalah orthogonal dalam ruang Euclides !

3. W merupakan subruang RHD euclides di $\Re^3$ yang dibangun oleh vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dan } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tentukan proyeksi orthogonal vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pada W