BAB II
PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDO DUA

2.1 Pendahuluan

Pada bab I telah dibahas persamaan diferensial ordo satu yang selesaiannya dapat dinyatakan secara eksplisit dalam fungsi sederhana. Pada kesempatan ini, hal tersebut akan dicoba pula untuk persamaan diferensial linear ordo dua. Bahasan utama pada bab ini adalah suatu kelas terpenting persamaan diferensial yang selesaiannya dapat dinyatakan dalam fungsi sederhana, yakni kelas persamaan diferensial linear koefisien konstan.

Sebelum membahas persamaan diferensial yang tak homogen diperlukan pembahasan persamaan yang homogen. Selesaian khusus persamaan tak homogen dicari dengan dua cara yaitu dengan metode koefisien tak tentu dan metode variasi parameter.

Penerapan yang akan dibahas adalah getaran mekanis dan rangkaian listrik.

2.2 Persamaan Diferensial Linear Homogen Ordo Dua Koefisien Konstan

Bentuk umum persamaan diferensial linear ordo dua dengan koefisien konstan adalah

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{1}$$

p, q, konstanta.

Dengan fungsi f kontinu pada daerah definisinya jika fungsi $f(x)$ identik dengan nol, kita sebut pers. (1) homogen. Jika $f(x)$ tidak identik dengan nol, pers (1) disebut tak homogen.

Jadi, bentuk umum persamaan diferensial linear homogen ordo dua dengan koefisien konstan adalah

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

Pers. (2) dapat ditulis dalam bentuk

$$(D^2 + pD + q)y = 0 \tag{3}$$

dengan

$$D = \frac{d}{dx} \quad dan \ D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$$

D disebut operator diferensial.

Ruas kiri pers. (3) merupakan bentuk kuadrat dalam *D*, yang dalam sistem bilangan kompleks selalu dapat diuraikan atas dua faktor linear, yaitu

$$(D^2 + pD + q) = (D - r_1)(D - r_2)$$

Sehingga pers. (3) dapat ditulis dalam bentuk

$$(D - r_1)(D - r_2)y = 0 \tag{4}$$

dengan r_1 dan r_2 adalah akar dari persamaan kuadrat

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{5}$$

Persamaan (5) disebut persamaan karakteristik dan r_1, r_2 disebut akar-akar karakteristik.

Pandangan pers. (4) kemudian misalkan

$$v = (D - r_2)y \tag{6}$$

maka pers. (4) dapat ditulis sebagai

$$(D - r_1)v = 0$$

atau

$$\frac{dv}{dx} - r_1 v = 0 \tag{7}$$

Pers. (7) adalah persamaan diferensial ordo satu yang dapat diselesaikan dengan metode peubah terpisah. Selesaian umum pers. (7) adalah

$$v = ce^{r_1 x} \tag{8}$$

substitusikan pers. (8) ke dalam persamaan (6), maka akan diperoleh

$$(D - r_2)y = ce^{r_1 x} \tag{9}$$

Pers. (9) adalah persamaan diferensial linear ordo satu dengan faktor pengintegralan

$$\mu(x) = \int e^{-r_2 dx} = e^{-r_2 x}$$

Sehingga selesaian umum pers. (9) adalah

$$y = e^{r_2 x}\left[\int e^{-r_2 x}.ce^{r_1 x}dx + c_2\right]$$

atau

$$y = e^{r_2 x}\left[c\int e^{(r_1 - r_2)x}dx + c_2\right] \qquad (10)$$

Pers. (10) kita bedakan menjadi tiga kasus

Kasus 1 :

r_1 dan r_2 bilangan real yang berbeda.

Pada kasus ini pers. (10) dapat ditulis dalam bentuk

$$y = e^{r_2 x}\left[\frac{c}{r_1 - r_2}.e^{r_1 x}.e^{-r_2 x} + c_2\right]$$

atau

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \qquad (11)$$

dengan $c_1 = \dfrac{c}{r_1 - r_2}$

Pers. (11) adalah selesaian umum pers. (2)

Contoh 1

Tentukan selesaian umum persamaan diferensial

$$y'' - 3y' - 10y = 0$$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$$r^2 - 3r - 10 = 0$$

atau

$$(r-5)(r+2) = 0$$

Sehingga akar karakteristiknya adalah r_1 = -2 dan r_2 = 5

Menurut pers. (11), selesaian umumnya adalah

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}$$

Contoh 2

Tentukan selesaian khusus masalah nilai awal berikut :

$y'' - 3y' = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$r^2 - 3r = 0$

atau

$r(r-3) = 0$

sehingga akar karakteristiknya adalah $r_1 = 0$ dan $r_2 = 5$

Jadi selesaian umumnya adalah

$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x}$

atau

$y = c_1 + c_2 e^{3x}$

$y' = 3c_2 e^{3x}$

Dari syarat awal diperoleh

$c_1 + c_2 = 1$

$3c_2 = 2$

$c_2 = \frac{2}{3},\ dan\ c_1 = \frac{1}{3}$

Sehingga selesaian khususnya adalah

$y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{3x}$

Kasus 2

r_1 dan r_2 bilangan real yang sama $r_1 = r_2 = r$

Pada kasus ini pers. (10) dapat ditulis sebagai

$y = e^{rx}\left\lfloor c\int dx + c_2 \right\rfloor$

$$y = (c_1 + c_2)e^{rx} \tag{12}$$

Jadi, selesaian umumpers. (2) adalah $y = (c_1 + c_2)e^{rx}$

Contoh 3

Tentukan selesian umum persamaan diferensial berikut :

$y'' - 8y' + 16y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$r^2 - 8r + 16 = 0$

$(r-4)^2 = 0$

Sehingga akar karakteristiknya adalah $r_1 = r_2 = r = 4$

Menurut Pers. (12), selesaian umumnya adalah

$y = (c_1 x + c_2)e^{4x}$

Contoh 4

Tentukan selesaian khusus persamaan diferensial berikut :

$y'' + 2y' + y = 0, \ y(0) = 2, \ y'(0) = 3$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$r^2 + 2r + 1 = 0$

atau

$(r+1)^2 = 0$

Sehingga akar karakteristiknya adalah $r_1 = r_2 = r = -1$

Menurut pers. (12), selesaian umumnya adalah

$y = (c_1 x + c_2)e^{-x}$

Karena $y(0) = 2$, maka $2 = (c_1 0 + c_2)e^0$, $c_2 = 2$

$y' = c_1 e^{-x} - (c_1 x + c_2)e^{-x}$

Karena $y'(0) = 3$, maka $3 = c_1 e^0 - (c_1 0 + c_2)e^0$

peroleh $c_1 - c_2 = 3$, $c_1 = 5$

Jadi, selesaian khususnya adalah $y = (5x+2)e^{4-x}$

Kasus 3

r_1 dan r_2 bilangan kompleks

Pada kasus ini, misalkan

$$r_1 = a + bi \quad dan \quad r_2 = a - bi$$

Karena r_1 dan r_2 dua bilangan kompleks yang berbeda, maka menurut pers. (2) selesian umumnya adalah

$$y = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \qquad (13)$$

Dengan k_1, k_2, r_1 dan r_2 semuanya bilangan kompleks. Pers. (13) kita tulis dalam komponen bilangan kompleks, diperoleh

$$y = k_1 e^{(a+b)x} + k_2 e^{(a-bi)x}$$

$$y = e^{ax}\left[k_1 e^{bix} + k_2 e^{-bix}\right]$$

Kita gunakan rumus Euler untuk bilangan kompleks

$$e^{bix} = \cos bx + i \sin bx$$

$$e^{-bix} = \cos bx - i \sin bx$$

Sehingga selesaian umum pers. (2) adalah

$$y = e^{ax}\left[k_1(\cos bx + i \sin bx) + k_2(\cos bx - i \sin bx)\right]$$

$$y = e^{ax}\left[(k_1 + k_2)\cos bx + (k_1 - k_2)i \sin bx\right]$$

$$y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] \qquad (14)$$

dengan $c_1 = k_1 + k_2$ dan $c_2 = (k_1 + k_2)i$

Kita nyatakan k_1 dan k_2 dalam c_1 dan c_2, kita peroleh

$$k_1 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 i)$$

$$k_1 = \frac{1}{2}(c_1 + c_2 i)$$

Karena k_1 dan k_2 adalah dua bilangan kompleks sekawan, maka

$$k_1 + k_2 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 i) + \frac{1}{2}(c_1 + c_2 i) = c_1$$

$$k_1 - k_2 = \frac{1}{2}(c_1 - c_2 i) - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 i) = c_2 i$$

Sehingga $(k_1 - k_2)i = -c_2(i.i) = c_2$

Jadi c_1 dan c_2 adalah bilangan real.

Contoh 5

Tentukan selesaian umum persamaan diferensial

$y'' - 6y' + 13y = 0$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$r^2 - 6r + 13 = 0$

Dengan akar-akar karakteristiknya adalah $r_1 = 3 + 2i \; dan \; r_2 = 3 - 2i$

(Periksa)

Menurut pers. (14), selesaian umumnya adalah

$y = e^{3x}\left[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x\right]$

Contoh 6

Tentukan selesaian khusus persamaan diferensial berikut :

$$y'' + 16y = 0, \quad y\left(\frac{1}{16}\pi\right) = 2\sqrt{2}, \quad y'\left(\frac{1}{16}\right) = 10\sqrt{2}$$

Jawab :

Persamaan karakteristiknya adalah

$r^2 + 16 = 0$

Dengan akar-akar karakteristiknya adalah $r_1 = 4i \;\; dan \; r_2 = -4i$

Menurut pers. (14), selesaian umumnya adalah

$y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$

dan dengan demikian, kita peroleh

$y' = -4c_1 \cos 4x + 4c_2 \sin 4x$

Dengan menggunakan syarat awal

$$y\left(\frac{1}{16}\pi\right) = 2\sqrt{2}, \; maka \; 2\sqrt{2} = c_1 \cos\frac{1}{4}\pi + c_2 \sin\frac{1}{4}\pi$$

$c_1 + c_2 = 4$

dan

$y\left(\frac{1}{16}\pi\right) = 10\sqrt{2},\ maka\ 10\sqrt{2} = -4c_1 \sin\frac{1}{4}\pi + 4c_2 \cos\frac{1}{4}\pi$

$-c_1 + c_2 = 5$

Sehingga kita peroleh $c_1 = -\frac{1}{2}\ dan\ c_2 = \frac{9}{2}$

Jadi selesian khususnya adalah

$y = -\frac{1}{2}\cos 4x + \frac{9}{2}\sin 4x$

2.3 Persamaan Diferensial Linear Tak Homogen Ordo Dua Koefisien Konstan

Pandang persamaan diferensial linear tak homogen ordo dua (selanjutnya disebut pers. Tak homogen ordo dua).

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{15}$$

dengan *p* dan *q* konstanta bilangan real dan fungsi *f*(*x*) kontinu pada daerah definisinya. Telah kita ketahui bahwa selesaian umum persamaan diferensial homogen adalah

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{16}$$

berbentuk

$$y_h = c_1u_1(x) + c_2u_2(x) \tag{17}$$

dengan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ berbentuk seperti berikut :

1) x^k, k bilangan cacah
2) $e^{ax}, x^x e^{ax}, a \in \Re, k$ bilangan cacah
3) $e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx, a, b \in \Re$
4) $x^k e^{ax}\sin bx, x^x e^{ax}\sin bx$
5) Kombinasi linear fungsi-fungsi berbentuk seperti 1), 2), 3), dan 4).

Selesaian umum persamaan diferensial (15) adalah jumlah dari selesaian homogennya. Selesaian tak homogennya tidak memuat parameter, sehingga disebut *selesaian khusus* (y_k).

Bila y dan y_k dua fungsi yang merupakan selesaian pers. (15), maka y dan y_k memenuhi :

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

$$y_k'' + py_k' + qy_k = f(x)$$

Selisih kedua persamaan ini adalah

$$(y - y_k)y'' + p(y - y_k)y' + q(y - y_k) = 0 \qquad (18)$$

Dari pers. (18) menunjukkan bahwa y - y_k adalah selesaian pers. (16), sehingga

$$y - y_k = y_h$$

Atau

$$y = y_h + y_k$$

dengan y_k selesaian pers. (16) dan y_k selesaian khusus pers. (15)

Masalahnya sekarang bagaimana cara menentukan selesaian khusus pers. (15). Untuk maksud tersebut kita mempunyai dua cara, yaitu metode koefisien tak tentu dan metode variasi parameter.

2.3.1 Metode Koefisien Tak Tentu

Metode koefisien tak tentu didasari pemikiran bahwa selesain khusus persamaan diferensial (15) pasti memuat bentuk yang sama dengan $f(x)$ tetapi koefisiennya tak tentu. Metode koefisien tak tentu hanya dapat digunakan apabila fungsi $f(x)$ pada pers. (15) mempunyai bentuk yang serupa dengan selesaian pers. (16). Kita harus dapat menentukan selesaian khusus yang memuat beberapa koefisien yang akan ditentukan, kemudian mencari koefisien tersebut. Bentuk selesaian khusus ini harus diatur agar y_k tidak memuat bentuk yang sama dengan y_h, yang mengakibatkan ruas kiri pers. (15) bernilai nol. Setelah selesaian khusus dipilih bentuknya, carilah turunan pertama dan turunan kedua dari y_k , kemudian substitusikan ke pers. (15) dan menyamakan bentuknya, diperoleh koefisien selesaian khususnya.

Beberapa pedoman untuk pemilihan selesaian khusus y_k

Bentuk $f(x)$ dari persamaan diferensial $y'' + py' + q(y) = f(x)$	Selesaian khusus yang dicoba
$f(x) = e^{bx}$	$y_k = Ae^{bx}$
$f(x) = x^2$	$y_k = Ax^2 + Bx + C$
$f(x) = \begin{cases} \cos ax \\ \sin ax \end{cases}$	$y_k = A\cos ax + B\sin ax$
$f(x) = e^{ax} + x^2$	$y_k = Ae^{ax} + Bx^2 + Cx + D$
$f(x) = e^{ax} + \sin bx$	$y_k = Ae^{ax} + B\cos bx + C\sin bx$
$f(x) = x^2 + \sin ax$	$y_k = Ax^2 + Bx + C + D\cos ax + E\sin ax$
$f(x) = x^2 e^{ax}$	$y_k = Ax^2 e^{ax} + Bxe^{ax} + ce^{ax}$
$f(x) = e^{ax}\sin bx$	$y_k = Ae^{ax}\cos bx + Be^{ax}\sin bx$
$f(x) = x^2 \sin ax$	$y_k = Ax^2\cos ax + Bx^2\sin ax + Cx\cos ax$ $+ Dx\sin ax + E\cos ax + F\sin ax$

Catatan :

a. Jika selesaian khusus yang bentuknya sama dengan selesaian homogennya, maka y_k dikalikan dengan x sampai y_k tidak memuat selesaian homogennya lagi.

Contoh 7

Selesaian homogen $y'' - 5y' + 6y = 4e^{2x}$

Adalah $y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

Kita harus memilih $y_k = Axe^{2x}$

Karena selesaian homogen memuat e^{2x}

Contoh 8

Selesaian homogen $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$

Adalah $y_h = c_1 xe^{2x} + c_2 e^{3x}$

Kita harus memilih $y_k = Axe^{3x}$

Karena selesaian homogen memuat xe^{3x}

b. Jika salah satu akar karakteristik nol dan $f(x)$ berbentuk suku banyak, maka y_k dikalikan dengan x.

Selesaian homogen $y'' - 5y' = 6x^2$

Adalah $y_h = c_1 + c_2 e^{5x}$

Kita harus memilih $y_k = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$

Karena y_k yang biasa digantikan ke persamaan diferensialnya menghasilkan ruas kiri berbentuk linear sedangkan ruas kanannya berbentuk kuadrat.

Contoh 10

Tentukan selesaian umum persamaan diferensial

$$y'' - 2y' - 3y = 4e^{2x} \qquad (20)$$

Jawab :

Persamaan karakteristik persamaan diferensial homogen dari pers. (20) adalah

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

atau

$$(r-3)(r+1) = 0$$

sehingga akar karakteristiknya $r_1 = -1$ dan $r_2 = 3$, jadi

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

kita akan mencari y_k dengan metode koefisien tak tentu, kita coba

$$y_k = Ae^{2x}$$

dengan A konstanta yang akan dicari. Turunan pertama dan kedua dari y_k adalah

$$y_k = 2Ae^{2x} \text{ dan } y = 4Ae^{2x}$$

gantikan $y_k, y_k'\ dan\ y_k''$ ke pers. (20), maka diperoleh

$$y'' - 2yk' - 3yk = 4e^{2x}$$
$$4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = 4e^{2x}$$
$$-3Ae^{2x} = 4e^{2x}$$
$$A = -\frac{4}{3}$$

jadi

$$y_k = -\frac{4}{3}e^{2x}$$

Dengan demikian selesaian umum pers. (20) adalah

$$y = y_h + y_k = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - \frac{4}{3}e^{2x}$$

Contoh 11

Selesaikan masalah nilai awal berikut

$$y'' + 4y = 4\cos 2x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = -4 \qquad (21)$$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari persamaan homogen pers. (21) adalah

$$r^2 + 4 = 0$$

atau

$$(r + 2i)(r - 2i) = 0$$

sehingga akar karakteristiknya adalah $r_1 = -2i$ dan $r_2 = 2i$, jadi

$$y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

kita akan mencari y_k dari pers. (21) dengan metode koefisien tak tentu, kita coba

$$y_k = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x$$

Dengan A dan B konstanta yang akan dicari turunan pertama dan kedua dari y_k adalah

$$y' = A\sin 2x - 2Ax\cos 2x + B\sin 2x + 2Bx\cos 2x$$

dan

$$
\begin{aligned}
y'' &= -2A\sin 2x - 2A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 2B\cos 2x \\
&\quad + 2B\cos 2x - 4Bx\sin 2x \\
&= -4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin x
\end{aligned}
$$

gantikan y_k dan y_k'' ke pers. (21) diperoleh

$$-4A\sin 2x - 4Ax\cos 2x + 4B\cos 2x - 4Bx\sin 2x = 4\cos 2x$$

atau

$$
\begin{aligned}
&-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\cos 2x \\
&-4A = 0 \quad dan \quad 4B = 4 \\
&A = 0 \qquad\qquad B = 1
\end{aligned}
$$

jadi

$$y_k = x\sin 2x$$

Selesaian umum pers. (21) adalah

$$y = y_h + y_k = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + x\sin 2x$$

Turunan pertama dari y adalah

$$y' = -2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x + \sin 2x + 2x\cos 2x$$

Karena $y(0) = 1$ dan $y'(0) = -2,$ maka diperoleh $c_1 = 1$ dan $c_2 = -2$

Dengan demikian selesaian masalah nilai awal pers. (21) adalah

$$y = \cos 2x - 2\sin 2x + x\sin 2x$$

2.3.2 Metode Variasi Parameter

Metode koefisien tak tentu cukup mudah pelaksanaannya, tetapi banyak kelemahannya karena hanya dapat dikerjakan untuk fungsi ketakhomogenannya yang tertentu saja, yakni fungsi yang merupakan selesaian dari persamaan homogennya. Jika fungsi ketakhomogenannya tidak demikian, kita gunakan metode lainnya, yaitu metode variasi parameter.

Pandang kembali persamaan (15) dan persamaan (16). Selesaian pers. (16) berbentuk

$$y_h = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \tag{22}$$

dengan c_1 dan c_2 parameter.

$g_1(x)$ dan $g_2(x)$ berbentuk e^{ax}, x^n, $\sin bx$ atau kombinasinya.

Dalam metode variasi parameter kita mengandalkan bahwa y_k dari pers. (15) mempunyai bentuk yang sama dengan y_h pers. (16), tetapi parameternya bervariasi, berubah menjadi fungsi. Dalam hal ini kita ganti c_1 dan c_2 dalam persamaan (22) oleh fungsi $v_1(x)$ dan $v_2(x)$, sehingga kita mempunyai bentuk selesaian khusus.

$$y_k = v_1(x)g_1(x) + v_2(x)g_2(x)$$

atau disingkat

$$y_k = v_1 g_1 + v_2 g_2 \tag{23}$$

Dengan v_1 dan v_2 adalah fungsi yang akan ditentukan.

Turunan pertama dari pers. (23) adalah

$$\begin{aligned} y_k' &= v_1 g_1' + v_1' g_1 + v_2 g_2' + v_2' g_2 \\ &= \left(v_1 g_1' + v_2 g_2'\right) + \left(v_1' g_1 + v_2' g_2\right) \end{aligned} \tag{24}$$

Untuk menentukan v_1 dan v_2 harus ditetapkan bahwa y_k memenuhi pers. (15) dan y_k' hanya memuat bentuk v_1 dan v_2 saja, akibatnya kita peroleh :

$$v_1' g_1 + v_2' g_2 = 0 \tag{25}$$

dan

$$y_k' = v_1 g_1' + v_2 g_2' \tag{26}$$

Turunan kedua dari pers. (26) adalah

$$y_k' = v_1 g_1'' + v_1' g_1' + v_2 g_2'' + v_2' g_2' \tag{27}$$

gantikan pers. (23), pers. (24), dan pers. (27) ke pers. (15) diperoleh

$$v_1 g_1'' + v_1' g_1' + v_2 g_2'' + v_2' g_2' + v_1 g_1' + v_2 g_2' + v_1 g_1 + v_2 g_2 = f(x)$$

$$v_1\left(g_1'' + g_1' + g_1\right) + v_2\left(g_2'' + g_2' + g_2\right) + v_1' g_1' + v_2' g_2' = f(x) \tag{28}$$

Karena g_1 dan g_2 selesaian pers. (16), maka

$$g_1'' + g_1' + g_1 = 0 \;\; dan \;\; g_2'' + g_2' + g_2 = 0$$

sehingga dari pers. (28) kita peroleh

$$v_1' g_1' + v_2' g_2' = f(x) \tag{29}$$

Dari pers. (25) dan per. (29) diperoleh sistem persamaan linear dalam peubah v_1' dan v_2' berikut

$$\left.\begin{aligned} g_1 v_1' + g_2 v_2' &= 0 \\ g_1' v_1' + g_2' v_2' &= f \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Kita selesaikan sistem (30) dengan aturan *Cremer*, untuk itu tulislah

$$W(g_1, g_2) = \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ g_1' & g_2' \end{vmatrix} = g_1 g_2' - g_2 g_1' \tag{31}$$

Pers. (31) disebut *determinan Wronski* dari fungsi $g_1(x)$ dan $g_2(x)$, terlihat disini bahwa $W(g_1, g_2) \neq 0$ dan $W(g_1, g_2)$ merupakan fungsi darei x, untuk selanjutnya $W(g_1, g_2)$ cukup ditulis $W(x)$ saja.

Selesaian sistem (30) adalah

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & g_2 \\ f & g_2' \end{vmatrix}}{W} = \frac{-g_2 f}{W} \tag{32}$$

dan

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} g_1 & 0 \\ g_1' & f \end{vmatrix}}{W} = \frac{g_1 f}{W} \tag{33}$$

Dari per. (32) dan pers. (33) diperoleh

$$v_1(x) = -\int \frac{g_2(x) f(x)}{W(x)} dx \text{ dan } v_2(x) = -\int \frac{g_1(x) f(x)}{W(x)} dx \tag{34}$$

Contoh 12

Tentukan selesaian umum persamaan diferensial

$$y'' - y' - 2y = 2e^{3x} \tag{35}$$

Jawab :

Selesiaan homogen pers. (35) adalah

$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ (diperiksa)

Misalkan selesaian khusus pers. (35) adalah

$y_k = v_1(x) g_1(x) + v_2(x) g_2(x)$

dengan $g_1(x) = e^{-x}$ dan $g_2(x) = e^{2x}$

Turunan persamaan dari $g_1(x)$ dan $g_2(x)$ adalah

$g_1{}'(x) = -e^{-x}$ dan $g_2{}'(x) = 2e^{2x}$

Determinan Wronski dari $g_1(x) = e^{-x}$ dan $g_2(x) = e^{2x}$ adalah

$$w(x) = W\left(e^{-x}, e^{2x}\right) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{x} + e^{x} = 3e^{x}$$

Menurut pers. (34) diperoleh

$$v_1(x) = -\int \frac{g_2(x) f(x)}{W(x)} dx$$

$$= -\int \frac{e^{2x}.2e^{3x}}{3e^{x}} dx$$

$$= -\frac{1}{6} e^{4x}$$

$$v_2(x) = \int \frac{g_1(x) f(x)}{W(x)} dx$$

$$= \int \frac{e^{-x}.2e^{3x}}{3e^{x}} dx$$

$$= \frac{2}{3} e^{x}$$

Jadi,

$$y_k = -\frac{1}{6} e^{4x}.e^{-x} + \frac{2}{3} e^{x}.e^{2x}$$

$$y_k = \frac{1}{2} e^{3x}$$

Dengan demikian selesaian umum pers. (35) adalah

$$y = y_h + y_k$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^{3x}$$

Contoh 13

Selesaikan masalah nilai awal berikut

$$y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 2 \tag{36}$$

Jawab :

Selesaian homogen pers. (36) adalah

$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ (diperiksa)

Misalkan selesaian khusus pers. (36) adalah

$y_k = v_1(x)g_1(x) + v_2(x)g_2(x)$

dengan $g_1(x) = \cos x$ dan $g_2(x) = \sin x$

Turunan persamaan dari $g_1(x)$ dan $g_2(x)$ adalah

$g_1{}'(x) = -\sin x$ dan $g_2{}'(x) = \cos x$

Determinan Wronski dari $g_1(x) = \cos x$ dan $g_2(x) = \sin x$ adalah

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

Menurut pers. (34) diperoleh

$$\begin{aligned} v_1(x) &= -\int \frac{g_2(x) f(x)}{W(x)} dx \\ &= -2\int \sin x . \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{2}\cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2(x) &= \int \frac{g_1(x) f(x)}{W(x)} dx \\ &= 2\int \cos x . \cos x \, dx \\ &= x + \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

Jadi $y_k = \cos^2 x \cos x + (x \sin x \cos x).\sin$

$$y_k = \frac{1}{2}\mathrm{Cos}\,2x\ Cosx + xSinx + \frac{1}{2}Sin2xSinx$$

$$y_k = \frac{1}{2}Cosx + xSinx$$

$$y_k(x) = \cos^3 x + x\sin x + \sin^2 x\cos x$$
$$y_k(x) = \cos x + x\sin x,$$

sehingga

$$y = y_h + y_k$$
$$y = c_1 Cos\, x + c_2 Sinx + \frac{1}{2} Cosx + x\, Sinx$$
$$y' = -c_1 Sinx + c_2 Cosx - \frac{1}{2}\sin x + \sin x + x\cos x$$

karena $y(0) = 5$, maka $c_1 = c_1 = 4\frac{1}{2}$

dan $y'(0) = 2$, maka $c_2 = 2$

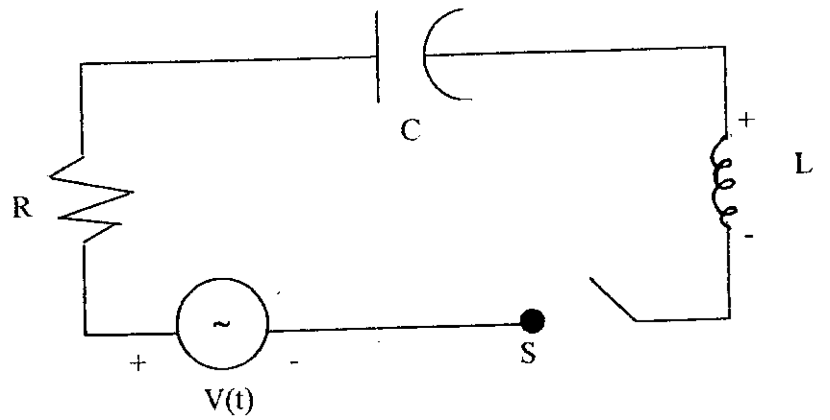
Dengan demikian selesaian masalah nilai awal pers. (36) adalah

$$y(x) = 4\frac{1}{2} Cosx + 2\, Sinx + \frac{1}{2} Cosx + x\, Sinx$$
$$y(x) = 5\cos x + (x+2)\sin x$$

2.4 Penggunaan Persamaan Diferensial Linear Ordo Dua Pada Rangkaian Listrik

Dalam bab ini kita akan mempelajari beberapa masalah nyata yang model matematikanya berbentuk persamaan diferensial biasa linear ordo dua dengan koefisien konstan. Di sini kita akan mempelajari masalah pemodelan rangkaian listrik.

Kita mempunyai rangkaian listrik seri R-L-C, yang terdiri dari daya penggerak listrik V(t), resistensi (tahanan) R ohm dan induktansi L henry seperti pada gambar di bawah ini :



Kita akan menentukan persamaan diferensial yang menyatakan muatan φ sebagai fungsi dari waktu dan arus I sebagai fungsi dari waktu.

Pada saklar S ditutup, maka menurut hukum ohm diperoleh informasi bahwa :

$E_R = RI$

$E_L = L\dfrac{dI}{dt}$

dan

$E_C = \dfrac{Q}{C}$

dengan Q muatan listrik pada kapasitor C karena

$I = \dfrac{dQ}{dt}$, maka

$E_L = L\dfrac{d^2Q}{dt^2}$

dan

$E_R = R\dfrac{dQ}{dt}$

Menurut hukum kirchoff

$$E_L + E_R + E_C = V(t) \tag{37}$$

diperoleh persamaan diferensial

$E_L = L\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + R\dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{\varphi}{C} = V(t)$

atau

$$\varphi'' + \frac{R}{L}\varphi' + \frac{1}{LC}\varphi = \frac{1}{L}V(t) \tag{38}$$

karena $E_C = \dfrac{\varphi}{C}$, maka $\dfrac{dE_C}{dt} = \dfrac{1}{C}\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{c}I$

sehingga $dE_C = \dfrac{1}{C}dt$

atau $E_C = \dfrac{1}{C}\int I\,dt$

Dengan menggunakan pers. (37), diperoleh

$$L\frac{dI}{dt} + R\frac{1}{C}\int I\,dt = V(t) \qquad (39)$$

Bila pers. (39) diturunkan terhadap *t*, maka

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = v'(t)$$

atau

$$I'' + \frac{R}{L}I' + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}v'(t) \qquad (40)$$

Pers. (38) dan pers. (39) merupakan persamaan diferensial linear tak homogen ordo dua dengan koefisien konstan.

Contoh 14

Tentukan arus listrik $I(t)$ dalam rangkaian RLC, jika R = 10 ohm, L = 2 henry, C = $\frac{1}{12}$ farad, V(t) = (sin 2t) volt dan bila arus dan muatan awal adalah nol.

Jawab :

Menurut pers. (40) diperoleh masalah nilai awal berikut

$$I'' + 5I' + 6I = \cos 2t \qquad (41)$$

$\varphi(0) = 0$ dan $I(0) = 0$

Persamaan diferensial homogennya dari pers. (41) adalah

$$I'' + 5I' + 6 = 0$$

dengan persamaan karakteristiknya adalah

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

atau

$$(r+3)(r+2) = 0$$

sehingga $I_h(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{-2t}$

selesaian khusus ($I_k(t)$) pers. (41) diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu.

Misalkan arus muatannya adalah

$I_k(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$

$I_k{}' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$

$I_k{}'' = -4A\cos 2t - 4B\sin 2t$

gantikan $I_k, I_k{}', I_k{}''$ ke pers. (41) diperoleh

$(2A+10B)\cos 2t + (-10A+2B)\sin 2t = \cos 2t$

sehingga

$2A+10B=1$

$-10A+2B=0$

diperoleh $A = \dfrac{1}{52}$ dan $B = \dfrac{5}{52}$

Jadi, $I_k(t) = \dfrac{1}{52}\cos 2t + \dfrac{5}{52}\sin 2t$

Dengan demikian kuat arus dalam rangkaian RLC ini pada setiap saat adalah

$$I(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-2t} + \frac{1}{52}\cos 2t + \frac{5}{52}\sin 2t \qquad (42)$$

c_1 dan c_2 dari $I(0) = 0$ dan $\varphi(0) = 0$

$I(0) = 0$ digantikan ke pers. (42) diperoleh

$$c_1 + c_2 + \frac{1}{52} = 0 \qquad (43)$$

Pers. (42) diturunkan terhadap t, diperoleh

$$I'(t) = -3c_1 e^{-3t} - 2c_2 e^{-2t} - \frac{1}{26}\sin 2t + \frac{5}{26}\cos 2t \qquad (44)$$

Dari pers. (39) untuk $t = 0$, diperoleh

$I'(0) + 5I(0) + 12\varphi(0) = V(0)$

$I'(0) + 5.0 + 12.0 = 0 \Rightarrow I'(0) = 0$

gantikan $I'(0) = 0$ ke pers. (41) diperoleh

$c_1 = \dfrac{3}{13}$ dan $c_2 = -\dfrac{1}{4}$

Dengan demikian kuat arus dalam rangkaian RLC ini pada setiap saat adalah

$$I(t) = \frac{3}{13}e^{-3t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{52}\cos 2t + \frac{5}{52}\sin 2t$$

2.5 Soal Latihan

Untuk soal 1 sampai dengan 5, tentukan selesaian umum persamaan diferensial homogen yang diberikan.

1. $y'' + 2y' - 15y = 0$
2. $y'' - 8y' + 16y = 0$
3. $y'' - 4y' + 20y = 0$
4. $y'' + 6y' = 0$
5. $y'' + 10y = 0$

Untuk soal 6 sampai dengan 10, selesaikan masalah nilai awal yang diberikan

6. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
7. $y'' + 4y' + 4y = 0,\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = 1$
8. $9y'' - 12y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
9. $9y'' + 6y' + 82y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 2$
10. $4y'' + 12y' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -4$

Untuk soal 11 sampai dengan 20, tentukan selesaian khusus dengan metode koefisien tak tentu, kemudian tentukan pula selesaian umum dari persamaan diferensial yang diberikan.

11. $y'' - 2y' - 3y = 5e^{2x}$
12. $y'' - y' - 12y = 3x^2$
13. $y'' - 10y' + 25y = 4\cos 3x$
14. $y'' + 2y' + 20y = 2\sin 2x$
15. $y'' - 3y' - 10y = 2e^{5x}$
16. $y'' + 3y' = 2x^3 + e^{-3x}$
17. $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$
18. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$
19. $y'' - y' - 6y = e^{-2x}\cos 3x$
20. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} - 2\sin x$

Untuk soal 21 sampai dengan 25, tentukan selesaian khusus dengan metode variasi parameter, kemudian tentukan pula selesaian umum dari persamaan diferensial yang diberikan.

21. $y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}$
22. $y'' + y = \tan x$
23. $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$
24. $y'' - 2y' + y = x \ln x$
25. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sec x$

Untuk soal 26 sampai dengan 30, selesaikan masalah nilai awal yang diberikan.

26. $y'' + y' - 2y = 2x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
27. $y'' + 4y' = x^{2} + 3e^{x},\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
28. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} \cos 2x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
29. $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{2x},\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
30. $y'' + 4y' = 3\sin 2x,\ \ y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

Untuk soal 31 sampai dengan 35, tentukan kuat arus pada setiap saat dari rangkaian RLC, tentukan pula arus mantapnya, jika pada saat awal tidak ada muatan dan arus.

No Soal	Resistensi R (Ohm)	Induktansi L (Henry)	Capasitor C (Farad)	Daya Gerak V (t) (Volt)
31.	7	2	0,6	3 sin 2t
32.	4	2	0,5	$2e^{-t}$
33.	7	4	$\frac{1}{3}$	5 sin t
34.	10	2	$\frac{1}{12}$	cos 2t
35.	4	1	$\frac{1}{13}$	sin 3t

Soal latihan metode koefisien taktentu

Tentukan selesaian khusus dengan metode koefisien tak tentu, kemudian tentukan pula selesaian umum dari persamaan diferensial yang diberikan

1. $y'' - 2y' - 3y = 5e^{2x}$
2. $y'' - y' - 12y = 3x^2$
3. $y'' - 10y' + 25y = 4\cos 3x$
4. $y'' + 2y' + 20y = 2\sin 2x$
5. $y'' - 3y' - 10y = 2e^{5x}$
6. $y'' + y = x + 2e^{-x}$
7. $y'' - y' = x + Sin\,x$
8. $y'' - y = e^x + Cos\,x$

Tentukan pemisalan y_k dari persamaan diferensial berikut, tetapi tidak perlu dihitung koefisiennya

9. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} Sin\,x$
10. $2y'' + y' - y = x^2\,Cos\,2x$
11. $2y'' + y' - y = (x^2 - 1)e^{3x}$
12. $y'' + 3y' = 2x^3 + e^{-3x}$
13. $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$
14. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$
15. $y'' - y' - 6y = e^{-2x}\cos 3x$
16. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x} - 2\sin x$