TTI2I3 Pengolahan Sinyal Waktu Kontinyu

Bab 1. Sinyal Waktu Kontinyu

Sinyal Waktu Kontinyu

1. **Definisi Sinyal**
2. **Klasifikasi Sinyal**
   - 2.1 Sinyal Waktu Kontinyu dan Sinyal Waktu Diskrit
   - 2.2 Sinyal Periodik dan Tidak Periodik
   - 2.3 Sinyal Genap dan Sinyal Ganjil
   - 2.4 Sinyal Deterministik dan Sinyal Acak
   - 2.5 Sinyal Energy dan Sinyal Daya
3. **Sinyal Dasar Waktu Kontinyu**
   - 3.1 Sinyal Step Satuan
   - 3.2 Sinyal Impuls
   - 3.3 Sinyal Ramp
   - 3.4 Sinyal Exponensial
   - 3.5 Sinyal Sinusoidal
   - 3.6 Sinyal Sinusoidal Teredam Exponensial
4. **Operasi Dasar Sinyal - Terhadap Variabel Bebas**
   - 4.1 Pengskalaan Waktu
   - 4.2 Refleksi
   - 4.3 Pergeseran Waktu

Sinyal Waktu Kontinyu

5. **Operasi Dasar Sinyal - Terhadap Variabel Tidak Bebas**
   - 5.1 Penskalaan Amplitudo
   - 5.2 Penjumlahan & Pengurangan
   - 5.3 Perkalian
   - 5.4 Diferensiasi
   - 5.5 Integrasi

1. Definisi Sinyal

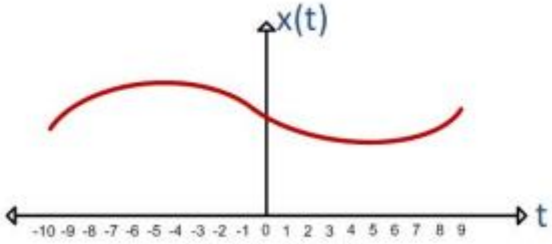
- Sinyal diwakili oleh fungsi bernilai nyata (riil) atau kompleks dari satu atau lebih Variabel bebas yang membawa informasi yang terkait dengan phenomena fisik [1].
- Variabel bebas ini bisa satu dimensi atau multidimensi, kontinu maupun diskrit
- Bila fungsi tergantung kepada satu peubah (variabel) bebas, sinyal disebut **sinyal satu dimensi**, contoh sinyal suara.
- Bila fungsi tergantung kepada dua atau lebih peubah (variabel) bebas, sinyal disebut **sinyal multidimensi**, contoh sebuah gambar adalah sebuah sinyal dua dimensi.

1 [Alan V. Oppenheim, Signals, Systems & Inference]

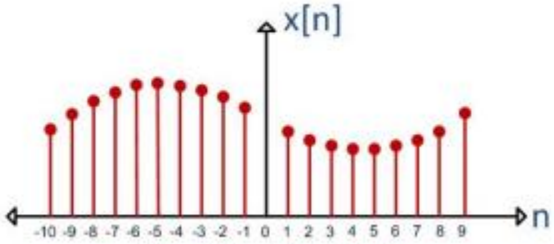
2. Klasifikasi Sinyal

2.1. Sinyal Waktu Kontinyu & Sinyal Waktu Diskrit

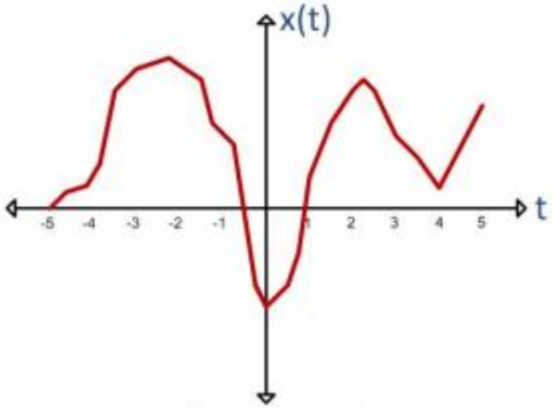
- Sinyal Waktu Kontinyu terdefinisi untuk setiap nilai pada sumbu waktu, sedangkan Sinyal Waktu Diskrit terdefinisi hanya pada nilai waktu diskrit.
- Sumbu waktu untuk Sinyal Waktu Kontinyu dituliskan dengan $\mathbf{t}$, sedangkan untuk Diskrit dengan simbol $\mathbf{n}$.
- Sehingga representasi Sinyal Waktu Kontinyu dituliskan sebagai $\mathbf{x}(\mathbf{t})$, dan untuk Sinyal Waktu Diskrit $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$, tidak terdefinisi bila nilai $\mathbf{n}$ tidak bulat.
- Sebuah sinyal waktu diskrit $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ dapat diperoleh dari sinyal waktu kontinyu $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ dengan cara mencuplik $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ pada dengan interval pencuplikan tertentu $\mathbf{T_s}$.
- Pencuplikan terhadap $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ pada waktu $\mathbf{t} = \mathbf{nT_s}$ menghasilkan cuplikan dengan nilai $\mathbf{x}[\mathbf{nT_s}]$.



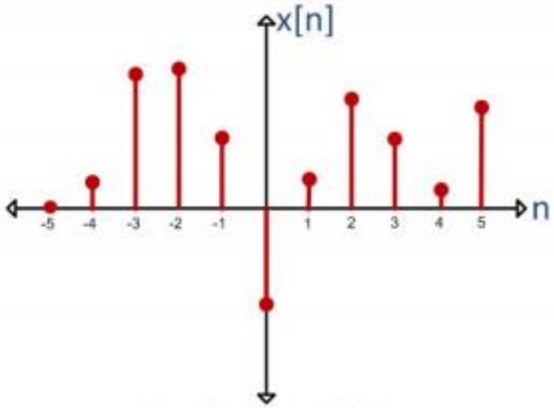
Sinyal Waktu Kontinyu



Sinyal Waktu Diskrit



Sinyal Waktu Kontinyu



Sinyal Waktu Diskrit

2.2. Sinyal Periodik & Sinyal Tidak Periodik

- Sinyal waktu kontinyu dinyatakan periodik jika dan hanya jika:

$$x(t + kT) = x(t) \;\; \text{untuk} - \infty < t < \infty \qquad (1)$$

dimana **k** adalah bilangan bulat dan **T** adalah periode sinyal.

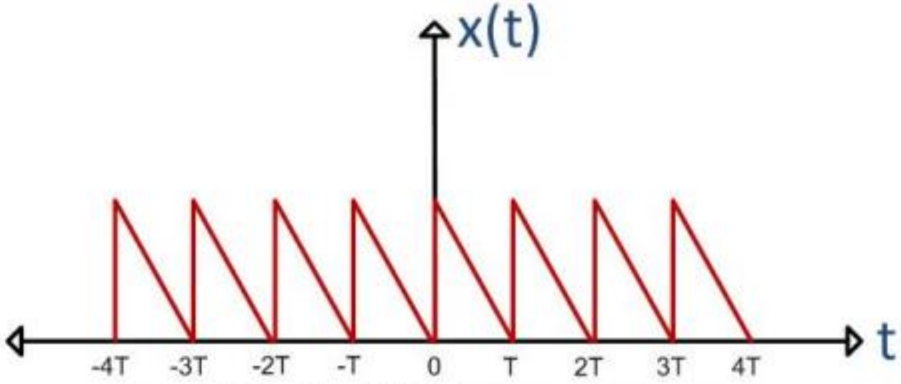
$$f = \frac{1}{T}(Hz)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

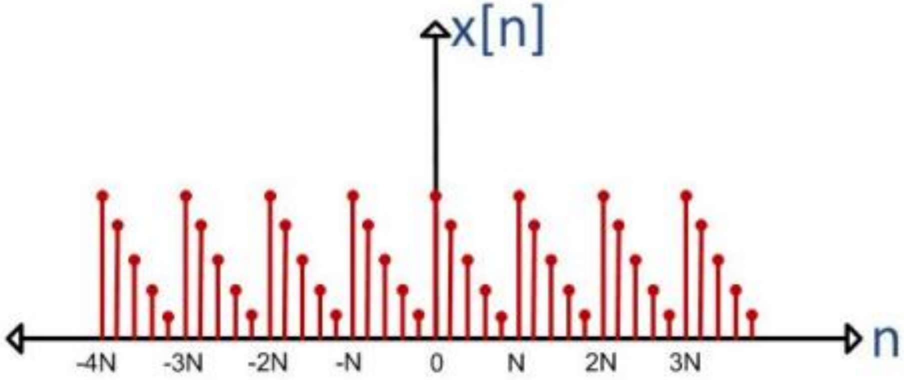
- Sinyal Waktu diskrit dikatakan periodik jika dan hanya jika:

$$x[n + kN] = x[n] \;\; \text{untuk} - \infty < n < \infty \qquad (2)$$

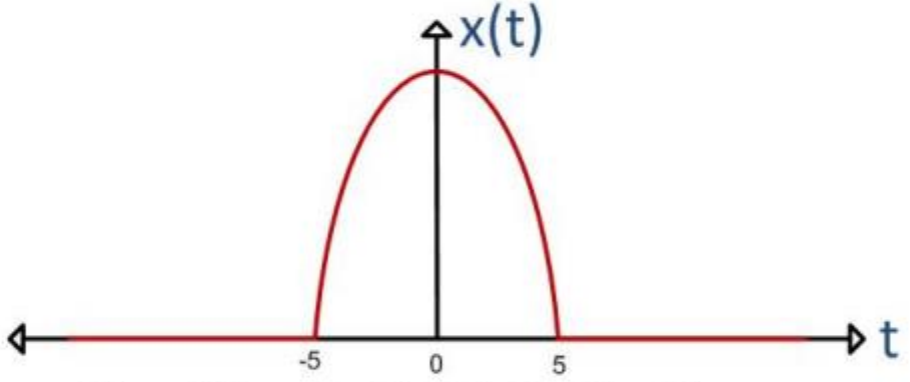
dimana **k** adalah bilangan bulat dan **N** adalah periode sinyal. Dimana $\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{N}}$



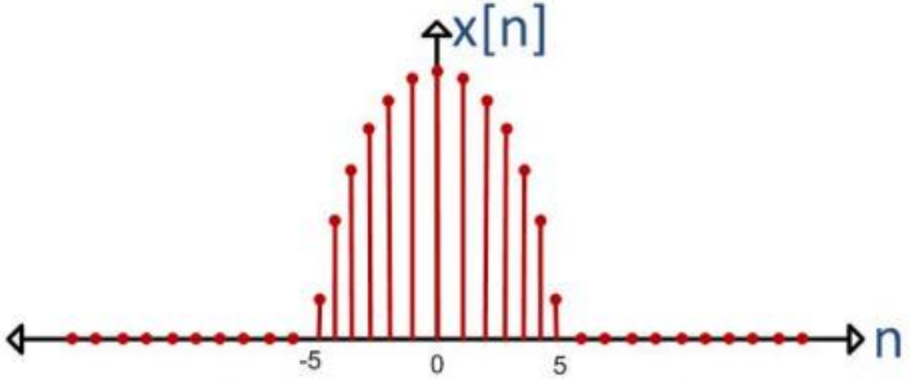
Sinyal Periodik Waktu Kontinyu



Sinyal Periodik Waktu Diskrit



Sinyal Aperiodik Waktu Kontinyu



Sinyal Aperiodik Waktu Diskrit

2.3. Sinyal Genap & Sinyal Ganjil

- Sinyal $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ atau $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ dinyatakan sinyal genap jika :

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}(-\mathbf{t}) \ \ \text{untuk} \ \ \forall\, \mathbf{t} \tag{3}$$

$$\mathbf{x}[\mathbf{n}] = \mathbf{x}[-\mathbf{n}] \ \ \text{untuk} \ \ \forall\, \mathbf{n} \tag{4}$$

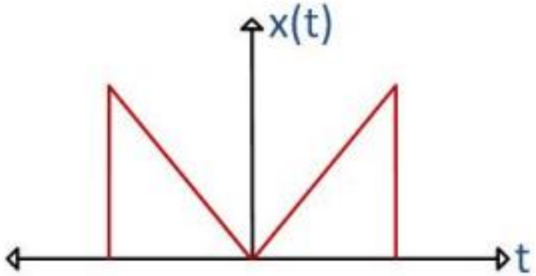
  Jadi, **Sinyal genap membentuk simetri dengan waktu balikannya**.

- Sinyal $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ atau $\mathbf{x}[\mathbf{n}]$ dinyatakan sinyal ganjil jika :

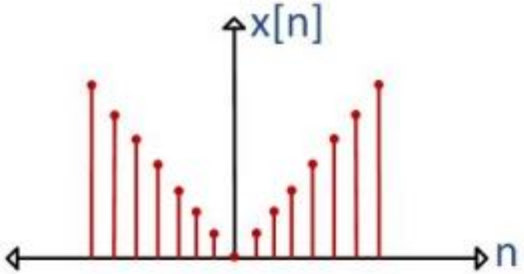
$$\mathbf{x}(-\mathbf{t}) = -\mathbf{x}(\mathbf{t}) \ \ \text{untuk} \ \ \forall\, \mathbf{t} \tag{5}$$

$$\mathbf{x}[-\mathbf{n}] = -\mathbf{x}[\mathbf{n}] \ \ \text{untuk} \ \ \forall\, \mathbf{n} \tag{6}$$

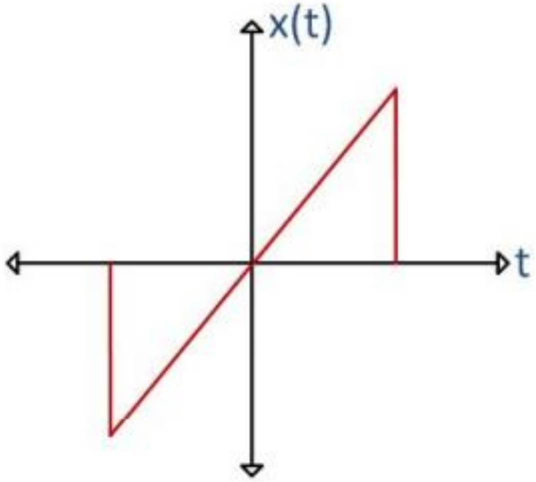
  Jadi, **Sinyal ganjil membentuk anti-simteri dengan waktu balikannya**.



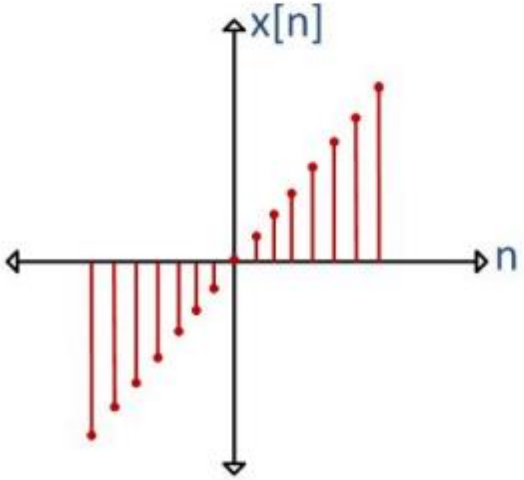
<u>**Sinyal Genap Waktu Kontinyu**</u>



<u>**Sinyal Genap Waktu Diskrit**</u>



<u>**Sinyal Ganjil Waktu Kontinyu**</u>



<u>**Sinyal Ganjil Waktu Diskrit**</u>

Dekomposisi Sinyal

- Jika $\mathbf{x(t)}$ adalah sinyal sembarang yang akan didekomposisi:

$$\mathbf{x(t) = x_{genap}(t) + x_{ganjil}(t)} \tag{7}$$

Maka:

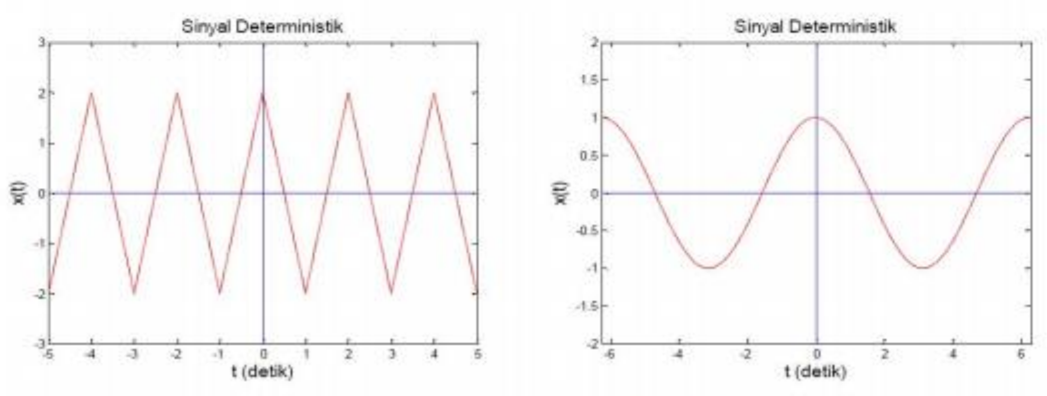
$$\mathbf{x_{genap}(t) = \frac{1}{2}\left\{x(t) + x(-t)\right\}} \tag{8}$$

$$\mathbf{x_{ganjil}(t) = \frac{1}{2}\left\{x(t) - x(-t)\right\}} \tag{9}$$

- Contoh: $\mathbf{x(t) = e^{-2t}\cos(t)}$, maka
$\mathbf{x(-t) = e^{2t}\cos(-t) = e^{2t}\cos(t)}$
$\mathbf{x_{genap}(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos(t) + e^{2t}\cos(t)\right] = \cosh(2t)\cos(t)}$
$\mathbf{x_{ganjil}(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\cos(t) - e^{2t}\cos(t)\right] = -\sinh(2t)\cos(t)}$

2.4. Sinyal Deterministik & Sinyal Acak

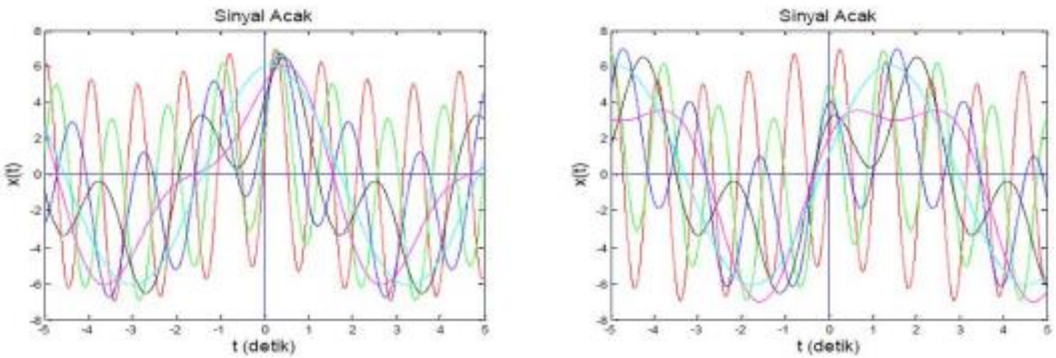
- Sinyal deterministik adalah sinyal yang keseluruhan nilainya dapat ditentukan dengan suatu persamaan matematis. Sinyal deterministik adalah sinyal yang pada setiap saat nilainya dapat ditentukan.



Sinyal Deterministik [2]

2 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

- Sinyal acak jika nilai yang akan datang dari suatu sinyal tidak dapat ditentukan secara pasti. Contoh: Sinyal noise tegangan dalam penguat



Sinyal Acak [3]

3 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

2.5. Sinyal Energi & Sinyal Daya

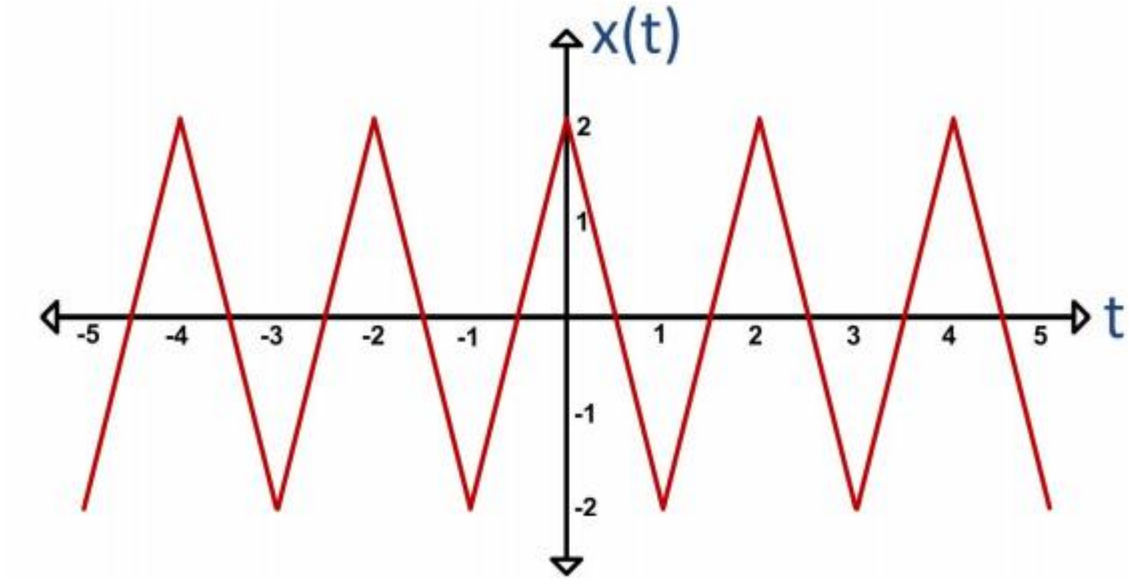
- Sinyal Energi adalah sinyal yang mempunyai energi terbatas, secara matematis $\mathbf{0} < \mathbf{E} < \infty$. Energi sinyal $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ dapat dicari dengan:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{x}(\mathbf{t})|^2 \, \mathbf{dt} \quad \text{(Joules)} \tag{10}$$

- Sinyal Daya adalah sinyal yang mempunyai daya terbatas, secara matematis $\mathbf{0} < \mathbf{P} < \infty$. Daya sinyal rata-rata sebuah sinyal periodik $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ dapat dicari dengan:

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} \int_{-\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}}^{\frac{\mathbf{T}}{\mathbf{2}}} |\mathbf{x}(\mathbf{t})|^2 \, \mathbf{dt} \quad \text{(Watts)} \tag{11}$$

Contoh 1: Tentukan Daya sinyal $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ berikut:



Jawab:

Diketahui Periode sinyal adalah sebesar $\mathbf{T} = \mathbf{2}$, dan dengan persamaan garis melalui dua titik diperoleh persamaan sinyal $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ adalah:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 4t+2, & \text{untuk } -1 \leq t < 0 \\ -4t+2, & \text{untuk } \ \ 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

Maka daya rata-rata sinyal adalah:

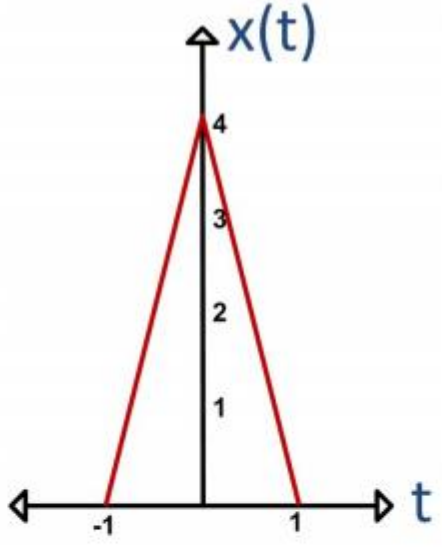
$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{T}} \int_{-\frac{\mathbf{T}}{2}}^{\frac{\mathbf{T}}{2}} |\mathbf{x}(\mathbf{t})|^2 \, \mathbf{dt} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |\mathbf{x}(\mathbf{t})|^2 \, \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} (\mathbf{4t}+\mathbf{2})^2 \, \mathbf{dt} + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (-\mathbf{4t}+\mathbf{2})^2 \, \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \left(\mathbf{16t}^2+\mathbf{16t}+\mathbf{4}\right) \mathbf{dt} + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} \left(\mathbf{16t}^2-\mathbf{16t}+\mathbf{4}\right) \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{P} = \frac{4}{3} \quad \textbf{Watts}$$

Contoh 2: Tentukan Energi sinyal $\mathbf{x(t)}$ berikut:



Jawab:
Dengan persamaan garis melalui dua titik diperoleh persamaan sinyal $\mathbf{x(t)}$ adalah:

$$\mathbf{x(t)} = \begin{cases} 4t+4, & \text{untuk } -1 \le t < 0 \\ -4t+4, & \text{untuk } \ \ 0 \le t < 1 \end{cases}$$

Maka Energi sinyal adalah:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{x(t)}|^2 \, \mathbf{dt} = \int_{-1}^{1} |\mathbf{x(t)}|^2 \, \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{E} = \int_{-1}^{0} (\mathbf{4t}+\mathbf{4})^2 \, \mathbf{dt} + \int_{0}^{1} (-\mathbf{4t}+\mathbf{4})^2 \, \mathbf{dt}$$

$$\mathbf{P} = \int_{-1}^{0} (\mathbf{16t^2}+\mathbf{32t}+\mathbf{16}) \, \mathbf{dt} + \int_{0}^{1} (\mathbf{16t^2}-\mathbf{32t}+\mathbf{16}) \, \mathbf{dt}$$

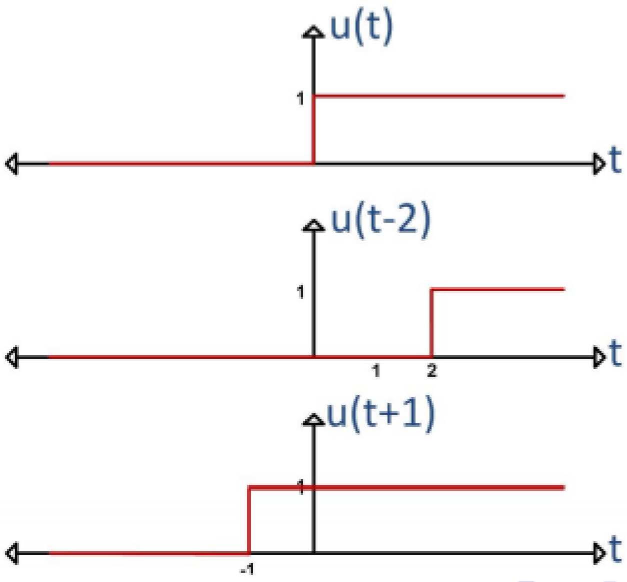
$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}} \quad \textbf{Joules}$$

3. Sinyal Dasar

3.1. Sinyal Step Satuan

Fungsi step satuan, dinotasikan dengan $\mathbf{u(t)}$, dikenal juga sebagai fungsi satuan "**Heaviside**", didefinisikan dengan:

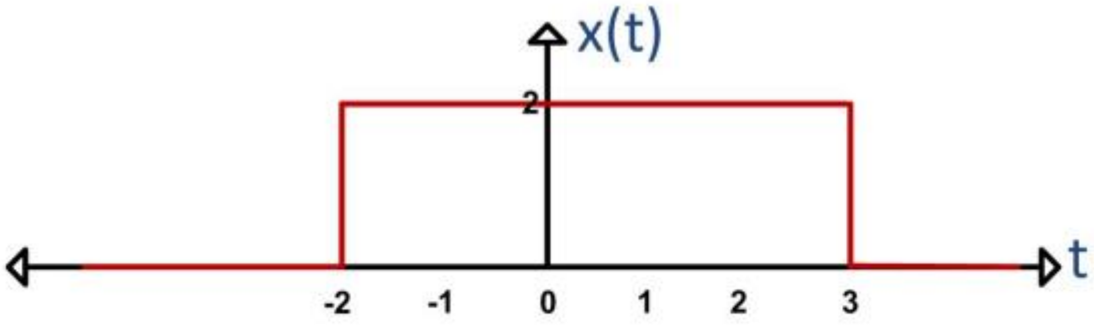
$$\mathbf{u(t)} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } t > 0 \\ 0, & \text{untuk } t < 0 \end{cases} \tag{12}$$



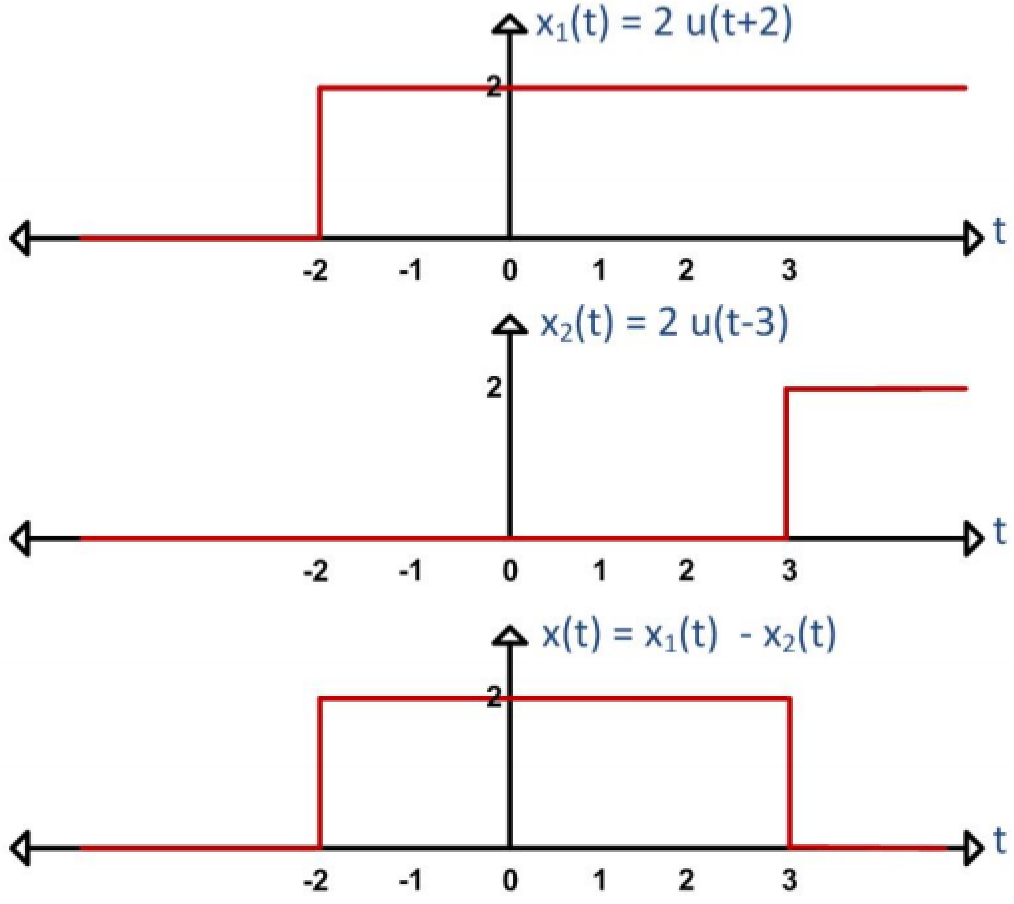
Contoh 3: Diketahui:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } -\infty < t < -2 \\ 2, & \text{untuk } -2 < t < 3 \\ 0, & \text{untuk } 3 < t < \infty \end{cases}$$

Digambarkan menjadi:



Terlihat bahwa sinyal $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{2\ u}(\mathbf{t}+\mathbf{2}) - \mathbf{2\ u}(\mathbf{t}-\mathbf{3})$



x1(t) = 2 u(t+2)
2
t
-2
-1
0
1
2
3
x2(t) = 2 u(t-3)
2
t
-2
-1
0
1
2
3
x(t) = x1(t) - x2(t)
2
t
-2
-1
0
1
2
3

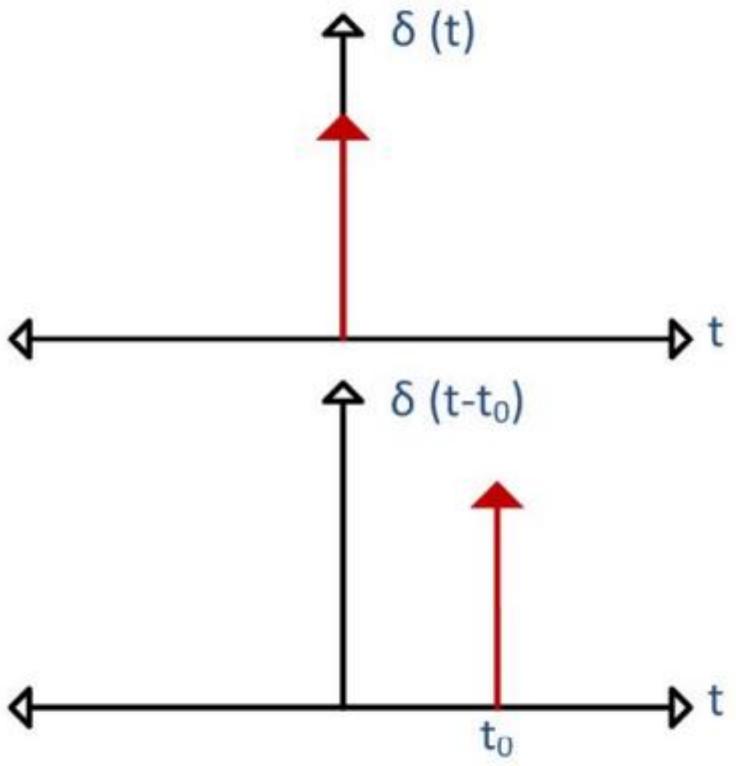
3.2. Sinyal Impuls Satuan

Fungsi impuls satuan, dinotasikan dengan $\delta(\mathbf{t})$, dikenal juga sebagai fungsi satuan "**Dirac Delta**", didefinisikan dengan:

$$\delta(\mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } t \neq 0 \\ \infty, & \text{untuk } t = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Sifat-sifat sinyal "**Dirac Delta**":

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{t}) = \mathbf{1}$
- $\delta(\mathbf{at}) = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{a}|}\delta(\mathbf{t})$
- $\delta(-\mathbf{t}) = \delta(\mathbf{t})$


δ (t)
t
δ (t-t0)
t
t0

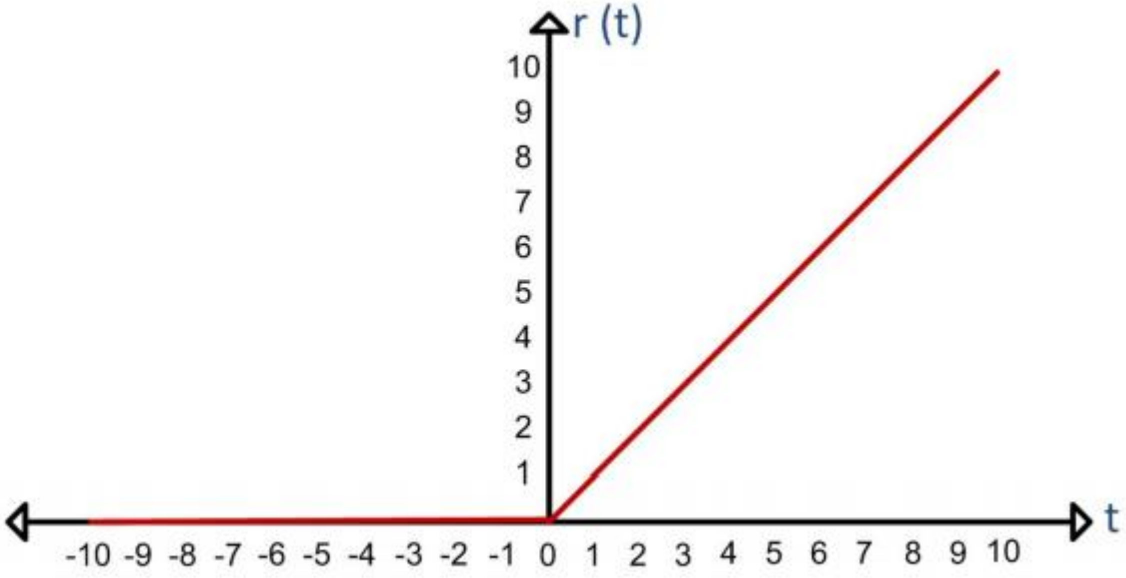
3.3. Sinyal Ramp

Fungsi ramp didefinisikan dengan persamaan:

$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \begin{cases} t, & \text{untuk } t \geq 0 \\ 0, & \text{untuk } t < 0 \end{cases} \tag{14}$$

atau:

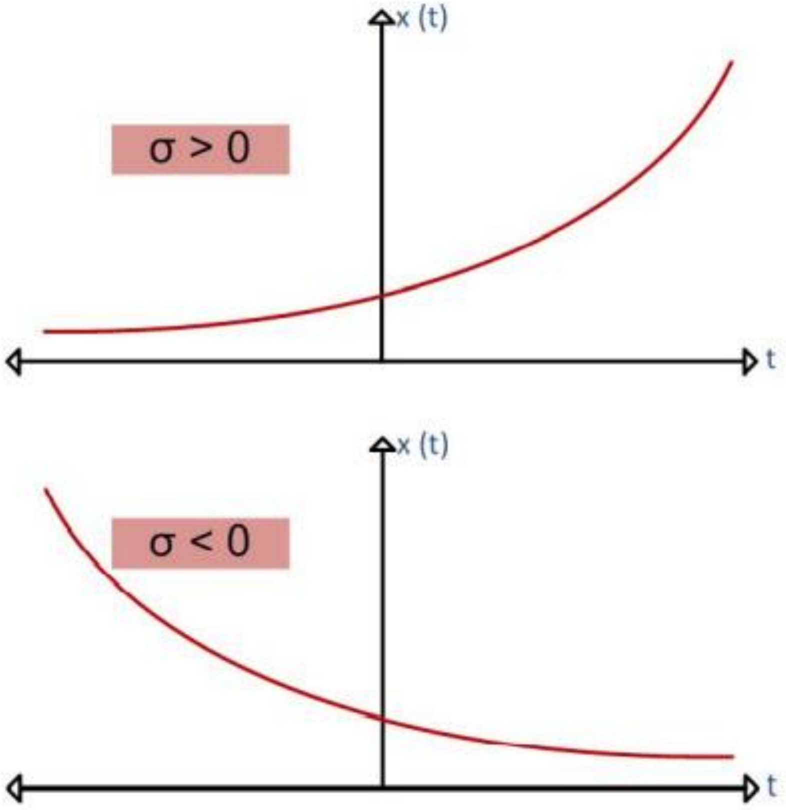
$$\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\ \mathbf{u}(\mathbf{t}) \tag{15}$$



3.4. Sinyal Exponensial

Fungsi Exponensial didefinisikan dengan persamaan:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{\sigma \mathbf{t}} \tag{16}$$



3.5. Sinyal Sinusoidal

Fungsi Sinusoidal didefinisikan dengan persamaan:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{A}\ \mathbf{cos}(\mathbf{\Omega_0 t} + \theta) \qquad (17)$$

atau:

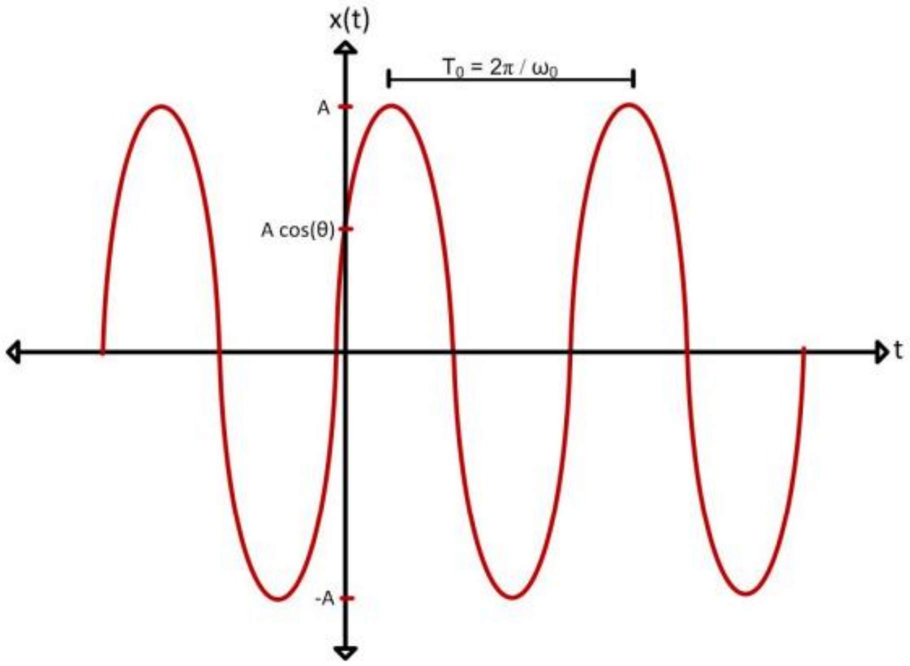
$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{A}\ \mathbf{sin}(\mathbf{\Omega_0 t} + \theta) \qquad (18)$$

Dimana:

$\mathbf{A}$ = Amplitudo

$\mathbf{\Omega_0}$ = Frekuensi Radian, dengan besar $\mathbf{\Omega_0 = 2\pi f_0}$

θ = Sudut Fasa



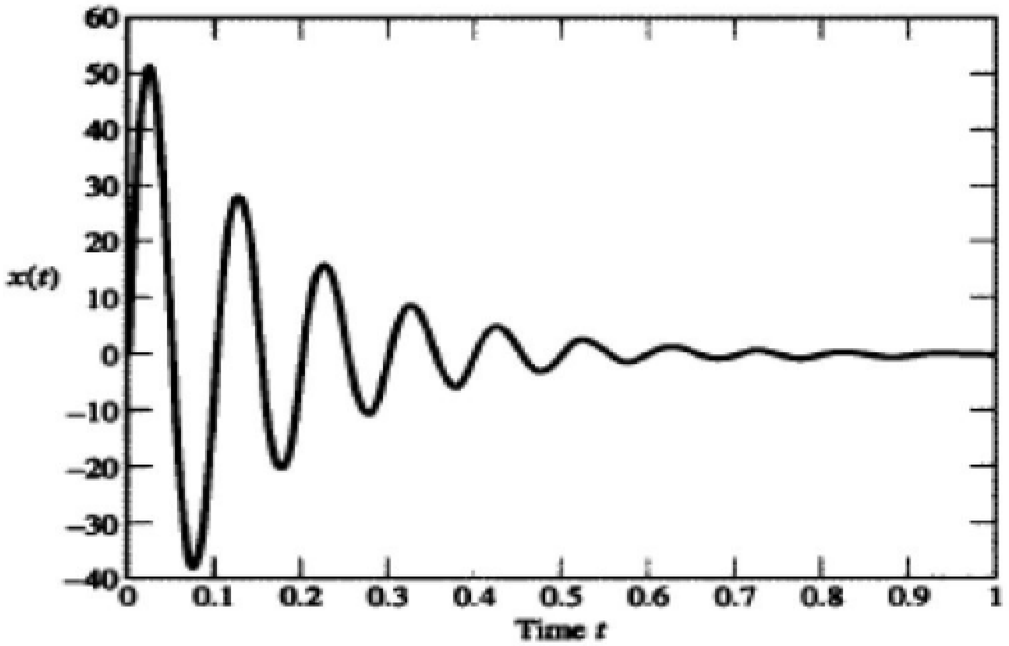
3.6. Sinyal Sinusoidal Teredam Exponential

Fungsi Sinusoidal teredam Exponential didefinisikan dengan persamaan:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{A}\ \mathbf{e}^{-\alpha \mathbf{t}}\ \mathbf{sin}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t} + \phi) \tag{19}$$

Contoh:

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{60}\ \mathbf{e}^{-\mathbf{6t}}\ \mathbf{sin}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t})$$



Sinyal Sinusoidal Teredam Exponential
$\mathbf{x(t) = 60\ e^{-6t}\ sin(\Omega t)}$, diambil dari [4].

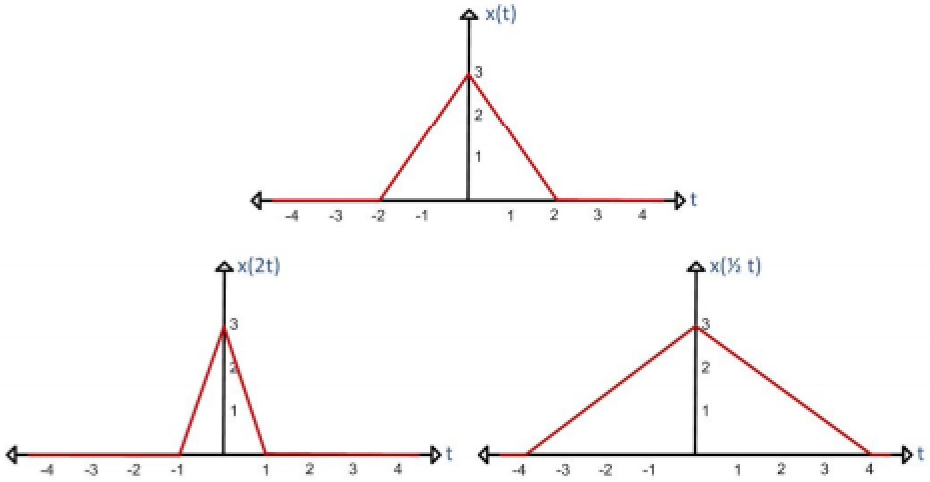
4 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

4. Operasi Dasar - Terhadap Variabel Bebas

4.1. Pengskalaan Waktu

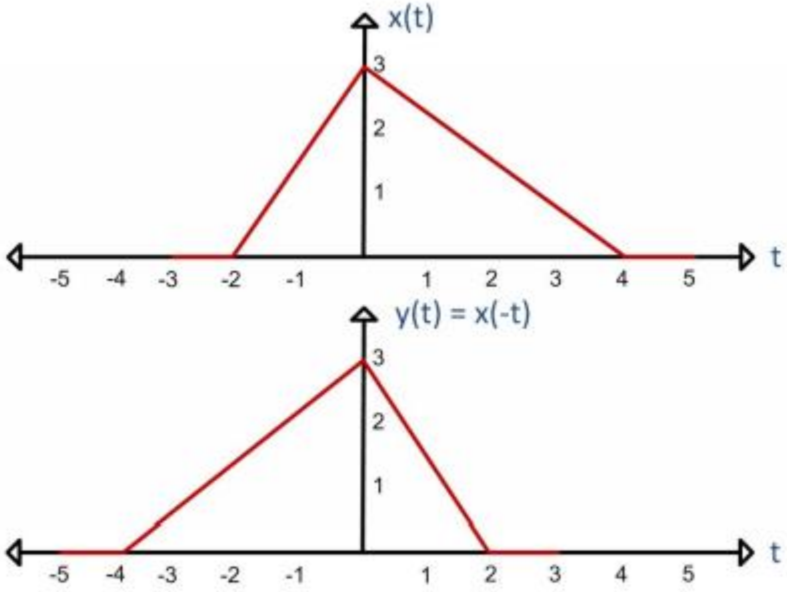
Pengskalaan Waktu dinotasikan sebagai $\mathbf{y(t)} = \mathbf{x}\ (\mathbf{at})$.

- Bila $\mathbf{a} > \mathbf{1}$, maka sinyal $\mathbf{y(t)}$ adalah sinyal $\mathbf{x(t)}$ **ter-kompresi**.
- Bila $\mathbf{0} < \mathbf{a} < \mathbf{1}$, maka sinyal $\mathbf{y(t)}$ adalah sinyal $\mathbf{x(t)}$ **ter-ekspansi**.



4.2. Refleksi

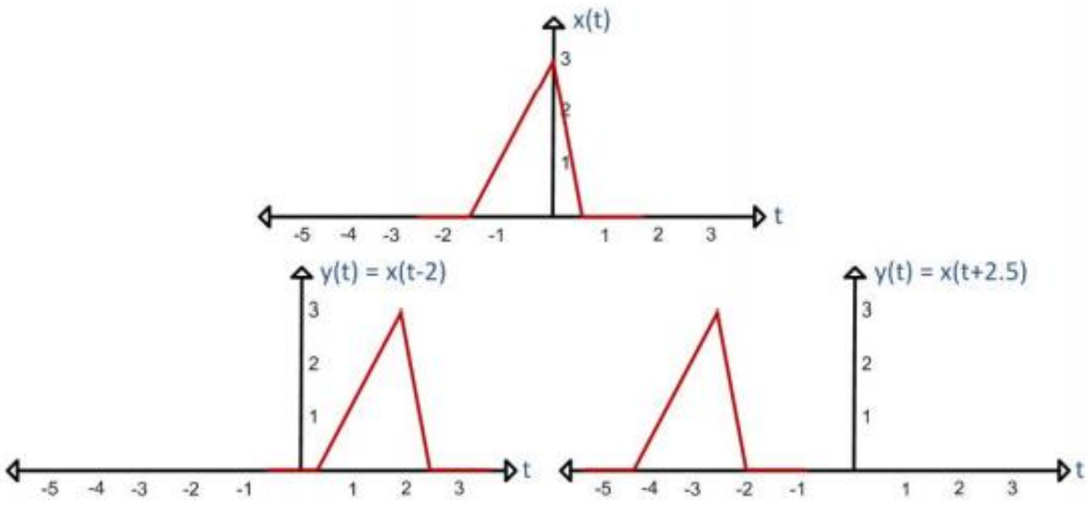
Refleksi dinotasikan sebagai $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}\ (-\mathbf{t})$.



4.3. Pergeseran Waktu

Refleksi dinotasikan sebagai $\mathbf{y(t)} = \mathbf{x}\ (\mathbf{t} - \mathbf{t_0})$.

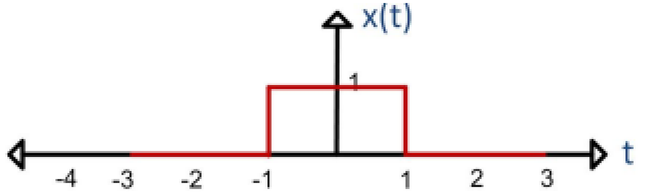
- Bila $\mathbf{t_0} > \mathbf{0}$, sinyal $\mathbf{y(t)}$ ialah pergeseran sinyal $\mathbf{x(t)}$ kearah **kanan**.
- Bila $\mathbf{t_0} < \mathbf{0}$, sinyal $\mathbf{y(t)}$ ialah pergeseran sinyal $\mathbf{x(t)}$ kearah **kiri**.



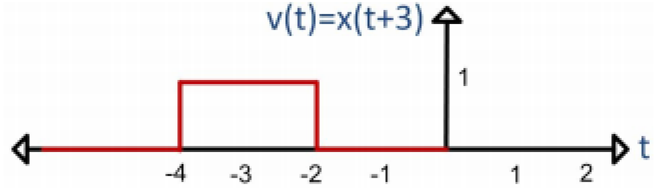
Contoh: Diketahui $\mathbf{x(t) = u(t+1) - u(t-1)}$, gambarkan sinyal $\mathbf{y(t) = x(2t+3)}$!

Jawab:

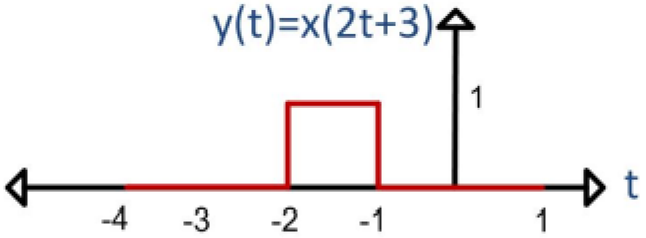
- Langkah 1: Gambarkan sinyal $\mathbf{x(t)}$



- Langkah 2: Gambarkan $\mathbf{v(t) = x(t+3)}$



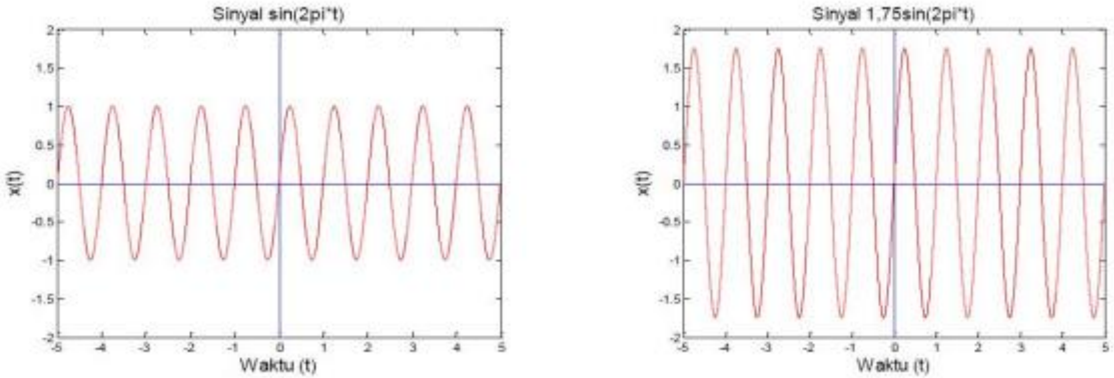
- Langkah 3: Gambarkan $\mathbf{y(t) = x(2t+3)}$



5. Operasi Dasar - Terhadap Variabel Tidak Bebas

5.1. Pengskalaan Amplitudo

Pengskalaan Amplitudo dinotasikan sebagai $\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{c}\ \mathbf{x}(\mathbf{t})$.

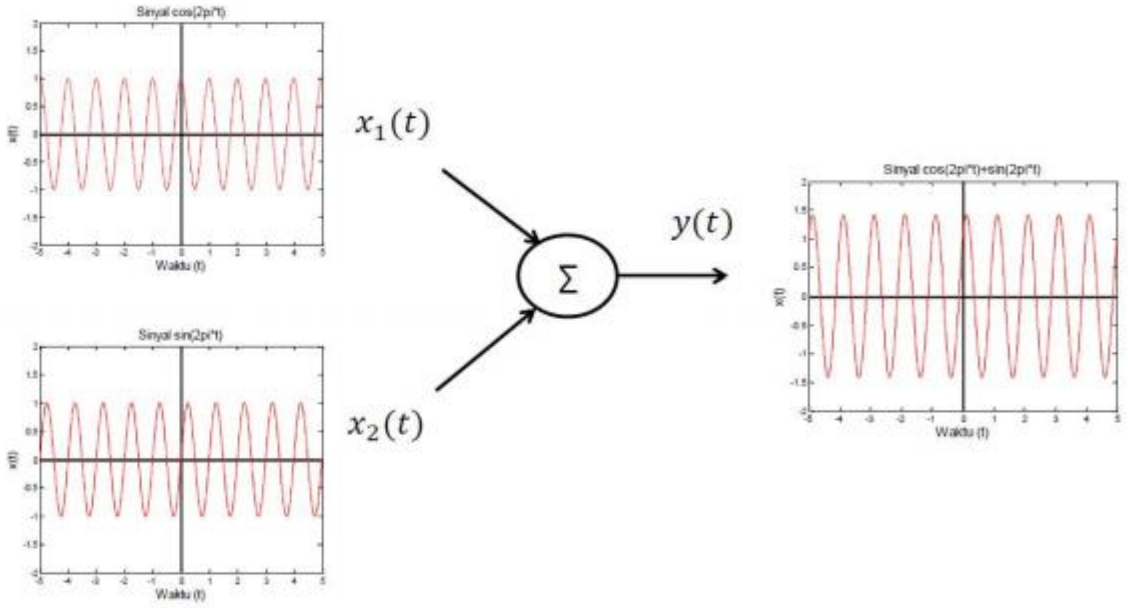


Pengskalaan Sinyal Sinusoidal [5]

5 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

5.2. Penjumlahan & Pengurangan

Penjumlahan sebagai $\mathbf{y(t)} = \mathbf{x_1(t)} + \mathbf{x_2(t)}$.

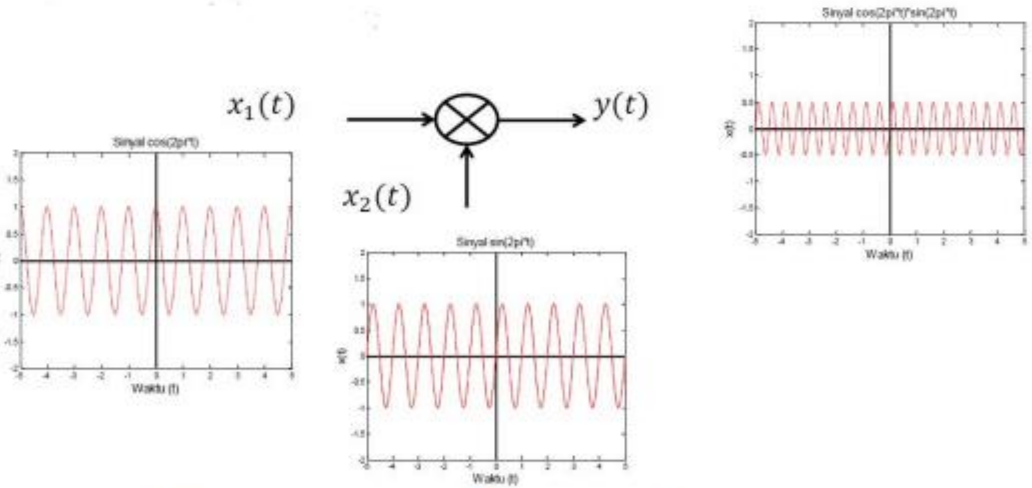


Penjumlahan Sinyal Sinusoidal [6]

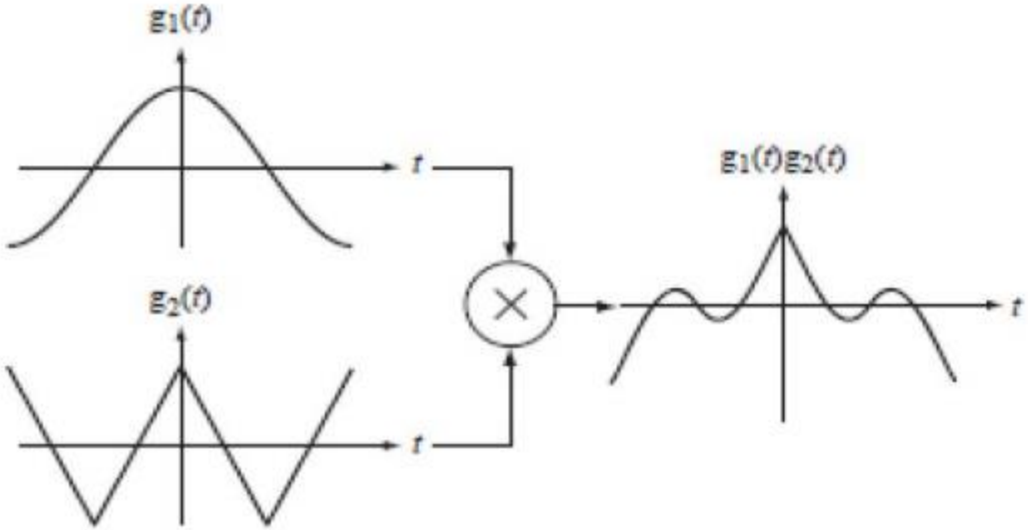
6 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

5.3. Perkalian

Penjumlahan sebagai $\mathbf{y(t)} = \mathbf{x_1(t)} \cdot \mathbf{x_2(t)}$.

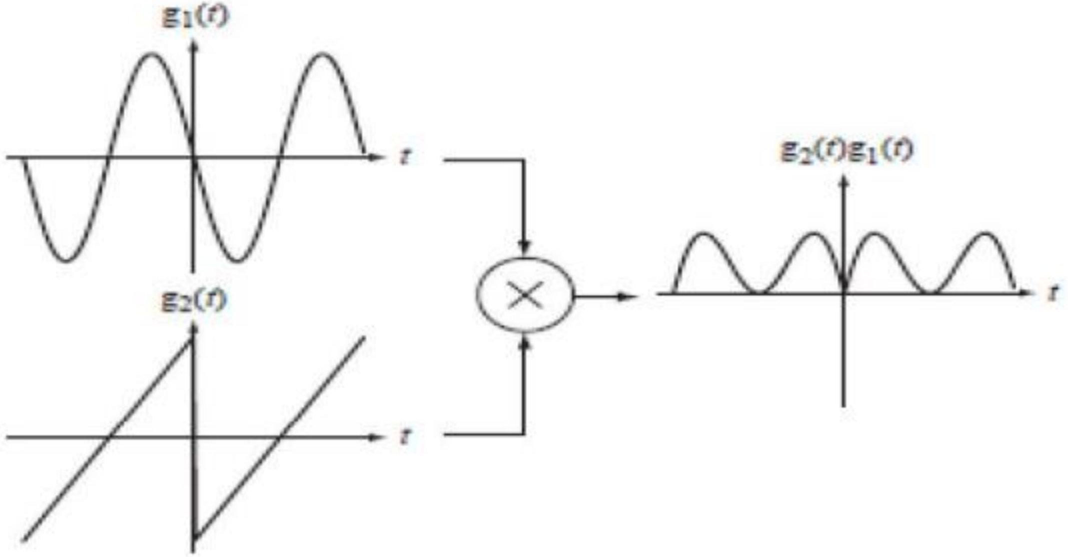


Perkalian Sinyal Sinusoidal [7]



Perkalian Dua Sinyal Genap [8]

8 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

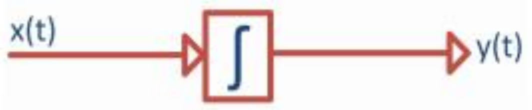


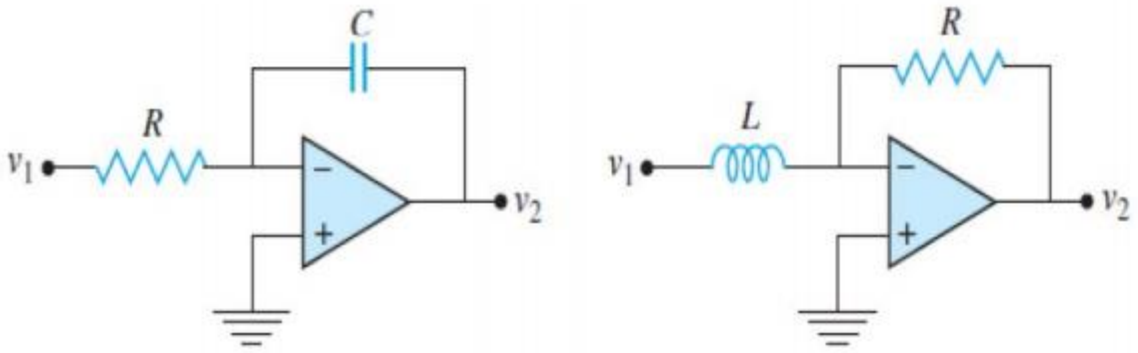
Perkalian Dua Sinyal Ganjil [9]

9 [Dr. Suhartono Tjondronegoro, Slide Pembelajaran PSWK]

5.4. Integrasi

Integrasi dituliskan sebagai $\mathbf{y(t)} = \int_{-\infty}^{\mathbf{t}} \mathbf{x}(\tau)\ \ \mathbf{d}\tau$.



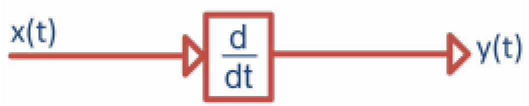


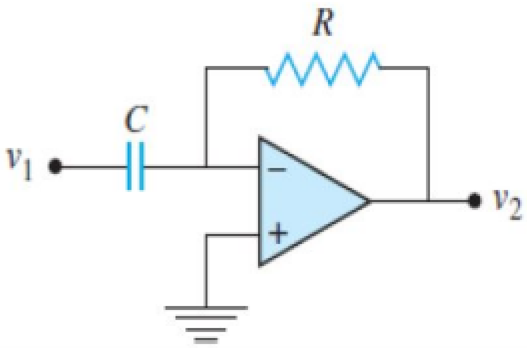
$$\mathbf{v_2(t)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{RC}} \int_{-\infty}^{\mathbf{t}} \mathbf{v_1}(\tau)\ \ \mathbf{d}\tau \qquad (20)$$

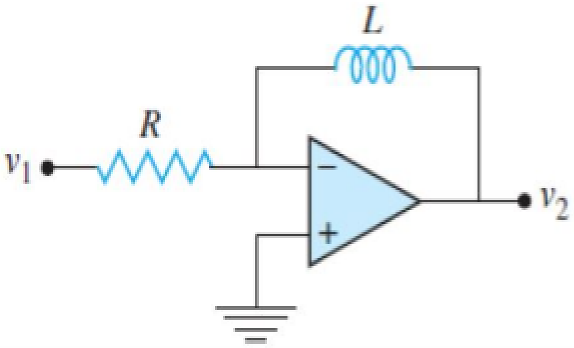
$$\mathbf{v_2(t)} = -\frac{\mathbf{R}}{\mathbf{L}} \int_{-\infty}^{\mathbf{t}} \mathbf{v_1}(\tau)\ \ \mathbf{d}\tau \qquad (21)$$

5.5. Diferensiasi

Diferensiasi dituliskan sebagai $\mathbf{y(t)} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\mathbf{x(t)}$.







$$\mathbf{v_2(t) = -RC\,\frac{d}{dt}\,v_1(t)} \tag{22}$$

$$\mathbf{v_2(t) = -\frac{L}{R}\,\frac{d}{dt}\,v_1(t)} \tag{23}$$

References

- Alan V. Oppenheim & George C. Vergheseu , "**Signals, Systems & Inference**", Pearson Education, Inc.
- Dr. Suhartono Tjondronegoro, "**Slide Pembelajaran Pengolahan Sinyal Waktu Kontinyu**."