Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 3 : Bentuk Polar dan Operasinya

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi 02: Agustus 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

Materi perkuliahan ini adalah **bentuk polar** pada bilangan kompleks beserta operasinya.

Kalkulator (dengan fungsi trigonometri) dapat digunakan untuk membantu perhitungan.

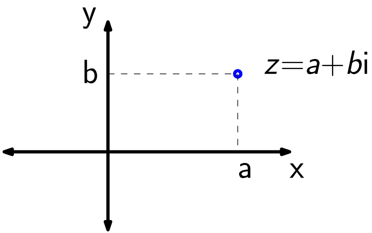
Daftar Isi

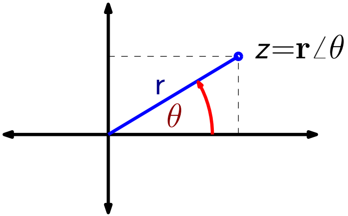
1. Representasi Polar
2. Notasi Euler
3. Perkalian dan Pembagian
4. Pangkat dan Akar

Representasi Polar

Suatu bilangan kompleks dalam representasi Kartesian $z = a + bi$

1. dapat dinyatakan juga dalam bentuk polar $\mathbf{r}\angle\theta$
2. $\mathbf{r}$ disebut modulus dari z
3. θ disebut argumen dari z
4. Sudut argumen dihitung dari sumbu riil.
5. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
6. $\theta = tan^{-1} \frac{b}{a}$





Representasi Polar

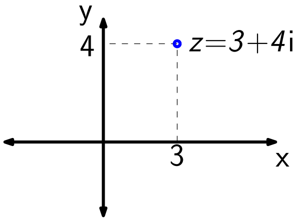
1. $z = 3 + 4i$
2. **Modulus**:

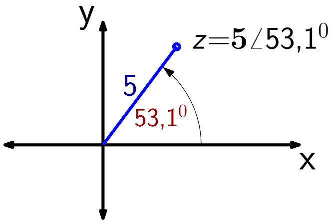
$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

3. **Argumen**:

$$\theta = tan^{-1}\frac{b}{a} = tan^{-1}\frac{4}{3} = 53,1^0$$

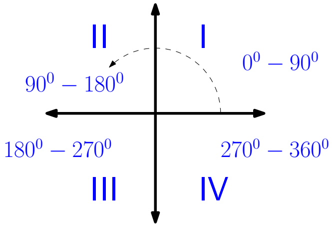
4. $z = 3 + 4i = 5\angle 53,1^0$





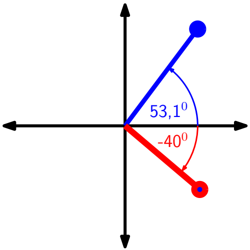
Kuadran dari Argumen

1. Berhati-hati dalam menentukan kuadran dari Argumen. Perhatikan positif/negatif bagian riil dan imaginer.
2. $z_1 = 3 + 4i \qquad \theta = 53,1^0$
3. $z_1 = -3 + 4i \qquad \theta = \cdots$
4. $z_1 = -3 - 4i \qquad \theta = \cdots$
5. $z_1 = 3 - 4i \qquad \theta = \cdots$



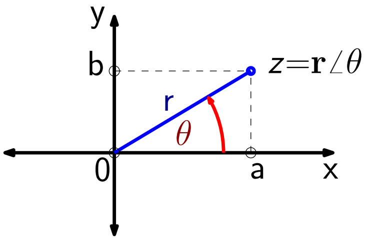
Argumen Negatif

1. **Sudut positif** berlawanan jarum jam.
2. **Sudut negatif** searah jarum jam.
3. Sudut negatif dapat diekivalenkan dengan sudut positif dengan menambahkan 360^0
4. $\theta = -40^0$ ekivalen dengan $\theta = -40^0 + 360^0 = 320^0$
5. $z = 3 - 4i$, bentuk Polar : $z = 5\angle{-53,1^0} = 5\angle 306,9^0$



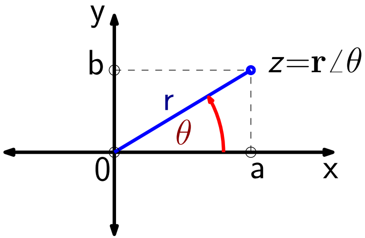
Transformasi dari Polar ke Kartesian

1. $z_1 = 3 + 4i$ menghasilkan $z = 5\angle 53,1^0$
2. Sebaliknya, $z = 5\angle 53,1^0$, bagaimana memperoleh kembali z bentuk Kartesian?
3. $a = r\cos(\theta)$
4. $b = r\sin(\theta)$
5. $z = r\cos(\theta) + r\sin(\theta)i$
6. Bentuk polar : $z = 5\angle 30^0$, bentuk Kartesiannya: $z = 5\cos(30^0) + 5\sin(30^0)i = 4,33 + 2,5i$



Representasi Euler

1. Notasi polar sebelumnya : $z = r\angle\theta$
2. Bentuk ini menyatakan bahwa bilangan kompleks memiliki modulus r, dan argumen θ.
3. Bentuk ini disebut notasi fasor.
4. Notasi matematis formal adalah bentuk Euler: $z = re^{i\theta}$
5. Identitas Euler :
   $e^{i\theta} = cos\,\theta + i\sin\theta$
6. $z = a + bi = r\angle\theta = re^{i\theta}$
7. **Contoh** :
   $z = 3 + 4i = 5\angle 53,1^0 = 5e^{i\,53.1^0}$ [1]



---

[1] e=2,71828... bilangan natural

Perkalian dan pembagian dalam bentuk Polar

Misal: $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. Perkalian : $z_1 z_2 = (r_1 e^{\theta_1})(r_2 e^{\theta_2}) = r_1 r_2 \; e^{\,i(\theta_1+\theta_2)}$
2. Perkalian bentuk polar: **modulus dikalikan**, **argumen dijumlahkan**.
3. Pembagian: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{(r_1 e^{\theta_1})}{(r_2 e^{\theta_2})} = \frac{r_1}{r_2} \; e^{\,i(\theta_1-\theta_2)}$
4. Pembagian bentuk polar: **modulus dibagi**, **argumen dikurangkan**

Perkalian dan pembagian dalam bentuk Polar

Misal: $z_1 = 5e^{i53,1^0}$ dan $z_2 = 2e^{i30^0}$, maka:

1. $z_1 z_2 = 5 \cdot 2\ e^{\,i(53,1^0+30^0)} = 10\ e^{i83,1^0}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{2}\ e^{\,i(53,1^0-30^0)} = \frac{5}{2}\ e^{\,i23,1^0}$

Jika : $z_1 = 10e^{-i53,1^0}$ dan $z_2 = 15e^{i10^0}$, hitung:

1. $z_1 z_2 = \cdots$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \cdots$

Perkalian dan pembagian dalam bentuk Polar

Jika dua bilangan kompleks masih dalam bentuk Kartesian, maka 1) perlu diubah ke bentuk polar terlebih dahulu, 2) dikalikan, 3) dikembalikan ke bentuk Kartesian.

Misal: $z_1 = 3 + 3j$ dan $z_2 = 3 + 4i$. Akan dihitung: $z_1 z_2$:

1. $z_1 = 3 + 3j = \sqrt{3^2 + 3^2} e^{i\ tan^{-1} \frac{3}{3}} = 3\sqrt{2} e^{i45^0}$
2. $z_2 = 3 + 4i = 5\ e^{\ i53,1^0}$
3. $z_1 z_2 = 3\sqrt{2} \cdot 5 e^{i(45^0 + 53,1^0)} = 15\sqrt{2}\ e^{\ i98,1^0} =$ $15\sqrt{2} \cos(98,1^0) + 15\sqrt{2} \cos(98,1^0) i = -3 + 21i$

dan $\frac{z_1}{z_2}$

4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{5} e^{i(53,1^0 - 45^0)} = \frac{3\sqrt{2}}{5} e^{i(8,1^0)} = 0.84 + i0.12$

Pangkat dan Akar

Pangkat:

Misal: $z = a + bi = r\ e^{i\theta}$

1. $z^2 = zz = r\ r\ e^{i(\theta+\theta)} = r^2\ e^{i(2\theta)}$
2. $z^3 = zzz = r\ r\ r\ e^{i(\theta+\theta+\theta)} = r^3\ e^{i(3\theta)}$
3. $z^n = zzz\cdots z = r\ r\ r\cdots r\ e^{i(\theta+\theta+\theta+\cdots+\theta)} = r^n\ e^{i(n\theta)}$

Selanjutnya, akar :

1. $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = (r\ e^{i\theta})^{\frac{1}{2}} = r^{\frac{1}{2}}\ e^{i(\theta/2)}$
2. $\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = (r\ e^{i\theta})^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}}\ e^{i(\theta/3)}$
3. $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = (r\ e^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\ e^{i(\theta/n)}$

Pangkat dan Akar

Misal: $z = 1 + i$
Hitung: z^2 dan $\sqrt{z}$
Jawab: Ubah dulu z ke bentuk Polar (Euler):
Modulus : $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
Argumen : $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^0$
Bentuk Euler : $z = \sqrt{2}e^{i45^0}$

1. $z^2 = r^2\ e^{i(2\theta)} = 2\ e^{i90} = 2i$
2. $\sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt(r)e^i\theta/2 = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i22,5^0} = 1,1 + 0.455i$

Catatan: Pada contoh di atas, kuadrat dapat dihitung dengan mudah pada koordinat Kartesian, namun akar harus dihitung dalam koordinat Polar (Euler)

Dalil De Moivre

Dalil De Moivre adalah implikasi dari Identitas Euler

1. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
2. $e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
3. $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

Oleh karena 2) dan 3) sama, maka

4. $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Penutup

1. Pada bagian ini kita telah bahas tentang representasi Polar
2. Bentuk Polar dapat dinyatakan baik sebagai Fasor
3. Bentuk perkalian dan pembagian lebih mudah dikerjakan pada bentuk Polar
4. Pangkat dan akar lebih mudah dikerjakan pada bentuk Polar
5. Perhitungan perkalian, pembagian, pangkat, akar memerlukan banyak proses: menghitung sinus, kosinus, $\tan^{-1}$, akar, dan sebagainya. Latihlah menggunakan alat bantu/kalkulator
6. Alat bantu untuk perhitungan bilangan kompleks: **Matlab** atau **Octave**. Installah **Octave** di komputer Anda!

Latihan 3

Jika $z_1 = 3 + 4i$ dan $z_2 = 2i$, dengan menggunakan bentuk Polar (Euler), hitung:

1. $z_1(2 + z_2)$
2. $\frac{z_1}{z_2}$
3. z_1^5
4. $\sqrt{z_2}$
5. $\sqrt[4]{z_2}$