Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

Silabus :

Bab I Matriks dan Operasinya

Bab II Determinan Matriks

Bab III Sistem Persamaan Linear

Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang

Bab V Ruang Vektor

Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam

Bab VII Transformasi Linear

Bab VIII Ruang Eigen

VEKTOR DI BIDANG DAN DI RUANG

Pokok Bahasan :

1. Notasi dan Operasi Vektor
2. Perkalian titik dan Proyeksi Ortogonal
3. Perkalian silang dan Aplikasinya

Beberapa Aplikasi :

- Proses Grafika Komputer
- Kuantisasi pada proses kompresi
- Least Square pada Optimasi
- Dan lain-lain

Notasi dan Operasi

Vektor ➔ besaran yang mempunyai arah

Notasi vektor

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$$

Notasi **panjang vektor** $\bar{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$

adalah

$$\|\bar{c}\| = \sqrt{c_1^{\ 2} + c_2^{\ 2} + c_3^{\ 2}}$$

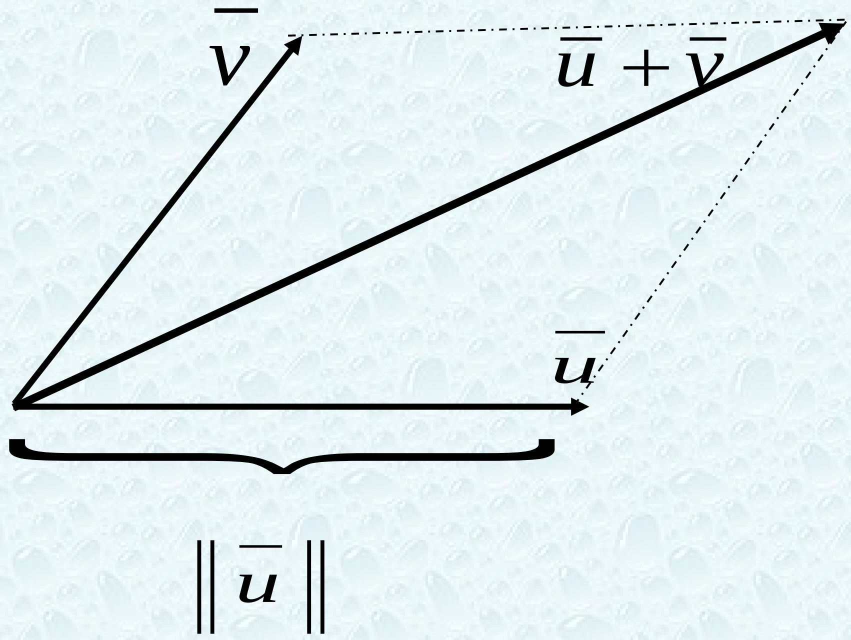
Vektor satuan ➔ Vektor dengan panjang atau norm sama dengan satu

Operasi Vektor meliputi :

1. Penjumlahan antar vektor (pada ruang yang sama)
2. Perkalian vektor
   (a) dengan skalar
   (b) dengan vektor lain
   - Hasil kali titik (*Dot Product*)
   - Hasil kali silang (*Cross Product*)

Penjumlahan Vektor

Misalkan $\bar{u}$ dan $\bar{v}$ adalah vektor – vektor yang berada di ruang yang sama, maka vektor maka $\bar{u}+\bar{v}$ didefinisikan



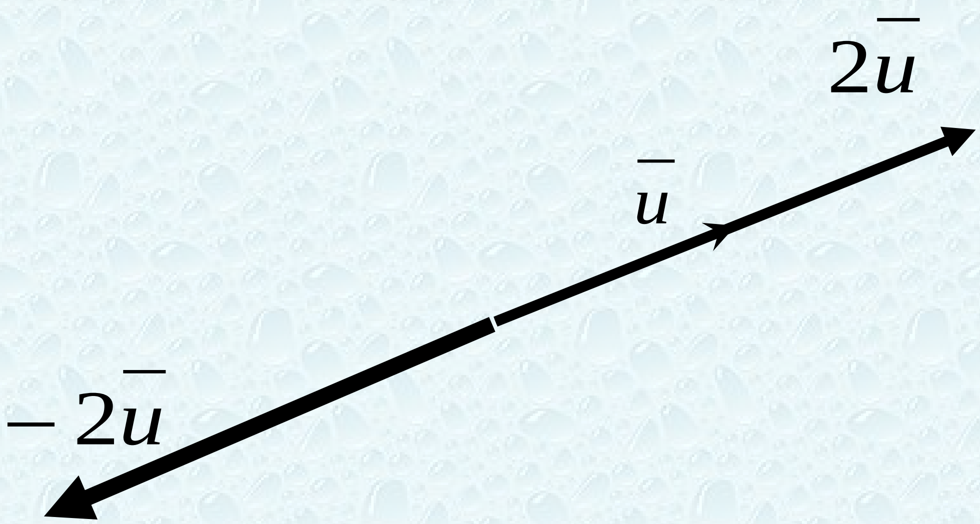
Perkalian vektor dengan skalar

Perkalian vektor $\bar{u}$ dengan skalar k, $\left(k\bar{u}\right)$

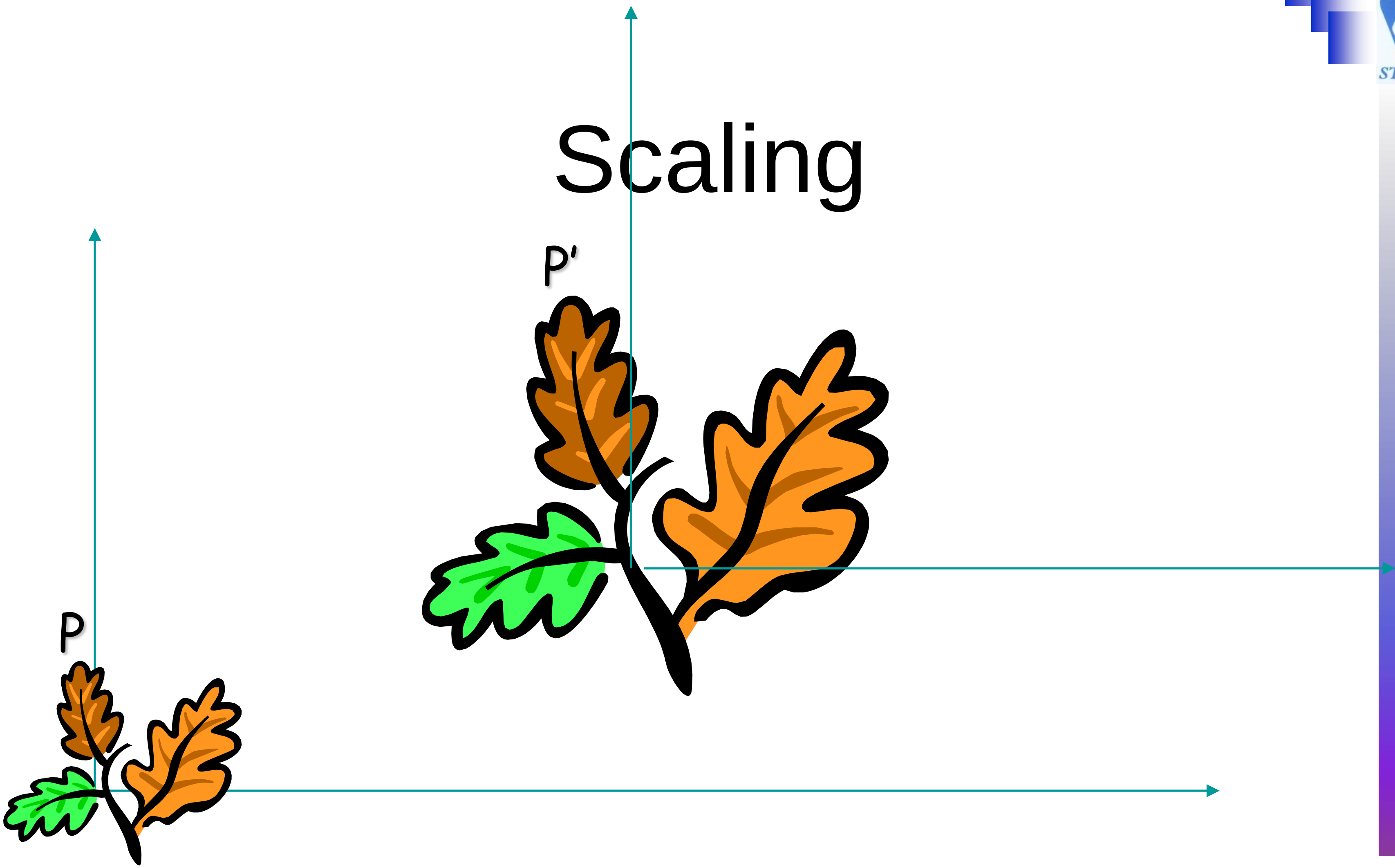
didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya k kali panjang vektor $\bar{u}$ dengan arah

Jika $k > 0$ → searah dengan $\bar{u}$

Jika $k < 0$ → berlawanan arah dengan $\bar{u}$



Scaling



Secara analitis, kedua operasi pada vektor diatas dapat dijelaskan sebagai berikut :

Misalkan $\overline{a} = (a_{11}\ a_2, a_3)$ dan $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$

adalah vektor-vektor di ruang yang sama

maka

1. $\overline{a} + \overline{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

2. $\overline{a} - \overline{b} = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

3. $k\ \overline{a} = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$

Perkalian antara dua vektor

- Hasil kali titik (*dot product*)
- Hasil kali silang (*cross product*)

Hasil kali titik (*dot product*)

➔ Hasil kali titik merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang yang sama** yang menghasilkan skalar

Hasil kali silang (*Cross product*)

➔ Hasil kali silang merupakan operasi antara dua buah vektor pada **ruang $\mathbf{R^3}$** yang menghasilkan vektor

Dot Product

Misalkan $\bar{a},\ \bar{b}$

adalah vektor pada ruang yang sama

maka hasil kali titik antara dua vektor :

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \left\| \bar{a} \right\| \left\| \bar{b} \right\| \cos\alpha$$

dimana

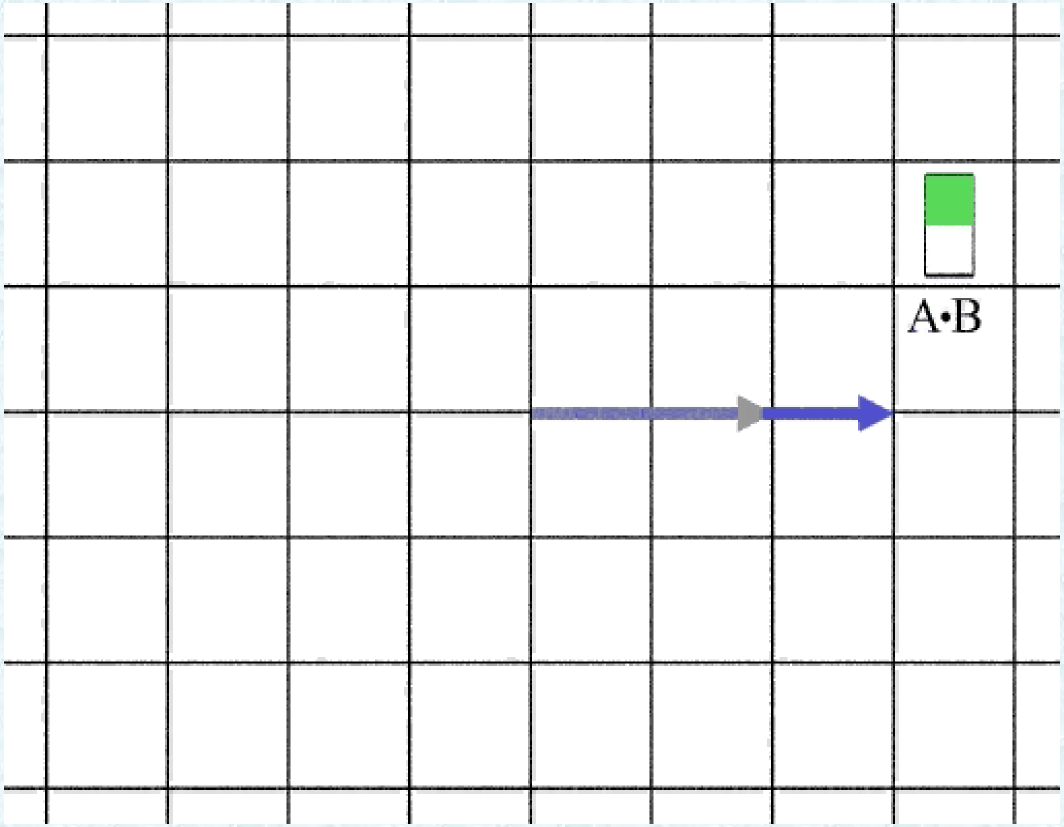
$\left\| \bar{a} \right\|$: panjang $\bar{a}$

$\left\| \bar{b} \right\|$: panjang $\bar{b}$

α : sudut keduanya

Ilustrasi dot product vektor A dan B

$$A \bullet B = \| A \| \| B \| \cos\alpha$$

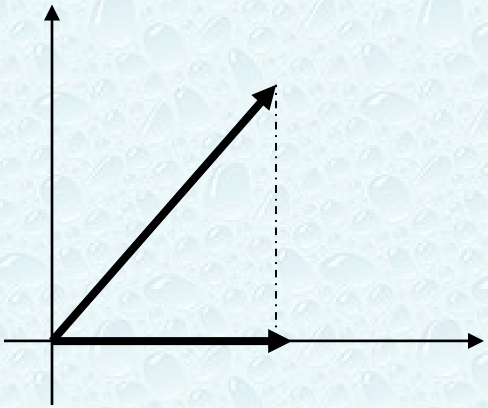


Contoh 2 :

Tentukan hasil kali titik dari dua vektor

$\bar{a} = 2\hat{i}$ dan $\bar{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$

Jawab :



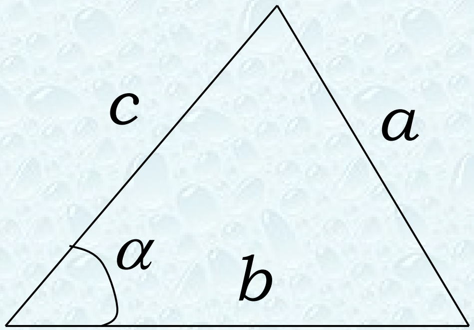
Karena tan α = 1 , artinya = 45^0

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \|\bar{a}\| \|\bar{b}\| \cos\alpha$$

$$= 2\sqrt{8}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

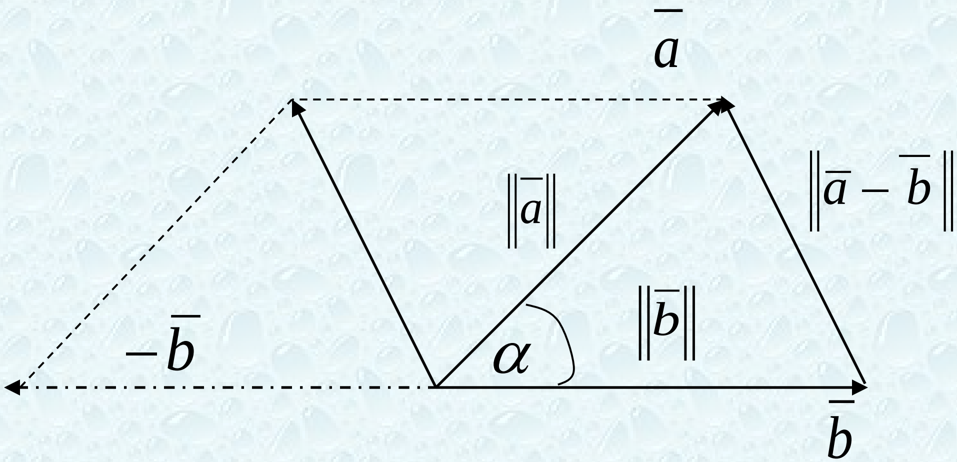
$$= 4$$

Ingat aturan cosinus



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha}$$

Perhatikan



$$\|\bar{a}-\bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - 2\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|\cos\alpha$$

Selanjutnya dapat ditulis

$$\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|\cos\theta = \tfrac{1}{2}\left[\|\bar{a}\|^2 + \|\bar{b}\|^2 - \|\bar{b} - \bar{a}\|^2\right]$$

Ingat bahwa :

1. $\bar{a} \bullet \bar{b} = \|\bar{a}\|\|\bar{b}\| \cos\alpha$

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

2. $\|\bar{a}\|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots a_n{}^2$

3. $\|\bar{b}\|^2 = b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2$

4. $\|\bar{b} - \bar{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \ldots + (b_n - a_n)^2$

$$= b_1{}^2 + b_2{}^2 + \ldots + b_n{}^2 + a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_n{}^2$$
$$- 2b_1 a_1 - 2b_n a_n - \ldots - 2b_n a_n$$

Perhatikan setiap sukunya, diperoleh hubungan :

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Tentukan kembali hasil kali titik dari dua vektor pada contoh sebelumnya

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

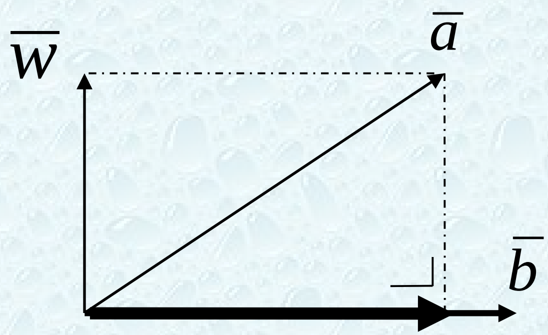
$= 2\ (2) + 0\ (2)$

$= 4$

Beberapa sifat hasilkali titik :

1. $\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{b} \bullet \bar{a}$
2. $\bar{a} \bullet \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \left(\bar{a} \bullet \bar{b}\right) + \left(\bar{a} \bullet \bar{c}\right)$
3. $k\left(\bar{a} \bullet \bar{b}\right) = k\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{a} \bullet k\bar{b}$, dimana $k \in R$

Proyeksi Ortogonal



$$\bar{c} = proy_{\bar{b}}\,\bar{a}$$

terlihat bahwa

$$\bar{c} = k\,\bar{b}$$

$$k = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|\bar{b}\|^2}$$

Karena

$$\bar{a} = \bar{w} + \bar{c} \quad \Longrightarrow \quad \bar{a} \bullet \bar{b} = (\bar{w} + \bar{c}) \bullet \bar{b}$$

$$= \bar{w} \bullet \bar{b} + \bar{c} \bullet \bar{b}$$

$$= k\bar{b} \bullet \bar{b}$$

$$= k\|\bar{b}\|$$

Jadi,

rumus proyeksi diperoleh :

$$\text{Proy}_{\bar{b}}\,\bar{a} = \frac{\bar{a} \bullet \bar{b}}{\|b\|^2}\,\bar{b}$$

Contoh 4 :

Tentukan proyeksi ortogonal

vektor $\bar{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

terhadap vektor $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Jawab :

$$\text{Proy}_{\bar{v}}\bar{w} = \frac{\bar{w} \bullet \bar{v}}{\|v\|^2}\bar{v}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}}{1^2 + 3^2 + (-4)^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-2 + (-12) + (-12)}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-26}{26}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Cross Product **(hasilkali silang)**

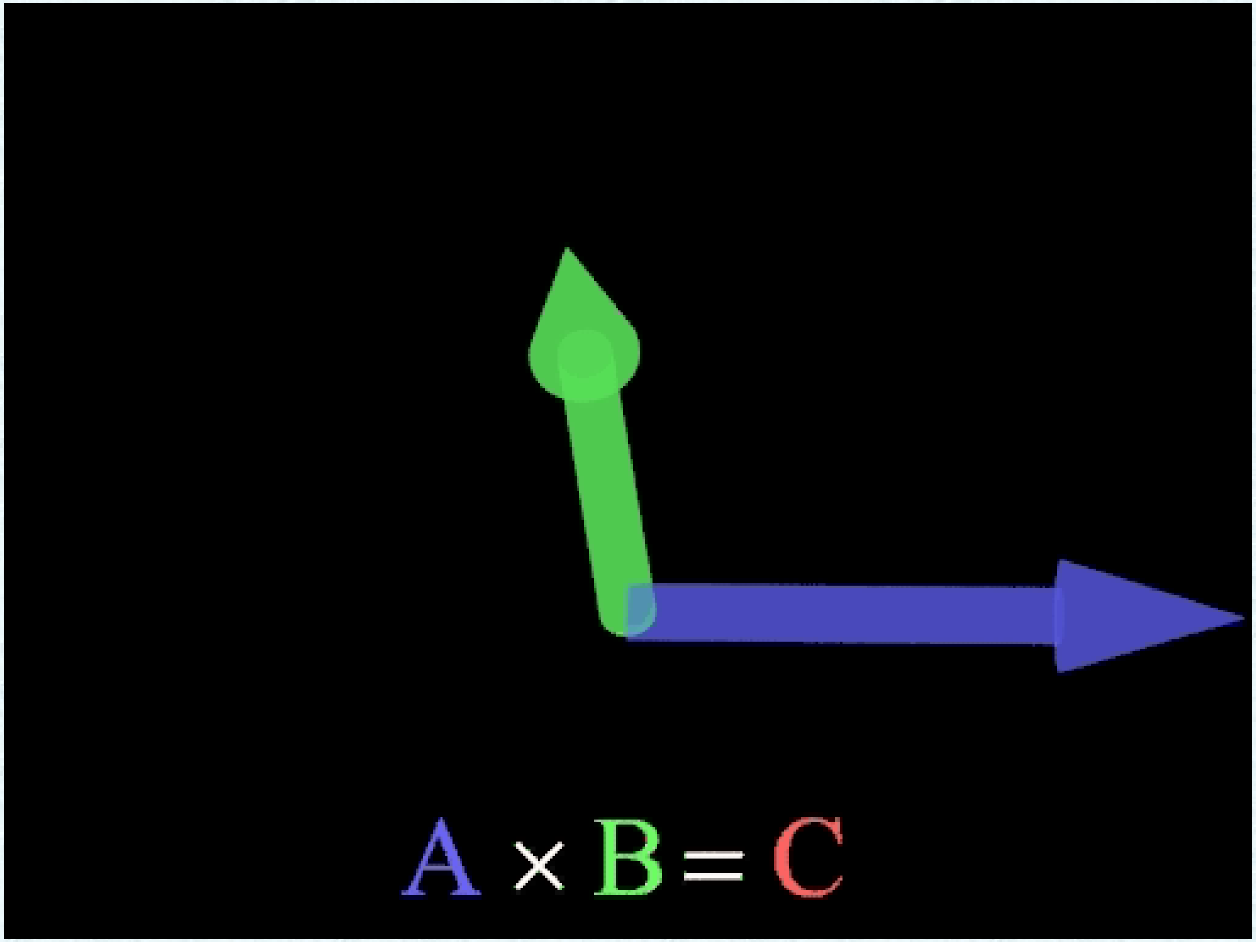
Hasil kali silang merupakan hasil kali antara dua vektor di Ruang (R^3) yang menghasilkan vektor yang tegak lurus terhadap kedua vektor yang dikalikan tersebut.

$$\overline{C} = \overline{A} \; x \; \overline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & B_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Ilustrasi *Cross Product* (hasilkali silang)

$$\overline{C} = \overline{A} \, x \, \overline{B}$$



Contoh :

Tentukan $\overline{w} = \overline{u} \times \overline{v}$,

dimana $\bar{u} = (1, 2, -2)$ $\bar{v} = (3,\ 0, 1)$

Jawab :

$$\overline{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2.1 - 0(-2))\,\hat{i} + (3(-2) - 1.1)\,\hat{j} + (1.0 - 3.2)\,\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}$$

Beberapa sifat Cross Product :

a. $\bar{u} \bullet \left(\bar{u} \ x \ \bar{v} \right) = 0$

b. $\bar{v} \bullet \left(\bar{u} \ x \ \bar{v} \right) = 0$

c. $\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \bullet \bar{v})^2$

Dari sifat ke-3 diperoleh

$$\|\bar{u} \times \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 \|\bar{v}\|^2 - (\bar{u} \bullet \bar{v})^2$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 - \left(\|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \cos\alpha\right)^2$$

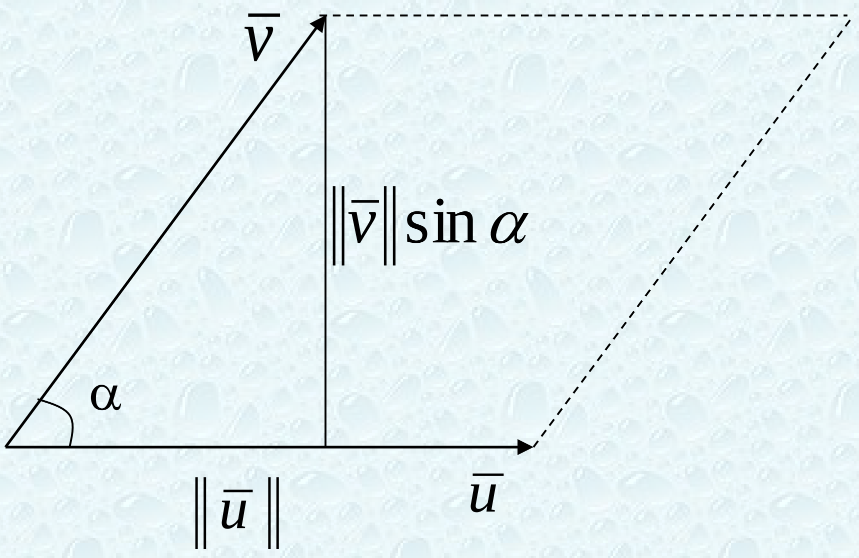
$$= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 - \left(\|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot \cos^2\alpha\right)$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \left(1 - \cos^2\alpha\right)$$

$$= \|\bar{u}\|^2 \cdot \|\bar{v}\|^2 \cdot \sin^2\alpha$$

$$\textit{Jadi,} \; \|\bar{u} \, x \, \bar{v}\| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \sin\alpha$$

Perhatikan ilustrasi berikut :



$$\text{Luas Jajaran Genjang} = \| \bar{u} \, x \, \bar{v} \| = \|\bar{u}\| \cdot \|\bar{v}\| \cdot \sin \alpha$$

Luas segitiga yang dibentuk oleh kedua vektor tersebut adalah

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \| \bar{u} \times \bar{v} \|$$

Contoh :

Diketahui titik-titik diruang (di R^3) adalah :

$A = (1, -1, -2)$

$B = (4, \ 1, \ 0)$

$C = (2, \ 3, \ 3)$

Dengan menggunakan hasilkali silang, tentukan luas segitiga ABC !

Jawab :

Tulis

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 1, 0) - (1, -1, -2)$$
$$= (3, 2, 2)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 3, 3) - (1, -1, -2)$$
$$= (1, 4, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\hat{i} - 13\hat{j} + 10\hat{k}$$

Luas segitiga ABC yang berimpit di A adalah

$$Luas = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

Orientasi pada titik B

$$\overrightarrow{BA} = \bar{a} - \bar{b} = (1,-1,-2) - (4,1,0) = (-3,-2,-2)$$

$$\overrightarrow{BC} = \bar{c} - \bar{b} = (2,3,3) - (4,1,0) = (-2,2,3)$$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 13\hat{k} - 10\hat{j}$$

Sehingga luas segitiga ABC yang berimpit di B adalah :

$$= \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BA} x \overrightarrow{BC}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 169 + 100}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

Latihan Bab 4

1. Tentukan cos sudut yang terbentuk oleh pasangan vektor berikut :

   a. $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

   b. $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ dan $\bar{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Tentukan proyeksi ortogonal vektor a terhadap vektor b dan tentukan panjang vektor proyeksi tersebut:

   a. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b. $\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dan $\bar{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tentukan dua buah vektor satuan yang tegak lurus terhadap

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Tentukan vektor yang tegak lurus terhadap vektor

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

5. Tentukan luas segitiga yang mempunyai titik sudut P (2, 0, –3), Q (1, 4, 5), dan R (7, 2, 9)