Aljabar Linear Elementer
MA1223
3 SKS

Silabus :

Bab I Matriks dan Operasinya
Bab II Determinan Matriks
Bab III Sistem Persamaan Linear
Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang
Bab V Ruang Vektor
Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam
Bab VII Transformasi Linear
Bab VIII Ruang Eigen

VII Transformasi Linear

Sub pokok Bahasan

- Definisi Transformasi Linear
- Matriks Transformasi
- Kernel dan Jangkauan

Beberapa Aplikasi Transformasi Linear

- Grafika Komputer
- Penyederhanaan Model Matematis
- dan lain lain

Transformasi Linear

Misalkan V dan W adalah ruang vektor, T : V → W dinamakan transformasi linear, jika

untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in V$ dan $\alpha \in R$ berlaku :

1. $T\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = T\left(\bar{a}\right) + T\left(\bar{b}\right)$

2. $T\left(\alpha\, \bar{a}\right) = \alpha T\left(\bar{a}\right)$

Jika V = W maka T dinamakan operator linear

Contoh :

Tunjukan bahwa T : $R^2 \rightarrow R^3$, dimana

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Rumus Transformasi

merupakan tranformasi linear.

Jawab :

Ambil unsur sembarang di R^2,

Misalkan

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in R^2$$

(i) Akan ditunjukan bahwa

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$$

$$T(\bar{u}+\bar{v}) = T\left[\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ -(u_1+v_1) \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)-(u_2+v_2) \\ -u_1-v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1-u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1-v_2 \\ -v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Terbukti bahwa $T(\bar{u}+\bar{v}) = T(\bar{u}) + T(\bar{v})$

(ii) Ambil unsur sembarang $\bar{u} \in R^2$ dan $\alpha \in R$

$$\mathrm{T}(\alpha\bar{u}) = \mathrm{T}\left[\begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha u_1 - \alpha u_2 \\ -\alpha u_1 \\ \alpha u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(-u_1) \\ \alpha(u_2) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ -u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T(\bar{u})$$

Jadi, T merupakan transformasi linear.

Contoh 2 :

Misalkan T merupakan suatu transformasi dari M_{2x2} ke R yang didefinisikan oleh $T(A) = det\,(A)$, untuk setiap $A \in M_{2x2}$, Apakah T merupakan Transformasi linier.

Jawab :

Misalkan $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in M_{2x2}$

maka untuk setiap $\alpha \in$ R berlaku

det (αA) = $\det\begin{pmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 \\ \alpha a_3 & \alpha a_4 \end{pmatrix}$

$$= \alpha^2(a_1a_2 - a_3a_4) = \alpha^2 \det(A)$$

Perhatikan bahwa $det(\alpha A) \neq \alpha\, det(A)$

Jadi T bukan transformasi linier.

Contoh 3 :

Diketahui T : P2 (Polinom orde-2) → R2, dimana

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$$

a. Apakah T merupakan transformasi linear

b. Tentukan $T(1 + x + x^2)$

Jawab :

a.(i) Ambil unsur sembarang P_2,

$$\bar{u} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 \qquad \bar{v} = v_1 + v_2 x + v_3 x^2$$

Sehingga

$$\bar{u} + \bar{v} = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3 + v_3)x^2$$

Perhatikan bahwa

$$T(\bar{u} + \bar{v}) = T\left((u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)x + (u_3 + v_3)x^2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) - (u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) - (u_3 + v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \\ (u_1 - u_3) + (v_1 - v_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_3 \end{pmatrix}$$

$$= T\left(u_1 + u_2 x + u_3 x^2\right) + T\left(v_1 + v_2 x + v_3 x^2\right)$$

Ambil unsur sembarang P2, $\bar{u} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2$

dan $\alpha \in$ R, sehingga

$$T(\alpha\,\bar{u}) = T\left(\alpha\, u_1 + \alpha u_2\, x + \alpha u_3 x^2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha u_1 - \alpha u_2) \\ (\alpha u_1 - \alpha u_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(u_1 - u_2) \\ \alpha(u_1 - u_3) \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ u_1 - u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha T\left(u_1 + u_2 x + u_3 x^2\right)$$

Jadi, T merupakan transformasi linear

b. $T(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Suatu transformasi linear $T : V \rightarrow W$ dapat direpresentasikan dalam bentuk :

$T\left(\bar{u}\right) = A\bar{u}$ untuk setiap $\bar{u} \in V$.

➔ A dinamakan matriks transformasi dari T.

Contoh :

Misalkan, suatu transformasi linear $T : R^2 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh :

$$\mathrm{T}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix}$$

Jawab :

Perhatikan bahwa

$$T\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x-y \\ -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi untuk $T : R^2 \rightarrow R^3$ adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jika $T : R^n \rightarrow R^m$ merupakan transformasi linear maka ukuran matriks transformasi adalah **m x n**

Misalkan

$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ basis bagi ruang vektor V dan

$T : R^2 \rightarrow R^3$ merupakan transformasi linear

dimana

$T(\bar{v}_i) = (\bar{u}_i)$ untuk setiap i = 1,2.

Matriks transformasinya dapat ditentukan dengan cara :

Tulis :

R^2

$$T(\bar{v}_1) = A\bar{v}_1 = \bar{u}_1$$

$$T(\bar{v}_2) = A\bar{v}_2 = \bar{u}_2$$

Sehingga

$$A_{3x2}\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2\end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix}\bar{u}_1 & \bar{u}_2\end{bmatrix}_{3x2}$$

$\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2\end{bmatrix}$ basis bagi V maka ia punya invers

Jadi

$$A = \begin{bmatrix}\bar{u}_1 & \bar{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{v}_1 & \bar{v}_2\end{bmatrix}^{-1}$$

Contoh 3 :

Misalkan

$$\left\{ \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ adalah basis bagi R^3

$T : R^3 \rightarrow P_1$ Transformasi linear didefinisikan

$T(\bar{v}_i) = A\bar{v}_i = p_i$ untuk setiap i = 1,2,3.

Jika

$$p_1 = 1 - x; \quad p_2 = 1; \quad p_3 = 2x$$

Tentukan :

Matrix transformasi dan $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$

Jawab :

Definisikan :

$$p1 = [1 - x]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad p_2 = [1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad p_3 = [2x]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Karena

$$\mathrm{A}\bar{v}_i = p_i, \quad \forall_i = 1,2,3$$

Maka

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

atau

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

invers matriks dicari dengan OBE :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sehingga

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi matriks transformasi T adalah $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Sementara itu,

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

ingat bahwa $\left[\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right]_B = -1 + x$

jadi

$$T\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right] = (-1 + x)$$

Contoh 4 :

Diketahui basis dari polinom orde dua adalah

$$\left\{ 1 + x, \ \ -x + x^2, \ 1 + x - x^2 \right\}$$

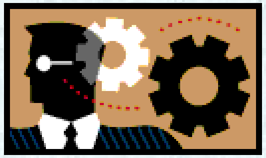
Jika T : P_2 → R^3 adalah transformasi linear dimana

$$T\left[1 + x\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T\left[-x + x^2\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\left[1 + x - x^2\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tentukan

$$T\left(1 - x + x^2\right)$$

Gunakan
Definisi
Membangun



Jawab :

Perhatikan bahwa

himpunan 3 polinom tersebut adalah basis bagi polinom orde 2

maka polinom tersebut ditulis nejadi :

$$1 - x + x^2 = k_1\,(1 + x) + k_2(-x + x^2) + k_3(1 + x - x^2)$$

Samakan suku-suku sejenis

sehingga diperoleh SPL

$$k_1 + k_3 = 1$$

$$k_1 - k_2 + k_3 = -1$$

$$k_2 - k_3 = 1$$

dengan solusi $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, dan $k_3 = 1$.

Jadi kombinasi linear diatas berbentuk :

$$1 - x + x^2 = 0\left(1 + x\right) + 2\left(-x + x^2\right) + 1\left(1 + x - x^2\right)$$

atau

$$T\left(1 - x + x^2\right) = T\left(0\left(1 + x\right) + 2\left(-x + x^2\right) + 1\left(1 + x - x^2\right)\right)$$

Karena transformasi T bersifat linear maka :

$$T\left(1 - x + x^2\right) = 0T\left(1 + x\right) + 2T\left(-x + x^2\right) + T\left(1 + x - x^2\right)$$

$$= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kernel dan Jangkauan

Misalkan T : V → W merupakan transformasi linear

Semua unsur di V yang dipetakan ke vektor nol di W dinamakan kernel T

notasi $ker(T)$.

atau

$$Ker(T) = \left\{ \bar{u} \in V \mid T(\bar{u}) = \bar{0} \right\}$$

Contoh 5 :

Trans. Linear T : $P_2 \rightarrow R^2$ $\quad T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a - b \\ a - c \end{pmatrix}$

Perhatikan bahwa $T(1 + x + x^2) = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

maka $1 + x + x^2 \in Ker(T)$

Sementara itu, $1+2x+x^2 \notin Ker(T)$

karena $T(1+2x+x^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \bar{0}$

Jelas bahwa vektor nol pada daerah asal transformasi merupakan unsur kernel T.
Tetapi, tak semua transformasi linear mempunyai vektor tak nol sebagai unsur kernel T.

Teorema :

Jika T : V → W adalah transformasi linear maka *Ker* (*T*) merupakan subruang dari V

Bukti :

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in Ker\,(T)$ sembarang dan $\alpha \in$ Riil

1. Karena setiap $\bar{a} \in Ker(T)$

artinya setiap $\bar{a} \in V$ sehingga $T(\bar{a}) = \bar{0}$

maka Ker(T) $\subseteq$ V

2. Perhatikan bahwa $\bar{0} \in Ker\,(T)$

artinya setiap $T\,(\bar{0}) = A\bar{0} = \bar{0}$

oleh karena itu Ker(T) $\neq \{\,\}$

3. Karena $\bar{a}, \bar{b} \in Ker\,(T)$ dan Ker(T) $\subseteq$ V

Ingat bahwa V mrp ruang vektor, sehingga berlaku

$$\bar{a} + \bar{b} \in V$$

akibatnya $T(\bar{a} + \bar{b}) = T\bar{a} + T\bar{b} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$

Jadi

$$\bar{a} + \bar{b} \in \ker(T)$$

4. Karena $\bar{a} \in Ker(T)$ maka $\bar{a} \in V$

karena V adalah ruang vektor

maka untuk setiap $\alpha \in$ Riil berlaku :

$$T\left(\alpha\ \bar{a}\right) = \alpha\, T\left(\bar{a}\right) = \alpha\ \bar{0} = \bar{0}$$

Jadi,

$$\alpha\,\bar{a} \in Ker(T)$$

Dengan demikian, terbukti bahwa

Jika T : V → W adalah transformasi linear maka $Ker(T)$ merupakan **subruang** dari ruang vektor V

Karena $Ker(T)$ merupakan subruang

➔ Basis Ker(T).

Contoh 6 :

Diketahui Transformasi linear $T : R^3 \rightarrow P_2$ dengan

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = (a+b) + (2a-c)x + (2a+b+c)x^2$$

Tentukan basis dan dimensi Ker(T) dan R(T)

Jawab :

Perhatikan bahwa :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = (a+b) + (2a-c)x + (2a+b+c)x^2 = 0$$

Ini memberikan

$$\begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehingga

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ 2b-c \\ 2a+b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Jadi, matriks transformasi bagi T adalah

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan melakukan OBE pada matriks tersebut :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan demikian, Basis ker(T) = { }

dan nulitasnya adalah nol.

Perhatikan hasil OBE

maka basis ruang kolom dari matriks A adalah :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

oleh karena itu, basis jangkauan dari T adalah :

$$\left\{ 1 + 2x^2 \quad , \quad 1 + 2x + x^2 \quad , \quad -x + x^2 \right\}$$

sehingga *rank* (dimensi basis R(t)) = 3

Contoh 7 :

Diketahui transformasi linear T : $R^4 \rightarrow R^3$

didefinisikan oleh :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

Tentukan basis kernel dari T dan nulitasnya

Jawab :

$$T\left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

Jadi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Basis Ker(T) dan Nulitasnya?

Ker(T) adalah ruang solusi dari

$$T(\bar{v}) = A(\bar{v}) = \bar{0}, \ \forall \bar{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in R^4$$

Dengan OBE

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ker(T) = ruang solusi dari $A\bar{v} = \bar{0}$

yaitu

$$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} t \ , s, t \neq 0 \right\}$$

Jadi Basis Ker(T) adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Nulitas = Dimensi dari Ker(T) = 2

Latihan

1. Suatu transformasi T : $\Re^3 \rightarrow \Re^2$

   didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b \\ a+c \end{pmatrix}$$

   Periksa apakah T merupakan transformasi linear

2. Jika suatu transformansi $T : P_1 \rightarrow P_2$ diberikan oleh :

   $T[2+x] = 4 - x + x^2$ dan $T[1+3x] = 7 + 2x - 2x^2$

   Tentukan $T[3-x]$

(Untuk no. 3 – 5)

Suatu transformasi linear, T :$R^2 \rightarrow R^3$

Yang diilustrasikan sebagai berikut :

$$T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad T\left[\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Tentukan matriks transformasi dari T !
4. Tentukan hasil transformasi, $T\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$
5. Tentukan basis kernel dan jangkauan dari T !

6. Tentukan *rank* dan *nulitas* matriks Transformasi :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Misalkan T : $\Re^3 \rightarrow \Re^2$ didefinisikan oleh

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b \\ a + c \end{pmatrix}$$

Tentukan basis Ker(T) dan basis R(T) beserta dimensinya !