

$$1. \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = K_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + K_3 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$K_1 + 4K_3 = 6$$

$$2K_1 + K_2 - 2K_3 = 3$$

$$-K_1 + 2K_2 = 0$$

$$3K_1 + 4K_2 - 2K_3 = 8$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2b_1 + b_2 \\ b_1 + b_3 \\ -3b_1 + b_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & -14 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-2b_2 + b_3 \\ -4b_2 + b_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/24 b_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-4b_3 + b_1 \\ 10b_3 + b_2 \\ -26b_3 + b_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} K_1 = 2 \\ K_2 = 1 \\ K_3 = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ kombinasi linear dari } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$2. (a) \{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$$

$$K_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + K_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_3 \leftrightarrow b_1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-6b_1 + b_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{4b_2 + b_1 \\ -30b_2 + b_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = 0 \quad \text{Det } |a| = 0$$

$$K_2 = 0$$

\rightarrow Sehingga, solusi tunggal $K_1 = 0$ & $K_2 = 0$
& himpunan a disebut bebas linear.

$$2. (b) \{1 + 3x + 3x^2, x + 4x^2, 5 + 6x + 3x^2, 7 + 2x - x^2\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 & | & 0 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & | & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-3b_1 + b_2 \\ -3b_1 + b_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & | & 0 \\ 0 & 4 & -12 & -22 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4b_2 + b_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & | & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 54 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{1/24 b_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 7 & | & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{-7b_3 + b_1 \\ -9b_3 + b_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/4 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{K_1 - 17/4 K_4 = 0 \\ K_2 + 5/4 K_4 = 0 \\ K_3 + 9/4 K_4 = 0}}$$

$$K_1 = 17/4 K_4$$

$$K_2 = -5/4 K_4$$

$$K_3 = -9/4 K_4$$

$$\text{SPL } \begin{bmatrix} 17/4 \\ -5/4 \\ -9/4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Himpunan bergantung pada linear.}$$

3) Apakah himpunan $A = \{6 - x^2, 6 + x + 4x^2\}$ membangun polinom ordo 2? $\textcircled{b} \{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2\}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 6 & 1 & u_1 \\ 0 & 1 & 1 & u_2 \\ -1 & 4 & 1 & u_3 \end{array} \right] \xrightarrow{-b_3 \leftrightarrow b_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & u_3 \\ 0 & 1 & 1 & u_2 \\ 6 & 6 & 1 & u_1 \end{array} \right] \xrightarrow{-6b_1 + b_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & u_3 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 30 & 6u_3 + u_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4b_3 + b_1 \\ \\ -30b_2 + b_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4u_2 - u_3 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 6u_3 + u_1 - 30u_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} k_1 = 4u_2 - u_3 \\ k_2 = u_2 \\ 0 = 6u_3 + u_1 - 30u_2 \end{array}$$

→ Diporeh SPL $6u_3 + u_1 - 30u_2 = 0$.

Maka nilai U_1, U_2, U_3 tidak konsisten.
 Sehingga himpunan A tidak memba-
 ngun polinomial orde 2.

14] Periksa apakah himpunan berikut merupakan basis bagi polinom orde 2 (P_2)

② $\{4 + 6x + x^2, -1 + 4x + 2x^2, 5 + 2x - x^2\}$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -16 - 2 + 60 & -20 - \\ 16 - 6 & \end{matrix} \\ = 0$$

$$\rightarrow |2| = 0$$

Apabila $\det. \text{koef} = 0$ maka himpunan \vec{a} tidak membangun polinom orde 2 & \vec{a} bergantung pada linear.

Jadi \vec{a} bukan basis bagi polinom
orde 2.

⑦ $\{-4 + x + 3x^2, 6 + 5x + 2x^2, 8 + 4x + x^2\}$

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 & | & -4 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & | & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & | & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -20 + 72 + 16 - \\ 120 + 32 - 6 \\ = -26 \end{matrix}$$

$$\rightarrow |b| = -26$$

Apabila $|b| \neq 0$. Solusi tunggal a, b,
maka b dapat membangun polinom
orde 2.

Diperoleh SPL homogen punya solusi tunggal sehingga b adalah bebas linear.

Jadi himp. \vec{b} merupakan basis bagi polinom orde 2

5. $J = \{a + bx + cx^2 \mid a^2 = b^2 + c^2\}$

ialah himpunan bagian dari ruang vektor polinom ordo 2. Periksa apakah J merupakan sub ruang dari vektor polinom ordo 2

$$\vec{0} = 0 + 0x + 0x^2 \quad \{ \rightarrow \neq \{ \} \}$$

→ J C R

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rightarrow a_0^2, a_1^2 + a_2^2 \\ b &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \rightarrow b_0^2, b_1^2 + b_2^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + b &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2 \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \\ &= a_0^2 + b_0^2 + 2a_0b_0 + a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 \\ &\quad + a_2^2 + b_2^2 + 2a_2b_2 \end{aligned}$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + b_1 + b_2)^2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_2 \neq (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) + 2a_1b_1 + 2a_2b_2$$

$$= a + b \neq 1$$

→ J tidak termasuk sub ruang & tidak termasuk basis.

6. SPL homogen $p + 2q + 3r = 0$

$$p + 2q - 3r = 0$$

$$p + 2q + 3r = 0$$

Tent. basis ruang solusi & dimensinya

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 1 & 2 & -3 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -b_1 + b_2 \\ -b_1 + b_3 \\ -b_1 + b_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & -6 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} -\frac{1}{6} b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} -3b_2 + b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} p + 2q = 0 \\ r = 0 \\ q = t \end{matrix}$$

$$\rightarrow p = -2q$$

$$p = -2t$$

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t$$

\rightarrow Jadi, ruang solusi dari SPL adalah

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ & dimensinya adalah } 1.$$

7. Tent. rank dari matriks :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} b_2 \leftrightarrow b_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} b_1 + b_2 \\ -b_1 + b_2 \\ -b_1 + b_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3b_2 + b_1 \\ -b_2 + b_3 \\ -b_2 + b_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensi baris ruang kolom / ranknya
2

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} -b_1 \\ -2b_1 + b_2 \\ b_1 + b_3 \\ -b_1 + b_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_3 \leftrightarrow b_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} b_2 + b_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dimensi baris
ruang baris ranknya
2

\rightarrow Jadi rank tsb diperoleh sebesar 2.