

# **Variabel Kompleks (VARKOM)**

**Pertemuan 2 : Operasi Aritmatika pada  
Bilangan Kompleks**

**Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT**

**Versi 02: Agustus 2018**

# Tujuan Perkuliahan

Fokus pada materi perkuliahan ini adalah **operasi aritmatika** pada bilangan kompleks. Materi yang akan dipelajari:

- 1 Mempelajari sifat-sifat bilangan kompleks.
- 2 Operasi Aritmatika pada Bilangan Kompleks pada koordinat kartesian
- 3 Sekawan dari bilangan kompleks
- 4 Latihan

# Daftar Isi

- ➊ Sifat dan Operasi
- ➋ Pengantar Bentuk Polar
- ➌ Penutup
- ➍ Latihan

## Operasi dasar

**1**  $i \times i = -1$

②  $-j \times j = 1$

**3**  $i/i = 1$

**4**  $i/(-i) = -1$

**5**  $i(1 + i) = \dots$

**6**  $i(1 + i) = \dots$

**7**  $-i(1 + i) = \dots$

**8**  $i(1 - i) = \dots$

**9**  $i(-1 - i) = \dots$

**10**  $-i(1 - i) = \dots$

**11**  $-i(-1 - i) = \dots$

**12**  $(1 + i)(1 + i) = \dots$

**13**  $(1 + i)(1 - i) = \dots$

**14**  $(1 + i)(-1 + i) = \dots$

**15**  $(1 - i)(-1 + i) = \dots$

**16**  $(1 - i)(1 - i) = \dots$

17 . . .

## Bagian Riil dan Imaginer dari bilangan kompleks

Suatu bilangan kompleks  $z = a + bi$

- 1 Bagian riil dari  $z$  adalah  $a$ , dinotasikan  $\text{Re}(z)$
- 2  $\text{Re}(z) = a$
- 3 Bagian imajiner dari  $z$  adalah  $b$ , dinotasikan  $\text{Im}(z)$
- 4  $\text{Im}(z) = b$
- 5  $z_1 = 2 + 3i$ , maka  $\text{Re}(z_1) = 2$ , dan  $\text{Im}(z_1) = 3$
- 6  $z_2 = -5 - 2i$ , maka  $\text{Re}(z_2) = \dots$ , dan  $\text{Im}(z_2) = \dots$

# Sifat dan Penjumlahan bilangan kompleks

Misalkan dua bilangan kompleks:

$$z_1 = a + b i \quad \text{dan} \quad z_2 = c + d i$$

- 1  $z_1 = 0$  jika dan hanya jika  $a = 0$  dan  $b = 0$
- 2  $z_1 = z_2$  jika dan hanya jika  $a = c$  dan  $b = d$ .

**Contoh:**

- $2 + 5i = \frac{4}{2} + \frac{10}{2}i$
  - $2 + 5i \neq 2 + 4i$
- 3 Jika  $z_1 \neq z_2$  maka  $z_1$  tidak dapat dibandingkan lebih besar atau lebih kecil dari  $z_2$ .

**Contoh**

- $1 + i$  tidak dapat dikatakan lebih kecil dari  $2 + 2i$
- $1 + i$  tidak dapat dikatakan lebih besar dari  $-1 - i$

# Penjumlahan bilangan kompleks

❶  $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Contoh:  $(2 + 5i) + (8 - 3i) = (2 + 8) + (5 + (-3))i$

❷  $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  (komutatif)

❸  $z_3 = 2 + 3i$  dan  $z_4 = -5 + 4i$ , maka  $z_3 + z_4 = \dots$

❹  $z_5 = -3 - 2i$ ,  $z_6 = -3 - 2i$ ,  $z_7 = 12 - 4i$ , maka  
 $z_5 + z_6 + z_7 = \dots$

## Perkalian bilangan kompleks dengan skalar

➊ Jika  $z_1 = (a + bi)$ , maka  $kz_1 = k(a + bi) = ka + kbi$

➋ Contoh :  $z_1 = 2 + 5i$ ,  $k = 2$ , maka

$$kz_1 = 2(2 + 5i) = 4 + 10i$$

➌  $-10(2 - 4i) = \dots$

➍  $-3i(2 - 4i) = \dots$



# Operasi Penjumlahan Komposit

Operasi penjumlahan komposit melibatkan perkalian skalar dan penjumlahan.

❶ Jika  $z_1 = 2 + 5i$ ,  $z_2 = 1 - 2i$ ,  $k_1 = 2$  dan  $k_2 = 3$ , maka  
 $k_1 z_1 + k_2 z_2 = \dots$

❷ Sederhanakan :  $2(3 - 4i) - 5(-3 - i) = \dots$

❸ Sederhanakan :  $2(3 - 4i) - 5i(-3 - i) = \dots$

## Perkalian dua bilangan kompleks

Asumsi:  $z_1 = a + bi$  dan  $z_2 = c + di$

❶  $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

❷ Jika  $z_1 = 1 + 2i$  dan  $z_2 = 3 + 5i$ , maka

$$z_1 z_2 = (1 + 2i)(3 + 5i) = (3 - 10) + (5 + 6)i = -7 + 11i$$

❸  $(1 - 2i)(-3 - 4i) = \dots$

❹  $z_1 z_2 = z_2 z_1$

❺  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

❻  $z_1 z_2 z_3 = (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

# Sekawan kompleks

- 1 Sekawan dari  $z = a + bi$  adalah  $\bar{z} = a - bi$
- 2 Sekawan dari  $2 + 5i$  adalah  $2 - 5i$
- 3 Sekawan dari  $-2 - 5i$  adalah  $\dots$
- 4 Sekawan dari  $1 - \sqrt{3}i$  adalah  $\dots$
- 5 **Penjumlahan** bilangan kompleks dengan sekawannya menghasilkan **bilangan riil**
- 6 **Perkalian** bilangan kompleks dengan sekawannya adalah **bilangan riil**

## Sekawan kompleks

Pada bidang penjumlahan:

❶ Jika  $z = a + bi$ , maka  $z + \bar{z} = 2a = 2\text{Re}(z)$

❷ Dengan demikian:

$$\text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$

❸ Jika  $z = a + bi$ , maka  $z - \bar{z} = 2bi = 2\text{Im}(z)i$

❹ Dengan demikian:

$$\text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

❺  $z = 3 + 4i$ , maka  $z + \bar{z} = \dots$

❻ Jika  $z + 2\bar{z} = 9 + 10i$ , maka  $z = \dots$

# Sekawan kompleks

Pada bidang perkalian:

- 1 Jika  $z_1 = a + bi$ , maka  $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = (a^2 + b^2)$
- 2  $z = 10 + 9i$ , maka  $z\bar{z} = \dots$
- 3 Jika  $z\bar{z} = 12$ , dapatkah  $z$  ditentukan?
- 4 Jika  $z\bar{z} = 12$  dan  $z + \bar{z} = 6$ , maka  $z = \dots$

# Sekawan kompleks

Beberapa catatan terkait sekawan

- 1 Pada penjumlahan :  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- 2 Pada perkalian:  $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$
- 3 Sekawan kompleks diperlukan pada proses pembagian, seperti slide berikutnya.

## Pembagian dua Bilangan Kompleks

- 1 Jika  $z_1 = a + bi$  dan  $z_2 = c + di$ , maka  $\frac{z_1}{z_2}$  menyatakan pembagian bilangan kompleks
- 2 pembilang  $z_1$  dan penyebut  $z_2$
- 3 penyebut dikalikan sekawannya

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{?}{\overline{z_2}}$$

- 4 Agar nilai semula tidak berubah, maka pembilang juga harus dikalikan dengan bilangan yang sama:

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

- 5 Sekarang pembilang bernilai riil dan pembagian dapat dilakukan

## Pembagian dua Bilangan Kompleks

- ❶ Jika  $z_1 = 1 + 2i$  dan  $z_2 = 2 + 3i$ , maka

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 + 3i} = \frac{1 + 2i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{(2 + 6) + (-3 + 4)i}{2^2 + 3^2} = \frac{8}{13} + \frac{1}{13}i$$

- ❷ Jika  $z_3 = -1 + 2i$  dan  $z_4 = -2 - 5i$ , maka

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{-1 + 2i}{-2 - 5i} = \dots$$

- ❸ Hitung :

$$\frac{(1 + 2i)}{(1 + i)(2 + i)} = \dots$$



## Pengantar ke bentuk polar

Perkalian dan pembagian pada bilangan kompleks dapat menjadi perhitungan yang berat:

❶ Hitung :

$$(1 + i)(2 + 5i)(-3 - 5i)(4 + 11i)$$

❷ Hitung :

$$\frac{(3 + i)(-2 + i)}{(2 + 5i)(4 - 11i)} = \dots$$

❸ Proses perkalian dan pembagian lebih mudah dilakukan pada bentuk representasi polar dipelajari pada materi pertemuan berikutnya

# Penutup

- 1 Pada bagian ini telah bahas tentang operasi aritmatika pada bilangan kompleks pada representasi Kartesian
- 2 Bilangan kompleks spesial yakni kompleks sekawan telah dibahas
- 3 Menghitung perkalian dan pembagian lebih sulit pada representasi kartesian
- 4 Materi selanjutnya membahas representasi polar
- 5 Siapkan **kalkulator** sebagai alat bantu

## Latihan 2

- ➊ Sekawan dari  $5(2 + i)$  adalah  $\dots$
- ➋ Bagian riil dan imajiner dari  $(2 + i)(-5 - i)$  adalah  $\dots$
- ➌ Bagian riil dan imajiner dari  $\frac{2}{2-i}$  adalah  $\dots$
- ➍ jika  $z_1 = 4 + 2i$  dan  $z_2 = -3 + i$ , maka hitung
  - ➊  $z_1 z_2$
  - ➋  $z_1(z_2 - 2z_1)$
  - ➌  $(z_1 + z_2)^2$
  - ➍  $\frac{z_1}{z_1 + z_2}$
- ➎ Jika  $z\bar{z} = 10$  dan  $z + \bar{z} = 2$ , maka  $z = \dots$