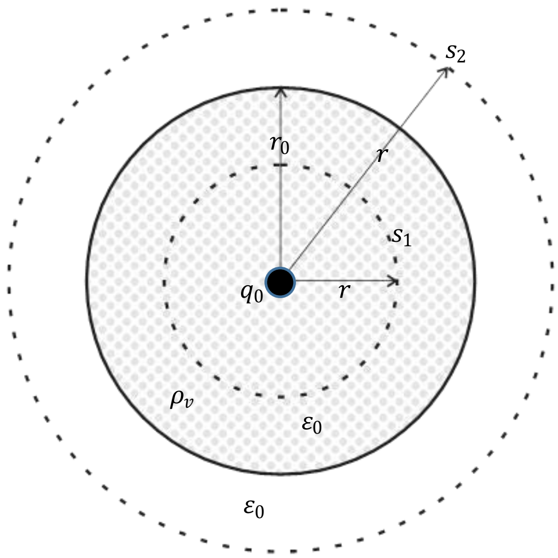
**Soal 1.**

**Persamaan Maxwell Integral 1: Hukum Gauss Listrik**

Sebuah bola bermuatan di titik pusak sebesar $q_0 = 13\ C$. Terdapat rapat muatan di wilayah bola berjari jari $r_0$. Bola tersebut memiliki rapat muatan $\rho_v = 1\ C/m^3$. Tentukan medan listrik di dalam bola ($s_1$) dan di di luar bola $s_2$!




Jawab:

Di wilayah $s_1$ berlaku

$$Q = \iiint \rho_v dV + q_0.$$

Untuk koordinator bola

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

sehingga rapat muatan

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} 1 r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi + q_0$$

$$Q = \int_0^{r} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi + 13$$

$$Q = \left[\frac{1}{3} r^3\right]_{r=0}^{r} [-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi} [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} + 13$$

$$Q = \frac{1}{3} r^3 (2)(2\pi) + 13$$

$$Q = \frac{4\pi r^3}{3} + 13.$$

Dievaluasi menggunakan Hukum Gauss Listrik

$$\oint_{s_1} \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{4\pi r^3}{3} + 13.$$

Untuk koordinat bola berlaku

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi \vec{a}_r$$

sehingga

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon 0\vec{E}\cdot\ r^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi a\ r\ r\ = \frac{4\pi r^3}{3} + 13$$

$$(E^{\to}\ \cdot\ a\ r)\ \varepsilon 0 r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta\ = \frac{4\pi r^3}{3} + 13$$

$$(E^{\to}\ \cdot\ a\ r)\ \varepsilon 0 r^2 [\varphi] 2\varphi\pi = 0[-\cos\theta]\pi\theta = 0\ = \frac{4\pi r^3}{3} + 13$$

$$(\vec{E}\cdot\ a\ r)\varepsilon 0\, r^2(2\pi)(2) = \frac{4\pi r^3}{3} + 13$$

$$\vec{E}\cdot\ a\ r = \frac{r}{3\varepsilon 0} + \frac{13}{4\pi r^2 \varepsilon 0}$$

Maka persamaan medan listrik di dalam bola adalah

$$\vec{E} = \frac{r}{3\varepsilon 0} + \frac{13}{4\pi r^2 \varepsilon 0\ ar}$$

Sedangkan pada lingkup $s_2$ berlaku

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r0}^{r0} 1\ r^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi + q0$$

$$Q = \int_{r0}^{r0} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \int_{r0}^{r0} d\varphi + 13$$

$$Q = \frac{4\pi r0^3}{3} + 13$$

Dievaluasi

menggunakan Hukum Gauss Listrik

$$\oint \varepsilon 0 E^{\to}\ \cdot\ dS = \frac{4\pi r0^3}{3} + 13$$

Untuk koordinat bola berlaku

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi \vec{a}_r$$

sehingga

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0 \vec{E}\cdot r^2 \sin\theta\ d\theta d\varphi \vec{a}_r = \frac{4\pi r_0^3}{3} + 13$$

$$(\vec{E}\cdot\vec{a}_r)\ \varepsilon_0 r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta = \frac{4\pi r_0^3}{3} + 13$$

$$(\vec{E}\cdot\vec{a}_r)\ \varepsilon_0 r^2 [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} [-\cos\theta]_{\theta=0}^{\pi} = \frac{4\pi r_0^3}{3} + 13$$

$$(\vec{E}\cdot\vec{a}_r)\ \varepsilon_0 r^2 (2\pi)(2) = \frac{4\pi r_0^3}{3} + 13$$

$$(\vec{E}\cdot\vec{a}_r)\ 4\pi r^2 \varepsilon_0 = \frac{4\pi r_0^3}{3} + 13$$

Maka persamaan medan listrik di luar bola adalah

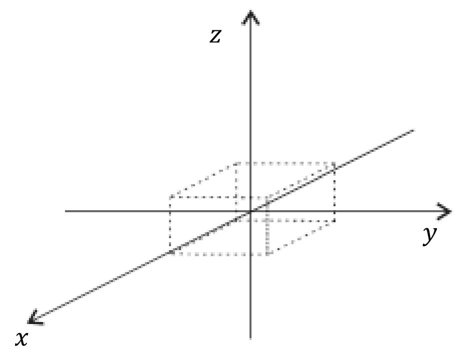
$$\vec{E} = 3\varepsilon_0 r_0^3 r^2 + 4\pi 13 r^2 \varepsilon_0 a_r.$$

**Soal 2.**

**Persamaan Maxwell 2: Hukum Gauss Magnet**
Medan magnet

$$\vec{H} = yza_x + xza_y + xya_z$$

menembus sebuah kubus dengan batas $-1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 2$. Tentukan fluks magnet pada tiap-tiap sisi kubus! Kemudian tentukan fluks magnet total pada kubus tersebut!




Jawab:

Pada masing-masing sisi kubus berlaku fluks magnet

$$\Phi_B = \iint_S \mu \vec{H} \cdot dS$$

untuk masing-masing $S$ sisi-sisi kubus. Terdapat enam sisi kubus, masing-masing menghadap sumbu $x$ positif, sumbu $x$ negatif, sumbu $y$ positif, sumbu $y$ negatif, sumbu $z$ positif, dan sumbu $z$ negatif, Fluks magnet pada sumbu $x$ positif

$$\Phi B1 = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{2} \mu \vec{H} \cdot \ dy\, dz\, ax$$

$$\Phi B1 = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{2} \mu(yza\,x + xza\,y + xya\,z) \cdot \ dy\, dz\, ax$$

$$\Phi B1 = \mu \int_{-1}^{2} ydy \int_{-1}^{2} zdz$$

$$\Phi B1 = 9\mu$$

Fluks magneti pada sumbu $x$ negatif

$$\Phi B2 = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} \mu\vec{H}\cdot\ dy\,dz\,(-ax)$$

$$\Phi B2 = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} \mu(yza\,x\ +\ xza\,y\ +\ xya\,z)\cdot\ dy\,dz\,(-ax)$$

$$\Phi B2 = -\mu\int_{-1}^{2} ydy\ \int_{-1}^{2} zdz$$

$$\Phi B2 = -9\mu$$

Fluks magnet pada sumbu $y$ positif

$$\Phi B3 = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} \mu\vec{H}\cdot\ dx\,dz\,(ay)$$

$$\Phi B3 = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} \mu(yza\,x\ +\ xza\,y\ +\ xya\,z)\cdot\ dx\,dz\,(ay)$$

$$\Phi B2 = \mu\int_{-1}^{2} xdx\ \int_{-1}^{2} zdz$$

$$\Phi B3 = 9\mu$$

Fluks magnet pada sumbu $y$ negatif

$$\Phi B4 = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} \mu\vec{H}\cdot\ dx\,dz\,(-ay)$$

$$\Phi B4 = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2} \mu(yza\,x\ +\ xza\,y\ +\ xya\,z)\cdot\ dx\,dz\,(-ay)$$

$$\Phi B4 = -\mu \int_{-1}^{2} x dx \int_{-1}^{2} z dz$$

$$\Phi B4 = -9\mu$$

Fluks magnet  pada sumbu $z$ positif

$$\Phi B5 = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{2} \mu \vec{H} \cdot \ dx\, dy\, (az)$$

$$\Phi B5 = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{2} \mu(yza\, x \ + \ xza\, y \ + \ xya\, z) \cdot \ dx\, dy\, (az)$$

$$\Phi B5 = \mu \int_{-1}^{2} x dx \int_{-1}^{2} y dy$$

$$\Phi B5 = 9\mu$$

Fluks magneti pada sumbu $z$ negatif

$$\Phi B6 = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{2} \mu \vec{H} \cdot \ dx\, dy\, (-az)$$

$$\Phi B6 = \int_{-1}^{2} \int_{-1}^{2} \mu(yza\, x \ + \ xza\, y \ + \ xya\, z) \cdot \ dx\, dz\, (-az)$$

$$\Phi B6 = -\mu \int_{-1}^{2} x dx \int_{-1}^{2} y dy$$

$$\Phi B6 = -9\mu$$

Sehinggaa fluks total adalah

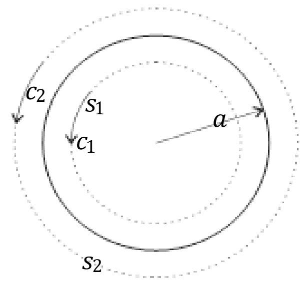
$\Phi_{B1} + \Phi_{B2} + \Phi_{B3} + \Phi_{B4} + \Phi_{B5} + \Phi_{B6} = 0$

Sesuai dengan Persamaan Maxwell 2 (Hukum Gauss Magnet).

**Soal 3.**

**Persamaan Maxwell 4: Hukum Ampere Maxwell**

Terdapat suatu rapat arus $J = 1A/m^2 a_z$ di suatu tabung panjang dengan jari-jari $a$. Tentukan medan magnet di dalam dan di luar tabung! (Asumsi $\mu = \mu_0$)




Jawab:

Berlaku persamaan

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}.$$

Pada bagian dalam tabung $0 \leq \rho \leq a$ nilai

$$d\vec{L} = d\vec{L}_\phi = \rho d\phi a_\phi$$

dan

$$dS = dS_z = \rho d\rho d\phi a_z$$

sehingga

$$\int_0^{2\pi} \vec{H}.\, \rho d\phi a\, \phi = \int_0^{\phi} \int_0^{\rho} J.\ \rho d\rho d\phi\ a\ z$$

$$\vec{H}.\, a\, \phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \int_0^{\phi} \int_0^{\rho} 1\ az\, .\, \rho d\rho d\phi\ a\ z$$

$$\vec{H}.\, a\, \phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \int_0^{\phi} \int_0^{\rho} \rho d\rho d\phi$$

$$\vec{H}.\, a\, \phi \int_0^{2\pi} \rho d\phi = \int_0^{\rho} \rho d\rho \int_0^{\phi} d\phi$$

$$\vec{H} = \frac{\rho}{2} a\rho$$

Sedangkan bagian luar tabung $a \leq \rho$ berlaku

$$\int_0^{2\pi} \vec{H}.\rho d\phi a\,\phi = \int_0^{\phi}\int_0^{a} J.\ \rho d\rho d\phi\ a\,z$$

$$\vec{H}.a\,\phi\int_0^{2\pi}\rho d\phi = \int_0^{\phi}\int_0^{a} 1\ az\,.\,\rho d\rho d\phi\ a\,z$$

$$\vec{H}.a\,\phi\int_0^{2\pi}\rho d\phi = \int_0^{\phi}\int_0^{a}\rho d\rho d\phi$$

$$\vec{H}.a\,\phi\int_0^{2\pi}\rho d\phi = \int_0^{a}\rho d\rho\int_0^{2\pi} d\phi$$

$$\vec{H}a\phi = \frac{a^2}{2\rho}$$

$$\vec{H} = \frac{a^2}{2\rho}a\phi$$

**Soal 4.**

Hitung jumlah fluks listrik yang menembus permukaan kubus yang didefinisikan oleh batas

$0 \le x \le 2$ ; $0 \le y \le 2$ ; $0 \le z \le 2$

$D = 2xz^2\overrightarrow{ax} + 3xyz\overrightarrow{ay} + 4xy^3z^2\overrightarrow{az}\ pc/m^2$

Jawab:

$0 \le x \le 2$ $\quad D = 2xz^2\overrightarrow{ax} + 3xyz\overrightarrow{ay} + 4xy^3z^2\overrightarrow{az}\ pc/m^2$

$0 \le y \le 2$

$0 \le z \le 2$

$$\oint \vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_{atas}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} + \int_{bawah}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} + \int_{depan}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} + \int_{belakang}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} + \int_{kanan}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds} + \int_{kiri}\vec{A}\cdot\overrightarrow{ds}$$

$$\int_{atas}\vec{D}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_0^2\int_0^2 4xy^3z^2\,dxdy = 4z^2\cdot\frac{1}{4}y^4]_0^2\cdot\frac{1}{2}x^2]_0^2 = 4(2)^2\cdot\frac{1}{4}(2)^4\cdot\frac{1}{2}(2)^2 = 128$$

$$\int_{kanan}\vec{D}\cdot\overrightarrow{ds} = \int_0^2\int_0^2 3xyz\,dxdz = 3y\cdot\frac{1}{2}y^2]_0^2\cdot\frac{1}{2}z^2]_0^2 = 3(2)\cdot\frac{1}{2}(2)^2\cdot\frac{1}{2}(2)^2 = 24$$

$$\int_{depan} \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_0^2 \int_0^2 2xz^2\, dydz = 2x \cdot y]_0^2 \cdot \frac{1}{3} z^3]_0^2 = 2(2) \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}(2)^3 = 21{,}34$$

$$\oint \vec{A} \cdot \overrightarrow{ds} = 128 + 24 + 21{,}34 = 173{,}34\ \frac{Nm^2}{C}$$

**Soal 5.**

Diketahui terhadap $\vec{J} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{ax} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{ay} + z^2\overrightarrow{az}\ A/m$ pada sebuah kawat berbentuk silinder yang sangat panjang dengan radius 0,2 m. Hitunglah besar rapat fluks magnet di titik (1,1,1)m.

Jawab:

$dl = \rho \cdot d\emptyset \cdot \overrightarrow{a\emptyset}$

$\oint \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot dl = \oint \frac{B\emptyset}{\mu_0}\ \rho \cdot d\emptyset \cdot \overrightarrow{a\emptyset} = \frac{B\emptyset}{\mu_0}\ 2\pi\, \rho$

$ds = \rho \cdot d\rho \cdot d\emptyset \cdot \overrightarrow{az}$

$\int J \cdot \overrightarrow{ds} = \int z^2\ az\ .\ \rho \cdot d\rho \cdot d\emptyset \cdot \overrightarrow{az}$

$= \int_{\emptyset=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{0,2} z^2 . \rho \cdot d\rho \cdot d\emptyset$

$= z^2 . \frac{1}{2}\rho^2]_0^2 . 2\pi\ =\ z^2 .\ \frac{1}{2}\ .\ 0{,}04\ .\ 2\pi\ =\ 0{,}04\ .\ 2\pi z^2$

$\frac{B\emptyset}{\mu_0}\ 2\pi\, \rho = \ 0{,}04\ .\ 2\pi z^2$

$B\emptyset = \frac{0{,}04\ .\ 2\pi z^2\ .\ \mu_0}{2\pi\, \rho}$

$B = \frac{0{,}02\ z^2\ .\ \mu_0}{\rho}$

Titik (1,1,1) , $\rho = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$

$z = 1; \rho = \sqrt{2}\ ;\ B = \frac{0{,}02\ (1)^2\ .\ 4\pi \times 10^{-7}}{\sqrt{2}}$

$B = 1{,}77\ \times 8\ Nm/A$

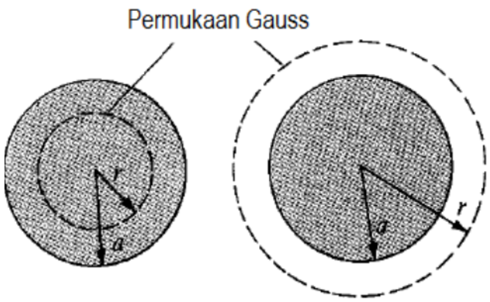
**Soal 6.**

Distribusi muatan dengan simetri bola memiliki kerapatan,

$$\rho_v = \begin{cases} \dfrac{\rho_o r}{R}, & 0 \le r \le R \\ 0, & r > R \end{cases}$$

Tentukan **E** di setiap titik.

***Jawab:***



(a) (b)

Distribusi muatan dapat diilustrasikan seperti gambar di samping. Karena terdapat simetri, maka Hukum Gauss dapat diterapkan untuk mencari **E**.

$$\varepsilon_o \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q_{enc} = \int \rho_v \, dv$$

(a) Untuk r < R,

$$\varepsilon_o E_r \, 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v \, r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$$

$$= \int_0^r 4\pi r^2 \frac{\rho_o r}{R} \, dr = \frac{\rho_o \pi r^4}{R}$$

atau $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_o r^2}{4\varepsilon_o R} \mathbf{a}_r$

(b) Untuk r ≥ R, $\varepsilon_o E_r 4\pi r^2 = Q_{enc} = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_v r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr$

$$= \int_0^R \frac{\rho_o r}{R} 4\pi r^2 \, dr + \int_R^r 0 \cdot 4\pi r^2 \, dr$$

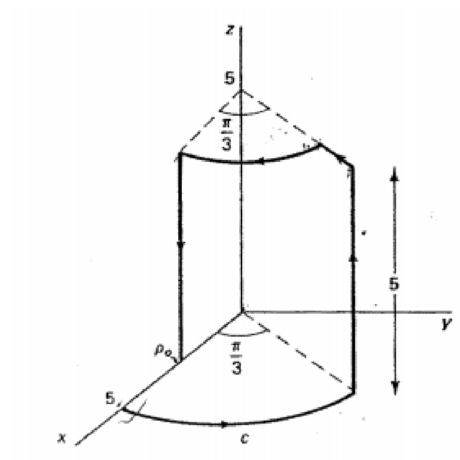
$$= \pi \rho_o R^3$$

atau $\mathbf{E} = \dfrac{\rho_o R^3}{4\varepsilon_o r^2} \mathbf{a}_r$

**Soal 7.**

Pertimbangkan kontur c yang ditunjukkan pada Gambar Pl.26 dan bidang vektor

$$\mathbf{F} = 2\rho(z^2 + 1)\cos\phi\, \mathbf{a}_\rho - \rho(z^2 + 1)\sin\phi\, \mathbf{a}_\phi + 2\rho^2 z \cos\phi\, \mathbf{a}_z$$




a) Nilai $\int_c \mathrm{F}.dl$
b) Nilai $\int_{c1} \mathrm{F}.dl$ dimana $c1$ adalah garis lurus yang menghubungkan $(\rho = \rho 0, \phi = 0, z = 0)$ ke $(\rho = 5, \phi = 0, z = 0)$
c) Apakah hasil dari a dan b konsisten dengan bidang F yang konservatif? (Bidang adalah konservatif ketika integral garisnya di sepanjang kontur tertutup adalah nol.)

Jawab:

a. Integral ini dapat dipecah menjadi lima bagian berbeda

$$\begin{aligned}\int_c \mathbf{F}\cdot d\bar{\ell} &= \int_0^{\pi/3} -\rho(z^2+1)\sin\phi\cdot\rho d\phi + \int_0^5 2\rho^2 z\cos\phi dz \\ &\quad + \int_5^{\rho_o} 2\rho(z^2+1)\cos\phi d\rho + \int_{\pi/3}^0 -\rho(z^2+1)\rho\sin\phi d\phi + \int_5^0 2\rho^2 z\cos\phi dz \\ &= -\int_0^{\pi/3} 25\sin\phi d\phi + \int_0^5 25zdz + \int_5^{\rho_o} 26\rho d\rho - \int_{\pi/3}^0 26\rho_o^2\sin\phi d\phi + \int_5^0 2\rho_o^2 zdz \\ &= -25(-\cos\phi)\Big|_0^{\pi/3} + 25\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 + 26\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_5^{\rho_o} - 26\rho_o(-\cos\phi)\Big|_{\pi/3}^0 + 2\rho_o^2\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_5^0 \\ &= -25 + \rho_o^2\end{aligned}$$

b. $$\int_{c_1} \mathbf{F}\cdot d\bar{\ell} = \int_{\rho_o}^5 2\rho(z^2+1)\cos\phi d\rho = \int_{\rho_o}^5 2\rho d\rho = \rho^2\Big|_{\rho_o}^5 = 25 - \rho_o^2$$

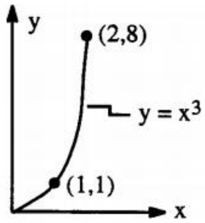
c. $$\int_c \mathbf{F}\cdot d\bar{\ell} + \int_{c_1} \mathbf{F}\cdot d\bar{\ell} = (\rho_o^2 - 25) + (25 - \rho_o^2) = 0$$

(Bidang F konservatif)

**Soal 8.**

Diketahui medan listrik $\mathbf{E} = (5xy - 6x^2)\mathbf{a}_x + (2y - 4x)\mathbf{a}_y$, temukan usaha yang diperlukan untuk memindahkan muatan $q = 1 \,.\, 10^{-6}$ di sepanjang kurva C dalam bidang x-y yang diberikan oleh $y = x^3$ dari titik (1, 1) ke (2, 8).

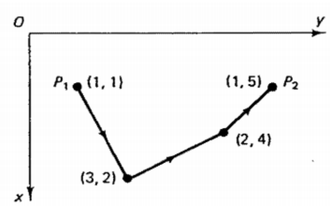
Jawab :




$$
\begin{aligned}
w &= \int_c \mathbf{F}\cdot \mathbf{n} d\ell = q\int_c \mathbf{E}\cdot \mathbf{n} d\ell = q\left[\int_1^2 (5xy - 6x^2)dx + \int_1^8 (2y - 4x)dy\right] \\
&= q\left[\int_1^2 (5x^4 - 6x^2)dx + \int_1^8 (2y - 4y^{1/3})dy\right] \\
&= q\left[(x^5 - 2x^3)\Big|_1^2 + y^2 - 3y^{4/3}\Big|_1^8\right] = 35q = 35\times 10^{-6}(J)
\end{aligned}
$$

**Soal 9.**

temukan integral garis vektor $\mathbf{A} = \int_\ell d\ell$, di mana *l*adalah lintasan dari P1 ke P2 seperti yang ditunjukkan pada Gambar




Jawab:

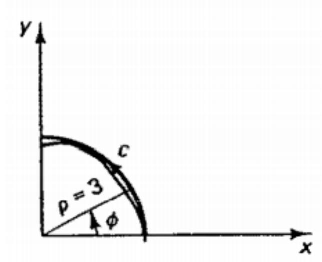
$$\mathbf{A} = \int_\ell d\bar{\ell} = \int_1^1 \mathbf{a}_x dx + \int_1^5 \mathbf{a}_y dy = 4\mathbf{a}_y$$

**Soal 10.**

Evaluasi integral garis

$$\int_c (\sin\phi\, \mathbf{a}_\rho + \rho\cos\phi\, \mathbf{a}_\phi + \tan\phi\, \mathbf{a}_z)\cdot d\boldsymbol{\ell}$$

Untuk kontur yang ditunjukkan pada Gambar




Jawab:

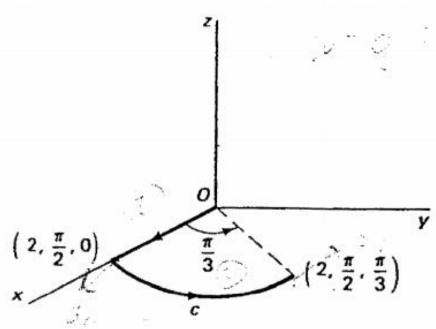
$$\int_c \left(\sin\phi \mathbf{a}_\rho + \rho\cos\phi \mathbf{a}_\phi + \tan\phi \mathbf{a}_z\right)\cdot d\bar{\ell} \;=\; \int_0^{\pi/2} \rho\cos\phi \mathbf{a}_\phi \cdot \rho d\phi \mathbf{a}_\phi$$
$$= \int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos\phi d\phi = \rho^2 = 9$$

**Soal 11.**

jika vektor medan listrik E diberikan dalam sistem koordinat bola sebesar

$$\mathbf{E} = 3r^2 \cos\phi \sin\theta \,\mathbf{a}_r + r^2 \cos\theta \cos\phi \,\mathbf{a}_\theta - r^2 \sin\phi \,\mathbf{a}_\phi$$

Berapa nilai ***w*** yang dilakukan dalam memindahkan muatan positif unit sepanjang kontur c yang ditunjukkan pada Gambar

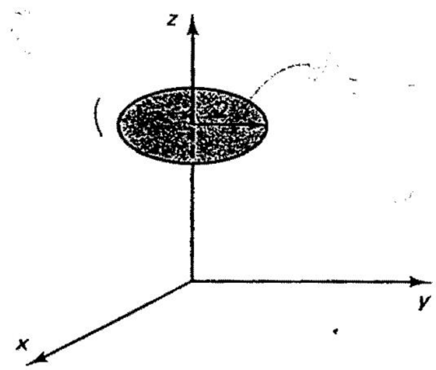



Jawab:

$$w = q\left[\int_0^2 3r^2\cos\theta\sin\theta \mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_r dr + \int_0^{\pi/3} -r^2\sin\phi \mathbf{a}_\phi\cdot\mathbf{a}_\phi r\sin\phi d\phi\right]$$
$$= q\left[\int_0^2 3r^2 dr - \int_0^{\pi/3} r^2 \sin\phi d\phi\right] = q[8+4-8] = 4q(J)$$

**Soal 12.**

Persamaan untuk sebuah bidang adalah $\mathbf{B} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$,. Berapa nilai $\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ di atas area lingkaran dengan radius 2 dan yang berpusat pada sumbu z dan sejajar dengan bidang x-y pada z = 4 seperti yang ditunjukkan pada Gambar




Jawab:

$\mathbf{B} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z$

$d\mathbf{s} = dxdy\mathbf{a}_z$

$$\therefore \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_s zdxdy = \int_s 4dxdy = 4.2\pi \cdot 2^2 = 16\pi$$

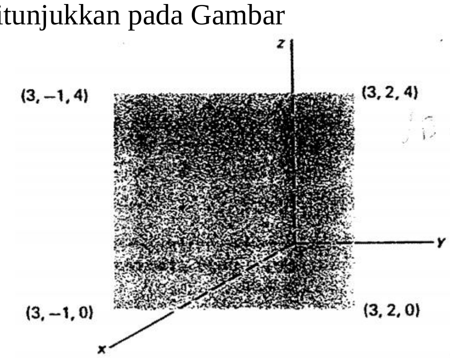
**Soal 13.**

Jika vektor kerapatan fluks magnet diberikan oleh

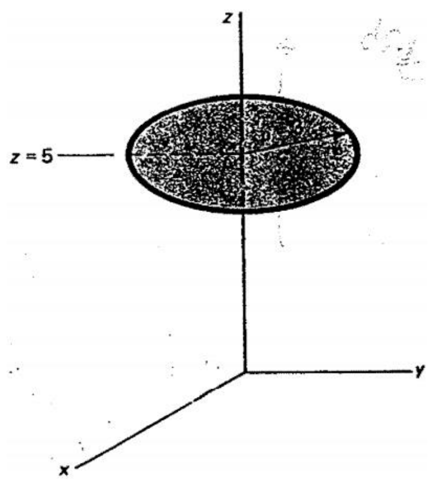
$$\mathbf{B} = zy\,\mathbf{a}_x + x\,\mathbf{a}_y + z^2x\,\mathbf{a}_z$$

temukan fluks magnet total yang memancar (melewati) permukaan berikut.

(a) Luas persegi panjang yang ditunjukkan pada Gambar



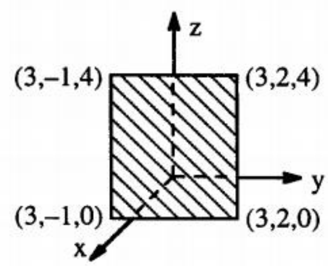

(b) Permukaan silinder ditunjukkan pada Gambar




Jawab:

$$\mathbf{B} = zy\mathbf{a}_x + x\mathbf{a}_y + z^2x\mathbf{a}_z$$

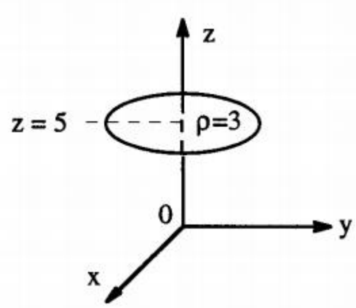
(a)




$$d\mathbf{s} = dzdy\mathbf{a}_x$$

$$\therefore \int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_{z=0}^{4}\int_{y=-1}^{2} zydydz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^4 \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right|_{-1}^2 = 12$$

(b)



$$ds = dxdy\mathbf{a}_z$$

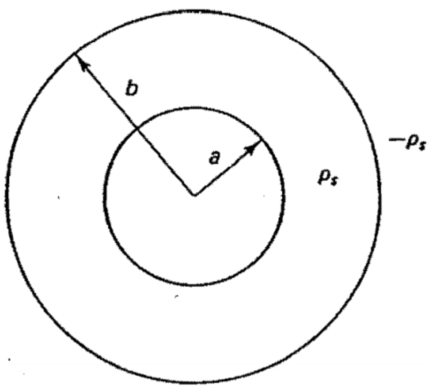
$$\therefore \int \mathbf{B} \cdot ds = \int z^2 xdxdy = \int 25xdxdy$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ dxdy = \rho d\phi d\rho \end{cases}$$

$$\therefore \int \mathbf{B} \cdot ds = \int_{\rho=0}^{3}\int_{\phi=0}^{2\pi} 25 \cdot \rho^2 \cos\phi d\phi d\rho = 25\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^3 \cdot \sin\phi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

**Soal 14**

Kapasitor bola yang ditunjukkan pada Gambar, terdiri dari dua permukaan bola konsentris, satu memiliki jari-jari a dan kepadatan muatan $\rho_s$. dan yang lainnya memiliki jari-jari b dan kepadatan muatan $-\rho_s$ Temukan medan listrik E di daerah berikut




**(a)** $r < a$.
**(b)** $a < r < b$.
**(c)** $r > b$.

Jawab:

a. r < a
   tidak akan ada muatan yang tertutup oleh permukaan gaussian. karena itu

$$\oint_s \varepsilon_o \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q = 0$$

$$\therefore \mathbf{E} = 0, \quad r < a$$

b. a < r < b

$$Q = \oint_{s_a} \rho_s ds = \rho_s \oint_{s_a} ds = 4\pi a^2 \rho_s$$

$$\oint_s \varepsilon_o \mathbf{E} \cdot ds = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon_o E_r \left(r^2 \sin\theta d\theta d\phi\right) = \varepsilon_o E_r \cdot 4\pi r^2$$

$$\therefore E_r = \frac{4\pi a^2 \rho_s}{4\pi r^2 \varepsilon_o} = \frac{a^2 \rho_s}{r^2 \varepsilon_o}, \quad a < r < b$$

c. r > b

$$Q=\oint_{s_a}\rho_{s_a}ds_a+\oint_{s_b}\rho_{s_b}ds_b=\rho_s\oint_{s_a}ds_a-\rho_s\oint_{s_b}ds_b=4\pi\rho_s\left(a^2-b^2\right)$$

$$\therefore\ E=\frac{4\pi\rho_s\left(a^2-b^2\right)}{4\pi r^2\varepsilon_o}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\rho_s}{\varepsilon_o r^2}\ ,\qquad r>b$$

**Soal 15**.

Berkas elektron berbentuk silinder terdiri dari kerapatan muatan volume seragam yang bergerak dengan kecepatan konstan $v_o = 10^7$ m/sec. Arus total yang dibawa oleh berkas berjari-jari a = 1 mm adalah $I_o = 10^{-2}$ A. Gunakan hukum Gauss untuk menghitung intensitas medan listrik di dalam dan di luar berkas elektron.

Jawab:

$$\oint_s \varepsilon_o \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\int_v \rho_v dv$$

$$J=\frac{I_o}{A}=\frac{10^{-2}}{\pi\cdot 10^{-6}}=\frac{1}{\pi}\times 10^4=3183\ (\text{A/m}^2)$$

$$\therefore\ \rho_v=\frac{J}{v}=\frac{3183}{10^7}=3.183\times 10^{-4}\ (\text{C/m}^3)$$

Untuk $\rho < a$, permukaan gaussian adalah silinder dengan jari-jari ρ dan tinggi l

$$\therefore\ \oint_s \varepsilon_o \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\rho_v\cdot\pi\rho^2 L$$

$$\int_0^L\int_0^{2\pi}\varepsilon_o \mathbf{E}_\rho \rho d\phi dz=\rho_v \pi\rho^2 L$$

$$E_\rho=\frac{\rho_r\pi\rho^2 L}{2\pi\varepsilon_o\rho}=1.59\times 10^{-4}\frac{\rho}{\varepsilon_o}=1.76\times 10^7\rho$$

$$\mathbf{E}=E_\rho\mathbf{a}_\rho=1.76\times 10^7\rho\mathbf{a}_\rho\ (\text{V/m})\ ,\qquad \rho<a$$

Untuk $\rho > a$

$$\oint_s \varepsilon_o \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\rho_v\cdot\pi a^2 L$$

$$\therefore\ E_\rho=\frac{\rho_v\pi a^2 L}{2\pi\varepsilon_o\rho}=1.76\times 10^7\frac{a^2}{\rho}$$

$$\mathbf{E}=1.76\times 10^7\frac{a^2}{\rho}\mathbf{a}_\rho\ ,\qquad \rho>a$$