M. Hasyim Abdillah P. (1101191095) TT-43-11

1.

$(a,b,c) \in W$; $b = a + c$

Jika $a = b = c = 0$, maka $\vec{0} = (0,0,0) \in W$

$W \neq \{\}$

$W \subseteq \mathbb{R}^3$

$\bar{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\bar{v} = (a_2, b_2, c_2) \in W$

$\bar{u} + \bar{v} = (a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2)$

$\bar{u} + \bar{v} = (a_1 + a_2 , b_1 + b_2 , c_1 + c_2)$

$\bar{u} + \bar{v} = (a_1 + a_2 , a_1 + c_1 + a_2 + c_2 , c_1 + c_2)$

$\bar{u} + \bar{v} = (a_1 + a_2 , a_1 + a_2 + c_1 + c_2 , c_1 + c_2)$

$\bar{u} + \bar{v} \in W$

$k\bar{u} = k(a, b, c)$

$k\bar{u} = (ka, kb, kc)$

$k\bar{u} = (ka, k(a+c), kc)$

$k\bar{u} = (ka, ka + kc, kc)$

$k\bar{u} \in W$

$\therefore$ W merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$

2.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in W$, $a + b + c + d = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$, $W \neq \{\}$

$W \not\subseteq \mathbb{R}^3$ karena $W \subseteq M_{2\times 2}$

$\therefore$ W bukan merupakan subruang dari $\mathbb{R}^3$

3. $k_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} k_1 + 4k_3 & 2k_1 + k_2 - 2k_3 \\ -k_1 + 2k_2 & 3k_1 + 4k_2 - 2k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$k_1 + 4k_3 = 6$

$-k_1 + 2k_2 = 0$

$k_1 = 2k_2$

$$\begin{aligned} 2k_1 + k_2 - 2k_3 &= 3 \\ 3k_1 + 4k_2 - 2k_3 &= 0 \quad - \\ \hline -k_1 - 3k_2 &= -5 \\ k_1 + 3k_2 &= 5 \\ 2k_2 + 3k_2 &= 5 \\ k_2 &= 1 \\ k_1 &= 2 \end{aligned}$$

$k_1 + 4k_3 = 6$

$2 + 4k_3 = 6$

$k_3 = 1$

$k_1, k_2, k_3 \in R$

$\therefore \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ merupakan kombinasi linear dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\vec{a} = (7, 8, 9)$, $\vec{u} = (0, -2, -2)$, $\vec{v} = (1, 3, -1)$

$k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v} = \vec{a}$

$$k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 8 \\ -2 & -1 & 9 \end{array}\right] \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & 9 \end{array}\right] \underset{\sim}{-b_1 + b_3} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{4b_2 + b_3}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 29 \end{array}\right]$$ $\rightarrow$ baris terakhir bukan baris 0, SPL tidak konsisten

$\therefore$ tidak ada nilai k_1 & k_2 yang memenuhi sehingga $\vec{a}$ bukan merupakan kombinasi linear dari $\vec{u}$ dan $\vec{v}$

5. $\vec{v_1} = (2, -1, 3)$, $\vec{v_2} = (4, 1, 2)$, $\vec{v_3} = (8, -1, 8)$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = k_1 \vec{v_1} + k_2 \vec{v_2} + k_3 \vec{v_3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} = (2.1.8) + (4.-1.3) + (8.-1.2) - (8.1.3) - (4.-1.8) - (2.-1.2)$$

$$= 16 - 12 - 16 - 24 + 32 + 4$$

$$= 0 \rightarrow \text{SPL tidak konsisten}$$

$\therefore$ vektor $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, dan $\vec{v_3}$ tidak merentang R^3

6. $\vec{v_1} = (3, 1, 4)$, $\vec{v_2} = (2, -3, 5)$, $\vec{v_3} = (5, -2, 9)$, $\vec{v_4} = (1, 4, -1)$

$\vec{u} = (a, b, c) = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + k_3\vec{v_3} + k_3\vec{v_4}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 & a \\ 1 & -3 & -2 & 4 & b \\ 4 & 5 & 9 & -1 & c \end{array}\right] \underset{\sim}{b_1 \leftrightarrow b_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & b \\ 3 & 2 & 5 & 1 & a \\ 4 & 5 & 9 & -1 & c \end{array}\right] \underset{\sim}{\begin{matrix} -3b_1 + b_2 \\ -4b_1 + b_3 \end{matrix}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & b \\ 0 & 11 & 11 & -11 & a-3b \\ 0 & 17 & 17 & -17 & c-4b \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix} \frac{1}{11}b_2 \\ \frac{1}{17}b_3 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{a-3b}{11} \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{a-4b}{17} \end{bmatrix} \underset{\sim}{-b_2 + b_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 4 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{a-3b}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-6a+4b}{187} \end{bmatrix}$$

$\frac{-6a+4b}{187} = 0 \rightarrow$ SPL tidak konsisten

$\therefore$ vektor $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$, dan $\vec{v_4}$ tidak merentang R^3