FEH2I3:
PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN APLIKASI

SPL HOMOGEN

September 1, 2020

SPL NON HOMOGEN

Sub-pokok bahasan pada bab ini terdiri dari:

1. Sistem Linier Persamaan Diferensial Orde 1
2. SPL Homogen
3. SPL Non Homogen

Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde 1

Sistem linear persamaan diferensial orde 1 memiliki persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Sistem linier terdiri dari beberapa persamaan diferensial dan terdiri dari 2 variabel atau lebih, sehingga persamaannya akan dinyatakan dalam bentuk matriks.Sistem linier terdiri dari SPL Homogen dan SPL Non Homogen.

SPL Homogen

SPL Homogen memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$X' = A \cdot X$$

Dalam menentukan solusi dari penyelesaian system linear homogen, ada beberapa langkah yang harus dilakukan, diantaranya adalah :

1. Untuk memenuhi system homogen dan mencari persamaan karakteristik, maka persamaan diferensial dari system memenuhi syarat :

$$det(A - \lambda I) = 0$$

2. Menentukan nilai vektor K untuk setiap nilai eigen (λ) dengan persamaan :

$$(A - \lambda I)K = 0$$

3. Menentukan solusi umum dari system homogen dari 3

SPL Homogen - cont

Nilai eigen (λ) yang dihasilkan ada 3 kemungkinan, yaitu :

1. Nilai eigen (λ) real berbeda , yaitu ketika ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)
   Solusi Homogen yang dihasilkan adalah

$$y = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. Nilai eigen (λ) real kembar , yaitu ketika ($\lambda_1 = \lambda_2$)
   Solusi Homogen yang dihasilkan adalah

$$y = C_1 K e^{\lambda t} + C_2 [K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}]$$

3. Nilai eigen (λ) kompleks konjugate , yaitu ketika ($\lambda_1 = \alpha + \beta i$ dan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$)
   Solusi Homogen yang dihasilkan adalah

$$y = C_1 [B_1 cos \beta t - B_2 sin \beta t] e^{\alpha} t + C_2 [B_2 cos \beta t - B_1 sin \beta t] e^{\alpha} t$$

Contoh 1- SPL Homogen Nilai Eigen Real Berbeda

Contoh 1
Tentukan solusi homogen dari SPL berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -6x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = -3x + y$$

Penyelesaian

1. Ubah SPL ke dalam bentuk persamaan $X' = A \cdot X$, dimana

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

,sehingga

$$X' = A \cdot X$$
$$X' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ \end{pmatrix} X$$

Contoh 1- SPL Homogen Nilai Eigen Real Berbeda

2. Tentukan nilai eigen (λ) dari SPL tersebut dengan cara:

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -6-\lambda & 2 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$$

3. Menentukan vektor eigen untuk setiap nilai eigen (λ)
   a. Untuk $\lambda_1 = 0$, maka

$$(A - \lambda I)K = 0$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 1- SPL Homogen Nilai Eigen Real Berbeda

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}b_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} 3b_1 + b_2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 - 1/3k_2 = 0$$

$$k_1 = 1/3k_2$$

Jika $k_2 = 3$, maka $k_1 = 1$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Contoh 1- SPL Homogen Nilai Eigen Real Berbeda

b. Untuk $\lambda_2 = -5$, maka

$$(A - \lambda I)K = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - b_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} 3b_1 + b_2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 1- SPL Homogen Nilai Eigen Real Berbeda

$$k_1 - 2k_2 = 0$$

$$k_1 = 2k_2$$

Jika $k_2 = 1$, maka $k_1 = 2$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Menentukan solusi Homogen
   Karena λ_1 dan λ_2 merupakan akar real berbeda, maka solusi homogennya adalah:

$$y = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

Latihan SPL Homogen Nilai Eigen Real Berbeda

Tentukan Solusi dari Sistem Homogen berikut

$$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y$$

SPL Homogen Nilai Eigen Berulang

Jika m adalah bilangan bulat positif dan $(\lambda - \lambda_1)^m$ adalah faktor dari persamaan karakteristik akan tetapi $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ bukan suatu faktor. Maka λ_1 disebut sebagai nilai **nilai eigen dengan perulangan m**.
Misalkan λ_1 adalah niai eigen dengan perulangan dua tetapi hanya menghasilkan satu vektor eigen. Maka solusi keduanya adalah :

$$X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$$

Lalu, substitusikan ke sistem

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$$

$$(\mathbf{AK} - \lambda_1 \mathbf{K})\mathbf{t}\mathbf{e}^{\lambda_1 \mathbf{t}} + (\mathbf{AP} - \lambda_1 \mathbf{P} - \mathbf{K})\mathbf{e}^{\lambda_1 \mathbf{t}} = \mathbf{0}$$

SPL Homogen Nilai eigen Berulang

Agar persamaan terakhir terpenuhi untuk semua nilai t, maka
:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \tag{2}$$

Dapat disimpulkan bahwa **K** adalah vektor eigen **A** dan untuk memperoleh solusi kedua X_2 kita perlu menyelesaikan persamaan [2] untuk vektor **P**.

Contoh 2 - SPL Homogen Nilai Eigen Berulang

Diketahui sebuah sistem homogen sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 18y$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 9y$$

Tentukan solusi dari sistem homogen tersebut

Jawab :

1. Persamaan Karakteristik

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -18 \\ 2 & -9-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)^2 = 0$$

   sehingga diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$

Contoh 2 - SPL Homogen Nilai Eigen Berulang

2. Untuk nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ maka

$$(A - \lambda I)K = 0$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh hasil

$$K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Contoh 2 - SPL Homogen Niai Eigen Berulang

3. Misalkan diperoleh

$$K = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari solusi kedua, kita selesaikan persamaan

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$$

Sehingga diperoleh persamaan

$$6p_1 - 18p_2 = 3 \tag{3}$$

$$2p_1 - 6p_2 = 1 \tag{4}$$

Contoh 2 - SPL Homogen Nilai Eigen Berulang

dari persamaan [3] dan [4] diperoleh bahwa $p_1 = 3p_2 + 1/2$ dan $p_2 = s$. s merupakan nilai sembarang, sehingga apabila kita pilih $s = 1$ maka

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga kita peroleh solusi kedua yaitu

$$\mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Sehingga, solusi umum dari sistem homogen tersebut adalah

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \right\}$$

Latihan SPL Homogen Nilai Eigen Berulang

Tentukan solusi umum dari sistem homogen berikut

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y$$

$$\frac{dx}{dt} = 9x - 3y$$

SPL Homogen dengan Nilai Eigen Berulang 3

Jika λ merupakan nilai eigen dengan perulangan **tiga**, tetapi hanya menghasilkan satu vektor eigen, maka
Solusi pertama :

$$\mathbf{X_1} = \mathbf{K}\mathbf{e}^{\lambda\mathbf{t}}$$

Solusi kedua :

$$\mathbf{X_2} = \mathbf{K}\mathbf{t}\mathbf{e}^{\lambda\mathbf{t}} + \mathbf{P}\mathbf{e}^{\lambda\mathbf{t}}$$

Solusi ketiga :

$$\mathbf{X_3} = \mathbf{K}\frac{\mathbf{t^2}}{\mathbf{2}}\mathbf{e}^{\lambda\mathbf{t}} + \mathbf{P}\mathbf{t}\mathbf{e}^{\lambda\mathbf{t}} + \mathbf{Q}\mathbf{e}^{\lambda\mathbf{t}}$$

dengan mensubstitusikan X_3 ke dalam persamaan $X^{'} = AX$ diperoleh

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

untuk mencari **K**

SPL Homogen Nilai Eigen Berulang 3

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$$

untuk mencari **P**

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$$

untuk mencari **Q**

SPL Homogen Nilai Eigen Kompleks

Jika diperoleh nilai eigen kompleks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ dan $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ dari matriks **A** dan K_1 adalah vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen λ_1. Maka B_1 = Re(K_1) dan B_2 = Im(K_1)
Sehingga diperoleh solusi bebas linear dari $X' = AX$ yaitu

$$\mathbf{X_1} = [\mathbf{B_1} cos\beta t - \mathbf{B_2} sin\beta t]e^{\alpha t}$$

$$\mathbf{X_2} = [\mathbf{B_2} cos\beta t + \mathbf{B_1} sin\beta t]e^{\alpha t}$$

Contoh 3 - SPL Homogen Nilai Eigen Kompleks

Selesaikan Sistem Homogen berikut :

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} X$$

Jawab :

1. Persamaan Karakteristik :

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0$$

   sehingga diperoleh $\lambda_1 = 2i$ dan $\lambda_2 = -2i$

Contoh 3- SPL Homogen Nilai Eigen Kompleks

2. untuk nilai eigen $\lambda_1 = 2i$, maka

$$(\mathbf{A} - (2i)\mathbf{I})\mathbf{K} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & 8 \\ -1 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

diperoleh $k_1 = -(2+2i)s$ dan $k_2 = 2$ dengan s adalah nilai sembarang bilangan real. Jika dipilih $s = -1$, maka

$$\mathbf{K_1} = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 3 - SPL Homogen Nilai Eigen Kompleks

dari persamaan diatas, maka

$$\mathbf{B_1} = Re(\mathbf{K_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B_2} = Im(\mathbf{K_1}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

karena $\alpha = 0$, maka solusi umum dari sistem tersebut adalah :

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2$$

$$X = c_1 \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} cos2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} sin2t \right\} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} cos2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} sin2t \right\}$$

Latihan Soal SPL Homogen Nilai Eigen Kompleks

Selesaikan sistem berikut :

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

Latihan Soal SPL Homogen

LATIHAN

Carilah Solusi Homogen dari SPL berikut

1. $$X' = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X$$

2. $$\frac{dx}{dt} = 5x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + 3y$$

3. $$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan Soal SPL Homogen

4. $$\frac{dx}{dt} = x + y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y$$
$$\frac{dz}{dt} = y - z$$

5. $$X' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} X$$