

Aljabar Linear Elementer

MA1223

3 SKS

Silabus :

Bab I Matriks dan Operasinya

Bab II Determinan Matriks

Bab III Sistem Persamaan Linear

Bab IV Vektor di Bidang dan di Ruang

Bab V Ruang Vektor

Bab VI Ruang Hasil Kali Dalam

Bab VII Transformasi Linear

Bab VIII Ruang Eigen

Beberapa Aplikasi Ruang Eigen

- Uji Kestabilan dalam sistem dinamik
- Optimasi dengan SVD pada pengolahan Citra
- Sistem Transmisi
- dan lain-lain.

Definisi :

Misalkan $A_{n \times n}$ matriks bujur sangkar
 \bar{v} adalah vektor tak nol di R^n dan λ adalah skalar Rill
sehingga memenuhi :

$$A\bar{v} = \lambda\bar{v}$$

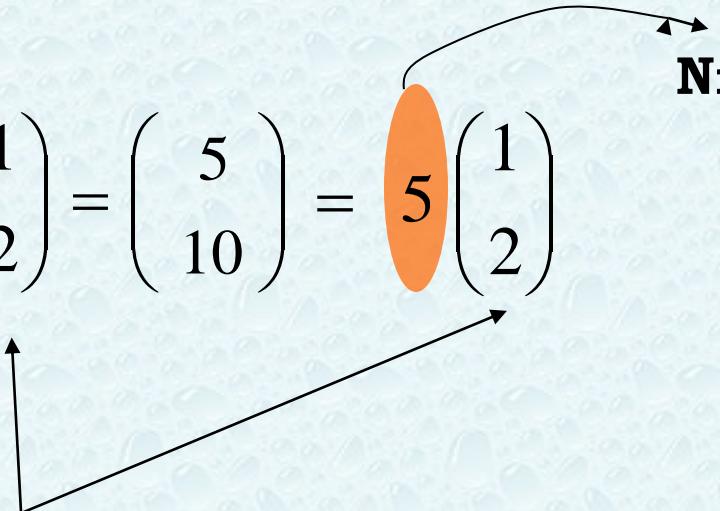
maka λ dinamakan nilai eigen dari A ,
sedangkan \bar{v} dinamakan vektor eigen dari A

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nilai eigen

Vektor eigen

A diagram illustrating the decomposition of a matrix multiplication into its eigenvalue and eigenvector components. It shows the equation $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. A curved arrow points from the scalar '5' to the text 'Nilai eigen'. Another curved arrow points from the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ to the text 'Vektor eigen'. A straight arrow points from the vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ to the scalar '5'.

Perhatikan !!!

$$A\bar{v} = \lambda \bar{v}$$

$$A\bar{v} - \lambda \bar{v} = \bar{0}$$

$$A\bar{v} - \lambda I \bar{v} = \bar{0}$$

$$(A - \lambda I) \bar{v} = \bar{0}$$

Ingat....

\bar{v} merupakan vektor tak nol

Ini Berarti

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Persamaan Karakteristik

Contoh :

Tentukan nilai eigen dari matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan Karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{array} \right] - \lambda \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

- Dengan ekspansi kopaktor sepanjang kolom ke-2

$$(1 - \lambda) ((1 - \lambda)(-\lambda) - 2) = 0$$

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0$$

$$(1 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Jadi, matriks A memiliki tiga buah nilai eigen yaitu :

$$\lambda = -1, \lambda = 1, \text{ dan } \lambda = 2.$$

Contoh :

Tentukan basis ruang eigen dari :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Nilai eigen dari A diperoleh saat $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2) \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2)\{(\lambda - 2)^2 - 1\} + (-\lambda + 1) - (1 + (\lambda - 2)) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2)\{\lambda^2 - 4\lambda + 3\} - (\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 2)\{(\lambda - 3)(\lambda - 1)\} - 2(\lambda - 1) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)((\lambda - 2)(\lambda - 3) - 2) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0$$

Nilai Eigen dari matriks tersebut adalah 1 dan 4.

- Untuk $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

dimana s, t adalah parameter

Jadi Basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=1$ adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ingat bahwa...

Vektor eigen merupakan kelipatan dari unsur basis tersebut

- Untuk $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

maka

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda=4$ adalah

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalisasi

Definisi : Suatu matriks kuadrat $A_{n \times n}$ dikatakan

dapat didiagonalkan (diagonalizable)

jika terdapat matriks P yang mempunyai invers sehingga $P^{-1}AP$ merupakan matriks diagonal.

Matriks P dinamakan matriks yang mendiagonalkan (pendiagonal) dari A .

Vektor-vektor kolom dari matriks P adalah vektor-vektor eigen dari A .

Contoh :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah :

$$|\lambda \cdot I - A| = 0$$

atau

$$\det \left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} (\lambda - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 1) & -1 \\ 0 & -1 & (\lambda - 1) \end{pmatrix} = 0$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor :
 Pilih Baris I

$$\begin{aligned} \det \{\lambda \cdot I - A\} &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda)(\lambda - 2) + 0 + 0 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai eigen

$$\lambda = 0 ; \lambda = 1 ; \lambda = 2$$

Untuk $\lambda = 0$

Dengan OBE maka

$$(\lambda \cdot I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \quad , \text{ dimana } t \text{ adalah parameter tak nol}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 0$
adalah

$$\bar{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dengan OBE maka

$$(\lambda \cdot I - A) \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t, \text{ dimana } t \text{ adalah parameter tak nol}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$
adalah

$$\bar{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$

Dengan OBE maka

$$(\lambda \cdot I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \text{ dimana } t \text{ adalah parameter tak nol}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 2$
adalah

$$\overline{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perhatikan

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + k_3 P_3 = \bar{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3\}$

merupakan himpunan yang bebas linear

Jadi, Matriks yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks diagonal yang dihasilkan adalah : $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Hal yang perlu diperhatikan, matriks

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Juga mendiagonalkan A.

Tapi matriks diagonal yang terbentuk adalah :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pernyataan berikut adalah ekivalen :

- B_nx_n adalah matriks ortogonal.
- Vektor-vektor baris dari B membentuk himpunan ortonormal di Rⁿ dalam RHD Euclides.
- Vektor-vektor kolom dari B membentuk himpunan ortonormal di Rⁿ dalam RHD Euclides.

Misalkan P merupakan matriks ortogonal maka berlaku :

- $P^t P = I$
- $\|Px\| = \|x\|$, untuk setiap x di Rⁿ

Contoh :

Berikut adalah contoh matriks ortogonal :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa setiap vektor baris/kolom merupakan vektor satuan
Dan HkD antar vektor tersebut adalah nol

Perhatikan bahwa :

$$A^t A = I_{2 \times 2} \quad \text{dan} \quad B^t B = I_{3 \times 3}$$

Sementara itu,

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\frac{196}{2} + \frac{4}{2}}$$

$$= \sqrt{100}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \right\|$$

Definisi :

Suatu matriks $A_{n \times n}$ dikatakan dapat didiagonalkan secara ortogonal

jika terdapat **matriks ortogonal P**

sedemikian hingga

$P^{-1}AP (=P^tAP)$ merupakan matriks diagonal.

Perhatikan bahwa :

$$D = P^{-1}AP = P^t AP$$

Misalkan P merupakan matriks ortogonal ($P^tP=PP^t =I$)
maka

$$A = PDP^t$$

Sehingga diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} A^t &= (PDP^t)^t \\ &= (P^t)^t D^t P^t \\ &= PDP^t \\ &= A \end{aligned}$$

A dapat didiagonalkan secara ortogonal

jika dan hanya jika A matriks simetri ($A= A^t$)

Misal $A_{n \times n}$, cara menentukan matriks ortogonal P yang mendiagonalkan A :

- Tentukan nilai eigen
- Tentukan basis ruang eigen untuk setiap nilai eigen yang diperoleh
- Rubah **setiap** basis pada (b) menjadi basis ruang eigen yang ortonormal.
- Bentuk matriks P dimana vektor-vektor kolomnya berupa basis ruang eigen yang ortonormal.

Contoh :

Tentukan matriks yang mendiagonalkan secara ortogonal matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Jawab :

Basis ruang eigen :

- Untuk $\lambda = 0$ adalah

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda = 1$ adalah

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Untuk $\lambda = 2$ adalah

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian, secara berurutan basis ruang eigen yang ortonormal matriks tersebut

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{dan} \quad \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

Sehingga matriks ortogonal yang mendiagonalkan A adalah :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ingat Kembali Pers. Diferensial

$$\frac{dy(t)}{dt} = a y(t) \implies y(t) = ce^{at}$$

Jika sekumpulan PD orde 1 ditulis :

$$\begin{aligned} \frac{dr_1(t)}{dt} &= 2r_1(t) \\ \frac{dr_2(t)}{dt} &= -3r_2(t) \\ \frac{dr_3(t)}{dt} &= r_3(t) \end{aligned} \implies \begin{pmatrix} r_1' \\ r_2' \\ r_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Dengan mudah solusi sistem PD tersebut adalah :

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \\ c_3 e^t \end{pmatrix}$$

Masalahnya, sistem persamaan diferensial **tidak selalu** memberikan matriks koefisien yang berbentuk matriks diagonal.

Bentuk Umum SPD orde 1 :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Langkah-langkah menyelesaikan SPD orde 1 linear :

- Menentukan matriks P yang mendiagonalkan A .
- Tulis SPD *dummy* dalam bentuk $U' = DU$
dimana $D = P^{-1}AP$
- Tentukan solusi SPD *dummy* $U' = DU$
- Solusi SPD adalah $X = PU$

Contoh 6 :

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial

$$\frac{dx_1}{dt} = 4x_1 - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

Jawab :

Tulis SPD dalam bentuk :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Dengan PK

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

Nilai eigen dari matriks koefisien, $\lambda = 2$ dan $\lambda = 3$

- BRE yang bersesuaian dengan $\lambda = 3 \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
- BRE yang bersesuaian dengan $\lambda = 2 \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Sehingga diperoleh $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Karena $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

maka SPD dummy berbentuk :

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Solusi SPD dummy adalah

$$u_1 = c_1 e^{3t} \quad \text{dan} \quad u_2 = c_2 e^{2t}$$

Solusi dari SPD

$$X = PU \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix}$$

atau

$$x_1 = 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

$$x_2 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$$

Contoh 8.9 :

Tentukan solusi dari masalah nilai awal

$$\frac{dp}{dt} = 2p(t) + q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = p(t) + 2q(t)$$

dengan kondisi awal

$$p(0) = 1 \text{ dan } q(0) = 3$$

Jawab :

Kita punya $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Maka Persamaan Karakteristiknya adalah

$$\begin{aligned}
 \det \{\lambda \cdot I - A\} = 0 &\Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -1 \\ -1 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} \\
 &\Leftrightarrow 0 = (\lambda - 2)(\lambda - 2) - 1 \\
 &\Leftrightarrow 0 = (\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 1 \\
 &\Leftrightarrow 0 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 \\
 &\Leftrightarrow 0 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)
 \end{aligned}$$

diperoleh $\lambda = 1$; $\lambda = 3$

Untuk $\lambda = 1$

$$(\lambda \cdot I - A) \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 &= -x_2 \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$

adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \text{ dimana } t \text{ merupakan parameter.}$$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$

adalah

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Untuk $\lambda = 3$

$$(\lambda \cdot I - A) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 &= x_2 \\ x_2 &= t \end{aligned}$$

Jadi vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$
adalah vektor tak nol yang berbentuk

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t, \quad \text{dimana } t \text{ merupakan parameter}$$

Jadi basis ruang eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$
adalah

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga Solusi Umum SPD $U' = D U$ adalah

$$U = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Dengan demikian solusi SPD kita adalah :

$$X = PU$$

atau

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_2 e^{3t} \end{pmatrix}$$

sehingga

$$p = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

$$q = c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$

Untuk $t = 0 \Rightarrow p(0) = 1$ dan $q(0) = 3$ sehingga

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix}$$

Dengan Eliminasi didapat $C_1 = 1$; $C_2 = 2$

Jadi solusi masalah nilai awal tersebut adalah

$$p(t) = 2e^{3t} - e^t$$

$$q(t) = 2e^{3t} + e^t$$

Latihan Bab 8

1. Tentukan basis ruang eigen dari $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
2. Diketahui : $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Apakah B matriks dapat didiagonalkan, jelaskan

3. Suatu Matriks $A_{2 \times 2}$ memiliki basis ruang eigen :

- $\lambda = -3 \implies \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\lambda = 1 \implies \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Tentukan matriks A !

4. Tentukan solusi dari masalah nilai awal :

$$\frac{dp}{dt} = 2p(t) + q(t)$$

$$\frac{dq}{dt} = p(t) + 2q(t)$$

dengan kondisi awal

$$p(0) = 1 \quad \text{dan} \quad q(0) = 3$$