Nama : Nanda Trilami Raina Arliani
NIM : 1101193395
Kelas : TT-4312

Latihan Soal

1. Himpunan W berisi Semua Vektor berbentuk (a,b,c) dimana b = a+c. Periksa apakah W Merupakan Subruang dari ruang Vektor R^3!

↳ $\vec{0} : (0,0,0) \in W \rightarrow W \neq \{\}$ dan $W \subset R^3$

$\vec{u} : (a,b,c) : a,b,c, \in R$ dan $b_1 = + c$

$\vec{v} : (a_2,b_2,c_2) ; a_2, b_2, c_2 \in R$ dan $b_2 = a_2 + c_2$

diberi k pada $\vec{v}$ sehingga $\vec{v} + kv \in W$

$\vec{u} + k\vec{v} = (a_1,b_1,c_1) + k(a_2,b_2,c_2)$

$= (a_1,b_1,c_1) + (ka_2, kb_2, kc_2)$

$= (a_1 + ka_2, b_1 + kb_2, c_1 + kc_2)$

Maka dari itu $v + kv \in W$ k berdasarkan teorema 2 W adalah Subruang dari R^3.

2. Himpunan W berisi Semua matriks berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dimana $a+b+c+d=0$. Periksa apakah W merupakan Subruang dari ruang Vektor R^3!

↳ $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$ Maka $W \neq \{\}$

$W \subset M_{2} \times_2$

$\vec{u} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \vec{v} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{bmatrix}$

$(a_1+a_2) + (b_1+b_2) + (a+c_2) + (d_1+d_2)$

$= (a_1+b_1+c_1+d_1) + (a_2+b_2+c_2+d_2)$

$= 0+0$

$= 0 \rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$

Terbukti W tertutup terhadap operasi penjumlahan

$K\vec{u} = k\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$

$ka_1 + kb_1 + kc_1 + kd_1 = k(a_1+b_1+c_1+d_1)$

$= k(0+0)$

$= k\vec{u} \in W$

Himpunan W tertutup terhadap operasi perkalian maka himpunan W Merupakan Subruang dari m(2x2), bukan Subruang dari Vektor R3

3). Nyatakanlah matriks $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ Sebagai kombinasi linier dari $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

$\hookrightarrow k_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} k_1 + 4k_3 & 2k_1 + k_2 - 2k_3 \\ -k_1 + 2k_2 & 3k_1 + 4k_2 - 2k_3 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} k_1 + 4k_3 = 6 \\ -k_1 + 2k_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 - 2k_3 = 3 \\ 3k_1 + 4k_2 - 2k_3 = 8 \end{matrix}\right] \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2b_1 + b_2 \\ b_1 + b_3 \\ -b_1 + b_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & -14 & 10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -b_2 + b_3 \\ -4b_2 + b_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 24 & 24 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{bmatrix} \frac{1}{24} b_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{bmatrix} \begin{matrix} -4b_3 + b_1 \\ 10b_3 + b_2 \\ -2b_3 + b_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} k_1 = 2 \\ k_2 = 1 \\ k_3 = 1 \end{matrix}$$

Maka $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ adalah kombinasi linear $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

4). Periksa apakah $\vec{a} = (7, 8, 9)$ merupakan kombinasi linier dari $\vec{u} = (0, -2, -2)$ dan $\vec{v} = (1, 3, -1)$.

$\hookrightarrow \vec{a} = k_1 \vec{u} + k_2 \vec{v}$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} k_2 = 7 \\ -2k_1 + k_2 = 8 \\ -2k_1 - k_2 = 9 \end{matrix}\right] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 8 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix} b_1 \leftrightarrow b_2 \begin{bmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \frac{1}{2} b_1 \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2b_1 + b_3 \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} 4b_2 + b_3 \begin{bmatrix} 1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 29 \end{bmatrix}$$

Baris terakhir pada matriks menunjukan bahwa SPL tidak konsisten (tidak mempunyai solusi) jadi tidak ada nilai k_1, k_2 yang memenuhi $\vec{a}$ tidak dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\vec{u} + \vec{v}$

5). Tentukan apakah Vektor-Vektor $\vec{V_1} = (2,-1,3), \vec{V_2} = (4,1,2), \vec{V_3} = (8,-1,8)$ tersebut merentang R^3!

↳ $\vec{a} = k_1(2,-1,3)\ k_2(4,1,2) + V_3(8,-1,8)$

$\vec{a} = k_1(2k_{12} - k, 3k_1) + (4k_2, k_2, 2k_2) + (8k_3 - k_3 - 8k_3)$

$(a,b,c) = (2k_1 + 4k_2 + 8k_3)(-k_1 + k_2 - k_3)(3k_1 + 2k_2 + 8k_2)$

$2k_1 + k_2 + 8k_2 = (1,1,2) + V_3(8,-1,8)$

$a = (2k_1, -k_1, 3k_1) + (4k_2, k_2, 2k_2) + (8k_3 - k_3 - 8k_3)$

$(a,b,c) = (12k_1 + 4k_2 + 8k_3)(-k_1 + k_2 - k_3)(3k_1 + 2k_2 + 8k_2)$

$$\begin{aligned} -2k_1 + 4k_2 + 8k_3 &= a \\ -k_1 + k_2 - k_3 &= b \\ 3k_1 + 2k_2 + 8k_3 &= c \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 8 & 4/2 \\ -1 & 1 & -1 & 4/2 + b \\ 3 & 2 & 8 & -34/2 + c \end{array}\right] \tfrac{1}{3} b_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 4 & a/2 \\ 0 & 1 & 1 & a/b + b/3 \\ 0 & -4 & -4 & -\frac{3a}{2} + c \end{array}\right]$$

$k_1 + 2k_3 = \dfrac{a - 4b}{b}$

$k_2 + k_3 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{3}$

$0 = \dfrac{-5a}{b} + \dfrac{4b}{3} + c \longrightarrow$ tidak konsisten

∴ Maka SPL tidak konsisten untuk nilai a,b,c maka himpunan $\vec{a}$ tidak merentang R_3.

6). Tentukan apakah Vektor-Vektor $\vec{V_1} = (3,1,4), \vec{V_2} = (2,-3,5), \vec{V_3} = (5,-2,9)$, dan $\vec{V_4} = (1,4,-1)$ tersebut merentang R^3!

↳ $\vec{a} = k_1\begin{bmatrix}3\\1\\4\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}2\\-3\\5\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}5\\-2\\9\end{bmatrix} + k_4\begin{bmatrix}1\\4\\1\end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} 2k_1 + 2k_2 + 5k_3 + k_4 &= a \\ k_1 + 3k_2 + 1k_3 + 4k_4 &= b \\ 4k_1 + 5k_2 + 9k_3 - k_4 &= c \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & a \\ 1 & -3 & -1 & 4 & b \\ 4 & 5 & 9 & -1 & c \end{array}\right] \tfrac{1}{3} b_1 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2/3 & 5/3 & 1/3 & a/3 \\ 1 & -3 & -2 & 4 & b \\ 4 & 5 & 9 & -1 & c \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} 1 & 3/3 & 5/3 & 1/3 & a/3 \\ 0 & -11/3 & -11/3 & 11/3 & -1/3 + b \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/3 & -49/2 + c \end{array}\right] -3/11 b_2 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 2/3 & 5/3 & 1/3 & a/3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{a-3b}{11} \\ 0 & 7/3 & 7/3 & -7/2 & -\frac{49}{3} + c \end{array}\right] \begin{array}{l} -2/3 b_2 + b_1 \\ \\ -7/3 b_2 + b_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{3a+2b}{11} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{a-3b}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11a}{11} + \frac{7b}{11} + c \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{l} k_1 + k_2 - k = \frac{3a+2b}{11} \\ \\ k_2 + k_3 - k_1 = \frac{a-3b}{11} \end{array}$$

agar spl itu konsisten haruslah $\rightarrow 0 = \frac{-11}{11} a + \frac{7b}{11} + c$

Kontradiksi dengan pengambilan Vektor Sembarang Unsur. unsurnya baru tak bersyarat, Maka himpunan $\vec{a}$ tidak Merentang R_3.