Examen de Mathématiques – Terminale

March 2, 2025

Exercice 1 : Fonctions et Dérivées

Soit $f(x) = \ln(x) - x$.
Questions :
a) Calculer $f'(x)$.
b) Étudier les variations de f sur $(0, +\infty)$.
c) Trouver l'équation de la tangente à f en $x = 1$.
Réponses de l'élève :
a) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$.
b) f est croissante sur $(0, 1)$ et décroissante sur $(1, +\infty)$ (approximation).
c) Pour $x = 1$, $f(1) = \ln(1) - 1 = -1$ et $f'(1) = 0$; donc la tangente est $y = -1$.

Correction:
b) Correct avec justification : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ s'annule pour $x = 1$. Pour $x \in (0, 1)$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $(0, 1)$. Pour $x \in (1, +\infty)$, $f'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $(1, +\infty)$.
c) La bonne équation de la tangente : la pente est $f'(1) = 0$, donc la tangente est constante et passe par $(1, f(1))$: $y = -1$.

Note : 2/6.

Exercice 2 : Limites et Continuité

Soit $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.
Questions :
a) Calculer $\lim_{x \to 0} g(x)$.
b) Montrer que g peut être rendue continue en $x = 0$ en posant $g(0) = 1$.
Réponses de l'élève :
a) $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$.
b) En posant $g(0) = 1$, la fonction devient continue en 0.

Correction:
a) Correct.
b) Justification manquante : Utilisation du développement de Taylor $e^x \approx$

$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$ pour $x \approx 0$ confirme que $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$, ainsi g est continue en 0 si $g(0) = 1$.

Note : 3/4.

Exercice 3 : Nombres Complexes

Soit $z = 1 + i$ et $w = 2 - i$.
Questions :
a) Calculer $z + w$ et $z \times w$.
b) Donner la forme trigonométrique de z.
Réponses de l'élève :
a) $z + w = 3 + 0i$ et $z \times w = 3 + i$ (approximation).
b) $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$.

Correction:
a) $z + w = 3 + 0i$ est correct, $z \times w = (1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$. Réponses correctes.
b) Correct.

Note : 5/5.

Exercice 4 : Intégrales

Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 (2x + 1)\, dx$.
Réponse de l'élève :
$I = \left[x^2 + x\right]_0^1 = 1 + 1 = 2$.

Correction:
La primitive de $2x + 1$ est $(2x + 1) = x^2 + x$, donc $I = \left[x^2 + x\right]_0^1 = (1^2 + 1) - (0^2 + 0) = 2$.

Note : 5/5.
Total : 15/20.