



main

RoboticsModule / Lessons / lectures / lecture_3.md

HatsanovaEvgenia [исправлена опечатка в лекции 3](#)

7a7aa5c · last week



231 lines (133 loc) · 12.2 KB

Preview

Code

Blame

Raw



Обратная задача кинематики.

Кинематическая декомпозиция.

Решение ОЗК по положению. Решение ОЗК по ориентации.

Обратная задача кинематики.

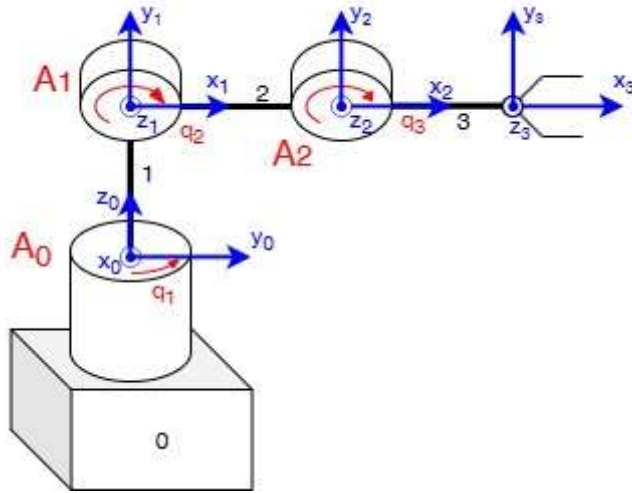
Обратная задача кинематики (ОЗК) — задача поиска набора подходящих конфигураций звеньев для перемещения схвата в желаемое положение. В отличие от прямой задачи кинематики, которая вычисляет положение и ориентацию схвата по заданным углам суставов, обратная задача решает противоположную задачу: определение углов суставов для достижения желаемого положения и ориентации схвата.

Эта задача является более сложной, чем ПЗК, поскольку может вести к неопределенности решения, т.е. одному и тому же набору положению рабочего органа в пространстве могут соответствовать разные конфигурации робота. Кроме того, решение ОЗК существенно зависит от конструкции манипулятора, что исключает возможность разработки единого способа решения ОЗК в общем случае для всех типов роботов.²

Существует множество методов для решения обратной задачи кинематики, их выбор зависит от конкретной ситуации. Мы воспользуемся самым простым методом, но если у Вас возникнет желание разобраться в других методах, изучите источники из библиографического списка.

Для моделирования будем задавать только положение схвата, не учитывая его ориентацию. Конечно, в реальной симуляции это нам не подойдет: в большинстве случаев ориентация схвата или рабочего органа крайне важна. Решение задачи о положении отдельно от задачи ориентации называется **кинематической декомпозицией**.

Напомним, как выглядит наш робот манипулятор:



В данном случае, все обобщенные координаты q_1 , q_2 и q_3 определяют положение схвата. Это не всегда так для манипуляторов разной конфигурации.

$$p_3^0(q) = \begin{bmatrix} x_3^0(q) \\ y_3^0(q) \\ z_3^0(q) \end{bmatrix}$$

=

$$\begin{bmatrix} (l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \cos q_1 \\ (l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \sin q_1 \\ l_1 + l_2 * \sin q_2 + l_3 * \sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

Получаем:

$$x = (l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \cos q_1$$

$$y = (l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \sin q_1$$

$$z = l_1 + l_2 * \sin q_2 + l_3 * \sin(q_2 + q_3)$$

Делим второе уравнение на первое:

$$\frac{y}{x} = \frac{(l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \sin q_1}{(l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \cos q_1} = \frac{\sin q_1}{\cos q_1} = \operatorname{tg}(q_1)$$

Получаем, что $q_1 = \arctg(\frac{y}{x})$, но если мы так все и оставим, то у нас будут проблемы, в разных частных случаях, например, если $x = 0$. Можно дополнить решение таким образом:

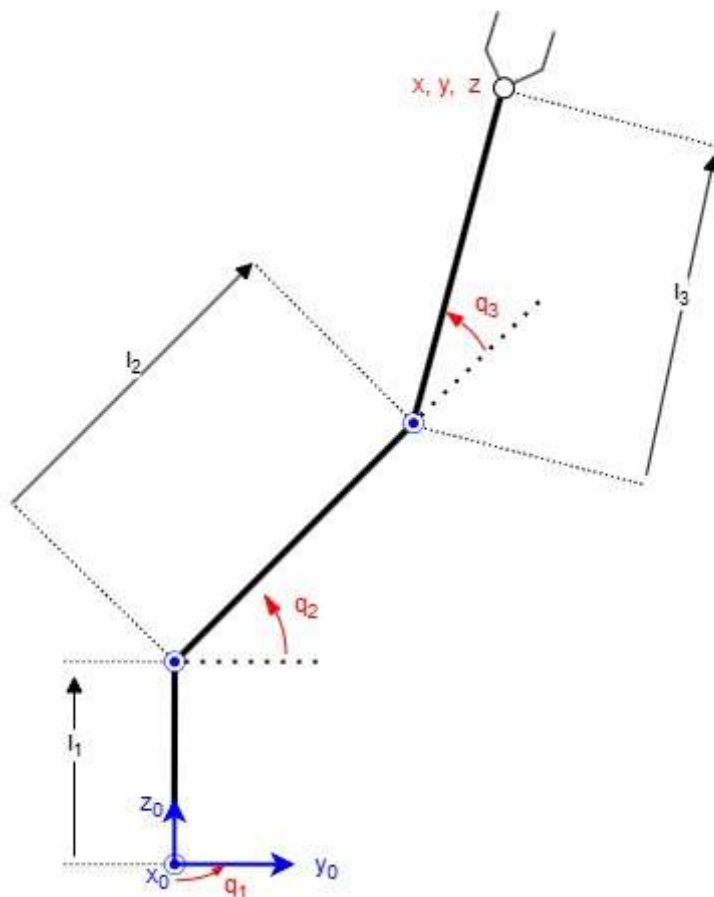
$$q_1 = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi, & x < 0, y < 0, \\ +\frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Но уже есть функция, которая дополняет решение таким же образом [8](#):

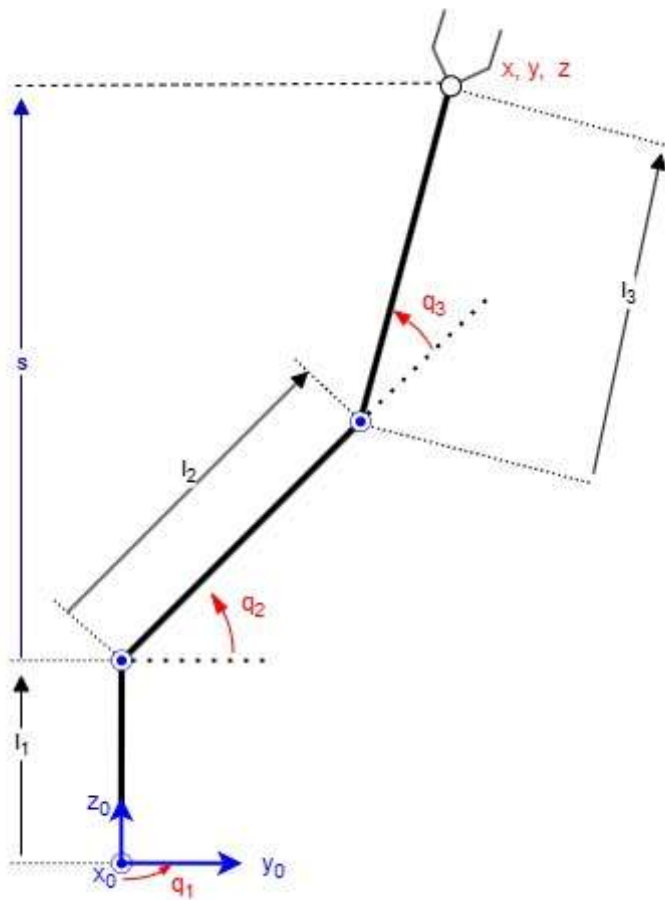
$$q_1 = \text{atan2}(y, x)$$

В любом случае у нас есть неопределенность, если $x = y = 0$, обобщенная координата q_1 при этом имеет бесконечное множество значений².

Обратим внимание на кинематическую схему манипулятора:



Видно, по координате z , есть две составляющие: $z = s + l_1$, где s зависит от q_2 и q_3 :



Из уравнения выше получаем, что:

$$s = l_2 * \sin q_2 + l_3 * \sin(q_2 + q_3)$$

Еще введем переменную $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\rho = \sqrt{((l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \cos q_1)^2 + ((l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)) * \sin q_1)^2}$$



$$= \sqrt{(l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3))^2 * (\cos q_1)^2 + (l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3))^2 * (\sin q_1)^2}$$



$$= \sqrt{(l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3))^2 * ((\cos q_1)^2 + (\sin q_1)^2)} =$$

$$= \sqrt{(l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3))^2 * 1} =$$

$$= \sqrt{(l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3))^2} =$$

$$= l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)$$

Посмотрим внимательно на получившиеся, в следствие замены переменных, уравнения:

$$s = l_2 * \sin q_2 + l_3 * \sin(q_2 + q_3)$$

$$\rho = l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3)$$

Заметим, что они равны с точностью до тригонометрических функций. Найдем сумму квадратов от этих выражений:

$$s^2 + \rho^2 = (l_2 * \sin q_2 + l_3 * \sin(q_2 + q_3))^2 + (l_2 * \cos q_2 + l_3 * \cos(q_2 + q_3))^2 =$$

$$= l_2^2 * \sin^2 q_2 + l_3^2 * \sin^2(q_2 + q_3) + 2 * l_2 * \sin q_2 * l_3 * \sin(q_2 + q_3) +$$

$$+ l_2^2 * \cos^2 q_2 + l_3^2 * \cos^2(q_2 + q_3) + 2 * l_2 * \cos q_2 * l_3 * \cos(q_2 + q_3) =$$

$$= l_2^2 + l_3^2 + 2 * l_2 * l_3 * (\sin(q_2 + q_3) * \sin q_2 + \cos(q_2 + q_3) * \cos q_2)$$

Повторим школьную тригонометрию:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha * \cos \beta + \sin \alpha * \sin \beta$$

Получаем:

$$s^2 + \rho^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2 * l_2 * l_3 * (\cos(q_2 + q_3 - q_2)) = l_2^2 + l_3^2 + 2l_2l_3 * \cos q_3$$

Отсюда получаем:

$$\cos q_3 = \frac{s^2 + \rho^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

$$s = z - l_1$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos q_3 = \frac{(z - l_1)^2 + (x^2 + y^2) - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

Кажется, что теперь можно просто взять $\arccos(\cos q_3)$, но если мы так сделаем, то потеряем половину решений $\cos q_3 = \cos(-q_3)$. Если истинно $q_3 = -60^\circ$; $\cos(-60^\circ) = 0.5$; $\arccos(0.5) = 60^\circ$ — вы попадаете в другую конфигурацию («локоть вверх» ↔ «локоть вниз»). На практике это будет значить, что для небольшого перемещения схвата могут в моменте сильно измениться положения звеньев, что не оптимально. Поэтому во многих источниках встречается другое решение:

По основному тригонометрическому тождеству:

$$\sin^2 q_3 + \cos^2 q_3 = 1$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

$$\sin q_3 = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{(z - l_1)^2 + (x^2 + y^2) - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \right)^2}$$

$$tg q_3 = \frac{\sin q_3}{\cos q_3} = \frac{\pm \sqrt{1 - \left(\frac{(z - l_1)^2 + (x^2 + y^2) - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3} \right)^2}}{\frac{(z - l_1)^2 + (x^2 + y^2) - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}}$$

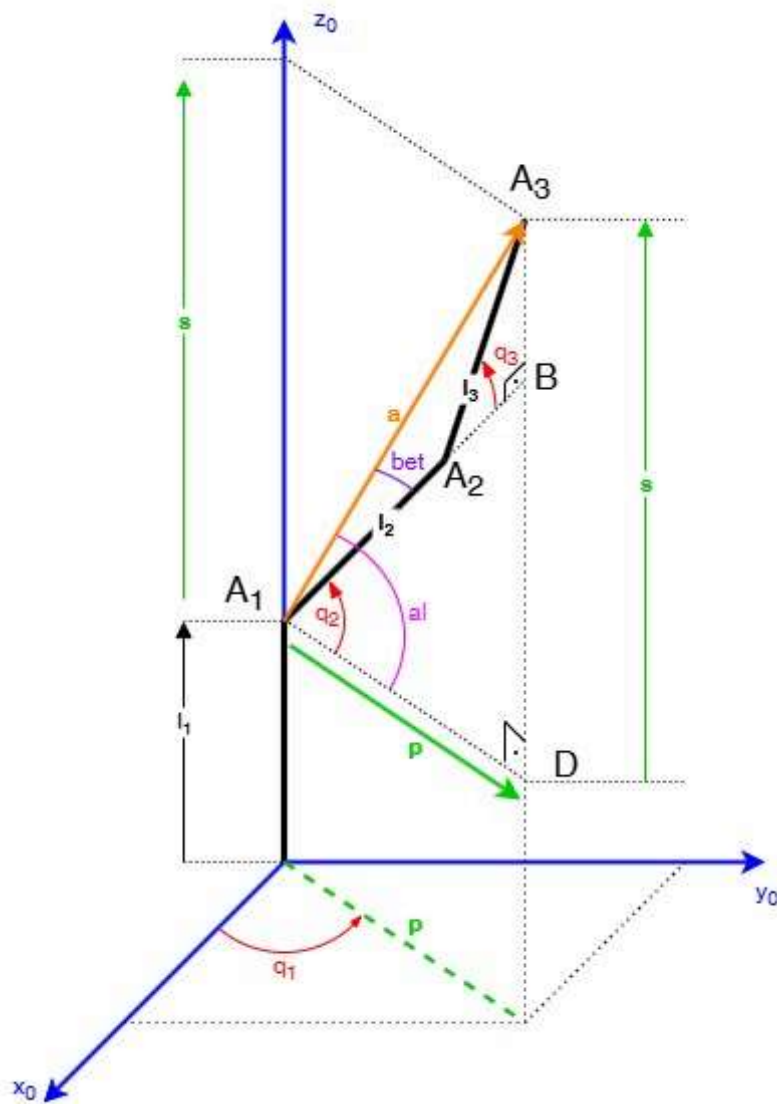
Для простоты записи обозначим через переменную $CO = \cos q_3$

$$tg q_3 = \frac{\sin q_3}{\cos q_3} = \frac{\pm \sqrt{1 - (CO)^2}}{CO}$$

Получаем, что $q_3 = \text{atan2}\left(\frac{\pm \sqrt{1 - (CO)^2}}{CO}\right)$, где $CO = \frac{(z - l_1)^2 + (x^2 + y^2) - l_2^2 - l_3^2}{2l_2 l_3}$

Теперь нам осталось выразить q_2 .

Для этого представим кинематическую схему в 3D, чтоб было удобнее разобраться:



Введем углы al и bet .

al - угол между a и ρ

bet - угол между a и l_2

Из кинематической схемы видно, что $al = bet + q_2$

$$q_2 = al - bet$$

Рассмотрим треугольник A_1A_3D , по определению $tg(al) = \frac{s}{\rho}$

Из треугольника A_2A_3B :

$$A_3B = l_3 * \sin q_3$$

$$A_2B = l_3 * \cos q_3$$

Из треугольника A_1A_3B :

$$tg(bet) = \frac{A_3B}{A_1B} = \frac{l_3 * \sin q_3}{A_1A_2 + A_2B} = \frac{l_3 * \sin q_3}{l_2 + l_3 * \cos q_3}$$

$$q_2 = al - bet = atan2(tg(al)) - atan2(tg(bet)) = atan2(\frac{s}{\rho}) - atan2(\frac{l_3 * \sin q_3}{l_2 + l_3 * \cos q_3})$$

Таким образом мы получили выражения для всех обобщенных координат q_1 , q_2 и q_3 :

$$q_1 = atan2(y, x)$$

$$q_2 = atan2(\frac{s}{\rho}) - atan2(\frac{l_3 * \sin q_3}{l_2 + l_3 * \cos q_3})$$

$$q_3 = atan2(\frac{\pm \sqrt{1 - (CO)^2}}{CO}), \text{ где } CO = \frac{(z - l_1)^2 + (x^2 + y^2) - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3}$$

В практике к этой лекции нужно запрограммировать решение обратной задачи кинематики для своей кинематической схемы.

Библиографический список.

- [1](#) Корецкий А.В., Осадченко Н.В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. – М.: Издательство МЭИ, 2000. – 48 с.
- [2](#) Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А., Методы управления робототехническими приложениями. Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2016. — 108 с.
- [3](#) В. Г. Хомченко, Робототехнические системы: Учебное пособие, Омск 2016 г. – 195 стр.
- [4](#) А.С. Климчик Р.И. Гомолицкий Ф.В. Фурман К.И. Сёмкин
Разработка управляющих программ промышленных роботов. Курс лекций
- [5](#) Коровин О.С. Обзор методов решения обратной задачи кинематики для манипулятора с избыточностью. Политехнический молодежный журнал, 2022, № 12(77).
- [6](#) Данилов А.В., Кропотов А.Н., Трифонов О.В. Общий подход к решению обратной задачи кинематики для манипулятора последовательной структуры с помощью конечного поворота и смещения
- [7](#) Анализ методов решения обратной задачи кинематики модульных реконфигурируемых систем
- [8](#) `numpy.atan2`