Кинематический анализ. Прямая задача кинематики. Параметры Денавита-Хартенберга. Расчет углов Эйлера.

Кинематический анализ.

Целью кинематического анализа является определение положения, скорости и ускорения произвольной точки звена исполнительного механизма (чаще всего схвата) в различных системах координат.

При решении прямой задачи о положении схвата манипулятора обычно используют метод преобразования координат. Методов преобразования координат несколько, но для манипуляторов обычно используется метод Денавита и Хартенберга.

Для описания геометрии робота-манипулятора используют так называемую **кинематическую схему** (кинематическую цепь), которая представляет собой графическое изображение последовательности звеньев манипулятора, соединенных между собой сочленениями.

Различают два базовых (элементарных) типа сочленений с одной степенью свободы: **вращательный** и **поступательный**. При наличии первого из них относительное расположение смежных звеньев определяется угловой переменной, при наличии второго — линейным смещением. В обоих случаях эти переменные называются обобщенными координатами и обозначаются q_i.

Кинематический анализ робота-манипулятора предполагает решение двух основополагающих задач: прямой и обратной задач кинематики[2].

Прямая задача кинематики.

Прямая задача кинематики отвечает на вопрос: где будет находится и как будет ориентирован схват или рабочий орган манипулятора, при заданных значениях обобщенных координат. Решение ПЗК (Прямой задачи кинематики) используется при моделировании движения манипулятора, управлении роботами, расчёте траекторий и симуляции в CAD/CAM.

Если рассматривать схват манипулятора как твердое тело, без привязки к самому манипулятору, то его положение в трехмерном пространстве задается шестью значениями: три для координат и три для углов.

Использование метода, предложенного в 1955 г. учеными Жаком Денавитом и Ричардом Хартенбергом, позволяет сократить это число до четырех параметров, называемыми параметрами Денавита-Хартенберга. Такое упрощение достигается с помощью стандартизированного алгоритма привязки систем координат к звеньям манипулятора[2].

Согласно методу Денавита-Хартенберга решение состоит из следующих шагов:

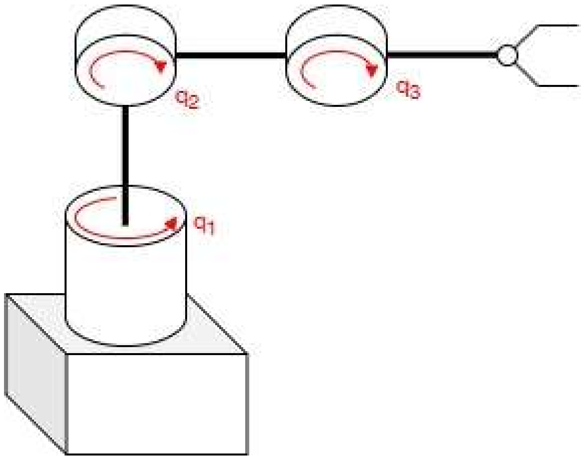
- Шаг 1. Привязка систем координат к звеньям.
- Шаг 2. Определение параметров Денавита-Хартенберга.
- Шаг 3. Построение матриц однородного преобразования.
- Шаг 4. Расчет углов Эйлера по итоговой матрице вращения.

Расставляем системы координат. Это не такая тривиальная задача, как может показаться на первый взгляд. К тому же метод Денавита-Хартенберга не подразумевает единственно-верного способа расстановки систем координат, но итоговый результат должен быть одинаковым.

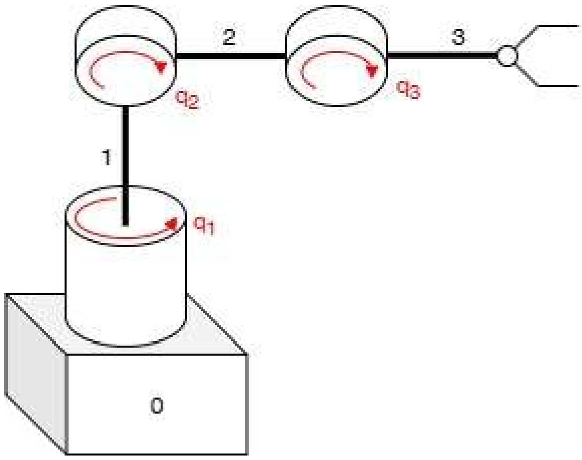
Введем определения: **Кинематическая пара** – подвижное соединение двух кинематических звеньев, допускающее их вполне определенное движение относительно друг друга. **Кинематическое звено** – совокупность жестко соединенных друг с другом тел, входящих в состав механизма, в данном случае в состав манипулятора.

Параметры Денавита-Хартенберга.

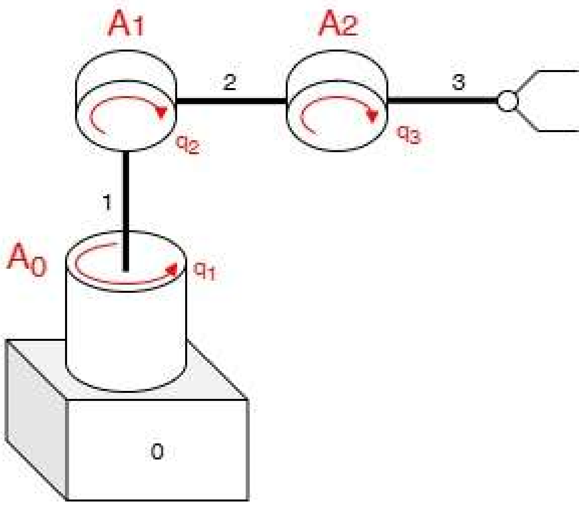
Разберем метод Денавита-Хартенберга на примере этой кинематической схемы:



Определим звенья у манипулятора. Пронумеруем кинематические звенья от неподвижного звена до наиболее удаленного, на котором закреплен схват, присвоив им соответственно номера от 0 до n, где n – число подвижных звеньев манипулятора.



Обозначим кинематические пары символом A_i, нижний индекс которого равен меньшему из номеров звеньев, образующих кинематическую пару.

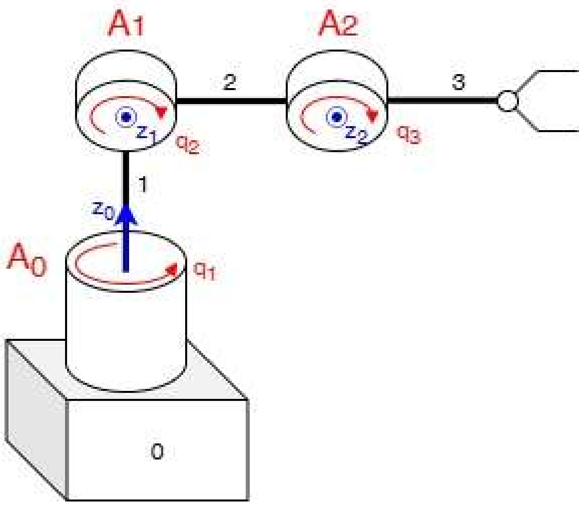


Введем понятие оси z_i i-й кинематической пары.

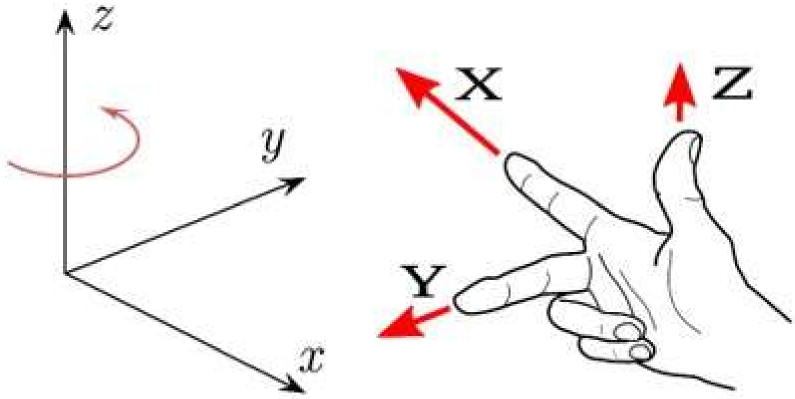
Осью z_i i-й вращательной кинематической пары (A_i), соединяющей i-ое звено с (i+1)-м является ось шарнира кинематической пары. Эту ось будем считать принадлежащей i-му звену и жестко с ним соединенной. Именно вокруг этой оси вращается (i+1)-е звено относительно i-го.

Осью z_i *поступательной пары* является какая-либо из прямых, параллельная направляющей данной поступательной пары.

Если ось z_i не параллельна оси z_{i-1}, то ее рекомендуется направлять так, чтобы она пересекалась с этой осью. За положительное направление оси z_i можно взять любое, в частности, направления снизу вверх, слева направо, к наблюдателю от наблюдателя или близкие к ним направления.

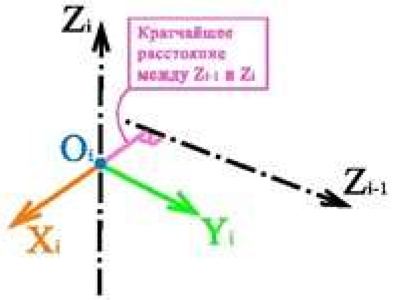


Теперь нужно расставить начала систем координат и оставшиеся оси. На самом деле по правилам мы расставляем только ось x, а ось y встает так, чтобы образовалась правая тройка векторов. Напомним, что правая тройка векторов



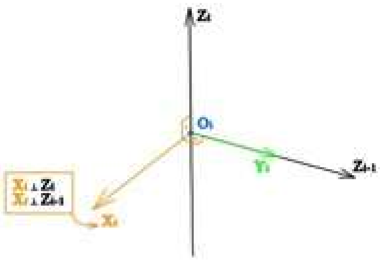
выглядит так:

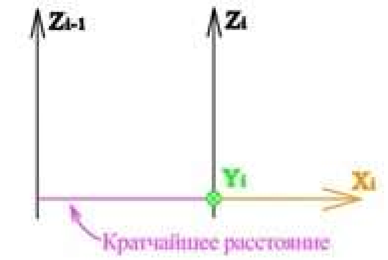
Есть общее правило расстановки: начало координат располагается в точке пересечения линии кратчайшего расстояния между осями z_i и z_{i-1} с осью z_i. В этом случае ось x_i направляется по линии кратчайшего расстояния в сторону от оси z_{i-1} к оси z_i. Это наиболее общий случай. Другие варианты взаиморасположения осей z_{i-1} и z_i следует рассматривать как частные



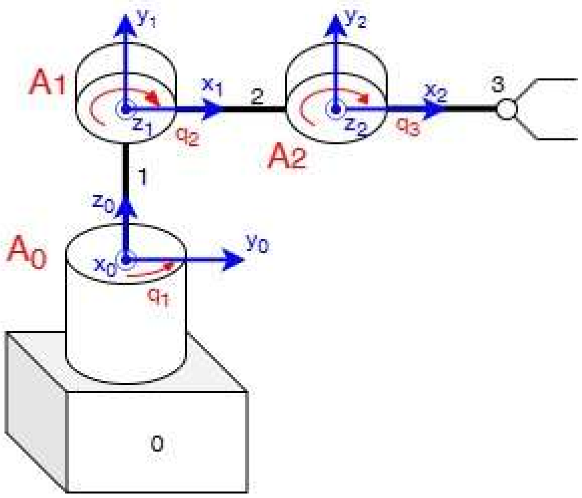
рассмотренного.

Вот частные случаи расположений осей:



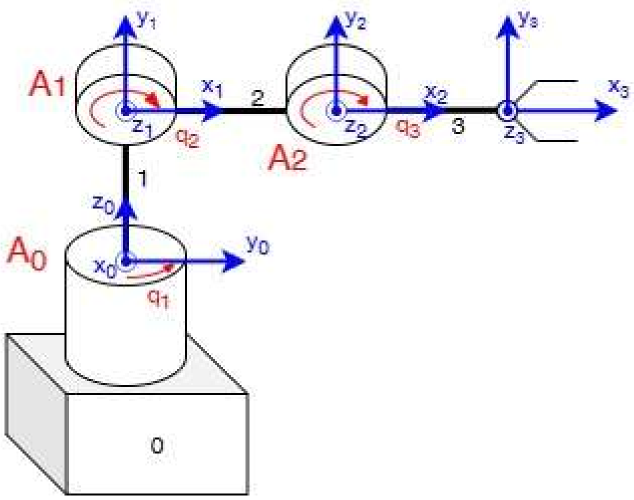


А вот так расположились оси на кинематической схеме:



Эти правила не действуют в полной мере при выборе системы координат, связанной со стойкой (звено 0), так как отсутствует (i-1)–я кинематическая пара, и системы координат, связанной с последним звеном, на котором закрепляется схват, так как это последнее звено не содержит кинематической пары для соединения со следующим звеном. Начало системы координат, связанной со стойкой, может быть расположено в любой точке оси z_0, а направление оси x_0 принимается произвольно по дополнительным условиям[3], если это не указано отдельно в документации робота.

Начало A_n системы координат, связанной с последним n-м звеном манипулятора, на котором закреплен схват, располагается в точке, принимаемой за центр схвата (за характерную точку схвата), а ось x_n направляется перпендикулярно оси z_{n-1}. Оси z_n может быть назначено произвольное направление, например, по оси захватываемой детали или технологического инструмента или перпендикулярно ей.



Параметры звеньев по соглашению D–H [4]

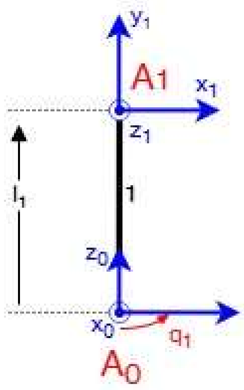
1. a_i — расстояние вдоль x_i от точки A_i до пересечения осей x_i и z_{i-1};

2. d_i — расстояние вдоль z_{i-1} от точки A_{i-1} до пересечения осей x_i и z_{i-1}. Параметр d_i переменный, если сочленение i поступательное;

3. α_i — угол между z_{i-1} и z_i, измеренный вокруг оси x_i;

4. θ_i — угол между x_{i-1} и x_i, измеренный вокруг оси z_{i-1}.Параметр θ_i переменный, если сочленение i вращательное.

Для первого звена (i=1):



1. a_1 — расстояние вдоль x_1 от точки A_1 до пересечения осей x_1 и z_0; $a_1 = 0$

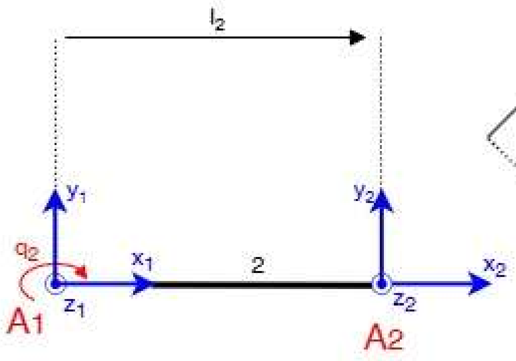
2. d_1 — расстояние вдоль z_0 от точки A_0 до пересечения осей x_1 и z_0. Параметр d_1 переменный, если сочленение 1 поступательное; $d_1 = l_1$

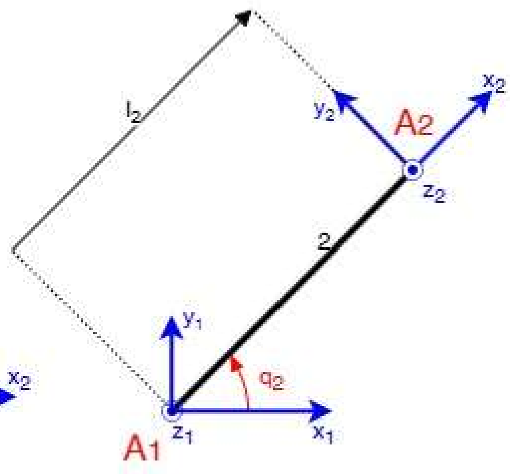
3. α_1 — угол между z_0 и z_1, измеренный вокруг оси x_1; $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$

4. θ_1 — угол между x_0 и x_1, измеренный вокруг оси z_0.Параметр θ_1 переменный, если сочленение 1 вращательное.
$\theta_1 = q1$

Для второго звена (i=2):

Покажем, как именно отмеряем угол q_2, чтоб корректно рассчитать параметры.





1. a_2 — расстояние вдоль x_2 от точки A_2 до пересечения осей x_2 и z_1; $a_2 = l_2$

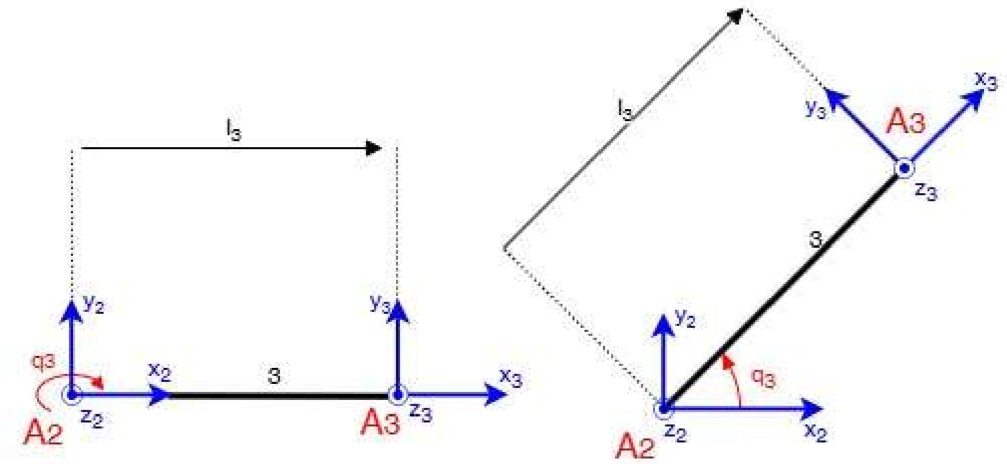
2. d_2 — расстояние вдоль z_1 от точки A_1 до пересечения осей x_2 и z_1. Параметр d_2 переменный, если сочленение 2 поступательное; $d_2 = 0$

3. α_2 — угол между z_1 и z_2, измеренный вокруг оси x_2; $\alpha_2 = 0$

4. θ_2 — угол между x_1 и x_2, измеренный вокруг оси z_1.Параметр θ_2 переменный, если сочленение 2 вращательное.
$\theta_2 = q_2$

Для третьего звена (i=3):

Покажем, как именно отмеряем угол q_3, чтоб корректно рассчитать параметры.



1. a_3 — расстояние вдоль x_3 от точки A_3 до пересечения осей x_3 и z_2; $a_3 = l_3$

2. d_3 — расстояние вдоль z_2 от точки A_2 до пересечения осей x_3 и z_2. Параметр d_3 переменный, если сочленение 3 поступательное; $d_3 = 0$

3. α_3 — угол между z_2 и z_3, измеренный вокруг оси x_3; $\alpha_3 = 0$

4. θ_3 — угол между x_2 и x_3, измеренный вокруг оси z_2.Параметр θ_3 переменный, если сочленение 3 вращательное.
$\theta_3 = q_3$

Таблица параметров Денавита-Хартенберга

Параметр	a_i	d_i	α_i	θ_i
Звено 1	0	l_1	$\frac{pi}{2}$	q_1
Звено 2	l_2	0	0	q_2
Звено 3	l_3	0	0	q_3

Каждое из упомянутых элементарных движений описывается соответствующей частной матрицей перехода:

1. Поворот вокруг оси z_{i-1} на угол Θ_i:

$$R_{\Theta_i}^{z_{i-1}} = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i & 0 & 0 \\ sin\theta_i & cos\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Сдвиг по оси z_{i-1} на величину d_i:

$$T_{d_i}^{z_{i-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Сдвиг по оси x_i на величину a_i:

$$T_{a_i}^{x_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Поворот вокруг оси x_i на угол α_i:

$$R_{\alpha_i}^{x_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha_i & -sin\alpha_i & 0 \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

На предыдущем шаге были получены четыре параметры для каждого звена манипулятора. Теперь из них необходимо построить соответствующие матрицы однородного преобразования следующим образом:

$A_i = R_{\theta_i} * T_{d_i} * T_{a_i} * R_{\alpha_i}$

$$A_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i cos\alpha_i & sin\theta_i sin\alpha_i & a_i cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i cos\alpha_i & -cos\theta_i sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Подставив все параметры Денавита-Хартенберга, получим n матриц однородного преобразования:

$$A_1 = \begin{bmatrix} cosq_1 & -sinq_1 * cos\frac{pi}{2} & sinq_1 * sin\frac{pi}{2} & 0 * cosq_1 \\ sinq_1 & cosq_1 * cos\frac{pi}{2} & -cosq_1 * sin\frac{pi}{2} & 0 * sinq_1 \\ 0 & sin\frac{pi}{2} & cos\frac{pi}{2} & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} cosq_1 & -sinq_1 * 0 & sinq_1 * 1 & 0 * cosq_1 \\ sinq_1 & cosq_1 * 0 & -cosq_1 * 1 & 0 * sinq_1 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} cosq_1 & 0 & sinq_1 & 0 \\ sinq_1 & 0 & -cosq_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} cosq_2 & -sinq_2 & 0 & l_2 * cosq_2 \\ sinq_2 & cosq_2 & 0 & l_2 * sinq_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} cosq_3 & -sinq_3 & 0 & l_3 * cosq_3 \\ sinq_3 & cosq_3 & 0 & l_3 * sinq_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Итоговую матрицу, связывающую все системы координат, как и в случае с матрицами вращения, можно получить последовательным перемножением:

$$T = \begin{bmatrix} cosq_1 * cos(q_2 + q_3) & -cosq_1 * sin(q_2 + q_3) & sinq_1 & (l_2 * cosq_2 + l_3 * cos(q_2 + q \\ sinq_1 * cos(q_2 + q_3) & -sinq_1 * sin(q_2 + q_3) & -cosq_1 & (l_2 * cosq_2 + l_3 * cos(q_2 + q \\ sin(q_2 + q_3) & cos(q_2 + q_3) & 0 & l_1 + l_2 * sinq_2 + l_3 * sin(q \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_n^0(q) = \begin{bmatrix} R_n^0(q) & p_n^0(q) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Здесь матрица вращения $R_n^0(q)$ и вектор $p_n^0(q)$ задают, соответственно, ориентацию и положение системы координат, связанной со схватом или рабочим органом, относительно базовой системы в зависимости от конфигурации манипулятора, заданной вектором обобщенных координат q.

Нами на предыдущем шаге была получена матрица однородного преобразования T, которая и содержит искомую информацию, представленную в виде матрицы вращения $R_3^0(q)$ и вектора $p_3^0(q)$.

Касательно линейных (декартовых) координат, вектор $p_3^0(q)$ имеет следующие компоненты:

$$p_3^0(q) = \begin{bmatrix} x_3^0(q) \\ y_3^0(q) \\ z_3^0(q) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} (l_2 * cosq_2 + l_3 * cos(q_2 + q_3)) * cosq_1 \\ (l_2 * cosq_2 + l_3 * cos(q_2 + q_3)) * sinq_1 \\ l_1 + l_2 * sinq_2 + l_3 * sin(q_2 + q_3) \end{bmatrix}$$

которые и являются решением ПЗК по положению в явном виде.

Заключение

Прямая задача кинематики позволяет определить положение и ориентацию рабочего органа манипулятора при заданных обобщённых координатах. Для её решения используется метод преобразований координат, наиболее удобной и распространённой формой которого является метод Денавита–Хартенберга.

Метод DH позволяет описать всю кинематическую цепь через четыре параметра для каждого звена, что упрощает математический аппарат и делает задачу универсальной для любых роботов-манипуляторов. Последовательное перемножение матриц однородных преобразований даёт итоговую матрицу, содержащую как матрицу вращения $R_n^0(q)$, так и вектор положения $p_n^0(q)$.

Таким образом, мы получили явное решение прямой задачи кинематики, это решение является фундаментом для дальнейшего изучения обратной задачи кинематики, анализа движения, расчёта траекторий и управления роботами.

Библиографический список.

[1] Корецкий А.В., Осадченко Н.В. Компьютерное моделирование кинематики манипуляционных роботов. – М.: Издательство МЭИ, 2000. – 48 с.

[2] Борисов О.И., Громов В.С., Пыркин А.А., Методы управления робототехническими приложениями. Учебное пособие. — СПб.: Университет ИТМО, 2016. — 108 с.

[3] В. Г. Хомченко, Робототехнические системы: Учебное пособие, Омск 2016 г. – 195 стр.

[4] FORWARD KINEMATICS: THE DENAVIT-HARTENBERG CONVENTION