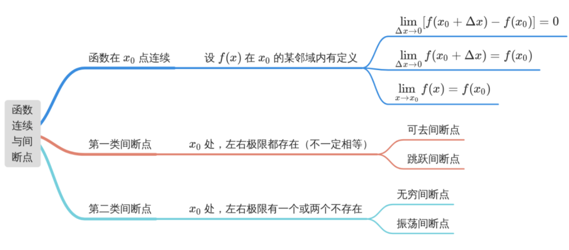
函数的连续性 Continuous of function



1. 点连续：左极限=右极限=极限值=函数值
 1.1定义1
 1.2定义2
 1.3定义3
 1.4函数的间断点
 1.5运算法则
2.区间连续
3.单侧连续

1. 点连续

1.1 定义一

对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

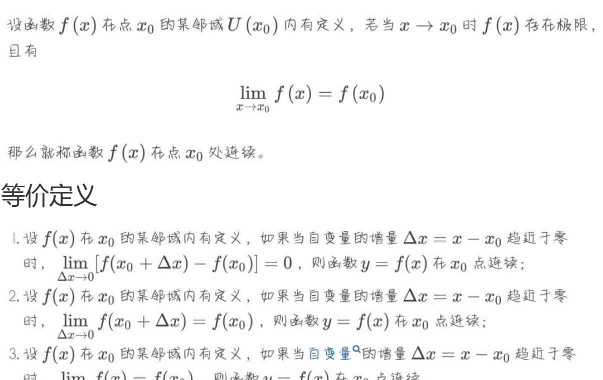
这一定义通常被用来证明函数在某点是连续的。

1.2 定义二

设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于 0 时，对应的函数增量 Δy 也趋向于 0，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{或} \lim_{\Delta x\to 0}\Delta[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。



1.3 定义三

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 存在极限，且有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

等价定义

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋近于零时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续；
2. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋近于零时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续；
3. 设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，如果当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0$ 趋近于零时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续。

更多的情况下，我们一般使用第3个等价定义，我们用 $\varepsilon-\delta$ 语言来描述第3个等价定义：

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义。如果对任意的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使当 $|x-x_0|<\delta$（*相较极限定义中 $0<|x-x_0|<\delta$，少了左半边大于0的部分，这样保证了 x 可以取值为 x_0，即 $f(x_0)$ 存在*）时，不等式 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，对比极限定义，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，再根据本文第3个等价定义，也就恰好证明了函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续。

1.4 函数的间断点

根据以上定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续必须满足：

$a.\ f(x)$ 在点x_0处有定义;

$b.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在;

$c.\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$;

$d.\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,

上述条件只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续或间断，并称点 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

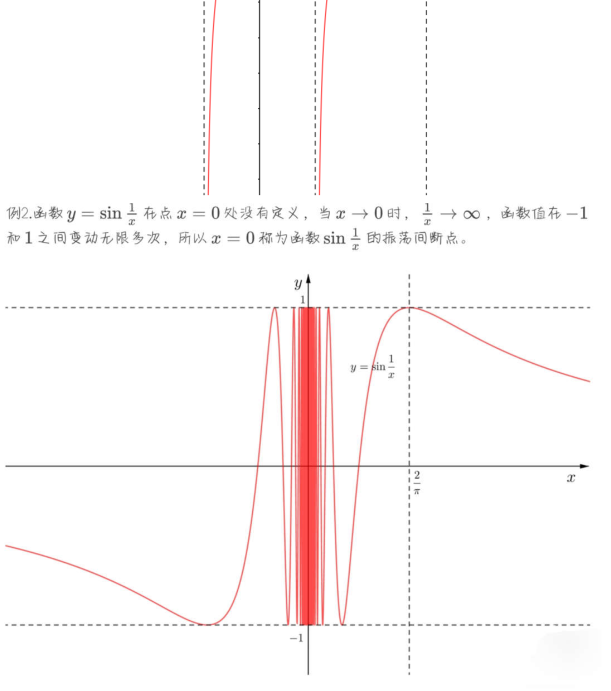
类别.

① 如果 x0 是 f(x) 的间断点，左极限 f(x0−) 与右极限 f(x0+) 都存在（不一定相等），则称 x0 为第一类间断点（可去间断点、跳跃间断点）。

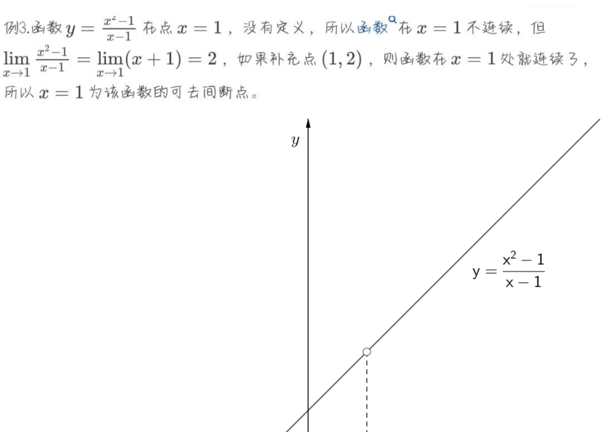
②如果 f(x0) 左右极限有一个不存在或两个都不存在，则称 x0 为第二类间断点（无穷间断点、振荡间断点）。

例子

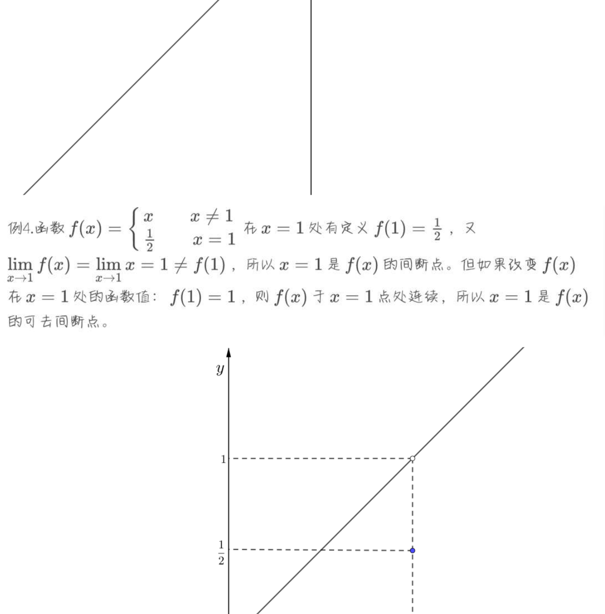
例1.正切函数 $y=\tan x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处没有定义，所以破坏了等式 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=f(\frac{\pi}{2})$，故 $x=\frac{\pi}{2}$ 是 $y=\tan x$ 的间断点。又 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\infty$，故称 $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $\tan x$ 的无穷间断点。



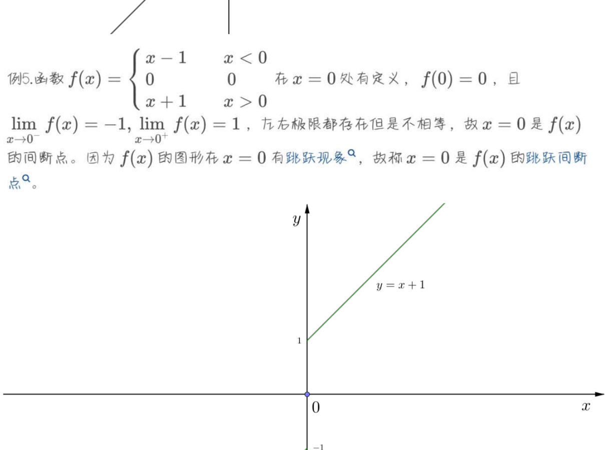
例2.函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在点 $x=0$ 处没有定义，当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}\to\infty$，函数值在 -1 和 1 之间变动无限多次，所以 $x=0$ 称为函数 $\sin\frac{1}{x}$ 的振荡间断点。



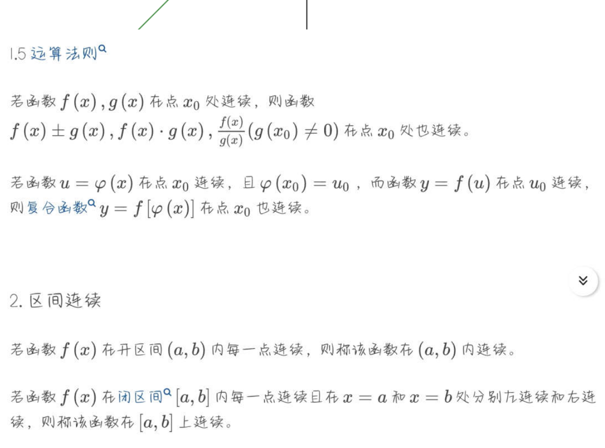
例3.函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 在点 $x=1$，没有定义，所以函数在 $x=1$ 不连续，但 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，如果补充点 $(1,2)$，则函数在 $x=1$ 处就连续了，所以 $x=1$ 为该函数的可去间断点。



例4.函数 $f(x)=\begin{cases} x & x\neq 1\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处有定义 $f(1)=\frac{1}{2}$，又 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} x=1\neq f(1)$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点。但如果改变 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的函数值：$f(1)=1$，则 $f(x)$ 于 $x=1$ 点处连续，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。



例5.函数 $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<0\\ 0 & 0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处有定义，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，左右极限都存在但是不相等，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点。因为 $f(x)$ 的图形在 $x=0$ 有跳跃现象，故称 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。



1.5 运算法则

若函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $f(x)\pm g(x), f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 处也连续。

若函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 也连续。

2. 区间连续

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点连续，则称该函数在 (a,b) 内连续。

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 内每一点连续且在 $x=a$ 和 $x=b$ 处分别左连续和右连续，则称该函数在 $[a,b]$ 上连续。

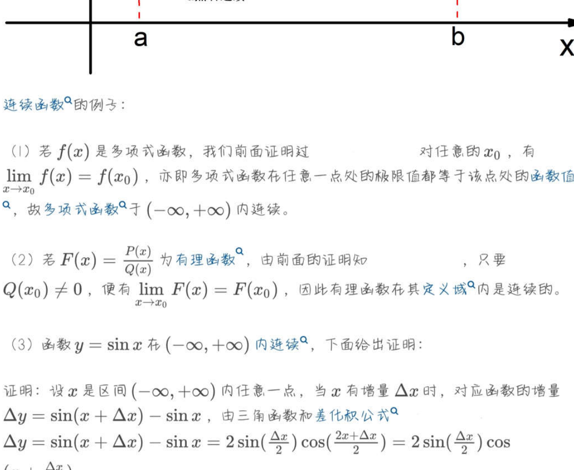
3.单侧连续

- 函数的单侧连续概念：

如果函数 $f(x)$ 左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$ 存在且等于 $f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续；如果右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$ 存在且等于 $f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 于 x_0 点右连续。

注：①函数在一点连续的充要条件是在该点处既左连续又右连续。

② 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点连续，则称 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上的连续函数，或称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续；函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，是指 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 连续，且于左端点 a 右连续，右端点 b 左连续。关于左右端点连续的描述如下图所示：



连续函数的例子：

（1）若 $f(x)$ 是多项式函数，我们前面证明过 对任意的 x_0，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，亦即多项式函数在任意一点处的极限值都等于该点处的函数值，故多项式函数于 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

（2）若 $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为有理函数，由前面的证明知 ，只要 $Q(x_0)\neq 0$，便有 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$，因此有理函数在其定义域内是连续的。

（3）函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，下面给出证明：

证明：设 x 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点，当 x 有增量 Δx 时，对应函数的增量 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$，由三角函数和差化积公式
$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(\frac{2x+\Delta x}{2})=2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$
$\xrightarrow{|\cos(x+\frac{\Delta x}{2})|\leq 1} |\Delta y|=|2\sin(\frac{\Delta x}{2})\cos(x+\frac{\Delta x}{2})|\leq|2\sin(\frac{\Delta x}{2})|=2|\sin(\frac{\Delta x}{2})|$

下面再补充一个例题：

例6：证明函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续且 $f(x_0)\neq 0$，则存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$，使当 $U(x_0)$ 时，$f(x)\neq 0$。

证明：由于 $f(x)$ 于 x_0 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\neq 0$，由第七讲中极限的保号性定理之定理1'（戳我了解），存在 x_0 的某去心邻域 $U(x_0)$，使当 $U(x_0)$ 时，$|f(x)|>\frac{|f(x_0)|}{2}$，故当 $x\in U(x_0)$ 时，$f(x)\neq 0$。