函数极限 Limit of function

1. 自变量趋近于有限值时函数的极限

1.1 描述性定义

如果在 $x\to x_0$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限接近于确定的常数 A，那么就说 A 是 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} f(x)\to A(x\to x_0)$$

1.2 精确定义

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} f(x)\to A(x\to x_0)$$

通常使用精确定义来证明函数极限的存在。

1.3 极限的局部保号性

定理1：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0(A<0)$，那么存在 x_0 的去心邻域，当 x 在该邻域时，有 $f(x)>0(f(x)<0)$。

定理2：如果在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x)\ge 0(f(x)\le 0)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，那么 $A\ge 0(A\le 0)$。

1.4 单侧极限

如果对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$。

如果对 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists\delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$。

函数极限与单侧极限的关系：当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是函数 $f(x)$ 左极限、右极限都存在且相等。即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

通常使用这一性质来反证函数在某点不存在极限。

2. 自变量趋近于无穷大时函数的极限

2.1 定义

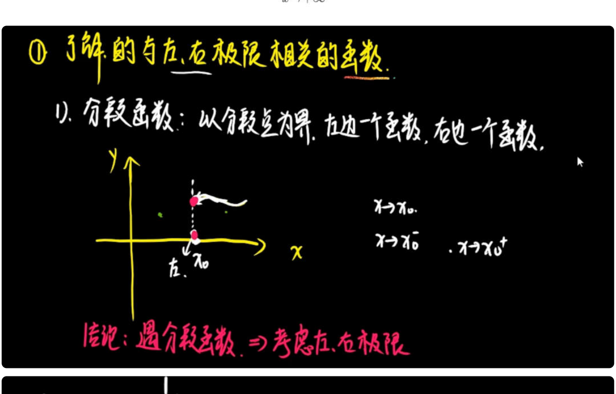
设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义。如果对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

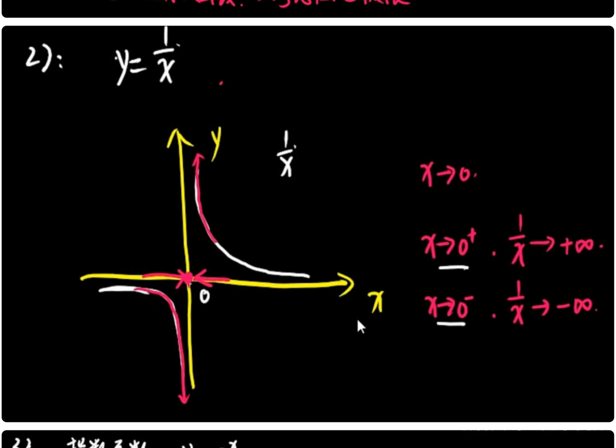
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \text{或} f(x)\to A(x\to\infty)$$

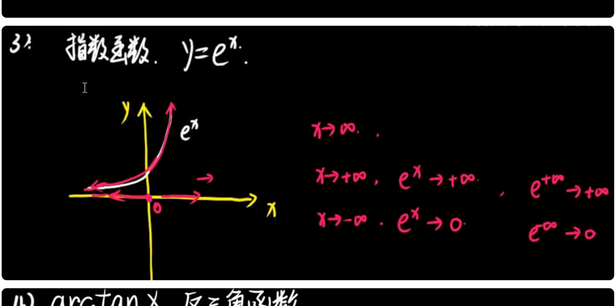
2.2 单边极限 (左右极限)

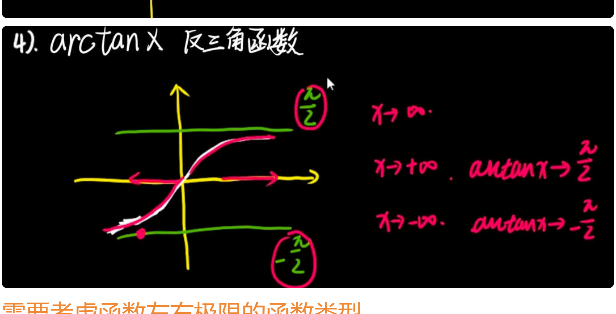
如果对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，使当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$。

① 了解的与左、右极限相关的函数.









需要考虑函数左右极限的函数类型

① 分段函数 → 分段点

② 含绝对值的函数. $|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ -x & x\le 0.\end{cases}$

③ 遇 e^{∞}. $\frac{c}{0}$. $\arctan\infty$.. $\quad x\to 0 \quad e^{\frac{1}{x}}$.

$x\to 0^+$. $\frac{1}{x}\to\frac{1}{0^+}\to+\infty$, $\therefore e^{\frac{1}{x}}\to e^{+\infty}\to+\infty$.

$x\to 0^-$ $\frac{1}{x}\to\frac{1}{0^-}\to-\infty$. $\therefore e^{\frac{1}{x}}\to e^{-\infty}\to 0$.

如果对于 $\forall\varepsilon>0$，总 $\exists X>0$，使当 $x<-X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$

函数极限与单边极限的关系：

左右极限存在且相等

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

3. 函数极限的运算法则

$a.\ \lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

$b.\ \lim[f(x)\times g(x)]=\lim f(x)\times\lim g(x)$

$c.\ \lim[f(x)\div g(x)]=\lim f(x)\div\lim g(x)\ [\lim g(x)\ne 0]$

$d.\ \lim[cf(x)]=c\lim f(x)$，$c$ 为常数

$e.\ \lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$，$n$ 为正整数

$f.$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，则复合函数 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A$

$g.$ 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$；若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\infty$

4. 相关定理

4.1 海涅定理 Heine theorem

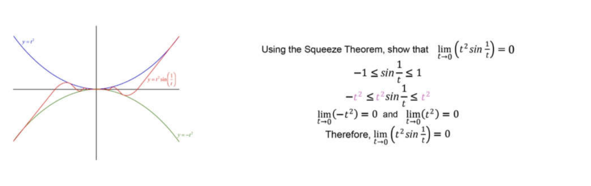
海涅定理表明了函数极限和数列极限的关系。根据海涅定理，求函数极限则可化为求数列极限，同样求数列极限也可转化为求函数极限。

海涅定理表明如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\ne x_0$，$n\in N^+$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$。

4.2 夹逼定理 Squeeze Theorem

设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x)\le f(x)\le\phi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\phi(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

举例：



4.3 洛必塔法则 L'Hôpital's rule

洛必达法则是利用导数来计算具有不定型的极限的方法。不严格的说，洛必达法则就是在 $\frac{0}{0}$ 型和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型时，有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

更多内容可参考洛必达法则。

举例：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$

2.求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$

解：$y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x$，

$\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)}{x^{-1}}$，

根据洛必达法则，$\ln y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{-1}\frac{d}{dx}(x^{-1}+1)}{\frac{d}{dx}(x^{-1})}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)}=1$，

$e^{\ln y}=e^1$，所以 $y=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)^x=e$。

总结见下：　非零因子先求；　0×有界函数=0

求极限的考点与破解方式：

考点1：1^∞、∞^0、……、破解：等价无穷小

考点2：$\frac{0}{0}$、$\frac{\infty}{\infty}$、……、破解：洛必达法则　$\frac{0}{0}\begin{cases}\text{等价}\\\text{洛}\end{cases}$　$\frac{\infty}{\infty}\begin{cases}\text{(幂函数)抓大头}\\\text{洛}\end{cases}$

考点3：$x\to\infty$、……、破解：倒带换

考点4：e^x、$cos x$、……、破解：泰勒公式

考点5：$\sqrt{\cdots\cdots}$，幂指数、……、破解：拉氏中值

考点6 $0\cdot\infty$ 型极限：下放、洛必达.

$0\cdot\infty\Rightarrow\begin{cases}\text{对0取倒数.下放作分母} & 0\cdot\infty=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}=\frac{\infty}{\infty}\ \text{抓、洛}\\ \text{对}\infty\text{取倒数}\sim & 0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}\ \text{等、洛}\end{cases}$

注：下放原则 ⇒ ① 一般来讲. 下放简单易求导的函数.

② 遇到有三角函数 ($\tan x$, $\cot x$). 先化简. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$. $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$. $\sec x=\frac{1}{\cos x}$

若为幂·对数 ($x^a\cdot\ln\square$) 形式 $\quad x\to 0$, $0\cdot\infty$

则式子 $\lim\limits_{x\to 0} x^a\cdot\ln x=0$

考点7 $\infty-\infty$ 型函数

$\infty-\infty$ 型极限计算

题型：$\begin{cases}\text{分式}\\\text{根式}\end{cases}$　变为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型计算.

解法：$\begin{cases}\text{分式}\to\text{通分.}\\\text{根式}\to\text{有理化. 利用}(a+b)(a-b)=a^2-b^2\text{. 去根号.}\end{cases}$

例题

求解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin x}{x^3}\right)$

错解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^3}\right)$ $\quad x\to 0$ $\sin x\sim x$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)$ $\quad$ 泰勒 → 误差 精度

$=0$ (经典错误)

正解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x^3}-\frac{\sin x}{x^3}\right)$ $\quad x\to 0$. $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ $\quad\frac{0}{0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}$

$=\frac{1}{6}$

考点8：u^v 型函数 $\begin{cases}1^\infty\\0^0.\ \infty^0\end{cases}$ (不是 1^∞)

第一种

① 1^∞.　PS: u、v 都是整体形式.

1): 第二重要极限：$\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=e$.. 配凑.

2): 解法：① $u^v\overset{1^\infty}{=\!=}e^{\lim(u-1)\cdot v}$ (99%)　常微分会用

② 对数恒等 $e^{\ln\text{狗}}=\text{狗}$. ⇔ $u^v=e^{v\ln u}$. (幂指函数对数化).

例题

eg: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $\quad 1^\infty$ $\quad u^v$.

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\cdot\frac{1}{x^2}}$ $\quad x\to 0$. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$ $\frac{0}{0}$ $\quad\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$.

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}}$ $\quad\cos x-1=-(1-\cos x)\sim-\frac{1}{2}x^2$.

$=e^{-\frac{1}{2}}$.

第二种

② 不是 1^∞. (0^0, ∞^0.) $\quad 0\cdot\infty\to\frac{0}{0}.\frac{\infty}{\infty}$

解法：$u^v\overset{\text{不是}1^\infty}{=\!=}u^v=e^{v\ln u}$. 转化成复合型极限

例题

eg: (2014-6). 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$. 0^0 $\quad\sin 0=0$.

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln x}$. $\quad\sin x\sim x$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x}$. $0\cdot\infty$. 极 x $\quad$ 幂·$\ln(\square)$, $0\cdot\infty$ $\to 0$.

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=e^0$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=1$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}-x}$

$=e^0$

×○×○×○×○×○×○×○×○×○×○×○×○×

等价代换（图2为使用条件）

当 $x\to 0$ 时

a. $\begin{cases}\sin x\sim x\\\arcsin x\sim x\end{cases}$. $\begin{cases}\tan x\sim x\\\arctan x\sim x\end{cases}$ $\begin{cases}e^x-1\sim x\\\ln(1+x)\sim x.\end{cases}$ $\quad\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

b. $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

c. $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$ ⇔ $(1+ax)^b-1\sim abx$. 特注 (减一)

d. $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$. $\quad\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$, $\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$.

补充：$a^x-1\sim x\ln a$. $\ln(1+x)-x\sim-\frac{1}{2}x^2$.

*: 注：① 使用条件：$\begin{cases}\text{在乘除类中使用. 加减运算 慎用.}\\\text{趋于0 使用.}\quad x\to 0\end{cases}$ 因子

② 怎么用：x 可替换为带 x 的式子.

如：$x\to 0$, $\sin x\sim x$

推：$\square\to 0$, $\sin\square\sim\square$

逆用：若 $\frac{0}{0}$ 型函数极限存在，

则：① 分子 → 0. 分母 → 0

② 分母 → 0. 分子 → 0

例题

洛必达法则

典例：求 $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\cos x\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$

解：原式 $=\cos 3\cdot\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}$ $\quad$ ($\frac{\infty}{\infty}$，求导不难，用洛必达. 简单粗暴)

$=\cos 3\cdot\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{e^x}{e^x-e^3}}$

$=\cos 3\cdot\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{e^x-e^3}{e^x(x-3)}$ $\quad$ ($\frac{0}{0}$，求导简单，此时不洛何时洛)

$=\frac{\cos 3}{e^3}\cdot\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{e^x}{1}$

$=\cos 3$

倒带换

典例：求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$

解：令 $t=\frac{1}{x}$ 则 $\quad$ 若不倒带换，在变形中出现 x 的式子 难以进行等价无穷小替换

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}e^{-\frac{1}{t}}(1+t)^{\frac{1}{t^2}}$ $\quad$ 令 $t=\frac{1}{x}$. $t\to 0$

$=\lim\limits_{t\to 0}e^{-\frac{1}{t}}\cdot e^{\frac{1}{t^2}\ln(1+t)}$ $\quad$ 无穷小替换成为可能

$=\lim\limits_{t\to 0}e^{-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}\ln(1+t)}$

$=\lim\limits_{t\to 0}e^{\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$

泰勒公式

典例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}-1}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-\sin x}{x^2\sin x}$ $\quad$ x 与三角函数群魔乱舞

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)}{x^3}$ $\quad$ 想到泰勒照妖镜 一照现原形

$=-\frac{1}{3}$

拉格朗日中值定理

拉氏形式为 $f(a)-f(b)=f'(\varphi)(a-b)$，其中 $\varphi\in(a,b)$

典例：求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln(x)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{\ln x}-e^{x\ln x}}{1-x+\ln(1+(x-1))}$ (1) $\quad$ (1)→(2) 拉氏脱指

$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{\xi}(\ln x-x\ln x)}{1-x+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2}$ (2)

$=-2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{(1-x)\ln x}{(x-1)^2}$

$=2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(1+x-1)}{x-1}$

$=2$

典例：求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}$ $\quad$ 拉氏中值 平防根式花里胡哨！

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{6}\xi^{-\frac{5}{6}}\left[(x^6+x^5)-(x^6-x^5)\right]$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{6}\xi^{-\frac{5}{6}}\cdot 2x^5$ $\quad$ (ξ 介于 x^6-x^5 与 x^6+x^5 之间)

$=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}$

典例：求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln x}-e^{x\ln\sin x}}{x^3}$ $\quad$ 看到 $e^{f(x)}-e^{\varphi(x)}$ 想到拉氏中值

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\xi}x(\ln x-\ln\sin x)}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x-\ln\sin x}{x^2}$ $\quad$ 看到 $\frac{0}{0}$，求导简单 想到洛必达

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^2\sin x}$ $\quad$ 看到 x, $\cos x$, $\sin x$ 杂式 想到泰勒公式

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{2x^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3-x\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)}{2x^3}$

$=\frac{-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}{2}$

$=\frac{1}{6}$