微分 Differential of a function

一般地，函数 f(x)的微分表达式可表示为：dy=f'(x)·dx，要计算函数f(x)的微分，只要计算函数的导数，然后再乘以自变量的微分。

< 定义 >

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 $\mathcal{I}$ 内有定义。对于 $\mathcal{I}$ 内一点 x_0，当 x_0 变动到附近的 $x_0+\triangle x$（也在此区间内）时，如果函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $\Delta y=A\triangle x_0+o(\triangle x_0)$（其中 A 是不依赖于 $\triangle x$ 的常数），而 $o(\triangle x_0)$ 是比 $\triangle x$ 高阶的无穷小，那么称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是可微的，且 $A\triangle x_0$ 称作函数在点 x_0 相应于自变量增量 $\triangle x$ 的微分，记作 dy，即 $dy=A\triangle x_0$。

通常把自变量 x 的增量 $\triangle x$ 称为自变量的微分，记作 dx，即 $dx=\triangle x$。

- 根据以上定义可证明函数在某点可微。

例：设 $f(x)=x$，证 $f(x)$ 在任何点 x_0 处可微，且 $df(x)_{|x=x_0}=\triangle x$。

证：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)-x_0=\Delta x+o(\triangle x_0)$，由定义可知，$f(x)$ 在任何点 x_0 处可微，且 $df(x)_{|x=x_0}=\triangle x$。

- 证明函数在某点不可微

a. 在该点无定义

b. 在该点不连续

c. 在该点不可导

d. 不能表示为 $\Delta y=A\triangle x_0+o(\triangle x_0)$

基本初等函数的微分表达式表 （和导数公式对照记忆）

导数公式	微分公式
$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$	$\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\cdot\mathrm{d}x$
$(\sin x)'=\cos x$	$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\cdot\mathrm{d}x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\cdot\mathrm{d}x$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	$\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\cdot\mathrm{d}x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$	$\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\cdot\mathrm{d}x$
$(\sec x)'=\sec x\tan x$	$\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\cdot\mathrm{d}x$
$(\csc x)'=-\csc x\cot x$	$\mathrm{d}(\csc x)=-\csc\cot x\cdot\mathrm{d}x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\cdot\mathrm{d}x$
$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$	$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{d}x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\cdot\mathrm{d}x$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\mathrm{d}x$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\mathrm{d}x$	$\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\mathrm{d}x$
$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\mathrm{d}x$
$(\mathrm{arccot}x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{d}(\mathrm{arccot}x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\cdot\mathrm{d}x$

关于函数和、差、积、商的微分法则是紧扣 和、差、积、商的求导法则而展开的。

四则运算的微分法则及推导过程表

函数和、差、积、商的求导法则	函数和、差、积、商的微分法则
$(u\pm v)'=u'\pm v'$	$\mathrm{d}(u\pm v)=(u\pm v)'\cdot\mathrm{d}x=u'\cdot\mathrm{d}x\pm v'\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$
$(\mathrm{C}u)'=\mathrm{C}u'$	$\mathrm{d}(\mathrm{C}u)=(\mathrm{C}u)'\mathrm{d}x=\mathrm{C}u'\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{C}\cdot\mathrm{d}u$
$(uv)'=u'v+uv'$	$\mathrm{d}(uv)=(uv)'\cdot\mathrm{d}x=(u'v+uv')\cdot\mathrm{d}x=u'v\cdot\mathrm{d}x+uv'\cdot\mathrm{d}x=v\cdot\mathrm{d}u+u\cdot\mathrm{d}v$
$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq0)$	$\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\left(\dfrac{u}{v}\right)'\cdot\mathrm{d}x=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}\cdot\mathrm{d}x=\dfrac{v\cdot\mathrm{d}u-u\cdot\mathrm{d}v}{v^2}\quad(v\neq0)$

复合函数的微分求导法则 (与复合函数求导相对照)

设 $y=f(u),u=g(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[g(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y\xlongequal{\text{复合函数对自变量}x\text{的导数乘以自变量的微分}\mathrm{d}x}\{f[g(x)]\}'\cdot\mathrm{d}x=f'(u)\cdot g'(x)\cdot\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{外层函数对中间变量}u\text{的导数乘以中间变量的微分}}f'(u)\cdot\mathrm{d}u$$

即：$dy=y'_x dx=f'(u)\cdot g'(x)dx=f'(u)du$

上式表明，复合函数的微分表达式可以是关于自变量 x 的，也可以是关于中间变量 u 的，无论哪种表达方式，都表达为："关于相应变量的导数×该变量的微分"这种形式，这也体现了微分形式 的不变性

例题

例1. 求函数 $y=\sin(2x+1)$ 的微分 $\mathrm{d}y$

解：引入中间变量 u，令 $u=2x+1$，

$$\mathrm{d}y=(\sin u)'\cdot\mathrm{d}u=(\sin u)'\cdot u'\cdot\mathrm{d}x=\cos(2x+1)\cdot(2x+1)'\cdot\mathrm{d}x$$
$$=2\cos(2x+1)\cdot\mathrm{d}x$$

例2. 求函数 $y=\ln(1+e^{x^2})$ 的微分 $\mathrm{d}y$

解：

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\ln(1+e^{x^2}))=(\ln(1+e^{x^2}))'\cdot\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{1+e^{x^2}}\cdot e^{x^2}\cdot2x\cdot\mathrm{d}x=\frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}}\cdot\mathrm{d}x$$

例3. $y=e^{1-3x}\cos x$ 求 $\mathrm{d}y$

解：

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(e^{1-3x}\cos x\right)=\left(e^{1-3x}\cos x\right)'\cdot\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\text{函数积的求导法则}}\left[\left(e^{1-3x}\right)'\cos x+e^{1-3x}\left(\cos x\right)'\right]\cdot\mathrm{d}x$$
$$=-\left(3e^{1-3x}\cos x+e^{1-3x}\sin x\right)\cdot\mathrm{d}x=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\cdot\mathrm{d}x$$

例4. 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立。

(1) $\mathrm{d}(\quad)=x\mathrm{d}x$

(2) $\mathrm{d}(\quad)=\cos wt\mathrm{d}t(w\neq0)$

解：(1) 我们知道，$\mathrm{d}(x^2)=2x\cdot\mathrm{d}x$，等号两边同时处以 2，得 $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{d}(x^2)=x\cdot\mathrm{d}x$，把等号左侧 x^2 看作 u，即 $u=x^2$，有 $\frac{1}{2}\cdot\mathrm{d}u=x\cdot\mathrm{d}x$，对等号左侧进行形式变换（把 u 当作自变量，把 $\frac{1}{2}$ 看作函数对 u 得导数）：$\mathrm{d}(\frac{1}{2}u)=x\cdot\mathrm{d}x$，最终得 $\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)=x\mathrm{d}x$

更一般地，$\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}+C\right)=x\mathrm{d}x$（$C$ 为任意常数）。

(2) 因为 $\mathrm{d}(\sin wt)=w\cos wt\mathrm{d}t$，两侧同时除以 w，得 $\frac{1}{w}\mathrm{d}(\sin wt)=\cos wt\mathrm{d}t$，对等号左边进行变换：$\mathrm{d}\left(\frac{1}{w}\sin wt\right)=\cos wt\mathrm{d}t$

更一般地，$\mathrm{d}\left(\frac{1}{w}\sin wt+C\right)=\cos wt\mathrm{d}t$（$C$ 为任意常数）。

微分在近似计算中的应用

理论上，我们知道函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分表达式为 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\cdot\mathrm{d}x$

现实生活中，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x)\neq0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们可以类比微分表达式，这样近似地处理 Δy：

$$\Delta y\approx f'(x_0)\cdot\Delta x\qquad(4)$$

上式等价形式：

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\cdot\Delta x\qquad(5)$$

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x\qquad(6)$$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)\qquad(7)$$

常用近似公式表

序号	常用近似公式	备注
i	$\sqrt[n]{1+x}\approx1+\dfrac{1}{n}x$	要使近似公式足够精确，就需要x接近0，即$\lvert x\rvert$很小。
ii	$\sin x\approx x$	
iii	$\tan x\approx x$	
iv	$e^x\approx1+x$	
V	$\ln(1+x)\approx x$	

下面对表中的近似公式进行证明：

i. 令 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$，当 x 在 0 附近取值时，也就是 x 相对于 $x_0=0$ 的增量 $\Delta x=x-0=x$ 很小时，根据公式 (8)，函数值可以近似表示为
$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot(x-0)=1+(\sqrt[n]{1+x})'\Big|_{x=0}\cdot x$$
$$=1+\tfrac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}\Big|_{x=0}\cdot x=1+\tfrac{1}{n}x$$

ii. 令 $f(x)=\sin x$，当 x 在 0 附近取值时，也就是 x 相对于 $x_0=0$ 的增量 $\Delta x=x-0=x$ 很小时，根据公式 (8)，函数值可以近似表示为

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot(x-0)=0+1\cdot x=x$$

所以当 x 在 0 附近很小的范围取值时，可以有这样一个近似 $\sin x\approx x$

例题

例5. 有一个半径为 $1cm$ 的求，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度为 $0.01cm$，估计一下需要多少 g 的铜（铜的密度为 $8.9g/cm^3$）。

解：首先计算小球在镀铜后的体积变化量 ΔV，而体积 V 又是半径 R 的函数：$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，体积关于半径的导函数为 $V'=4\pi R^2$

设 $R_0=1,\Delta R=0.01$，根据 (4) 式，$\Delta V\approx4\pi R_0^2\Delta R=0.13(cm^3)$

所以需用铜 $0.13\times8.9\approx1.16(g)$

例6. 利用微分计算 $\sin30^\circ30'$ 的近似值

解：把 $30^\circ30'$ 化为弧度：$30^\circ30'=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}$

正弦函数 $f(x)=\sin x$ 的导数为 $f'(x)=\cos x$，令 $x_0=\frac{\pi}{6},\Delta x=\frac{\pi}{360}$，根据 (6) 式，
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x=\sin\tfrac{\pi}{6}+\cos\tfrac{\pi}{6}\cdot\tfrac{\pi}{360}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\tfrac{\pi}{360}\approx0.5076$$