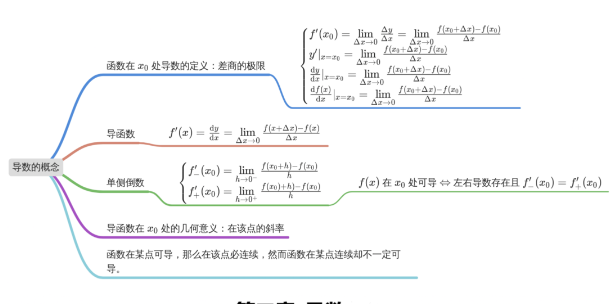
导数 Derivative



第二章 导数

内容概要

名称	主要内容
导数的定义	$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
函数的求导法则	(1) 导数的四则运算法则 i. $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$ ii. $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ iii. $[\frac{u(x)}{v(x)}]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$ (2) 复合函数的求导法则（链式法则） $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
隐函数的导数	(1) 求隐函数的导数时，只需将确定隐函数的方程两边同时对自变量 x 求导，凡遇到含有因变量 y 的项时，把 y 当作中间变量看待，再按照复合函数求导法则求之，然后从所得等式中解出 $\frac{dy}{dx}$ (2) 对数求导法：对幂指函数 $y=u(x)^{v(x)}$，可以先在函数两边取对数，然后在等式两边同时对自变量 x 求导，最后解出所求导数
反函数的导数	反函数的导数等于直接函数导数的倒数，即 $f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$，其中 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数

高阶导数	(1) 直接法：利用基本求导公式及导数的运算法则，对函数逐次地连续求导 (2) 间接法：利用已知的高阶导数公式，通过导数的四则运算，变量代换等方法，间接求出指定的高阶导数 (3) 莱布尼茨公式 $(uv)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k$

1.导数

1.1 定义

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处有增量 Δx，相应地函数取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 之比的极限存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$；$y'|_{x=x_0}$；$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

如何证明函数在 x_0 处可导？——证明左右导数存在且相等

- 导函数

如果函数 $y=f(x)$ 对于区间内的每一个确定的 x 的值，都对应着一个确定的导数值，这就构成一个新的函数，称这个函数为原来函数 $y=f(x)$ 的导函数，记作 $f'(x)$；y'；$\frac{dy}{dx}$。

- 高阶导数

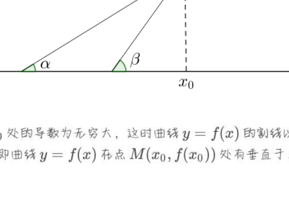
如果函数的导数 $f'(x)$ 在 x 处可导，则称 $[f'(x)]'$ 为 x 的二阶导数。记作 $f''(x)$；y''；$\frac{d^2y}{dx^2}$

二阶导数的导数称为三阶导数，记作 $f'''(x)$；y'''；$\frac{d^3y}{dx^3}$

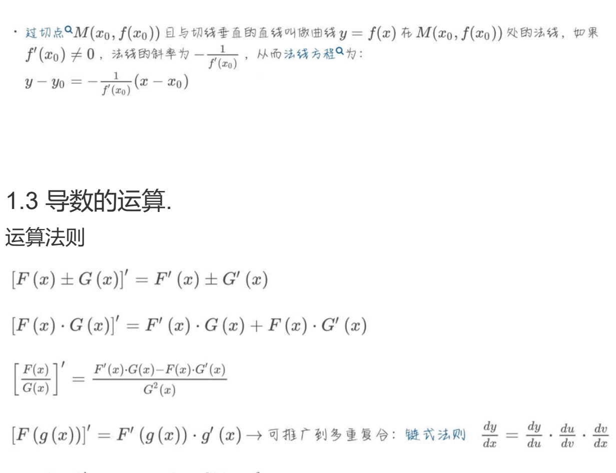
$f(x)$ 的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x)$；$y^{(n)}$；$\frac{d^ny}{dx^n}$

1.2 几何意义

导数的几何意义是函数曲线在这一点上的切线斜率。



- 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何意义上表示曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,f(x_0))$ 点处切线斜率，即 $f'(x_0)=\tan\alpha$，详细说明见下图：



- 如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数为无穷大，这时曲线 $y=f(x)$ 的割线以垂直于 x 轴的直线 $x=x_0$ 为极限位置，即曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处有垂直于 x 轴的切线 $x=x_0$

- 根据导数的几何意义并应用直线的点斜式方程，可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

- 过切点 $M(x_0,f(x_0))$ 且与切线垂直的直线叫做曲线 $y=f(x)$ 在 $M(x_0,f(x_0))$ 处的法线，如果 $f'(x_0)\neq 0$，法线的斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$，从而法线方程为：
$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

1.3 导数的运算.

运算法则

$[F(x)\pm G(x)]'=F'(x)\pm G'(x)$

$[F(x)\cdot G(x)]'=F'(x)\cdot G(x)+F(x)\cdot G'(x)$

$\left[\frac{F(x)}{G(x)}\right]'=\frac{F'(x)\cdot G(x)-F(x)\cdot G'(x)}{G^2(x)}$

$[F(g(x))]'=F'(g(x))\cdot g'(x)\to$ 可推广到多重复合：链式法则 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

例：$(e^{ax})'=a\cdot e^{ax}$；$(\ln x^2)'=\frac{1}{x^2}\cdot 2x$

编号	原函数	导函数
1	$y=c$	$y'=0$
2	$y=n^x$	$y'=n^x\ln n$
3	$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$
4	$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$
5	$y=x^n$	$y'=nx^{n-1}$
6	$y=\sqrt[n]{x}$	$y'=\frac{x^{-\frac{n-1}{n}}}{n}$
7	$y=\frac{1}{x^n}$	$y'=-\frac{n}{x^{n+1}}$
8	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
9	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
10	$y=\tan x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$
11	$y=\cot x$	$y'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$
12	$y=\sec x$	$y'=\sec x\tan x$
13	$y=\csc x$	$y'=-\csc x\cot x$
14	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$y=\arctan x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
17	$y=arccotx$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$
18	$y=arcsecx$	$y'=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
19	$y=arccscx$	$y'=-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
20	$y=shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ （双曲函数）	$y'=chx$ （双曲函数）
21	$y=chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$y'=shx$
22	$y=thx=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$	$y'=\frac{1}{chx^2}$
23	$y=arshx=ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
24	$y=archx=ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	$y'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
25	$y=arthx=\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$y'=\frac{1}{1-x^2}$

高阶导数

二阶导数定义：如果函数 $f(x)$ 的导函数仍是 x 的函数，且导函数 $f'(x)$ 是可导的，则 $f'(x)$ 的导数称为原函数 $f(x)$ 的二阶导数，记作 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ 即 $y''=(y')'$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$。

注：① 导函数 $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ 称为原函数 $f(x)$ 的一阶导数；

② 求导算子 $\frac{d\square}{dx}$ 作为一个整体的算子符号，□内填入需要求导的函数，用把它和一个函数结合起来表示对该函数进行求导运算：如果求函数 $y=f(x)$ 的导函数，则引用求导算子可写作 $\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$，同样求 $v=g(x)$ 的导数，可引用求导算子记作 $\frac{dv}{dx}=\frac{dg(x)}{dx}$。

③ 二阶求导算子 $\frac{d^2\square}{dx^2}$：□内填入需要求导的函数，其中的两个上角标"2"不是平方的意思，该算子是一个整体，表示原函数对自变量 x 求二阶导数。比如对 $y=f(x)$ 求二阶导数，写作 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2f(x)}{dx^2}$。

然而对 $y=f(x)$ 求二阶导数又可以看作是对 $y=f(x)$ 的一阶导数 $\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}$ 再求一次导数：$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(\frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}$，这里可以看出上半部分显得过于臃肿，所以我们经常会把式中括号里的部分拿下来放在右边：$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$，这也表示相同的意思：在一阶导数的基础上再次进行求导运算。

④ 相应地，三阶导数，四阶导数 ……直到 n 阶导数，分别记作 $\begin{cases}y''',y^{(4)},\cdots\cdots,y^{(n)}\\ 或\\ \frac{d^3y}{dx^3},\frac{d^4y}{dx^4},\cdots\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}\end{cases}$

⑤ 二阶导数及二阶以上的导数统称为高阶导数，求高阶导数的时候仍可用之前的求导公式和方法对其上一阶导数进行再次求导得出。

基础公式

1. $(a^x)^{(n)}=a^x\ln^n a$
2. $[\sin(kx+a)]^{(n)}=k^n\sin(kx+a+\frac{n\pi}{2})$
3. $[\cos(kx+a)]^{(n)}=k^n\cos(kx+a+\frac{n\pi}{2})$
4. $(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$
5. $(\log_a x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n\ln a}$
6. 高阶导数的莱布尼茨公式：$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$，初等数学中与之相对应的二项式定理：$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

上述结论证明都是很简单的，用n次基本求导公式即可。

$(\sin x)^{(n)}=\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{Im}e^{ix})=\mathrm{Im}(i^ne^{ix})=\mathrm{Im}e^{i\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)}=\sin(x+\frac{n\pi}{2})$

同理有 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\frac{n\pi}{2})$。

在复数域 $\mathbb{C}$ 内求导在求三角函数或指数函数及两者复合函数时很方便，以下进阶公式的推导中会运用这个方法。

进阶公式

1. $(e^x\cos x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\cos(x+\frac{n\pi}{4})$
2. $(e^x\sin x)^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+\frac{n\pi}{4})$
3. $(e^{ax}\cos bx)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\cos(bx+n\arctan\frac{b}{a})$
4. $(e^{ax}\sin bx)^{(n)}=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}\sin(bx+n\arctan\frac{b}{a})$
5. $(\arctan x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin(n\arctan\frac{1}{x})$
6. $(x\arctan x)^{(n)}=\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}}\left\{\frac{n\sin\left[(n-1)\arctan\frac{1}{x}\right]}{n-1}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin(n\arctan\frac{1}{x})\right\}$
7. $[\ln(1+x^2)]^{(n)}=2\frac{(-1)^n(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}}\left\{\sin\left[(n-1)\arctan\frac{1}{x}\right]-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin(n\arctan\frac{1}{x})\right\}$
8. $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{(n)}=(-1)^{n-1}n!\frac{H_n-\ln x}{x^{n+1}}$
9. $\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\arctan\frac{1}{x}\right]$
10. $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^nn!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sin\left[(n+1)\arctan\frac{1}{x}\right]-\sin(n\arctan\frac{1}{x})\right\}$

隐函数求导

方法①：先把隐函数转化成显函数，再利用显函数求导的方法求导；

方法②：隐函数左右两端同时对自变量 x 求导：在求导的过程中，将 y 看成 x 的函数，利用复合函数求导公式，最后解出 $\frac{dy}{dx}$；

例：$y^5+2y-x-3x^7=0$，求 $\frac{dy}{dx}$

解：方程两边对 x 求导，得 $5y^4\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0$，解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$

方法③：根据隐函数求导公式 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F'x}{F'y}$，前提需要满足等式 $F(x,y)=0$；

例：$y^5+2y-x-3x^7=0$，求 $\frac{dy}{dx}$

解：根据隐函数求导公式，直接解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$

- 对数求导

方法：先将函数两边同时取对数，再利用普通方法求导。

例：求 $y=x^x$ 的导数

解：$y=x^x$，$\ln y=x\ln x$，$\frac{y'}{y}=\ln x+1$，$y'=x^x(\ln x+1)$

参数方程的导数

由一个参数方程 $\begin{cases}x=u(t)\\y=v(t)\end{cases}$ 确定y与x的函数关系

例如 $\begin{cases}x=2t^2\\y=4t^4\end{cases}$

就通过t来表示了y与x的关系 $y=x^2$

此时y关于x的导数就等于 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{v'(t)}{u'(t)}$

这个参数方程的二阶导数即

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{\left[\frac{v'(t)}{u'(t)}\right]'}{u't}$$

一阶导数是y关于x的变化率

二阶导数是一阶导数关于x的变化率

所以我们可以写出一阶导数的参数方程

就是 $\begin{cases}x=u(t)\\ \frac{dy}{dx}=\frac{v'(t)}{u'(t)}\end{cases}$

只要根据求一阶导的方法来求二阶导即可

这样就很好理解二阶导数的计算了

例：

计算参数方程 $\begin{cases}x=\frac{t^2}{2}\\y=1-t\end{cases}$ 的二阶导数 $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-t)'}{\left(\frac{t^2}{2}\right)'}=-\frac{1}{t}$$

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\left(-\frac{1}{t}\right)'}{\left(\frac{t^2}{2}\right)'}=\frac{\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{1}{t^3}$$

幂指函数求导

形如 $y=u(x)^{v(x)}$ 的函数称为幂指函数，求导过程如下：

1. $lny=v(x)ln\,u(x)$
2. $\frac{1}{y}y'=v'(x)ln\,u(x)+u'(x)\frac{1}{u(x)}v(x)$
3. $y'=[v'(x)ln\,u(x)+u'(x)\frac{1}{u(x)}v(x)]y$

1.4左右导数

1.4 单侧导数 X_0为特殊点（极值、拐点…）

1.极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在的充要条件是左右极限都存在且相等：$\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$。前面两个极限分别为 x_0 处的左导数和右导数，所以 $f(x)$ 在 x_0 处可导的充要条件是左右导数都存在且相等。我们记左右导数分别为

$\begin{cases}f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\\f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\end{cases}$，则 $f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow$ 左右导数存在且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$。

ps:单侧导数存在 ⟸⟹ 单侧极限存在

2.如果 $f(x)$ 于开区间 (a,b) 内可导（开区间内点点可导），于左端点 a 有右导数，于右端点 b 有左导数，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导。

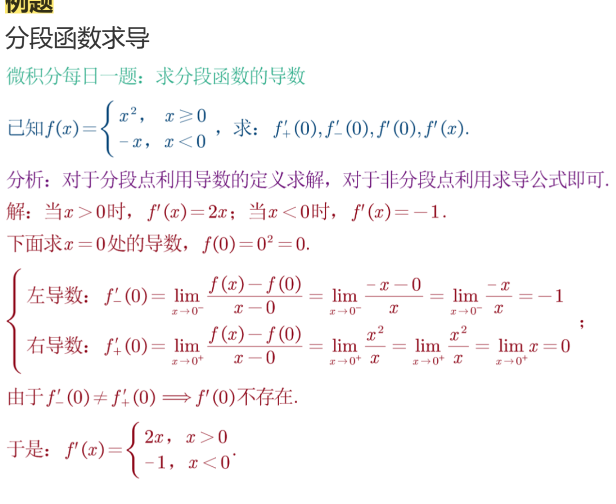
1.5 函数可导性与连续性的关系 若f(x)二阶可导 ⇒ f''(x)存在，f(x)连续

设函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在。由具有极限的函数与无穷小的关系知道，$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$，

其中 α 为当 $\Delta x\to 0$ 时得无穷小，上式两侧同乘以 Δx，得 $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$，由此可见当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta y=0$，根据 连续函数 定义 ，函数 $y=f(x)$ 在点 x 处是连续的。故如果函数在 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则函数必在该点连续。可导必连续

另一方面，一个函数在某点连续却不一定在该点可导，举例如下：可导 $\xrightarrow[\text{必要}]{\text{充分}}$ 连续

例 函数 $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在点 $x=0$ 处却不可导，这是因为在 $x=0$ 处差商的极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}-0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=+\infty$，即导数为无穷大（导数不存在）。如下图该曲线在 $x=0$ 处具有垂直于 x 轴的切线 $x=0$。



例 函数 $y=\sqrt{x^2}$（即 $y=|x|$）在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续， 该函数在 $x=0$ 处不可导，且在 $x=0$ 处也无切线。

综上，在某点处，函数可导，那么在该点必连续；然而，函数连续却不一定可导。

例题

分段函数求导

微积分每日一题：求分段函数的导数

已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\-x, & x<0\end{cases}$，求：$f'_+(0),f'_-(0),f'(0),f'(x)$.

分析：对于分段点利用导数的定义求解，对于非分段点利用求导公式即可.

解：当 $x>0$ 时，$f'(x)=2x$；当 $x<0$ 时，$f'(x)=-1$.

下面求 $x=0$ 处的导数，$f(0)=0^2=0$.

$$\begin{cases}左导数：f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\\右导数：f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0\end{cases};$$

由于 $f'_-(0)\neq f'_+(0)\Longrightarrow f'(0)$ 不存在.

于是：$f'(x)=\begin{cases}2x, & x>0\\-1, & x<0\end{cases}$.

拓展 变限积分求导

微积分学习笔记：变限积分的求导公式

这里给出几个简单的变限积分求导公式，方便大家记忆：

(1)基础求导：

(1.1) $\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

(1.2) $\left(\int_x^0 f(t)dt\right)'=\left(-\int_0^x f(t)dt\right)'=-f(x)$.

(1.3) $\left(\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

(1.4) $\left(\int_{\varphi(x)}^0 f(t)dt\right)'=\left(-\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'=-f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$.

(1.5) $\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'=\left(\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt+\int_{\psi(x)}^0 f(t)dt\right)'=\left(\int_0^{\varphi(x)} f(t)dt-\int_0^{\psi(x)} f(t)dt\right)'$
$=f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)-f[\psi(x)]\cdot\psi'(x)$.

(2)一些较为复杂的求导：

注意：我们需要搞清楚在求解变上限积分的时候，我们是对谁求导.

(2.1)求 $F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt$ 的导数.

解：$F(x)=\int_0^x(x-t)f(t)dt=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt$；

于是：$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+x\cdot f(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$.

(2.2)求 $F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt$ 的导数.

注意：对于 $f(\cdot)$ 肚子里不是单纯变量为 t 的函数，我们要对其换元(或区间再现公式).

注意＊：为了进一步区分，这里直接给出含参积分求导公式：
$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t,x)dt=f(x,x)+\int_0^x\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$，其中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示把 t 常数，对 x 求导.

对于非数学专业的同学而言，这个方法只适合用于选择填空题.

解法1：换元法

令 $x-t=u$，则有 $d(x-t)=-dt=du\Longrightarrow dt=-du$，$u_上=0$，$u_下=x$，则有：

$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x-u)f(u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$；

$F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du=\int_0^x f(t)dt$.

解法2：区间再现公式 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x+0-t)f[x-(x+0-t)]dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$；

$F'(x)=\int_0^x f(t)dt+x\cdot f(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt$.

解法3：含参积分求导法

首先将参数分离出来：

$F(x)=\int_0^x tf(x-t)dt=\int_0^x(x-t)f(t)dt$；

由于：$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t,x)dt=f(x,x)+\int_0^x\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$；

因此：$\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)f(t)dt=(x-x)f(x)+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x f(t)dt$.

(2.3)求 $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$ 的导数.

注意：对于一些可以凑微分情况，我们可以凑微分简化变限积分.

解：$F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)$；

令 $x^2-t^2=u$，则 $u_上=0$，$u_下=x^2$，则有：

$F(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x f(x^2-t^2)d(x^2-t^2)=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(t)dt$；

$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2)$.

(2.4)含参积分求导法专项练习

设 $f(x)$ 连续，$f(0)=\frac{1}{3}$，$F(x)=\int_0^x(x^3-t^3)f(t)dt$，当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 是无穷小量 x^k 的等价无穷小，则 k 等于？(SJTU 2009级期末考试)

解法1：含参积分求导法 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t,x)dt=f(x,x)+\int_0^x\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}dt$

$F'(x)=\int_0^x(x^3-x^3)f(t)dt+\int_0^x\frac{\partial[(x^3-t^3)f(t)]}{\partial x}dt=\int_0^x 3x^2f(t)dt$；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\int_0^x f(t)dt}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\int_0^x f(t)dt}{x^{k-2}}\overset{L'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3f(x)}{(k-2)x^{k-3}}=1$.

当 $k=3$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3f(x)}{(k-2)x^{k-3}}=3f(0)=3\cdot\frac{1}{3}=1$.

解法2：常规求导法

$F(x)=x^3\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^3f(t)dt$；

$F'(x)=3x^2\int_0^x f(t)dt+x^3f(x)-x^3f(x)=3x^2\int_0^x f(t)dt$；

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2\int_0^x f(t)dt}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\int_0^x f(t)dt}{x^{k-2}}\overset{L'}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3f(x)}{(k-2)x^{k-3}}=1$；

当 $k=3$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3f(x)}{(k-2)x^{k-3}}=3f(0)=3\cdot\frac{1}{3}=1$.

注意：

①连续函数的变上限积分可导；变上限积分不一定可导，但是一定连续.

②变上限积分求导公式 $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$ 是有条件的，一个充分条件是：被积函数连续.

这里给出一个反例：

取 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\1, & x=0\end{cases}$，计算知道 $\int_0^x f(t)dt=0\Rightarrow\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=0\neq f(x)$.