

利用极限求曲线的渐近线

曲线的渐近线

定义 若点 M 沿曲线 $y = f(x)$ 无限远离原点时,它与某条定直线 L 之间的距离将趋近于零,则称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的一条渐近线. 若直线 L 与 x 轴平行,则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线;若直线 L 与 x 轴垂直,则称 L 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线;若直线 L 既不平行于 x 轴,也不垂直于 x 轴,则称直线 L 为曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

水平渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ (或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, 或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$), 那么 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 水平渐近线.

垂直渐近线

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$, 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$), 那么 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的垂直渐近线.

斜渐近线

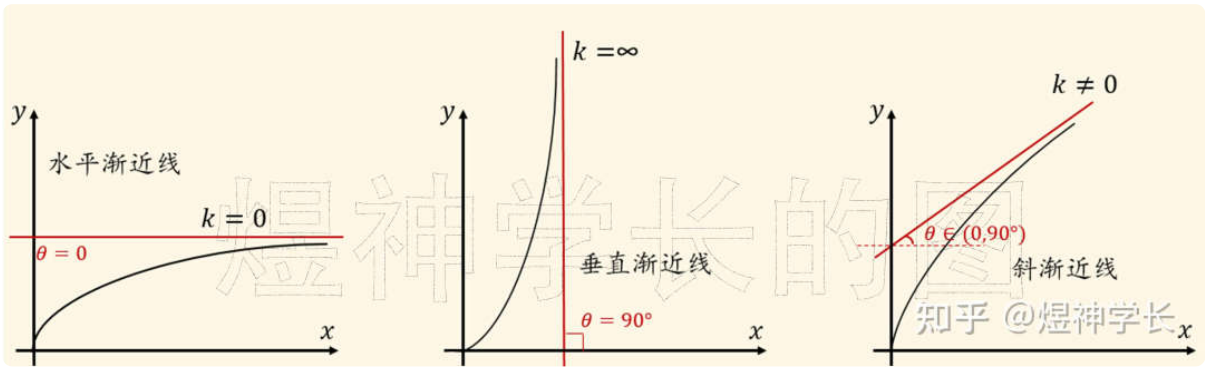
若 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$ (或 $x \rightarrow -\infty$, 或 $x \rightarrow +\infty$), 那么 $y = ax + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

知乎 @仰望星空

步骤:

- 1) 首先找垂直渐近线, 这只需要找出函数所有的无穷间断点就可以了 (按照求间断点的方法, 先找所有“可疑点”, 再一一判断);
- 2) 再分别对 x 趋近正无穷和趋近负无穷求斜渐近线 (注意这里是把水平渐近线看做特殊的斜渐近线的).

对 x 趋近正无穷和趋近负无穷这两种情况下渐近线有可能一样, 也有可能不一样, 还有可能一边有渐近线另一边没有; 因此, 一般情况下要对两边分别求. 当然, 如果确定两边的渐近线一样, 也可以直接一起求.



固定图中三条相同的曲线, 其渐近线也随之固定. 这时转动坐标系:

令 x 轴与渐近线平行, 得到水平渐近线;

令 x 轴与渐近线垂直, 得到垂直渐近线;

令 x 轴与渐近线成其他任意角, 得到斜渐近线。