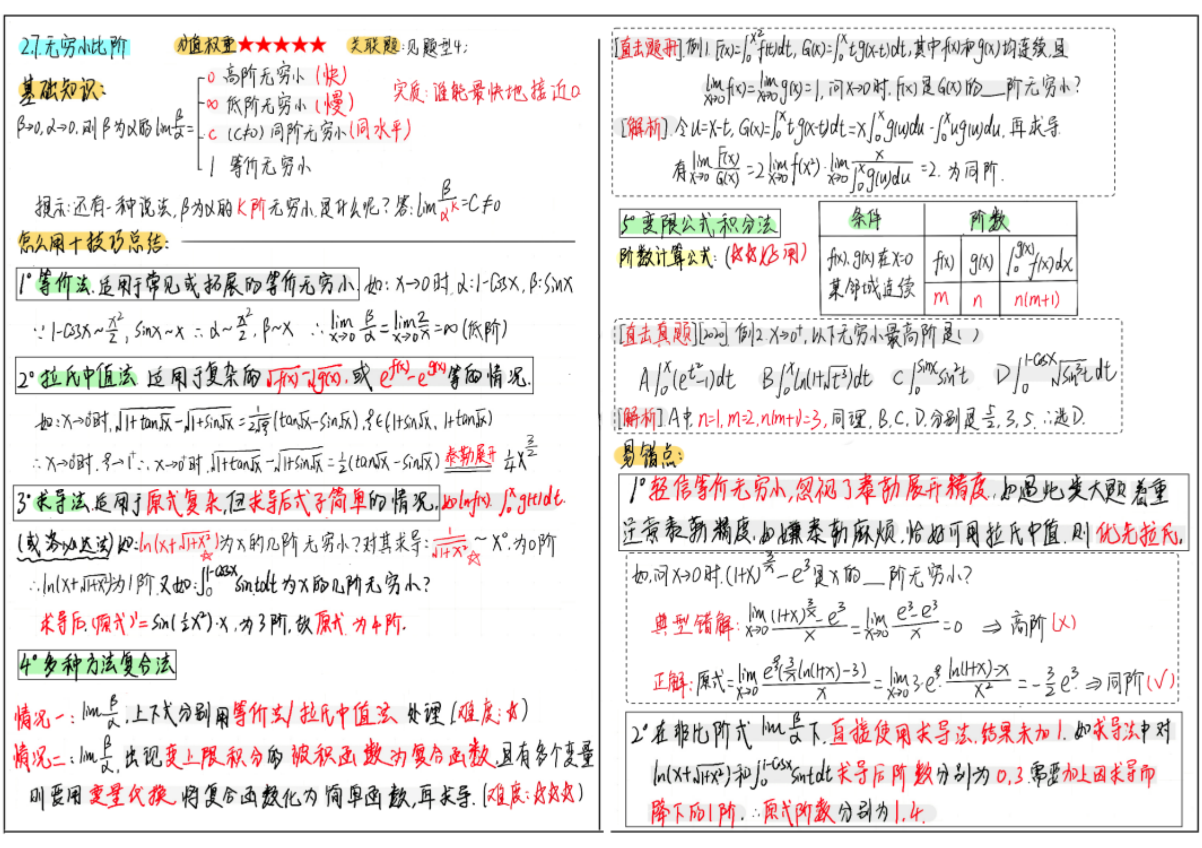
无穷小量和无穷大量



一、无穷小量

定义：设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 上定义，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \epsilon$，则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 的无穷小量，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

> 例：$\lim\limits_{x \to 0} x = 0 \Rightarrow f(x) = x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小量
> $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小量

- 定理1：设 $f(x) = A + \alpha(x)$，A为不为零的常数。

$$\lim f(x) = A \Leftrightarrow \lim \alpha(x) = 0$$

证明：不妨设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$
由定义知 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \epsilon$
即 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$
若 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$，则 $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \epsilon$
即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

- 所以，若在某种趋势下 $f(x)$ 有极限 A，则 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为无穷小量

等价无穷小代换

当 🐱 $\to 0$ 时

$\sin \text{🐱} \sim \text{🐱}$	$\tan \text{🐱} \sim \text{🐱}$
$\ln(1+\text{🐱}) \sim \text{🐱}$	$e^{\text{🐱}} - 1 \sim \text{🐱}$
$\arcsin \text{🐱} \sim \text{🐱}$	$\arctan \text{🐱} \sim \text{🐱}$
$\log_a(1+\text{🐱}) \sim \frac{\text{🐱}}{\ln a}$	$\text{🐱} - \ln(1+\text{🐱}) \sim \frac{1}{2}\text{🐱}^2$
$1 - \cos \text{🐱} \sim \frac{1}{2}\text{🐱}^2$	$\ln(\text{🐱} + \sqrt{1+\text{🐱}^2}) \sim \text{🐱}$
$\text{🐱} - \sin \text{🐱} \sim \frac{1}{6}\text{🐱}^3$	$\tan \text{🐱} - \text{🐱} \sim \frac{1}{3}\text{🐱}^3$
$(1+\text{🐱})^\alpha - 1 \sim \alpha\text{🐱}$	$\arcsin \text{🐱} - \text{🐱} \sim \frac{1}{6}\text{🐱}^3$
$\text{🐱} - \arctan \text{🐱} \sim \frac{1}{3}\text{🐱}^3$	$\tan \text{🐱} - \sin \text{🐱} \sim \frac{1}{2}\text{🐱}^3$

二、无穷大量

定义：若对任意 $M > 0$，总存在 $\delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(x)| > M$ 成立，则称 $f(x)$ 是当 $x \to x_0$ 的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$（不表示极限存在）

- 正无穷大量 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$：$\forall M > 0, \exists X > 0,$ 当 $x > X$ 时, $f(x) > M$
- 负无穷大量 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$：
  $\forall M > 0, \exists \delta > 0,$ 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, $f(x) < -M$

> 无穷大量 $\to$ 无界，无界 $\nrightarrow$ 无穷大量（反例：$y = x \sin x$ 无界但非无穷大（$x \to \infty$））

定理2：同一变化趋向下，若 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；若 $f(x)$ 为无穷小量，则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大量[$f(x) \neq 0$]

证明：
设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| > M$
取 $M = \frac{1}{\epsilon}$，此时 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M} = \epsilon$，即有 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad$ 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x)| < \epsilon$
取 $M = \frac{1}{\epsilon}$，此时 $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\epsilon} = M$，即有 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$

- 几个常用的无穷小量和无穷大量
  - $\lim\limits_{x \to \infty} x^n = \infty \quad \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x_n} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$
  - $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

特别提示：

简单来说就是：在自变量的某种变化趋势之下，
·以无穷为极限的称为无穷大，以0为极限的称为无穷小；
·无穷大量的倒数是无穷小量，非0无穷小量的倒数是无穷大量；
因此，后面我们只研究无穷小的相关性质。

$\frac{1}{\text{无穷大量}}$ = 无穷小量 $\begin{cases} \text{趋于0} \\ \text{0本身} \end{cases}$

$\frac{1}{\text{不为0的无穷小}}$ = 无穷大

三、无穷小量的性质

1. （有限项的代数和）若 $\alpha(x)$、$\beta(x)$ 无穷小，且趋势相同，则 $\alpha(x) \pm \beta(x)$ 无穷小
2. 若 $|f(x)| < M$，$\alpha(x)$ 为无穷小量，则 $f(x)\alpha(x)$ 为无穷小量
   $|f(x)\alpha(x) - 0| = |f(x)||\alpha(x)| < M|\alpha(x)| < M \cdot \epsilon \sim \epsilon$

> 推论1. 若 $\alpha(x)$ 为无穷小量，c 是常数，则 $c \cdot \alpha(x)$ 是无穷小量
>
> 推论2. 若 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \cdots, \alpha_i(x)$ 无穷小，则 $\prod\limits_{k=1}^{i} \alpha_k(x)$ 是无穷小量

小技巧

无穷小量的加法运算：取次方最低的（例：X2+X3=X2，二阶无穷小）
无穷小的阶：X的次方数，阶越高越趋近于0.