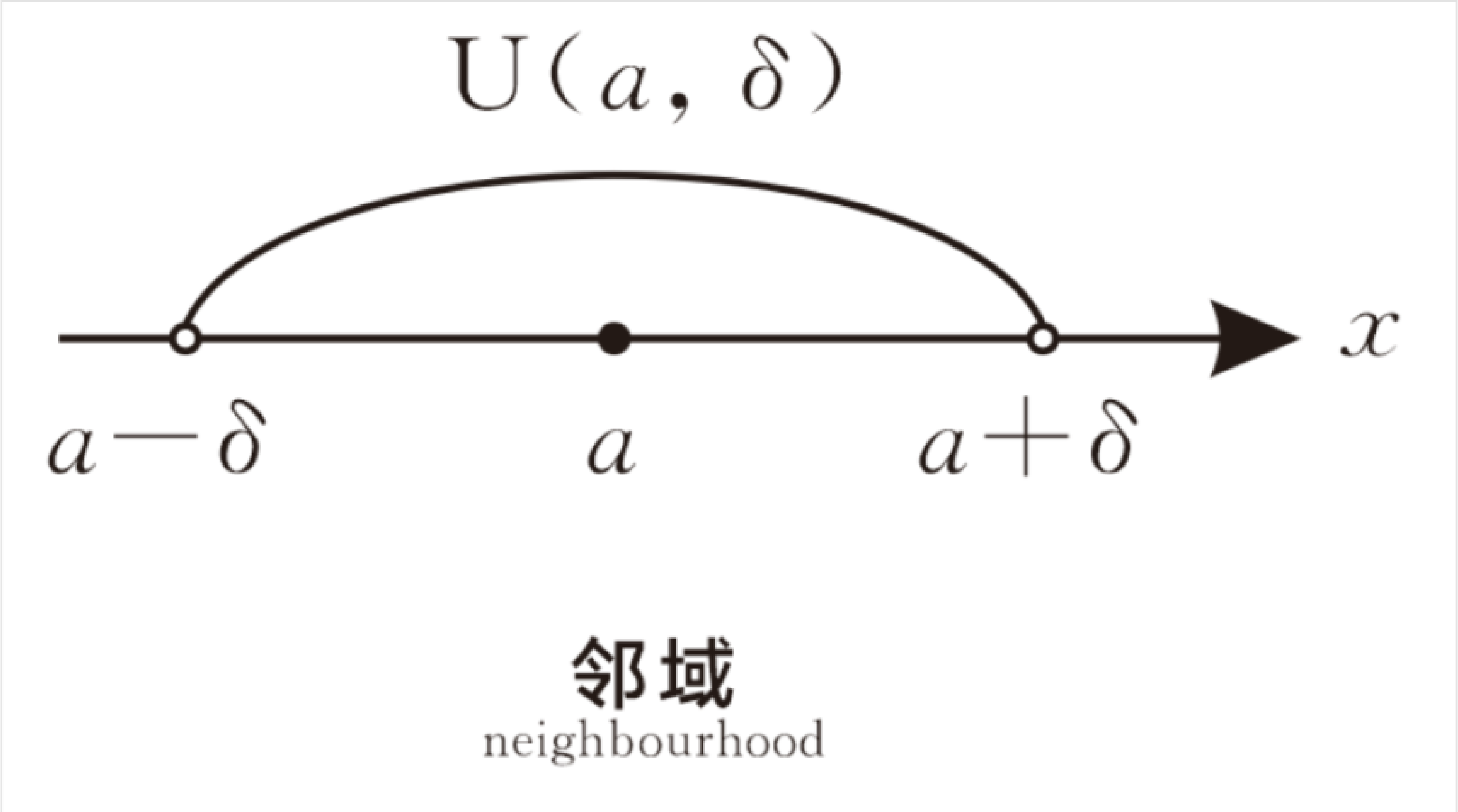
函数邻域

函数的邻域是指函数在某一点附近的变化范围。在函数的定义域中，邻域是指包含某一点的一个小区间或小区域。

高等数学中，我们经常会用到一种特殊的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，称这个开区间为点a的**邻域**（neighbourhood），记为 $\mathrm{U}(a,\delta)$，即 $\mathrm{U}(a,\delta)=(a-\delta, a+\delta)$，并称点$a$为邻域的**中心**，$\delta$为邻域的**半径**。通常$\delta$是较小的实数，所以，$a$的$\delta$邻域表示的是$a$的邻近的点，如下图所示。

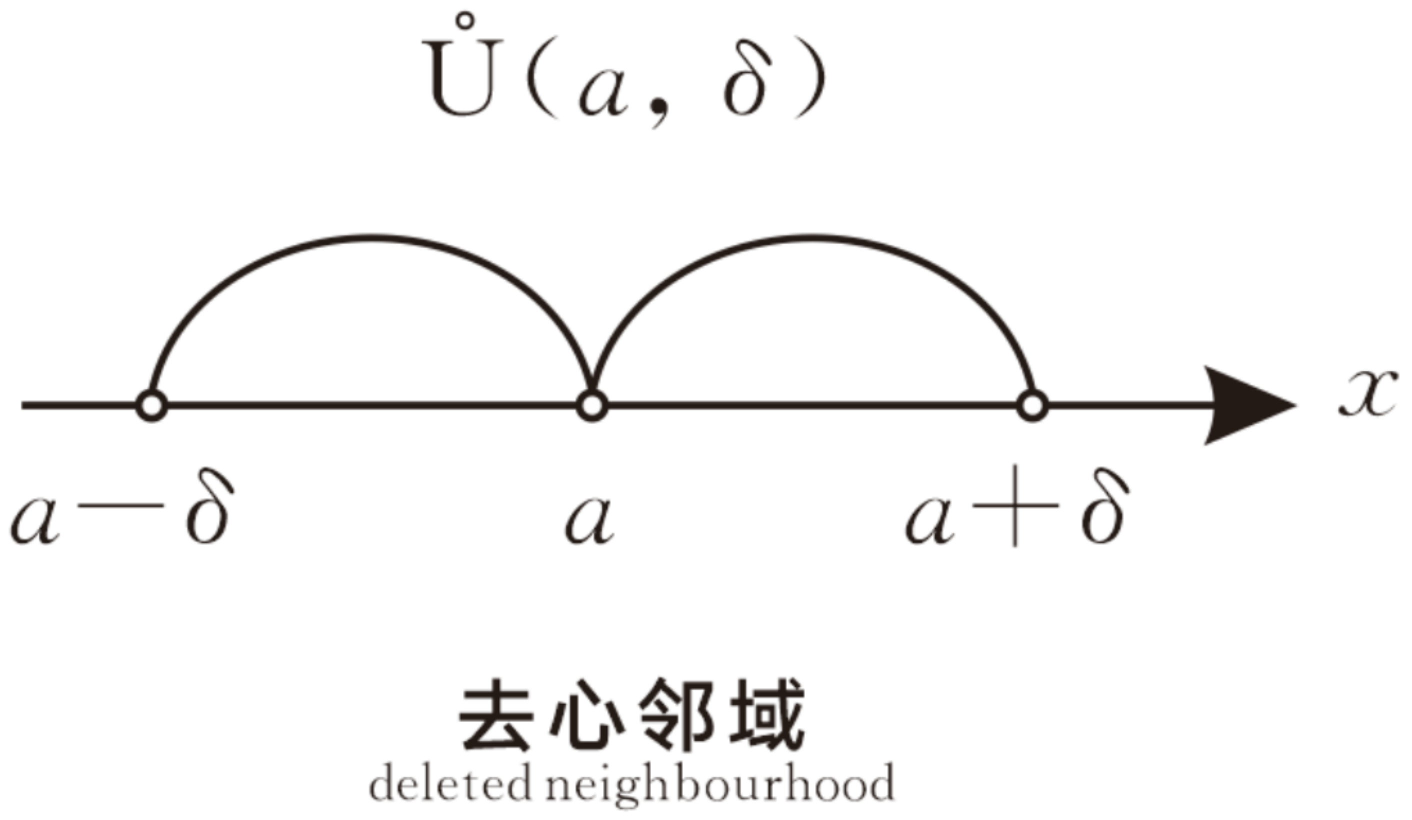
- 以a为中心的任何开区间都称为点a的邻域，记作U(a)。
- 设δ是任一正数，则开区间(a - δ，a+δ)就是点a的一个邻域，这个邻域称为**点a的δ邻域**。[1]



去心邻域即在X的邻域中去掉a的数的集合。
只考虑点a邻近的点，不考虑点a，即考虑点集{x|a-δ<x<a∨a<x<a+δ}，称这个点集为点a的去心邻域,即

$$\mathring{\mathrm{U}}=\{x|a-\delta<x<a\vee a<x<a+\delta\}。$$

。如下图所示。



一、为什么函数极限的定义要求邻域去心

我们在描述x→x0这个趋近的过程时，描述的就是 x→x0表示的就是由x向x0无限接近的过程，但这个过程中我们有**x≠x0**。
为了体现了**x→x0但不相等**的这个过程，我们将函数极限的定义取作去心邻域，让x无法取得x0的值。
如此一来，函数极限的定义就变得更为广泛，即使f(x)在x0处没有意义也可以求极限。也就是说，函数在x0处的极限只和函数在该点附近有关，与函数在该点是否有定义**可以没有关系。**
由此，我们建立了函数极限的定义，于此衍生出来的局部有界性、局部保序性、夹逼定理也自然都是在去心邻域内建立的了。

二、为什么函数连续的定义不要求邻域去心

在上面的分析中我们知道，函数在x0处的极限只和函数在该点附近有关，与函数在该点是否有定义**可以没有关系。**
因此，在一段函数图像上，点x处的邻域就可以被拆分成点x与点x的去心邻域两个部分。于是我们很自然地就得到了，要使得一段函数图像连续，那么点x处就必须与它对应的去心邻域结合成一个整体。
上面的分析中，我们知道去心邻域对应的就是点x处的极限值，而点x处对应的就是函数值，如此一来，要将他们联系成一个整体，只需要让函数值等于极限值即可。
由此，我们建立了函数连续的定义，自然就可以使用连成一个整体的**【邻域】**了，以此类推，可导概念的建立也自然就是使用**【邻域】**了。
为了方便理解，我们再来看看更加具体的例子：

三、为什么归结原则要求邻域去心

归结原则: 设函数$f(x)$在a的某去心邻域$U^\circ(x_0):=(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$有定义，则函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$的充分必要条件是：对于$U^\circ(x_0)$中任意的收敛于$a$的数列$\{a_n\}$，数列$\{f(a_n)\}$也收敛于$A$.

$a_n \neq a$

归结原则的一个等价说法是:

设函数$f(x)$在a的某去心邻域$U^\circ(x_0):=(a-\delta,a+\delta)\backslash\{a\}$有定义，则函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在的充分必要条件是：对于$(a,a+\delta)$中任意的收敛于$a$的数列$\{a_n\}$，数列$\{f(a_n)\}$也收敛.

归结原则的定义中提到了去心邻域，假如我们不去心会怎样呢?
首先，我们在上面的分析中知道，极限值等于函数值是**【函数连续】**的定义。也就是说，对于较一般的函数来说，极限值并不一定等于函数值。在上述定义中就有可能出现，a点为间断点的情况。
其次，收敛于a的数列有可能可以取到a，也有可能永远取不到a。
结合以上两点举个例子，数列an=1/n和数列bn=0都是收敛于0的数列，若f(x)是一个在x=0处间断（函数值跳跃/无定义）的函数，那么我们可以得到，当n趋于无穷时f（an）不一定等于f(bn)。

在这里我们发现了邻域与去心邻域的不同，我们可以简单理解成邻域与去心邻域**对函数连续的要求条件不同。**邻域比去心邻域对函数连续性的要求更强。