高等学校教材

离散数学及其应用习题解析

傅彦 顾小丰 编

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
URL:http://www.phei.co.cn

高等学校教材

离散数学及其应用习题解析

傅 彦 顾小丰 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industy

内 容 简 介

本书就离散数学的四大部分——数理逻辑、集合论及二元关系、图论、代数系统给出了大量具有代表性的习题及其解答。对一些典型的习题还给出了多种不同的解法，其目的在于拓宽读者的思路。

本书可作为大专院校离散数学课程的辅导读物，也可供广大从事计算机研究和应用的工程技术人员阅读。

丛 书 名：高等学校教材

书　　名：离散数学及其应用习题解析

著　　者：傅　彦　顾小丰

责任编辑：张凤鹏

特约编辑：袁　英

印 刷 者：北京牛山世兴印刷厂

装 订 者：三河市路通装订厂

出版发行：电子工业出版社出版、发行 URL：http://WWW.phei.co.cn

北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036　发行部电话 68214070

经　　销：各地新华书店经销

开　　本：787×1092 1/16 印张：6.5 字数：166.4 千字

版　　次：1997 年 4 月第 1 版　1997 年 4 月第 1 次印刷

印　　数：1 － 8000 册

书　　号：ISBN 7-5053-3955-9 / TP·1720

定　　价：9.00 元

前　　言

离散数学是高等院校计算机专业的核心课程，但初学者往往由于对离散数学中某些概念和定理理解得不够透彻，从而对一些习题无从下手。本书正是为了适应离散数学教学和自学的这一需要而编写的。

离散数学主要包括集合论及二元关系、数理逻辑、图论、代数系统这四个部分，本书作为《离散数学及其应用》的配套教材，也相应地分为五章，其中第一、二、三章由傅彦编写，第四、五章由顾小丰编写。

本书共选编了 283 个习题，每题包含若干小题，其中集合论部分 30 个，数理逻辑部分 28 个，二元关系部分 58 个，图论部分 81 个，代数系统部分 86 个。对于书中的习题，一般只给出了一种解法，但对于一些典型的习题，我们也给出了多种解法，其目的在于使读者拓宽思路、掌握更多的技巧。

在编写本书的过程中，电子科技大学的刘乃琦教授和吴跃教授给作者以极大的帮助，提出了许多宝贵的意见，在此向他们表示衷心的感谢。

作者是在多年教学积累的基础上编写本书的，但由于水平有限，错误和不当之处在所难免。恳切希望广大读者提出宝贵意见。

作者

1996 年 8 月

目　　录

第一章 集 合 论

§1.1 集合及其表示

1. 给出下列集合：

(1) 小于 10 的非负整数全体。

(2) 1 至 20 间的全体素数(质数)。

(3) 小于 100 的 12 的整倍数。

解 (1) 设 A 为小于 10 的非负整数全体。

则：$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

(2) 设 B 为 1 至 20 间的全体素数(质数)。

则：$B=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$。

(3) 设 C 为小于 100 的 12 整倍数。

则：$C=\{12,24,36,48,60,72,84,96\}$。

2. 选择合适的论域和谓词，写出下列集合：

(1) 从 0 到 100 的整数。

(2) 奇数的全体。

(3) 5 的倍数。

(4) 所有一元二次方程的解组成的集合。

(5) 能被 100 整除的整数集合。

(6) 直角坐标系中，单位元(不包括单位圆周)的点集。

解 (1) $A=\{x|(x\in I)$并且$(0\leqslant x\leqslant 100)\}$。

(2) $O=\{x|(k\in I)$并且$(x=2k+1)\}$。

(3) $B=\{x|(k\in I)$并且$(x=5k)\}$。

(4) $D=\{x|(x\in C)$并且$(a\in I)$并且$(b\in I)$并且$(c\in I)$并且$(ax^2+bx+c=0)\}$。

(5) $E=\{x|(k\in I)$并且$(x=100k)\}$。

(6) $F=\{\langle x,y\rangle|(x,y\in R)$并且$(x^2+y^2<1)\}$。

3. 用列举元素法写出下列集合：

(1) $\{x|(x\in I)$并且$(2<x<10)\}$。

(2) $\{x|x$是十进制的数字符号$\}$。

(3) $\{x|x$是 P 进制的数字符号$\}$，$P=2,8,12$。

(4) $\{x|(x=2)$或$(x=5)\}$。

(5) $F=\{\langle x,y\rangle|(x,y\in I)$并且$(0\leqslant x\leqslant 2)$并且$(-2\leqslant y\leqslant 1)\}$。

(6) $\{x|x$是 the People's Republic of China 中的英文字母$\}$。

解 (1) $\{x|(x\in I)$并且$(2<x<10)\}=\{3,4,5,6,7,8,9\}$。

(2) $\{x|x$是十进制的数字符号$\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

(3) $\{x|x$ 是二进制的数字符号$\}=\{0,1\}$。

$\{x|x$ 是八进制的数字符号$\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$。

$\{x|x$ 是十二进制的数字符号$\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$。

(4) $\{x|(x=2)$ 或 $(x=5)\}=\{2,5\}$。

(5) $F=\{\langle x,y\rangle|(x,y\in I)$ 并且 $(0\leqslant x\leqslant 2)$ 并且 $(-2\leqslant y\leqslant 1)\}=\{\langle 0,-2\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,-2\rangle,\langle 1,-1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,-2\rangle,\langle 2,-1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$。

(6) $\{x|x$ 是 the People's Republic of China 中的英文字母$\}$

$=\{a,b,c,e,f,h,i,l,n,o,p,r,s,t,u\}$。

4. 设全集为 I，下列哪些集合是相等的？

(1) $A=\{x|x$ 是偶数或奇数$\}$。

(2) $B=\{x|(\exists y)((y\in I)$ 并且 $(x=2y))\}$。

(3) $C=\{1,2,3\}$。

(4) $D=\{0,1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,\ldots\}$。

(5) $E=\{2x|x\in I\}$。

(6) $F=\{3,3,2,1,2\}$。

(7) $G=\{x|x^3-6x^2-7x-6=0\}$。

(8) $H=\{x|x^3-6x^2+11x-6=0\}$。

解 其中： $A=D$； $B=E$； $C=F=H$。

§1.2 集合与元素的关系

1. 找出下列集合之间的关系。

(1) $A=\{x|(x\in I)$ 并且 $(1<x<5)\}$。

(2) $B=\{2,3\}$。

(3) $C=\{x|x^2-5x+6=0\}$。

(4) $D=\{\{2,3\}\}$。

(5) $E=\{2\}$。

(6) $F=\{x|(x=2)$ 或 $(x=3)$ 或 $(x=4)$ 或 $(x=5)\}$。

(7) $G=\{2x|(1\leqslant x\leqslant 3)\}$。

(8) $H=\{x|(x\in I)$ 并且 $(x^2+x+1=0)\}$。

解 $H\subset E\subset B\subset A\subset F$；$B\in D$；$H\subset E\subset G$；$H\subset C$；$H\subset D$。

2. 设 $S=\{N,Q,R\}$，问下列命题是否正确。

(1) $2\in N$，$N\in S$，则 $2\in S$。

(2) $N\subset Q$，$Q\in S$，则 $N\subset S$。

(3) $N\subset Q$，$Q\subset R$，则 $N\subset R$。

解 (1)，(2)是错误的，(3)是正确的。

3. 求下列集合的基数和每个集合的幂集。

(1) $\{1,2,3\}$。 (2) $\{1,\{2,3\}\}$。 (3) $\{\{1,\{2,3\}\}\}$。

(4) $\{\{1,2\},\{2,1,1\},\{2,1,2,1\}\}$。 (5) $\{\{\Phi,2\},\{2\}\}$。

(6) $\{a,\{a\}\}$。 (7) $\{\Phi,a,\{b\}\}$。

解 (1) 基数为 3，幂集为：$\{\Phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

(2) 基数为 2，幂集为：$\{\Phi,\{1\},\{\{2,3\}\},\{1,\{2,3\}\}\}$。

(3) 基数为 1，幂集为：$\{\Phi,\{\{1,\{2,3\}\}\}\}$。

(4) 基数为 1，幂集为：$\{\Phi,\{\{1,2\}\}\}$。

(5) 基数为 2，幂集为：$\{\Phi,\{\{\Phi,2\}\},\{\{2\}\},\{\{\Phi,2\},\{2\}\}\}$。

(6) 基数为 2，幂集为：$\{\Phi,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$。

(7) 基数为 3，幂集为：$\{\Phi,\{a\},\{\Phi\},\{\{b\}\},\{\Phi,a\},\{\Phi,\{b\}\},\{a,\{b\}\},\{\Phi,a,\{b\}\}\}$。

4. 设 $A=\Phi$, $B=\{a\}$, 求 $P(A)$, $P(P(A))$, $P(P(P(A)))$, $P(B)$, $P(P(B))$, $P(P(P(B)))$。

解 $P(A)=\{\Phi\}$, $P(P(A))=\{\Phi,\{\Phi\}\}$, $P(P(P(A)))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\}\}$,

$P(B)=\{\Phi,\{a\}\}$, $P(P(B))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\}$, $P(P(P(B)))=\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\{\{a\}\}\},\{\{\Phi,\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\}\},\{\Phi,\{\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\Phi\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\Phi\},\{\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\}\},\{\Phi,\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\Phi,\{a\}\}\},\{\Phi,\{\Phi\},\{\{a\}\},\{\Phi,\{a\}\}\}\}$。

5. A,B,C 是集合，若 $A\in B$ 且 $B\in C$，有可能 $A\in C$ 吗？常有 $A\in C$ 吗？举例说明。

解 设 $A=\{a\}$, $B=\{\{a\}\}$, $C=\{\{a\},\{\{a\}\}\}$。

则由 $A\in B$ 且 $B\in C$，有 $A\in C$。但由 $A\in B$ 且 $B\in C$，不一定常有 $A\in C$。

设 $A=\{a\}$, $B=\{\{a\}\}$, $C=\{\{\{a\}\}\}$。

则有 $A\in B$ 且 $B\in C$，但 $A\notin C$。

6. 简要说明：$\{2\}$与$\{\{2\}\}$的区别，举出它们的元素与子集。

解 $\{2\}$是以元素为元素的集合，元素为 2；子集有 $\Phi,\{2\}$。

$\{\{2\}\}$是以集合为元素的集合，元素为$\{2\}$；子集有 $\Phi,\{\{2\}\}$。

7. 简要说明：Φ 与$\{\Phi\}$的区别，举出它们的元素与子集。

解 Φ 是无任何元素的集合。子集有 Φ。

$\{\Phi\}$是以集合为元素的集合，元素为 Φ；子集有 $\Phi,\{\Phi\}$。

8. 有可能有 $A\subset C$ 且 $A\in C$ 吗？论证你的断言。

解 $A\subset C$ 且 $A\in C$ 不一定成立。

如 $A=\{a\}$, $C=\{a,\{a\}\}$，则 $A\subset C$ 且 $A\in C$ 同时成立。

但若 $A=\{a\}$, $C=\{\{a\}\}$，则 $A\not\subset C$ 但 $A\in C$。

9. 确定下列命题是否为真。

(1) $\Phi\subseteq\Phi$。 (2) $\Phi\in\Phi$。 (3) $\Phi\subseteq\{\Phi\}$。 (4) $\Phi\in\{\Phi\}$。

(5) $\Phi\subseteq\{\{\Phi\}\}$。 (6) $\Phi\in\{\{\Phi\}\}$。 (7) $\{\Phi\}\subseteq\{\{\Phi\}\}$。 (8) $\{\Phi\}\in\{\{\Phi\}\}$。

(9) $\{\Phi\}\subseteq\{\Phi,\{\Phi\}\}$。 (10) $\{\Phi\}\in\{\Phi,\{\Phi\}\}$。 (11) $\{\{\Phi\}\}\subseteq\{\Phi,\{\Phi\}\}$。

(12) $\{\{\Phi\}\}\in\{\Phi,\{\Phi\}\}$。(13) $\{a\}\subseteq\{\{a\}\}$。 (14) $\{a\}\in\{\{a\}\}$。

(15) $\{a\}\subseteq\{a,\{a\}\}$。 (16) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$。

解 (1),(3),(4),(5),(8),(9),(10),(11),(14),(15),(16)是真命题，其余是假命题。

10. 证明：若 a,b,c 和 d 是任意客体，则$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$当且仅当 $a=c,b=d$。

证明 若$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$，则由集合的定义有：$\{a\}=\{c\}$，$\{a,b\}=\{c,d\}$。

由$\{a\}=\{c\}$知 $a=c$，由$\{a,b\}=\{c,d\}=\{a,d\}$，有 $b=d$。

11. 设 A,B,C 是集合，证明或反驳下列断言。

(1) $A\notin B\wedge B\in C\Rightarrow A\in C$。

(2) $A\notin B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(3) $A\in B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(4) $A\subset B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(5) $a\in A\wedge A\subset B\Rightarrow a\in B$。

解 (1) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{\{b\}\}$，则有 $A\notin B\wedge B\in C$，但 $A\notin C$。

(b) 若 $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $C=\{\{a\},\{b\}\}$，则有 $A\notin B\wedge B\in C\Rightarrow A\in C$。

(2) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{\{a\}\}$，则有 $A\notin B\wedge B\notin C$，但 $A\in C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{b\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\notin B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(3) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{\{a\}\}$，则有 $A\in B\wedge B\notin C$，但 $A\in C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{\{a\}\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\in B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(4) 结论不一定成立。

(a) 若 $A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{\{a\}\}$，则有 $A\subset B\wedge B\notin C$，但 $A\in C$。

(b) 若 $A=\{a\}$，$B=\{a,b\}$，$C=\{c\}$，则有 $A\subset B\wedge B\notin C\Rightarrow A\notin C$。

(5) 结论成立。

由 $A\subset B$ 知：对任意 $x\in A$，有 $x\in B$。因为 $a\in A$，所以 $a\in B$。

§1.3 集合的运算

1. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$。$A=\{1,4\}$，$B=\{1,2,5\}$，$C=\{2,4\}$。确定下面的集合。

(1) $A\cap\overline{B}$。 (2) $(A\cap B)\cup\overline{C}$。 (3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)$。 (4) $\overline{A\cup B}$。

(5) $\overline{A}\cap\overline{B}$。 (6) $\overline{B\cap C}$。 (7) $\overline{B}\cup\overline{C}$。 (8) $2^A\cup 2^C$。

解 (1) $A\cap\overline{B}=\{4\}$。 (2) $(A\cap B)\cup\overline{C}=\{1,3,5\}$。

(3) $(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{1,4\}$。 (4) $\overline{A\cup B}=\{3\}$。

(5) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{3\}$。 (6) $\overline{B\cap C}=\{1,3,4,5\}$。

(7) $\overline{B}\cup\overline{C}=\{1,3,4,5\}$ (8) $2^A\cup 2^C=\{\Phi,\{1\},\{2\},\{4\},\{1,4\},\{2,4\}\}$。

2. 设 $A=\{x|(x\in N)$并且$(x<5)\}$，$B=\{x|(x\in E^+)$并且$(x<7)\}$。求 $A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{x|(x\in N)$并且$(x<5)\}=\{0,1,2,3,4\}$，

$B=\{x|(x\in E^+)$并且$(x<7)\}=\{2,4,6\}$。

$A\cup B=\{0,1,2,3,4,6\}$，$A\cap B=\{2,4\}$。

3. 设 $A=\{x|x$ 是 book 中的字母$\}$，$B=\{x|x$ 是 black 中的字母$\}$。求 $A\cup B$，$A\cap B$。

解 $A=\{x|x$ 是 book 中的字母$\}=\{b,o,k\}$，

$B=\{x|x$ 是 black 中的字母$\}=\{b,l,a,c,k\}$。

$A\cup B=\{a,b,c,l,k,o\}$，$A\cap B=\{b,k\}$。

4. 给定自然数集合 N 的下列子集：

$A=\{1,2,7,8\}$； $B=\{i|i^2<50\}$；

$C=\{i|(i$ 可被 3 整除)并且$(0\leqslant i\leqslant 30)\}$； $D=\{i|(i=2^k)$并且$(k\in I_+)$并且$(1\leqslant k\leqslant 6)\}$。

求下列集合：

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))$。 (2) $A\cap(B\cap(C\cap D))$。

(3) $B-(A\cup C)$。 (4) $(\overline{A}\cap B)\cap D$。

解 $A=\{1,2,7,8\}$，$B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$C=\{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$，$D=\{2,4,8,16,32,64\}$。

(1) $A\cup(B\cup(C\cup D))=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,15,16,18,21,24,27,30,32,64\}$。

(2) $A\cap(B\cap(C\cap D))=\Phi$。

(3) $B-(A\cup C)=\{4,5\}$。

(4) $(\overline{A}\cap B)\cap D=\{4\}$。

5. 求下列集合的结果。

(1) $I-N$。 (2) $I\cup N$。 (3) $I-(I-N)$。 (4) $R\cup Q$。 (5) $R-Q$。

解 (1) $I-N=\{-1,-2,-3,\ldots\ldots -n,\ldots\ldots\}=I^-$。

(2) $I\cup N=I$。

(3) $I-(I-N)=I-I^-=N$。

(4) $R\cup Q=R$。

(5) $R-Q=S$ （S 是无理数的集合）。

6. 设 $A=\{3,4\}$；$B=\{4,3\}\cap\Phi$；$C=\{3,4\}\cap\Phi$；$D=\{x\mid(x^2-7x+12=0)$并且$(x\in R)\}$；$E=\{\Phi,3,4\}$；$F=\{4,4,3\}$；$G=\{4,\Phi,3,3\}$。问上述集合中哪些是相等的？哪些是不相等的？

解 $A=F=D$；$B=C$；$E=G$。

7. 当 $A\neq\Phi$ 时，若只有：(1) $A\cup B=A\cup C$，是否一定有 $B=C$？

(2) $A\cap B=A\cap C$，是否一定有 $B=C$？

(3) $(A\cup B=A\cup C)$并且$(A\cap B=A\cap C)$，是否一定有 $B=C$？

解 (1) 不一定成立。当 $A\supseteq B$，$A\supseteq C$，但 $B\neq C$ 时，则有 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$。

(2) 不一定成立。当 $A\subseteq B$，$A\subseteq C$，但 $B\neq C$ 时，则有 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$。

(3) 结论成立。

证明 $B=B\cup(B\cap A)=B\cup(A\cap B)=B\cup(A\cap C)=(B\cup A)\cap(B\cup C)$

$=(A\cup B)\cap(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup C=(A\cap C)\cup C=C$。

8. 设 A,B,C 均为 U 的子集，问下列命题谁对？谁错？

(1) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=B$。 (2) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup B=A$。 (3) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=A$。

(4) $A\subset B\Leftrightarrow A\cap B=B$。 (5) $A\subset B\Leftrightarrow A\cup(B-A)=B$。 (6) $B\subset A\Leftrightarrow(A-B)\cap B=A$。

解 (1)，(3)，(5)正确；(2)，(4)，(6)错误。

9. 设 A,B 为任意集合，证：

(1) $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$。 (2) $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$。

(3) $P(A)=P(B)\Leftrightarrow A=B$。

证明 (1) 设 $A\subseteq B$。

对任意 $x\in P(A)$，有 $x\subseteq A$，又 $A\subseteq B$，所以 $x\subseteq B$，即有 $x\in P(B)$。所以 $P(A)\subseteq P(B)$。

(2) 设 $P(A)\subseteq P(B)$

对任意 $x\in A$，有 $\{x\}\in P(A)$，又 $P(A)\subseteq P(B)$，所以 $\{x\}\in P(B)$，即有 $x\in B$。所以 $A\subseteq B$。

(3) “$\Rightarrow$”。设 $P(A)=P(B)$。

则有 $P(A)\subseteq P(B)$并且 $P(B)\subseteq P(A)$。由题(2)知 $P(A)\subseteq P(B)\Rightarrow A\subseteq B$。

同样可证 $P(B)\subseteq P(A)\Rightarrow B\subseteq A$。所以 $A=B$。

“$\Leftarrow$”。设 $A=B$。则有 $A\subseteq B$ 并且 $B\subseteq A$。由题(1)知 $A\subseteq B\Rightarrow P(A)\subseteq P(B)$。

同样可证 $B\subseteq A\Rightarrow P(B)\subseteq P(A)$。所以 $P(A)=P(B)$。

10. 对下列各集族 C，求 $\bigcup\limits_{S\in C}S$，$\bigcap\limits_{S\in C}S$ 。

(1) $C=\{\Phi\}$。 (2) $C=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$。

(3) $C=\{\Phi,\{\Phi\}\}$。　　(4) $C=\{\{i\}|i\in I\}$

解　(1) $\bigcup_{S\in C}S=\Phi$，　$\bigcap_{S\in C}S=\Phi$。

(2) $\bigcup_{S\in C}S=\{a,b\}$，　$\bigcap_{S\in C}S=\Phi$。

(3) $\bigcup_{S\in C}S=\{\Phi\}$，　$\bigcap_{S\in C}S=\Phi$。

(4) $\bigcup_{S\in C}S=I$，　$\bigcap_{S\in C}S=\Phi$。

11. 化简下列集合表达式。

(1) $\{2,3\}\cup\{\{2\},\{3\}\}\cup\{2,\{3\}\}\cup\{\{2\},3\}$。

(2) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)$。

解　(1) $\{2,3\}\cup\{\{2\},\{3\}\}\cup\{2,\{3\}\}\cup\{\{2\},3\}=\{2,\{2\},3,\{3\}\}$。

(2) $((A\cup B\cup C)\cap(A\cup B))-((A\cup(B-C))\cap A)=(A\cup B)-(A)=B-A$。

12. 设 $A,B,C,D,F\subseteq I^+$，其中：

$A=\{x|x<12\}$；　$B=\{x|x\leqslant 8\}$；　$C=\{x|(x=2k)$ 并且 $(k\in I^+)\}$；

$D=\{x|(x=3k)$ 并且 $(k\in I^+)\}$；　$E=\{x|(x=2k-1)$ 并且 $(k\in I^+)\}$。

试用 A,B,C,D,E 表示下述集合。

(1) $\{2,4,6,8\}$。　(2) $\{3,6,9\}$。　(3) $\{10\}$。　(4) $\{x|(x$ 是偶数$)$ 并且 $(x>10)\}$。

(5) $\{x|((x$ 是正偶数$)$ 且 $(x\leqslant 10))$ 或 $((x$ 是奇数$)$ 且 $(x\geqslant 9))\}$。

解　(1) $\{2,4,6,8\}=B\cap C$。

(2) $\{3,6,9\}=A\cap D$。

(3) $\{10\}=(A-B)-E$。

(4) $\{x|(x$ 是偶数$)$ 并且 $(x>10)\}=C-A$。

(5) $\{x|((x$ 是正偶数$)$ 且 $(x\leqslant 10))$ 或 $((x$ 是奇数$)$ 且 $(x\geqslant 9))\}=(A\cap C)\cup(E-B)$。

13. 设 $A=\{x|(x=3y)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\geqslant 4)\}$。

$B=\{x|(x=2y)$ 并且 $(y\in I)\}$。

$C=\{x|(x\in I)$ 并且 $(|x|\leqslant 10)\}$。

都是 I 的子集，试用 A,B,C 表示下列集合：

(1) 所有奇数的集合。　(2) $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}$。

(3) $\{x|(x=6y)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\geqslant 2)\}$。　(4) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}$。

(5) $\{x|(x=2y+1)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\geqslant 5)\}\cup\{x|(x=2y-1)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\leqslant -5)\}$。

解　(1) 所有奇数的集合 $=I-B$。

(2) $\{-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10\}=B\cap C$。

(3) $\{x|(x=6y)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\geqslant 2)\}=A-\overline{B}$。

(4) $\{-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9\}=C\cap\overline{B}$。

(5) $\{x|(x=2y+1)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\geqslant 5)\}\cup\{x|(x=2y-1)$ 并且 $(y\in I)$ 并且 $(y\leqslant -5)\}=\overline{B\cup C}$。

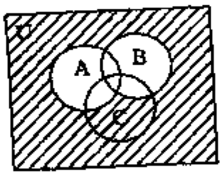
14. 画出下列集合的文氏图。

(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$　(2) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$。　(3) $A\cap(\overline{B}\cup C)$。

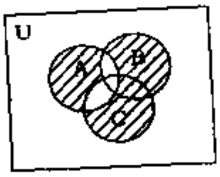
解　(1) $\overline{A}\cap\overline{B}$ 的文氏图如图 1.3-1(a) 中的阴影部分。

(2) $(A-(B\cup C))\cup((B\cup C)-A)$ 的文氏图如图 1.3-1(b) 中的阴影部分。

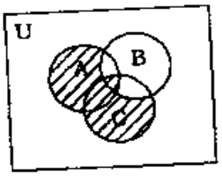
(3) $A\cap(\overline{B}\cup C)$的文氏图如图 1.3-1(c)中的阴影部分。



(a)



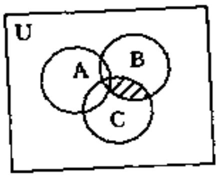
(b)



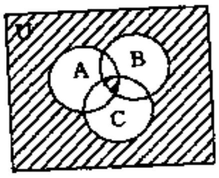
(c)

图 1.3-1

15. 用公式表示图中的阴影部分。



(a)



(b)

图 1.3-2

解 图 1.3-2(a)的阴影部分可表示为：$B\cap C\cap\overline{A}$。

图 1.3-2(b)的阴影部分可表示为：$(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap B\cap C)$。

第二章 数理逻辑

§2.1 命题逻辑

§2.1.1 命 题

1. 下列语句哪些是命题，哪些不是命题？

(1) 看球赛去！

(2) 离散数学是计算机系的一门必修课。

(3) 计算机有空吗？

(4) 请勿高声讲话！

(5) 2 是无理数。

(6) 今天天气多好啊！

(7) 2 是素数，当且仅当三角形有三条边。

(8) 明天我去上海。

(9) 太阳系以外的星球上有生物。

(10) 蓝色和黄色可以调配成绿色。

(11) 不存在最大的质数。

(12) $9+5\leqslant 10$。

(13) $x=3$。

(14) 我们要努力学习。

(15) 雪是白的当且仅当太阳从东方升起。

(16) 鸡有三只脚。

(17) 把门打开！

解 语句(2)，(5)，(7)，(8)，(9)，(10)，(11)，(12)，(14)，(15)，(16)是命题。

语句(1)，(3)，(4)，(6)，(13)，(17)不是命题。

2. 确定下列命题的真假。

(1) 没有最大的实数。

(2) $\sqrt{2}$ 是有理数。

(3) 如果 $1+2=3$，则 $4+5=9$。

(4) 3 是奇数又是素数。

(5) 如果 $1+2=3$ 当且仅当 $4+5\neq 9$。

(6) 如果我掌握英语、法语，则学习其他欧洲语言就容易多了。

(7) $9+6\leqslant 14$。

(8) 4 是 2 的倍数或是 3 的倍数。

(9) 2 是偶数且是奇数。

(10) 只有德、智、体全面发展的学生才能被评为“三好生”。

解 命题(1),(3),(4),(6),(8),(10)是真命题。

命题(2),(5),(7),(9)是假命题。

3. 将下列命题符号化。

(1) 太阳明亮且湿度不高。

(2) 如果我吃饭前完成家庭作业,并且天不下雨的话,那么,我们就去看球赛。

(3) 如果你明天看不到我,那么我就去芝加哥。

(4) 如果公用事业费用增加或者增加基金的要求被否定,那么当且仅当现有计算机设备不适用的时候,才需购买一台新计算机。

(5) 小王不但聪明而且用功。

(6) 虽然天气很好,老王还是不来。

(7) 小李一边吃饭,一边看电视。

(8) 明天他在广州,或在北京。

(9) 若 a 和 b 是偶数,则 $a+b$ 是偶数。

(10) 停机的原因在于语法错误或程序错误。

(11) 控制台打字机既可作为输入设备,又可作为输出设备。

(12) 如果你不去上学,那么我也不去上学。

解 (1) 设 P:太阳是明亮的; Q:湿度高。 则命题(1)可符号化为:$P\wedge\neg Q$。

(2) 设 P:我去吃饭前完成家庭作业; Q:天下雨; R:我去看球。

则命题(2)可符号化为:$(P\wedge\neg Q)\rightarrow R$。

(3) 设 P:明天看到我; Q:我去芝加哥。 则命题(3)可符号化为:$\neg P\rightarrow Q$。

(4) 设 P:公用事业费用增加;Q:要求增加基金;

R:现有计算机设备适用;S:购买一台计算机。

则命题(4)可符号化为:$(P\vee\neg Q)\rightarrow(\neg R\leftrightarrow S)$。

(5) 设 P:小王聪明; Q:小王用功。 则命题(5)可符号化为:$P\wedge Q$。

(6) 设 P:天气很好; Q:老王来。 则命题(6)可符号化为:$P\wedge\neg Q$。

(7) 设 P:小李吃饭; Q:小李看电视。 则命题(7)可符号化为:$P\wedge Q$。

(8) 设 P:明天他在广州; Q:明天他在北京。 则命题(8)可符号化为:$P\vee Q$。

(9) 设 P:a 是偶数; Q:b 是偶数; R:$a+b$ 是偶数。

则命题(9)可符号化为:$(P\wedge Q)\rightarrow R$。

(10) 设 P:停机的原因在于语法错误; Q:停机的原因在于程序错误。

则命题(10)可符号化为:$P\wedge Q$。

(11) 设 P:控制台打字机作为输入设备;Q:控制台打字机作为输出设备。

则命题(11)可符号化为:$P\wedge Q$。

(12)设 P:你去上学; Q:我去上学。 则命题(12)可符号化为:$\neg P\rightarrow\neg Q$。

4. 设命题 P:这个材料很有趣; Q:这些习题很难; R:这门课程使人喜欢。

将下列句子符号化。

(1) 这个材料很有趣,并且这些习题很难。

(2) 这个材料无趣,习题也不难,那么,这门课程就不会使人喜欢。

(3) 这个材料无趣,习题也不难,而且这门课程也不使人喜欢。

(4) 这个材料很有趣意味着这些习题很难，反之亦然。

(5) 或者这个材料很有趣，或者这些习题很难，并且两者恰具其一。

解 (1) $P \wedge Q$。 (2) $(\neg P \wedge \neg Q) \to \neg R$。 (3) $\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$。

(4) $P \leftrightarrow Q$。 (5) $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$或$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$。

5. 设命题 P:天正在下雪； Q:我将进城； R:我有空。

用自然语言写出下列命题。

(1) $Q \leftrightarrow (R \wedge \neg P)$。 (2) $P \wedge Q$。 (3) $(Q \to R) \wedge (R \to Q)$。 (4) $\neg (R \vee P)$。

解 (1) 我将进城去当且仅当我有空且天不下雪。

(2) 虽然天正在下雪，但我将进城去。

(3) 天正在下雪当且仅当我有空。

(4) 天不下雪且我没有空。

6. 设 P,Q 的真值为 0,R,S 的真值为 1。试求下列命题的真值。

(1) $P \vee (Q \vee R)$。 (2) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg R \vee S)$。

(3) $(P \wedge (R \vee S)) \to ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S))$。(4) $\neg (P \vee (Q \to (R \wedge \neg P))) \to (R \vee \neg S)$。

解 (1) $P \vee (Q \vee R) = 0 \vee (0 \vee 1) = 1$。

(2) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg R \vee S) = (0 \leftrightarrow 0) \wedge (\neg 1 \vee 1) = 1 \wedge (0 \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1$。

(3) $(P \wedge (R \vee S)) \to ((P \vee Q) \wedge (R \wedge S)) = (0 \wedge (1 \vee 1)) \to ((0 \vee 0) \wedge (1 \wedge 1))$
$= 0 \to 0 = 1$。

(4) $\neg (P \vee (Q \to (R \wedge \neg P))) \to (R \vee \neg S) = \neg (0 \vee (0 \to (1 \wedge \neg 0))) \to (1 \vee \neg 1)$
$= 0 \to 1 = 1$。

§2.1.2 命题的真值表

1. 构造下列各命题的真值表，并指出下述命题中哪些是永真公式？永假公式？可满足公式？

(1) $(P \to P) \vee (P \to \neg P)$。

(2) $P \to (P \vee Q \vee R)$。

(3) $(P \vee \neg P) \to \neg Q$。

(4) $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \to (P \to R)$。

(5) $((P \vee Q) \to R) \leftrightarrow Q$。

(6) $(P \to Q) \leftrightarrow (Q \to P)$。

(7) $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg Q \to \neg P)$。

(8) $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$。

(9) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$。

解 (1) $(P \to P) \vee (P \to \neg P)$的真值表如下：

P	$(P \to P)$	$(P \to \neg P)$	$(P \to P) \vee (P \to \neg P)$
0	1	1	1
1	1	0	1

(1) 为永真公式。

(2) $P\rightarrow(P\vee Q\vee R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P\vee Q\vee R$	$P\rightarrow(P\vee Q\vee R)$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

(2) 为永真公式。

(3) $(P\vee\neg P)\rightarrow\neg Q$ 的真值表如下：

P	Q	$P\vee\neg P$	$(P\vee\neg P)\rightarrow\neg Q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	0

(3) 为可满足公式。

(4) $((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$的真值表如下：

P	Q	R	$P\rightarrow Q$	$Q\rightarrow R$	$P\rightarrow R$	$(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow R)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

(4) 为永真公式。

(5) $((P\vee Q)\rightarrow R)\leftrightarrow Q$ 的真值表如下：

P	Q	R	$P\vee Q\rightarrow R$	$(P\vee Q\rightarrow R)\leftrightarrow Q$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0

续表

P	Q	R	$P\vee Q\to R$	$(P\vee Q\to R)\leftrightarrow Q$
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

(5) 为可满足公式。

(6) $(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$Q\to P$	$(P\to Q)\leftrightarrow(Q\to P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

(6) 为可满足公式。

(7) $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$的真值表如下：

P	Q	$P\to Q$	$\neg Q\to\neg P$	$(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

(7) 为永真公式。

(8) 设$G=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee Q)\wedge(P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$，则$G$的真值表如下：

P	Q	$P\vee Q$	$\neg P\vee Q$	$P\vee\neg Q$	$\neg P\vee\neg Q$	G
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0	0

(8) 为永假公式。

(9) 设$G=(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$，则$G$的真值表如下：

P	Q	$P\wedge Q$	$\neg P\wedge Q$	$P\wedge\neg Q$	$\neg P\wedge\neg Q$	G
0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

(9) 为永真公式。

§2.1.3 公式及其性质

1. 简化下列命题公式。

(1) $((P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P))\wedge R$。

(2) $P\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))$。

(3) $(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$。

(4) $((P\rightarrow Q)\wedge P\wedge R)\vee R$。

解 (1) $((P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg Q\rightarrow\neg P))\wedge R=((P\rightarrow Q)\leftrightarrow(P\rightarrow Q))\wedge R=1\wedge R=R$。

(2) $P\vee(\neg P\wedge(Q\vee\neg Q))=P\vee(\neg P\wedge 1)=P\vee\neg P=1$。

(3) $(P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)=(P\vee\neg P)\wedge(Q\wedge R)=1\wedge(Q\wedge R)=Q\wedge R$。

(4) $((P\rightarrow Q)\wedge P\wedge R)\vee R=R$。

2. 用基本等价公式证明下列等式。

(1) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)=(P\vee Q)\rightarrow R$。

(2) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)=\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$。

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=Q\rightarrow(P\rightarrow R)$。

(4) $\neg(P\leftrightarrow Q)=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

(5) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$。

解 (1) $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow Q)=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg R\vee Q)=(\neg P\wedge\neg R)\vee Q$
$=\neg(P\vee R)\vee Q=(P\vee Q)\rightarrow R$。

(2) $P\rightarrow(Q\rightarrow P)=\neg P\vee(\neg Q\vee P)=P\vee(\neg Q\vee\neg P)=\neg\neg P\vee(\neg P\vee\neg Q)$
$=\neg P\rightarrow(P\rightarrow\neg Q)$。

(3) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=\neg Q\vee(\neg P\vee R)=Q\rightarrow(P\rightarrow R)$。

(4) $\neg(P\leftrightarrow Q)=\neg((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P))=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P))$
$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg P)=(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)$。

(5) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)=\neg P\vee(\neg Q\vee R)=(\neg P\vee\neg Q)\vee R=\neg(P\wedge Q)\vee R$
$=(P\wedge Q)\rightarrow R$。

§2.1.4 范　　式

1. 求下列公式所对应的合取范式和析取范式。

(1) $P\wedge(P\rightarrow Q)$。

(2) $(\neg P\wedge Q)\rightarrow R$.

(3) $\neg(P\vee\neg Q)\wedge(S\rightarrow R)$。

(4) $P \to ((Q \wedge R) \to S)$。

(5) $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$。

(6) $\neg(P \to Q) \vee (P \vee Q)$。

(7) $(P \to Q) \to R$。

解

(1) $P \wedge (P \to Q) = P \wedge (\neg P \vee Q)$ ……为合取范式

$= (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)$ ……为析取范式

(2) $(\neg P \wedge Q) \to R = \neg(\neg P \wedge Q) \vee R = P \vee \neg Q \vee R$ ……既为合取范式,也为析取范式

(3) $\neg(P \vee \neg Q) \wedge (S \to R) = \neg P \wedge Q \wedge (\neg S \vee R)$ ……为合取范式

$= (\neg P \wedge Q \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$ ……为析取范式

(4) $P \to ((Q \wedge R) \to S) = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S$ ……既为合取范式,也为析取范式

(5) $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q) = (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ ……为合取范式

$= (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \wedge Q)$ ……为析取范式

(6) $\neg(P \to Q) \vee (P \vee Q) = \neg(\neg P \vee Q) \vee (P \vee Q)$

$= (P \wedge \neg Q) \vee (P \vee Q) = P \vee Q$ ……既为合取范式,也为析取范式

(7) $(P \to Q) \to R = \neg(\neg P \vee Q) \vee R = (P \wedge \neg Q) \vee R$ ……为析取范式

$= (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$ ……为合取范式

2. 求下列公式所对应的主合取范式和主析取范式,并指出哪些是永真式?永假式?

(1) $\neg((P \wedge Q) \vee R) \to R$。

(2) $(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$。

(3) $Q \wedge (P \vee \neg Q)$。

(4) $P \to (P \wedge (Q \to P))$。

(5) $(Q \to P) \wedge (\neg P \wedge Q)$。

(6) $(P \wedge \neg R) \vee (S \wedge P)$。

(7) $(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$。

解 (1) 利用基本等价公式来求:

$\neg((P \wedge Q) \vee R) \to R = (P \wedge Q) \vee R \vee R = (P \wedge Q) \vee R$

$= (P \wedge Q \wedge (R \vee \neg R)) \vee ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R)$

$= (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$

$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$ ……主析取范式

$= \neg((\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$

$\vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R))$

$= (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$ ……主合取范式

(2) 利用真值表技术来求:

建立公式:$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$的真值表如下:

P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$(P \leftrightarrow \neg Q)$	$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1

$(\neg P \vee \neg Q) \to (P \leftrightarrow \neg Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$ ……主析取范式

$= (P \vee Q)$ ……主合取范式

(3) 建立公式:$Q \wedge (P \vee \neg Q)$的真值表如下：

P	Q	$P \vee \neg Q$	$Q \wedge (P \vee \neg Q)$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	1	1

$Q \wedge (P \vee \neg Q) = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$ ……主合取范式

$= (P \wedge Q)$ ……主析取范式

(4) $P \to (P \wedge (Q \to P)) = \neg P \vee (P \wedge (\neg Q \vee P))$

$= \neg P \vee P = 1$ ……主合取范式为“空”

$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ ……主析取范式

此公式为永真公式。

(5) $(Q \to P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$= (\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$= (\neg Q \vee P) \wedge \neg (P \vee \neg Q) = 0$ ……主析取范式为“空”

$= (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ ……主合取范式

此公式为永假公式。

(6) $(P \wedge \neg R) \vee (S \wedge P) = (P \wedge \neg R \wedge (S \vee \neg S)) \vee (P \wedge (R \vee \neg R) \wedge S)$

$= (P \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (P \wedge R \wedge S)$ ……主析取范式

$= \neg ((P \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge R \wedge S) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge \neg R \wedge S)$

$\vee (\neg P \wedge R \wedge \neg S)) = (\neg P \vee \neg R \vee S) \wedge (P \vee \neg R \vee \neg S) \wedge (P \vee R \vee S) \wedge (P$

$\wedge \neg R \wedge S) \wedge (P \wedge R \wedge \neg S)$ ……主合取范式

(7) 建立公式:$(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$的真值表如下：

P	S	R	$P \wedge R$	$S \wedge R$	$\neg P$	$(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	1

$(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P = (\neg P \vee S \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg S \vee R)$ ……主合取范式

$= (\neg P \wedge \neg S \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg S \wedge R) \vee (\neg P \wedge S \wedge \neg R)$

$\vee (\neg P \wedge S \wedge R) \vee (P \wedge \neg S \wedge R) \vee (P \wedge S \wedge R)$ ……主析取范式

§2.1.5 推理理论

1. 用基本等价公式的转换方法验证下述论断是否有效。

(1) $P\to Q, R\wedge S, \neg Q\Rightarrow P\wedge S$。

(2) $P\vee\neg R, Q\vee S, R\to(S\wedge P)\Rightarrow S\to P$。

(3) $\neg(P\wedge\neg Q), \neg Q\vee R, \neg Q\Rightarrow\neg P$。

(4) $\neg P\to Q, Q\to R, R\to P\Rightarrow P\vee Q\vee R$。

(5) $P, Q\to R, R\vee S\Rightarrow Q\to S$。

(6) $\neg Q\wedge R, R\wedge P, Q\Rightarrow P\vee\neg Q$。

证明 (1) $(P\to Q)\wedge(R\wedge S)\wedge\neg Q\to(P\wedge S)$

$=\neg((\neg P\vee Q)\wedge(R\wedge S)\wedge\neg Q)\vee(P\wedge S)$

$=((P\wedge\neg Q)\vee\neg R\vee\neg S\vee Q)\vee(P\wedge S)=P\vee Q\vee\neg R\vee\neg S\neq 1$。

所以：$P\to Q, R\wedge S, \neg Q\not\Rightarrow P\wedge S$。

(2) $(P\vee\neg R)\wedge(Q\vee S)\wedge(R\to(S\wedge P))\to(S\to P)$

$=\neg(P\vee\neg R)\vee\neg(Q\vee S)\vee\neg(\neg R\vee(S\wedge P))\vee(\neg S\vee P)$

$=(\neg P\wedge R)\vee(\neg Q\wedge\neg S)\vee(R\wedge(\neg S\vee\neg P))\vee(\neg S\vee P)$

$=(\neg P\wedge R)\vee(R\wedge\neg S)\vee(R\wedge\neg P))\vee\neg S\vee P$

$=(\neg P\wedge R)\vee R\vee\neg S\vee P=R\vee\neg S\vee P\neq 1$。

所以：$P\vee\neg R, Q\vee S, R\to(S\wedge P)\not\Rightarrow S\to P$。

(3) $(\neg(P\wedge\neg Q)\wedge(\neg Q\vee R)\wedge\neg Q)\to\neg P$

$=(P\wedge\neg Q)\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee Q\vee\neg P$

$=(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee Q\vee\neg P=(P\wedge\neg Q)\vee Q\vee\neg P$

$=(P\wedge\neg Q)\vee\neg(P\wedge\neg Q)=1$。

所以：$\neg(P\wedge\neg Q), \neg Q\vee R, \neg Q\Rightarrow\neg P$。

(4) $((\neg P\to Q)\wedge(Q\to R)\wedge(R\to P))\to(P\vee Q\vee R)$

$=\neg(P\vee Q)\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee\neg(\neg R\vee P))\vee(P\vee Q\vee R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg R)\vee(R\wedge\neg P)\vee(P\vee Q\vee R)$

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee(P\vee Q\vee R)=\neg(P\vee Q)\vee(P\vee Q)\vee R=1$。

所以：$\neg P\to Q, Q\to R, R\to P\Rightarrow P\vee Q\vee R$。

(5) $((P\wedge(Q\to R)\wedge(R\vee S))\to(Q\to S)$

$=\neg P\vee\neg(\neg Q\vee R)\vee\neg(R\vee S)\vee(\neg Q\vee S)$

$=\neg P\vee(Q\wedge\neg R)\vee(\neg R\wedge\neg S)\vee(\neg Q\vee S)$

$=\neg P\vee(\neg R\wedge(Q\vee\neg S))\vee(\neg Q\vee S)=\neg P\vee\neg R\vee\neg Q\vee S\neq 1$。

所以：$P, Q\to R, R\vee S\not\Rightarrow Q\to S$。

(6) $(\neg Q\wedge R\wedge R\wedge P\wedge Q)\to(P\vee\neg Q)=\neg(\neg Q\wedge R\wedge R\wedge P\wedge Q)\vee(P\vee\neg Q)$

$=Q\vee\neg R\vee\neg P\vee\neg Q\vee P\vee\neg Q=1$。

所以：$\neg Q\wedge R, R\wedge P, Q\Rightarrow P\vee\neg Q$。

2. 用演绎法证明下述论断的正确性。

(1) $C\vee D, (C\vee D)\to\neg P, \neg P\to(A\wedge\neg B), (A\wedge\neg B)\to(R\vee S)\Rightarrow R\vee S$。

(2) $P\vee Q, Q\to R, P\to M, \neg M\Rightarrow R\wedge(P\vee Q)$。

(3) $P, P \to (Q \to (R \wedge S)) \Rightarrow Q \to S$。

(4) $P \to (Q \to R), R \to (Q \to S) \Rightarrow P \to (Q \to S)$。

(5) $P \to (Q \to R) \Rightarrow (Q \to (R \to S)) \to (P \to (Q \to S))$。

(6) $\neg (P \to Q) \to \neg (R \vee S), (Q \to P) \vee \neg R, R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$。

证明

(1)	①	$C \vee D$	P
	②	$(C \vee D) \to \neg P$	P
	③	$\neg P$	T,①,②,I
	④	$\neg P \to (A \wedge \neg B)$	P
	⑤	$(A \wedge \neg B)$	T,③,④,I
	⑥	$(A \wedge \neg B) \to (R \vee S)$	P
	⑦	$R \vee S$	T,⑤,⑥,I
(2)	①	$\neg M$	P
	②	$P \to M$	P
	③	$\neg P$	T,①,②,I
	④	$P \vee Q$	P
	⑤	Q	T,③,④,I
	⑥	$Q \to R$	P
	⑦	R	T,⑤,⑥,I
	⑧	$R \wedge (P \vee Q)$	T,④,⑦,I
(3)	①	P	P
	②	$P \to (Q \to (R \wedge S))$	P
	③	$(Q \to (R \wedge S))$	T,①,②,I
	④	Q	P（附加前提）
	⑤	$(R \wedge S)$	T,③,④,I
	⑥	S	T,⑤,I
	⑦	$Q \to S$	CP,④,⑥
(4)	①	P	P（附加前提）
	②	$P \to (Q \to R)$	P
	③	$Q \to R$	T,①,②,I
	④	Q	P（附加前提）
	⑤	R	T,③,④,I
	⑥	$R \to (Q \to S)$	P
	⑦	$Q \to S$	T,⑤,⑥,I
	⑧	$P \to (Q \to S)$	CP,①,⑦
(5)	①	$Q \to (R \to S)$	P（附加前提）
	②	$R \to (Q \to S)$	T,①,E
	③	$P \to (Q \to R)$	P
	④	P	P(附加前提)
	⑤	$Q \to R$	T,③,④,I
	⑥	Q	P（附加前提）

⑦ R T,⑤,⑥,I

⑧ $(Q\to S)$ T,②,⑦,I

⑨ $P\to(Q\to S)$ CP,④,⑧

⑩ $(Q\to(R\to S))\to(P\to(Q\to S))$ CP,①,⑨

(6) ① R P

② $(Q\to P)\vee\neg R$ P

③ $(Q\to P)$ T,①,②,I

④ $R\vee S$ T,①,I

⑤ $\neg(P\to Q)\to\neg(R\vee S)$ P

⑥ $P\to Q$ T,④,⑤,I

⑦ $P\leftrightarrow Q$ T,③,⑥,I

3. 符号化下列论断，并用演绎法验证论断是否正确。

(1) 或者逻辑难学，或者有少数学生不喜欢它；如果数学容易学，那逻辑并不难学。因此，如许多学生喜欢逻辑，那么数学并不难学。

(2) 有红、黄、蓝、白四队参加足球联赛。如果红队第三，则当黄队第二时，蓝队第四；或者白队不是第一，或者红队第三；事实上，黄队第二。因此，如果白队第一，那么蓝队第四。

(3) 如果 6 是偶数，则 2 不能整除 7；或者 5 不是素数，或者 2 整除 7；5 是素数。因此，6 是奇数。

(4) 如果 A 地发生了交通事故，则小李的通行会发生困难；如果小李按指定的时间到达了，则他的通行没有发生困难。小李按指定时间到达了。所以 A 地没有发生交通事故。

(5) 若今天是星期二，那么我要考计算机科学或经济学；若经济学教授病了，就不考经济学；今天是星期二，并且经济学教授病了。所以，我要考计算机科学。

(6) 如果乙不参加篮球赛，那么甲就不参加；如果乙参加篮球赛，那么甲和丙就参加。因此，如果甲参加球赛，那么丙就参加。

解 (1) 设 P：逻辑难学； Q：有少数学生不喜欢逻辑； R：数学容易学。

则上述句子(1)可符号化为：$P\vee Q, R\to\neg P\Rightarrow\neg Q\to\neg R$。

证明 ① $P\vee Q$ P

② $\neg P\to Q$ T,①,E

③ $R\to\neg P$ P

④ $R\to Q$ P

⑤ $(\neg Q\to\neg R)$ T,④,E

(2) 设 P：红队第三； Q：黄队第二； R：蓝队第四； S：白队第一。

则上述句子(2)可符号化为：$P\to(Q\to R), \neg S\vee P, Q\Rightarrow S\to R$。

证明 ① $\neg S\vee P$ P

② S P（附加前提）

③ P T,①,②,I

④ $P\to(Q\to R)$ P

⑤ $Q\to R$ T,③,④,I

⑥ Q P

⑦ R T,⑤,⑥,I

⑧	$S\to R$	CP,②,⑦

(3) 设 P:6 是偶数； Q:2 整除 7； R:5 是素数。

则上述句子(3)可符号化为:$P\to\neg Q,\neg R\vee Q,R\Rightarrow\neg P$。

证明	①	$\neg(\neg P)$	P（附加前提）
	②	P	T,①,E
	③	$P\to\neg Q$	P
	④	$\neg Q$	T,②,③,I
	⑤	$\neg R\vee Q$	P
	⑥	$\neg R$	T,④,⑤,I
	⑦	R	P
	⑧	$\neg R\wedge R$	T,⑥,⑦,I

(4) 设 P:A 地发生了交通事故； Q:小李的通行会发生问题；

R:小李按指定的时间到达。

则上述句子(4)可符号化为:$P\to Q,R\to\neg Q,R\Rightarrow\neg P$。

证明	①	$R\to\neg Q$	P
	②	R	P
	③	$\neg Q$	T,①,②,I
	④	$P\to Q$	P
	⑤	$\neg P$	T,③,④,I

(5) 设 P:今天是星期二；Q:我要考计算机科学；

R:我要考经济学；S:经济学教授病了。

则上述句子(5)可符号化为:$P\to(Q\vee R),S\to\neg R,P\wedge S\Rightarrow Q$。

证明	①	$P\wedge S$	P
	②	S	T,①,I
	③	$S\to\neg R$	P
	④	$\neg R$	T,②,③,I
	⑤	$P\to(Q\vee R)$	P
	⑥	P	T,①,I
	⑦	$Q\vee R$	T,⑤,⑥,I
	⑧	Q	T,④,⑦,I

(6) 设 P:乙参加篮球赛； Q:甲参加篮球赛； R:丙参加篮球赛。

则上述句子(3)可符号化为:$\neg P\to\neg Q,P\to(Q\wedge R)\Rightarrow Q\to R$。

证明	①	Q	P（附加前提）
	②	$\neg P\to\neg Q$	P
	③	P	T,①,②,I
	④	$P\to(Q\wedge R)$	P
	⑤	$Q\wedge R$	T,③,④,I
	⑥	R	T,⑤,I
	⑦	$Q\to R$	CP,①,⑥

§ 2.2 谓词逻辑

§ 2.2.1 谓词与量词

1. 用谓词和量词，将下列命题符号化。

(1) 每一个有理数都是实数。

(2) 某些实数是有理数。

(3) 不是每一个实数都是有理数。

(4) 存在着偶素数。

(5) 会叫的狗未必会咬人。

(6) 每个人的外祖母都是他母亲的母亲。

(7) 任何自然数的后继数必大于零。

(8) 有些液体能溶解任何金属。

(9) 任何金属均可溶解于某种液体之中。

(10) 没有不犯错误的人。

(11) 小莉是非常聪明和美丽的。

(12) 小李是一个田径运动员。

解 (1) 设：$Q(x)$：x 是有理数，$R(x)$：x 是实数。

则上述句子(1)可符号化为：$(\forall x)(Q(x)\rightarrow R(x))$。

(2) 设：$R(x)$：x 是实数，$Q(x)$：x 是有理数。

则上述句子(2)可符号化为：$(\exists x)(R(x)\wedge Q(x))$。

(3) 设：$R(x)$：x 是实数，$Q(x)$：x 是有理数。

则上述句子(3)可符号化为：$\neg(\forall x)(R(x)\rightarrow Q(x))$。

(4) 设：$E(x)$：x 是偶数，$P(x)$：x 是素数。

则上述句子(4)可符号化为：$(\exists x)(E(x)\wedge P(x))$。

(5) 设：$D(x)$：x 是会叫的狗，$R(x)$：x 是会咬人的狗。

则上述句子(5)可符号化为：$(\exists x)(D(x)\wedge \neg R(x))$。

(6) 设：$H(x)$：x 是人，$G(x,y)$：x 是 y 的外祖母，$M(x,y)$：x 是 y 的母亲。

则上述句子(6)可符号化为：$(\forall x)(\forall y)(H(x)\wedge H(y)\wedge G(x,y)$

$\rightarrow(\exists z)(M(x,z)\wedge M(z,y)))$。

(7) 设：$N(x)$：x 是自然数，$L(x,y)$：x 大于 y。

则上述句子(7)可符号化为：$(\forall x)(N(x)\rightarrow L(x+1,0))$。

(8) 设：$P(x)$：x 是液体，$G(x)$：x 是金属，$R(x,y)$：x 溶解 y。

则上述句子(8)可符号化为：$(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)(G(y)\rightarrow R(x,y)))$。

(9) 设：$P(x)$：x 是液体，$G(x)$：x 是金属，$R(x,y)$：x 溶解 y。

则上述句子(9)可符号化为：$(\forall x)(G(x)\rightarrow(\exists y)(P(y)\wedge R(y,x)))$。

(10) 设：$H(x)$：x 是人，$P(x)$：x 是犯错误的。

则上述句子(10)可符号化为：$\neg(\exists x)(H(x)\wedge\neg P(x))$

$=(\forall x)(H(x)\rightarrow P(x))$。

(11) 设：$C(x)$：x 是聪明的，$B(x)$：x 是美丽的，a：小莉。

则上述句子(11)可符号化为：$C(a) \wedge B(a)$。

(12) 设：$S(x)$：x 是田径运动员，a：小李。

则上述句子(12)可符号化为：$S(a)$。

2. 将下列命题译成自然语言，并确定其真值。这里假定个体域 D 是正整数集合。

(1) $(\forall x)(\exists y)G(x,y)$ 其中：$G(x,y)$表示：$xy=y$。

(2) $(\exists x)(\forall y)F(x,y)$ 其中：$F(x,y)$表示：$x+y=y$。

(3) $(\exists x)(\forall y)H(x,y)$ 其中：$H(x,y)$表示：$x+y=x$。

(4) $(\exists x)(\forall y)L(x,y)$ 其中：$L(x,y)$表示：$xy=y$。

(5) $(\forall x)(\exists y)M(x,y)$ 其中：$M(x,y)$表示：$xy=1$。

(6) $(\forall x)(\exists y)N(x,y)$ 其中：$N(x,y)$表示：$y=2x$。

解 (1) 式(1)可翻译为："对任意的正整数 x，存在正整数 y，使得：$xy=y$。其真值为'假'"。

(2) 式(2)可翻译为："存在正整数 x，使得对任意的正整数 y，满足：$x+y=y$。其真值为'假'"。

(3) 式(3)可翻译为："存在正整数 x，使得对任意的正整数 y，满足：$x+y=x$。其真值为'假'"。

(4) 式(4)可翻译为："存在正整数 x，使得对任意的正整数 y，满足：$xy=y$。其真值为'真'"。

(5) 式(5)可翻译为："对任意的正整数 x，存在正整数 y，使得：$xy=1$。其真值为'假'"。

(6) 式(6)可翻译为："对任意的正整数 x，存在正整数 y，使得：$y=2x$。其真值为'真'"。

3. 已给谓词如下：试把下列命题译成自然语言。

$P(x)$：x 是素数。

$E(x)$：x 是偶数。

$O(x)$：x 是奇数。

$N(x,y)$：x 可以整除 y。

(1) $P(5)$。

(2) $E(2) \wedge P(2)$。

(3) $(\forall x)(N(2,x) \rightarrow E(x))$。

(4) $(\exists x)(E(x) \wedge N(x,6))$。

(5) $(\forall x) \neg E(x) \rightarrow \neg N(2,x))$。

(6) $(\forall x)(E(x) \rightarrow (\forall y)(N(x,y) \rightarrow E(y)))$。

(7) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(O(y) \wedge N(y,x)))$。

(8) $(\forall x)(O(x) \rightarrow (\exists y)(E(y) \wedge \neg N(y,x)))$。

解 (1) 式(1)可翻译为：5 是一个素数。

(2) 式(2)可翻译为：2 是一个偶素数。

(3) 式(3)可翻译为：对任意的被 2 整除的数 x，x 一定是偶数。

(4) 式(4)可翻译为：存在一个整除 6 的偶数。

(5) 式(5)可翻译为:任意一个非偶数一定不被 2 整除。

(6) 式(6)可翻译为:对任意的两个 x,y,如 x 是偶数且 x 整除 y,则 y 一定是偶数。

(7) 式(7)可翻译为:对任意的 x,如 x 是素数,则存在一个 y,y 是奇数且 y 整除 x。

(8) 式(8)可翻译为:对任意一个奇数,都存在一个不整除它的偶数。

§2.2.2 谓词公式

1. 指出下列各式的自由变元和约束变元,并决定量词的辖域。

(1) $(\exists x)((P(x)\vee R(x))\wedge S(x))\rightarrow(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))$。

(2) $(\forall x)(P(x)\leftrightarrow Q(x))\wedge(\exists x)R(x)\vee S(x)$。

(3) $(\exists x)(P(x)\wedge(\forall y)Q(x,y))$。

(4) $(\forall x)(F(x)\wedge G(x,y))\rightarrow(\forall y)F(y)\wedge R(x,y,z)$。

(5) $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\rightarrow(\forall x)P(x)\wedge Q(x)$。

(6) $(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)\vee((\forall x)P(x)\rightarrow Q(x))$。

解 (1) 式(1)中,$(\exists x)$的辖域为$((P(x)\vee R(x))\wedge S(x))$,$P(x),R(x),S(x)$中的 x 是约束变元;$(\forall x)$的辖域为$(P(x)\wedge Q(x))$,$P(x),Q(x)$中的 x 是约束变元。

(2) 式(2)中,$(\forall x)$的辖域为$(P(x)\leftrightarrow Q(x))$,$P(x),Q(x)$中的 x 是约束变元;$(\exists x)$的辖域为 $R(x)$,$R(x)$中的 x 是约束变元;$S(x)$中的 x 是自由变元。

(3) 式(3)中,$(\exists x)$的辖域为$(P(x)\wedge(\forall y)Q(x,y))$,$P(x),Q(x,y)$中的 x 是约束变元;$(\forall y)$的辖域为 $Q(x,y)$,$Q(x,y)$中的 y 是约束变元。

(4) 式(4)中,$(\forall x)$的辖域为$(F(x)\wedge G(x,y))$,$F(x),G(x,y)$中的 x 是约束变元;$G(x,y)$中的 y 是自由变元;$(\forall y)$的辖域为 $F(y)$,$F(y)$中的 y 是约束变元;$R(x,y,z)$中的 x,y,z 都是自由变元。

(5) 式(5)中,$(\forall x)$的辖域为$(P(x)\wedge Q(x))$,$P(x),Q(x)$中的 x 是约束变元;$(\forall x)$的辖域为 $P(x)$,$P(x)$中的 x 是约束变元;第二个 $Q(x)$中的 x 是自由变元。

(6) 式(6)中,$(\forall x)$的辖域为 $P(x)$,$P(x)$中的 x 是约束变元;$(\exists x)$的辖域为 $Q(x)$,$Q(x)$中的 x 是约束变元;$(\forall x)$的辖域为 $P(x)$,$P(x)$中的 x 是约束变元;第二个 $Q(x)$中的 x 是自由变元。

2. 设下面所有谓词的个体域都是 $A=\{a,b,c\}$,试将下面谓词公式中的量词消除,写出与之等价的命题公式。

(1) $(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)R(x)$。

(2) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$。

(3) $(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)P(x)$。

(4) $(\forall x)P(x)$。

(5) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$。

解 (1) $(\forall x)P(x)\wedge(\exists x)R(x)=(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))\wedge(R(a)\vee R(b)\vee R(c))$。

(2) $(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))=(P(a)\rightarrow Q(a))\wedge(P(b)\rightarrow Q(b))\wedge(P(c)\rightarrow Q(c))$。

(3) $(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall x)P(x)=(\neg P(a)\wedge\neg P(b)\wedge\neg P(c))\vee(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))$。

(4) $(\forall x)P(x)=(P(a)\wedge P(b)\wedge P(c))$。

(5) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)=(P(a,a)\vee P(a,b)\vee P(a,c))\wedge(P(b,a)\vee P(b,b)\vee P(b,c))$

$\wedge (P(c,a) \vee P(c,b) \vee P(c,c))$。

§2.2.3 公式的解释与基本性质

1. 找出下列各式的真值。

(1) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$。 其中 $P(x)$：$x=1$； $Q(x)$：$x=2$；而且论域是$\{1,2\}$。

(2) $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a)$。 其中 P：$2>1$； $Q(x)$：$x \leqslant 3$；$R(x)$：$x \geqslant 6$；$a=5$；而且论域是$\{-2,3,6\}$。

(3) $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge 1$。 其中 $P(x)$：$x>2$； $Q(x)$：$x=0$；而且论域是$\{1,2\}$。

解 (1) $(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) = (P(1) \vee Q(1)) \wedge (P(2) \vee Q(2)) = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1$。

(2) $(\forall x)(P \rightarrow Q(x)) \vee R(a) = ((1 \rightarrow Q(3)) \wedge (1 \rightarrow Q(-2)) \wedge (1 \rightarrow Q(6))) \vee R(5)$

$= ((1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 1) \wedge (1 \rightarrow 0)) \vee 0 = 0$。

(3) $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge 1 = ((P(1) \rightarrow Q(1)) \vee (P(2) \rightarrow Q(2))) \wedge 1$

$= ((0 \rightarrow 0) \vee (0 \rightarrow 0)) \wedge 1 = 1$。

2. 设解释 I 如下：

$D=\{a,b\}$；$P(a,a)=1$；$P(b,b)=1$；$P(a,b)=0$；$P(b,a)=0$。

试确定下列公式在 I 下的真值。

(1) $(\forall x)(\exists y) P(x,y)$。

(2) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$。

(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$。

(4) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(y,x))$。

(5) $(\forall x)P(x,x)$。

(6) $(\exists y) \neg P(a,y)$。

解 (1)，(4)，(5)，(6)在解释 I 下取值为"真"。

(2)，(3)在解释 I 下取值为"假"。

3. 设 $G=(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$。

(1) 若解释 I 的非空区域 D 仅仅包含一个元素，则 G 在 I 下取值为什么？

(2) 设 $D=\{a,b\}$，试找出一个 D 上的解释 I，使得 G 在 I 下取值为"假"。

解 (1) 若解释 I 的非空区域 D 仅仅包含一个元素时，无论 $P(x)$为何值，则都有 G 的取值为"真"。

(2) 当 $D=\{a,b\}$，令：$P(a)=1$，$P(b)=0$ 时，G 的取值为"假"。

4. 设 I 是如下的一个解释：

$D=\{1,2\}$；$a=1$；$b=2$；$f(1)=2$；$f(2)=1$；$P(1,1)=1$；

$P(1,2)=1$；$P(2,1)=0$；$P(2,2)=0$。

试求出下列公式在 I 下的真值。

(1) $P(a,f(a)) \wedge P(b,f(b))$。

(2) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y)))$。

(3) $(\forall x)(\exists y)P(y,x)$。

解 (1) $P(a,f(a)) \wedge P(b,f(b)) = P(1,f(1)) \wedge P(2,f(2)) = P(1,2) \wedge P(2,1)$

$=1 \wedge 0 = 0$。

(2) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \rightarrow P(f(x),f(y))) = (P(1,1) \rightarrow P(f(1),f(1))) \wedge (P(1,2)$

$\to P(f(1),f(2)))\wedge(P(2,1)\to P(f(2),f(1)))\wedge(P(2,2)\to P(f(2),f(2)))$
$=(P(1,1)\to P(2,2))\wedge(P(1,2)\to P(2,1))\wedge(P(2,1)\to P(1,2))\wedge(P(2,2)$
$\to P(1,1))=(1\to 0)\wedge(1\to 0)\wedge(0\to 1)\wedge(0\to 1)=0$。

(3) $(\forall x)(\exists y)P(y,x)=(P(1,1)\vee P(2,1))\wedge(P(1,2)\vee P(2,2))$
$=(1\vee 0)\wedge(1\vee 0)=1$。

5. 给定下列谓词公式，试问哪些公式是有效式？矛盾式？可满足式？

(1) $(\forall x)(\neg P(x)\to\neg P(x))$。

(2) $(\forall x)P(x)\to(\exists x)P(x)$。

(3) $(\exists x)P(x)\to(\forall x)P(x)$。

(4) $\neg(P(x)\to(\forall y)(G(x,y)\to P(x)))$。

(5) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)\to(\exists x)(\forall y)P(x,y)$。

(6) $(\forall x)(\forall y)P(x,y)\leftrightarrow(\forall y)(\forall x)P(x,y)$。

(7) $\neg(\forall x)(P(x)\to(\forall y)Q(y))\wedge(\forall y)Q(y)$。

(8) $\neg(\forall x)(Q(x))\leftrightarrow(\exists x)(\neg Q(x))$。

(9) $(\forall x)(P(x)\wedge Q(x))\to((\forall x)P(x)\wedge(\forall y)Q(y))$。

(10) $(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\to((\forall x)P(x)\vee(\forall y)Q(y))$。

解 (1),(2),(6),(8),(9)为有效式。

(4),(7)为矛盾式。

(3),(5),(10)为可满足式。

§2.2.4 谓词演算与推理

1. 指出下面的演绎中的错误，并给出正确的推导过程。

(1)	$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	P
(2)	$P(y)\to Q(y)$	US,(3)
(3)	$(\exists x)P(x)$	P
(4)	$P(y)$	ES,(1)
(5)	$Q(y)$	T,(2),(4),I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG,(5)

解 第(4)步中的 $P(y)$ 中的 y 不能由 ES 规则推出。因为此 y 是由第(1)步利用 US 规则推出的，此时，应选另外的符号，如符号“c”。正确的推导如下。

(1)	$(\exists x)P(x)$	P
(2)	$P(c)$	ES,(1)
(3)	$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	P
(4)	$P(c)\to Q(c)$	US,(3)
(5)	$Q(c)$	T,(2),(4),I
(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG,(5)

2. 构造下列推理的证明。

(1) $(\forall x)(\neg P(x)\to Q(x)),(\forall x)\neg Q(x)\Rightarrow(\exists x)P(x)$。

(2) $\neg(\exists x)(P(x)\wedge Q(c))\Rightarrow(\exists x)P(x)\to\neg Q(c)$。

(3) $(\exists x)P(x)\to(\forall y)((P(y)\vee Q(y))\to R(y)),(\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)R(x)$。

(4) $(\forall x)(P(x)\to(Q(x)\wedge R(x))),(\exists x)P(x)\Rightarrow(\exists x)(P(x)\wedge R(x))$。

证明	(1)	① $(\forall x)\neg Q(x)$	P
		② $\neg Q(x)$	US,①
		③ $(\forall x)(\neg P(x)\to Q(x))$	P
		④ $\neg P(x)\to Q(x)$	US,③
		⑤ $P(x)$	T,②,④,I
		⑥ $(\exists x)P(x)$	EG,⑤
	(2)	① $(\exists x)P(x)$	P(附加前提)
		② $\neg(\exists x)(P(x)\wedge Q(c))$	P
		③ $\neg(\exists x)P(x)\vee\neg Q(c)$	T,②,E
		④ $\neg Q(c)$	T,①,③,I
		⑤ $(\exists x)P(x)\to\neg Q(c)$	CP,①,④
	(3)	① $(\exists x)P(x)$	P
		② $(\exists x)P(x)\to(\forall y)((P(y)\vee Q(y))\to R(y))$	P
		③ $(\forall y)((P(y)\vee Q(y))\to R(y))$	T,①,②,I
		④ $P(c)$	ES,①
		⑤ $(P(c)\vee Q(c))\to R(c)$	US,④
		⑥ $P(c)\vee Q(c)$	T,④,I
		⑦ $R(c)$	T,⑤,⑥,I
		⑧ $(\exists x)R(x)$	EG,⑦
	(4)	① $(\exists x)P(x)$	P
		② $P(c)$	ES,①
		③ $(\forall x)(P(x)\to(Q(x)\wedge R(x)))$	P
		④ $P(c)\to(Q(c)\wedge R(c))$	US,③
		⑤ $Q(c)\wedge R(c)$	T,②,④,I
		⑥ $R(c)$	T,⑤,I
		⑦ $P(c)\wedge R(c)$	T,②,⑥,I
		⑧ $(\exists x)(P(x)\wedge R(x))$	EG,⑦

3. 指出下列推导中的错误，并加以改正。

(1)	①	$(\forall x)P(x)\to Q(x)$	P
	②	$P(y)\to Q(y)$	US,①
(2)	①	$P(a)\to Q(b)$	P
	②	$(\exists x)(P(x)\to Q(x))$	EG,①
(3)	①	$P(x)\to Q(c)$	P
	②	$(\exists x)(P(x)\to Q(x))$	EG,①
(4)	①	$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	P
	②	$P(a)\to Q(b)$	US,①
(5)	①	$(\exists x)P(x)$	P
	②	$P(c)$	ES,①
	③	$(\exists x)Q(x)$	P

④	$Q(c)$	ES,③

(6)

①	$(\forall x)(\exists y)(x>y)$	P
②	$(\exists y)(z>y)$	US,①
③	$(z>c)$	ES,②
④	$(\forall x)(x>c)$	UG,③
⑤	$c>c$	US,④

(7)

①	$(\forall x)(\exists y)(x>y)$	P
②	$(\exists y)(z>y)$	US,①
③	$(z>C_z)$	ES,②
④	$(\forall x)(x>x)$	UG,③

解 (1) 在第①步中的量词$(\forall x)$的辖域为 $P(x)$，而非 $P(x)\rightarrow Q(x)$，所以消去量词时，不能直接使用 US 规则。正确的推导可为：

①	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
②	$P(y)\rightarrow Q(y)$	US,①

(2) 在第①步中是两个不同的个体常量 a,b，因此不能同时对两个不同的个体常量使用一次 EG 规则来加入同一个量词。正确的推导可为：

①	$P(a)\rightarrow Q(b)$	P
②	$(\exists x)(\exists y)(P(x)\rightarrow Q(y))$	EG,①

(3) 在第①步中 x 是以自由变元的身份出现，所以在对个体常量加入量词时，该量词的变元符号不能在原公式中以自由变元的身份出现。正确的推导可为：

①	$P(x)\rightarrow Q(c)$	P
②	$(\exists y)(P(x)\rightarrow Q(y))$	EG,①

(4) 在第①步中，$P(x)$，$Q(x)$都是受同一个量词$(\forall x)$的限制，所以，在使用 US 规则消去量词时，所选用的取代 x 的变元符号应该一致。正确的推导可为：

①	$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$	P
②	$P(a)\rightarrow Q(a)$	US,①

(5) 在第③步中，由于是$(\exists x)$量词，所以在消去量词时，所选用的取代 x 的常量符号要有别于公式推导中前面已经出现的其他常量符号。正确的推导可为：

①	$(\exists x)P(x)$	P
②	$P(c)$	ES,①
③	$(\exists x)Q(x)$	P
④	$Q(b)$	ES,③

(6) 由于在第②步中含有自由变元符号 z，所以在消去量词$(\exists y)$时，应选的常量符号为含有 z 作为下标的常量符号 c_z。正确的推导可为：

①	$(\forall x)(\exists y)(x>y)$	P
②	$(\exists y)(z>y)$	US,①
③	$(z>c_z)$	ES,②

(7) 在第③步中，常量符号 c_z 中的 z 是一个下标符号，因此，不能对下标符号 z 使用 UG 规则。正确的推导可为：

①	$(\forall x)(\exists y)(x>y)$	P

② $(\exists y)(z>y)$ US,①

③ $(z>c_z)$ ES,②

4. 将下列命题符号化,并用演绎法证明其论证是否正确。

(1) 每一个大学生,不是文科学生,就是理工科学生;有的大学生是优等生;小张不是文科生,但他是优等生。因而,如果小张是大学生,他就是理工科学生。

(2) 伟大的物理学家都具有广博的知识;新闻记者具有广博的知识。所以新闻记者是伟大的物理学家。

(3) 三角函数都是周期函数;一些三角函数是连续函数,所以一些周期函数是连续函数。

(4) 没有不守信用的人是可以信赖的;有些可以信赖的人是受过教育的。因此,有些受过教育的人是守信用的。

(5) 所有的玫瑰和蔷薇都是芳香而带刺的。因此,所有的玫瑰都是带刺的。

(6) 不存在白色的乌鸦;北京鸭是白色的。因此,北京鸭不是乌鸦。

(7) 所有的舞蹈者都很有风度;王英是个学生并且是个舞蹈者。因此,有些学生很有风度。

(8) 所有的有理数都是实数;所有的无理数也是实数;虚数不是实数。因此,虚数既不是有理数也不是无理数。

(9) 每个旅客或者坐头等舱或者坐二等舱;每个旅客当且仅当他富裕时坐头等舱;有些旅客富裕但并非所有的旅客都富裕。因此,有些旅客坐二等舱。

解 (1) 设 $P(x)$:x 是一个大学生;$Q(x)$:x 是文科生;$S(x)$:x 是理科生;$T(x)$:x 是优等生;c:小张。

则上述句子(1)可符号为:

$(\forall x)(P(x)\to(Q(x)\vee S(x)))$,$(\exists x)(P(x)\wedge T(x))$,$\neg Q(c)\wedge T(c) \Rightarrow P(c)\to S(c)$。

证明 ①	$\neg Q(c)\wedge T(c)$	P
②	$(\forall x)(P(x)\to(Q(x)\vee S(x)))$	P
③	$P(c)\to(Q(c)\vee S(c))$	US,②
④	$P(c)$	P(附加前提)
⑤	$Q(c)\vee S(c)$	T,③,④,I
⑥	$\neg Q(c)$	T,①,I
⑦	$S(c)$	T,⑤,⑥,I
⑧	$P(c)\to S(c)$	CP,④,⑦

(2) 设 $P(x)$:x 是伟大的物理学家;$Q(x)$:x 是新闻工作者;$S(x)$:x 具有广博的知识。

则上述句子(2)可符号为:

$(\forall x)(P(x)\to S(x))$,$(\forall x)(Q(x)\to S(x))\Rightarrow(\forall x)(Q(x)\to P(x))$。

证明 ①	$(\forall x)(P(x)\to S(x))$	P
②	$(\forall x)(Q(x)\to S(x))$	P
③	$(P(y)\to S(y))$	US,①
④	$(Q(y)\to S(y))$	US,②

上述公式无法推出$(Q(y)\to P(y))$,即无法推出$(\forall x)(Q(x)\to P(x))$。所以,此论证并非是正确的。

(3) 设 $S(x)$:x 是三角函数;$T(x)$:x 是周期函数;$P(x)$:x 是连续函数。

则上述句子(3)可符号为：

$(\forall x)(S(x)\to T(x)),(\exists x)(S(x)\land P(x))\Rightarrow(\exists x)(T(x)\land P(x))$。

证明 ① $(\exists x)(S(x)\land P(x))$ P

② $(S(c)\land P(c))$ ES,①

③ $(\forall x)(S(x)\to T(x))$ P

④ $(S(c)\to T(c))$ US,③

⑤ $S(c)$ T,②,I

⑥ $T(c)$ T,④,⑤,I

⑦ $P(c)$ T,②,I

⑧ $T(c)\land P(c)$ T,⑥,⑦,I

⑨ $(\exists x)(T(x)\land P(x))$ EG,⑧

(4) 设 $P(x)$:x 是守信用的；$Q(x)$：x 是可信赖的；$R(x)$：x 是受过教育的。

则上述句子(4)可符号为：

$\neg(\exists x)(\neg P(x)\land Q(x)),(\exists x)(Q(x)\land R(x))\Rightarrow(\exists x)(R(x)\land P(x))$。

证明 ① $(\exists x)(Q(x)\land R(x))$ P

② $(Q(c)\land R(c))$ ES,①

③ $\neg(\exists x)(\neg P(x)\land Q(x))$ P

④ $(\forall x)(P(x)\lor\neg Q(x))$ T,③,E

⑤ $P(c)\lor\neg Q(c)$ US,④

⑥ $Q(c)$ T,②,I

⑦ $P(c)$ T,⑤,⑥,I

⑧ $R(c)$ T,②,I

⑨ $R(c)\land P(c)$ T,⑦,⑧,I

⑩ $(\exists x)(R(x)\land P(x))$ EG,⑨

(5) 设 $P(x)$:x 是玫瑰；$Q(x)$：x 是蔷薇；$R(x)$：x 是芳香的；$S(x)$：x 是带刺的。

则上述句子(5)可符号为：

$(\forall x)((P(x)\lor Q(x))\to(R(x)\land S(x)))\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to S(x))$。

证明 ① $(\forall x)((P(x)\lor Q(x))\to(R(x)\land S(x)))$ P

② $(P(x)\lor Q(x))\to(R(x)\land S(x))$ US,①

③ $(\neg P(x)\land\neg Q(x))\lor(R(x)\land S(x))$ T,②,E

④ $\neg P(x)\lor S(x)$ T,③,I

⑤ $P(x)\to S(x)$ T,④,E

⑥ $(\forall x)(P(x)\to S(x))$ UG,⑤

(6) 设 $W(x)$:x 是白色的；$Q(x)$：x 是乌鸦；$R(x)$：x 北京鸭。

则上述句子(6)可符号为：

$\neg(\exists x)(W(x)\land Q(x)),(\forall x)(R(x)\to W(x))\Rightarrow(\forall x)(R(x)\to\neg Q(x))$。

证明 ① $(\forall x)(R(x)\to W(x))$ P

② $R(x)\to W(x)$ US,①

③ $\neg(\exists x)(W(x)\land Q(x))$ P

④ $(\forall x)(\neg W(x)\lor\neg Q(x))$ T,③,E

⑤ $\neg W(x) \vee \neg Q(x)$ US,③

⑥ $W(x) \rightarrow \neg Q(x)$ T,⑤,E

⑦ $R(x) \rightarrow \neg Q(x)$ T,②,⑥,I

⑧ $(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg Q(x))$ UG,⑦

(7) 设 $P(x)$：x 是舞蹈家；$Q(x)$：x 是有风度的；$S(x)$：x 是学生；a：王英。则上述句子(7)可符号为：

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), S(a) \wedge P(a) \Rightarrow (\exists x)(S(x) \wedge Q(x))$。

证明 ① $S(a) \wedge P(a)$ P

② $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ P

③ $P(a) \rightarrow Q(a)$ US,②

④ $P(a)$ T,①,I

⑤ $Q(a)$ T,③,④,I

⑥ $S(a)$ T,①,I

⑦ $S(a) \wedge Q(a)$ T,⑤,⑥,I

⑧ $(\exists x)(S(x) \wedge Q(x))$ EG,⑦

(8) 设 $Q(x)$：x 是有理数；$R(x)$：x 是实数；$N(x)$：x 是无理数；$C(x)$：x 是虚数。则上述句子(8)可符号为：

$(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x)), (\forall x)(N(x) \rightarrow R(x)), (\forall x)(C(x) \rightarrow \neg R(x))$
$\Rightarrow (\forall x)(C(x) \rightarrow \neg Q(x) \wedge \neg N(x))$。

证明 ① $(\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$ P

② $Q(x) \rightarrow R(x)$ US,①

③ $(\forall x)(N(x) \rightarrow R(x))$ P

④ $N(x) \rightarrow R(x)$ US,③

⑤ $(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg R(x))$ P

⑥ $C(x) \rightarrow \neg R(x)$ US,⑤

⑦ $R(x) \rightarrow \neg C(x)$ T,⑥,E

⑧ $Q(x) \rightarrow \neg C(x)$ T,②,⑦,I

⑨ $N(x) \rightarrow \neg C(x)$ T,④,⑦,I

⑩ $(Q(x) \rightarrow \neg C(x)) \wedge (N(x) \rightarrow \neg C(x))$ T,⑧,⑨,E

⑪ $(C(x) \rightarrow \neg Q(x) \wedge \neg N(x))$ T,⑩,E

⑫ $(\forall x)(C(x) \rightarrow \neg Q(x) \wedge \neg N(x))$ UG,⑪

(9) 设 $P(x)$：x 是旅客；$Q(x)$：x 坐头等舱；$R(x)$：x 坐二等舱；$S(x)$：x 是富裕的。则上述句子(9)可符号为：

$(\forall x)(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x))), (\forall x)(P(x) \rightarrow (S(x) \leftrightarrow Q(x))),$
$(\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge \neg (\forall x)(P(x) \rightarrow S(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x) \wedge R(x))$。

证明 ① $(\exists x)(P(x) \wedge S(x)) \wedge \neg (\forall x)(P(x) \rightarrow S(x))$ P

②$(\forall x)(P(x) \rightarrow S(x))$ T,①,I

③ $(\exists x)(P(x) \wedge \neg S(x))$ T,②,E

④ $P(c) \wedge \neg S(c)$ ES,③

⑤ $P(c)$ T,④,I

⑥ $\neg S(c)$	T,④,I
⑦ $(\forall x)(P(x)\rightarrow(Q(x)\vee R(x)))$	P
⑧ $P(c)\rightarrow(Q(c)\vee R(c))$	US,⑦
⑨ $Q(c)\vee R(c)$	T,⑤,⑧,I
⑩ $(\forall x)(P(x)\rightarrow(S(x)\leftrightarrow Q(x)))$	P
⑪ $P(c)\rightarrow(S(c)\leftrightarrow Q(c))$	US,⑩
⑫ $S(c)\leftrightarrow Q(c)$	T,⑤,⑪,I
⑬ $Q(c)\rightarrow S(c)$	T,⑫,I
⑭ $\neg Q(c)$	T,⑥,⑬,I
⑮ $R(c)$	T,⑨,⑭,I
⑯ $P(c)\wedge R(c)$	T,⑤,⑮,I
⑰ $(\exists x)(P(x)\wedge R(x))$	EG,⑯

第三章　二 元 关 系

§3.2　二元关系及其表示

1. 给定集合：

$A=\{1,7\}$；　　$B=\{0,3,5\}$；　　$C=\{1,2\}$

(1) 写出 A 对 B 的关系 $<,=,\leqslant$　(2) 写出 B 对 C 的关系 $<,=,\leqslant$。

(3) 写出 A 对 C 的关系$<,=,\leqslant$。

解　(1) $< = \{\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle\}$ ，$= = \Phi$，$\leqslant = \{\langle 1,3\rangle,\langle 1,5\rangle\}$ 。

(2) $< = \{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle\}$ ，$= = \Phi$，$\leqslant = \{\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle\}$ 。

(3) $< = \{\langle 1,2\rangle\}$ ，$= = \{\langle 1,1\rangle\}$，$\leqslant = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle\}$。

2. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，A 上的关系 R 和 S 定义如下：

$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle\}$，　$S=\{\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$。

求 $R\cup S$，$R\cap S$，$R-S$，$S-R$，$\overline{R}$，$\overline{S}$。

解　$R\cup S=\{\langle a,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$；　$R\cap S=\{\langle b,d\rangle\}$；

$R-S=\{\langle a,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$；　　$S-R=\{\langle a,c\rangle,\langle d,b\rangle\}$；

$\overline{R}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,$
$\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,b\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$；

$\overline{S}=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,$
$\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$。

3. $A=\{1,2,3,6\}$，用 L 表示"小于等于"关系，D 表示"整除"关系，即：

$L=\{\langle a,b\rangle\mid(a\leqslant b)\wedge(a,b\in A)\}$；

$D=\{\langle a,b\rangle\mid(a\text{ 整除 }b)\wedge(a,b\in A)\}$。

用枚举法列出 L 和 D 的元素，并求 $L\cap D$，$L\circ D$。

解　$L=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,6\rangle\}$；

$D=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 6,6\rangle\}$；

$L\cap D=D$；　　$L\circ D=L$。

4. 设 $A=\{0,1,2,3\}$，R 和 S 是 A 上的二元关系，

$R=\{\langle i,j\rangle\mid(j=i+1)\text{或}(j=i/2)\}$；　$S=\{\langle i,j\rangle\mid(i=j+2)\}$。

(1) 用关系矩阵法求 $R\circ S$。　(2) 用关系图法求 $S\circ R$。

(3) 用任意方法求 $R\circ S\circ R$，R^3，S^3。

解　$R=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$；　$S=\{\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

$$(1)\quad M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad M_s=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}。$$

则 $M_{R\circ S}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

$R\circ S=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$。

(2) $R,S,S\circ R$ 的关系图如图 3.2-1、图 3.2-2、图 3.2-3：

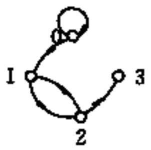


图 3.2-1

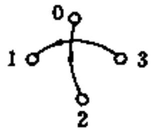


图 3.2-2

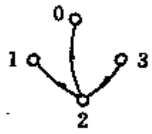


图 3.2-3

$S\circ R=\{\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$

(3) $R\circ S\circ R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 2,2\rangle\}$；

$R^3=\{\langle 0,3\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,1\rangle\}$；$S^3=\Phi$。

5. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，定义在 A 上的关系 R 如下：

$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle\}$。

(1) 画出 R 的关系图，并写出 R 的关系矩阵。

(2) 求 R^2,R^3,R^4。

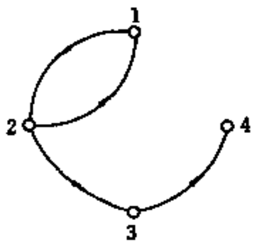


图 3.2-4

解 (1) R 之关系图如图 3.2-4：

R 之关系矩阵为：$M_R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

(2) $R^2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$；

$R^3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle\}$；

$R^4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle\}$。

6. 设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A 上的二元关系可定义为：

$R=\{\langle x,y\rangle\mid(x-y)^2\in A$ 并且$(x>y)\}$； $S=\{\langle x,y\rangle\mid y$ 是 x 倍数$\}$；

$T=\{\langle x,y\rangle\mid x/y$ 是素数$\}$。

写出 R,S,T 的元素，并画出 R,S,T 的关系图。

解 $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 5,4\rangle,\langle 6,5\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 6,4\rangle\}$；

$S=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,$
$\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$；

$T=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 5,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$。

R,S,T 的关系图分别如图 3.2-5、图 3.2-6、图 3.2-7 所示。

7. 设 $A=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，$B=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,2\rangle\}$。

求 $A\cup B,A\cap B,\mathrm{dom}A,\mathrm{dom}B,\mathrm{ran}A,\mathrm{ran}B,\mathrm{dom}(A\cup B),\mathrm{ran}(A\cap B),A\circ B$。

解 $A\cup B=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$；

$A\cap B=\{\langle 2,4\rangle\}$； $\mathrm{dom}A=\{1,2,3\}$； $\mathrm{dom}B=\{1,2,4\}$；

$\mathrm{ran}A=\{2,3,4\}$； $\mathrm{ran}B=\{2,3,4\}$； $\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$；

图　3.2-5

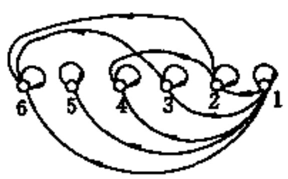


图　3.2-6

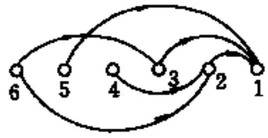


图　3.2-7

$\operatorname{ran}(A\cap B)=\{4\}$；　　　　$A\circ B=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$。

8. 设 R 和 S 定义在 P 上的二元关系，P 是所有人的集合。

$R=\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(x$ 是 y 父亲$)\}$；

$S=\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(x$ 是 y 母亲$)\}$。

(1) $R\circ R$ 表示的是什么关系。

(2) $S^{-1}\circ R$ 表示的是什么关系。

(3) $S\circ R^{-1}$ 表示的是什么关系。

(4) $\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(y$ 是 x 的外祖母$)\}$ 如何表示。

(5) $\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(y$ 是 x 的祖母$)\}$ 如何表示。

解　(1) $R\circ R=\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(x$ 是 y 祖父$)\}$。

(2) $S^{-1}\circ R=\Phi$。

(3) $S\circ R^{-1}=\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(x$ 是 y 妻子$)\}$。

(4) $\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(y$ 是 x 的外祖母$)\}$ 可表示为 $=(S\circ S)^{-1}$。

(5) $\{\langle x,y\rangle\mid(x,y\in P)\wedge(y$ 是 x 的祖母$)\}$ 可表示为 $=(S\circ R)^{-1}$。

9. 设 $A=\{1,2,3\}$。

(1) 举出 A 上的一元关系。

(2) A 上有多少个二元关系。

解　(1)　$R=\Phi$；　$R=\{1\}$；　$R=\{2\}$；　$R=\{3\}$；　$R=\{1,2\}$；

$R=\{1,3\}$；　$R=\{2,3\}$；　$R=\{1,2,3\}$。

(2) A 上的二元关系共有：$2^{|A|\times|A|}=2^{3\times 3}=2^9$。

10. 设 A 为 n 个元素的集合。

(1) 证明：A 上有 2^n 个一元关系。

(2) 证明：A 上有个 2^{n^2} 个二元关系。

(3) A 上有多少个三元关系。

解　(1)　证：A 的任何一个子集都是 A 上的一元关系，根据组合的意义知：A 上的不同子集共有

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n。$$

所以，共有 2^n 个一元关系。

(2)　证：$A\times A$ 的任何一个子集都是 A 上的二元关系，根据组合的意义知：A 上的不同子集共有

$$C_{n\times n}^0+C_{n\times n}^1+\cdots+C_{n\times n}^{n\times n}=2^{n\times n}。$$

(3) A 上的三元关系共有：$2^{n\times n\times n}$。

11. 设 R 是集合 A 上的一个二元关系，$|A|=n$，则存在 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant 2^{n\times n}$，使得 $R^s=R^t$。

证明　由于 A 上的不同的二元关系共有 $2^{n\times n}$ 个，所以，由 R 产生的 $2^{n\times n}+1$ 个幂集关系

$R^0,R^1,R^2,\cdots\cdots R^{n\times n}$中，必至少存在相同的关系。所以存在：$0\leqslant s\leqslant 2^{n\times n}$，$0\leqslant t\leqslant 2^{n\times n}$，$s\neq t$，使得 $R^s=R^t$。

12. 设 R,S,T 是集合 A 上的关系，证明：

(1) $R\subseteq S\Rightarrow R\circ T\subseteq S\circ T$。

(2) $R\subseteq S\Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}$。

(3) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$。

(4) $R\subseteq S\Rightarrow \overline{S}\subseteq\overline{R}$。

(5) $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

证明 (1) 对任意$\langle x,z\rangle\in R\circ T(x,z\in A)$，由"$\circ$"知：存在 $y\in A$，使得 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in T$。由 $R\subseteq S$ 知：$\langle x,y\rangle\in S$。由"$\circ$"知 $\langle x,y\rangle\in S$，$\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ T$。

所以，$R\circ T\subseteq S\circ T$。

(2) 对任意$\langle y,x\rangle\in R^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle x,y\rangle\in R$。由 $R\subseteq S$ 知：$\langle x,y\rangle\in S$，即 $\langle y,x\rangle\in S^{-1}$。所以 $R^{-1}\subseteq S^{-1}$。

(3) ① 对任意$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}(x,y\in A)$，有$\langle x,y\rangle\in(R\cap S)$。$\langle x,y\rangle\in R$，$\langle x,y\rangle\in S$，即$\langle y,x\rangle\in R^{-1}$，$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$。

所以，$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}$。即$(R\cap S)^{-1}\subseteq R^{-1}\cap S^{-1}$。

② 对任意$\langle y,x\rangle\in R^{-1}\cap S^{-1}(x,y\in A)$，有 $\langle y,x\rangle\in R^{-1}$，$\langle y,x\rangle\in S^{-1}$。

即 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle x,y\rangle\in S$。所以，$\langle x,y\rangle\in R\cap S$，即$\langle y,x\rangle\in(R\cap S)^{-1}$。

即 $R^{-1}\cap S^{-1}\subseteq(R\cap S)^{-1}$。

由①，②知 $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$。

(4) 对任意$\langle x,y\rangle\in\overline{S}$，有$\langle x,y\rangle\notin S$。由 $R\subseteq S$，所以$\langle x,y\rangle\notin R$，即$\langle x,y\rangle\in\overline{R}$。

所以，$\overline{S}\subseteq\overline{R}$。

(5) ① 证：$(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

对任意$\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T\ (x,z\in A)$，由"$\circ$"知：存在 $y\in A$，使得 $\langle x,y\rangle\in(R\cup S)$并且$\langle y,z\rangle\in T$。有$\langle x,y\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\in S$。由"$\circ$"知 $\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\circ T$ 或$\langle x,y\rangle\in S$，$\langle y,z\rangle\in T\Rightarrow\langle x,z\rangle\in S\circ T$。

所以，$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)$。即 $(R\cup S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

② 证：$(R\circ T)\cup(S\circ T)\subseteq(R\cup S)\circ T$。

对任意$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)\cup(S\circ T)\ (x,z\in A)$，$\langle x,z\rangle\in(R\circ T)$或 $\langle x,z\rangle\in(S\circ T)$。

由"$\circ$"知：存在 $y\in A$，使得 $\langle x,y\rangle\in R$ 并且$\langle y,z\rangle\in T$ 或$\langle x,y\rangle\in S$ 并且$\langle y,z\rangle\in T$。

即有$(\langle x,y\rangle\in R$ 或$\langle x,y\rangle\in S)$并且$(\langle y,z\rangle\in T)$。即 $\langle x,y\rangle\in R\cup S$ 并且$\langle y,z\rangle\in T$。

所以，由"$\circ$"知$\langle x,z\rangle\in(R\cup S)\circ T$。即$(R\circ T)\cup(S\circ T)\subseteq(R\cup S)\circ T$。

由①，②知：$(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$。

§3.3 关系的性质

1. 设 $A=\{a,b,c\}$，A 上的关系 R_i 定义如下：

(1) $R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$。

(2) $R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$。

(3) $R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$。

(4) $R_4=\Phi$。

(5) $R_5=A\times A$。

判断 A 上的上述关系具备哪些性质。

解 (1) R_1 是反对称的、传递的。

(2) R_2 是自反的、对称的、传递的。

(3) R_3 是反对称的。

(4) R_4 是反自反的、对称的、反对称的、斜对称的、传递的。

(5) R_5 是自反的、对称的、传递的。

2. 举出 $A=\{1,2,3\}$上的关系 R 的例子，使它有如下的性质：

(1) 既是对称的，又是反对称的。

(2) R 既不是对称的，也不是反对称的。

(3) R 是传递的。

解 (1) 设 $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$，则 R 既是对称的，又是反对称的。

(2) 设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则 R 既不是对称的，也不是反对称的。

(3) 设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，则 R 传递的。

3. 设 $A=\{1,2,3\}$，在图 3.3-1 中给出了十六种(1)～(16)A 上的关系。对于每一个关系图，写出相应的关系表达式和关系矩阵，并说明它们具备什么性质。

解 (1) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}。$$

R 是自反的。

(2) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}。$$

R 是反对称的、传递的。

(3) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}。$$

R 是自反的、对称的、传递的。

(4) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}。$$

R 是自反的、传递的。

(5) $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle\}$。

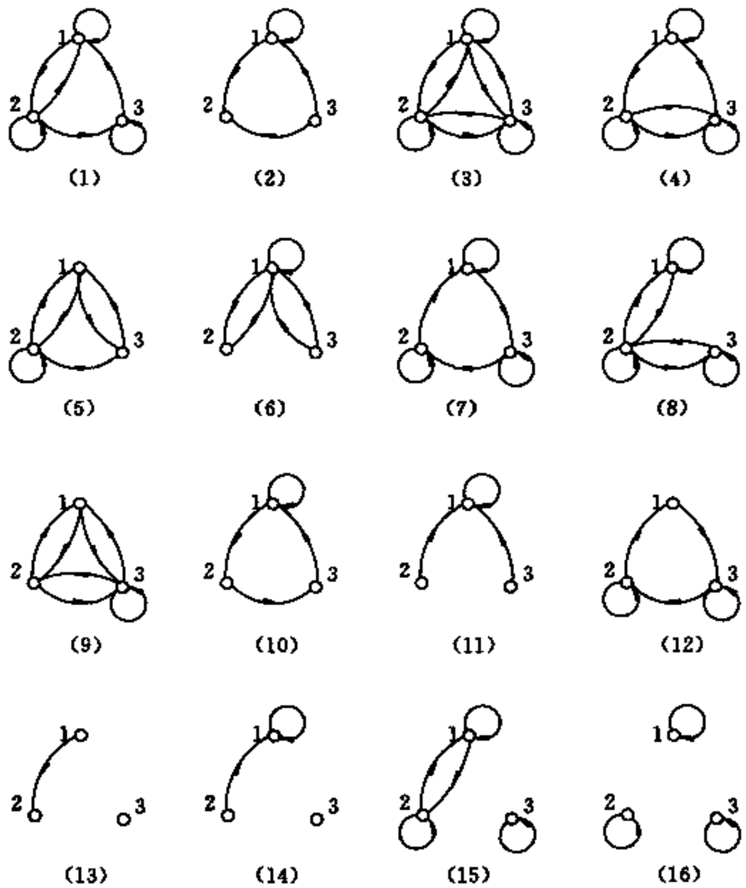


图 3.3-1

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}。$$

R 不具备任何性质。

(6) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}。$$

R 是对称的。

(7) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}。$$

R 是自反的、反对称的。

(8) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}。$$

R 是自反的、对称的。

(9) $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

R 是对称的。

(10) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

R 是反对称的。

(11) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

R 是传递的、反对称的。

(12) $R=\{\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

R 是反对称的。

(13) $R=\{\langle 1,2\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

R 是反自反的、反对称的、斜对称的、传递的。

(14) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}。$$

R 是传递的、反对称的。

(15) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

R 是自反的、对称的、传递的。

(16) $R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$。

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。$$

R 是自反的、对称的、传递的、反对称的。

4. 下述关系具有哪些性质？

(1) I 上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in I)\wedge(x>y)\}$。

(2) R 上的关系 $R=\{\langle x, \sqrt{x}\rangle \mid (x\in I)\land(x>0)\}$。

(3) 任意集合 A 上的恒等关系 $I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$。

(4) $B=\{1,2,3,...,10\}$上的关系 $R=\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in B)\land(x+y=10)\}$。

解 (1) R 是反对称的、反自反的、传递的。

(2) R 是反对称的。

(3) I_A 是自反的、对称的、反对称的、传递的。

(4) R 是对称的。

5. 设如图 3.3-2 给出的六个关系，都是 $A=\{a,b,c,d\}$上的关系。

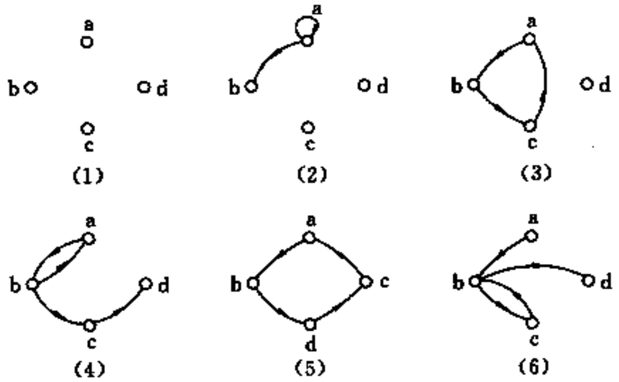


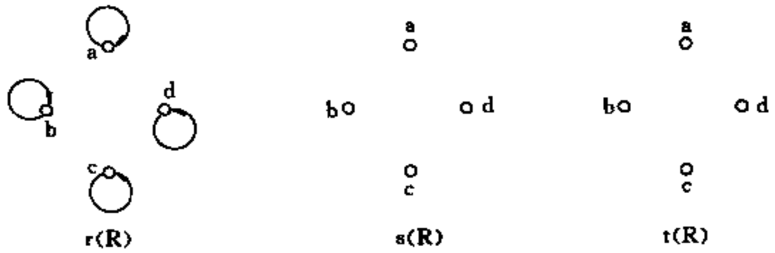
图 3.3-2

求这些关系的 $r(R)$,$s(R)$,$t(R)$，并画出对应的关系图。

解 (1) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=R$;

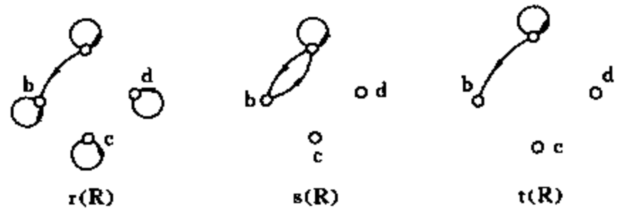
$t(R)=R$。



(2) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$;

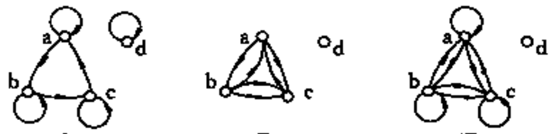
$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$。



(3) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\}$。

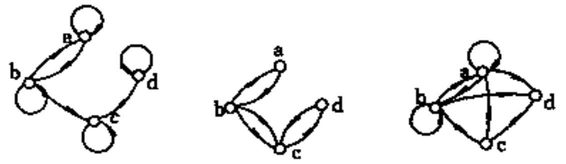


r(R)　　s(R)　　t(R)

(4) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle\}$。

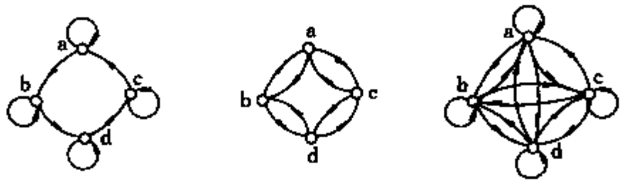


r(R)　　s(R)　　t(R)

(5) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,c\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle,$
$\langle a,d\rangle,\langle d,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$。

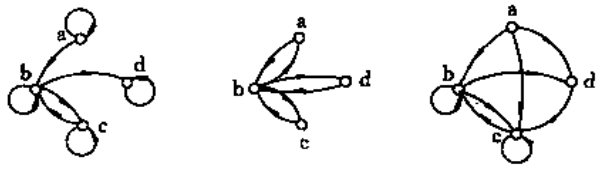


r(R)　　s(R)　　t(R)

(6) $r(R)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$;

$s(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle d,b\rangle\}$;

$t(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,c\rangle\}$。



r(R)　　s(R)　　t(R)

6. 设 R,S 是集合 A 上的关系，试证明或否定以下断言：

(1) 若 R,S 是自反的，则 $R\circ S$ 是自反的。

(2) 若 R,S 是反自反的，则 $R\circ S$ 是反自反的。

(3) 若 R,S 是对称的，则 $R\circ S$ 是对称的。

(4) 若 R,S 是反对称的，则 $R\circ S$ 是反对称的。

(5) 若 R,S 是传递的，则 $R\circ S$ 是传递的。

解 (1) 是正确的。

对任意的 $x\in A$，因为 R,S 是自反的，所以 $\langle x,x\rangle\in R$，$\langle x,x\rangle\in S$。由"$\circ$"知 $\langle x,x\rangle\in R\circ S$。所以，$R\circ S$ 是自反的。

(2) 不一定正确。

如 $R=\{\langle a,b\rangle\}$，$S=\{\langle b,a\rangle\}$。则 R,S 都是反自反的，但 $R\circ S=\{\langle a,a\rangle\}$ 不是反自反的。

(3) 不一定正确。

如 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$S=\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$。则 R,S 都是对称的，但 $R\circ S=\{\langle a,c\rangle\}$ 不是对称的。

(4) 不一定正确。

如 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle\}$，$S=\{\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$。则 R,S 都是反对称的，但 $R\circ S=\{\langle b,a\rangle,\langle a,b\rangle\}$ 不是反对称的。

(5) 不一定正确。

如 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$，$S=\{\langle b,b\rangle,\langle c,a\rangle\}$。则 R,S 都是传递的，但 $R\circ S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle a,a\rangle\}$ 不是传递的。

7. 设 R 是集合 A 上的关系，证明或否定下述论断：

(1) 若 R 是自反的，则 $s(R),t(R)$ 是自反的。

(2) 若 R 是对称的，则 $r(R),t(R)$ 是对称的。

(3) 若 R 是传递的，则 $r(R),s(R)$ 是传递的。

(4) 若 R 是反对称的，则 $t(R)$ 是反对称的。

证明 (1) ① 对任意 $x\in A$，因为 R 是自反的，所以 $\langle x,x\rangle\in R$。又因为 $R\subseteq s(R)$，所以，$\langle x,x\rangle\in s(R)$。即 $s(R)$ 是自反的。

② 对任意 $x\in A$，因为 R 是自反的，所以 $\langle x,x\rangle\in R$。又因为 $R\subseteq t(R)$，所以，$\langle x,x\rangle\in t(R)$。即 $t(R)$ 是自反的。

(2) ① 对任意 $x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in r(R)=R\cup I_A$，则有 $\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle x,y\rangle\in I_A$。

若 $\langle x,y\rangle\in R$，则由 R 是对称的，所以 $\langle y,x\rangle\in R$。又因为 $R\subseteq r(R)$，所以 $\langle y,x\rangle\in r(R)$。

若 $\langle x,y\rangle\in I_A$，则 $x=y$，即有 $\langle y,x\rangle\in I_A$。又因为 $I_A\subseteq r(R)$，所以 $\langle y,x\rangle\in r(R)$。

无论是那一种情况，都有 $\langle y,x\rangle\in r(R)$。即 $r(R)$ 是对称的。

② 对任意 $x,y\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in t(R)$，则存在 $i\in\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$，使得 $\langle x,y\rangle\in R^i$。由"$\circ$"的定义知：存在 $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_{i-1}$，使得 $\langle x,c_1\rangle\in R$，$\langle c_1,c_2\rangle\in R$，$\langle c_2,c_3\rangle\in R,\ldots$，$\langle c_{i-1},y\rangle\in R$。因为 R 是对称的，所以有：$\langle y,c_{i-1}\rangle\in R$，$\langle c_{i-2},c_{i-3}\rangle\in R$，$\langle c_{i-3},c_{i-4}\rangle\in R,\ldots$，$\langle c_1,\mathrm{x}\rangle\in R$。由"$\circ$"的定义知：$\langle y,x\rangle\in R^i$，即有 $\langle y,x\rangle\in t(R)$。所以 $t(R)$ 是对称的。

(3) ① 对任意 $x,y,z\in A$，若 $\langle x,y\rangle\in r(R)=R\cup I_A$，$\langle y,z\rangle\in r(R)=R\cup I_A$，则有 $(\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle x,y\rangle\in I_A)$ 并且 $(\langle y,z\rangle\in R$ 或 $\langle y,z\rangle\in I_A)$。

若 $\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R$，则由 R 是传递的，所以 $\langle x,z\rangle\in R$。又因为 $R\subseteq r(R)$，所以 $\langle x,z\rangle\in r(R)$。

若 $\langle x,y\rangle\in I_A$ 或 $\langle y,z\rangle\in I_A$，则有 $x=y$ 或 $y=z$。又因为 $I_A\subseteq r(R)$，

则由 $\langle x,x\rangle\in r(R)$ 及 $\langle x,z\rangle\in r(R)$，有 $\langle x,z\rangle\in r(R)$。

则由 $\langle x,z\rangle\in r(R)$ 及 $\langle z,z\rangle\in r(R)$，有 $\langle x,z\rangle\in r(R)$。

所以 $\langle x,z\rangle\in r(R)$。

无论是那一种情况，都有 $\langle x,z\rangle\in r(R)$。即 $r(R)$ 是传递的。

② 结论不一定成立。

如 $R=\{\langle 1,2\rangle\}$，则 R 可传递，但 $s(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$ 不可传递。

(4) 结论不一定成立。

如 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，则 R 是反对称的，但

$t(R)=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$则不是反对称的。

8. 设 R 是 A 上的关系，若 R 是自反的和传递的，则 $R\circ R=R$。其逆命题也对吗？

证明 (1) ① 对任意$\langle x,z\rangle\in R\circ R$ ($x,z\in A$)，存在 $y\in A$，使得$\langle x,y\rangle\in R$，$\langle y,z\rangle\in R$。由 R 的传递性，有$\langle x,z\rangle\in R$。所以 $R\circ R\subseteq R$。

② 对任意$\langle x,y\rangle\in R$ ($x,y\in A$)，由 R 是自反的，所以有 $\langle x,x\rangle\in R$，由"$\circ$"的定义知$\langle x,y\rangle\in R\circ R$。所以 $R\subseteq R\circ R$。

由①，②知：$R\circ R=R$。

(2) 其逆命题有传递性成立，自反性不一定成立。

① 对任意 $x,y,z\in A$，若$\langle x,y\rangle\in R$ 并且$\langle y,z\rangle\in R$，则有$\langle x,z\rangle\in R\circ R$，又 $R\circ R=R$，所以$\langle x,z\rangle\in R$。所以 R 是传递的。

② 设 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，则 R 满足 $R\circ R=R$，但 R 并不是自反的。

9. 证明：非空的对称传递关系不可能是反自反的。

证明 设 R 是非空的对称传递关系，所以，必存在$\langle x,y\rangle\in R$。

① 若 $x=y$，显然 R 不是反自反的。

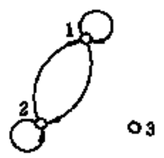
② 若 $x\neq y$，由 R 的对称性，有$\langle y,x\rangle\in R$，由 R 的传递性，有$\langle x,x\rangle\in R$。所以 R 也不是自反的。

§3.4 等价关系

1. 请看下面的证明：设 R 是 A 上的对称和传递关系，因为 R 是对称的，如果$\langle x,y\rangle\in R$，则有$\langle y,x\rangle\in R$。又因为 R 是传递的，由$\langle x,y\rangle\in R$ 且$\langle y,x\rangle\in R$，得$\langle x,x\rangle\in R$。所以 R 是自反的。因此，R 是 A 上的等价关系。试指出这个证明的错误。

解 上述证明中无法说明$\langle x,x\rangle\in R$ 中的 x 是 A 上的任意元素。因在对称性的定义中，对任意 $x,y\in A$，如$\langle x,y\rangle\in R$ 则$\langle x,y\rangle\in R$。此时，有可能只有某些 x,y 对之间有关系 R，而有的 x,y 对之间完全没有关系。

例如：如下图所示的关系：



此关系是对称的、传递的，但并不是自反的。

2. 设 R 是 A 上的自反和传递关系，S 也是 A 上的关系，且满足

$\langle x,y\rangle\in S\Leftrightarrow(\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,x\rangle\in R)$。证明 S 是 A 上的等价关系。

证明 (1) 对任意 $x\in A$，由 R 是自反的$(\langle x,x\rangle\in R)\wedge(\langle x,x\rangle\in R)$，所以$\langle x,x\rangle\in S$。即 S 是自反的。

(2) 对任意 $x,y\in A$，

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle\in S &\Rightarrow (\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,x\rangle\in R)\\ &\Rightarrow (\langle y,x\rangle\in R)\wedge(\langle x,y\rangle\in R)\\ &\Rightarrow \langle y,x\rangle\in S。\end{aligned}$$

所以 S 是对称的。

(3) 对任意 $x,y,z\in A$,

$$
\begin{aligned}
(\langle x,y\rangle\in S)\wedge(\langle y,z\rangle\in S) &\Rightarrow (\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,x\rangle\in R)\wedge(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)\\
&\Rightarrow (\langle x,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)\wedge(\langle y,x\rangle\in R)\\
&\Rightarrow (\langle x,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in R)\\
&\Rightarrow \langle x,z\rangle\in S。
\end{aligned}
$$

所以 S 是传递的。

由(1),(2),(3)知,S 是等价关系。

3. 设 R 表示 $I\times I$ 上的二元关系,当且仅当 $xy=uv$ 时,便有 $\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle$。试证明 R 是 $I\times I$ 上的等价关系。

证明 (1) 对任意 $\langle x,y\rangle\in I\times I$,由 $xy=xy$,所以 $\langle x,y\rangle R\langle x,y\rangle$。即 R 是自反的。

(2) 对任意 $\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle\in I\times I$,$\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle\Rightarrow xy=uv$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow uv=xy\\
&\Rightarrow \langle u,v\rangle R\langle x,y\rangle。
\end{aligned}
$$

所以 R 是对称的。

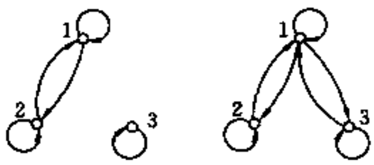
(3) 对任意 $\langle x,y\rangle,\langle u,v\rangle,\langle w,t\rangle\in I\times I$,

$$
\begin{aligned}
(\langle x,y\rangle R\langle u,v\rangle)\wedge(\langle u,v\rangle R\langle w,t\rangle) &\Rightarrow (xy=uv)\wedge(uv=wt)\\
&\Rightarrow xy=wt\\
&\Rightarrow \langle x,y\rangle R\langle w,t\rangle。
\end{aligned}
$$

所以 R 是传递的。

由(1),(2),(3)知,R 是等价关系。

4. 令 $A=\{1,2,3\}$,A 上的两个关系如图 3.4-1,它们是否是等价关系。



(a) (b)

图 3.4-1

解 图 3.4-1(a)的关系是自反的、对称的、传递的。所以图 3.4-1(a)是等价关系。

图(b)的关系是自反的、对称的、但不传递的。所以图 3.4-1(b)不是等价关系。

5. 设 R 是集合 A 上的一个传递关系和对称关系,如果对任意的 $a\in A$,都存在一个 $b\in A$,使得 $\langle a,b\rangle\in R$。试证明 R 是一个等价关系。

证明 因为对任意的 $a\in A$,都存在一个 $b\in A$,使得 $\langle a,b\rangle\in R$,因为 R 是对称的,则有 $\langle b,a\rangle\in R$。

又因为 R 是传递的,由 $\langle a,b\rangle\in R$ 且 $\langle b,a\rangle\in R$,得 $\langle a,a\rangle\in R$。由 a 的任意性,所以 R 是自反的。因此。R 是 A 上的等价关系。

6. 设 $A=\{1,2,3,4\}$,在 $P(A)$ 上规定二元关系如下:

$R=\{\langle s,t\rangle \mid s,t\in P(A)\wedge(|s|=|t|)\}$。

证明 R 是 $P(A)$ 上的等价关系并写出商集 $P(A)/R$。

证明 (1) 对任意 $s\in P(A)$,由 $|s|=|s|$,所以 $\langle s,s\rangle\in R$。即 R 是自反的。

(2) 对任意 $s,t\in P(A)$,$\langle s,t\rangle\in R\Rightarrow|s|=|t|$

$\Rightarrow |t|=|s|$

$\Rightarrow \langle t,s\rangle\in R$。

所以 R 是对称的。

(3) 对任意 $s,t,u\in P(A)$，

$(\langle s,t\rangle\in R)\wedge(\langle t,u\rangle\in R)\Rightarrow(|s|=|t|)\wedge(|t|=|u|)$

$\Rightarrow |s|=|u|$

$\Rightarrow \langle s,u\rangle\in R$。

所以 R 是传递的。

由(1),(2),(3)知:R 是等价关系。

$P(A)/R=\{\{\Phi\},\{\{1\}\},\{\{1,2\}\},\{\{1,2,3\}\},\{\{1,2,3,4\}\}\}$。

7. 设 R 和 S 是 A 上的等价关系,证明:$R\circ S$ 是 A 上的等价关系$\Leftrightarrow R\circ S=S\circ R$。

证明 "$\Rightarrow$"设 $R\circ S$ 是 A 上的等价关系。

(1) 对任意$\langle x,y\rangle\in R\circ S$ $(x,y\in A)$，因 $R\circ S$ 是对称的,所以$\langle y,x\rangle\in R\circ S$。存在 $z\in A$,使得$(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in S)$,因 R 和 S 是对称的,所以$(\langle x,z\rangle\in S)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)$。由"$\circ$"知:$\langle x,y\rangle\in S\circ R$。所以 $R\circ S\subseteq S\circ R$

(2) 对任意$\langle x,y\rangle\in S\circ R$ $(x,y\in A)$，则存在 $z\in A$,使得$(\langle x,z\rangle\in S)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)$,因 R 和 S 是对称的,所以$(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in S)$。由"$\circ$"知$\langle y,x\rangle\in R\circ S$。因 $R\circ S$是对称的,所以$\langle x,y\rangle\in R\circ S$,所以 $S\circ R\subseteq R\circ S$。

由(1),(2)知 $R\circ S=S\circ R$。

"$\Leftarrow$"设 $R\circ S=S\circ R$。

(1) 对任意 $x\in A$,由 R,S 是自反的$(\langle x,x\rangle\in R)\wedge(\langle x,x\rangle\in S)$,所以 $\langle x,x\rangle\in R\circ S$。即 $R\circ S$ 是自反的。

(2) 对任意 $x,y\in A$,$\langle x,y\rangle\in R\circ S\Rightarrow\langle x,y\rangle\in S\circ R$

$\Rightarrow(\langle x,z\rangle\in S)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in S)$

$\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\circ S$。

所以 $R\circ S$ 是对称的。

(3) 对任意 $x,y,z\in A$,

$(\langle x,y\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle y,z\rangle\in R\circ S)\Rightarrow(\langle x,y\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle y,z\rangle\in S\circ R)$

$\Rightarrow(\langle x,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,y\rangle\in S)$

$\wedge(\langle y,t\rangle\in S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle x,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,t\rangle\in S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle x,t\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle t,x\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle t,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,x\rangle\in S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)$

$\Rightarrow(\langle z,t\rangle\in R)\wedge(\langle t,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,x\rangle\in S)$

$\Rightarrow(\langle z,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,x\rangle\in S)$

$\Rightarrow\langle z,x\rangle\in R\circ S$

$\Rightarrow\langle x,z\rangle\in R\circ S$。

所以 $R\circ S$ 是传递的。

由(1),(2),(3)知,$R \circ S$是等价关系。

8. 设$A=\{A_1,A_2,A_3,...,A_n\}$是集合$A$的划分,若$A_i \cap B \neq \Phi$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$,问:

$$\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B, ..., A_n \cap B\}$$

是集合$A \cap B$的划分吗?

解 $\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B, ..., A_n \cap B\}$是集合$A \cap B$的划分。

因为:(1) 对任意$A_i \cap B$, $A_j \cap B$, 当$i \neq j$时,有$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = A_i \cap A_j \cap B = \Phi \cap B = \Phi$。

(2) $\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B) = (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap B = A \cap B$。

由(1),(2)知$\{A_1 \cap B, A_2 \cap B, A_3 \cap B, ..., A_n \cap B\}$是集合$A \cap B$的划分。

9. 设R是A上的一个二元关系,

$S=\{\langle a,b\rangle \mid (a,b \in A) \wedge$ (对于某一个$c \in A$,有$\langle a,c\rangle \in R$且$\langle c,b\rangle \in R)\}$。

试证明若R是A上的一个等价关系,则S也是A上的一个等价关系。

证明 (1) 对任意$a \in A$,由R是自反的,有$(\langle a,a\rangle \in R) \wedge (\langle a,a\rangle \in R)$,所以$\langle a,a\rangle \in S$。即$S$是自反的。

(2) 对任意$a,b \in A$,

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle \in S &\Rightarrow (\langle a,c\rangle \in R) \wedge (\langle c,b\rangle \in R)\\ &\Rightarrow (\langle b,c\rangle \in R) \wedge (\langle c,a\rangle \in R)\\ &\Rightarrow \langle b,a\rangle \in S。\end{aligned}$$

所以S是对称的。

(3) 对任意$a,b,c \in A$,

$$\begin{aligned}(\langle a,b\rangle \in S) \wedge (\langle b,c\rangle \in S) &\Rightarrow (\langle a,d\rangle \in R) \wedge (\langle d,b\rangle \in R) \wedge (\langle b,e\rangle \in R) \wedge (\langle e,c\rangle \in R)\\ &\Rightarrow (\langle a,b\rangle \in R) \wedge (\langle b,c\rangle \in R)\\ &\Rightarrow \langle a,c\rangle \in S。\end{aligned}$$

所以S是传递的。

由(1),(2),(3)知:S是等价关系。

10. 给定集合$A=\{1,2,3,4,5\}$,找出A上的等价关系R,此关系R能够产生划分:$\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$,并画出$R$的关系图。

解
$$\begin{aligned}R &= \{1,2\} \times \{1,2\} \cup \{3\} \times \{3\} \cup \{4,5\} \times \{4,5\}\\ &= \{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 5,4\rangle\}。\end{aligned}$$

关系图如图 3.4-2:

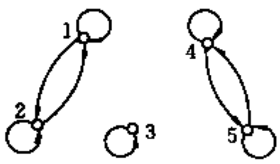


图 3.4-2

11. 设$A=\{a,b,c,d\}$, A上的等价关系R如下:

$R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle\}$,

画出R的关系图,并找出A的各元素的等价类和A的商集A/R。

解 此R的关系图如图 3.4-3:

$[a]_R=\{a,b\}=[b]_R$; $[c]_R=\{c,d\}=[d]_R$。

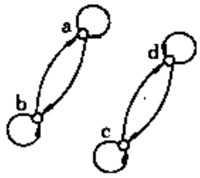


图 3.4-3

$A/R=\{[a]_R,[b]_R\}=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$。

12. 对任意非空集合 A,$P(A)-\{\Phi\}$是 A 的非空集合族,$P(A)-\{\Phi\}$是否可构成 A 的划分?

解 当$|A|=1$ 时,$P(A)-\{\Phi\}=\{A\}$是 A 的一个划分。

当$|A|>1$ 时,$P(A)-\{\Phi\}=\{A_1,A_2,A_3,...,A_{2^n-2},A\}$,其中:

$$A_i\subseteq A \quad (i=1,2,3,...2^{n-2}),\ A_i\neq\Phi,\ A_i\cap A=A_i\neq\Phi,$$

所以,$P(A)-\{\Phi\}$不可能是 A 的一个划分。

13. 设 R,S 是非空集合 A 上的等价关系,试确定下列各式,哪些是 A 上的等价关系?对不是等价关系的式子要给出反例。

(1) $(A\times A)-R$。 (2) $S-R$。

(3) $R\cup S$。 (4) $R\cap S$。

(5) R^2。 (6) R^{-1}。

解 $R\cap S,R^2,R^{-1}$是等价关系。$(A\times A)-R,S-R,R\cup S$ 都不一定是等价关系。

如 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,$S=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$都是 $A=\{a,b,c\}$上的等价关系,但

$(A\times A)-R=\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$;

$S-R=\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$;

$R\cup S=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$。

都不是等价关系。

§3.5 次序关系

1. 设集合 $A=\{3,5,15\}$, $B=\{1,2,3,6,12\}$, $C=\{3,9,27,54\}$。分别在 A,B,C 上定义整除关系,此整除关系是偏序关系,试写出这些偏序关系的表达式,画出其偏序关系图(哈斯图),并指出哪些是全序关系。

解 设$\leqslant_A,\leqslant_B,\leqslant_C$ 分别为 A,B,C 上的偏序关系(整除关系)。

$\leqslant_A=\{\langle 3,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 15,15\rangle,\langle 3,15\rangle,\langle 5,15\rangle\}$。

$\leqslant_B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 12,12\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,$
$\langle 1,6\rangle,\langle 1,12\rangle,\langle 2,6\rangle\langle 2,12\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 6,12\rangle\}$。

$\leqslant_C=\{\langle 3,3\rangle,\langle 9,9\rangle,\langle 27,27\rangle,\langle 54,54\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 3,27\rangle,\langle 3,54\rangle,$
$\langle 9,27\rangle,\langle 9,54\rangle,\langle 27,54\rangle\}$。

$\leqslant_A,\leqslant_B,\leqslant_C$ 之哈斯图如图 3.5-1。

2. 对于下列集合上的整除关系画出其哈斯图。

(1) $A=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$。 (2) $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$。

解 图 3.5-2 所示分别为(1),(2)之哈斯图。

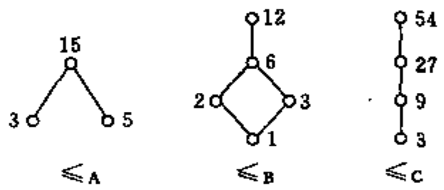


图 3.5-1

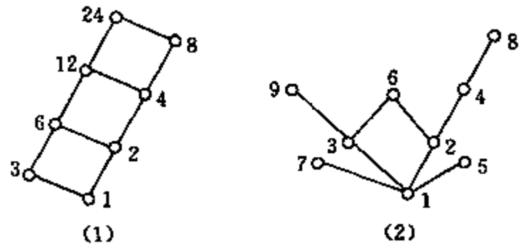


图 3.5-2

3. 如下图是四个偏序集$\langle A,R_{\leqslant}\rangle$的哈斯图，分别写出集合 A 和偏序关系 $R_{\leqslant}$的表达式。

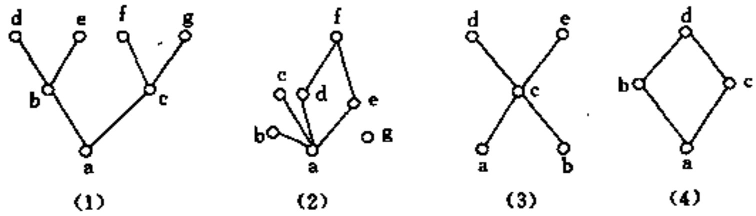


图 3.5-3

解 (1) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，

$R_{\leqslant}=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,f\rangle,\langle a,g\rangle,\langle c,f\rangle,\langle c,g\rangle\}\cup I_A$。

(2) $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$，

$R_{\leqslant}=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,f\rangle,\langle a,e\rangle,\langle d,f\rangle,\langle e,f\rangle\}\cup I_A$。

(3) $A=\{a,b,c,d,e\}$，

$R_{\leqslant}=\{\langle a,d\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,d\rangle,\langle b,e\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle c,e\rangle\}\cup I_A$。

(4) $A=\{a,b,c,d\}$，

$R_{\leqslant}=\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,d\rangle\}\cup I_A$。

4. 分别画出下列各偏序集$\langle A,R_{\leqslant}\rangle$的哈斯图，并找出 A 的极小元素、极大元素、最大元素、最小元素。

(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$，$R_{\leqslant}=\{\langle a,d\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,e\rangle,\langle b,e\rangle,\langle c,e\rangle,\langle d,e\rangle\}\cup I_A$。

(2) $A=\{a,b,c,d,e\}$，$R_{\leqslant}=\{\langle c,d\rangle\}\cup I_A$。

解 (1) 哈斯图为图 3.5-4：

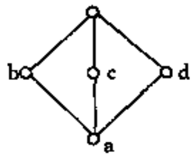


图 3.5-4

A 之极大元和最大元都为 e,极小元和最小元都为 a。

(2) 哈斯图为图 3.5-5:

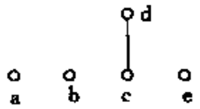


图 3.5-5

A 之极大元为 a,b,d,e,极小元为 a,b,c,d。无最大元和最小元。

5. 设集合 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$上的偏序关系如图 3.5-6,求 X 的最大元、最小元、极大元、极小元。求子集 $X_1=\{x_2,x_3,x_4\}$, $X_2=\{x_3,x_4,x_5\}$, $X_3=\{x_1,x_2,x_3\}$的上界、下界、上确界、下确界、最大元、最小元、极大元、极小元。

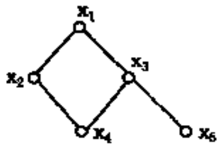


图 3.5-6

解 (1) X 的最大元为:x_1; 极大元为:x_1。

X 无最小元; 极小元为:x_4,x_5。

(2) X_1 无最大元; 极大元为:x_2,x_3。

X_1 的最小元为:x_4; 极小元为:x_4。

X_1 的上界为:x_1; 上确界为:x_1。

X_1 的下界为:x_4;下确界为:x_4。

(3) X_2 的最大元为:x_3; 极大元为:x_3。

X_2 无最小元; 极小元为:x_4;x_5。

X_2 的上界为:x_1,x_3; 上确界为:x_3。

X_2 无下界;无下确界。

(4) X_3 的最大元为:x_1; 极大元为:x_1。

X_3 无最小元; 极小元为:x_2,x_3。

X_3 的上界为:x_1; 上确界为:x_1。

X_3 的下界为:x_4;下确界为:x_4。

6. 设集合 $A=\{\Phi,\{1\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$。证明 A 上的包含关系"$\subseteq$"是全序关系,并画出其哈斯图。

证明 显然$\langle A,\subseteq\rangle$是偏序集。

又因为:$\Phi\subseteq\{1\}\subseteq\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$,所以,$A$ 中任何的 x,y,都有 $x\subseteq y$ 或 $y\subseteq x$,所以,"$\subseteq$"是一个全序关系。哈斯图如图 3.5-7。

7. 设$\langle P,\leqslant\rangle$是正整数集关于整除关系作成的偏序集,$P$ 的子集 $T=\{1,2,3,4,5\}$,求 T 的上界、下界、上确界、下确界。

解 T 的上界为:60,120,180,240,...; 上确界为:60;

下界为:1; 下确界为:1。

8. 设 A 是非空集合,B 是 A 上的一切二元关系的集合。任取 $R_1,R_2\in B$,如果对任意 $x,y\in A$,

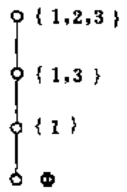


图 3.5-7

有：

$xR_1y \Rightarrow xR_2y$。那么就规定：$R_1 \leqslant R_2$。证明$\langle B, \leqslant\rangle$作成一个偏序集。

证明 (1) 对任意 $R \in B$,对任意 $x,y \in A$,有 $xRy \Rightarrow xRy$。所以,$R \leqslant R$。即"$\leqslant$"是自反的。

(2) 对任意 $R_1, R_2 \in B$, 如果有 $R_1 \leqslant R_2$ 并且 $R_2 \leqslant R_1$,则对任意 $x,y \in A$,有 $xR_1y \Rightarrow xR_2y$ 并且 $xR_2y \Rightarrow xR_1y$。即有 $R_1 \subseteq R_2, R_2 \subseteq R_1$。所以,$R_1 = R_2$。即"$\leqslant$"是反对称的。

(3) 对任意 $R_1, R_2, R_3 \in B$, 如果有 $R_1 \leqslant R_2$ 并且 $R_2 \leqslant R_3$,则对任意 $x,y \in A$,有 $xR_1y \Rightarrow xR_2y$ 并且 $xR_2y \Rightarrow xR_3y$。即有 $R_1 \subseteq R_2, R_2 \subseteq R_3$。所以,$R_1 \subseteq R_3$。即 $R_1 \leqslant R_3$。即"$\leqslant$"是传递的。

由(1),(2),(3)知"$\leqslant$"是偏序关系,即$\langle B, \leqslant\rangle$是偏序集。

9. 判断下列次序集是偏序集？全序集？良序集？拟序集？

(1) $\langle N, <\rangle$。 (2) $\langle N, \leqslant\rangle$。 (3) $\langle I, \leqslant\rangle$。

(4) $\langle P(N), \subset\rangle$。 (5) $\langle P(\{a\}), \subseteq\rangle$。 (6) $\langle P(\Phi), \subseteq\rangle$。

解 (1) $\langle N, <\rangle$是拟序集。 (2) $\langle N, \leqslant\rangle$是偏序集、全序集、良序集。

(3) $\langle I, \leqslant\rangle$是偏序集、全序集。 (4) $\langle \rho(N), \subset\rangle$是拟序集。

(5) $\langle P(\{a\}), \subseteq\rangle$是偏序集、全序集、良序集。

(6) $\langle P(\Phi), \subseteq\rangle$是偏序集、全序集、良序集。

10. 给出集合 $A=\{1,2,3,4\}$上的四个偏序关系图如图 3.5-8：

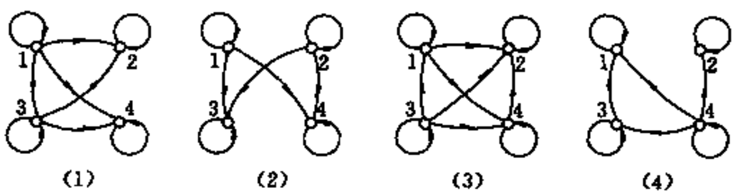


图 3.5-8

画出它们的哈斯图。

解 图 3.5-8(1),(2),(3),(4)的哈斯图分别为图 3.5-9 的(1),(2),(3),(4)。

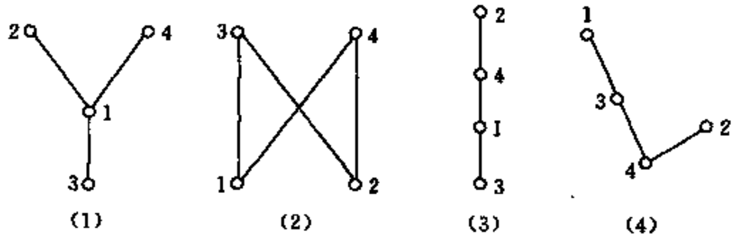


图 3.5-9

11. 设 R 是集合 S 上的关系,S_1 是 S 的子集,定义 S_1 上的关系 R_1 如下：

$$R_1 = R \cap (S_1 \times S_1)$$

确定下述每一断言是真还是假。

(1) 如 R 在 S 上是传递的，则 R_1 在 S_1 上是传递的。

(2) 如 R 在 S 上是偏序关系，则 R_1 在 S_1 上是偏序关系。

(3) 如 R 在 S 上是拟序关系，则 R_1 在 S_1 上是拟序关系。

(4) 如 R 在 S 上是全序关系，则 R_1 在 S_1 上是全序关系。

(5) 如 R 在 S 上是良序关系，则 R_1 在 S_1 上是良序关系。

解 (1) 断言成立。若 R 是 S 上的传递关系，

则对任意 $x,y,z\in S_1$，如 $\langle x,y\rangle\in R_1$ 且 $\langle y,z\rangle\in R_1$，则有

$(\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,z\rangle\in R)$ 以及 $(\langle x,y\rangle\in S_1\times S_1$ 且 $\langle y,z\rangle\in S_1\times S_1)$。

因为 $S_1\subseteq S$，所以，$x,y,z\in S$。由 R 在 S 上是传递的，且 $S_1\times S_1$ 也是传递的知

$\langle x,z\rangle\in R$ 且 $\langle x,z\rangle\in S_1\times S_1$，所以，$\langle x,z\rangle\in R_1$。所以 R_1 是传递的。

(2) 断言成立。若 R 是 S 上的偏序关系，即 R 是自反的、反对称的、传递的。

① 则对任意 $x\in S_1$，因为 $S_1\subseteq S$，所以，$x\in S$，因为 R 和 $S_1\times S_1$ 是自反的，所以

$\langle x,x\rangle\in R$ 且 $\langle x,x\rangle\in S_1\times S_1$，则有 $\langle x,x\rangle\in R\cap S_1\times S_1$。即 R_1 是自反的。

② 则对任意 $x,y\in S_1$，如 $\langle x,y\rangle\in R_1$ 且 $\langle y,x\rangle\in R_1$，则有

$(\langle x,y\rangle\in R$ 且 $\langle y,x\rangle\in R)$ 以及 $(\langle x,y\rangle\in S_1\times S_1$ 且 $\langle y,x\rangle\in S_1\times S_1)$。

因为 $S_1\subseteq S$，所以，$x,y\in S$，由 R 在 S 是反对称的知，$x=y$。所以 R_1 是反对称的。

③ 由题(1)知，R_1 是传递的。

由①，②，③知，R_1 是偏序关系。

(3) 断言成立。若 R 是 S 上的拟序关系，即 R 是反自反的、反对称的、传递的。

① 则对任意 $x\in S_1$，因为 $S_1\subseteq S$，所以，$x\in S$，因为 R 是反自反的，所以

$\langle x,x\rangle\notin R$ 则有 $\langle x,x\rangle\notin R\cap S_1\times S_1$。即 R_1 是反自反的。

② 由题(2)的②知，R_1 是反对称的。

③ 由题(1)知，R_1 是传递的。

由①，②，③知，R_1 是拟序关系。

(4) 断言成立。若 R 是 S 上的全序关系，即 R 是偏序关系且对任意 $x,y\in S$，有 xRy 且 yRx。

① 由(2)知 R_1 是偏序关系。

② 对任意 $x,y\in S_1$，则有 $(x,y\in S)$ 且 $(\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle y,x\rangle\in R)$，

以及 $(\langle x,y\rangle\in S_1\times S_1$ 且 $\langle y,x\rangle\in S_1\times S_1)$，所以 $(\langle x,y\rangle\in R\cap S_1\times S_1)$ 或 $(\langle y,x\rangle\in R\cap S_1\times S_1)$，

即 $(\langle x,y\rangle\in R_1$ 或 $\langle y,x\rangle\in R_1$。

由①，②知，R_1 是全序关系。

(5) 断言不一定成立。如 $S=[0,1]$ 是从 0 到 1 的闭区间，在 S 上定义小于等于关系"$\leqslant$"，则 $\langle S,\leqslant\rangle$ 是一个良序集。此时，若取 $S_1=(0,1)$ 是从 0 到 1 的开区间，则 R_1 不是 S_1 上的良序关系。即 $\langle S_1,R_1\rangle$ 不是良序集。因开区间 $(0,1)$ 就不存在最小元素。

§3.6 函数(映射)

1. 下列关系中哪些能构成函数？

(1) $\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in N)\wedge(x+y<10)\}$。

(2) $\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in R)\wedge(y=x^2)\}$。

(3) $\{\langle x,y\rangle \mid (x,y\in R)\wedge(y^2=x)\}$。

解 仅有(2)能构成函数，(1)，(3)都不满足函数的条件 2，即都不是函数。

2. 下列关系可以定义函数吗？

(1) $\{\langle 1,2\rangle,\langle 5,7\rangle,\langle x,y\rangle,\langle P,\text{Jack}\rangle\}$。

(2) $\{\langle 1,\langle 2,3\rangle\rangle,\langle 2,\langle 3,4\rangle\rangle,\langle 4,\langle 1,4\rangle\rangle\}$。

(3) $\{\langle 1,\langle 2,1\rangle\rangle,\langle 2,\langle 2,1\rangle\rangle\}$。

(4) $\{\langle |x|,x\rangle \mid (x\in R)\}$。

(5) $\{\langle x,|x|\rangle \mid (x\in R)\}$。

解 (1)定义了从集合$\{1,5,x,P\}$到集合$\{2,7,y,\text{Jack}\}$之间的函数。

(2)定义了从集合$\{1,2,4\}$到集合$\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 1,4\rangle\}$之间的函数。

(3)定义了从集合$\{1,2\}$到集合$\{\langle 2,1\rangle\}$之间的函数。

(4)不是函数。因它不满足函数的条件 1 与条件 2。

(5)定义了从集合 R 到集合 R 之间的函数。

3. 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{3,4,5\}$。写出 A 到 B 的所有函数和它们的像集，并指出哪些是单射、满射、双射。

解 $f_1=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，$f_2=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,5\rangle\}$，$f_3=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，

$f_4=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$f_5=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，$f_6=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,5\rangle\}$，

$f_7=\{\langle 1,5\rangle,\langle 2,3\rangle\}$，$f_8=\{\langle 1,5\rangle,\langle 2,4\rangle\}$，$f_9=\{\langle 1,5\rangle,\langle 2,5\rangle\}$。

$f_1(A)=\{3,4\}$，$f_2(A)=\{3,5\}$，$f_3(A)=\{3\}$，$f_4(A)=\{3,4\}$，$f_5(A)=\{4\}$，

$f_6(A)=\{4,5\}$，$f_7(A)=\{3,5\}$，$f_8(A)=\{4,5\}$，$f_9(A)=\{5\}$。

其中 $f1,f2,f4,f6,f7,f8$ 为单射。

因为 $|A|<|B|$，所以不存在满射和双射。

4. 说明以下函数是否是单射、满射、双射。如果是双射，给出它们的逆函数。

(1) $f:R\to R$，$f(x)=x$。　　(2) $f:I\to E$，$f(x)=2x$。

(3) $f:N\to N\times N$，$f(n)=\langle n,n+1\rangle$。　　(4) $f:I\to N$，$f(x)=|x|$。

解 (1) 此 f 为双射函数，其逆函数为 $f^{-1}=f$。

(2) 此 f 为双射函数，其逆函数为 $f^{-1}=\{\langle x,x/2\rangle \mid x\in E\}$。

(3) 此 f 为单射函数。

(4) 此 f 为满射函数。

5. 设 f,g 是函数，且 $f\cap g\neq\Phi$，则 $f\cap g$，$f\cup g$ 是函数吗？如果是证明你的结论，如果不是，请举一反例。

解 $f\cap g$，$f\cup g$ 都不一定是函数。

设：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$。f,g 是从 A 到 B 的函数，$f=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$，

$g=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle\}$。$f\cap g=\{\langle 1,a\rangle\}\neq\Phi$，但 $f\cap g$ 并不是函数。

$f\cup g=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,c\rangle,\langle 3,b\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$，则 $f\cup g$ 也不是函数。

6. 判断下列函数，哪些是满射？哪些是单射？哪些是双射？

(1) $f:N\to N$，$f(x)=x^2+2$。　　(2) $f:N\to N$，$f(x)=x \bmod 3$（x 除以 3 的余数）。

(3) $f:N\to N$, $f(x)=\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases}$。　　(4) $f:N\to\{0,1\}$, $f(x)=\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases}$。

(5) $f:N-\{0\}\to R$, $f(x)=\log_{10}x$。　　(6) $f:R\to R$, $f(x)=2x-5$。

(7) $f:R\to R$, $f(x)=x^2-2x-15$。　　(8) $f:I\to N$, $f(x)=|2x|+1$。

解　(4)是满射，(1)，(5)是单射，(6)是双射，(2)，(3)，(7)，(8)为一般的函数。

7. 设 $|A|=n$，$|B|=m$，

(1) 从 A 到 B 有多少个不同的函数。

(2) 当 n,m 满足什么条件时，存在双射，且有多少个不同的双射。

(3) 当 n,m 满足什么条件时，存在满射，且有多少个不同的满射。

(4) 当 n,m 满足什么条件时，存在单射，且有多少个不同的单射。

解　(1) 从 A 到 B 有 m^n 个不同的函数。

(2) 当 $n=m$，存在双射，且有 $n!$ 个不同的双射。

(3) 当 $n\geqslant m$，存在满射，且有 $m!\,S(n,m)=m!\,\dfrac{1}{m!}\sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^iC_m^i(m-1)^n=\sum\limits_{i=0}^{m}(-1)^iC_m^i(m-i)^n$ 个不同的满射。

(4) 当 $n\leqslant m$，存在单射，且有 $m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)=m!/(m-n)!$ 个不同的单射。

8. 设 f,g,h 都是实数集 R 上的函数，对任意 $x\in R$，$f(x)=2x+1$，$g(x)=5+x$，$h(x)=x/2$。求：$f\circ g$，$g\circ f$，$h\circ f$，$f\circ(h\circ g)$，$g\circ(h\circ f)$。

解　$f\circ g(x)=g(f(x))=g(2x+1)=5+2x+1=2x+6$。

$g\circ f(x)=f(g(x))=f(x+5)=2(x+5)+1=2x+11$。

$h\circ f(x)=f(h(x))=f(x/2)=2(x/2)+1=x+1$。

$f\circ(h\circ g)(x)=(h\circ g)(f(x))=(h\circ g)(2x+1)=g(h(2x+1))$
$=g((2x+1)/2)=x+5+1/2$。

$g\circ(h\circ f)(x)=(h\circ f)(g(x))=(h\circ f)(x+5)=f(h(x+5))$
$=f((x+5)/2)=2((x+5)/2)+1=x+6$。

9. 设 f,g,h 都是自然数集 N 上的函数，对任意 $x\in N$，$f(x)=x+1$，$g(x)=2x$，
$h(x)=\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases}$。

求：$f\circ g$，$g\circ f$，$f\circ f$，$h\circ g$，$g\circ h$，$f\circ(g\circ h)$，$h\circ(g\circ f)$。

解　$f\circ g(x)=g(f(x))=g(x+1)=2(x+1)$。

$g\circ f(x)=f(g(x))=f(2x)=2x+1$。

$f\circ f(x)=f(f(x))=f(x+1)=x+2$。

$h\circ g(x)=g(h(x))=g(\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases})=\begin{cases}2 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases}$。

$g\circ h(x)=h(g(x))=h(2x)=0$。

$f\circ(g\circ h)(x)=(g\circ h)(f(x))=(g\circ h)(x+1)=h(g(x+1))$
$=h(2(x+1))=0$。

$h\circ(g\circ f)(x)=(g\circ f)(h(x))=(g\circ f)(\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases})=f(g(\begin{cases}1 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases}))$
$=f(\begin{cases}2 & x\in O\\ 0 & x\in E\end{cases})=\begin{cases}3 & x\in O\\ 1 & x\in E\end{cases}$。

10. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$ 是两个函数，证明：

(1) 若 $f\circ g$ 是满射，则 g 是满射。

(2) 若 $f\circ g$ 是单射，则 f 是单射。

(3) 若 $f\circ g$ 是双射，则 f 是单射，g 是满射。

证明 (1) 对任意 $c\in C$，由 $f\circ g$ 是满射，所以存在 $a\in A$，使得 $f\circ g(a)=c$，即 $g(f(a))=c$。所以存在 $b=f(a)\in B$，使得 $g(b)=c$，由 c 的任意性，所以 g 是满射。

(2) 对任意 $a_1,a_2\in C$ $(a_1\neq a_2)$，由 $f\circ g$ 是单射，所以 $f\circ g(a_1)\neq f\circ g(a_2)$，即 $g(f(a_1))\neq g(f(a_2))$。因 g 是函数，所以，$f(a_1)\neq f(a_2)$。所以 f 是单射。

(3) 若 $f\circ g$ 是双射，则 $f\circ g$ 是单射和满射。由 $f\circ g$ 是满射，则由(1)知，g 是满射。由 $f\circ g$ 是单射，则由(2)知，f 是单射。

11. 设 $f:A\to B$，$g:B\to C$ 是两个函数，证明：

(1) 若 $f\circ g$ 是满射且 g 是单射，则 f 是满射。

(2) 若 $f\circ g$ 是单射且 f 是满射，则 g 是单射。

证明 (1) 对任意 $b\in B$，因为 g 是函数，所以存在 $c\in C$，使得 $g(b)=c$。由 $f\circ g$ 是满射，对该元素 c，存在 $a\in A$，使得 $f\circ g(a)=c$，即 $g(f(a))=c$。又 $g(b)=c$，所以 $g(f(a))=g(b)=c$。由 g 是单射，所以有 $f(a)=b$。即对任意 $b\in B$，存在 $a\in A$，使得 $f(a)=b$。所以 f 是满射。

(2) 对任意 $b_1,b_2\in B$ $(b_1\neq b_2)$，由 f 是满射，所以存在 $a_1,a_2\in A$，使得 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$。因为 $b_1\neq b_2$ 且 f 是函数，$a_1\neq a_2$。由 $f\circ g$ 是单射，所以 $f\circ g(a_1)\neq f\circ g(a_2)$，即 $g(f(a_1))\neq g(f(a_1))$，所以 $g(b_1)\neq g(b_1)$。由 b_1,b_2 的任意性，所以 g 是单射。

12. 设 f 是 A 到 A 的满射，且 $f\circ f=f$，证明 $f=I_A$。

证明 因 f 是满射，所以对任意 $a\in A$，存在 $a_1\in A$，使得 $f(a_1)=a$，因 f 是函数，所以，$f(f(a_1))=f(a)$，即 $f\circ f(a_1)=f(a)$。因 $f\circ f=f$，所以 $f(a_1)=f(a)$。又 $f(a_1)=a$，所以，$f(a)=a$，由 a 的任意性，有 $f=I_A$。

13. 设 $f:A\to B$ 是从 A 到 B 的函数，并定义一个函数 $g:B\to P(A)$。对于任意 $b\in B$，有

$$g(b)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b)\}$$

证明：若 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是从 B 到 $P(A)$ 单射。

证明 对任意 $b_1,b_2\in B$ $(b_1\neq b_2)$，由 f 是满射，所以存在 $a_1,a_2\in A$ 使得 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$ 且 $f(a_1)\neq f(a_2)$。由 f 是函数，所以 $a_1\neq a_2$。又：

$$g(b_1)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b_1)\}$$
$$g(b_2)=\{x\mid(x\in A)\wedge(f(x)=b_2)\}$$

所以有 $a_1\in g(b_1)$，$a_2\in g(b_2)$，但 $a_1\notin g(b_2)$，$a_2\notin g(b_1)$，所以，$g(b_1)\neq g(b_2)$。由 b_1,b_2 的任意性知，g 为单射。

第四章 图 论

§4.1 图的结构

1. 画出下列各图的图形，并指出哪个是有向图、无向图、混合图、多重图、线图和简单图：

(1) $G_1=\langle\{a,b,c,d,e\},\{(a,b),(a,c),(d,e),(d,d),(b,c),(a,d),(b,a)\}\rangle$。

(2) $G_2=\langle\{a,b,c,d,e\},\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle d,a\rangle,\langle d,e\rangle,\langle d,d\rangle,\langle a,e\rangle\}\rangle$。

(3) $G_3=\langle\{a,b,c,d,e\},\{(a,b),(a,c),\langle d,e\rangle,(b,e),\langle e,d\rangle,\langle b,c\rangle\}\rangle$。

解 (1) G_1 为无向多重图，它的图形如图 4.1-1(a)所示。

(2) G_2 为无向线图，它的图形如图 4.1-1(b)所示。

(3) G_3 为混合简单图，它的图形如图 4.1-1(c)所示。

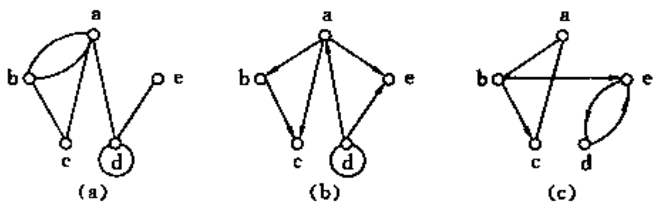


图 4.1-1

2. 设无向图 G 有 12 条边，已知 G 中度数为 3 的结点有 6 个，其余结点的度数均小于 3。问 G 中至少有多少个结点？为什么？

解 由握手定理可知，G 中所有结点的度数之和为 24，去掉 6 个度数为 3 的结点的度数 18 后，还有 6 度。而其余结点的度数均小于 3，即其余结点的度数可为 0、1、2，若其余结点的度数均为 2，则需 3 个结点来占用 6 度，所以 G 中至少有 9 个结点。

3. 设 G 为 9 个结点的无向图，每个结点的度数不是 5 就是 6。试证明 G 中至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

证明 由握手定理的推论可知，G 中度数为 5 的结点只能是 0、2、4、6、8 个五种情况，此时度数为 6 的结点分别为 9、7、5、3、1 个。以上五种情况都满足至少有 5 个度数为 6 的结点或者至少有 6 个度数为 5 的结点。

4. 证明在具有 n 个结点的简单无向图 G 中，至少有两个结点的度数相同。($n\geqslant2$)

证明 因为 G 是简单图，因此 G 中每个结点的度数均小于等于 $n-1$，若 G 中所有结点的度数均不相同，则 n 个结点的度数分别为 0、1、2、3、…、$n-2$、$n-1$。去掉 G 中孤立结点得 G 的子图 G_1，则 G_1 是具有 $n-1$ 个结点的简单无向图，其 $n-1$ 个结点的度数分别为 1、2、3、…、$n-2$、$n-1$，即 G_1 中有一个结点关联 $n-1$ 条边，而中只有 $n-1$ 个结点，从而这 $n-1$ 条至少有两条为平行边或至少有一条为自回路，故 G_1 不是简单图，矛盾。

5. 下面各图中有多少个结点？

(1) 16 条边，每个结点的度数均为 2。

(2) 21 条边，3 个度数为 4 的结点，其余结点的度数均为 3。

(3) 24 条边，每个结点的度数均相同。

解 设该图的结点数为 x，则由握手定理可知。

(1) $2\cdot x=2\cdot 16$，$x=16$，故该图有 16 个结点。

(2) $3\cdot 4+3\cdot(x-3)=2\cdot 21$，$x=13$，故该有 13 个结点。

(3) 假设每个结点的度数均为 y，则有 $x\cdot y=2\cdot 24$，它的正整数解 (x,y) 以下几个：$(2,24)$，$(24,2)$，$(3,16)$，$(16,3)$，$(4,12)$，$(12,4)$，$(6,8)$，$(8,6)$，故该图有：(a) 2 个（度数为 24）结点；(b) 24 个（度数为 2）结点；(c) 3 个（度数为 16）结点；(d) 16 个（度数为 3）结点；(e) 4 个（度数为 12）结点；(f) 12 个（度数为 4）结点；(g) 6 个（度数为 8）结点；(h) 8 个（度数为 6）结点。

6. 画出图 4.1-2(a)所示的图的补图。

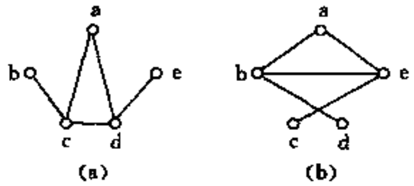


图 4.1-2

解 图 4.1-2(a)所示的图的补图如图 4.1-2(b)所示。

7. 试证明图 4.1-3 中的两个有向图是同构的。

证明 作 $\{a,b,c,d,e\}$ 到 $\{1,2,3,4,5\}$ 的映射 f 为：$f(a)=2$，$f(b)=3$，$f(c)=4$，$f(d)=1$，$f(e)=5$。显然 f 是双射，并且满足对任意 x,y，$\langle x,y\rangle$ 是(a)中的边当且仅当 $\langle f(x),f(y)\rangle$ 是(b)中的边，它们的重数也相同。

8. 试证明图 4.1-4 中的两个图不是同构的。

证明 (b)中的 4 个度数为 3 的结点中的每一个均与另外两个度数为 3 的结点相邻，而(a)中每个度数为 3 的结点只与另外一个度数为 3 的结点相邻，故它们不是同构的。

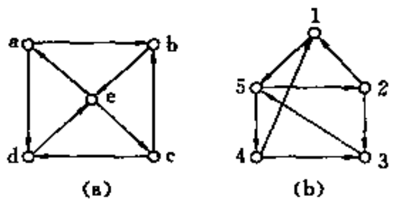


图 4.1-3

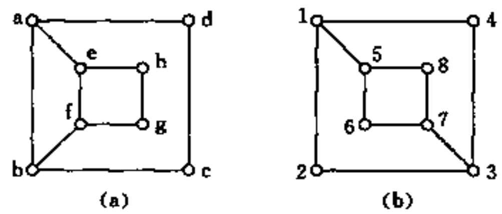


图 4.1-4

9. 一个无向图如果同构于它的补图，则称该图为**自补图**。

(1) 给出所有具有 4 个结点的自补图。

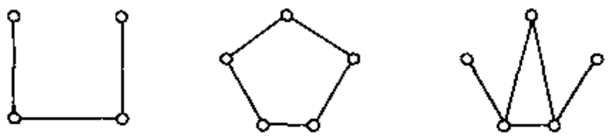
(2) 给出所有具有 5 个结点的自补图。

(3) 证明一个自补图一定有 $4k$ 或 $4k+1(k\in N)$ 个结点。

解 (1) 图 4.1-5 中(a)与它的补图同构，所以它是具有 4 个结点的自补图，此外再也没有与它不同构的具有 4 个结点的自补图了。

(2) 具有 5 个结点的非同构的自补图只有两个，它们分别是图 4.1-5 中的(b)和(c)。

(3) 若具有 n 个结点无向图 G 是自补图，则因 $G\cong\overline{G}$，因而 G 与 $\overline{G}$ 边数相同，设它们的边数为 m。又因为 G 与 $\overline{G}$ 的边数之和为 K_n 的边数 $\frac{1}{2}n(n-1)$，所以 $\frac{1}{2}n(n-1)=2m$，即



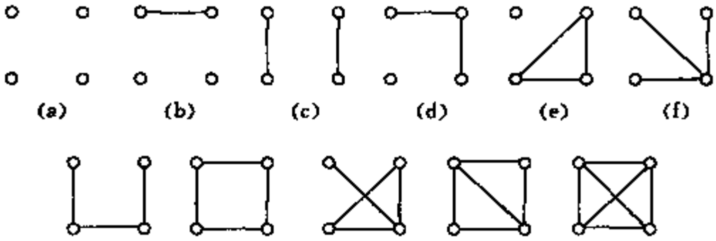
(a) (b) (c)

图 4.1-5

$n(n-1)=4m$，因而 n 为 4 的倍数，即 $n=4k$，或者 $n-1$ 为 4 的倍数，即 $n=4k+1$。

10. 求具有 4 个结点完全图 K_4 的所有非同构的生成子图。

解 图 4.1-6 中的 11 个图是 K_4 的所有非同构的生成子图。



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g) (h) (i) (j) (k)

图 4.1-6

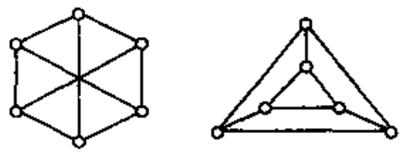
11. 试证明在任何一个有 6 个人的组里，存在 3 个人相互认识，或者存在 3 个人相互不认识。

解 我们用 6 个结点来代表 6 个人，并用邻接性来代表认识关系。这样一来，该问题就转化为证明：任意一个具有 6 个结点的图 G 中或者有 3 个相互邻接的结点或者有 3 个相互不邻接的结点。也就是：对任何一个具有 6 个结点的图 G，G 中或 $\overline{G}$ 中有子图 K_3。

设 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|=6$，v 是 G 中任一结点。因为 v 与 G 的其余 5 个结点或者在 G 中邻接，或者在 $\overline{G}$ 中邻接。故不失一般性，可假设有 3 个结点 v_1,v_2,v_3 在 G 中与 v 邻接。如果这 3 个结点中有两个结点如 v_1,v_2 邻接，则它们与 v 就构成 G 的子图 K_3。如果这三个结点中任意两个在 G 中均不邻接，则 v_1,v_2,v_3 就构成 $\overline{G}$ 中的一个子图 K_3。

12. 设无向图 $G=(n,m)$ 中每个结点的度数均为 3，且满足 $2n-3=m$，问在同构的意义下 G 是唯一的吗？

解 G 中每个结点的度数均为 3，由握手定理可知，$2m=3n$，将 $2n-3=m$ 代入得方程 $3n=4n-6$，于是得到 $n=6,m=9$。在同构的意义下，G 不是唯一的。因为 6 个结点 9 条边的图可以有若干个非同构的图。例如图 4.1-7 所示的两个图均有 6 个结点 9 条边，但它们不同构。



(a) (b)

图 4.1-7

§4.2 通路、回路与连通性

1. 给定图 G 如图 4.2-1 所示，求

(1) 从 A 到 F 的所有简单通路。

(2) 从 A 到 F 的所有基本通路。

(3) 从 A 到 F 的所有短程线和距离。

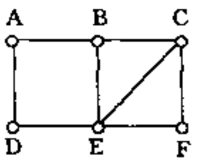


图 4.2-1

(4) G 中的所有基本回路。

解 (1) 从 A 到 F 的所有简单通路有：$ABEF$，$ABECF$，$ABCF$，$ABCEF$，$ADEF$，$ADECF$，$ADEBCF$，$ADECBEF$，$ADEBCEF$。

(2) 从 A 到 F 的所有基本通路有：$ABEF$，$ABECF$，$ABCF$，$ABCEF$，$ADEF$，$ADECF$，$ADEBCF$。

(3) 从 A 到 F 的所有短程线有：$ABCF$，$ABEF$，$ADEF$；从 A 到 F 的距离为 3。

(4) G 中的所有基本回路有：$ABCFEDA$，$ABCEDA$，$ABEDA$，$BCEB$，$BCFEB$，$CEFC$。

2. (1) 若无向图 G 中只有两个奇度数结点，则这两个结点一定是连通的。

(2) 若有向图 G 中只有两个奇度数结点，它们一个可达另一个或相互可达吗？

解 (1) **证明** 设 G 中的两个奇度数结点分别为 u 和 v，若 u 与 v 不连通，即它们之间无任何通路，则 G 至少有两个连通分支 G_1，G_2，使得 u 与 v 分别属于 G_1 和 G_2，于是 G_1 和 G_2 中各含有 1 个奇度数结点，这与握手定理的推论矛盾，因而 u 与 v 一定是连通的。

(2) 有向图 G 中只有两个奇度数结点 u 和 v，u 与 v 不一定相互可达，也不一定一个可达另一个。例如 $G=\langle\{u,v,w\},\{\langle u,w\rangle,\langle v,w\rangle\}\rangle$ 中，结点 u 和 v 的度数均为 1，w 的是为 2，但 u 不可达 v，v 也不可达 u。

3. 设 G 是具有 n 个结点的简单无向图，如果 G 中每一对结点的度数之和均大于等于 $n-1$，那么 G 是连通图。

证明 假设 G 不是连通图，则 G 至少有两个连通分支 G_1，G_2，设连通分支 G_1 中有 n_1 个结点，G_2 中 n_2 有个结点，$n_1+n_2\leqslant n$。分别从 G_1 和 G_2 中任取的一个结点 u 和 v，由于 G 是简单图，从而 G_1 和 G_2 也是简单图，所以 $\deg(u)\leqslant n_1-1$，$\deg(v)\leqslant n_2-1$，故 $\deg(u)+\deg(v)\leqslant n_1-1+n_2-1\leqslant n-2$，与 G 中每对结点的度数之和大于等于 $n-1$ 矛盾。

4. n 个城市由 k 条公路网连接（一条公路定义为两个城市间的一条道路，它们之间不能通过任何中间城市）。证明：如果有

$$k>\frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

则人们总能通过连接城市的公路在任何两个城市之间旅行。

证明 将城市作为结点，将连接两个城市的公路作为边，则该问题等价于证明具有 n 个结点 k 条边的简单无向图 G 是连通图。当 $n=2$ 时，结论显然成立，以下证 $n>2$ 时结论也成立。

假设 G 不连通，则可将 G 中的结点集 V 分为两个子集 V_1 和 V_2，满足 $V_1\cup V_2=V$，$V_1\cap V_2=\phi$，并且 V_1 中的任何结点与 V_2 中的任何结点均不连通。设由 V_1 生成的 G 的子图 G_1 中有 n_1 个结点 k_1 条边，由 V_2 生成的 G 的子图 G_2 中 n_2 有个结点 k_2 条边，则 $n_1+n_2=n$，$k_1+k_2=k$。由于 G 是简单无向图，因此 G_1 和 G_2 也是简单无向图，从而有 $k_1\leqslant\frac{1}{2}n_1(n_1-1)$，$k_2\leqslant\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$，于是

$$k=k_1+k_2\leqslant\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1), \tag{1}$$

又由于

$$k>\frac{1}{2}(n-1)(n-2)=\frac{1}{2}(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2), \tag{2}$$

由于 $n>2$，因此 n_1 和 n_2 至少有一个大于等于 2，不妨设 $n_1\geqslant 2$，由(2)得

$$k>\frac{1}{2}(n_1+n_2-1)(n_1+n_2-2)=\frac{1}{2}n_1(n_1+n_2-2)+\frac{1}{2}(n_2-1)(n_1+n_2-2)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$$

这与(1)式矛盾，故 G 是连通图。

5. 设 u,w 是无向连通图 G 中的任意两个结点，试证明：若 $d(u,w)\geqslant 2$，则存在结点 v，使得

$$d(u,v)+d(v,w)=d(u,w)。$$

证明 由于 G 是连通图，u,w 之间必存在短程线 $P=uv_1v_2\cdots v_{k-1}w$，$k\geqslant 2$，则 $d(u,w)=k$，取 v 为 P 上除 u,w 外的任意一个结点 $v_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$，都有

$$d(u,v_i)+d(v_i,w)=d(u,w)=k。$$

事实上，u,v_i 之间的短程线为 $P_1=uv_1v_2\cdots v_i$，否则，若 u,v_i 之间存在比 P_1 短的短程线 $P'_1=uu_1u_2\cdots v_i$，则 $P'=uu_1u_2\cdots v_iv_{i+1}\cdots v_{k-1}w$ 比 P 短，这与 P 为 u,w 之间的短程线矛盾。同理可证：$P_2=v_iv_{i+1}\cdots v_{k-1}w$ 为 v_i 与 w 之间的短程线，因而 $d(u,v_i)+d(v_i,w)$ 为 P_1 的长度加上 P_2 的长度，而 P_1 的长度加上 P_2 的长度为 P 的长度，即为 k，所以

$d(u,v_i)+d(v_i,w)=k=d(u,w)$。

6. 设无向图 $G=\langle V,E\rangle$，$|V|\geqslant 3$，G 是连通的简单图但不是完全图，则 G 中存在三个不同的结点 u,v,w，使得 $(u,v)\in E$，$(v,w)\in E$，而 $(u,w)\overline{\in}E$。

证明 由于 G 是连通的简单图但不是完全图，因此 G 中存在两个结点 x,y，使得 $d(x,y)\geqslant 2$(若对任意 $x,y\in E$，都有 $d(x,y)=1$，则 G 为完全图)，设 $d(x,y)=k$，x,y 之间的短程线为 $P=xv_1v_2\cdots v_{k-1}y$。下面证明 x,v_2 之间的短程线为 $=xv_1v_2$：若不然，假设 x,v_2 之间存在比 P_1 短的短程线 $P'_1=xv_2$，则 $P'=xv_2v_3\cdots v_{k-1}y$ 比 P 短，这与 P 为 x,y 之间的短程线矛盾。所以有 $(x,v_1)\in E$，$(v_1,v_2)\in E$，而 $(x,v_2)\overline{\in}E$。由于 x,v_1,v_2 是短程线上的结点，显然它们互不相同。

7. 设 e 为无向图 $G=\langle V,E\rangle$ 中的一条边，$p(G)$ 为 G 的连通分支数，$G-e$ 为从 G 中删除边 e 后得到的图。试证明：$p(G)\leqslant p(G-e)\leqslant p(G)+1$。

证明 设 e 属于 G 的第 i 个连通分支 G_i(若 G 是连通图，则 G_i 为 G)，$e=(u,v)$。若 e 是 G_i 中的某条基本回路 $uv\cdots u$ 中的边，则删除 e 不会影响 G_i 的连通性，因而 G 的连通分支数无变化，即 $p(G)=p(G-e)$。若 e 不是 G_i 中的任何基本回路中的边，则删除 e 后，u 与 v 便不连通了，但原来与 u 之间存在不经过 e 的通路的结点之间仍然是连通的，原来与 v 之间存在不经过 e 的通路的结点之间仍然是连通的，即 G_i-e 有且仅有两个连通分支，因而 $G-e$ 比 G 多一个连通分支，即 $p(G-e)=p(G)+1$。故有 $p(G)\leqslant p(G-e)\leqslant p(G)+1$。

8. 设有 a,b,c,d,e,f,g 七个人，他们分别会讲的语言如下：a 会讲英语；b 会讲汉语和英语；c 会讲英语、西班牙语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和西班牙语；f 会将法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。试问这七个人中，是否任意两个都能交谈(必要时可借助于其余五人组成译员链)？

解 我们分别用结点表示将七个人和七种语言，若某人会讲某种语言，则用一条无向边将它们连接起来，则上述问题就转化为判断图 4.2-2 所示的无向图是否为连通图。显然，该为连通图，故他们七个人中任意两个都能交谈。

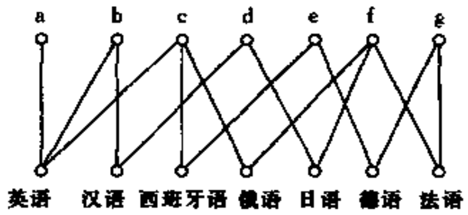


图 4.2-2

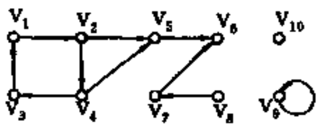


图 4.2-3

9. 在图 $G=\langle V,E\rangle$ 中，对给定结点 v，若 $S\subseteq V$ 中的每个结点都从 v 可达，而 $V-S$ 中的每个结点都从 v 不可达，则称 S 为 v 的可达集，记为 $R(v)=S$。集合 $T=\bigcup\limits_{v\in V'}(v)$ 称为集合 V' 的可达集，记为 $R(V')=T$，这里 $V'\subseteq V$。对 $V'\subseteq V$，如果 $R(V')=V$，并且对任意 $V_1\subset V'$，都有 $R(V_1)\neq V$，则称 V' 为图 G 的结点基。在图 4.2-3 中求 $R(v_1)$，$R(v_4)$，$R(v_8)$，$R(\{v_1,v_8\})$，$R(\{v_7,v_9\})$，$R(\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\})$ 和该图的结点基。

解 $R(v_1)=R(v_4)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$；

$R(v_8)=\{v_6,v_7,v_8\}$；

$R(\{v_1,v_8\})=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$；

$R(\{v_7,v_9\})=\{v_6,v_7,v_9\}$；

$R(\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\})=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$；

该图的结点基为：$\{v_1,v_8,v_9,v_{10}\}$、$\{v_2,v_8,v_9,v_{10}\}$、$\{v_3,v_8,v_9,v_{10}\}$、$\{v_4,v_8,v_9,v_{10}\}$。

10. 图 4.2-4 所示的六个图中，哪几个是强连通图？哪几个是单向连通图？哪几个是连通图（弱连通图）？

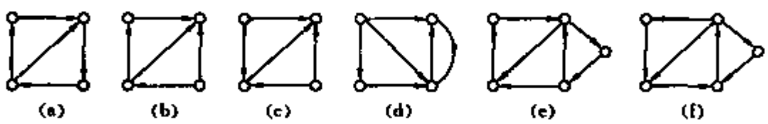


图 4.2-4

解 图 4.2-4 所示的六个图中，(a)、(e)、(f) 是强连通图；(a)、(b)、(d)、(e)、(f) 是单向连通图；(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f) 都是弱连通图。

11. 给图 4.2-5(a) 所示的彼得森图的边加方向，使得

(1) 成为强连通图。

(2) 成为单向连通图，但不是强连通图。

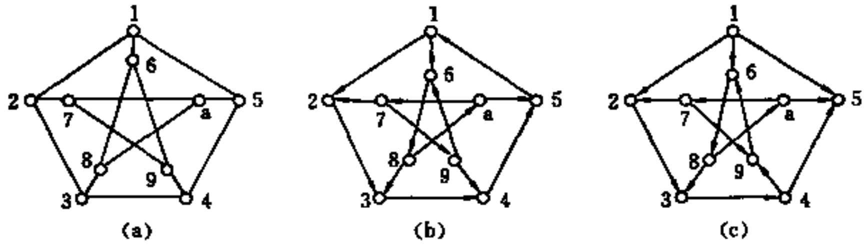


图 4.2-5

解 (1) 给图 4.2-5(a) 加方向如图 4.2-5(b) 所示便成为强连通图，事实上，图 4.2-5(b) 中

存在一条回路 1,2,3,4,5,1,6,8,a,7,9,4,5,1,该回路经过图中每个结点至少一次。

(2) 给图 4.2-5(a)加方向如图 4.2-5(c)所示便成为单向连通图,但不是强连通图,事实上,该图中的结点 2,3,4,6,7,8,9,a 相互可达,结点 1 可达其他所有结点,而其他所有结点都不可达 1。

12. 求图 4.2-6 所示有向图的所有强连通分支、单向连通分支和弱连通分支。

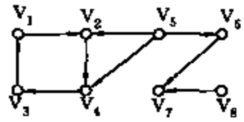


图 4.2-6

解 由结点集合$\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$、$\{v_5\}$、$\{v_6\}$、$\{v_7\}$、$\{v_8\}$导出的子图为该图的所有强连通分支;由结点集合$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$、$\{v_5,v_6,v_7\}$、$\{v_7,v_8\}$导出的子图为该图的所有单向连通分支;由结点集合$\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$导出的子图(即该图自身)为该图的弱连通分支。

§4.3 图的矩阵表示

1. 画出邻接矩阵为 A 的无向图 G 的图形,其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\1&1&1&0&1\\0&1&0&1&1\\1&0&1&0&1\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}。$$

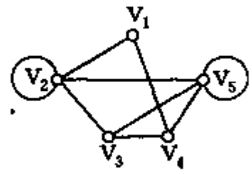


图 4.3-1

解 G 的图形如图 4.3-1 所示。

2. 设有向图 $G=\langle V,E\rangle$,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,$A=(a_{ij})_{n\times n}$为 G 的邻接矩阵。

(1) 如何利用 A 计算 G 中结点的出度、入度和度数?

(2) 如何利用 A 计算 G 中所有结点的出度之和、入度之和和度数之和?

(3) 如何利用 A 求 G 中长度为 1 的通路(含长度为 1 的回路)数?

解 (1) G 中结点 v_i 的出度、入度和度数分别由下列式子计算:

$$\deg^+(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik},\deg^-(v_i)=\sum_{k=1}^{n}a_{ki},\deg(v_i)=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})。$$

(2) G 中所有结点的出度之和、入度之和和度数之和分别由下列式子计算:

$$\sum_{v\in V}\deg^+(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik},\quad \sum_{v\in V}\deg^-(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik},$$

$$\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+a_{ki})=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}。$$

(3)G 中长度为 1 的通路(含长度为 1 的回路)数也就是 G 中的边数,有握手定理得:

$$|E|=\frac{1}{2}\sum_{v\in V}\deg(v)=\frac{1}{2}\cdot 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}。$$

3. 求图 4.3-2 所示的有向图 G 的邻接矩阵 A,找出从 v_1 到 v_4 长度为 2、3 和 4 的所有通路,用计算 A^2、A^3 和 A^4 来验证结论。

解 G 中从 v_1 到 v_4 长度为 2 的通路有:$v_1v_1v_4$,$v_1v_3v_4$ 共两条。

G 中从 v_1 到 v_4 长度为 3 的通路有:$v_1v_1v_1v_4$,$v_1v_1v_3v_4$,$v_1v_4v_1v_4$,$v_1v_3v_1v_4$ 共四条。

G 中从 v_1 到 v_4 长度为 4 的通路有:$v_1v_1v_1v_1v_4$,$v_1v_1v_1v_3v_4$,$v_1v_1v_4v_1v_4$,$v_1v_1v_3v_1v_4$,$v_1v_3v_4v_1v_4$,$v_1v_3v_1v_1v_4$,$v_1v_3v_1v_3v_4$,$v_1v_4v_1v_3v_4$,$v_1v_4v_1v_1v_4$,$v_1v_4v_1v_3v_4$ 共十条。

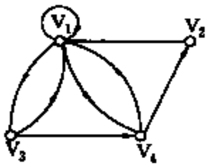


图 4.3-2

将 G 中结点按 v_1,v_2,v_3,v_4 排序，则 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&1&0&0\end{bmatrix},$$

从而

$$A^2=\begin{bmatrix}3&1&1&2\\1&0&1&1\\2&1&1&1\\2&0&1&1\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}7&2&3&4\\3&1&1&2\\5&1&2&3\\4&1&2&3\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}16&4&7&10\\7&2&3&4\\11&3&5&7\\10&3&4&6\end{bmatrix}。$$

因此，$a_{14}^{(2)}=2,a_{14}^{(3)}=4,a_{14}^{(4)}=10$，所以 G 中从 v_1 到 v_4 长度为 2、3 和 4 的通路分别有两条、四条和十条。

4. 有向图 G 如图 4.3-3 所示。

(1) 写出 G 的邻接矩阵 A。

(2) G 中长度为 4 的通路有多少条？其中有几条为回路？

(3) 利用布尔矩阵的运算求该图的可达性矩阵 P，并根据 P 来判断该图是否为强连通图或单向连通图。

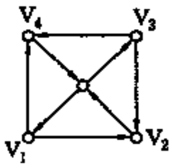


图 4.3-3

解 (1) 将 G 中结点按 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 排序，则 G 的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{bmatrix}。$$

(2) 为了求 G 中长度为 4 的连通数目，就要计算 A^4，为此先计算 A^2 和 A^3，

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&2\\1&0&1&0&0\\0&2&0&2&0\end{bmatrix},\ A^3=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix},\ A^4=\begin{bmatrix}0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\0&4&0&4&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\end{bmatrix}。$$

因 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}^{(4)}=32$，故 G 中长度为 4 的通路有 32 条。因 A^4 的主对角元素均为 0，G 中无长度为 4 的回路。

(3) 因为

$$A^{(2)}=A\wedge A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix},\ A^{(3)}=A\wedge A^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$A^{(4)}=A\wedge A^{(3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\end{bmatrix},\ A^{(5)}=A\wedge A^{(4)}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以 G 的可达性矩阵 $P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}\vee A^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$。

由于 P 中每个元素均为 1，所以 G 是强连通图，当然也是单向连通图。

5. 试利用矩阵方法判断图 4.3-4 所示的三个有向图的连通性：

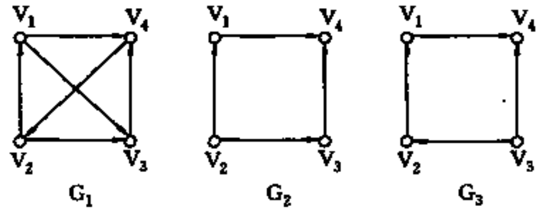


图 4.3-4

解 以下写邻接矩阵和可达性矩阵时均将结点按 v_1,v_2,v_3,v_4 排序。

(1) 写出图 4.3-4 中图 G_1 的邻接矩阵 A 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\ P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

由于 P 中每个元素均为 1，所以图 G_1 是强连通图，当然也是单向连通图和弱连通图。

(2) 写出图 4.3-4 中图 G_2 的邻接矩阵 A 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由于 P 中不是每个元素均为 1，所以图 G_2 不是强连通图。又因为

$$P'=P\vee P^T=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

中不是除主对角元外所有元素均为 1，所以图 G_2 不是单向连通图。下面计算

$$A'=A\vee A^T=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix},\ 及\ P''=A'\vee A'^{(2)}\vee A'^{(3)}\vee A'^{(4)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}。$$

由于 P''中每个元素均为 1,所以图 G_2 是弱连通图。

(3) 写出图 4.3-4 中图 G_3 的邻接矩阵 A 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下:

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由于 P 中不是每个元素均为 1,所以图 G_3 不是强连通图。又因为

$$P'=P\vee P^T=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}$$

中除主对角元外所有元素均为 1,所以图 G_3 是单向连通图,也是弱连通图。

6. 试利用矩阵方法求图 4.3-5 所示的有向图的所有强分图。

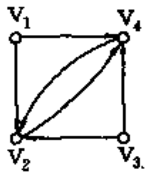


图 4.3-5

解 将该图的结点按 v_1,v_2,v_3,v_4 排序,则它的邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

从而求出该图的可达性矩阵

$$P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix},$$

及

$$P'=P\bigcirc P^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}。$$

这说明,v_1 在一个强连通分支中,v_2 和 v_4 在一个强连通分支中,v_3 在一个强连通分支中,所以该图的所有强连通分支为结点子集$\{v_1\}$、$\{v_2,v_4\}$、$\{v_3\}$导出的子图。

§4.4 欧拉图与汉密尔顿图

1. 判断图 4.4-1 所示的四个图是否能一笔画。

解 (a)中有两个度数为 1 的结点,两个度数为 3 的结点,因此奇度数结点的个数大于 2 个,故该图不存在欧拉通路,所以不能一笔画;(b)中有四个度数为 5 的结点,因奇度数结点的个数大于 2 个,故该图不存在欧拉通路,所以不能一笔画;(c)中只有两个度数为 3 的结点,其余结点的度数均为偶数,故该图存在欧拉通路,所以能够一笔画;(d)中所有结点的度数均为偶数,故该图存在欧拉回路,所以能够一笔画。

2. 如图 4.4-2(a)所示,四个村庄下面各有一个防空洞甲、乙、丙、丁,相邻的两个防空洞之间有

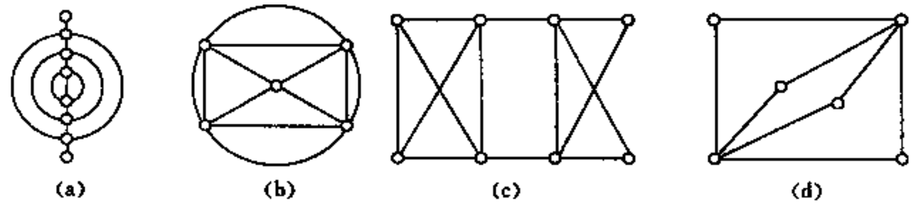


图 4.4-1

地道相通，并且每个防空洞各有一条地道与地面相通，能否每条地道恰好走过一次，既无重复也无遗漏？

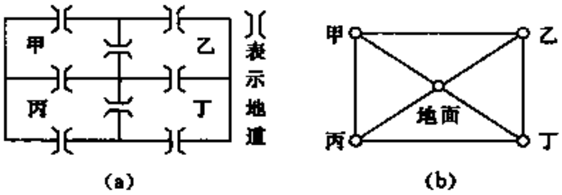


图 4.4-2

解 用结点表示(a)中的甲、乙、丙、丁四个防空洞及地面，用连接结点的边表示防空洞之间以及防空洞与地面之间的地道，则将该问题转化为判断(b)所示的图中是否存在欧拉通路的问题。(b)中甲、乙、丙、丁四个结点的度数均为 3，因此该图不存在欧拉通路，故不能每条地道恰好走过一次，既无重复也无遗漏。

3. n 为何值时，无向完全图 K_n 是欧拉图？n 为何值时，无向完全图 K_n 仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路？

解 由于 K_n 的所有结点的度数均为 $n-1$，要使 $n-1$ 为偶数，n 必须为奇数，故当 $n\geqslant 1$ 且为奇数时，无向完全图 K_n 是欧拉图。图中仅存在欧拉通路而不存在欧拉回路就必须使图中有且仅有两个奇度数结点，其他均为偶度数结点，由于 K_n 的所有结点的度数均为 $n-1$，因此 K_n 中只能有两个奇度数结点，当 $n=2$ 时，K_2 中只有两个奇度数结点，故 K_2 中仅有欧拉通路而无欧拉回路。

4. 设 G 是具有 k 个奇度数结点的无向连通图，那么，最少要在 G 中添加多少条边才能使 G 具有欧拉回路？

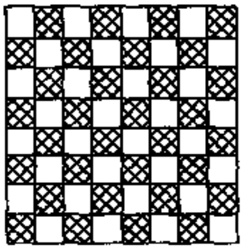
解 由握手定理可知，k 为偶数。要使 G 中具有欧拉回路，必须使 G 中每个结点的度数均为偶数，也就是说每个奇度数结点至少要增加一条邻接边，我们将 k 个奇度数结点中的每两个结点为一组，在它们之间连一条边，则所有结点的度数均成为偶数了，因此，最少要在 G 中添加 $\frac{k}{2}$ 条边才能使 G 具有欧拉回路。

5. $n(n\geqslant 2)$ 个结点的有向完全图中，哪些是欧拉图？为什么？

解 $n(n\geqslant 2)$ 个结点的有向完全图都是欧拉图。因为有向完全图中每个结点和其他 $n-1$ 个结点之间都有两条方向相反的有向边，因此每个结点的出度和入度都等于 $n-1$，故所有有向完全图都是有向欧拉图。

6. 在 8×8 黑白相间的棋盘上跳动一只马，不论跳动方向如何，要使这只马完成每一种可能的跳动恰好一次，问这样的跳动是否可能？（一只马跳动一次是指从 2×3 黑白方格组成的长方形的一个对角跳到另一个对角上）

解 图 4.4-3(a)给出了一张 8×8 黑白方格的棋盘，将棋盘上的一个方格对应一个结点，



(a)

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

(b)

图 4.4-3

两个结点之间有边当且仅当马可从一个结点跳到另一个结点，可得一张跳马图 G，将 G 中各结点的度数写在对应的方格中，如图 4.4-3(b)所示。可见，图 G 中有八个结点的度数为 3，其余都是偶度数结点。因此 G 中既无欧拉回路，也无欧拉通路。也就是说，要使马在 8×8 棋盘上完成所有可能的跳动仅一次是不可能的。

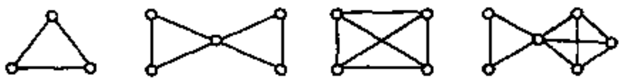
7.（1）画一个有欧拉回路和汉密尔顿回路的图。

（2）画一个有欧拉回路，但没有汉密尔顿回路的图。

（3）画一个没有欧拉回路，但有汉密尔顿回路的图。

（4）画一个既没有欧拉回路，也没有汉密尔顿回路的图。

解 所要的图分别如图 4.4-4(a)、(b)、(c)、(d)所示。（读者还可给出多种答案）



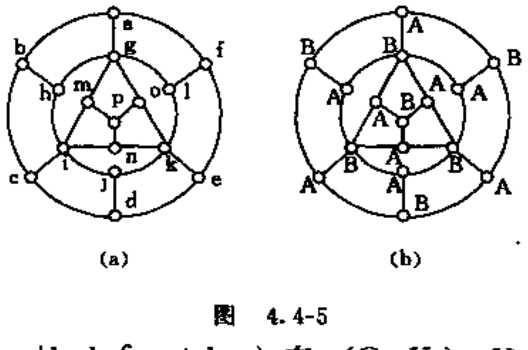
(a) (b) (c) (d)

图 4.4-4

8. 证明图 4.4-5(a)所示的图不是汉密尔顿图。

证明 **方法一** 将图 4.4-5(a)中的结点 a 用 A 标记，所有与它邻接的结点用 B 标记。继续不断地用 A 标记所有邻接于 B 的结点，用 B 标记所有邻接于 A 的结点，直到所有结点都标记完毕，如图 4.4-5(b)所示。

如果图中有一条汉密尔顿通路，那么它必交替通过结点 A 和 B，故而图 4.4-5(b)中标记 A 的结点与标记 B 的结点的数目相同，或者两者相差 1 个。然而图 4.4-5(b)中有 9 个结点标记为 A，7 个结点标记为 B，它们相差两个，所以该图不存在汉密尔顿通路，故不是汉密尔顿图。



(a) (b)

图 4.4-5

方法二 设 $V_1=\{b,d,f,g,i,k,p\}$，有 $p(G-V_1)=9>7=|V_1|$，由定理 4.5-3 知，该图不是汉密尔顿图。

方法三 该图中有 16 个结点，27 条边，若图中存在汉密尔顿回路，在回路上需要

且仅需要 16 条边，但图中提供的可供选择的边数不足 16 条。在结点 g、i、k 处各只能选择两条边，于是有三条边不能被选择；在结点 b、d、f 处也至少各有一条边不能被选择；在结点 p 处也至少有一条边不能被选择。这样一来，可供选择的边数小于等于 $27-(3\times3+3+1)=14$ 条，故该图中不存在汉密尔顿回路，因而它不是汉密尔顿图。

9. 在图 4.4-6 所示的图中，哪些图中有汉密尔顿回路？哪些图中有汉密尔顿通路？

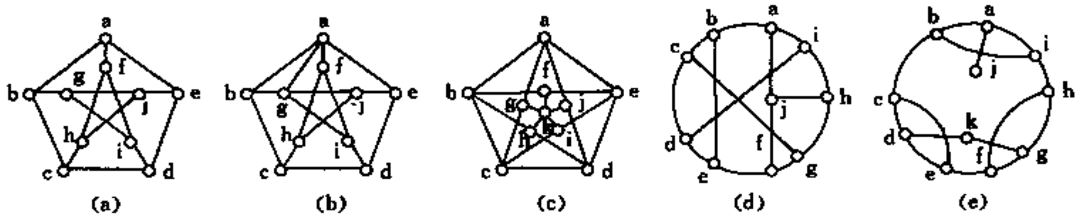


图 4.4-6

解 在图 4.4-6 中，(b)、(c)、(d)有汉密尔顿回路，(a)、(e)只有汉密尔顿通路而无汉密尔顿回路。(a)中的汉密尔顿通路为 *abcdejhfig*；(b)中的汉密尔顿回路为 *afidejhcbga*；(c)中的汉密尔顿回路为 *agkfeicbhdja*；(d)中的汉密尔顿回路为 *abefgcdihja*；(e)中的汉密尔顿通路为 *jabihfgkdec*。

10. 设 G 是具有 n 个结点的无向简单图，其边数 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$，试证明 G 是汉密尔顿图。再给出一个图 G，使它具有 n 个结点，$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 条边，而 G 不是汉密尔顿图。

证明 首先证明 G 任何两个不相邻的结点的度数之和均大于等于 n。否则存在两个结点 u,v 不相邻，且 $d(u)+d(v)\leqslant n-1$。令 $V_1=\{u,v\}$，$G_1=G-V_1$，则 G_1 是具有 $n-2$ 个结点的简单图，它的边数 $m'\geqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-(n-1)$，可得 $m'\geqslant\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1$，这与 G_1 为 $n-2$ 个结点简单图矛盾，因而 G 中任何两个不相邻的结点的度数之和均大于等于 n。由定理 4.5-4 可知 G 是汉密尔顿图。

图 4.4-7 中所示的两个图，结点数 n 和边数 m 之间均满足 $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$，可它们不是汉密尔顿图。

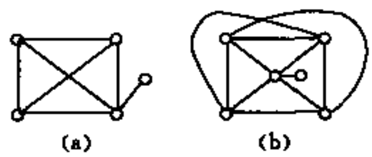


图 4.4-7

11. 在无向完全图 K_n 中有多少条没有公共边的汉密尔顿回路？

解 先设 $n=2k+1$，将 n 个结点边编号为 $0,1,2,3,\cdots,2k$，并作图如图 4.4-8 所示。

在图 4.4-8 中先取一条汉密尔顿回路为 $0,1,2,2k,3,2k-1,4,\cdots,k+3,k,k+2,k+1,0$，然后将圆周上的结点按逆时针方向依次转动一个位置，就可由图 4.4-8 取得另一条汉密尔顿回路为 $0,2,3,1,4,2k,5,\cdots,k+4,k+1,k+3,k+2,0$，显然，这两条汉密尔顿回路是没有公共边的。继续这样做下去，共可产生 $k=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 条无公共边的汉密尔顿回路。

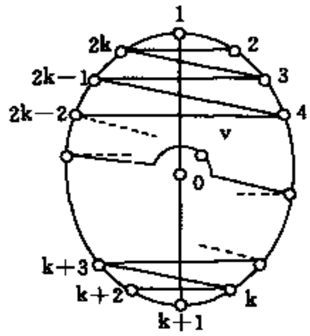


图 4.4-8

若 $n=2k+2$，那么只要在中间加一个结点 v，就同样地可

得到 $k=\left[\frac{n-1}{2}\right]$条无公共边的汉密尔顿回路。

12. 11 个学生打算几天都在一张圆桌上共进午餐，并且希望每次午餐时每个学生两旁所坐的的人都不相同，问这 11 个人共进午餐最多能有多少天？

解 将 11 个学生分别用结点表示，由于任意两个学生都可能是邻座，因此每两个结点之间都连一条边，得到无向完全图 K_{11}，每次午餐时学生都按一条汉密尔顿回路沿桌而坐，若两条汉密尔顿回路有公共边，则公共边端点上的两个学生是相邻的，从而上述问题转化为求 K_{11}有多少条无公共边的汉密尔顿回路问题。由第 11 题知，K_{11}中无公共边的汉密尔顿回路共有$\frac{n-1}{2}=5$ 条，故这 11 个人共进午餐最多能有 5 天。

13. 今有 $n(n\geqslant 3)$个人，已知他们中的任何两个人合起来认识其余 $n-2$ 个人。证明这 n 个人可以排成一行，使得除排头和排尾外，其余每个人均认识他两旁的人。当 $n\geqslant 4$ 时，这 n 个人可以排成一个圆圈，使得每个人都认识他两旁的人。

解 设 n 个人分别为 $v_1,v_2,\cdots,v_n$，以 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$为结点集，若 v_i 与 v_j 认识，就在代表他们的结点之间连一条无向边，得边集 E。于是得无向简单图 $G=\langle V,E\rangle$。

对任意 $v_i,v_j\in V$，假设 v_i 与 v_j 不相邻（即 v_i,v_j 代表的人不认识），则对任意的 $v_k(k\neq i,k\neq j)$必与 v_i 或 v_j 相邻，否则与已知条件矛盾。不妨假设 v_k 与 v_i 相邻，而不与 v_j 相邻，那么 v_k 与 v_i 所代表的两个人都不认识 v_j 所代表的人，这与已知矛盾。所以 v_k 既与 v_i 相邻，也与 v_j 相邻。因此 v_i 与 v_j 都与其余 $n-2$ 个结点相邻，从而 $\deg(v_i)+\deg(v_j)=n-2+n-2=2n-4$，由于 $n\geqslant 3$，所以 $2n-4\geqslant n-1$，由定理 4.5-4 可知 G 中存在汉密尔顿通路。当 $n\geqslant 4$，所以 $2n-4\geqslant n$，由定理 4.5-4 可知 G 是汉密尔顿图。因此，所证明结论成立。

14. 设无向简单图 G 是一个(n,m)图。试证明：若 $m\geqslant C_{n-1}^2+2$，则 G 是汉密尔顿图。

证明 假设 G 不是汉密尔顿图，由定理 4.5-4 可知，G 中存在两个结点 s,t，使得 $\deg(s)+\deg(t)<n$，由握手定理得，$2m=\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{v\in V-\{s,t\}}\deg(v)+\deg(s)+\deg(t)$，所以 $2m<\sum_{v\in V-\{s,t\}}\deg(v)+n$。因为 G 除结点 s,t 外的其余 $n-2$ 结点之间最多可以构成完全图，所以 $2m<(n-2)(n-3)+n+n=n^2-3n+6=(n-1)(n-2)+4$，从而 $m<\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2=C_{n-1}^2+2$。这与已知的 $m\geqslant C_{n-1}^2+2$ 矛盾。故 G 是汉密尔顿图。

15. 设有 a,b,c,d,e,f,g 七个人，他们分别会讲的语言如下：a 会讲英语；b 会讲汉语和英语；c 会讲英语、西班牙语和俄语；d 会讲日语和汉语；e 会讲德语和西班牙语；f 会将法语、日语和俄语；g 会讲法语和德语。能否将这七个人的座位安排在圆桌旁，使得每个人均能与他身边的人交谈？

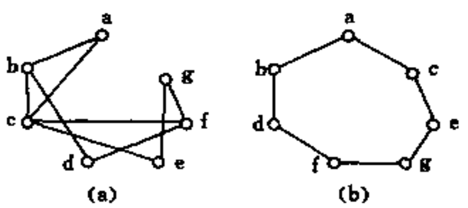


图 4.4-9

解 我们分别用 a,b,c,d,e,f,g7 个结点表示七个人，若两人能交谈（会讲同一种语言），就在代表他们的结点之间连一条无向边，所得无向图如图 4.4-9(a)所示。此图中存在一条汉密尔顿回路：$abdfgeca$，于是按图 4.4-9(b)所示的顺序安排座位即可。

§4.5 树

1. 一棵树有 n_i 个度数为 i 的结点，$i=2,3,4,\cdots,k$，问它有多少个度数为 1 的结点？

解 设该树有 x 个度数为 1 的结点，则 $\sum_{v\in V}\deg(v)=\sum_{i=2}^{k}i\cdot n_i+x$。再设该树有 m 条边，由定理 4.6-1 可知 $m=\sum_{i=2}^{k}n_i+x-1$。利用握手定理得，$\sum_{i=2}^{k}i\cdot n_i+x=2\cdot\left(\sum_{i=2}^{k}n_i+x-1\right)$，故 $x=\sum_{i=3}^{k}(i-2)\cdot n_i+2$。

2. 试证明：无向图 G 是森林，则 G 中无回路并且 $m=n-p$。这里 m、n、p 分别是 G 中的结点数、边数和连通分支数。

证明 由于 G 的每个连通分支都是树，所以 G 中无回路。假设 G 的每个连通分支的结点数和边数分别为 n_i 和 m_i，$i=1,2,\cdots,p$，那么 $n=\sum_{i=1}^{p}n_i$，$m=\sum_{i=1}^{p}m_i$。又由于 G 的每个连通分支都是树，由定理 4.6-1 可知 $m_i=n_i-1$，$i=1,2,\cdots,p$，故 $m=\sum_{i=1}^{p}m_i=\sum_{i=1}^{p}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{p}n_i-p=n-p$。

3. 试证明：正整数序列 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是一棵树中结点的度数序列的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{n}d_i=2(n-1)$。

证明 必要性：设 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是一棵树中结点的度数序列，并设边数为 m，由定理 4.6-1 可知 $m=n-1$，从而有握手定理可得 $\sum_{i=1}^{n}d_i=2m=2(n-1)$。

充分性：方法一 设 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 满足关系式 $\sum_{i=1}^{n}d_i=2(n-1)$，显然 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 可以作为某个图 G 中结点的度数序列。由握手定理可知，G 中的边数 $m=n-1$。假设 G 是这个结点度数序列的图中连通分支最少的一个图，下面证明 G 是连通图：若 G 不连通，即 $p(G)\geqslant 2$，G 至少有一个连通分支 G_1 中含有回路 C，否则，G 是森林，从而导致 $m=n-p(G)<n-1$ 的矛盾。我们从回路 C 中任取一条边 $e_1=(u_1,v_1)$，并在 G 的另一个连通分支中任取一条边 $e_2=(u_2,v_2)$，然后作图 $G'=(G-\{(u_1,v_1),(u_2,v_2)\})\cup\{(u_1,v_2),(u_2,v_1)\}$（即在 G 中删除边 (u_1,v_1) 和 (u_2,v_2)，然后连两条新边 (u_1,v_2) 和 (u_2,v_1)），显然，G' 中结点的度数序列仍然是 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，但 $p(G')=p(G)-1$，这就与 G 的假设矛盾。故 G 是连通的，由定理 4.6-1 可知 G 是一棵树。因此，$(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是一棵树的结点度数序列。

方法二 设 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 满足关系式 $\sum_{i=1}^{n}d_i=2(n-1)$，则 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中至少有两个为 1。若不然，最多有一个为 1，则 $\sum_{i=1}^{n}d_i\geqslant 2n-1$，这与 $\sum_{i=1}^{n}d_i=2(n-1)$ 矛盾。当 $n>2$ 时，$d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中至少有一个大于等于 2，若不然也会得出矛盾。下面对 n 进行归纳。

(1) 当 $n=2$ 时，有 $d_1+d_2=2(2-1)=2$，只能是 $d_1=d_2=1$，存在 K_2 为一棵树。

(2) 假设 $n=k$ 时结论成立，下证 $n=k+1$ 时结论也成立。

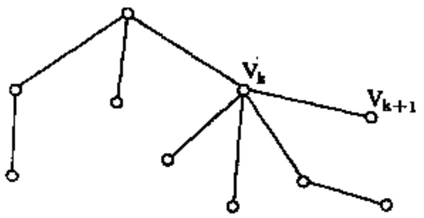


图 4.5-1

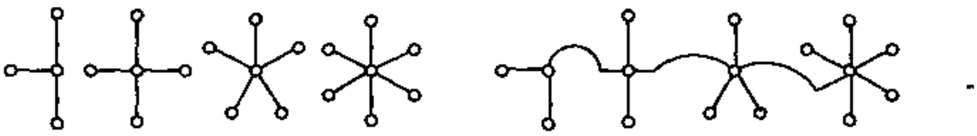
由于 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中存在为 1 的数，不妨设 $d_{k+1}=1$。又由于 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中存在大于等于 2 的数，不妨设 $d_k\geqslant 2$。

先考虑 $d_1,d_2,\cdots,d_{k-1},d_k-1$ 这 k 个数。因 $d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+d_k-1=d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+d_k+d_{k+1}-d_{k+1}-1=2(k+1-1)-1-1=2(k-1)$，由归纳假设可知，存在树 T_1，其结点为 $v_1,v_2,\cdots,v_k$，并且满足 $\sum\limits_{i=1}^{k}\deg(v_i)=d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}+d_k-1=2(k-1)$。从 T_1 中的结点 v_k 连一条边到 v_{k+1}，如图 4.5-1，得树 T，则

$$\sum_{i=1}^{k+1}\deg(v_i)=\sum_{i=1}^{k}\deg(v_i)+\deg(v_{k+1})=2(k-1)+1+1=2(k+1-1)。$$

方法三 设 $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 满足关系式 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=2(n-1)$，则 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中至少有两个为 1。若不然，最多有一个为 1，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i\geqslant 2n-1$，这与 $\sum\limits_{i=1}^{n}d_i=2(n-1)$ 矛盾。当 $n>2$ 时，$d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中至少有一个大于等于 2，若不然也会得出矛盾。下面构造一棵树。

若 $n=2$，则 $d_1=d_2=1$，所构造的树为 K_2。下面设 $n>2$。由于 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 中至少有两个为 1，设有 $m(m\leqslant n-2)$ 个大于 1，即有 $d'_1,d'_2,\cdots,d'_m$ 大于 1，则有 $n-m$ 个为 1。作星形图 $G_1,G_2,\cdots,G_m$，v_i 为 G_i 中度数最大的结点，且 $\deg(v_i)=d'_i$，$i=1,2,\cdots,m$，示意图如图 4.5-2(a)。设 v_{i_1} 为 G_i 中的任意一个度数为 1 的结点，删除 $v_{i_1}(i=1,2,\cdots,m)$，分别添加边 $(v_1,v_2),(v_2,v_3),\cdots,(v_{m-1},v_m)$，得树 T 即为所求，示意图如图 4.5-2(b)。



(a) (b)

图 4.5-2

T 中的结点数为

$$\begin{aligned}&m+\left[\sum_{i=1}^{m}d'_i-2(m-1)\right]=m+\left[\sum_{i=1}^{m}d'_i+(n-m)-2(m-1)-(n-m)\right]\\&=m+[2(n-1)-2(m-1)-(n-m)]=n,\end{aligned}$$

T 中各结点的总度数为

$$\sum_{i=1}^{m}d'_i+(n-m)=\sum_{i=1}^{n}d_i=2(n-1),$$

所以 T 为所求的树。

在以上的构造方法中，若改变星形图的位置可以得出若干棵非同构的无向树。

4. 画出具有七个结点的所有非同构的树。

解 七个结点的树具有六条边，因而所有 7 个结点的度数之和为 12。由于每个结点的度数均大于等于 1，因而可产生以下七种度数序列 $(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5,d_6,d_7)$：

1) (1,1,1,1,1,1,6)； 2) (1,1,1,1,1,2,5)；

3) (1,1,1,1,1,3,4)； 4) (1,1,1,1,2,2,4)；

5) (1,1,1,1,2,3,3)； 6) (1,1,1,2,2,2,3)；

7) (1,1,2,2,2,2,2)。

在 1)中只有一个星形图，因而只能产生一棵树 T_1(方法见第 3 题)；在 2)、3)中有两个星形图，因而也只能各产生一棵非同构的树，分别设为 T_2 和 T_3；在 4)、5)中有三个星形图，但三个星形图中各有两个是同构的，因而各可产生两棵非同构的树，分别设为 T_{4_1}、T_{4_2} 和 T_{5_2}、T_{5_1}；在 6)中有四个星形图，有三个是同构的，考虑到不同的排列情况，共可产生三棵非同构的树，设为 T_{6_1}、T_{6_2}、T_{6_3}；在 7)中有五个星形图，但都是同构的，因而可产生一棵树，设为 T_7。因此共有 11 棵非同构的树，他们的图形如图 4.5-3 所示。

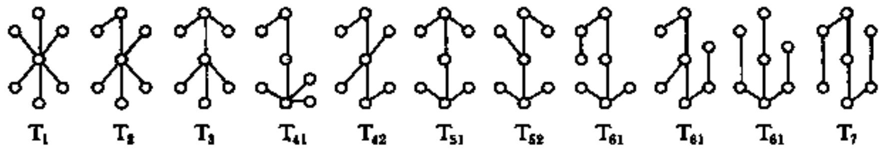


图 4.5-3

5. 图 4.5-4(a)、(b)所示的连通图 G_1、G_2 中各有几棵非同构的生成树？

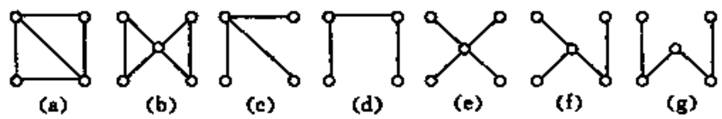


图 4.5-4

解 (a)中图 G_1 共有两棵生成树，形成生成树的结点度数序列分别为(1,1,2,2)和(1,1,1,3)，每个序列只对应一棵生成树，如图 4.5-4(c)、(d)所示。

(b)中图 G_2 共有三棵生成树，形成生成树的结点度数序列分别为(1,1,1,1,4)、(1,1,1,2,3)和(1,1,2,2,2)，每个序列只对应一棵生成树，如图 4.5-4(e)、(f)和(g)所示。

6. 对任意一个图 $G=\langle V,E\rangle$，设 $|V|=n$，$|E|=m$，$p(G)=p$，试证明 G 中至少包含 $m-n+p$ 条不同的回路。

解 当 G 是连通图(即 $p(G)=1$)时，由定理 4.6-3 可知，G 中有生成树 T，设集合 B 为 T 的补，由定理 4.6-1 可知，对任意 $e\in B$，$T+e$(在 T 中增加一条边 e)中有唯一一条回路，且该回路包含 e，记为 $C(e)$。显然，当 $e'\neq e$ 且 $e'\in B$ 时，$C(e')$ 与 $C(e)$ 是两条不同的回路。由定理 4.6-1 可知，T 中有且仅有 $n-1$ 条边，所以 T 的补 B 中有 $m-n+1$ 条边，故 G 中至少包含 $m-n+1$ 条不同的回路。

当 G 不是连通图时，$p(G)=p$。设 G 的 p 个连通分支分别为 $G_i(i=1,2,\cdots,p)$，且边数和结点数分别为 m_i 和 n_i，由以上证明可知，在每个连通分支中至少包含 m_i-n_i+1 条不同的回路，因此 G 中至少包含的不同回路条数为 $\sum_{i=1}^{p}(m_i-n_i+1)=\sum_{i=1}^{p}m_i-\sum_{i=1}^{p}n_i+p=m-n+p$。

7. 设 T_1 和 T_2 是连通图 G 的两棵生成树，边 a 在 T_1 中但不在 T_2 中，证明存在只在 T_2 中而不在 T_1 中的边 b，使得 $(T_1-\{a\})\cup\{b\}$ 和 $(T_2-\{b\})\cup\{a\}$ 都是 G 的生成树。

证明 从 T_1 中删除边 a，得树 T_{1_1} 和 T_{1_2}，我们用 V_1、V_2 分别表示 T_{1_1} 和 T_{1_2} 的结点集合，设

$$S_a=\{e\mid e\text{ 的两个端点分别属于 }V_1\text{ 和 }V_2\text{ 中}\}。$$

显然 $a\in S_a$。因边 a 不在 T_2 中，所以 a 是 T_2 的弦，设 $C(a)$ 为在 T_2 中增加边 a 后所得到的基本回路，则在 $C(a)$ 中必存在 T_2 的树枝 b 不在 T_1 中但在 S_a 中。否则，$C(a)$ 上的 T_2 的所有树枝均在 T_1 中或均不在 S_a 中。若 $C(a)$ 上的 T_2 的所有树枝均在 T_1 中，则 $C(a)$ 上的所

有边均在 T_1 中，这与 T_1 是树矛盾。若 $C(a)$ 上的 T_2 的所有树枝均不在 S_a 中，则 $C(a)$ 中除 a 外所有边的端点均在 V_1 中或均在 V_2 中，这与 $C(a)$ 是基本回路矛盾。所以 $C(a)$ 中必存在不在 T_1 中但在 S_a 中的 T_2 的树枝，设 b 为其中的一条。则 $(T_1-\{a\})\cup\{b\}$ 连通无回路又是 G 的生成子图，所以它是 G 的生成树。同理 $(T_2-\{b\})\cup\{a\}$ 也是 G 的生成树。

8. 试证明：简单连通无向图 G 的任何一条边，都是 G 的某一棵生成树的边。

证明 假设 G 中有一条边 (u,v) 不是 G 的任何一棵生成树的边，设 T 是 G 的一棵生成树，则边 (u,v) 不在 T 中。由定理 4.6-1 可知，$T\cup\{(u,v)\}$ 中存在唯一一条回路 C，假设边 (s,t) 是 C 上不同于 (u,v) 的边，则从 $T\cup\{(u,v)\}$ 中删除边 (s,t) 后便没有回路并且是连通的，即 $(T\cup\{(u,v)\})-\{(s,t)\}$ 是一棵树，从而是 G 的生成树，故边 (u,v) 在 G 的一棵生成树中，矛盾。

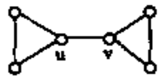


图 4.5-5

9. 证明或否定断言：简单连通无向图 G 的任何一条边，都是 G 的某一棵生成树的弦。

解 该断言是错误的，即有些简单连通无向图 G 的某些边不是 G 的任何生成树的弦。例如图 4.5-5 所示的简单连通无向图 G 中的边 (u,v) 就不是 G 的任何生成树的弦，因为从 G 中删除边 (u,v) 后便不连通了。

10. 用克鲁斯克尔算法求图 4.5-6(a)所示图的一棵最小生成树。

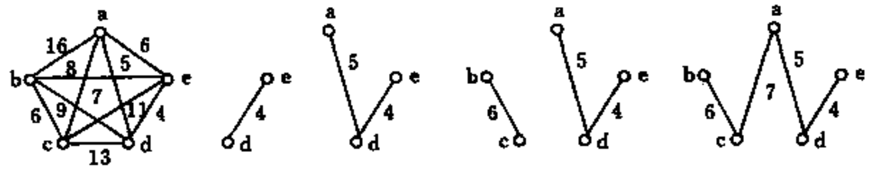


图 4.5-6

解 因为图 4.5-6(a)中有五个结点，因此要选取四条边。其过程见图 4.5-6(b)至(e)，$w(T)=22$。

11. 用逐步短接法求图 4.5-7(a)所示图的一棵最小生成树。

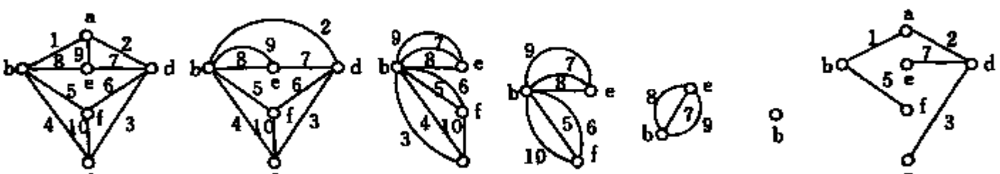


图 4.5-7

解 因为图 4.5-7(a)中有六个结点，因此要选取五条边。其过程见图 4.5-7(b)至(f)，求得的最小生成树 T 如图 4.5-7(g)所示，$w(T)=18$。

12. 若二元完全树 T 有 k 个分支点，且各分支点的层数之和为 I，各树叶的层数之和为 L，试证明：$L=I+2k$。

证明 对分支点 k 用归纳法。

$k=1$ 时，$I=0$，$L=2$，所以 $L=I+2k$ 成立。设 $k=n$ 时结论成立，下面证明 $k=n+1$ 时结论也成立。设 T 的高度为 h，因而存在结点 v_i，它的层数为 h。因为 T 是二元完全树，所以 v_i 的兄弟 v_j 的层数也为 h。设 v_i 与 v_j 的父亲为 v，删除结点 v_i、v_j 得根树 T'，这时 v 为

T'的一片树叶。设T'的分支点数为k'，各分支点的层数之和为I'，各树叶的层数之和为L'，则有

$$k'=k-1, I'=I-(h-1), L'=L-2h+(h-1)=L-h-1。$$

由归纳假设可知，在T'中有下面等式成立：

$$L'=I'+2k'$$

即

$$L-h-1=I-(h-1)+2(k-1)，故 L=I+2k。$$

13. 一个有向图G，仅有一个结点入度为0，其余所有结点的入度均为1，G一定是根树吗？

解 仅有一个结点入度为0其余所有结点的入度均为1的有向图G不一定是根树。图4.5-8中的两个图都满足条件，但它们都不是根树。

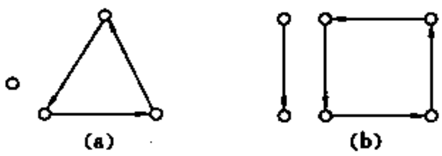


图 4.5-8

14. 设T为任意一棵二元完全树，m为边数，t为树叶数，试证明：$m=2t-2$。这里$t\geqslant 2$。

证明 **方法一** 设T中的结点数为n，分支点数为i。根据二元完全树的定义，容易知道下面等式均成立：$n=i+t, m=2i, m=n-1$。解关于m,n,i的三元一次方程组得$m=2t-2$。

方法二 在二元完全树中，除树叶外，每个结点的出度均为2；除根结点外，每个结点的入度均为1。设T中的结点数为n，由握手定理可知

$$\begin{aligned}2m &= \sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\deg^+(v_i)+\sum_{i=1}^{n}\deg^-(v_i)\\ &=2(n-t)+n-1=3n-2t-1=3(m+1)-2t-1,\end{aligned}$$

故$m=2t-2$。

方法三 对树叶数t用归纳法。

当$t=2$时，结点数为3，边数$m=2$，故$m=2t-2$成立。

假设$t=k(k\geqslant 2)$时，结论成立，下面证明$t=k+1$时结论也成立。

由于T是二元完全树，因此T中一定存在都是树叶的两个兄弟结点v_1,v_2，设v是v_1,v_2的父亲。在T中删除v_1,v_2，得树T'，T'仍为二元完全树，这时结点v成为树叶，树叶数$t'=t-2+1=k+1-1=k$，边数$m'=m-2$，由归纳假设知，$m'=2t'-2$。所以$m-2=2(t-2+1)-2$，故$m=2t-2$。

方法四 对分支点数i用归纳法。

当$i=1$时，边数$m=2$，树叶数$t=2$，故$m=2t-2$成立。

假设$i=k(k\geqslant 1)$时，结论成立，下面证明$i=k+1$时结论也成立。

由于T是二元完全树，因此T中一定存在两个儿子都是树叶的分支点，设v_i就是这样一个分支点，设它的两个儿子为v_{i_1},v_{i_2}。在T中删除v_{i_1},v_{i_2}，得树T'，T'仍为二元完全树，这时结点v_i成为树叶，分支点数$i'=i-1=k+1-1=k$，树叶数$t'=t-2+1$，边数$m'=m-2$，由归纳假设知，$m'=2t'-2$。所以$m-2=2(t-2+1)-2$，故$m=2t-2$。

15. 设二元完全树T的结点数为n，则n必为奇数，且该二元完全树的结点数$t=\frac{1}{2}(n+1)$。

证明 因为在二元完全树T中，根的度数为2，分支点的度数为3，树叶的度数为1。因此，在T中除一个根是偶度数结点外，其余结点都是奇度数结点，即奇度数结点的个数为$n-1$，由握手定理的推论可知，$n-1$为偶数，从而n为奇数。

因为在具有n个结点的树中共有$n-1$条边，由握手定理可知，

$$\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)=t+3(n-1-t)+2=2(n-1),$$

由此解得 $t=\dfrac{1}{2}(n+1)$。

16. 甲、乙两人进行乒乓球比赛，三局两胜。用一棵二元树表示比赛可能进行的各种情况。

解 图 4.5-9 中表示了比赛可能出现的各种情况，图中标甲的表示甲胜，标乙的表示乙胜，这是一棵二元完全树。

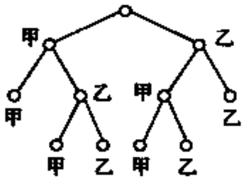


图 4.5-9

17. 用有序树表示代数表达式：$\dfrac{(3x-5y^2)^5}{a(b^3-4c)}$，其中加、减、乘、除、乘方运算分别用符号"+"、"−"、"×"、"÷"、"↑"表示。

解 所求的根树如图 4.5-10 所示。

18. 分别写出按先根次序遍历法、中根次序遍历法、后根次序遍历法对图 4.5-11 所示的二元树中结点进行访问的顺序。

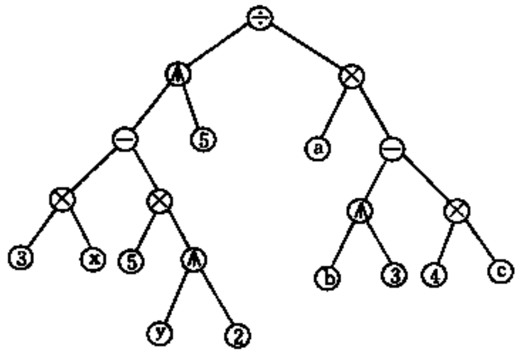


图 4.5-10

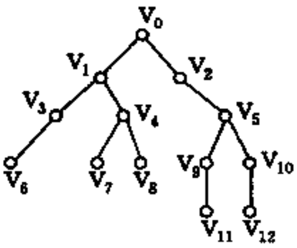


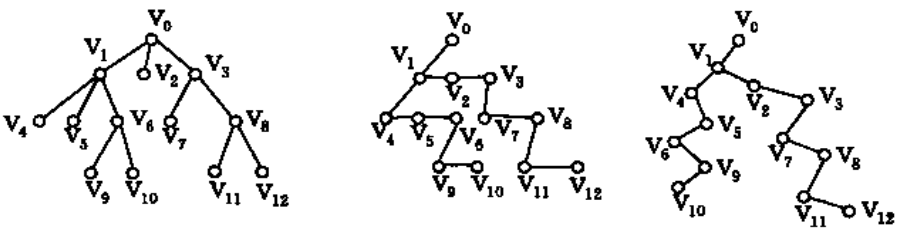
图 4.5-11

解 按先根次序遍历法访问的顺序为：$v_0v_1v_3v_6v_4v_7v_8v_2v_5v_9v_{11}v_{10}v_{12}$；

按中根次序遍历法访问的顺序为：$v_6v_3v_1v_7v_4v_8v_0v_{11}v_9v_5v_{12}v_{10}v_2$；

按后根次序遍历法访问的顺序为：$v_6v_3v_7v_8v_4v_1v_{11}v_9v_{12}v_{10}v_5v_2v_0$。

19. 用一棵二元树表示图 4.5-12(a)所示的有序树。



(a) (b) (c)

图 4.5-12

解 从根开始，保留每个父亲同其最左边儿子的连线，撤销与别的儿子的连线；兄弟间用从左到右的有向边连接；得图 4.5-12(b)；直接位于给定结点下面的结点，作为该结点的左儿子，对于同一水平线上与给定结点右邻的结点，作为该结点的右儿子，得图 4.5-12(c)。图 4.5-12(c)的二元树即为所求。

20. 求带权 2、3、5、7、8、11 的最优树。

解 第一步，取最小的两个权 2 和 3，它们对应的树叶的父亲带权为 5，如图 4.5-13(a)所

示；

第二步，在 5、5、7、8、11 中取最小的两个权 5 和 5，它们对应的树叶的父亲带权为 10，如图 4.5-13(b)所示；

第三步，在 10、7、8、11 中取最小的两个权 7 和 8，它们对应的树叶的父亲带权为 15，如图 4.5-13(c)所示；

第四步，在 10、15、11 中取最小的两个权 10 和 11，它们对应的结点的父亲带权为 21，如图 4.5-13(d)所示；

第五步，15、21 对应的结点的父亲带权为 36，如图 4.5-13(e)所示。图 4.5-13(e)所示的树为带权 2、3、5、7、8、11 的最优树 T，

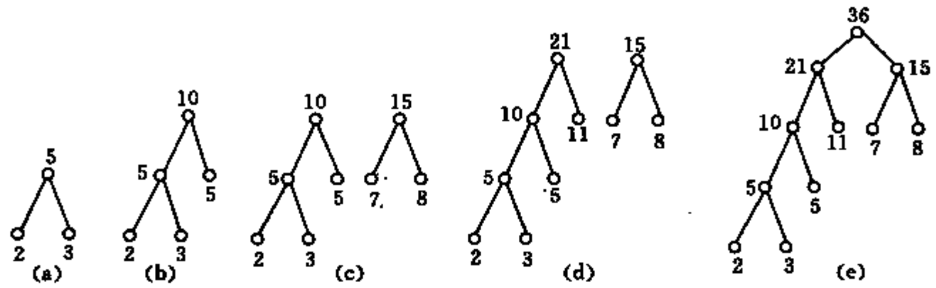


图 4.5-13

$$W(T)=2\times4+3\times4+5\times3+7\times2+8\times2+11\times2=87。$$

其实，$W(T)$等于 T 的各分支点的权之和，即 $W(T)=5+10+21+15+36=87$。

§4.6 偶图与平面图

1. 在图 4.6-1 所示的四个图中，哪几个是偶图？哪几个不是偶图？是偶图的请给出互补结点子集，不是的，请说明理由。

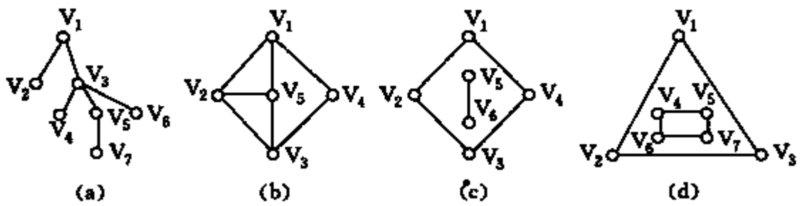


图 4.6-1

解 图中(a)、(c)是偶图，(b)、(d)不是偶图。(a)中的互补结点子集为 $V_1=\{v_1,v_4,v_5,v_6\}$，$V_2=\{v_2,v_3,v_7\}$；(c)中的互补结点子集为 $V_1=\{v_1,v_3,v_5\}$，$V_2=\{v_2,v_4,v_6\}$；(b)中存在一个长度为 3 的回路 $v_1v_2v_5v_1$；(d)中存在一个长度为 3 的回路 $v_1v_2v_3v_1$。

2. 试证明：如果 G 是偶图，它有 n 个结点 m 条边，则 $m\leqslant\frac{1}{4}n^2$。

证明 设 G 的互补结点子集为 V_1、V_2。由于 G 中边的端点都是一个在 V_1 中而另一个在 V_2 中，所以$\sum\limits_{v\in V_1}\deg(v)=\sum\limits_{v\in V_2}\deg(v)$，且对任意 $v\in V_1$，$\deg(v)\leqslant|V_2|$，由握手定理可知 $2m=\sum\limits_{v\in V_1}\deg(v)+\sum\limits_{v\in V_2}\deg(v)=2\sum\limits_{v\in V_1}\deg(v)\leqslant2|V_1|\cdot|V_2|$，因$|V_1|+|V_2|=n$，故 $m\leqslant|V_1|\cdot(n$

$-|V_1|)=\frac{1}{4}n^2-(\frac{1}{2}n-|V_1|)^2\leqslant\frac{1}{4}n^2$。

3. 试证明:树是一个偶图。

证明 设 $G=<V,E>$ 是一棵树,任选 $v_0\in V$,定义 V 的两个子集如下:

$$V_1=\{v\mid d(v,v_0)\text{为偶数}\},V_2=V-V_1。$$

现证明 V_1 中任二结点之间无边存在。若存在一条边 $(u,v)\in E,u,v\in V_1$,由于树中任意两个结点之间仅存在唯一一条基本通路,故这条基本通路就是它们之间的短程线,设 v_0 到 u 的短程线为 $v_0v_1v_2\cdots v_ku$,则 $v_0v_1v_2\cdots v_k,u$ 的长度 $k+1$ 为偶数,因 $(u,v)\in E$,所以 $v_0v_1v_2\cdots v_kuv$ 是 v_0 到 v 的一条通路,且该通路的长度 $k+2$ 为奇数,从而 $v_0v_1v_2\cdots v_kuv$ 不是基本通路,因此 v 必与某个 $v_i(i=0,1,2,\cdots,k)$ 相同,从而 $vv_{i+1}v_{i+2}\cdots v_kuv$ 是 G 中的一条基本回路,这与 G 是树矛盾。

同理可证,V_2 中任二结点之间无边存在。

故 G 中的每条边 $(u,v)\in E$,必有 $u\in V_1$、$v\in V_2$ 或 $u\in V_2$、$v\in V_1$,因此 G 是具有互补结点子集 V_1 和 V_2 的偶图。

4. 一次舞会,共有 n 位男士和 n 位女士参加,已知每位男士至少认识两位女士,而每位女士至多认识两位男士。问能否将男士和女士分配为 n 对,使得每对中的男士和女士彼此相识?

解 将 n 位男士和 n 位女士分别用结点表示,若某位男士认识某位女士,则在代表他们的结点之间连一条线,得到一个偶图 G,假设它的互补结点子集 V_1、V_2 分别表示 n 位男士和 n 位女士,由题意可知 V_1 中的每个结点度数至少为 2,而 V_2 中的每个结点度数至多为 2,从而它满足 t 条件($t=2$),因此存在从 V_1 到 V_2 的匹配,故可分配。

5. 今有赵、钱、孙、李、周五位教师,要承担语文、数学、物理、化学、英语五门课程。已知赵熟悉数学、物理、化学三门课程,钱熟悉语文、数学、物理、英语四门课程,孙、李、周三人都只熟悉数学和物理两门课程。问能否安排他们五人每人只上一门自己所熟悉的课程,使得每门课都有人教。说明理由。

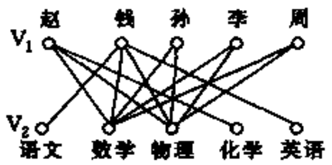


图 4.6-2

解 不能。用结点表示五位教师和五门课,在教师和他熟悉的课程之间连一条线,得到如图 4.6-2 的偶图,在该图中,V_1 中的孙、李、周三个结点只与 V_2 中的数学、物理两个结点相邻接,故不满足相异性条件,因此不存在从 V_1 到 V_2 的匹配,故不能安排。

6. 试证明图 4.6-3 所示的四个图均为平面图。

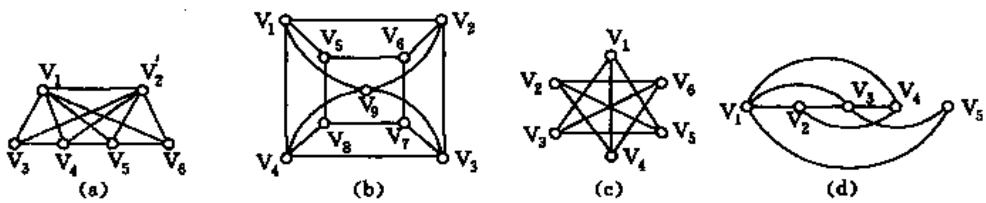


图 4.6-3

证明 只要找出它们各自的一种画法,使得任何两边除在结点处相交外,无其他交叉点即可。图 4.6-4 中分别给出了对应于图 4.6-3 中四个图的一种画法。故它们都是平面图。

7. 指出图 4.6-5(*a*)、(*b*)所示的两个图各有几个面;写出每个面的边界及次数。

解 在图 4.6-5(a)中共有五个面,四个有限面 r_1、r_2、r_3 和 r_4,一个无限面 r_5,如图 4.6-5

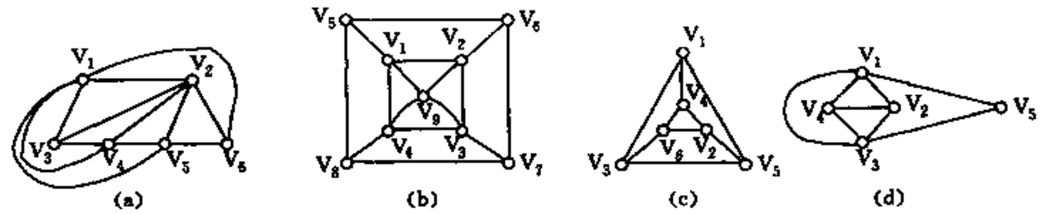


图 4.6-4

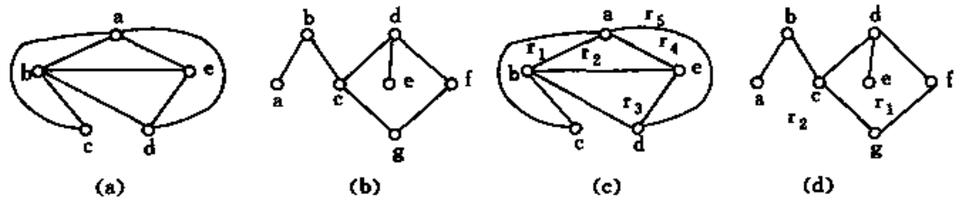


图 4.6-5

(c)所示；r_1 的边界为 $abca$，次数为 3；r_2 的边界为 $abea$，次数为 3；r_3 的边界为 $bdeb$，次数为 3；r_4 的边界为 $adea$，次数为 3；r_5 的边界为 $acbda$，次数为 4。

在图 4.6-5(b)中共有两个面，一个有限面 r_1，一个无限面 r_2，如图 4.6-5(d)所示；r_1 的边界为 $cdedfgc$，次数为 6；r_2 的边界为 $abcdfgcba$，次数为 8。

8. 试证明：在有 6 个结点、12 条边的连通简单平面图中，每个面均由 3 条边围成。

证明 设该连通简单平面图的面数为 r，由欧拉公式可得，$6-12+r=2$，所以 $r=8$，其 8 个面分别设为 $r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,r_6,r_7,r_8$。因是简单图，故每个面至少由 3 条边围成。只要有一个面是由多于 3 条边所围成的，那就有所有面的次数之和 $\sum_{i=1}^{8}D(r_i)>3\times8=24$。但是，由定理 4.8-1 知，$\sum_{i=1}^{8}D(r_i)=2m=2\times12=24$。因此每个面只能由 3 条边围成。

9. 设 G 是具有 $k(k\geqslant2)$ 个连通分支的平面图，则

$$n-m+r=k+1。$$

其中 n、m、r 分别是 G 的结点数、边数和面数。本题所证的结论是欧拉公式的推广。

证明 设 G 的 k 个连通分支分别为 G_1、G_2、…、G_k，G_i 中的结点数、边数和面数分别为 n_i、m_i 和 r_i，$i=1,2,\cdots k$，由欧拉公式有

$$n_i-m_i+r_i=2,\quad i=1,2,\cdots k, \tag{1}$$

对(1)式的两边求和得

$$\sum_{i=1}^{k}n_i-\sum_{i=1}^{k}m_i+\sum_{i=1}^{k}r_i=2k。 \tag{2}$$

而

$$\sum_{i=1}^{k}n_i=n,\ \sum_{i=1}^{k}m_i=m,\ \sum_{i=1}^{k}r_i=r+k-1。 \tag{3}$$

将(3)代入(2)得

$$n-m+r+k-1=2k。 \tag{4}$$

由(4)可得

$$n-m+r=k+1。$$

10. 设 G 是具有 n 个结点、m 条边、$p(p\geqslant2)$ 个连通分支的平面图，G 的每个面均至少由 $k(k\geqslant$

3)条边围成，则 $m \leqslant \frac{k(n-p-1)}{k-2}$。

证明 设 G 的面数为 r，各面的次数之和为 T，由定理 4.8-1 可知 $T=2m$。又因为 G 的每个面均至少由 k 条边围成，所以 $k \cdot r \leqslant T=2m$。由欧拉公式的推广(见第 9 题)得，$r=p+1+m-n$，从而有 $k \cdot (p+1+m-n) \leqslant 2m$，整理得 $m \leqslant \frac{k(n-p-1)}{k-2}$。

11. 试证明图 4.6-6 所示的两个图均为非平面图。

解 图 4.6-7 中(a)为 G_1 的子图，将结点 v_7 缩减到 v_6 得 K_5；图 4.6-7 中(b)也为 G_1 的子图，它就是 $K_{3,3}$。利用库拉托夫斯基定理由以上两种方法均可得到 G_1 是非平面图。

图 4.6-8 中(a)为 G_2 的子图，将结点 v_1 缩减到 v_6，用 w 代替，得图 4.6-8(b)，它与 $K_{3,3}$ 同构；图 4.6-8 中(c)也为 G_2 的子图，将结点 v_6 缩减到 v_3，用 u 代替，将结点 v_7 缩减到 v_4，用 w 代替，得图 4.6-8(b)，它与 K_5 同构。利用库拉托夫斯基定理由以上两种方法均可得到 G_2 是非平面图。

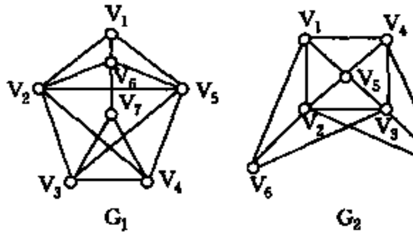


图 4.6-6

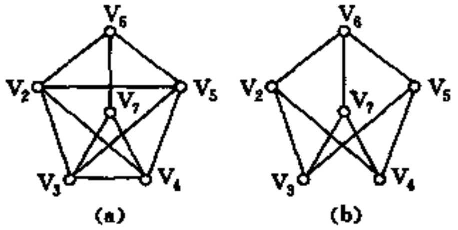


图 4.6-7

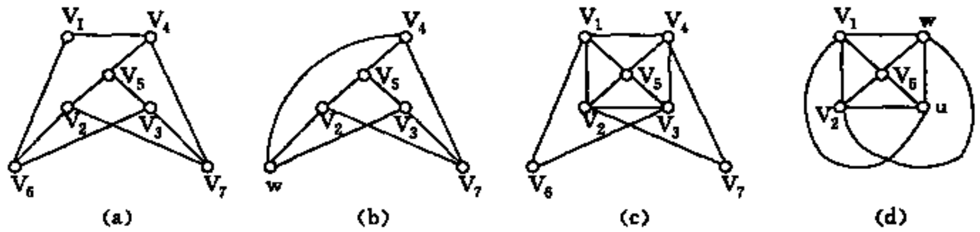


图 4.6-8

12. 在简单平面图 G 中，至少有一个度数小于等于 5 的结点。

证明 若 G 中无回路，则 G 为森林，结论显然成立。若 G 中有回路，假设 G 中有 n 个结点、m 条边，并假设 G 的所有连通分支为 G_1、G_2、…、G_k，每个 G_i 有 n_i 个结点、m_i 条边，则有

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n,\ \sum_{i=1}^{k} m_i = m。$$

由于 G 是简单图，所以 G_i 也是简单图，由定理 4.8-3 可知，$m_i \leqslant 3n_i - 6$，$i=1,2,\cdots,k$。从而有

$$m=\sum_{i=1}^{k} m_i \leqslant \sum_{i=1}^{k}(3n_i-6)=3\sum_{i=1}^{k} n_i - 6k = 3n-6k \leqslant 3n-6,$$

所以 $m \leqslant 3n-6$，下面用反证法证明我们的结论。

如果 G 中每个结点的度数均大于等于 6，由握手定理可知 $2m=\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i) \geqslant 6n$，因此 $n \leqslant \frac{1}{3}m$，代入 $m \leqslant 3n-6$ 得 $m \leqslant m-6$，这显然是矛盾的。故 G 中至少有一个度数小于等于 5 的结点。

13. 证明小于 30 条边的简单平面图 G 中至少有一个度数小于等于 4 的结点。

证明 不妨设 G 是连通图，否则因它的每个连通分支的边数都应小于等于 30，因此可对它的每个连通分支进行讨论，所以可设 G 是连通图。

假设 G 中有 n 个结点、m 条边。若 G 中无回路，则 G 为树，结论显然成立。若 G 中有回路，由于 G 是简单图，由定理 4.8-3 可知 $m\leqslant 3n-6$。下面用反证法证明我们的结论。

如果 G 中每个结点的度数均大于等于 5，由握手定理可知 $2m=\sum_{i=1}^{n}\deg(v_i)\geqslant 5n$，因此 $n\leqslant\frac{2}{5}m$，代入 $m\leqslant 3n-6$ 得 $m\leqslant\frac{6}{5}m-6$，从而 $m\geqslant 30$。这与已知的 $m<30$ 矛盾。故 G 中至少有一个度数小于等于 4 的结点。

14. 证明在简单平面图中，有 $r\leqslant 2n-4$。这里 r、n 分别为该图的面数和结点数。

证明 假设该图的边数为 m，由于简单图中的每个面都至少由 3 条边围成，由定理 4.8-1 可得，$3r\leqslant 2m$。用欧拉公式 $n-m+r=2$ 解出 $m=n+r-2$，代入 $3r\leqslant 2m$ 得到 $3r\leqslant 2(n+r-2)$，整理得 $r\leqslant 2n-4$。

15. 设 G 是一个简单图，若结点数 $n<8$，则 G 与 $\overline{G}$ 中至少有一个是平面图。

证明 假设 G 不是平面图，则由库拉托夫斯基定理可知，G 中必有子图可缩减为 K_5 或 $K_{3,3}$。若 G 中有子图可缩减为 K_5，则 $\overline{G}$ 中必有 5 个结点互不相邻，因为 $n<8$，所以 $\overline{G}$ 中最多还有另外两个结点，即使这两个结点在 $\overline{G}$ 中相邻，并且这两个结点在 $\overline{G}$ 中分别与上述 5 个结点均相邻，这时，$\overline{G}$ 仍是一个平面图。若 G 中有子图可缩减为 $K_{3,3}$，则 $\overline{G}$ 中必有两个三角形，且这两个三角形的结点是不相邻的，因为 $n<8$，所以 $\overline{G}$ 中最多还有另外一个结点，即使这个结点在 $\overline{G}$ 中与上述两个三角形的六个结点均相邻，这时，$\overline{G}$ 仍是一个平面图。

16. 设 G 是一个简单图，若结点数 $n\geqslant 11$，则 G 与 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平面图。

证明 **方法一** 首先考虑 $n=11$ 的情况。此时 $G\cup\overline{G}=K_{11}$，K_{11} 的边数为 $\frac{11\times 10}{2}=55$，因而必有 G 或者 $\overline{G}$ 的边数大于等于 28。不妨设 G 的边数 $m\geqslant 28$，设 G 有 k 个连通分支，则 G 中必有回路，若不然，G 为 k 棵树的森林，应有 $28\leqslant m=n-k=11-k$，从而 $28\leqslant 11-k$，这显然是矛盾的。下面用反证法证明 G 为非平面图。如果 G 是平面图，由于 G 中有回路并且 G 为简单图，因而回路的长度大于等于 3。于是 G 的每个面至少由 3 条边围成，由第 10 题可知

$28\leqslant m\leqslant\frac{3\times(11-k-1)}{3-2}\leqslant 3\times 11-6$，从而得到 $28\leqslant 27$，这是矛盾的，所以 G 为非平面图。

当 $n>11$ 时，考虑 G 的具有 11 个结点的子图 G'，则 G' 与 $\overline{G'}$ 必有一个是非平面图。若 G' 是非平面图，显然 G 为非平面图；若 $\overline{G'}$ 为非平面图，则 $\overline{G}$ 为非平面图。

方法二 1) G 和 $\overline{G}$ 的边数都大于 1 时，设 G 的边数为 m，则 $\overline{G}$ 的边数为 $\frac{1}{2}n(n-1)-m$。假设 G 和 $\overline{G}$ 都是简单平面图，G 和 $\overline{G}$ 的连通分支数分别为 p 和 p'，由第 10 题可知

$$m\leqslant\frac{3(n-p-1)}{3-2}\leqslant 3n-6, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}n(n-1)-m\leqslant\frac{3(n-p'-1)}{3-2}\leqslant 3n-6。\tag{2}$$

由(2)得

$$\frac{1}{2}n(n-1)-3n+6\leqslant m。 \tag{3}$$

由(1)、(3)得

$$\frac{1}{2}n(n-1)-3n+6\leqslant 3n-6。$$

即 $n^2-13n+24\leqslant 0$，而当 $n\geqslant 11$ 时显然有 $n^2-13n+24>0$，矛盾。故 G 与 $\overline{G}$ 中至少有一个是非平面图。

2) G 或者 $\overline{G}$ 的边数等于 1 时，不妨设 G 中仅有一条边，假设该边的两个端点为 u，v，则 $\overline{G}$ 的子图 $\overline{G}-\{u,v\}$ 是一个结点数大于等于 9 的完全图，在 $\overline{G}-\{u,v\}$ 中任取 5 个结点 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5，则 $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ 所生成的 $\overline{G}$ 的子图就是 K_5。由库拉托夫斯基定理可知，$\overline{G}$ 是非平面图。

3) G 或者 $\overline{G}$ 是零图时，不妨设 G 是零图，则 $\overline{G}$ 是完全图，$\overline{G}$ 中任意 5 个结点生成的子图都是 K_5，由库拉托夫斯基定理可知，$\overline{G}$ 是非平面图。

第五章　代数系统

§5.1　代数系统及其基本性质

1. 数的加、减、乘、除是否为下述集合上的二元运算：

　(1) 实数集 R。　　(2) 非零实数集 $R^*=R-\{0\}$。

　(3) 正整数集 Z^+。　　(4) $A=\{2n+1 \mid n\in Z\}$。

　(5) $B=\{2^n \mid n\in Z\}$。

解　(1) 任意两个实数的和、差、积仍为实数，故加、减、乘是 R 上的二元运算。除法不是 R 上的二元运算，因为除法在除数为 0 时无定义。

(2) 任意两个非零实数的积和商仍为非零实数，故乘、除是 R^* 上的二元运算。加法和减法不是 R^* 上的二元运算，因为它们在 R^* 上不封闭：设 $a\in R^*$，那么 $-a\in R^*$，然而 $a+(-a)=0\notin R^*$，$a-a=0\notin R^*$。

(3) 任意两个正整数的和与积仍为正整数，故加、乘是 Z^+ 上的二元运算。减法和除法不是 Z^+ 上的二元运算，因为它们在 Z^+ 上不封闭：1、$2\in Z^+$，而 $1-2=-1\notin Z^+$，$1\div 2=0.5\notin Z^+$。

(4) 任意两个奇数的积仍为奇数，故乘是 A 上的二元运算。两个奇数的和、差为偶数，奇数 3 和 5 的商等于 $\frac{3}{5}$，不是整数，故加、减、除在 A 上都不封闭，从而不是 A 上的二元运算。

(5) 对任意 $i,j\in Z$，因为 $i\pm j\in Z$，从而 $2^i\times 2^j=2^{i+j}\in B$，$2^i\div 2^j=2^{i-j}\in B$，故乘、除是 B 上的二元运算。而加、减在 B 上不封闭，故不是 B 上的二元运算。例如 $2^2+2^0=5\notin B$，$2^2-2^0=3\notin B$。

2. 数的加法和乘法在下述集合上是否封闭：

　(1) $A=\{0,1\}$。　　(2) $B=\{-1,1\}$。

　(3) $C=\{a\sqrt{2}+b \mid a,b\in Z\}$。　　(4) $D=\{x \mid x$ 为质数$\}$。

　(5) $E=\{x \mid x$ 为复数且 $|x|=1\}$。

解　加法仅在 C 上是封闭的。乘法在 A、B、C、E 上都是封闭的，但在 D 上不封闭。

3. $A=\{x \mid x<100$ 且为质数$\}$，在 A 上定义 $*$ 和 $\circ$ 如下：

$$x*y=\max(x,y),\ x\circ y=\mathrm{LCM}(x,y),\ \forall x,y\in A,$$

这里 $\mathrm{LCM}(x,y)$ 表示 x 与 y 的最小公倍数。问 $\langle A;*\rangle$ 和 $\langle A;\circ\rangle$ 是否为代数系统？

解　A 显然是非空集合，下面只需验证 $*$ 和 $\circ$ 是否在 A 上封闭就行了。

对任意 $x,y\in A$，$x*y=\max(x,y)\in A$，所以，$\langle A;*\rangle$ 是一个代数系统。

对于 $3,5\in A$，$x\circ y=\mathrm{LCM}(x,y)=15\notin A$，所以，$\langle A;\circ\rangle$ 不是代数系统。

4. 设 $B=\{a,b,c,d\}$，B 上的二元运算 $*$ 和 $\circ$ 如表 5.1-1 所示，$S_1=\{b,d\}$，$S_2=\{b,c\}$，$S_3=\{a,c,d\}$，试问 $\langle S_1;*,\circ\rangle$、$\langle S_2;*,\circ\rangle$、$\langle S_3;*,\circ\rangle$ 是否为代数系统 $\langle B;*,\circ\rangle$ 的子代数？

表 5.1-1

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

○	a	b	c	d
a	a	a	b	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

解 显然，S_1、S_2 和 S_3 都是 B 的非空子集，要判断是否为子代数只需验证它们是否对运算封闭即可。因为集合 S_1 对运算 $*$ 和 $\circ$ 都是封闭的，故 $\langle S_1;*,\circ\rangle$ 是 $\langle B;*,\circ\rangle$ 的子代数。因为集合 S_2 对运算 $*$ 和 $\circ$ 都不是封闭的，故 $\langle S_2;*,\circ\rangle$ 不是 $\langle B;*,\circ\rangle$ 的子代数。因为集合 S_3 虽然对运算 $*$ 是封闭的，但对运算 $\circ$ 不是封闭的，故 $\langle S_3;*,\circ\rangle$ 不是 $\langle B;*,\circ\rangle$ 的子代数。

5. 设函数 $g:Z\times Z\to Z$ 定义为

$$g(x,y)=x*y=x+y-xy,$$

试证明二元运算 $*$ 是可交换的和可结合的。求幺元，并指出哪些元素有逆元，逆元是什么？

证明 对任意 $x,y\in Z$，$x*y=x+y-xy=y+x-yx=y*x$，所以二元运算 $*$ 是可交换的。对任意 $x,y,z\in Z$，

$$\begin{aligned}(x*y)*z&=(x+y-xy)*z=x+y-xy+z-(x+y-xy)z\\&=x+y+z-xy-xz-yz+xyz,\\x*(y*z)&=x*(y+z-yz)=y+z-yz+x-x(y+z-yz)\\&=x+y+z-xy-xz-yz+xyz,\end{aligned}$$

所以，$(x*y)*z=x*(y*z)$，所以二元运算 $*$ 是可结合的。

假设 Z 中有关于 $*$ 的幺元 e，则对任意 $x\in Z$，有 $x*e=e*x=x$，因此 $x+e-xe=x$，即 $e(1-x)=0$，所以 $e=0$。假设元素 $x\in Z$ 有逆元，设为 x^{-1}，则由 $x*x^{-1}=x*x^{-1}=0$ 得，$x+x^{-1}-x*x^{-1}=0$，从而 $x^{-1}=\dfrac{x}{x-1}$，由于 $x^{-1}\in Z$，因此 x 只能为 0 和 2，即只有 0 和 2 才有逆元，$0^{-1}=0$，$2^{-1}=2$。

6. 令 $*$ 为自然数集合 N 上由 $x*y=x$ 给出的二元运算。试证明 $*$ 是可结合的，但不是可交换的。哪些元素是幂等元？哪些元素是左幺元？哪些元素是右幺元？哪些元素是左零元？哪些元素是右零元？

证明 对任意 $x,y,z\in N$，$(x*y)*z=x*y=x$，$x*(y*z)=x$，所以 $(x*y)*z=x*(y*z)$，故 $*$ 是可结合的。取两个元素 $x,y\in N$，且 $x\neq y$，由于 $x*y=x$，$y*x=y$，所以有 $x*y\neq y*x$，故 $*$ 是不可交换的。

因为对任意 $x\in N$，$x*x=x$，所以 N 中的所有元素都是幂等元，即 $*$ 满足幂等律。因为 N 中任何一个元素 x 都不能使所有 $y\in N$ 成立 $x*y=y$，所以 N 中无左幺元。因为 N 中任何一个元素 x 都能使所有 $y\in N$ 使 $y*x=y$ 成立，所以 N 中所有元素都是右幺元。因为 N 中任何一个元素 x 都能使所有 $y\in N$ 使 $x*y=x$ 成立，所以 N 中所有元素都是左零元。因为 N 中任何一个元素 x 都不能使所有 $y\in N$ 使 $y*x=x$ 成立，所以 N 中无右零元。

7. 设 $\langle A;*\rangle$ 是一个代数系统，二元运算 $*$ 是可结合的，并且对任意 $x,y\in A$，若 $x*y=y*x$

则 $x=y$。试证明对一切 $x\in A$，$x*x=x$。

证明 对任意 $x\in A$，因为 $*$ 是可结合的，因此 $(x*x)*x=x*(x*x)$，由已知条件可得，$x*x=x$。

8. 设 $A=\{1,2\}$，A 上所有函数的集合记为 A^A，$\circ$ 是函数的合成运算，试给出 A^A 上运算 $\circ$ 的运算表，并且指出 A^A 中是否有幺元，哪些元素有逆元。

解 因为 $|A|=2$，所以 A 上共有 $2^2=4$ 个不同的函数，令 $A^A=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$，其中 $f_1(1)=1,f_1(2)=2$；$f_2(1)=1,f_2(2)=1$；$f_3(1)=2,f_3(2)=2$；$f_4(1)=2,f_4(2)=1$。$\circ$ 的运算表如表 5.1-2 所示。从表中可以看出，f_1 是 A^A 中的幺元，f_1 和 f_4 有逆元，它们的逆元都各自自身。

表 5.1-2

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_2	f_3	f_3
f_3	f_3	f_2	f_3	f_2
f_4	f_4	f_2	f_3	f_1

9. 根据下面定义的实数集 R 上的二元运算 $*$，判断 $*$ 是否可交换的、是否可结合的、R 中关于 $*$ 是否有幺元？为什么？如果有幺元，R 中哪些元素有逆元？逆元是什么？

(1) $x*y=|x-y|$。 (2) $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$。

(3) $x*y=x+2y$。 (4) $x*y=\frac{1}{2}(x+y)$。

解 (1) 因为对任意 $x,y\in R$，有 $|x-y|=|y-x|$，所以 $x*y=y*x$，故 $*$ 是可交换的。然而对 $1,2,3\in R$，$(1*2)*3=||1-2|-3|=2$，而 $1*(2*3)=|1-|2-3||=0$，所以 $(1*2)*3\neq 1*(2*3)$，故 $*$ 不是可结合的。因为对每个 $x\in R$ 都不可能使对任意 $y\in R$ 有 $x*y=y$ 成立，例如不管 x 是什么数，都不可能有 $x*(-1)=-1$ 成立，故 R 中不存在关于 $*$ 的幺元。

(2) 因为对任意 $x,y\in R$，有 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{y^2+x^2}$，所以 $x*y=y*x$，故 $*$ 是可交换的。因为对任意 $x,y,z\in R$，有 $(x*y)*z=\sqrt{x^2+y^2}*z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$x*(y*z)=x*\sqrt{y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以 $(x*y)*z=x*(y*z)$，故 $*$ 是可结合的。因为对每个 $x\in R$ 都不可能使对任意 $y\in R$ 有 $x*y=y$ 成立，例如不管 x 是什么数，都不可能有 $x*(-1)=-1$ 成立，故 R 中不存在关于 $*$ 的幺元。

(3) 因为对 $2,3\in R$，有 $2*3=2+2\times3=8$，而 $3*2=3+2\times2=7$，所以 $2*3\neq3*2$，故 $*$ 不是可交换的。因为对 $1,2,3\in R$，有 $(1*2)*3=(1+2\times2)*3=5*3=5+2\times3=11$，而 $1*(2*3)=1*(2+2\times3)=1*8=1+2\times8=17$，所以 $(1*2)*3\neq1*(2*3)$，故 $*$ 不是可结合的。因为对每个 $x\in R$ 都不可能使对任意 $y\in R$ 有 $x*y=y$ 成立，例如不管 x 是什么数，都不可能有 $x*2=2$ 和 $x*3=3$ 同时成立，故 R 中不存在关于 $*$ 的幺元。

(4) 因为对任意 $x,y\in R$，有 $\frac{1}{2}(x+y)=\frac{1}{2}(y+x)$，所以 $x*y=y*x$，故 $*$ 是可交换的。因为对 $2,4,6\in R$，有 $(2*4)*6=\frac{1}{2}(2+4)*6=3*6=\frac{1}{2}(3+6)=4.5$，$2*(4*6)=2*\frac{1}{2}(4+6)=2*5=\frac{1}{2}(2+5)=3.5$，所以 $(2*4)*6\neq2*(4*6)$，故 $*$ 不是可结合的。因为对每个 $x\in R$ 都不可能使对任意 $y\in R$ 有 $x*y=y$ 成立，例如不管 x 是什么数，都不可能有 $x*(-1)=-1$ 和 $x*1=1$ 同时成立，故 R 中不存在关于 $*$ 的幺元。

10. 设 $*$ 和 $\circ$ 都是集合 A 上的二元运算，并且对任意 $x,y\in A$ 有 $x*y=x$，证明：$\circ$ 对 $*$ 是可

分配的。

证明 对任意 $x,y,z\in A$，$x \circ (y*z)=x\circ y$，$(x\circ y)*(x\circ z)=x\circ y$，因此 $x\circ(y*z)=(x\circ y)*(x\circ z)$，所以 $\circ$ 对 $*$ 是左可分配的；$(y*z)\circ x=y\circ x$，$(y\circ x)*(z\circ x)=y\circ x$，因此 $(y*z)\circ x=(y\circ x)*(z\circ x)$，所以 $\circ$ 对 $*$ 是右可分配的；故 $\circ$ 对 $*$ 是可分配的。

11. 正整数集合 P 上的两个二元运算 $\circ$ 和 $*$ 定义为：对任意 $x,y\in P$，有

$$x\circ y=x^y,\quad x*y=x\cdot y,$$

证明 $\circ$ 对 $*$ 不是可分配的，$*$ 对 $\circ$ 也不是可分配的。

证明 取 $2,3,2\in P$，有 $2\circ(3*2)=2\circ(3\times 2)=2\circ 6=2^6=64$，而 $(2\circ 3)*(2\circ 2)=2^3\times 2^2=8\times 4=32$，所以 $2\circ(3*2)\neq(2\circ 3)*(2\circ 2)$，故 $\circ$ 对 $*$ 不是左可分配的，因此是不可分配的。

取 $2,3,2\in P$，有 $2*(3\circ 2)=2\times 3^2=2\times 9=18$，而 $(2*3)\circ(2*2)=(2\times 3)\circ(2\times 2)=6\circ 4=6^4=1296$，所以 $2*(3\circ 2)\neq(2*3)\circ(2*2)$，故 $*$ 对 $\circ$ 不是左可分配的，因此是不可分配的。

12. 设有代数系统 $\langle A;*\rangle$，其中 $A=\{a,b,c,d\}$，二元运算 $*$ 的运算表定义如下。问二元运算 $*$ 是否是可交换的；是否有幺元；如果有幺元，指出哪些元素是可逆的，并给出它们的逆元。

(1)

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

(2)

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	d	c	a	b
d	d	d	c	c

解 一个二元运算是可交换的当且仅当它的运算表关于主对角线对称。一个元素是幺元当且仅当该元素对应的行与运算表的行表头相同，该元素对应的列与运算表的列表头相同。两个元素互为逆元当且仅当这两个元素对应的行与列和列与行交叉点上的元素均为幺元。

(1) 根据上面的结论，从表中容易看出，二元运算 $*$ 是可交换的，a 是幺元，a、b、c、d 都是可逆的，且 $a^{-1}=a$，$b^{-1}=d$，$c^{-1}=c$，$d^{-1}=b$。

(2) 根据上面的结论，从表中容易看出，二元运算 $*$ 不是可交换的，b 是幺元，b 是可逆的，且 $b^{-1}=b$，a、c、d 都不是可逆的。以 d 为例，因为仅有 c 使 $c*d=b$，但 $d*c=c$，故 c 是 d 的左逆元，而不是 d 的右逆元，从而 d 没有逆元。

13. 设 $\langle A;*\rangle$ 是一个二元代数，对于任意的 $a,b\in A$，都有 $(a*b)*a=a$ 和 $(a*b)*b=(b*a)*a$，试证明：

(1) 对任意的 $a,b\in A$，有 $a*(a*b)=a*b$。

(2) 对任意的 $a,b\in A$，有 $a*a=(a*b)*(a*b)$。

(3) 对任意的 $a\in A$，若记 $a*a=e$，则必有 $e*a=a$，$a*e=e$。

(4) $a*b=b*a$ 当且仅当 $a=b$。

(5) 若还满足 $a*b=(a*b)*b$，则 $*$ 满足幂等律和交换律。

证明 (1) 对任意的 $a,b\in A$，有

$a*(a*b)=((a*b)*a)*(a*b)$ 利用$(a*b)*a=a$

$=a*b$。 利用$(a*b)*a=a$

(2) 对任意的 $a,b\in A$,有

$a*a=((a*b)*a)*a$ 利用$(a*b)*a=a$

$=(a*(a*b))*(a*b)$ 利用$(a*b)*b=(b*a)*a$

$=(a*b)*(a*b)$。 利用(1)的结论

(3) 对任意的 $a\in A$,因为 $a*a=e$,所以

$e*a=(a*a)*a=a$, 利用$(a*b)*a=a$

$a*e=a*(a*a)=a*a=e$。 利用(1)的结论

(4) 必要性:当 $a=b$ 时,显然有 $a*b=b*a$;

充分性:当 $a*b=b*a$ 时,

$a=(a*b)*a$ 利用$(a*b)*a=a$

$=(b*a)*a$ 利用 $a*b=b*a$

$=(a*b)*b$ 利用$(a*b)*b=(b*a)*a$

$=(b*a)*b$ 利用 $a*b=b*a$

$=b$。 利用$(a*b)*a=a$

(5) 对任意的 $a,b\in A$,有

$a*a=(a*a)*a$ 利用 $a*b=(a*b)*b$

$=a$。 利用$(a*b)*a=a$

所以,* 满足幂等律。

$a*b=(a*b)*b$ 利用 $a*b=(a*b)*b$

$=(b*a)*a$ 利用$(a*b)*b=(b*a)*a$

$=b*a$ 利用 $a*b=(a*b)*b$

所以,* 满足交换律。

§5.2 同态与同构

1. 设 V_1 是全体复数集合 C 关于数的加法和乘法构成的代数系统,即 $V_1=\langle C;+,\times\rangle$,$V_2=\langle M;*,\cdot\rangle$,其中

$$M=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\middle| a,b\in R\right\},$$

* 和 · 分别为矩阵的加法和乘法,证明:V_1 与 V_2 同构

证明 作 C 到 M 的关系 f 如下:对任意 $c=a+bi\in C$,$f:a+bi\rightarrow\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$。

显然,对 C 中的每一个元素,在 M 中都有唯一一个元素与之对应,所以 f 是 C 到 M 的映射。对任意 $a_1+b_1i,a_2+b_2i\in C$,

$$f((a_1+b_1i)+(a_2+b_2i))=f((a_1+a_2)+(b_1+b_2)i)=\begin{bmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}=f(a_1+b_1i)*f(a_2+b_2i),$$

$$f((a_1+b_1i)\times(a_2+b_2i))=f((a_1a_2-b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)i)$$
$$=\begin{bmatrix} a_1a_2-b_1b_2 & a_2b_1+a_1b_2 \\ -(a_2b_1+a_1b_2) & a_1a_2-b_1b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$
$$=f(a_1+b_1i)\cdot f(a_2+b_2i),$$

所以 f 是 V_1 到 V_2 的同态映射。下面证明 f 是双射。对任意 $a_1+b_1i,a_2+b_2i\in C$,如果 $f(a_1+b_1i)=f(a_2+b_2i)$,即$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$,由矩阵的性质得 $a_1=a_2,b_1=b_2$,从而 $a_1+b_1i=a_2+b_2i$,故 f 是单射;任取$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\in M$,有 $a,b\in R$,因此存在 $a+bi\in C$,使得 $f(a+bi)=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$,故 f 是满射。所以 f 是 C 到的双射。从而 f 是 V_1 到 V_2 的同构映射,即 V_1 与 V_2 同构。

2. 设$\langle P;+\rangle$与$\langle A;\times\rangle$是代数系统,其中 P 为正整数集合,$A=\{-1,1\}$,$+$与$\times$分别是数的加法与乘法运算,规定 $f:P\to A$ 为:$\forall x\in P$,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为偶数时。} \\ -1, & \text{当 } x \text{ 为奇数时。} \end{cases}$$

证明:f 是从 P 到 A 的同态映射。

证明 显然,f 是 P 到 A 的映射。$\forall x,y\in P$,分下面四种情况讨论:

(1) 如果 x,y 都是偶数,则 $f(x)=1,f(y)=1$,于是 $f(x+y)=1=1\times1=f(x)\times f(y)$。

(2) 如果 x,y 都是奇数,则 $f(x)=-1,f(y)=-1$,于是 $f(x+y)=1=(-1)\times(-1)=f(x)\times f(y)$。

(3) 如果 x 是偶数,y 是奇数,则 $f(x)=1,f(y)=-1$,于是 $f(x+y)=-1=1\times(-1)=f(x)\times f(y)$。

(4) 如果 x 是奇数,y 是偶数,则 $f(x)=-1,f(y)=1$,于是 $f(x+y)=-1=(-1)\times1=f(x)\times f(y)$。

因此,$\forall x,y\in P,f(x+y)=f(x)\times f(y)$,即 f 是$\langle P;+\rangle$到$\langle A;\times\rangle$的同态映射。

3. 设$\langle P;\times\rangle$与$\langle B;\times\rangle$是代数系统,其中 P 为正整数集合,$B=\{0,1\}$,$\times$是数的乘法运算,规定 $f:P\to B$ 为:$\forall x\in P$,

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x=2^k(k\in N)\text{ 时。} \\ 0, & \text{其他情况。} \end{cases}$$

证明:f 是从 P 到 B 的同态映射。

证明 显然,f 是 P 到 B 的映射。$\forall x,y\in P$,分下面两种情况讨论:

(1) 当 $x=2^m,y=2^n(m,n\in N)$时,有 $f(x)=1,f(y)=1$,于是 $f(x\times y)=1=1\times1=f(x)\times f(y)$。

(2) 当 x,y 至少有一个不能表示为 $2^k(k\in N)$时,$x\times y$ 就不能表示为 $2^k(k\in N)$的形式,$f(x)$、$f(y)$至少有一个为 0,于是 $f(x\times y)=0=f(x)\times f(y)$。

因此,$\forall x,y\in P,f(x\times y)=f(x)\times f(y)$,即 f 是$\langle P;\times\rangle$到$\langle A;\times\rangle$的同态映射。

4. 设 f 和 g 都是从代数$\langle A;*\rangle$到$\langle B;\circ\rangle$的同态映射,$*$和$\circ$分别为 A 和 B 上的二元运算,且$\circ$是可交换和可结合的,证明 $h:A\to B$,$\forall x\in A$,

$$h(x)=f(x)\circ g(x)$$

是$\langle A;*\rangle$到$\langle B;\circ\rangle$的同态映射。

证明 利用函数的合成容易知道，h是A到B的映射。$\forall x,y\in P$，

$$\begin{aligned}h(x*y)&=f(x*y)\circ g(x*y)=(f(x)\circ f(y))\circ(g(x)\circ g(y))\\&=f(x)\circ(f(y)\circ g(x))\circ g(y)=f(x)\circ(g(x)\circ f(y))\circ g(y)\\&=(f(x)\circ g(x))\circ(f(y)\circ g(y))=h(x)\circ h(y)\end{aligned}$$

所以h是$\langle A;*\rangle$到$\langle B;\circ\rangle$的同态映射。

5. 设g是从代数$\langle A;*\rangle$到$\langle B;\circ\rangle$的同态映射，$S\subseteq B$，且$g^{-1}(S)\neq\Phi$。试证明：若$\langle S;\circ\rangle$是$\langle B;\circ\rangle$的子代数，则$\langle g^{-1}(S);*\rangle$是$\langle A;*\rangle$的子代数。这里$g^{-1}(S)$表示集合$S$的完全原像。

证明 假设$*$和$\circ$为k元运算。因为g是A到B的映射，S是B的非空子集，从而$g^{-1}(S)$是A的子集。由于$g^{-1}(S)$非空，$\forall x_1,x_2,\cdots,x_k\in g^{-1}(S)\subseteq A$，有$g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_k)\in S\subseteq B$，因为$g$是$\langle A;*\rangle$到$\langle B;\circ\rangle$的同态映射且$\langle S;\circ\rangle$是$\langle B;\circ\rangle$的子代数，所以$g(*(x_1,x_2,\cdots,x_k))=\circ(g(x_1),g(x_2),\cdots,g(x_k))\in S$，因此$*(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in g^{-1}(S)$，即集合$g^{-1}(S)$对运算$*$是封闭的，从而$\langle g^{-1}(S);*\rangle$是代数系统，也就是$\langle A;*\rangle$的子代数。

6. 设二元代数$\langle A;*\rangle$中有幺元，而二元代数$\langle B;\circ\rangle$中无幺元，证明$\langle A;*\rangle$与$\langle B;\circ\rangle$不同构。

证明 反证法。假设$\langle A;*\rangle$与$\langle B;\circ\rangle$同构，h集合A到B的同构映射。另外设$\langle A;*\rangle$中的幺元为e，由于h是双射，所以对任意$b\in B$，都存在$a\in A$，使得$h(a)=b$。由于

$$h(e)\circ b=h(e)\circ h(a)=h(e*a)=h(a),\ b\circ h(e)=h(a)\circ h(e)=h(a*e)=h(a),$$

所以$h(e)$是$\langle B;\circ\rangle$中的幺元，这与$\langle B;\circ\rangle$中无幺元矛盾，故$\langle A;*\rangle$与$\langle B;\circ\rangle$不同构。

7. 设$A=\{1,2,3\}$，$\cap$、$\cup$分别是集合的交与并运算，试问代数系统$\langle\{\Phi,A\};\cap,\cup\rangle$与$\langle\{\{1,2\},\{1,2,3\}\};\cap,\cup\rangle$是否同构？

解 代数系统$\langle\{\Phi,A\};\cap,\cup\rangle$与$\langle\{\{1,2\},\{1,2,3\}\};\cap,\cup\rangle$是同构的。事实上，作$\{\phi,A\}$到$\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$的函数$f$为：$f(\Phi)=\{1,2\}$，$f(A)=\{1,2,3\}\}$，显然$f$是双射函数。又因为

$$\begin{aligned}&f(\Phi\cap\Phi)=f(\Phi)=\{1,2\}=\{1,2\}\cap\{1,2\}=f(\Phi)\cap f(\Phi),\\&f(\Phi\cup\Phi)=f(\Phi)=\{1,2\}=\{1,2\}\cup\{1,2\}=f(\Phi)\cup f(\Phi);\\&f(\Phi\cap A)=f(\Phi)=\{1,2\}=\{1,2\}\cap\{1,2,3\}=f(\Phi)\cap f(A),\\&f(\Phi\cup A)=f(A)=\{1,2,3\}=\{1,2\}\cup\{1,2,3\}=f(\Phi)\cup f(A);\\&f(A\cap\Phi)=f(\Phi)=\{1,2\}=\{1,2,3\}\cap\{1,2\}=f(A)\cap f(\Phi),\\&f(A\cup\Phi)=f(A)=\{1,2,3\}=\{1,2,3\}\cup\{1,2\}=f(A)\cup f(\Phi);\\&f(A\cap A)=f(A)=\{1,2,3\}=\{1,2,3\}\cap\{1,2,3\}=f(A)\cap f(A),\\&f(A\cup A)=f(A)=\{1,2,3\}=\{1,2,3\}\cup\{1,2,3\}=f(A)\cup f(A);\end{aligned}$$

所以$\forall x,y\in\{\Phi,A\}$，有$f(x\cap y)=f(x)\cap f(y)$，$f(x\cup y)=f(x)\cup f(y)$成立，故f是同构映射，即$\langle\{\Phi,A\};\cap,\cup\rangle$与$\langle\{\{1,2\},\{1,2,3\}\};\cap,\cup\rangle$同构。

8. 设$\langle R;+\rangle$与$\langle R;\times\rangle$是代数系统，其中R为实数集合，$+$、$\times$分别是数的加法和乘法运算，$h:R\to R$为：$h(x)=10^x$，$\forall x\in R$。试证明h是$\langle R;+\rangle$到$\langle R;\times\rangle$的单一同态，但不是同构。

证明 对任意$x,y\in R$，有$h(x+y)=10^{x+y}=10^x\times10^y=h(x)\times h(y)$，所以$h$是$\langle R;+\rangle$到$\langle R;\times\rangle$的同态映射。对任意$x,y\in R$，若$x\neq y$，显然有$10^x\neq10^y$，即$h(x)\neq h(y)$，从而$h$是$R$上的单射；然而对$-1\in R$，不存在满足$h(x)=-1$的$x\in R$，从而$h$不是$R$上的满射；因此$h$不是$R$上的双射。故$h$只是$\langle R;+\rangle$到$\langle R;\times\rangle$的单一同态，而不是同构。

9. 令 m 为某给定的非零实数，$A=\{x\mid x\in R$ 且 $m\mid x(m$ 整除 $x)\}$，Z 为整数集合。试证明：$\langle A;+\rangle\cong\langle Z;+\rangle$。

证明 作 $h:A\to Z$ 为 $h(x)=\frac{x}{m}$，$\forall x\in A$，显然 h 是 A 到 Z 的函数。对任意 $x,y\in A$，若 $x\neq y$，则 $\frac{x}{m}\neq\frac{y}{m}$，从而 h 是单射；对任意 $k\in Z$，存在 $km\in A$，使得 $h(km)=k$，因此 h 是满射。故 h 是双射。对任意 $x,y\in A$，因 $h(x+y)=\frac{x+y}{m}=\frac{x}{m}+\frac{y}{m}=h(x)+h(y)$，故 h 是同态映射。所以 h 是 $\langle A;+\rangle$ 到 $\langle Z;+\rangle$ 的同构映射，即 $\langle A;+\rangle\cong\langle Z;+\rangle$。

10. 设有代数系统 $\langle Z;\cdot\rangle$，其中 Z 是整数集，$\cdot$ 为数的乘法运算，规定 $f:Z\to Z$ 为 $\forall x\in Z$，$f(x)=2x$，试问 f 是 $\langle Z;\cdot\rangle$ 上的自同态映射吗？

解 显然 f 是 Z 上的函数，对任意 $x,y\in Z$，有 $f(x\cdot y)=2(x\cdot y)=2xy$，而 $f(x)\cdot f(y)=(2x)\cdot(2y)=4xy$，当 $x\neq 0$ 或 $y\neq 0$ 时，$f(x\cdot y)\neq f(x)\cdot f(y)$，即 f 不是 $\langle Z;\cdot\rangle$ 上的自同态映射。

11. 设有代数系统 $\langle Z;+\rangle$，其中 Z 是整数集，$+$ 为数的加法运算，规定 $f:Z\to Z$ 为 $\forall x\in Z$，$f(x)=-x$，试证明 f 是 $\langle Z;+\rangle$ 上的自同构映射。

证明 显然 f 是 Z 上的双射函数。对任意 $x,y\in Z$，有 $f(x+y)=-(x+y)=(-x)+(-y)=f(x)+f(y)$，所以 f 是 $\langle Z;+\rangle$ 到 $\langle Z;+\rangle$ 的同构映射，即 f 是 $\langle Z;+\rangle$ 上的自同构映射。

§5.3 半群与独异点

1. 设 P 为正整数集合，$\forall x,y\in P$，规定

(1) $x\circ y=\mathrm{GCD}(x,y)$ （x,y 的最大公因数）。 (2) $x*y=x^y$。

试问：$\langle P;\circ\rangle$ 和 $\langle P;*\rangle$ 是半群吗？

解 (1) 由于 $\forall x,y\in P$，$\mathrm{GCD}(x,y)\in P$ 且是 P 中的唯一数，于是 $\circ$ 是 P 上的二元运算。$\forall x,y,z\in P$，$(x\circ y)\circ z=\mathrm{GCD}(\mathrm{GCD}(x,y),z)=\mathrm{GCD}(x,\mathrm{GCD}(z,y))=x\circ(y\circ z)$，从而 $\circ$ 满足结合律，故 $\langle P;\circ\rangle$ 是半群。

(2) 由于 $\forall x,y\in P$，$x^y\in P$ 且是 P 中的唯一数，于是 $*$ 是 P 上的二元运算，但不满足结合律。例如 $(2*2)*3=2^2*3=4*3=4^3=64$，$2*(2*3)=2*2^3=2*8=2^8=256$，从而 $(2*2)*3\neq 2*(2*3)$，因此 $\langle P;*\rangle$ 不是半群。

2. 设 P 为正整数集合，$\forall x,y\in P$，规定 $x*y=\max(x,y)$，试问 $\langle P;*\rangle$ 是半群、独异点吗？

解 由于 $\forall x,y\in P$，$\max(x,y)\in P$ 且是 P 中的唯一数，于是 $*$ 是 P 上的二元运算。$\forall x,y,z\in P$，$(x*y)*z=\max(\max(x,y),z)=\max(x,\max(z,y))=x*(y*z)$，从而 $*$ 满足结合律，所以 $\langle P;*\rangle$ 是半群。由于 $\forall x\in P$，$x*1=\max(x,1)=x$，$1*x=\max(1,x)=x$，于是 1 是 P 中关于运算 $*$ 的幺元，因此，$\langle P;*\rangle$ 是独异点。

3. 设 $\langle S;*\rangle$ 是半群，对任意 $a,b\in S$，若 $a\neq b$，就有 $a*b\neq b*a$。试证明：

(1) 对任意 $a\in S$，必有 $a*a=a$。 (2) 对任意 $a,b\in S$，必有 $a*b*a=a$。

(3) 对任意 $a,b,c\in S$，必有 $a*b*c=a*c$。

证明 由题设可知，若 $a*b=b*a$，则必有 $a=b$。因为 $\langle S;*\rangle$ 是半群，所以 $*$ 满足结合律。

(1) 对任意 $a\in S$，因为 $(a*a)*a=a*(a*a)$，故 $a*a=a$。

(2) 对任意 $a,b\in S$，因为 $(a*b*a)*a=(a*b)*(a*a)=a*b*a=(a*a)*(b*a)=a*(a*(b*a))=a*(a*b*a)$，所以 $a*b*a=a$。

(3) 对任意 $a,b,c\in S$，因为 $(a*b*c)*(a*c)=(a*(b*c)*a)*c=a*c=a*(c*(a*b)*c)=(a*c)*((a*b)*c)=(a*c)*(a*b*c)$，所以 $a*b*c=a*c$。

4. 设 $\langle\{a,b\};*\rangle$ 是半群，且 $a*a=b$，试证明 $b*b=b$。

证明 因为 $b*b=(a*a)*b=a*(a*b)$，由于 $\langle\{a,b\};*\rangle$ 是半群，二元运算 $*$ 是封闭的，因此 $a*b$ 只能为 a 或 b。若 $a*b=a$，则 $b*b=a*(a*b)=a*a=b$；若 $a*b=b$，则 $b*b=a*(a*b)=a*b=b$。故不论 $a*b$ 为 a 还是为 b 都有 $b*b=b$。

5. 设 $\langle A;*\rangle$ 是半群，a 是 A 中的一个元素，使得对 A 中每一个元素 x，存在 $u,v\in A$ 满足 $a*u=v*a=x$，证明 A 中存在幺元。

证明 取 $a\in A$ 时，存在 $u_a,v_a\in A$，使得 $a*u_a=v_a*a=a$。因为 $\forall x\in A$，存在 $u,v\in A$ 满足 $a*u=v*a=x$，所以 $x*u_a=(v*a)*u_a=v*(a*u_a)=v*a=x$，因此 u_a 是 A 中关于 $*$ 的右幺元；$v_a*x=v_a*(a*u)=(v_a*a)*u=a*u=x$，因此 v_a 是 A 中关于 $*$ 的左幺元。故 $u_a=v_a$ 为 A 中关于 $*$ 的幺元。

6. 设 A 是任意一个集合，记 $A^A=\{f\mid f:A\to A\}$，即 A^A 是 A 上的所有函数的集合，$\circ$ 是函数的合成运算，证明 $\langle A^A;\circ\rangle$ 是独异点。

证明 $\forall f,g\in A^A$，有 $(f\circ g)(x)=g(f(x))$，$\forall x\in A$。因此 $f\circ g$ 仍是 A 上的函数，即 $f\circ g\in A^A$，故 $\circ$ 是上的二元运算。$\forall f,g,h\in A^A$，因为对任意的 $x\in A$ 有

$((f\circ g)\circ h)(x)=h((f\circ g)(x))=h(g(f(x)))=(g\circ h)(f(x))=(f\circ(g\circ h))(x)$，

故有 $(f\circ g)\circ h)=f\circ(g\circ h)$，因此 $\circ$ 在 A^A 上是可结合的，所以 $\langle A^A;\circ\rangle$ 是半群。设 $I_A\in A^A$ 是 A 上的恒等映射：$I_A(x)=x$，$\forall x\in A$。易证 $f\circ I_A=I_A\circ f=f$，$\forall f\in A^A$，即 I_A 是 A^A 中关于 $\circ$ 的幺元，故 $\langle A^A;\circ\rangle$ 是独异点。

7. 设 $\langle S;\circ;e\rangle$ 是独异点，令 $G=S^S$，对任意 $f,g\in G$，规定 $(f*g)(x)=f(x)\circ g(x)$，$\forall x\in S$。证明 $\langle G;*\rangle$ 是一个独异点。

证明 根据 $*$ 的定义，$\forall f,g\in G$，有 $f*g\in G$，故 $*$ 是 G 上的二元运算。$\forall f,g,h\in G$，因为对任意的 $x\in S$，都有

$$((f*g)*h)(x)=(f*g)(x)\circ h(x)=(f(x)\circ g(x))\circ h(x)$$
$$=f(x)\circ(g(x)\circ h(x))=f(x)\circ(g*h)(x)=(f*(g*h))(x),$$

故有 $(f*g)*h)=f*(g*h)$，因此 $*$ 在 G 上是可结合的，所以 $\langle G;*\rangle$ 是半群。定义 $E\in G$ 为：

$$E(x)=e,\ \forall x\in S。$$

则对任意 $f\in G$，由

$$(f*E)(x)=f(x)\circ E(x)=f(x)\circ e=f(x)$$
$$=e\circ f(x)=E(x)\circ f(x)=(E*f)(x),\ \forall x\in S,$$

得 $f*E=E*f=f$，所以 E 是 G 中的幺元，故 $\langle G;*\rangle$ 是独异点。

8. 设 $\langle S;*\rangle$ 是一个半群，$G=\{f_a\mid a\in S, f_a(x)=a*x,\ \forall x\in S\}$，证明 $\langle G;\circ\rangle$ 是 $\langle S^S;\circ\rangle$ 的子半群，这里 $\circ$ 是函数的合成。

证明 由第 6 题知，$\langle S^S;\circ\rangle$ 是半群，G 是 S^S 的非空子集，只需验证运算 $\circ$ 在 G 上是封闭的即可。$\forall a,b\in S$，对任意 $x\in S$，$(f_a\circ f_b)(x)=f_b(f_a(x))=f_b(a*x)=b*(a*x)=(b*a)*x$，因 $\langle S;*\rangle$ 是半群，所以 $b*a\in S$，从而 $f_a\circ f_b=f_{b*a}\in G$，所以 $\circ$ 在 G 上是

封闭的。从而,$\langle G;\circ\rangle$是$\langle S^S;\circ\rangle$的子半群。

9. 设$\langle M;*;e\rangle$是独异点,试证明M中所有左(右)可消去元的集合构成一个子独异点。

证明 设S为M中所有左可消去元的集合,显然$e\in S$,因此S非空。对任意$a,b\in S$,$\forall x,y\in M$,若$(a*b)*x=(a*b)*y$,由于$\langle M;*;e\rangle$是独异点,所以$*$满足结合律,从而得到$a*(b*x)=a*(b*y)$。由于a是左可消去元,所以$b*x=b*y$,又由于b也是左可消去元,所以$x=y$。故$a*b$是左可消去元,即$a*b\in S$。因此$\langle S;*;e\rangle$是$\langle M;*;e\rangle$的子独异点。

同理可证,M中所有右可消去元的集合构成一个子独异点。

10. 设$\langle M;*;e\rangle$是独异点,试证明M中所有左(右)可逆元的集合构成一个子独异点。

证明 设S为M中所有右可逆元的集合,显然$e\in S$,因此S非空。对任意$a,b\in S$,设a,b的右逆元分别为a_r^{-1},b_r^{-1}。由于$\langle M;*;e\rangle$是独异点,所以$*$满足结合律。因为

$$(a*b)*(b_r^{-1}*a_r^{-1})=a*(b*b_r^{-1})*a_r^{-1}=a*e*a_r^{-1}=a*a_r^{-1}=e,$$

即$b_r^{-1}*a_r^{-1}$是$a*b$的右逆元,故$a*b\in S$。因此$\langle S;*;e\rangle$是$\langle M;*;e\rangle$的子独异点。

同理可证,M中所有左可逆元的集合构成一个子独异点。

11. 设$\langle S;*\rangle$是半群,若S是有限集合,则S中必存在幂等元。

证明 因为$\langle S;*\rangle$是半群,所以对任意的元素$b\in S$,$b*b=b^2\in S$,$b^2*b=b^3\in S$,…,又因为S是有限集合,故必存在正整数i,j,且$i<j$,使得$b^i=b^j$,故有$b^i=b^i*b^{j-i}$,令$p=j-i$,则$p\geqslant 1$,$b^i=b^i*b^p$,因此,只要$q\geqslant i$,总有$b^q=b^q*b^p$。因$p\geqslant 1$,故存在正整数k使得$kp\geqslant i$。于是

$$b^{kp}=b^{kp}*b^p=(b^{kp}*b^p)*b^p=b^{kp}*b^{2p}=(b^{kp}*b^p)*b^{2p}=b^{kp}*b^{3p}=\cdots=b^{kp}*b^{kp}。$$

取$a=b^{kp}$,则有$a*a=a$,即a是S中的幂等元。

12. 设$\langle S;*;e\rangle$是可交换独异点,则S中所有幂等元组成的集合T构成一个子独异点$\langle T;*\rangle$。

证明 显然,幺元e是幂等元,所以$e\in T$,因此T非空。$\forall a,b\in T$,由于$*$可交换,于是有

$$(a*b)*(a*b)=a*(b*a)*b=a*(a*b)*b=(a*a)*(b*b)=a*b,$$

因此$a*b$是幂等元,即$a*b\in T$,故$\langle T;*;e\rangle$是$\langle S;*;e\rangle$的子独异点。

13. 设f是半群$\langle S;*\rangle$到半群$\langle T;\circ\rangle$的同态,若S中有幂等元,则T中也有幂等元。

证明 设a是S中的幂等元,因f是半群$\langle S;*\rangle$到半群$\langle T;\circ\rangle$的同态,所以$f(a)\in T$,且

$$f(a)=f(a*a)=f(a)\circ f(a),$$

因此$f(a)$是T中的幂等元。

§5.4 群　论

1. 举两个是独异点,但不是群的例子。

解 (1) $\langle R;\times\rangle$,其中R是实数集合,$\times$为数的乘法运算。显然R对$\times$封闭,$\times$满足结合律,R中关于$\times$的幺元为1,因此$\langle R;\times\rangle$是独异点,但0是R中关于$\times$的零元,而零元无逆元,因此R中有些元素不存在逆元,所以$\langle R;\times\rangle$不是群。

(2) $\langle M_n(Q);\cdot\rangle$,其中$M_n(Q)$为全体$n\times n$有理数矩阵的集合,$\cdot$为矩阵的乘法运算。显然$M_n(Q)$对$\cdot$封闭,$\cdot$满足结合律,$M_n(Q)$中关于的幺元是$n$阶单位矩阵,因此是独异点。但是$M_n(Q)$中所有行列式值为0的矩阵都无逆矩阵,即$M_n(Q)$中有些元素不存

在逆元，所以 $M_n(Q)$不是群。

2. 设 Z 为整数集，$*$ 为对任意 $a,b\in Z$，$a*b=a+b-2$，这里 $+$、$-$ 为数的加法和减法运算。证明：$\langle Z;*\rangle$是一个群。

证明 $\forall a,b\in Z$，$a*b=a+b-2\in Z$ 并且是 Z 中唯一的数，于是 $*$ 是 Z 上的二元运算。

$\forall a,b,c\in Z$，$(a*b)*c=(a+b-2)*c=(a+b-2)+c-2$

$=a+(b+c-2)-2=a+(b*c)-2=a*(b*c)$，

所以 $*$ 满足结合律。

存在 $2\in Z$，使得 $\forall a\in Z$，有 $a*2=2*a=a+2-2=a$，故$\langle Z;*\rangle$的幺元为 2。$\forall a\in Z$，存在 $4-a\in Z$，使得 $a*(4-a)=(4-a)*a=a+4-a-2=2$，故 a 的逆元为 $4-a$。因此 Z 中每个元素都有逆元存在，所以$\langle Z;*\rangle$是一个群。

3. 证明：群 G 是交换群，当且仅当对任意 $a,b\in G$，有$(ab)^2=a^2b^2$。

证明 设 G 是交换群，$\forall a,b\in G$，$(ab)^2=(ab)(ab)=a(ba)b=a(ab)b=(aa)(bb)=a^2b^2$；反之，设 $\forall a,b\in G$，有$(ab)^2=a^2b^2$，即$(ab)(ab)=a^2b^2$，由结合律得 $a(ba)b=a^2b^2$，由于群中每个元素都是可消去的，于是有 $ba=ab$，故 G 是交换群。

4. 设 G 是一个群，并且对任意 $a,b\in G$ 都有$(ab)^3=a^3b^3$，$(ab)^5=a^5b^5$，证明 G 是交换群。

证明 $\forall a,b\in G$，由 $a^3b^3=(ab)^3=a(ba)^2b$，得 $a^2b^2=(ba)^2$。由 $a^5b^5=(ab)^5=a(ba)^4b$，得 $a^4b^4=(ba)^4$。而$(ba)^4=(ba)^2(ba)^2=(a^2b^2)(a^2b^2)$，从而 $a^4b^4=a^2(b^2a^2)b^2$，因此 $a^2b^2=b^2a^2$。所以$(ba)^2=b^2a^2$，由第 3 题可知，G 是交换群。

5. 设$\langle S;*\rangle$是半群，若 S 是有限集且 $*$ 满足消去律，则$\langle S;*\rangle$是群。

证明 设 S 是由 n 个元素所组成的集合，不妨设 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。令

$$S'=aS=\{a*a_1,a*a_2,\cdots,a*a_n\},$$

这里，a 是 S 中的任意元素。由运算 $*$ 的封闭性可知 $S'\subseteq S$。由消去律得，当 $i\neq j$ 时，必有 $a*a_i\neq a*a_j$。从而知道 S' 中同样有 n 个不同的元素，即有 $S'=S$。因此，对于 S 中的任意元素 b，在 S' 中必有 $a*a_k$，使得 $a*a_k=b$，即 a_k 是 $a*y=b$ 的唯一解。

同理可证，$x*a=b$ 有唯一解。（作集合 $T=Sa=\{a_1*a,a_2*a,\cdots,a_n*a\}$）

由定理 5.4-3 可知，G 是群。

6. 证明：如果群 G 的每一个元素 a 都满足 $a^2=e$，则 G 是交换群，其中 e 是群 G 的幺元。

证明 **方法一** $\forall x\in G$，有 $x^2=e$，从而 $x^{-1}=x$，即每个元素的逆元均为自身。$\forall x,y\in G$，$(xy)^2=e$，从而 $xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$，因此 G 是交换群。

方法二 $\forall x,y\in G$，$xy=xey=x(xy)^2y=x(xy)(xy)y=x^2yxy^2=yx$，因此 G 是交换群。

7. 设 G 是一个群，n 是整数，证明：对任意 $a,b\in G$，有$(a^{-1}ba)^n=a^{-1}b^na$。

证明 当 n 为正整数时，

$(a^{-1}ba)^n=(a^{-1}ba)(a^{-1}ba)\cdots(a^{-1}ba)=a^{-1}b(aa^{-1})b(aa^{-1})\cdots(aa^{-1})b(aa^{-1})ba$

$=a^{-1}bebe\cdots ebeba=a^{-1}b^na$；

当 $n=0$ 时，$(a^{-1}ba)^0=e=a^{-1}b^0a$；

当 n 为负整数时，令 $n=-k$，

$(a^{-1}ba)^n=(a^{-1}ba)^{-k}=((a^{-1}ba)^{-1})^k=(a^{-1}b^{-1}a)^k=a^{-1}(b^{-1})^ka=a^{-1}b^{-k}a=a^{-1}b^na$。

8. 设 G 是一个群，e 是幺元，$a,b,c\in G$。证明：

(1) a，a^{-1}和 $b^{-1}ab$ 的周期相同。　　(2) ab 和 ba 的周期相同。

(3) abc,bca 和 cab 的周期相同。

证明 (1) 因为对于任意整数 k,$a^k=e$,则 $(a^{-1})^k=e$,由此可知,a 的周期是无限的当且仅当 a^{-1} 的周期是无限的。又可知,若 a 的周期为 n,a^{-1} 的周期为 m,由定理 5.4.1-5 得,$m|n$,$n|m$,所以,$n=m$。

由第 6 题知,对任意整数 n,$(b^{-1}ab)^n=b^{-1}a^nb$。于是 $(b^{-1}ab)^n=e \Leftrightarrow b^{-1}a^nb=e \Leftrightarrow a^n=e$,从而 $b^{-1}ab$ 和 a 的周期相同。

(2) 假设 ab、ba 的周期分别为 m 和 n。$(ba)^{m+1}=(ba)(ba)\cdots(ba)=b(ab)^ma=bea=ba$,从而 $(ba)^m=e$,于是 $n|m$。$(ab)^{n+1}=(ab)(ab)\cdots(ab)=a(ba)^nb=aeb=ab$,从而 $(ab)^n=e$,于是 $m|n$。所以,$m=n$。

(3) 由(2)知,$abc=a(bc)$ 和 $bca=(bc)a$ 的周期相同,$abc=(ab)c$ 和 $cab=c(ab)$ 的周期相同。从而,abc,bca 和 cab 的周期相同。

9. 证明:在有限群中周期大于 2 的元素的个数必定是偶数。

证明 由第 8 题知,群的元素 a 和 a^{-1} 的周期相同。如果 b 是周期大于 2 的元素,则 $b^{-1}\neq b$,因为如果 $b^{-1}=b$,从而 $b^2=e$,这与 b 的周期大于 2 矛盾。由于群的元素的逆元是唯一的,故不同的元素有不同的逆元。因此,周期大于 2 的元素与它的逆元成对出现,所以有限群中,周期大于 2 的元素的个数为偶数。

10. 偶数阶群中至少有一个周期为 2 的元素。

证明 由第 9 题知,有限群中,周期大于 2 的元素的个数为偶数。群的幺元的周期为 1,群的阶又是偶数,因此,至少存在一个周期为 2 的元素。

11. 设群 G 不是交换群,则 G 中存在两个非幺元的元素 a,b,$a\neq b$,使得 $ab=ba$。

证明 首先证明存在 $a\in G$ 使得 $a^{-1}\neq a$。事实上,如果 $\forall x\in G$,都有 $x^{-1}=x$,则 $\forall x,y\in G$,有 $xy=(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}=yx$,这与 G 不是交换群矛盾。设 $a\in G$,$a^{-1}\neq a$,令 $b=a^{-1}$,则有 $a\neq b$,$a\neq e$,$b\neq e$,$ab=ba$。

12. 设 H_1 和 H_2 都是群 G 的子群,则 $H=H_1\cap H_2$ 也是 G 的子群。问 $H_1\cup H_2$ 是 G 的子群吗?

证明 设群 G 的幺元为 e,由于 H_1 和 H_2 都是群 G 的子群,所以 $e\in H_1$,$e\in H_2$,从而 $e\in H$,因此 H 非空。$\forall a,b\in H$,则 $a,b\in H_1$,$a,b\in H_2$,因 H_1 和 H_2 都是 G 的子群,所以 $ab^{-1}\in H_1$,$ab^{-1}\in H_2$,所以 $ab^{-1}\in H$,由定理 4.5.1-7 可知 H 是 G 的子群。

H_1 和 H_2 都是群 G 的子群,$H_1\cup H_2$ 不一定是 G 的子群。例如 $\langle \underline{6};+_6\rangle$ 是一个群,$\langle\{0,2,4\};+_6\rangle$ 和 $\langle\{0,3\};+_6\rangle$ 都是 $\langle \underline{6};+_6\rangle$ 的子群,但 $\langle\{0,2,3,4\};+_6\rangle$ 不是 $\langle \underline{6};+_6\rangle$ 的子群,因为 $2+_6 3=5\overline{\in}\{0,2,3,4\}$。

13. 设 H 和 K 都是群 G 的子群,令 $HK=\{xy|x\in H,y\in K\}$,证明 HK 是 G 的子群当且仅当 $HK=KH$。

证明 必要性:假设 $HK=KH$,因 H 和 K 都是群 G 的子群,所以 $e\in H$,$e\in K$,从而 $e=ee\in HK$,于是 HK 非空。对任意 $x=hk\in HK$,$y=h_1k_1\in HK$,这里 $h,h_1\in H$,$k,k_1\in K$,有 $xy^{-1}=(hk)(h_1k_1)^{-1}=h(kk_1{}^{-1})h_1{}^{-1}$。记 $k_2=kk_1{}^{-1}\in K$。由 $HK=KH$,存在 $h_3\in H$,$k_3\in K$,使得 $k_2h_1{}^{-1}=h_3k_3$。从而 $xy^{-1}=(hh_3)k_3\in HK$,由定理 4.5.1-7 可知 HK 是 G 的子群。

充分性:假设 HK 是 G 的子群,$\forall x\in HK$,有 $x^{-1}\in HK$。于是存在 $h\in H$,$k\in K$,使得 $x^{-1}=hk$,从而 $x=k^{-1}h^{-1}$,而 $k^{-1}\in K$,$h^{-1}\in H$,故 $x\in KH$,因此 $HK\subseteq KH$。同理可证,$KH\subseteq HK$。从而 $HK=KH$。

14. 设 G 是一个群,证明:映射 $f:G\to G$ 为 $\forall x\in G$,$f(x)=x^{-1}$ 是 G 的自同构当且仅当 G 是交换

群。

证明 充分性：假设 G 是交换群。显然 f 是双射。$\forall a,b\in G$，$f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}=f(a)f(b)$，于是 f 是 G 上的自同构。

必要性：假设 f 是 G 上的自同构，$\forall a,b\in G$，

$ab=(b^{-1}a^{-1})^{-1}=f(b^{-1}a^{-1})=f(b^{-1})f(a^{-1})=(b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}=ba$，因此 G 是交换群。

15. 设 f 是 G 到 H 的群同态，对于某个 $g\in G$，$f(g)=h$，试问：g 与 h 的周期是否一定相同？如果不同，它们之间有何关系？

解 g 与 h 的周期不一定相同。例如 $G=\{1,-1,i,-i\}$，$H=\{1\}$，$\times$ 是数的乘法，$\langle G;\times\rangle$ 和 $\langle H;\times\rangle$ 都是群，作 $f:G\to H$ 为 $\forall x\in G$，$f(x)=1$，显然 f 是同态映射，而 H 中的元素的周期为 1，G 中的元素 1、-1、i、$-i$ 的周期分别为 1、2、4、4。

假设 g、h 的周期分别为 m 和 n，G、H 中的幺元分别为 e_G 和 e_H，由于 f 是同态，因此 $f(e_G)=e_H$，从而 $f(e_G)=f(g^m)=(f(g))^m$，由定理 5.4.1-5 可知，$n|m$。

16. 设 G 是一个群，R 是集合 G 上的等价关系，并且对任意 $a,x,y\in G$，$\langle ax,ay\rangle\in R\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R$。证明 $H=\{x|x\in G$ 且 $\langle x,e\rangle\in R\}$ 是 G 的子群，其中 e 为 G 的幺元。

证明 显然 $e\in H$，故 H 非空。对任意 $x,y\in H$，$\langle x,e\rangle\in R,\langle y,e\rangle\in R\Rightarrow\langle x,e\rangle\in R,\langle e,y\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\Rightarrow\langle yx^{-1}x,x\rangle\in R\Rightarrow\langle yx^{-1}x,ex\rangle\in R\Rightarrow\langle yx^{-1},e\rangle\in R\Rightarrow$
$\langle yx^{-1}e,yx^{-1}(yx^{-1})^{-1}\rangle\in R\Rightarrow\langle e,(yx^{-1})^{-1}\rangle\in R\Rightarrow\langle(yx^{-1})^{-1},e\rangle\in R\Rightarrow\langle xy^{-1},e\rangle\in R$，所以 $xy^{-1}\in H$，故 H 是 G 的子群。

17. 设 $G=\langle a\rangle$ 是以 a 为生成元的 n 阶循环群。若 r 与 n 的最大公约数是 d，问 a^r 的周期是多少？由此看来，G 中哪些元素可以作为生成元？

解 记 $n=md$，$r=td$。设 a^r 的周期为 k。则 $(a^r)^k=e$，于是 $n|rk$，从而 $m|tk$。而 d 是 n 和 r 的最大公约数，故 m 和 t 互质，从而得到 $m|k$，即 k 必为 m 的整数倍。又 $(a^r)^m=a^{rm}=a^{tdm}=a^{tn}=(a^n)^t=e$，故的周期为 m。

由上可知，a^r 是生成元 $\Leftrightarrow m=n\Leftrightarrow d=1\Leftrightarrow r$ 与 n 互质，即 a^r 是生成元的充分必要条件是 r 与 n 互质。

18. 证明由 1 的 n 次复根的全体所组成的集合与数的乘法构成一个 n 阶循环群。

证明 由代数的知识可知，1 的 n 次复根的全体所组成的集合为 $G=\{e^{\frac{2k\pi}{n}i}|k=0,1,2,\cdots,n-1\}$，$\forall e^{\frac{2p\pi}{n}i},e^{\frac{2q\pi}{n}i}\in G$，$p,q\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，$e^{\frac{2p\pi}{n}i}\times e^{\frac{2q\pi}{n}i}=e^{\frac{2(p+q)\pi}{n}i}$，若 $p+q<n$，则 $e^{\frac{2(p+q)\pi}{n}i}\in G$；若 $p+q\geqslant n$，则存在 $k\in\{0,1,2,\cdots,n-1\}$，使得 $p+q=n+k$，而 $e^{\frac{2(p+q)\pi}{n}i}=e^{\frac{2(n+k)\pi}{n}i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$。因此，$G$ 关于数的乘法是封闭的。数的乘法运算满足结合律，$1=e^{\frac{2\times0\times\pi}{n}i}$ 是 G 的幺元，因为 $\forall e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$，$1\times e^{\frac{2k\pi}{n}i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}\times1=e^{\frac{2(k+0)\pi}{n}i}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$。$\forall e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$，都存在 $e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}\in G$，使得 $e^{\frac{2k\pi}{n}i}\times e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}=e^{\frac{2(n-k)\pi}{n}i}\times e^{\frac{2k\pi}{n}i}=e^{2\pi i}=e^{0\pi i}=e^{\frac{2\times0\times\pi}{n}i}$，所以 $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ 的逆元存在。故 $\langle G;\times\rangle$ 是一个群。$e^{\frac{2\pi}{n}i}\in G$，$\forall e^{\frac{2k\pi}{n}i}\in G$，都有 $e^{\frac{2k\pi}{n}i}=\left[e^{\frac{2\pi}{n}i}\right]^k$，故 $e^{\frac{2\pi}{n}i}$ 是群 G 的一个生成元，因此 G 是循环群。

19. 设 G 是一个群，$a,b\in G$，a 的周期为质数 p，且 $a\overline{\in}\langle b\rangle$。证明 $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle=\{e\}$。

证明 **方法一** 假设不然，则存在 $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$，且 $x\neq e$。那么存在 $j,k\in Z$，使得 $x=a^j=b^k$，且 $1\leqslant j<p$。由于 p 是质数，故存在 $m,n\in Z$，使得 $mj+np=1$。于是 $a=a^{mj+np}=a^{mj}=b^{mk}$，因此 $a\in\langle b\rangle$，矛盾。

方法二 假设不然，则存在 $x\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$，且 $x\neq e$。于是 x 也是 $\langle a\rangle$ 的生成元，从而

$\langle x\rangle=\langle a\rangle\subseteq\langle b\rangle$，因此 $a\in\langle b\rangle$，矛盾。

20. 设 $G=\langle a\rangle$ 是以 a 为生成元的 n 阶循环群，若 m 与 n 的最大公约数为 d，则 $\langle a^m\rangle=\langle a^d\rangle$。

证明 因为 $d|m$，所以有 $a^m\in\langle a^d\rangle$，从而 $\langle a^m\rangle\subseteq\langle a^d\rangle$。因为 d 是 m 与 n 的最大公约数，存在 $j,k\in Z$，使得 $jn+km=d$。于是，$a^d=a^{jn+km}=a^{km}\in\langle a^m\rangle$，从而 $\langle a^d\rangle\subseteq\langle a^m\rangle$。故 $\langle a^m\rangle=\langle a^d\rangle$。

21. 设 $A=\langle a^s\rangle$，$B=\langle a^t\rangle$ 是循环群 $G=\langle a\rangle$ 的两个子群。证明：$A\cap B=\langle a^m\rangle$，这里 m 是 s 与 t 的最小公倍数，即 $m=\mathrm{LCM}(s,t)$。

证明 因为 $m=\mathrm{LCM}(s,t)$，所以 $s|m \Rightarrow a^m\in\langle a^s\rangle \Rightarrow \langle a^m\rangle\subseteq\langle a^s\rangle$，由 $t|m \Rightarrow a^m\in\langle a^t\rangle \Rightarrow \langle a^m\rangle\subseteq\langle a^t\rangle$，得 $\langle a^m\rangle\subseteq\langle a^s\rangle\cap\langle a^t\rangle$。下面分两种情况证明 $\langle a^s\rangle\cap\langle a^t\rangle\subseteq\langle a^m\rangle$：

(1) G 是无限循环群时，$\forall x\in\langle a^s\rangle\cap\langle a^t\rangle$，存在 $p,q\in Z$，使得 $x=a^{sp}=a^{tq}$。因 G 是无限循环群，必有 $sp=tq=c$。所以 $s|c$，$t|c$，因此 $m|c$，于是 $x=a^c\in\langle a^m\rangle$，故 $\langle a^s\rangle\cap\langle a^t\rangle\subseteq\langle a^m\rangle$。

(2) G 是 n 阶循环群时，设 $p=\mathrm{GCD}(n,s)$，$q=\mathrm{GCD}(n,t)$，$r=\mathrm{GCD}(n,m)$。由第 20 题可知：$\langle a^s\rangle=\langle a^p\rangle$，$\langle a^t\rangle=\langle a^q\rangle$，$\langle a^m\rangle=\langle a^r\rangle$。故只需证 $\langle a^p\rangle\cap\langle a^q\rangle\subseteq\langle a^r\rangle$。因为 $\mathrm{GCD}(n,\mathrm{LCM}(s,t))=\mathrm{LCM}(\mathrm{GCD}(n,s),\mathrm{GCD}(n,t))$，故有 $r=\mathrm{LCM}(p,q)$。$\forall x\in\langle a^p\rangle\cap\langle a^q\rangle$，由于 p,q 都是 n 的因子，故存在 $i,j\in Z$，使得 $x=a^{pi}=a^{qj}$，且 $0\leqslant pi,qj<n$。必有 $pi=qj=c$。于是 $p|c$，$q|c$，因此 $r|c$，从而 $x=a^c\in\langle a^m\rangle$，故 $\langle a^s\rangle\cap\langle a^t\rangle\subseteq\langle a^m\rangle$。

22. 设置换 $S=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&5&1\end{pmatrix}$，$T=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&5&1&4&3\end{pmatrix}$，求 S^2,ST,TS,S^{-1},T^{-1}。

解 $S^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&3&1&2\end{pmatrix}$；$ST=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&4&1&3&2\end{pmatrix}$；

$TS=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&2&5&3\end{pmatrix}$；$S^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&3&2&4\end{pmatrix}$；$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&5&4&2\end{pmatrix}$。

23. 将下列置换分解为轮换和对换的乘积：

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&6&3&2&4\end{pmatrix}$。　　(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&3&1&2&5\end{pmatrix}$。

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&6&1&4&5\end{pmatrix}$。

解 (1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&1&6&3&2&4\end{pmatrix}=(1\ 5\ 2)(3\ 6\ 4)=(1\ 5)(1\ 2)(3\ 6)(3\ 4)$。

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&6&3&1&2&5\end{pmatrix}=(1\ 4)(2\ 6\ 5)=(1\ 4)(2\ 6)(2\ 5)$。

(3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&2&6&1&4&5\end{pmatrix}=(1\ 3\ 6\ 5\ 4)=(1\ 3)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)$。

24. 给出 S_3 的运算表。

解 S_3 中共有 6 个元素，令 $S_3=\{e,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，下面以轮换的形式给出 S_3 中的诸元素：$e=(1)$，$a_1=(1\ 2)$，$a_2=(1\ 3)$，$a_3=(2\ 3)$，$a_4=(1\ 2\ 3)$，$a_5=(1\ 3\ 2)$。由于置换的乘积就是函数的合成，任意得到的运算表如表 5.4-1 所示。

表 5.4-1

$\circ$	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
e	e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	a_1	e	a_4	a_5	a_2	a_3
a_2	a_2	a_5	e	a_4	a_3	a_1
a_3	a_3	a_4	a_5	e	a_1	a_2
a_4	a_4	a_3	a_1	a_2	a_5	e
a_5	a_5	a_2	a_3	a_1	e	a_4

25. 设 p 是质数，a 是整数且 p 不整除 a，则 $a^{p-1}\equiv1(\mathrm{mod}\ p)$。这是数论中著名的费尔马(Fermat)定理。

证明 因 p 是质数，a 是整数且 p 不整除 a，那么存在一个整数 b，$1\leqslant b\leqslant p-1$，使得 $a=b(\mathrm{mod}\ p)$。考虑 $p-1$ 阶模 p 乘法群 $\langle \underline{p}-\{0\};\times_p\rangle$，事实上，$\underline{p}-\{0\}$ 关于 $\times_p$ 是封闭的，$\times_p$ 满足结合律，1 是 $\underline{p}-\{0\}$ 中的幺元，$\forall x\in \underline{p}-\{0\}$，由于 p 是质数，存在 $n,m\in Z$，使得 $mx+np=1$，令 $c=m(\mathrm{mod}\ p)$，显然 $c\in \underline{p}-\{0\}$，从而 $c\times_p x=x\times_p c=1$，即 $\underline{p}-\{0\}$ 中每个元素都有逆元，故 $\langle \underline{p}-\{0\};\times_p\rangle$ 是群。设 b 的周期为 k，由拉格朗日定理可知，$k|p-1$，即存在 $d\in \underline{p}-\{0\}$，使得 $kd=p-1$，因此 $a^{p-1}=b^{p-1}(\mathrm{mod}\ p)=b^{kd}(\mathrm{mod}\ p)=1(\mathrm{mod}\ p)$。

26. 设 G 和 H 分别是 m 阶和 n 阶群，若 G 到 H 存在单一同态，则 $m|n$。

证明 设 g 是群 G 到 H 的单一同态，则 g 的同态象 $g(G)$ 是 H 的子群，显然 g 是 G 到 $g(G)$ 的双射，于是 $g(G)$ 是一个 m 阶群，由拉格朗日定理可知，$m|n$。

27. 求 12 阶循环群 $G=\{e,c,c^2,c^3,c^4,c^5,\cdots,c^{11}\}$ 的子群 $H=\{e,c^4,c^8\}$ 在 G 中的所有左陪集。

证明 $H=eH$ 是一个左陪集；取 $c\in G$ 且 $c\overline{\in}H$，则 $cH=\{c,c^5,c^9\}$ 又是一个左陪集；取不属于 $H\cup cH$ 的 G 中的元素，如 c^2，则 $c^2H=\{c^2,c^6,c^{10}\}$ 又是一个左倍集；取不属于 $H\cup cH\cup c^2H$ 的 G 中的元素，如 c^3，则 $c^3H=\{c^3,c^7,c^{11}\}$ 又是一个左陪集。于是 $G=H\cup cH\cup c^2H\cup c^3H$，即 H 在 G 中的所有左陪集有 H、cH、c^2H、c^3H。

28. 设 H 是群 G 的子群，试证明 H 在 G 的所有左(右)陪集中有且仅有一个是 G 的子群。

证明 设 G 的幺元为 e，则 $eH=H$ 是 G 的一个子群。因为 H 在 G 中的任意两个左陪集要么完全相同，要么不相交，故其他左陪集均不含幺元 e。而子群的幺元只能是群 G 的幺元，故除 H 之外，其他左陪集均不是 G 的子群。

29. 设 H 和 K 是群 G 的两个子群，若 H 和 K 中有一个是 G 的正规子群，则 $HK=KH$。

证明 不妨设 H 是 G 的正规子群，$\forall xy\in HK$，即 $x\in H$，$y\in K$。由于 H 是 G 的正规子群，所以 $y^{-1}xy=x_1\in H$，从而 $xy=yy^{-1}xy=yx_1\in KH$，故 $HK\subseteq KH$。$\forall xy\in KH$，即 $x\in K$，$y\in H$。由于 H 是 G 的正规子群，所以 $xyx^{-1}=y_1\in H$，从而 $xy=xyx^{-1}x=y_1x\in HK$，故 $KH\subseteq HK$。因此，$KH=HK$。

30. 设 H 是群 G 的子群，对任何给定的 $g\in G$，$g^{-1}Hg=\{g^{-1}hg|h\in H\}$ 是 G 的子群。并且 H 是 G 的正规子群当且仅当 $\forall g\in G$，$g^{-1}Hg=H$。

证明 $\forall x,y\in g^{-1}Hg$，存在 $h_1,h_2\in H$，使得 $x=g^{-1}h_1g$，$y=g^{-1}h_2g$，于是

$$xy^{-1}=(g^{-1}h_1g)(g^{-1}h_2g)^{-1}=(g^{-1}h_1g)(g^{-1}h_2{}^{-1}g)=g^{-1}h_1(gg^{-1})h_2{}^{-1}g$$
$$=g^{-1}h_1h_2{}^{-1}g\in g^{-1}Hg,$$

所以，$g^{-1}Hg$ 是 G 的子群。

假设 H 是 G 的正规子群，即 $\forall g\in G$，$gH=Hg$。则 $g^{-1}Hg=g^{-1}(Hg)=g^{-1}(gH)=(g^{-1}g)H=H$。

假设 $\forall g\in G$，$g^{-1}Hg=H$，则 $gH=g(g^{-1}Hg)=(gg^{-1})Hg=Hg$，于是 H 是 G 的正规子群。

§5.5 格与布尔代数

1. 试问：图 5.5-1 所示的偏序集中，哪些是格？为什么？

解 (a)不是格，因为 a、d 没有最小上界；(b)、(c)、(d)都是格，因为任何两个元素都有最大下界和最小上界；(e)不是格，因为 g、h 没有最大下界。

2. 设 $\langle L;\leqslant\rangle$ 是一个格，其哈斯图如图 5.5-2 所示，取

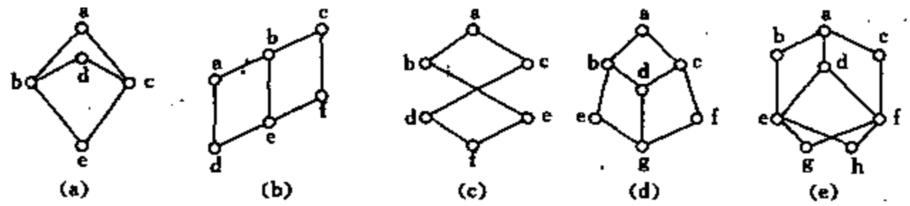


图 5.5-1

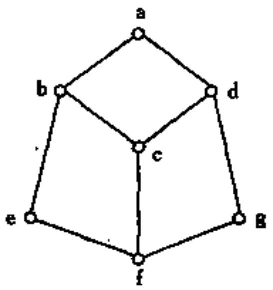


图 5.5-2

$S_1=\{a,b,c,d\}$，$S_2=\{a,b,d,f\}$，

$S_3=\{c,d,e,f\}$，$S_4=\{a,b,f,g\}$，

试问$\langle S_1;\leqslant\rangle$、$\langle S_2;\leqslant\rangle$、$\langle S_3;\leqslant\rangle$、$\langle S_4;\leqslant\rangle$中哪些是格？哪些是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格？

解 对S_1中的任意两个元素，它们在S_1中都有最大下界和最小上界，并且它们在S_1中的最大下界和最小上界与在L中的最大下界和最小上界相同，故$\langle S_1;\leqslant\rangle$是格并且是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格。

对S_2中的任意两个元素，它们在S_2中都有最大下界和最小上界，但它们在S_2中的最大下界和最小上界与在L中的最大下界和最小上界不同，故$\langle S_2;\leqslant\rangle$是格但不是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格。

因为$\{e,d\}$在S_3中无最小上界，故$\langle S_3;\leqslant\rangle$不是格。

对S_4中的任意两个元素，它们在S_4中都有最大下界和最小上界，并且它们在S_4中的最大下界和最小上界与在L中的最大下界和最小上界相同，故$\langle S_4;\leqslant\rangle$是格并且是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格。

3. 设$\langle L;\leqslant\rangle$是格，其自然运算中的保交和保联分别为$\wedge$和$\vee$，则对任意$a,b,c,d\in L$，有

(1) $(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant(a\vee c)\wedge(b\vee d)$。

(2) $(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$。

证明 (1) 因$a\wedge b\leqslant a$，$c\wedge d\leqslant c$，所以$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant a\vee c$。因$a\wedge b\leqslant b$，$c\wedge d\leqslant d$，所以$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant b\vee d$。因此$(a\wedge b)\vee(c\wedge d)\leqslant(a\vee c)\wedge(b\vee d)$。

(2) 因$a\wedge b\leqslant a$，$b\wedge c\leqslant b$，$c\wedge a\leqslant a$，所以$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant a\vee b$。因$a\wedge b\leqslant b$，$b\wedge c\leqslant c$，$c\wedge a\leqslant c$，所以$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant b\vee c$。因$a\wedge b\leqslant a$，$b\wedge c\leqslant c$，$c\wedge a\leqslant c$，所以$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant a\vee c$。故$(a\wedge b)\vee(b\wedge c)\vee(c\wedge a)\leqslant(a\vee b)\wedge(b\vee c)\wedge(c\vee a)$。

4. 设$\langle L;\leqslant\rangle$是格，试证明对$L$中的每一个封闭区间$[a,b]=\{x\mid x\in L$且$a\leqslant x\leqslant b\}$，$\langle[a,b];\leqslant\rangle$都是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格。

证明 设$\langle L;\leqslant\rangle$的自然运算中的保交和保联分别为$\wedge$和$\vee$。$\forall x,y\in[a,b]$，则$a\leqslant x\leqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$，从而有$a\leqslant x\wedge y\leqslant x\leqslant x\vee y\leqslant b$，由传递性可知：$a\leqslant x\wedge y\leqslant b$，$a\leqslant x\vee y\leqslant b$，故$x\wedge y$、$x\vee y\in[a,b]$，所以$\langle[a,b];\leqslant\rangle$是$\langle L;\leqslant\rangle$的子格。

5. 证明从图 5.5-3(a)的五个元素的格到(b)的三个元素的链存在一个映射，且此映射是保序的。它是否是一个格同态？

证明 设图 5.5-3(a)的格为$\langle L;\wedge,\vee\rangle$，图 5.5-3(b)的格为$\langle S;\cap,\cup\rangle$，构造从$L=\{a,b,c,d,e\}$到$S=\{0,1,2\}$的映射$f$为：

$$f(a)=2,f(b)=1,f(c)=1,f(d)=1,f(e)=0。$$

显然f是保序映射，但它不是格同态。因为

$f(b\wedge c)=f(e)=0$，而 $f(b)\cap f(c)=1\cap 1=1$，从而 $f(b\wedge c)\neq f(b)\cap f(c)$，故 f 不是格同态。

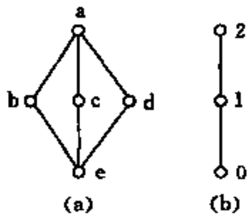


图 5.5-3

6. 设$\langle L;|\rangle$和$\langle S;\leqslant\rangle$是两个格，其中 $L=\{2,4,8,16\}$，"|"为数的整除关系，$S=\{1,2,3,\cdots,10\}$，"$\leqslant$"数的小于等于关系。试给出 L 到 S 的两个不同的格同态映射。

解 $\langle L;|\rangle$的保联和保交分别为求两个数的最大公约数 GCD 和求两个数的最小公倍数 LCM。$\langle S;\leqslant\rangle$的保联和保交分别为求两个数中的较大者 max 和求两个数中的较小者 min。

取 $f:L\to S$ 为：$f(2^n)=n,n=1,2,3,4$。容易验证，对任意 $a,b\in L$，有

$$f(\mathrm{GCD}(a,b))=\min(f(a),f(b)),f(\mathrm{LCM}(a,b))=\max(f(a),f(b)),$$

故 f 是$\langle L;|\rangle$到$\langle S;\leqslant\rangle$的格同态。

取 $g:L\to S$ 为：$f(2)=f(2^2)=2,f(2^3)=f(2^4)=4$。也不难验证 g 是$\langle L;|\rangle$到$\langle S;\leqslant\rangle$的格同态。

7. 给出三个具有 6 个元素的格，使得其中一个是分配格，一个不是分配格但是模格，一个即不是分配格也不是模格。

解 图 5.5-4 所示的哈斯图给出了三个具有 6 个元素的格。

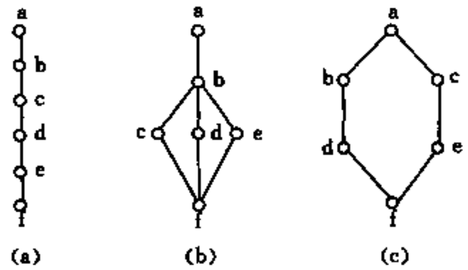


图 5.5-4

(a)是一个链，因此是分配格。在(b)这中容易验证 $c\wedge(d\vee e)\neq(c\wedge d)\vee(c\wedge e)$，因此它不是分配格，但可以验证它是模格。在(c)中容易验证 $d\leqslant b$，但 $d\vee(b\wedge e)\neq b\wedge(d\vee e)$，因此它不是模格。

8. 设$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是一个格，$\leqslant$是该格的自然偏序，若 L 中含有满足下述条件的的元素 a,b,c：$a\leqslant b$，$a\neq b$ 且 $a\wedge c=b\wedge c$，$a\vee c=b\vee c$。则$\langle L;\wedge,\vee\rangle$不是模格。

证明 假设$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是模格，则由 $a\leqslant b$，得 $a\vee(b\wedge c)=b\wedge(a\vee c)$，因为 $a\wedge c=b\wedge c$，$a\vee c=b\vee c$，所以 $a\vee(a\wedge c)=b\wedge(b\vee c)$，由吸收律得，$a=b$。这与题中的条件 $a\neq b$ 矛盾。故$\langle L;\wedge,\vee\rangle$不是模格。

9. 设$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是一个格，$\leqslant$是该格的自然偏序。证明：$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是分配格当且仅当对任意的 $a,b,c\in L$，有$(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$。

证明 必要性：假设$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是分配格。$\forall a,b,c\in L$，由 $a\wedge c\leqslant a$ 和 $b\wedge c\leqslant b\wedge c$，可得$(a\wedge c)\vee(b\wedge c)\leqslant a\vee(b\wedge c)$。而$(a\vee b)\wedge c=(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$，故有$(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$。

充分性：假设 $\forall a,b,c\in L$，有$(a\vee b)\wedge c\leqslant a\vee(b\wedge c)$，则有$(a\vee b)\wedge c=((a\vee b)\wedge c)\wedge c\leqslant(a\vee(b\wedge c))\wedge c=((b\wedge c)\vee a)\wedge c\leqslant(b\wedge c)\vee(a\wedge c)$，而任意格中都成立分配不等式$(b\wedge c)\vee(a\wedge c)\leqslant(a\vee b)\wedge c$，因此，有$(a\vee b)\wedge c=(b\wedge c)\vee(a\wedge c)$，即$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是分配格。

10. 试证明：在有界分配格中，所有有补元的元素的集合可构成一个子格。

证明 设$\langle L;\wedge,\vee;0,1\rangle$是有界分配格，并设$A$是所有有补元的元素的集合。由于0、1有补元，所以$0、1\in A$，于是$A$非空。$\forall a,b\in A$，设$a,b$的补元分别为$a'$和$b'$，因为

$(a\wedge b)\wedge(a'\vee b')=(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge b\wedge b')=((a\wedge a')\wedge b)\vee(a\wedge(b\wedge b'))=(0\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0$，

$(a\wedge b)\vee(a'\vee b')=(a\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee b')=((a\vee a')\vee b')\wedge(a'\vee(b\vee b'))=(1\vee b')\wedge(a'\vee 1)=1$，

这表明$a\wedge b$有补元为$a'\vee b'$，所以$a\wedge b\in A$。又因为

$(a\vee b)\wedge(a'\wedge b')=(a\wedge a'\wedge b')\vee(b\wedge a'\wedge b')=((a\wedge a')\wedge b')\vee(a'\wedge(b\wedge b'))=(0\wedge b')\vee(a'\wedge 0)=0$，

$(a\vee b)\vee(a'\wedge b')=(a\vee b\vee a')\wedge(a\vee b\vee b')=((a\vee a')\vee b)\wedge(a\vee(b\vee b'))=(1\vee b)\wedge(a\vee 1)=1$，

这表明$a\vee b$有补元为$a'\wedge b'$，所以$a\vee b\in A$。

故$\langle A;\wedge,\vee;0,1\rangle$是$\langle L;\wedge,\vee;0,1\rangle$的子格。

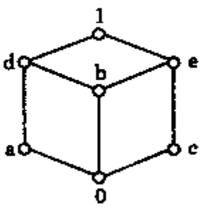


图 5.5-5

11. 试问图 5.5-5 所示的格是分配格吗？

解 该格不是分配格。因为有界分配格中的元素最多有一个补元，而该格中的元素a有两个补元e和c。

12. 证明：格$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是模格当且仅当对任意$a,b,c\in L$，都有$a\vee(b\wedge(a\vee c))=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。

证明 假设该格的自然偏序为$\leqslant$。

充分性：假设格$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是模格，则$\forall a,b,c\in L$，由于$a\leqslant a\vee c$，因此$a\vee(b\wedge(a\vee c))=(a\vee c)\wedge(a\vee b)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$。

必要性：假设$\forall a,b,c\in L$，若$a\leqslant c$，有$a\vee c=c$。由已知$a\vee(b\wedge(a\vee c))=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$，因此，$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge c$，故$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是模格。

13. 设$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是模格，$\leqslant$为该格的自然偏序，对任意$a,b,c\in L$，若$(a\vee b)\wedge c=b\wedge c$，则必有$(c\vee b)\wedge a=b\wedge a$。

证明 由$b\leqslant c\vee b$得$b\wedge a\leqslant(c\vee b)\wedge a$。而$(c\vee b)\wedge a\leqslant(c\vee b)\wedge(a\vee b)$，因为$\langle L;\wedge,\vee\rangle$是模格，由第12题可知，$(c\vee b)\wedge(a\vee b)=b\vee(c\wedge(a\vee b))$，由已知得，$(c\vee b)\wedge(a\vee b)=b\vee(b\wedge c)=b$，从而$(c\vee b)\wedge a\leqslant b$，于是$((c\vee b)\wedge a)\wedge a\leqslant b\wedge a$，故$(c\vee b)\wedge a\leqslant b\wedge a$。所以$(c\vee b)\wedge a=b\wedge a$。

14. 设$\langle L;\leqslant\rangle$是一个有界格，其最大元与最小元分别为1和0，证明：

(1)若$|L|\geqslant 2$，则L中不存在以自身为补元的元素。

(2)若$|L|\geqslant 3$且$\langle L;\leqslant\rangle$是链，则$\langle L;\leqslant\rangle$不是有补格。

证明 设$\langle L;\leqslant\rangle$的代数格为$\langle L;\wedge,\vee\rangle$。

(1)假设存在$a\in L$以自身为补元，由补元的定义可知，$a\vee a=1$，$a\wedge a=0$，从而有$a=1$且$a=0$，进而有$1=0$。因此L中只含一个元素，这与$|L|\geqslant 2$矛盾。

(2)假设$\langle L;\leqslant\rangle$是有补格。由于$|L|\geqslant 3$，因此$1\neq 0$，且存在$a\in L$使得$a\neq 0$且$a\neq 1$。设$a$的补元为$a'$，即$a\vee a'=1$且$a\wedge a'=0$。因为$\langle L;\leqslant\rangle$是链，故$a\leqslant a'$或$a'\leqslant a$。若$a\leqslant a'$，则由$a\wedge a'=a$得$a=0$，矛盾。若$a'\leqslant a$，则由$a\vee a'=a$得$a=1$，矛盾。故$\langle L;\leqslant\rangle$不是有

补格。

15. 设 f 是格 $\langle L;\leqslant_1\rangle$ 到格 $\langle S;\leqslant_2\rangle$ 的满格同态映射，若 $\langle L;\leqslant_1\rangle$ 是有界格，则 $\langle S;\leqslant_2\rangle$ 也是有界格。

证明 设 $\langle L;\leqslant_1\rangle$ 的最大元和最小元分别为 1 和 0，令 $f(0)=a,f(1)=b$，则 $a,b\in S$。因 f 是满射，因此对任意 $y\in S$，都存在 $x\in L$ 使得 $f(x)=y$。因为 f 是格同态，故 f 是保序的，从而由 $0\leqslant_1 x\leqslant_1 1$ 得 $f(0)\leqslant_2 f(x)\leqslant_2 f(1)$，即 $a\leqslant_2 y\leqslant_2 b$，从而 a,b 分别是 $\langle S;\leqslant_2\rangle$ 的最小元与最大元，故 $\langle S;\leqslant_2\rangle$ 是有界格。

16. 设 h 设布尔代数 $\langle B;\wedge,\vee,';0,1\rangle$ 到 $\langle S;\cap,\cup,^-;\alpha,\beta\rangle$ 的布尔同态，证明 $h(B)$ 构成 S 的子布尔代数。

证明 显然 h 是 B 到 $h(B)$ 满射，$\forall a,b\in h(B)$，都存在 $x,y\in B$，使得 $h(x)=a,h(y)=b$。又由于 h 是布尔同态，所以 $a\cap b=h(x)\cap h(y)=h(x\wedge y)$，$\overline{a}=\overline{f(x)}=f(x')$。由于 $x\wedge y$、$x'\in B$，所以 $a\cap b$、$\overline{a}\in h(B)$，故 $\langle h(B);\cap,\cup,^-;\alpha,\beta\rangle$ 是 $\langle S;\cap,\cup,^-;\alpha,\beta\rangle$ 的子布尔代数。

17. 化简下列布尔表达式：

(1) $(a\wedge b)\vee(a'\wedge b\wedge c')\vee(b\wedge c)$。 (2) $((a\wedge b')\vee c)\wedge(a\vee b')\wedge c$。

(3) $(a\wedge b)\vee(a\wedge b'\wedge c)\vee(b\wedge c)$。 (4) $(a\wedge b)'\vee(a\vee b)'$。

(5) $(1\wedge a)\vee(0\wedge a')$。 (6) $(a'\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b'\wedge c')$。

解 (1) $(a\wedge b)\vee(a'\wedge b\wedge c')\vee(b\wedge c)=b\wedge(a\vee(a'\wedge c')\vee c)=b\wedge(a\vee c\vee(a\vee c)')$
$=b\wedge 1=b$。

(2) $((a\wedge b')\vee c)\wedge(a\vee b')\wedge c=(((a\wedge b')\vee c)\wedge c)\wedge(a\vee b')=c\wedge(a\vee b')$。

(3) $(a\wedge b)\vee(a\wedge b'\wedge c)\vee(b\wedge c)=(a\wedge(b\vee(b'\wedge c)))\vee(b\wedge c)$
$=(a\wedge((b\vee b')\wedge(b\vee c)))\vee(b\wedge c)$
$=(a\wedge(b\vee c))\vee(b\wedge c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)\vee(b\wedge c)$。

(4) $(a\wedge b)'\vee(a\vee b)'=(a'\vee b')\vee(a'\wedge b')=a'\vee(b'\vee(a'\wedge b'))=a'\vee b'$。

(5) $(1\wedge a)\vee(0\wedge a')=a\vee 0=a$。

(6) $(a'\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b'\wedge c)\vee(a\wedge b'\wedge c')=b'\wedge((a'\wedge c)\vee(a\wedge c)\vee(a\wedge c'))$
$=b'\wedge((a'\wedge c)\vee(a\wedge(c\vee c')))=b'\wedge((a'\wedge c)\vee a)$
$=b'\wedge((a'\vee a)\wedge(c\vee a))=b'\wedge(a\vee c)$。

18. 证明下列布尔恒等式：

(1) $a\vee(a'\wedge b)=a\vee b$。

(2) $a\wedge(a'\vee b)=a\wedge b$。

(3) $(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)$。

(4) $(a\vee b')\wedge(b\vee c')\wedge(c\vee a')=(a'\vee b)\wedge(b'\vee c)\wedge(c'\vee a)$。

(5) $(a\wedge b)\vee(a'\wedge c)\vee(b'\wedge c)=(a\wedge b)\vee c$。

证明 (1) $a\vee(a'\wedge b)=(a\vee a')\wedge(a\vee b)=1\wedge(a\vee b)=a\vee b$。

(2) $a\wedge(a'\vee b)=(a\wedge a')\vee(a\wedge b)=0\vee(a\wedge b)=a\wedge b$。

(3) $(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)\vee(b\wedge c)=((a\vee a')\wedge(c\vee a')\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee b))\vee(b\wedge c)$
$=((c\vee a')\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee b))\vee(b\wedge c)$
$=((c\vee a')\vee(b\wedge c))\wedge((a\vee b)\vee(b\wedge c))\wedge((c\vee b)\vee(b\wedge c))$
$=(c\vee a')\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee b)$，

$(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)=(a\vee a')\wedge(c\vee a')\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee b)=(c\vee a')\wedge(a\vee b)\wedge(c\vee b)$，

所以，$(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)$。

(4) $(a\vee b')\wedge(b\vee c')\wedge(c\vee a')=((a\wedge b)\vee(a\wedge c')\vee(b'\wedge b)\vee(b'\wedge c'))\wedge(c\vee a')$

$=((a\wedge b)\vee(a\wedge c')\vee(b'\wedge c'))\wedge(c\vee a')$

$=((a\wedge b)\wedge(c\vee a'))\vee((a\wedge c')\wedge(c\vee a'))\vee((b'\wedge c')\wedge(c\vee a'))$

$=(a\wedge b\wedge c)\vee(a\wedge b\wedge a')\vee(a\wedge c'\wedge c)\vee(a\wedge c'\wedge a')\vee(b'\wedge c'\wedge c)$
$\vee(b'\wedge c'\wedge a')$

$=(a\wedge b\wedge c)\vee(b'\wedge c'\wedge a')$，

$(a'\vee b)\wedge(b'\vee c)\wedge(c'\vee a)=((a'\wedge b')\vee(a'\wedge c)\vee(b\wedge b')\vee(b\wedge c))\wedge(c'\vee a)$

$=((a'\wedge b')\vee(a'\wedge c)\vee(b\wedge c))\wedge(c'\vee a)$

$=((a'\wedge b')\wedge(c'\vee a))\vee((a'\wedge c)\wedge(c'\vee a))\vee((b\wedge c)\wedge(c'\vee a))$

$=(a'\wedge b'\wedge c')\vee(a'\wedge b'\wedge a)\vee(a'\wedge c\wedge c')\vee(a'\wedge c\wedge a)\vee(b\wedge c\wedge c')$
$\vee(b\wedge c\wedge a)$

$=(a'\wedge b'\wedge c')\vee(b\wedge c\wedge a)$，

所以，$(a\vee b')\wedge(b\vee c')\wedge(c\vee a')=(a'\vee b)\wedge(b'\vee c)\wedge(c'\vee a)$。

(5) $(a\wedge b)\vee(a'\wedge c)\vee(b'\wedge c)=((a\vee a')\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee a')\wedge(b\vee c))\vee(b'\wedge c)$

$=((a\vee c)\wedge(b\vee a')\wedge(b\vee c))\vee(b'\wedge c)$

$=((a\vee c)\vee(b'\wedge c))\wedge((b\vee a')\vee(b'\wedge c))\wedge((b\vee c)\vee(b'\wedge c))$

$=(a\vee c\vee b')\wedge(a\vee c\vee c)\wedge(b\vee a'\vee b')\wedge(b\vee a'\vee c)\wedge(b\vee c\vee b')\wedge(b\vee c\vee c)$

$=(a\vee c\vee b')\wedge(a\vee c)\wedge(b\vee a'\vee c)\wedge(b\vee c)$

$=((a\vee c\vee b')\wedge(a\vee c))\wedge((b\vee a'\vee c)\wedge(b\vee c))$

$=(a\vee c)\wedge(b\vee c)$

$=(a\wedge b)\vee c$。

19. 下列是布尔代数$\langle\{0,1,a,b\};\wedge,\vee,';0,1\rangle$上的布尔表达式，试求出它的主析取范式和主合取范式：

(1) $f(x,y)=(b\wedge(x\vee y))\vee(x\wedge y)$。

(2) $f(x,y,z)=(a\wedge x\wedge y)\vee(b\wedge z)$。

解 (1) $f(x,y)=(b\wedge(x\vee y))\vee(x\wedge y)=(b\wedge x)\vee(b\wedge y)\vee(x\wedge y)$

$=(b\wedge x\wedge(y\vee y'))\vee(b\wedge(x\vee x')\wedge y)\vee(x\wedge y)$

$=(b\wedge x\wedge y)\vee(b\wedge x\wedge y')\vee(b\wedge x\wedge y)\vee(b\wedge x'\wedge y)\vee(x\wedge y)$

$=(x\wedge y)\vee(b\wedge x\wedge y')\vee(b\wedge x'\wedge y)$ 主析取范式

$f(x,y)=(b\wedge(x\vee y))\vee(x\wedge y)=(b\vee(x\wedge y))\wedge((x\vee y)\vee(x\wedge y))$

$=(b\vee x)\wedge(b\vee y)\wedge(x\vee y)=(b\vee x\vee(y\wedge y'))\wedge(b\vee(x\wedge x')\vee y)\wedge(x\vee y)$

$=(b\vee x\vee y)\wedge(b\vee x\vee y')\wedge(b\vee x\vee y)\wedge(b\vee x'\vee y)\wedge(x\vee y)$

$=(x\vee y)\wedge(b\vee x\vee y')\wedge(b\vee x'\vee y)$ 主合取范式

(2) $f(x,y,z)=(a\wedge x\wedge y)\vee(b\wedge z)$

$=(a\wedge x\wedge y\wedge(z\vee z'))\vee(b\wedge(x\vee x')\wedge(y\vee y')\wedge z)$

$=(a\wedge x\wedge y\wedge z)\vee(a\wedge x\wedge y\wedge z'))\vee(b\wedge x\wedge(y\vee y')\wedge z)\vee(b\wedge x'\wedge(y\vee y')\wedge z)$

$=(a\wedge x\wedge y\wedge z)\vee(a\wedge x\wedge y\wedge z'))\vee(b\wedge x\wedge y\wedge z)\vee(b\wedge x\wedge y'\wedge z)$
$\vee(b\wedge x'\wedge y\wedge z)\vee(b\wedge x'\wedge y'\wedge z)$

$=((a\vee b)\wedge x\wedge y\wedge z)\vee(a\wedge x\wedge y\wedge z'))\vee(b\wedge x\wedge y'\wedge z)\vee(b\wedge x'\wedge y\wedge z)$

$$\vee (b\wedge x'\wedge y'\wedge z)$$

$$=(x\wedge y\wedge z)\vee(a\wedge x\wedge y\wedge z')\vee(b\wedge x\wedge y'\wedge z)\vee(b\wedge x'\wedge y\wedge z)$$

$$\vee (b\wedge x'\wedge y'\wedge z)$$ **主析取范式**

$$f(x,y,z)=(a\wedge x\wedge y)\vee(b\wedge z)=(a\vee b)\wedge(a\vee z)\wedge(x\vee b)\wedge(x\vee z)\wedge(y\vee b)\wedge(y\vee z)$$

$$=(a\vee(x\wedge x')\vee(y\wedge y')\vee z)\wedge(b\vee x\vee(y\wedge y')\vee(z\wedge z'))\wedge$$

$$(x\vee(y\wedge y')\vee z)\wedge(b\vee(x\wedge x')\vee y\vee(z\wedge z'))\wedge((x\wedge x')\vee y\vee z)$$

$$=(a\vee x\vee y\vee z)\wedge(a\vee x\vee y'\vee z)\wedge(a\vee x'\vee y\vee z)\wedge(a\vee x'\vee y'\vee z)\wedge$$

$$(b\vee x\vee y\vee z)\wedge(b\vee x\vee y\vee z')\wedge(b\vee x\vee y'\vee z)\wedge(b\vee x\vee y'\vee z')\wedge$$

$$(x\vee y\vee z)\wedge(x\vee y'\vee z)\wedge(b\vee x\vee y\vee z)\wedge(b\vee x\vee y\vee z')\wedge$$

$$(b\vee x'\vee y\vee z)\wedge(b\vee x'\vee y\vee z')\wedge(x\vee y\vee z)\wedge(x'\vee y\vee z)$$

$$=(x\vee y\vee z)\wedge(x\vee y'\vee z)\wedge(x'\vee y\vee z)\wedge(a\vee x'\vee y'\vee z)\wedge$$

$$(b\vee x\vee y\vee z')\wedge(b\vee x\vee y'\vee z')\wedge(x\vee y'\vee z)\wedge(b\vee x'\vee y\vee z)\wedge$$

$$(b\vee x'\vee y\vee z')$$ **主合取范式**

电子工业出版社近期推出部分
高等学校计算机专业教材：

*1. 计算机导论（王玉龙编）
*2. 数字逻辑与数字系统（王永军等编）
*3. 电路与电子学（王文辉等编）
4. 离散数学（朱一清编）
*5. 程序设计语言与编译（龚天富等编）
*6. 计算机组成原理与汇编语言程序设计（俸远祯等编）
*7. 算法与数据结构（傅清祥等编）
8. 数据通信与计算机网络（杨心强等编）
*9. 人工智能基础（邵军力等编）
*10. 计算机系统结构（张吉锋等编）
11. 计算机操作系统（刘乃琦等编）
*12. 软件工程（杨文龙等编）
13. 接口技术（高福祥等编）
*14. 计算机外部设备（章振业等编）
*15. 数据库系统原理（王珊等编）
16. 计算机图形学（任爱华编）
17. Petri网原理（袁崇义编）
18. 形式语言与自动机（王义和编）

*为电子工业部全国计算机专业教学指导委员会确定的“九五”规划教材。

ISBN 7-5053-3955-9

9 787505 339552 >

责任编辑：张凤鹏
特约编辑：袁　英
封面设计：阎欢扬

ISBN 7-5053-3955-9/TP·1720

定价：9.00元