第一章　极限与连续

填空题

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$ ____0___ ；

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}$ = ___1____ ；

3. 函数 $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$ 在 __ $x=\pm3$ _____ 处间断；

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{5n^2+2n-1}$ = ___ $\dfrac{3}{5}$ ____；

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 连续，则 $a=$ ____2_____ ；

选择题

1. 当 $x\to 0$ 时，$y=\sin\dfrac{1}{x}$ 为（　C　）

 (A)无穷小量　(B)无穷大量　(C)有界变量但不是无穷小量　(D)无界变量

2. $x\to 1^+$ 时，下列变量中为无穷大量的是（　A　）

 (A) $3^{\frac{1}{x-1}}$　(B) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$　(C) $\dfrac{1}{x}$　(D) $\dfrac{x+2}{x+1}$

3. $x\to 1$ 时，下列变量中为无穷小量的是（　C　）

 (A) 3^{1-x}　(B) $1+x$　(C) $1-x$　(D) $1+2x$

4.设 $f(x)=\begin{cases}3x+2, & x\le 0\\ x^2-2, & x>0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$（　D　）

 (A) 2　(B) 0　(C) -1　(D) -2

5.函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$，在 $x=0$ 处（　B　）

 (A)左连续　(B)右连续　(C) 连续　(D) 左、右皆不连续

计算与应用题

1.求下列极限

$$(1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{1+1/n}=2;\qquad (2)\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x-2}=-2;$$

$$(3)\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2+x}-2}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{2+x}-2)(\sqrt{2+x}+2)}{(x^2-4)(\sqrt{2+x}+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+2)(\sqrt{2+x}+2)}=\frac{1}{16};$$

$$(4)\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to-1}\frac{x-2}{x^2-1}=\infty;\quad (5)\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+1}{6x^2+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x+1/x^2}{6+2/x-1/x^2}=\frac{1}{2};$$

$$(6)\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^2}{3+1/x-1/x^2}=0;$$

$$(7)\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0;$$

$$(8)\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}=e^{-3};\quad (9)\lim_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right]^{-2}=e^{-2};$$

$$(10)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^{-\frac{x+1}{2}}\right]^{-\frac{2x}{x+1}}=e^{-2};$$

$(11)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$;　　$(12)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{7x}=\dfrac{3}{7}$;

$(13)\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$;　　$(14)\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$;　　$(15)\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$;

$(16)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;　　$(17)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 7x}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{2x}=\dfrac{7}{2}$;

$(18)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\frac{4x}{2})^2}{2x^2}=1$;　　$(19)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 2x}{x}=\dfrac{2}{3}$;

$(20)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot x}{x^2}=1$;　　$(21)\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^2)}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

2.设 $f(x)$ 在点 $x=2$ 处连续，且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}, & x\neq 2,\\ a, & x=2\end{cases}$，求 a.

解：要使函数在 x=2 处连续，只须 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$，而 $f(2)=a$ 且

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$，

所以 $a=1$.

3.考察函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\geq 1,\\ \dfrac{x-1}{x^2-1}, & x<1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性。

解:因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1+x)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，从而 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处不存在极限，故不连续.

4.当 a 为何值时，函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{3x}, & x>0,\\ a+\sin x, & x\leq 0\end{cases}$ 在其定义域上连续。

解：要使函数在 x=0 处连续，只须 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，而 $f(0)=a$ 且

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+\sin x)=a$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$，所以 $a=\dfrac{2}{3}$.

5.求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ 的间断点，并判断间断点的类型。

解：由于函数在 $x=1,x=2$ 处没有定义，所以间断点为 $x=1,x=2$.

在 $x=1$ 处 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$，故此点为第一类间断点中的可去间断点.

在 $x=2$ 处 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\infty$，故此点为第二类间断点中的无穷间断点.

第二章导数与微分

填空题

1. $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$，则 $f'(0)=$ ____0______ ；
2. 曲线 $y=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是 ___ $y=3x-2$ ______ ；
3. 设 $y=x^a+a^x+\log_a x+a^a$，则 $y'=$ _$ax^{a-1}+a^x\ln a+\dfrac{1}{x\ln a}$______ ；
4. 已知 $y=\ln f(x)$，则 $y'=$ __ $\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$______ ；
5. $(x^x)'$ = ___ $x^x(\ln x+1)$ ____;
6. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $f'(x_0)=A$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}$ =____ $-2A$ ___ ；

7. 函数 $y=\sin(x^2+1)$ 的微分 $\mathrm{d}y=$___$2x\cos(x^2+1)\mathrm{d}x$_______ ;

选择题

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , -1<x\le 0 \\ 1 & , 0<x\le 2 \end{cases}$ ，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（ A ）

(A) 可导 (B) 连续但不可导 (C) 不连续 (D) 无定义

2. 函数 $y=e^{f(x)}$，则 $y''=$（ D ）

(A) $e^{f(x)}$ (B) $e^{f(x)}f''(x)$

(C) $e^{f(x)}[f'(x)]^2$ (D) $e^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在 $x=0$ 处（ D ）

(A) 连续但不可导 (B) 连续且可导

(C) 极限存在但不连续 (D) 不连续也不可导

5. 设 $y=e^x+e^{-x}$ ，则 $y''=$（ A ）

(A) e^x+e^{-x} (B) e^x-e^{-x} (C) $-e^x-e^{-x}$ (D) $-e^x+e^{-x}$

计算与应用题(写出求解过程或写出求解问题的 matlab 指令)

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin x, & x<0, \\ x^2+2x+b, & x\ge 0. \end{cases}$

(1) 欲使 f(x)在 x=0 处连续，a,b 为何值？

(2) 欲使 f(x)在 x=0 处可导，a,b 为何值？

解：(1) 要使函数在 x=0 处连续，只须 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$，而 $f(0)=b$ 且

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+2x+b)=b$，$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}a\sin x=0$，故 $b=0$，a 为任意实数。

(2) 因为连续则一定可导，故要使函数在 x=0 处可导，则只须在 x=0 处连续，且 $f'_-(0)=f'_+(0)$.

而由(1)知若函数在 x=0 处连续，则 $b=0$.又 $f(0)=b$，并有

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x^2+2x+b)-b}{x}=\lim_{x\to 0^-}(x+2)=2,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{a\sin x-b}{x}=a\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=a,$$

所以 $a=2$.

综上可知要使函数在 x=0 处可导，则须有 $a=2,b=0$.

2. 求下列函数的导数：

(1) $f(x)=e^{\sin x}$; (2) $f(x)=\cos(x^3-1)$; (3) $f(x)=\ln(1+x^2)$; (4) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$

解：(1) $f'(x)=e^{\sin x}\cos x$; (2) $f'(x)=-3x^2\sin(x^3-1)$; (3) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$; (4) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

4. 求由下列方程确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数：

(1) $x^2+y^2-xy=1$; (2) $e^y+xy-e^{4x}+y^3=0$。

解：(1)方程两端对 x 求导得 $2x+2yy'-(y+xy')=0$，解得 $y'=\dfrac{y-2x}{2y-x}$.

(2)方程两端对 x 求导得 $e^y y'+(y+xy')-4e^{4x}+3y^2y'=0$，解得 $y'=\dfrac{4e^{4x}-y}{e^y+x+3y^2}$.

5. 求由方程 $e^{2y}+xy-e^{4x}=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程。

解：方程两端对 x 求导得 $e^{2y}y'+(y+xy')-4e^{4x}=0$，解得 $y'=\dfrac{4e^{4x}-y}{e^{2y}+x}$.所以点 $(0,0)$ 处的切线斜率为 $k=y'|_{(0,0)}=4$，从而所求切线方程为 $y=4x$.

6. 求下列函数的导数 (1) $y=x^{\sin x}$; (2) $y=x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$。

解：(1) $y'=(x^{\sin x})'=(e^{\ln x^{\sin x}})'=(e^{\sin x\ln x})'=e^{\sin x\ln x}(\sin x\ln x)'=x^{\sin x}(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x})$

(2)两边取对数得 $\ln y = \ln x + \frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)]$.两边求导得 $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}[\frac{1}{1-x}(-1) - \frac{1}{1+x}]$，所以

$y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}\right) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2-1}\right)$.

7. 求下列函数的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$： $(1) y = e^{2x}$； $(2) y = \frac{1}{x}$.

解：(1) $y' = 2e^{2x}$，$y'' = 2^2 e^{2x}$，$y''' = 2^3 e^{2x}, \cdots, y^{(n)} = 2^n e^{2x}$.

(2) $y' = -x^{-2}$，$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$，$y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}, \cdots, y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

8. 求函数 $y = x^2$ 在点 $x = 1$ 处当 $\Delta x = 0.01$ 时的微分。

解： $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = 2x\mathrm{d}x$，所以所求微分为 $\mathrm{d}y|_{x=1,\Delta x=0.01} = 2\times1\times0.01 = 0.02$.

9. 求下列函数的微分 dy： $(1) y = \sin x$； $(2) y = \frac{\ln(1+x)}{x}$； $(3) y = \sin(2x - x^2)$。

解： $(1)\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \cos x\mathrm{d}x$ $(2)\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = \frac{\frac{1}{1+x}\cdot x - \ln(1+x)}{x^2}\mathrm{d}x = \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}\mathrm{d}x$;

$(3)\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = 2(1-x)\cos(2x-x^2)\mathrm{d}x$.

第三章 导数的应用

填空题

1. 求曲线 $y = (x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的拐点是 ___(2,0)_____；
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$ （$a > 0, n$ 为正整数）= ___0_____ ；
3. 设 $y = 2x^2 + ax + 3$ 在点 $x = 1$ 处取得极小值，则 a = __−4_____ ；
4. 设 $y = (x-a)^3$ 在 $(1,+\infty)$ 上是凹的，则 a 的取值范围是___ $a \le 1$ ___ ；
5. 函数 $y = x^3 - 3x$ 的单调递减区间是 ___ $[-1,1]$ _______ ；

选择题

1. 函数 $y = \sin x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上满足罗尔定理的 ξ = (C)
   (A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π
2. 函数 $y = x^2$ 在区间 $[1,4]$ 上应用拉格朗日中值定理的 ξ = (C)
   (A) 0 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3
3. 函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极大值，则必有（ D ）
   (A) $f'(x_0) = 0$ (B) $f''(x_0) < 0$
   (C) $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$ (D) $f'(x_0) = 0$ 或不存在

计算与应用题(写出求解过程)

1.验证下列函数以给定区间是是否满足罗尔定理的条件，如满足求出使定理成立的点 ξ .
$(1) f(x) = x\sqrt{4-x}, x\in[0,4]$; $(2) f(x) = |x|, x\in[-1,1]$.

解：(1) $f(x) = x\sqrt{4-x}$ 是初等函数，故在[0,4]上连续，在(0,4)内可导，又 $f(0) = f(4) = 0$，所以 $f(x)$ 在[0,4]上满足罗尔定理的条件.又在 $f'(x) = \sqrt{4-x} - \frac{x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{\sqrt{4-x}}$，故存在 $\xi = \frac{8}{3} \in [0,4]$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

(2)由于 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处不可导，所以 $f(x)$ 在[-1,1]上不满足罗尔定理的条件.

2.求下列**极**限

解：(1)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$； (2)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{2x}=\infty$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^{-1}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^{-1}}{-x^{-2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=e^0=1$;

(5)$\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x})=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}$;

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-x^{-2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{2x}=1.$

3.讨论下列函数的单调性，极值；凹凸区间，拐点，并作图。

(1)$y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$; (2)$y=3-27x-9x^2+3x^3$; (3)$y=\ln(1+x^2)$ 。

解：(1)函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,又

$y'=(4x^{-1}+4x^{-2}-2)'=-4x^{-2}-8x^{-3}=\dfrac{-4(x+2)}{x^3}$ $y''=8x^{-3}+24x^{-4}=\dfrac{8(x+3)}{x^4}$,

令 $y'=0$ 得驻点 $x=-2$，在定义域中没有不可导的点.

令 $y''=0$ 得驻点 $x=-3$，在定义域中没有二阶导数不存在的点.

列表分析

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	$(0,+\infty)$
y'	$-$	/	$-$	0	$+$	$-$
y''	$-$	0	$+$	/	$+$	$+$
y	减，凸	拐点$(-3,-\frac{26}{9})$	减，凹	极小值 $f(-2)=-3$	增，凹	减，凹

又$\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$，故有铅直渐近线 $x=0$.

又$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{4(x+1)}{x^3}-\dfrac{2}{x}]=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{2}{x})=0$,

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2]=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}-2)=-2$

所以有水平渐近线 $y=-2$.

(2)函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,又

$y'=9x^2-18x-27=9(x-3)(x+1)$ $y''=18x-18$,

令 $y'=0$ 得驻点 $x_1=-1,x_2=3$，在定义域中没有不可导的点.

令 $y''=0$ 得驻点 $x=1$，在定义域中没有二阶导数不存在的点.

列表分析

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	/	$-$	0	$+$
y''	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$
y	增，凹	极大值 $f(-1)=18$	减，凹	拐点 $(1,-30)$	增，凸	极小值 $f(3)=-78$	减，凸

又 y 在$(-\infty,+\infty)$连续，故不存在铅直渐近线.

又$a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\infty$，故不存在斜渐近线与水平渐近线.

(3)函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,又

$y'=\dfrac{2x}{1+x^2}$， $y''=\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$,

令 $y'=0$ 得驻点 $x=0$，在定义域中没有不可导的点.

令 $y''=0$ 得驻点 $x_1=-1,x_2=1$，在定义域中没有二阶导数不存在的点.

列表分析

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(0,+\infty)$
y'	$-$	/	$-$	0	$+$	/	$+$
y''	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$
y	减，凸	拐点 $(-1,\ln 2)$	减，凹	极小值 $f(0)=0$	增，凹	拐点 $(1,\ln 2)$	减，凸

又 y 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，故不存在铅直渐近线.

又 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{2x}=0$， $\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(1+x^2)=\infty$ 所以不存在斜渐近线与水平渐近线.

第四章 不定积分

填空题

1. $\int\dfrac{1}{x+1}dx=$ _ $\ln(x+1)+C$___ ；

2. 设 $e^x+\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f'(x)$ =__ $e^x-\sin x$ ___；

3. $d\int(\ln x+\cos^2 x+e^{x^2})dx=$___ $(\ln x+\cos^2 x+e^{x^2})dx$____ ；

4. 若 $\int f(x)dx=\arcsin 2x+C$ ，则 $f(0)=$ ___0___ ；

5. $\int\left(\sqrt{\ln^2 x+\tan^2 x}\right)'dx=$______ $\sqrt{\ln^2 x+\tan^2 x}$ +C__________；

计算与应用题

1 已知 $\int f(x)dx=\ln x+e^x+C$，求 $f(x)$。

解：$f(x)=\left(\int f(x)dx\right)'=(\ln x+e^x+C)'=\dfrac{1}{x}+e^x$.

2 已知 $f'(x)=\sin x+2x-\dfrac{1}{x}$，且 $f(1)=1$，求 $f(x)$。

解：$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\sin x+2x-\dfrac{1}{x})dx=-\cos x+x^2-\ln|x|+C$.

又 $f(1)=1$，故 $1=-\cos 1+1^2-\ln|1|+C$，从而 $C=\cos 1$.

所以所求 $f(x)=-\cos x+x^2-\ln|x|+\cos 1$

3 计算下列不定积分

解：(1) $\int(x+\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}+\dfrac{3}{x^3})=\dfrac{1}{2}x^2+\ln|x|-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2x^2}+C$ dx;

(2) $\int\dfrac{x^4}{1+x^2}dx=\int\dfrac{x^4-1+1}{1+x^2}dx=\int(x^2-1+\dfrac{1}{1+x^2})dx=\dfrac{1}{3}x^3-x+\arctan x+C$;

(3) $\int\sqrt{x}(x^2-5)dx=\int(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}})dx=\dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}-\dfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

(4) $\int\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int(x^{-\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}})dx=2x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$.

4 求下列不定积分

解：(1) $\int x\sqrt{x^2-1}dx=\dfrac{1}{2}\int(x^2-1)^{\frac{1}{2}}d(x^2-1)=\dfrac{1}{3}(x^2-1)^{\frac{3}{2}}+C;$

(2) $\int\dfrac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\,d(\ln x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x+C;$

$(3)\int e^x\cos e^x dx=\int \cos e^x d(e^x)=\sin e^x+C;$

$(4)\int e^{\sin x}\cos xdx=\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+C;$

$(5)\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int \sin\sqrt{x}d(\sqrt{x})=-2\cos\sqrt{x}+C;$

$(6)\int \frac{1+\arctan x}{1+x^2}dx=\int (1+\arctan x)d(1+\arctan x)=\frac{1}{2}(1+\arctan x)^2+C;$

$(7)\int \frac{\arcsin x-x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \arcsin xd(\arcsin x)+\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$

$=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+C;$

$(8)\int \sqrt{1-x^2}dx\overset{x=\sin t}{\underset{dx=\cos tdt}{=\!=\!=\!=\!=}}\int \cos^2 tdt=\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)+C=\frac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C$

$=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C;$

$(9)\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}dx=-\int \cos\frac{1}{x}d(\frac{1}{x})=-\sin\frac{1}{x};$

$(10)\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}dx\overset{x=(t-1)^2}{\underset{dx=2(t-1)dt}{=\!=\!=\!=\!=}}\int \frac{(t-1)^2}{t}2(t-1)dt=2\int (t^2-3t+3-\frac{1}{t})dt=2(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+3t-\ln|t|)+C$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-3x+6\sqrt{x}-\ln x+C$

5 求下列不定积分

解：$(1)\int x^2\ln xdx=\int \ln x(\frac{1}{3}x^3)'dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int (\ln x)'(\frac{1}{3}x^3)dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C;$

$(2)\int x^2e^xdx=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C;$

$(3)\int x^2\cos xdx=\int x^2(\sin x)'dx=x^2\sin x-2\int x\sin xdx=x^2\sin x-2(x(-\cos x)-\int (-\cos x)dx)$

$=x^2\sin x+2x\cos x+2\sin x+C;$

$(4)\int x^2\sin xdx=\int x^2(-\cos x)'dx=-x^2\cos x+2\int x\cos xdx=-x^2\cos x+2(x\sin x-\int \sin xdx)$

$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C;$

$(5)\int \arctan xdx=x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}dx=x\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}d(1+x^2)$

$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2);$

$(6)\int \arcsin xdx=x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$

$=x\arcsin x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}+C;$

(7) 因为$\int e^x\sin xdx=\int e^x(-\cos x)'dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

所以$\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$

第五章 定积分部及其应用

填空题

1. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx =$ ____ $\boldsymbol{\frac{\pi a^2}{4}}$ ____；

2. 定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ = ___ $\boldsymbol{e^2-e}$ _____；

3. 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}dx=1$，其中 k 为常数，则 $k=$ ___ $\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}$ ____；

4. 定积分 $\int_{-1}^{1}x^3\sin^2 xdx=$ ____0___ ；

5. $\int_{-1}^{1}\frac{x|x|}{x^2+1}dx=$ ___0_____ .

选择题

1. 下列积分可直接使用牛顿—莱不尼兹公式的有（ A ）

(A) $\int_0^5\frac{x^3}{1+x^2}dx$ (B) $\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (C) $\int_0^4\frac{x}{(\sqrt{x^3}-5)^2}dx$ (D) $\int_{e^{-1}}^{e}\frac{1}{x\ln x}dx$

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，则 $\int_0^x f(t)dt$ 为 (C)

(A) $f(t)$ 的一个原函数 (B) $f(t)$ 的所有原函数

(C) $f(x)$ 的一个原函数 (D) $f(x)$ 的所有原函数

3. $\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=$ (C)

(A) $e^{\frac{x}{2}}$ (B) $\frac{1}{2}e^x$ (C) e^{2x} (D) $\frac{1}{2}e^{2x}$

4. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx$ (D)

(A) -2 (B) 2 (C) 0 (D) 发散

计算题

1．求下列各函数的导数：

（1）$F(x)=\int_1^x\frac{1}{1+t^2}dt$；（2）$F(x)=\int_x^0 t^2\cdot\cos tdt$ 求 $F'(\pi)$；（3）$F(x)=\int_x^{x^2}\frac{te^t}{1+t^2}dt$

解：（1）$F'(x)=\frac{1}{1+x^2}$；（2）$F'(x)=\left(-\int_0^x t^2\cdot\cos tdt\right)'=-x^2\cos x$，故 $F'(\pi)=\pi^2$；

（3）$F'(x)=\left(\int_x^0\frac{te^t}{1+t^2}dt+\int_0^{x^2}\frac{te^t}{1+t^2}dt\right)'=-\frac{xe^x}{1+x^2}+\frac{x^2e^{x^2}}{1+(x^2)^2}\cdot 2x=-\frac{xe^x}{1+x^2}+\frac{2x^3e^{x^2}}{1+x^4}$.

2．求下列各极限：

解（1）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x\sin^2 tdt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$；

（2）$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x(e^t+e^{-t}-2)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1-1}{2}=0$.

3．求下列各定积分：

$\int_0^1 e^{3x-1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x-1}d(3x-1)=\frac{1}{3}e^{3x-1}|_0^1=\frac{1}{3}(e^2-e^{-1})$；

$\int_{-1}^{2}|2x|dx=-\int_{-1}^{0}(2x)dx+\int_0^2(2x)dx=-(x^2|_{-1}^{0})+x^2|_0^2=5$；

$$\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos xdx=\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin x|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=2\ ;$$

$$\int_0^a\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2dx=\int_0^a\left(a-2\sqrt{a}\sqrt{x}+x\right)dx=(ax-\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^2)|_0^a=\frac{a^2}{6}\quad ;$$

$$\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1(1-\frac{1}{1+x^2})dx=(x-\arctan x)|_0^1=1-\frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^4\frac{1}{1+\sqrt{t}}dt\ \overset{t=(u-1)^2}{\underset{dt=2(u-1)du}{=\!=\!=\!=\!=}}\int_1^3\frac{1}{u}\cdot 2(u-1)du=2(u-\ln u)|_1^3=2[(3-\ln 3)-1]=4-2\ln 3\ ;$$

$$\int_0^a x^2\cdot\sqrt{a^2-x^2}dx\ \overset{x=\sin t}{\underset{dx=\cos tdt}{=\!=\!=\!=\!=}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t\cos t)^2dt$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{2}\sin 2t)^2dt=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{a^2}{8}(t-\frac{1}{4}\sin 4t)|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{16}\ ;$$

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\ \overset{x=t^2}{\underset{dx=2tdt}{=\!=\!=\!=}}\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\cdot 2tdx=2\int_0^1(1-\frac{1}{1+t^2})dx=2(t-\arctan t)|_0^1=2-\frac{\pi}{2}\ ;$$

$$\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx\ \overset{x=\sec t}{\underset{dx=\sec t\tan tdt}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{\sec^2 t-1}}{\sec t}\sec t\tan tdt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 t-1)dt\ ;$$

$$=(\tan t-t)|_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\frac{x}{2}dx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}(x+\sin x)|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_1^{e^2}\frac{2+\ln x}{x}dx=\int_1^{e^2}(2+\ln x)d(2+\ln x)=\frac{1}{2}(2+\ln x)^2|_1^{e^2}=6\ ;$$

$$\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\quad ;$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^3}dx=-\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^3)^{\frac{1}{2}}d(1-x^3)=-\frac{2}{9}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}|_0^1=\frac{2}{9}\ ;$$

$$\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_0^1\frac{1}{1+(e^x)^2}d(e^x)=\arctan e^x|_0^1=\arctan e-\frac{\pi}{4}\quad ;$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(arc\sin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\arcsin x)^2d(\arcsin x)=\frac{1}{3}(\arcsin x)^3|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^3}{324}\ ;$$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}|_0^1=1-2e^{-1}\ ;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin xdx=-x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}=1\ ;$$

$$\int_0^{e-1}x\ln(x+1)dx=\int_0^{e-1}\ln(x+1)(\frac{1}{2}x^2)'dx=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)|_0^{e-1}-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}\frac{x^2}{x+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}\int_0^{e-1}(x-1+\frac{1}{x+1})dx=\frac{1}{2}(e-1)^2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1))|_0^{e-1}=\frac{1}{4}(e^2+1);$$

$$\int_0^{2\pi}x\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}xdx-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x\cos 2xdx=\frac{1}{4}x^2|_0^{2\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}x(\frac{1}{2}\sin 2x)'dx$$

$$=\pi^2-\frac{1}{4}(x\sin 2x|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\sin 2xdx)=\pi^2-\frac{1}{8}\cos 2x|_0^{2\pi}=\pi^2;$$

$$\because\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=e^{2x}\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx=e^{\pi}-2(-e^{2x}\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx)$$

$$=e^{\pi}-2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx,$$

$$\therefore\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\frac{e^{\pi}-2}{5};$$

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arccos x dx = x\arccos x\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2)$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx \xlongequal[dx=2tdt]{x=t^2} 2\int_0^1 te^t dt = 2(te^t\Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dx) = 2(e - e^t\Big|_0^1) = 2.$$

解答题

1．求 $F(x)=\int_0^x t(t-4)dt$ 在区间 $[-1,5]$ 上的最大值与最小值；

解：$F'(x)=(\int_0^x t(t-4)dt)'=x(x-4)$，令 $F'(x)=0$ 得驻点 $x_1=0, x_2=4$. 又

$F(x)=\int_0^x t(t-4)dt=(\frac{1}{3}t^3-2t^2)\Big|_0^x=\frac{1}{3}x^3-2x^2$.　从而有

$F(-1)=-\frac{7}{3}$，$F(0)=0$，$F(4)=-\frac{32}{3}$, $F(5)=-\frac{25}{3}$，

所以在区间 $[-1,5]$ 上的最大值为 $F(0)=0$，最小值为 $F(4)=-\frac{32}{3}$.

2．设 $\int_0^x f(t)dt = x^2(1+x)$，求 $f(0), f'(0)$；

解：$f(x)=(\int_0^x f(t)dt)'=(x^2(1+x))'=2x+3x^2$，$f'(x)=2+6x$，故 $f(0)=0$，$f'(0)=2$.

3．设 $f(2x+1)=e^x$，求 $\int_3^5 f(x)dx$；

解：令 $x=2t+1$，则 $dx=2dt$，当 $x=3$ 时，$t=1$；当 $x=5$ 时，$t=2$. 于是

$\int_3^5 f(x)dx=\int_1^2 f(2t+1)\cdot 2dt=2\int_1^2 e^t dt=2e^t\Big|_1^2=2(e^2-e)$.

4．若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{9}{4}x^2\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$；

解：令 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{9A}{4}x^2$，从而有

$A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\frac{1}{1+x^2}+\frac{9}{4}Ax^2)dx=(\arctan x+\frac{3A}{4}x^3)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}A$，解得 $A=\pi$.

5．　计算由曲线 $y=x$、$xy=1$ 及 $x=2$ 围成的平面图形的面积。

解：所求面积为 $A=\int_1^2(x-\frac{1}{x})dx=(\frac{1}{2}x^2-\ln x)\Big|_1^2=(2-\ln 2)-(\frac{1}{2}-\ln 1)=\frac{3}{2}-\ln 2.$

6．　计算由抛物线 $x^2-4=2y$ 与直线 $x=y-2$ 所围成的平面图形的面积。

解：所求面积为

$$A=\int_{-2}^4((x+2)-\frac{x^2-4}{2})dx=(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x)\Big|_{-2}^4=(-\frac{32}{3}+8+16)-(\frac{4}{3}+2-8)=18.$$

7．　计算由曲线 $y=x^2, y=4-x^2$ 所围成的平面图形绕 x 轴与 y 轴旋转一周产生的旋转体的体积。

解：绕 x 轴旋转所得旋转体体积为

$$V_x=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-x^2)^2dx-\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2)^2dx=\pi\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(16-8x^2)dx=\pi(16x+\frac{8}{3}x^3)\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}=\frac{128\sqrt{2}}{3}\pi.$$

绕 y 轴旋转所得旋转体体积为

$$V_y=\pi\int_0^2 x^2dy+\pi\int_2^4 x^2dy=\pi\int_0^2 ydy+\pi\int_2^4(4-y)dy=\frac{\pi}{2}y^2\Big|_0^2+\pi(4y-\frac{1}{2}y^2)\Big|_2^4=4\pi.$$

8．已知 $f(0)=1, f(2)=4, f'(2)=2$，求 $\int_0^1 xf''(2x)dx$.

解：$\int_0^1 xf''(2x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x[f'(2x)]'dx=\frac{1}{2}xf'(2x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(2x)dx=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1$

$$=\frac{1}{2}f'(2)-\frac{1}{4}f(2)+\frac{1}{4}f(0)=\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{4}\times 4+\frac{1}{4}\times 1=\frac{1}{4}.$$

第六章 微分方程

1.微分方程 $x\frac{d^2y}{dx^2}-2(\frac{dy}{dx})^3+5xy=0$ 是___二_____阶微分方程。

2.微分方程 $\frac{dy}{dx}=3x^2y$ 的通解是____ $y=Ce^{x^3}$ ______。

3.方程 $y'+xy=0$ 的通解是__ $y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$; ________。

4.求下列微分方程满足所给初始条件的特解

(1) $y'=e^{3x-4y}$, $y|_{x=0}=0$; (2) $\frac{x^2}{1+y}dx+\frac{y^2}{1+x}dy=0$, $y|_{x=0}=1$. 的通解。

解:(1)分离变量,两端积分有 $\int e^{4y}dy=\int e^{3x}dx$,解得原方程的通解为 $\frac{1}{4}e^{4y}=\frac{1}{3}e^{3x}+C$.又 $y|_{x=0}=0$,故 $\frac{1}{4}e^0=\frac{1}{3}e^0+C$,从而 $C=-\frac{1}{12}$,所以所求特解为 $\frac{1}{4}e^{4y}=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{12}$,即 $y=\frac{1}{4}\ln(\frac{4}{3}e^{3x}-\frac{1}{3})$.

(2)分离变量,两端积分有 $\int(1+y)y^2dy=-\int(1+x)x^2dx$,解得原方程的通解为

$$\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{4}y^4=-(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4)+C,\text{ 即 }4x^3+3x^4+4y^3+3y^4=C.$$

又 $y|_{x=0}=0$,故 $4\times 0^3+3\times 0^4+4\times 1^3+3\times 1^4=C$,从而 $C=7$,所以所求特解为 $4x^3+3x^4+4y^3+3y^4=7$.

5.求微分方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$ 的通解。

解:原方程是一阶线性非齐次微分方程 $P(x)=-\frac{2}{1+x}, Q(x)=(x+1)^3$,又

$$e^{-\int P(x)dx}=e^{\int\frac{2}{1+x}dx}=e^{2\int\frac{1}{1+x}d(1+x)}=e^{2\ln|1+x|}=(1+x)^2,$$

故原方程的通解为

$$y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}=(\int(x+1)^3(1+x)^{-2}dx+C)(1+x)^2$$

$$=(\frac{1}{2}(1+x)^2+C)(1+x)^2=\frac{1}{2}(1+x)^4+C(1+x)^2.$$

6. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}-2xy=xe^{-x^2}$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解。

解:原方程是一阶线性非齐次微分方程 $P(x)=-2x, Q(x)=xe^{-x^2}$,又 $e^{-\int P(x)dx}=e^{\int 2xdx}=e^{x^2}$,故原方程的通解为

$$y=(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)e^{-\int P(x)dx}=(\int xe^{-x^2}e^{-x^2}dx+C)e^{x^2}=(-\frac{1}{4}\int e^{-2x^2}d(-2x^2)+C)e^{x^2}$$

$$=(-\frac{1}{4}e^{-2x^2}+C)e^{x^2}=-\frac{1}{4}e^{-x^2}+Ce^{x^2}.$$

又 $y(0)=1$，所以 $-\frac{1}{4}e^{-0^2}+Ce^{0^2}=1$，所以 $C=\frac{1}{4}$，从而所求特解为 $y=\frac{1}{4}(e^{x^2}-e^{-x^2})$.

第七章 多元函数微分部分

一、基本知识点

1.求已知多元函数的偏导数及全微分：以二元函数 $z=f(x,y)$ 为例，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}，$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)。$$

注意：对哪个自变量求偏导数，则将其余自变量看成常数。

全微分公式 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$。

2.复合函数求导及隐函数的导数。

1)复合函数导数的链式法则：设 $z=f(u,v),u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}。$$

2)隐函数的导数：

由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$。

由方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的二元隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$。

3)半抽象函数的一阶偏导数：若 $f(u,v)$ 可偏导，且 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1\frac{\partial \varphi}{\partial x}+f_2\frac{\partial \psi}{\partial x}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1\frac{\partial \varphi}{\partial y}+f_2\frac{\partial \psi}{\partial y}。$$

3.求一个已知二元函数 $z=f(x,y)$ 的极值。

步骤：1)令 $f_x(x,y)=0, f_y(x,y)=0$，求得驻点。

2)求二阶导数 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。

3)在每个驻点处求 B^2-AC，若 $B^2-AC<0$，则驻点是极值点。进一步，$A>0$ 时，驻点为极小值点；$A<0$ 时，驻点为极大值点。

二、复习题

填空题

1. 若 $z=e^{xy}+yx^2$，则 $\frac{\partial Z}{\partial y}=$______；
2. 若 $f(x+y,y)=x^2-y^2$，则 $f(x,y)=$________；
3. 函数 $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}+\ln(x^2+y^2-1)$ 的定义域是 $D=$ _______；
4. 已知 $f(x,y)=e^{x^2y}$，则 $f'_x(x,y)=$________；
5. 若 $f(x,y)=5x^2y^3$,则 $f'_x(0,1)=$_______ ；
6. 二元函数 $z=xe^{xy}$ 的全微分 $dz=$___________；

选择题

1. 设函数 $z=\ln(xy)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ (　　　　)

(A) $\frac{1}{y}$　　(B) $\frac{x}{y}$　　(C) $\frac{1}{x}$　　(D) $\frac{y}{x}$

2. 设 $z=\sin(xy^2)$, 则 $\frac{\partial Z}{\partial x}=$ (　　　　)

(A) $xy\cos(xy^2)$　(B) $-xy\cos(xy^2)$　(C) $-y^2\cos(xy^2)$　(D) $y^2\cos(xy^2)$

3. 设 $z=3^{xy}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　　　）

(A) $y3^{xy}$　　(B) $3^{xy}\ln 3$　　(C) $xy3^{xy-1}$　　(D) $y3^{xy}\ln 3$

计算与应用题(写出求解过程或写出求解问题的 matlab 指令)

1. 设已知 $z=x\ln(x+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$。
2. 设函数 $z=e^{xy}+yx^2$，求 dz。
3. 已知 $z=\sqrt{u}+\cos v, u=x^2y, v=y^3-x^3$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。
4. 求由方程 $e^{x+yz}-x^2y^3z^2+1=0$ 所确定的二元隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数。
5. 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+x^2y+\ln z=0$ 确定，求 dz。
6. 已知一元函数 $\varphi(u)$ 可微，$z=x^2+\varphi(x^3-y^2)$ 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。
7. 已知二元函数 $f(u,v)$ 可微，$z=f(x+y,x^2-y^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$。
8. 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

要造一个容量一定的长方体箱子，问怎样的尺寸，才能使所用的材料最省。