Poročilo drugega dela 2. domače naloge

Rok Klobučar
Ljubljana, Julij 2024

I. Uvod

Naš cilj je izračunati določen integral $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ funkcije f(x). Tu je F nedoločen integral funkcije f. Če ne znamo izračunati nedoločenega inetegrala F, smo v težavah. Npr. za $f(x) = e^{-x^2}, g(x) = \frac{sin(x)}{x}, h(x) = x \cdot tan(x)$. Prav tako ne moremo točno izračunati vrednosti integrala, če imamo funkcijo podano samo na neki množici točk.

II. Navodilo naloge - Gauss-Legendrove kvadrature

Izpelji Gauss-Legendreovo integracijsko pravilo na dveh točkah

$$\int_0^h f(x)dx = Af(x_1) + Bf(x_2) + R_f$$

vključno s formulo za napako R_f. Izpelji sestavljeno pravilo za $\int_a^b f(x)dx$ in napiši program, ki to pravilo uporabi za približno računanje integrala. Oceni, koliko izračunov funkcijske vrednosti je potrebnih, za izračun približka za

$$\int_0^5 \frac{\sin x}{x} dx$$

na 10 decimalk natančno.

III. Splošna rešitev

1) Gaussove kvadraturne formule: NC pravila za integriranje so oblike

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{j=0}^{n} w_j \cdot f(xj)$$

,

kjer so točke x_j enakomerno razporejeni vozli, w_j pa uteži. Vemo pa že iz poglavja o interpolacijskih polinomih, da ekvidistantne točke niso vedno najboljša izbira. Rešili se bomo ekvidistantnih vozlov v kvadraturnih formulah. V formuli bomo izbirali vozle in koeficiente na optimalen način, tako da maksimiziramo stopnjo natančnosti, tj. integracijsko pravilo bo točno za polinome najvišjih možnih stopenj. Imamo n+1 prostih točk $x_j \in [a, b]$,

$$a \le x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n \le b$$

.

in n+1 realnih koeficientov w_j, torej skupaj 2n+2 neznank.

2) Primer najboljših vozlov za interval [-1, 1]: Oglejmo si primer n = 1 (2 točki) na primeru intervala [-1, 1]. Poiščimo w_0, w_1, x_0, x_1, tako da velja

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \approx w_0 \cdot f(x_0) + w_1 \cdot f(x_1)$$

,

pri čemer je aprokosimacija kar se da točna.

Pošičimo w_0, w_1, x_0, x_1 tako da bi aproksimacija točna za polinome stopnje največ 3:

$$f(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3$$

.

To pomeni, da mora za vsak $c_0, c_1, c_2, c_3 \in R$ veljati:

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^1 (c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3)\,dx =$$

$$= w_0 \cdot (c_0 + c_1 \cdot x_0 + c_2 \cdot x_0^2 + c_3 \cdot x_0^3) + w_1 \cdot (c_0 + c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_1^2 + c_3 \cdot x_1^3)$$

,

Desno stran preuredimo na konstantne, linearne, kvadratične in kubične člene, ter dobimo, da je naslednji izraz

$$c_0 \cdot (w_0 + w_1 - \int_{-1}^1 1\,dx) + c_1 \cdot (w_0 \cdot x_0 + w_1 \cdot x_1 - \int_{-1}^1 x\,dx) +$$

$$+ c_2 \cdot (w_0 \cdot x_0^2 + w_1 \cdot x_1^2 - \int_{-1}^1 x^2\,dx) + c_3 \cdot (w_0 \cdot x_0^3 + w_1 \cdot x_3 - \int_{-1}^1 x^3\,dx)$$

ničelen. Ker so koeficienti c_0, c_1, c_2, c_3 poljubni, morajo biti koeficienti pri njih ničelni.

Od tod sledi:

$$w_0 + w_1 = \int_{-1}^1 1\,dx = 2$$

$$w_0 \cdot x_0 + w_1 \cdot x_1 = \int_{-1}^1 x\,dx = 0$$

$$w_0 \cdot x_0^2 + w_1 \cdot x_1^2 = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$w_0 \cdot x_0^3 + w_1 \cdot x_1^3 = \int_{-1}^1 x^3\,dx = 0$$

Z nekaj algebre pridemo do:

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = 1$$

$$x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sledi:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

3) Posplošitev na interval [a, b]: Z linearno substitucijo

$$t = a_0 + a_1 \cdot x$$

$$t(a) = -1$$

$$t(b) = 1$$

preslikamo interval [a, b] na [-1, 1].
Velja $a_0 = -\frac{b+a}{b-a}$ in $a_1 = \frac{2}{b-a}$ ter

$$x = \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b+a}{2}$$

$$dx = \frac{b-a}{2}\, dt$$

Sledi:

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} f(\frac{(b-a)\cdot t + b + a}{2}) \cdot \frac{b-a}{2}\, dt$$

in lahko uporabimo kvadraturno formulo nad [-1, 1].

Z uporabo točk, n = 1, smo dobili točen integral za polinom stopnje največ $2 \cdot 1 + 1 = 3$

4) Napaka R_f: Napaka R_f pri Gauss-Legendreovi integraciji z dvema točkama je dana z izrazi višjih odvodov funkcije f. V splošnem primeru napako za za integral $\int_a^b f(x)\, dx$ lahko ocenimo kot:

$$R_f = -\frac{(b-a)^5}{2880} \cdot f^{(4)}(\epsilon)$$

kjer je $\epsilon \in [a, b]$.

5) Sestavljeno pravilo: Za povečanje natančnosti lahko uporabimo sestavljeno pravilo Gauss-Legendreove integracije. Interval $[a, b]$ razdelimo na n enakih podintervalov. Nato uporabimo Gauss-Legendreovo pravilo na vsakem podintervalu.

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx \approx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2} \cdot [f(x_i + \frac{h}{2} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})) + f(x_i + \frac{h}{2} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}}))]$$

kjer je $h = \frac{b-a}{n}$ in $x_i = a + i \cdot h$.

IV. Primer

Pripravili smo funkcijo **gaussLegendre**, ki je osnovana na Gauss-Legendreovem integracijskem pravilu. Nato smo ustvarili funkcijo **Domaca02_2**, ki uporabi pripravljeno funkcijo.

Funkcijo smo poklicali v datoteki **demo.jl**. Za podane vhodne podatke dobimo naslednje rezultate:

```
Priblizek: 1.5499312449496918
```

```
Stevilo korakov: 9
```

Preverili smo rezultat z našo in vgrajeno funkcijo **quadgk** iz knjižnice **QuadGK**. Funkcija quadgk implementira adaptivno Gauss-Kronrodovo kvadraturo. Adaptivna kvadratura pride v poštev, ko želimo visoko natančnost za splošne vrste funkcij, katerih lastnosti niso vnaprej znane. Rezultat se razlikuje na 12. decimalki:

```
Domaca02_2: 1.5499312449496918
quadgk:     1.5499312449446743
```

Koda je dostopna na: https://github.com/Hatterok/NM