Poročilo 3. domače naloge

Rok Klobučar
Ljubljana, Julij 2024

I. Uvod

1) Diferencialna enačba: Diferencialna enačba (DE) je enačba oblike:

$$F(t, x, x', x'', ..., x^{(n)})) = 0,$$

kjer je $x = x(t)$ odvisna spremenljivka, t neodvisna spremenljivka, x' pa označuje odvod x po t.

Če je $y = y(t)$ odvisna spremenljivka, x pa neodvisna, potem je DE oblike

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Ključna lastnost DE je ta, da poleg neodvisne spremenljivke x in odvisne spremenljivke y nastopajo še odvodi odvisne spremenljivke $y', ...y^{(n)}$.

Rešitev DE je (dovoljkrat odvedljiva) funkcija, ki zadošča enačbi na definicijskem območju D neodvisne spremenljivke

2) Numerično reševanje DE: Na intervalu $[a, b]$ rešujemo DE prvega reda

$$y' = f(x, y)$$

$$y(a) = y_0$$

Interval $[a, b]$ razdelimo z zaporedjem točk

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Z y_i označimo približek za rešitev v točki x_i. Označimo dolžino koraka z $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Razliko med približkom in točno rešitvijo v x_i pišemo z $g_i = y_i - y(x_i)$ in jo imenujemo globalna napaka v x_i.

Razliko med priblizkom in točno rešitvijo DE

$$z' = f(x, z),$$

$$z(x_{i-1}) = y_{i-1}$$

v x_i pišemo z $l_i = y_i - z(x_i)$ in jo imenujemo lokalna napaka v x_i.

Globalno napako lahko ocenimo s pomočjo lokalnih napak: $|g_i| \leq |l_1| + |l_2| + ... + |l_i|$.

II. Navodilo naloge - Matematično nihalo

Kotni odmik $\theta(t)$ v radianih) pri nedušenem nihanju nitnega nihala opišemo z diferencialno enačbo

$$\frac{g}{l}\sin(\theta(t)) + \theta''(t) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0,\ \theta'(0) = \theta'_0,$$

kjer je $g = 9.80665 m/s^2$ težni pospešek in l dolžina nihala. Napišite funkcijo nihalo, ki računa odmik nihala ob določenem času. Enačbo drugega reda prevedite na sistem prvega reda in računajte z metodo Runge-Kutta četrtega reda:

$$\begin{aligned}
k_1 &= h\, f(x_n, y_n) \\
k_2 &= h\, f(x_n + h/2, y_n + k_1/2) \\
k_3 &= h\, f(x_n + h/2, y_n + k_2/2) \\
k_4 &= h\, f(x_n + h, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6.
\end{aligned}$$

Klic funkcije naj bo oblike:

odmik=nihalo(l,t,theta0,dtheta0,n)

- kjer je odmik enak odmiku nihala ob času t,
- dolžina nihala je l,
- začetni odmik (odmik ob času 0) je theta0
- in začetna kotna hitrost (θ'(0)) je dtheta0,
- interval [0,t] razdelimo na n podintervalov enake dolžine.

Primerjajte rešitev z nihanjem harmoničnega nihala. Za razliko od harmoničnega nihala (sinusno nihanje), je pri matematičnem nihalu nihajni čas odvisen od začetnih pogojev (energije). Narišite graf, ki predstavlja, kako se nihajni čas spreminja z energijo nihala.

III. Splošna rešitev

1) Metode Runge-Kutta: Ideja teh metod je, da za aproksimacijo odvoda na intervalu $[x_n, x_{n+1}]$ ne upostevamo odvoda le v točki x_n, temveč neko uteženo povprečje odvodov na $[x_n, x_{n+1}]$.

Splošna RK metoda je oblike:

$$y_{n+1} = y_n + b_1 \cdot k_1 + b_2 \cdot k_2 + ... + b_s \cdot k_s$$

$$k_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_n + c_2 \cdot h, y_n + a_{2,1} \cdot k_1)$$

$$k_3 = h \cdot f(x_n + c_3 \cdot h, y_n + a_{3,1} \cdot k_1 + a_{3,2} \cdot k_2)$$

$$k_s = h \cdot f(x_n + c_s \cdot h, y_n + a_{s,1} \cdot k_1 + ... + a_{s,s-1} \cdot k_{s-1})$$

Uporabili smo RK metodo 4. stopnje.

2) Nihajni čas: Osnovna formula za nihajni čas nihala (pod predpostavko majhnih odmikov, kjer je sinusni člen lahko aproksimiran z argumentom) je:

$$T_0 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pri večjih odmikih ta aproksimacija ni več točna. Popravki za nihajni čas pri večjih kotnih odmikih vključujejo dodatne člene, ki so odvisni od začetne amplitude. Uporabili smo naslednjo aproksimacijo:

$$T(\theta_0) = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot (1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \frac{11 \cdot \theta_0^4}{3072})$$

IV. PRIMER

Pripravili smo funkcijo **runkeKutta**, ki je osnovana na metodi Runge-Kutta 4. reda. Nato smo ustvarili funkcijo **nihalo**, ki uporabi pripravljeno funkcijo.

Funkcijo smo poklicali v datoteki **demo.jl**.

Uporabili smo naslednje vhodne podatke:

Dolžina nihala: $l = 1.0$

Začetni odmik $theta0 = 0.2$

Začetna kotna hitrost $dtheta0 = 0.0$

Čas $t = 10.0$

Število podintervalov $n = 1000$

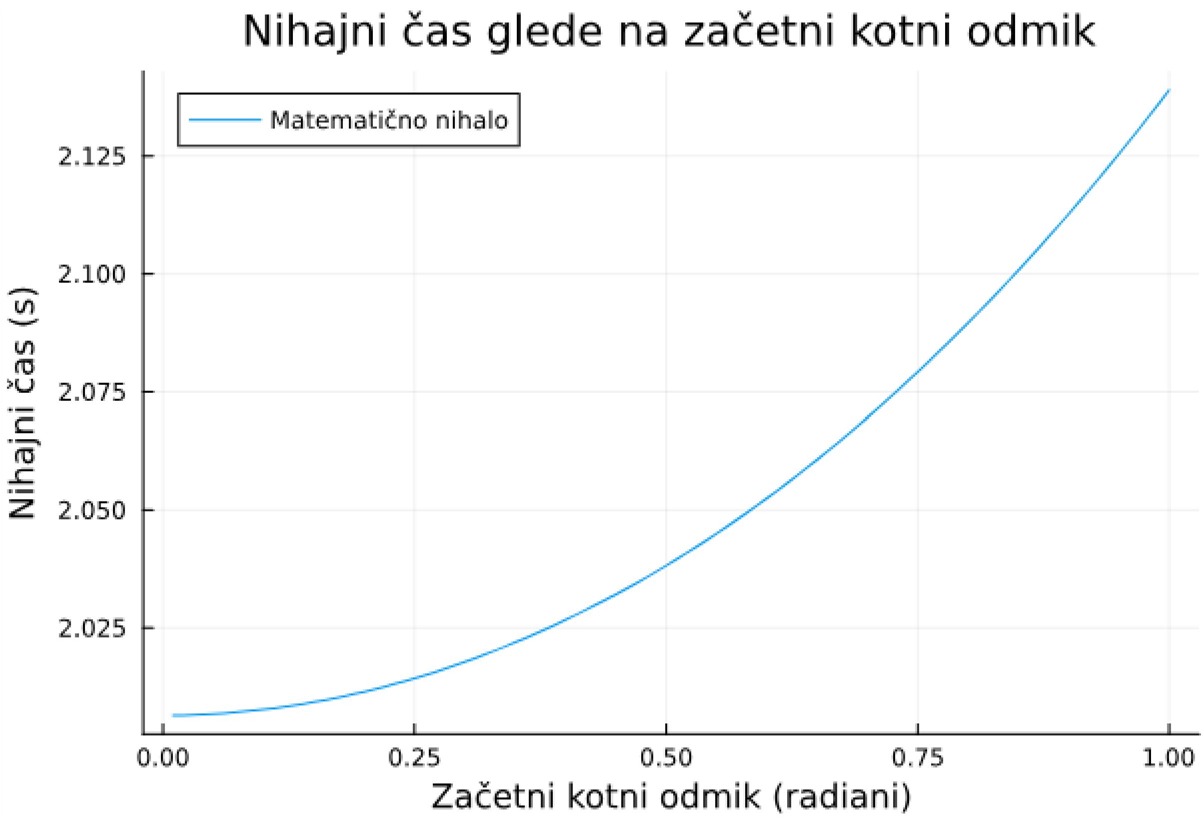
in dobili naslednje rezultate:

```
Odmik nihala po casu 10.0 s
je 0.19682285405531996 radianov
```

Izračunali smo odmik pri harmoničnem nihalu:

```
Odmik harmonicnega nihala po casu 10.0 s
je 0.19899372574676744 radianov
```

Izrisali smo tudi graf odvisnosti nihajnega časa glede na začetni kotni odmik. Graf jasno prikazuje, kako se nihajni čas povečuje z večanjem začetnega kotnega odmika, kar je posledica nelinearne odvisnosti nihajnega časa od amplitude nihanja.



Koda je dostopna na: https://github.com/Hatterok/NM