Poročilo prvega dela 2. domače naloge

Rok Klobučar
Ljubljana, Julij 2024

I. Uvod

Naš cilj je izračunati določen integral $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ funkcije f(x). Tu je F nedoločen integral funkcije f. Če ne znamo izračunati nedoločenega inetegrala F, smo v težavah. Npr. za $f(x) = e^{-x^2}, g(x) = \frac{sin(x)}{x}, h(x) = x \cdot tan(x)$. Prav tako ne moremo točno izračunati vrednosti integrala, če imamo funkcijo podano samo na neki množici točk.

II. Navodilo naloge - Porazdelitvena funkcija normalne slučajne spremenljivke

Napišite učinkovito funkcijo, ki izračuna vrednosti porazdelitvene funkcije za standardno normalno porazdeljeno slučajno spremenljivko $X \sim N(0, 1)$.

$$\Phi(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

III. Splošna rešitev

1) Enostavno Simpsonovo pravilo: Računamo integral $\int_a^b p_2(x)\,dx$ pri katerem je p_2 polinom stopnje 2. Uporabimo formulo za enostavno Simpsonovo pravilo, ki aproksimira integral, kjer je $h = \frac{b-a}{2}$:

$$\frac{h}{3} \cdot (p_2(a) + 4 \cdot p_2(a+h) + p_2(a + 2 \cdot h))$$

2) Sestavljeno Simpsonovo pravilo: Vzemimo ekvidistantno particijo $P = \{x_0 = a < ... < x_n = b\}$ intervala $[a, b]$ na sodo število enako dolgih intervalov in na zaporednih trojicah točk uporabimo osnovno Simpsonovo pravilo ($h = x_{i+1} - x_i$):

$$\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h}{3} \cdot (f(x_{2i}) + 4 \cdot f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}))$$

3) Adaptivno Simpsonovo pravilo: Ideja je povsem enaka kot pri adaptivnem trapeznem pravilu. Radi bi uporabili čim večji h povsod, kjer je to mogoče. Če s S(h) označimo vrednost sestavljenega Simpsonovega pravila s korakom dolžine h, potem napako E ocenimo iz $S(h)$ in $S(\frac{h}{2})$.

Postopek:

1. Najprej izračunamo $S(b-a)$ in $S(\frac{b-a}{2})$.

2. Iz $\int_a^b f(x)\,dx = S(h) + C_1 \cdot h^4 = S(\frac{h}{2}) + C_1 \cdot (\frac{h}{2})^4$ izrazimo $C_1 \cdot (\frac{h}{2})^4 = \frac{S(\frac{b-a}{2}) - S(b-a)}{15}$ kar je naša ocena napake E. Če je E dovolj majhna, vrnemo $S(\frac{b-a}{2}) + E$ in končamo.

3. Če je E prevelik, ponovimo zgornji postopek ločeno za podintervala $[a, \frac{b-a}{2}]$ in $[\frac{b-a}{2}, b]$, pri čemer naj bo napaka na vsakem največ polovica začetne tolerance.

4. Rekurzivno nadaljujemo zgornji postopek in dobimo oceno integrala, pri čemer delilne točke ne bodo enakomerno razporejene po intervalu $[a, b]$.

IV. Primer

Pripravili smo funkcijo **simpsonovoAdaptivno**, ki je osnovana na Adaptivnem Simpsonovem pravilu. Nato smo ustvarili funkcijo **Domaca02_1**, ki uporabi pripravljeno funkcijo.

Funkcijo smo poklicali v datoteki **demo.jl**. Za spodnjo mejo $-\infty$, smo vzeli dovolj dober približek -9999999999. Če za vrednost x vzamemo 0,69, dobimo naslednje rezultate:

```
Approksimacija: 0.7549029063256905

Stevilo korakov: 34160

Napaka: 3.280659504068741e-17
```

Preverili smo rezultat z našo in vgrajeno funkcijo **quadgk** iz knjižnice **QuadGK**. Funkcija quadgk implementira adaptivno Gauss-Kronrodovo kvadraturo. Adaptivna kvadratura pride v poštev, ko želimo visoko natančnost za splošne vrste funkcij, katerih lastnosti niso vnaprej znane. Obakrat dobimo enak rezultat:

```
Domaca02_1: 0.7549029063256905
quadgk:     0.7549029063256905
```

Komentar: Vgrajena funkcija quadgk ne deluje s spodnjo mejo $-\infty$, niti s približkom -9999999999. Deluje zgolj z zelo slabim približkom -9000.

Koda je dostopna na: https://github.com/Hatterok/NM