



---

**HOCHSCHULE COBURG**

**Hochschule für angewandte Wissenschaften  
Coburg**

Institut für Informatik

**Asymmetrische Zahlensysteme**

**Bachelorarbeit**

**von**

**Michael Krasser**

**Betreuer: Prof. Dr. Quirin Meyer**

**Coburg, 5. Februar 2019**

---

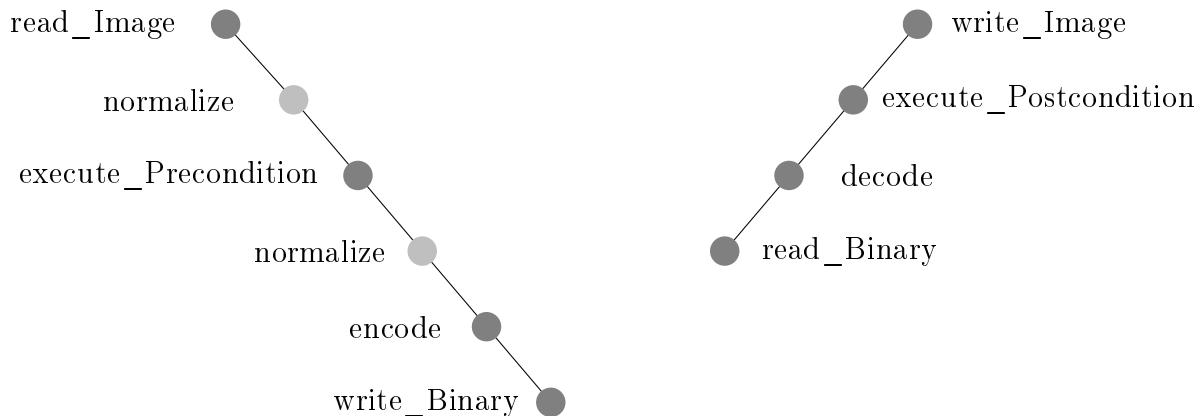
# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2 Kompression und Dekompression</b>	<b>4</b>
2.1 Grundlagen . . . . .	4
2.2 Über die Möglichkeit der Datenkompression . . . . .	4
2.3 Entropiekodierer . . . . .	5
2.3.1 Die Entropie . . . . .	5
2.3.2 Kompression nach dem Verfahren von Shannon . . . . .	6
2.3.3 Kompression nach dem Verfahren von Fano . . . . .	7
2.3.4 Huffman-Algorithmus . . . . .	7
2.3.5 Erweiterte Huffman-Codierung . . . . .	9
2.3.6 Arithmetisches Kodieren . . . . .	10
<b>3 Kompression von Bilddateien durch Anwendung von Filtern</b>	<b>13</b>
3.1 Verwendete Filter . . . . .	13
3.1.1 Filtertyp 0: NONE . . . . .	13
3.1.2 Filtertyp 1: SUB . . . . .	13
3.1.3 Filtertyp 2: UP . . . . .	14
3.1.4 Filtertyp 3: AVERAGE-2 . . . . .	15
3.1.5 Filtertyp 4: AVERAGE-3 . . . . .	16
3.1.6 Filtertyp 5: AVERAGE-4 . . . . .	17
3.1.7 Filtertyp 6: AVERAGE-5 . . . . .	18
3.1.8 Filtertyp 7: AVERAGE-6 . . . . .	18
3.1.9 Filtertyp 8: AVERAGE-7 . . . . .	19
3.1.10 Filtertyp 9: AVERAGE-8 . . . . .	20
3.1.11 Filtertyp 10: PAETH . . . . .	21
3.2 Fazit zur Wahl der Filter . . . . .	22
<b>4 Asymmetrische Zahlensysteme</b>	<b>23</b>
4.1 Einführung . . . . .	23
4.2 Einführendes Beispiel: Uniform binary variant streaming (uABS) . . . . .	24
4.3 uABS für n-elementige Symbolalphabete (uANS) . . . . .	25
4.4 Allgemeine Asymmetrische Zahlensysteme (ANS) . . . . .	31
4.5 Vergleich der beiden Verfahren . . . . .	33
4.6 Beschleunigung des uANS-Verfahrens . . . . .	34
<b>5 Vergleich zu Huffmann und Arithmetischem Kodieren</b>	<b>34</b>
<b>6 Vektorisierung</b>	<b>35</b>
6.1 Normalisierung . . . . .	35
6.1.1 Normalisierung im Rahmen des uANS-Verfahrens . . . . .	35
6.1.2 Normalisierung im Rahmen des ANS-Verfahrens . . . . .	35

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
<b>7 Ergebnisse</b>	<b>38</b>
7.1 Ergebnisse der Normalisierung . . . . .	38
7.2 Ergebnisse der Filterung . . . . .	41
7.2.1 Verhalten der Entropie unter Verwendung der Filterung und Nor- malisierung . . . . .	52
<b>8 Kommandozeilenparameter</b>	<b>53</b>
<b>9 Literaturverzeichnis</b>	<b>55</b>

# 1 Einleitung

Im Zeitalter der Digitalisierung werden immer größere Datenmengen produziert, gespeichert und übertragen, was sowohl den Einsatz als auch die Suche nach effizienten Verfahren zur Datenkompression unerlässlich macht. Hierfür schlägt Jaroslaw Duda[3] ein neues Verfahren mit dem Namen „asymmetrische Zahlensysteme“ vor, das seitdem von Unternehmen wie Facebook[9], Google[11] und Apple[10] verwendet wird. Im Rahmen dieser Bachelorarbeit über asymmetrische Zahlensysteme sollen zunächst grundlegende Begriffe aus dem Bereich der Codierungstheorie geklärt und gängige Entropiecodierer besprochen werden. Anschließend soll ein Teil der in [2], [3] und [1] angegebene Verfahren untersucht verallgemeinert und verglichen werden. Ziel dieser Arbeit ist dann die Anwendung der beiden Verfahren auf die Kompression von Bildern. Zusätzlich soll der Einfluß einer Vorfilterung - wie sie bei dem png-Verfahren verwendet wird - untersucht werden. Hierfür werden die verwendeten Filter und die beiden Verfahren in C++ implementiert. Zunächst wird das Bild dann mit einem Filter vorkonditioniert und anschließend mit einem der besprochenen Verfahren komprimiert. Bei der Dekomprimierung wird in umgekehrter Reihenfolge verfahren. Insbesondere sollen die Schritte des folgenden Diagramms besprochen werden<sup>1</sup>. Im Anhang findet sich eine Anleitung zur Bedienung des Programms.




---

<sup>1</sup> Die Ausführung erfolgt in Leserichtung. Als dunkelgrau gekennzeichnete Schritte werden in jedem Fall ausgeführt, die zweite Normalisierung ist nur bei dem Verfahren UANS obligat, die erste Normalisierung ist optional.

## 2 Kompression und Dekompression

Dieser Abschnitt orientiert sich an[4] sowie [6] und klärt die wichtigsten Begriffe aus dem Bereich Datenkompression und stellt gängige Entropiecodierer vor.

### 2.1 Grundlagen

#### **Definition 2.1.1:**

Unter Datenkompression versteht man ein Paar  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  von Algorithmen - Datenkompressionschema genannt, mit folgenden Eigenschaften:

Der Algorithmus  $\mathcal{X}$  (*Kompression*) konstruiert für die Eingabe  $X$  eine Repräsentation  $X_c$ , die (möglichst) weniger Bits als  $X$  benötigt.

Der Algorithmus  $\mathcal{Y}$  (*Dekompression*) generiert zu gegebenem  $X_c$  die Rekonstruktion  $Y$ . Ein Datenkompressionschema heißt verlustfrei, wenn  $X = Y$ , ansonsten verlustbehaftet.

Des Weiteren definiert man zur Beurteilung der Qualität eines Komprimierungsschemas:

#### **Definition 2.1.2:**

Sei  $\mu_c$  die Anzahl der Bits von  $X_c$  und  $\mu$  die Anzahl der Bits von  $X$ . Dann heißt der durch  $\mu_c/\mu$  definierte Ausdruck Kompressionsquotient<sup>2</sup>.

### 2.2 Über die Möglichkeit der Datenkompression

Von einer Datenkompression spricht man, wenn ein Verfahren existiert, das eine bestimmte Repräsentation in eine andere überführt, die stets weniger Bits als die ursprüngliche benötigt, dann zeigt ein einfaches Abzählargument, dass es ein solches Verfahren nicht geben kann. Diese Argumentation wird in Arbeiten zum Thema Kolmogorov-Komplexität als sog. Inkompresibilitätsargument bezeichnet und begründet, warum sich bestimmte Bitfolgen nicht komprimieren lassen: Die Kolmogorov-Komplexität einer Bitfolge  $t$  ist definiert als die Länge des kürzesten „Programms“, welches  $t$  erzeugt<sup>3</sup>. Eine Bitfolge heißt unkomprimierbar, falls sie selbst ihre kürzeste Beschreibung ist. Trotzdem funktioniert die Datenkompression in der Praxis hervorragend:

- Einzelne Zeichen (Grundelemente des Alphabets) tauchen nicht mit der selben Wahrscheinlichkeit auf.  $\Rightarrow$  verschlüsselt wahrscheinlichere Zeichen mit weniger Bit als unwahrscheinlichere (Morse-Alphabet).
- Blöcke von Zeichen lassen sich aufgrund der Abhängigkeiten aufeinander folgender Ereignisse geschickt gemeinsam als lose unabhängige Folge einzelner Zeichen verschlüsseln.

---

<sup>2</sup> Der Kehrwert des Kompressionsquotienten wird auch Kompressionsfaktor genannt.

<sup>3</sup> Bei geeigneter Formalisierung des Begriffs „Programm“ ist die Kolmogorov-Komplexität bis auf eine additive Konstante wohldefiniert.[5]

- Information ist nicht zufällig, sondern enthält zahllose Regelmäßigkeiten.  
Eine Grundstrategie von Kompressionsverfahren beruht darauf, solche Regeln zu entdecken (z.B. Wörterbuchtechniken).
- Für oder von Menschen erzeugte Information ist nicht zusammenhangslos. Vielfach ist es möglich, verschiedene Gattungen von Information zu unterscheiden: Sei z.B. bekannt, dass die vorliegende Bitfolge einen ASCII-Text der englischen Sprache darstellt, so muss ein anderes Kompressionsverfahren (auf Byte-Ebene) als wenn die Bitfolge die zeilenweise Darstellung eines Schwarz-Weiß-Bildes repräsentiert (starke Abhängigkeiten von Bit zu Bit, zeilen- und spaltenweise).
- Oft kann auf eine exakte Rekonstruierbarkeit des Originals verzichtet werden, da gewisse Feinheiten vom menschlichen Auge oder Ohr nicht wahrgenommen werden: Frequenzen von Audiodaten, die für das menschliche Ohr gedacht sind und nicht wahrgenommen werden, können, von vornherein vernachlässigt werden.

## 2.3 Entropiekodierer

### 2.3.1 Die Entropie

#### Definition 2.3.1:

Gegeben sei eine diskrete Quelle  $Q$  mit den Symbolen  $x_1, \dots, x_N$  und dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_N$ .

Bezeichne  $I(x_i) = -\log_2(p_i)$  den Informationsgehalt des Symbols  $x_i$ . Die Entropie (mittlere Informationsgehalt) von  $Q$  ist definiert durch

$$H(Q) := \sum_{i=1}^N p(x_i) \cdot I(x_i) = - \sum_{i=1}^N p(x_i) \cdot \log_2(p(x_i)).$$

Die Entropie von  $Q$  heißt maximal, wenn  $H(Q) = \log_2(N)$ . Diese maximale Entropie wird mit  $H_0$  bezeichnet und heißt Entscheidungsgehalt.

#### Definition 2.3.2:

Entropiekodierung bezeichnet ein Verfahren, welches die Entropie einer Nachricht optimiert, d. h., der maximalen Entropie annähert.

Abschließend definieren wir den Begriff der *Redundanz und der erwarteten Länge* eines Codes:

#### Definition 2.3.3:

Sei  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_k\}$  ein Alphabet mit zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten

$$\{P(a_i) \mid i = 1, \dots, k\}.$$

Die Kodierung  $\mathcal{K} : \Sigma \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  besitzt die erwartete Länge

$$L(\mathcal{K}) := \sum_{i=1}^k P(a_i) \cdot |\mathcal{K}(a_i)|.$$

Der Term

$$r := L(\mathcal{K}) - H(\Sigma)$$

bezeichnet die Redundanz der Kodierung.

### 2.3.2 Kompression nach dem Verfahren von Shannon

Nach Shannon gilt:

**Satz 2.3.1:**

Für Jede Quelle  $Q$  und jede beliebige zugehörige Binärcodierung mit Präfix-Eigenschaft ist die zugehörige mittlere Codewortlänge  $L$  nicht kleiner als die Entropie  $H(Q)$ :  $H(Q) \leq L$

**Beweis:**

Siehe [7].

□

Um für einen gegebenen Text einen dekodierbaren Code mit minimaler Länge zu finden, geht man nach Shannon folgendermaßen vor:

- 1) Sortiere zu kodierende Symbole  $x_1, \dots, x_N$  nach fallender Auftrittswahrscheinlichkeit:  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N$ .
- 2) Bestimme für  $1 \leq i \leq N$  die Codewortlänge  $\mathcal{K}(x_i) = \lfloor -\log_2(p(x_i)) \rfloor$  jedes Zeichens aus seinem Informationsgehalt.
- 3) Berechne für  $1 \leq i \leq N$  die kumulierte Wahrscheinlichkeiten  $P(x_i) := \sum_{l=0}^{i-1} p(x_l)$ .
- 4) Die Codierung jedes Zeichens  $x_i$  ergibt sich dann aus den ersten  $\mathcal{K}(x_i)$  Zeichen der Mantisse der Binärdarstellung von  $P(x_i)$ .

**Beispiel 2.3.1:**

$x_i$	$p(x_i)$	$\mathcal{K}(x_i)$	$P(x_i)$	binär	Code
a	0.3	2	0	0.000...	00
b	0.3	2	0.3	0.0100...	01
c	0.2	3	0.6	0.1001...	100
d	0.1	4	0.8	0.1100...	1100
e	0.1	4	0.9	0.1110...	1110

Dieses Verfahren ist eines der ersten zur Erstellung von präfixfreien, längenvariablen Codes.

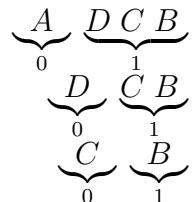
### 2.3.3 Kompression nach dem Verfahren von Fano

Ein weiteres Beispiel für einen Präfixcode ist die Shannon-Fano Codierung:

- 1) Sortiere zu kodierende Symbole  $x_1, \dots, x_N$  nach fallender Auftrittswahrscheinlichkeit:  $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_N$
- 2) Teile Menge der Symbole in 2 Teilmengen mit möglichst gleicher Wahrscheinlichkeit.
- 3) Kodiere linke Teilmenge mit 0, die rechte mit 1
- 4) Sind entstandene Teilmengen nicht einelementig, gehe zu 2.

#### Beispiel 2.3.2:

Gegeben sei das vierelementige Alphabet  $\{A, B, C, D\}$  mit zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten  $p_A = 0.4, p_B = 0.3, p_C = 0.2, p_D = 0.1$ . Man erhält  $A = 0, B = 111, C = 110, D = 10$



### 2.3.4 Huffman-Algorithmus

Um einen Code auch wieder eindeutig dekodieren zu können, muss er die Kraftsche Ungleichung erfüllen und zusätzlich noch präfixfrei sein, d. h. kein Codewort darf der Beginn eines anderen sein. (An andere Stelle setzen.....) Die Huffman-Kodierung ist eine Form der Entropiekodierung, die 1952 von David A. Huffman entwickelt und in [8] publiziert wurde. Die Kodierung ist ein Präfix-Code (also ein Code mit kleinster erwarteter Länge), der einer festen Anzahl von Quellsymbolen Codewörter mit variabler Länge zuordnet.

#### Algorithmus 2.3.1: (Huffman-Kodierung)

Sei  $\mathcal{A}$  ein Symbolalphabet,  $p_x = p(x)$  die relative Häufigkeit des Symbols  $x \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{C}$  das Codealphabet (Zeichenvorrat der Codewörter)  $m = |\mathcal{C}|$  die Mächtigkeit von  $\mathcal{C}$ .

#### Aufbau des Baumes

- 1) Erstelle für  $x \in \mathcal{A}$  einen Knoten mit zugehöriger Häufigkeit.
- Wiederhole folgende Schritte, bis nur noch ein Baum übrig ist:
  - i) Wähle die  $m$  Teilbäume mit der geringsten Häufigkeit in der Wurzel, bei mehreren Möglichkeiten die Teilbäume mit der geringsten Tiefe.
  - ii) Fasse diese Bäume zu einem neuen (Teil-)Baum zusammen.
  - iii) Notiere die Summe der Häufigkeiten in der Wurzel.

#### Konstruktion des Codebuchs

- 1) Ordne jedem Kind eines Knotens eindeutig ein Zeichen aus dem Codealphabet zu.

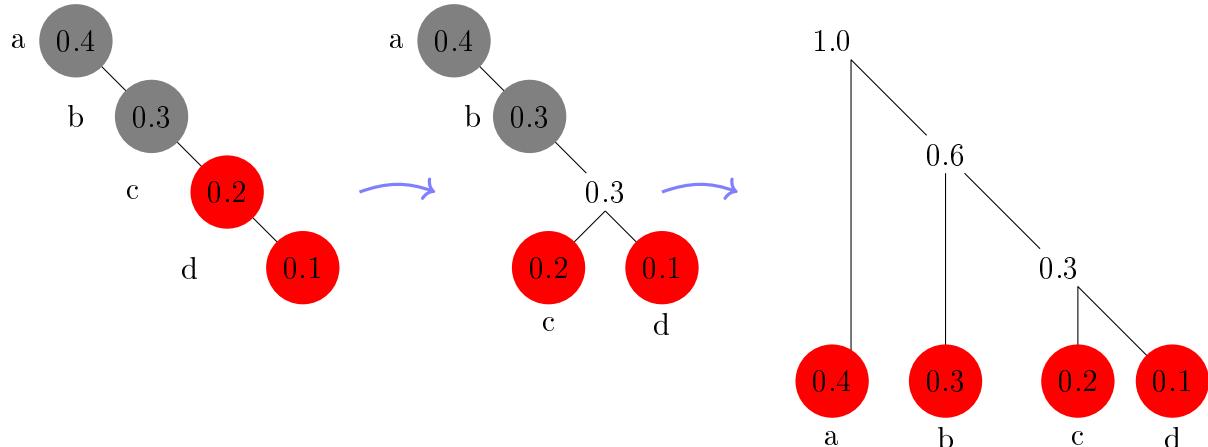
- 2) Lies für jedes Quellsymbol (Blatt im Baum) das Codewort aus: Beginne an der Wurzel des Baums. Die Codezeichen auf den Kanten des Pfades (in dieser Reihenfolge) ergeben das zugehörige Codewort.

**Beispiel 2.3.3:**

Die Nachricht  $aababcabcd$  soll auf Basis des Codealphabets  $\mathcal{C} = \{0, 1\}$  kodiert werden. Zunächst erhält man

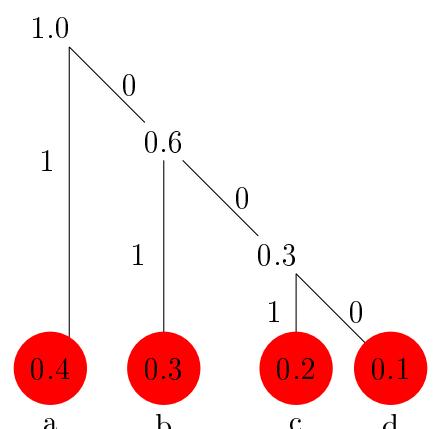
$$\mathcal{A} = \{a, b, c, d\} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} X & a & b & c & d \\ \hline P(X) & 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{array}$$

**Konstruktion des Huffman-Baums:**



**Konstruktion des Codebuchs:** Dazu versehen wir jeden linken Zweig mit einer 1, jeden rechten mit einer 0:

Symbol	Verschlüsselung
a	1
b	01
c	001
d	000



Damit kodiert sich die Nachricht  $a a b a b c a b c d$  zu 1 1 01 1 01 001 1 01 001 000.<sup>4</sup> In die-

<sup>4</sup> Bei der Dekodierung verfolgt man ausgehend von der Wurzel den entsprechende Pfad im Baum bis man an einem Blatt ankommt.

sem Fall erhält man für die Entropie und die erwartete Länge:

$$\begin{aligned} H(Q) &= -(0.4 * \log_2(0.4) + 0.3 * \log_2(0.3) + 0.2 * \log_2(0.2) \\ &\quad + 0.1 * \log_2(0.1)) = 1.84643934467 \\ L(\mathcal{K}) &= 0.4 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 = 1.9, \end{aligned}$$

d.h bei einer zu kodierenden Nachricht von 1000000 Symbolen sind etwa 28190 Symbole redundant.

### 2.3.5 Erweiterte Huffman-Codierung

Wir betrachten einführend folgendes Beispiel: Sei  $\Sigma = \{a, b\}$  mit  $p(a) = 0.9$ ,  $p(b) = 0.1$ . Dann liefert die Huffman-Kodierung

	p	Code
a	0.9	1
b	0.1	0

mit erwarteter Länge 1 Bits / Symbol und Entropie  $H(\Sigma) = 0.47$ . Die Redundanz  $r = 0.53$  beträgt also 113% der Entropie, d.h das der Code nicht komprimiert ist. Wir betrachten statt dessen das Alphabet

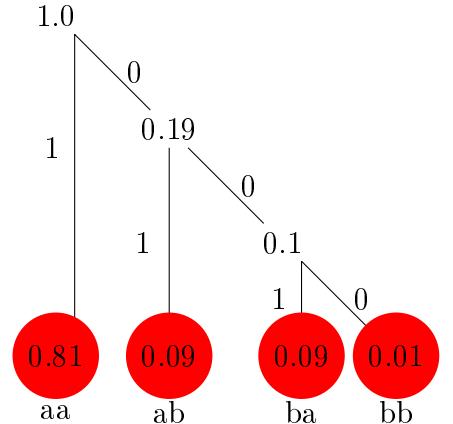
$$\Sigma^2 := \{aa, ab, ba, bb\}$$

mit  $p(aa) = (p(a))^2$ ,  $p(bb) = (p(b))^2$  und  $p(ab) = p(ba) = p(a) \cdot p(b)$ . Die Huffman-Kodierung liefert dann

Symbol	p	Verschlüsselung
aa	0.81	1
ab	0.09	01
ba	0.09	001
bb	0.01	000

$$H(\Sigma^2) = 0.937991187 \text{ Bits / Symbol}$$

$$L((K)) = 1.29 \text{ Bits / Symbol}$$



benutzt also nur noch 37% mehr als eine minimale Kodierung. Hierfür gilt folgender Sachverhalt:

#### Hilfssatz 2.3.1:

Für jedes Quellalphabet  $\Sigma$  gilt

$$H(\Sigma) \leq L(H^m) \leq H(\Sigma) + \frac{1}{m}.$$

Die Anfertigung der Statistiken für jedes Symbol ist praktisch kaum machbar. Abhilfe liefert das nächste Unterkapitel.

### 2.3.6 Arithmetisches Kodieren

Der letztes Unterabschnitt zeigte, dass die erweiterte Huffman-Kodierung eine Ausgabe mit sehr kleiner Redundanz produziert. Die Idee war die Folgende: Statt einzelne Symbole des Quellenalphabets wird die Folge der Symbole mit Hilfe des Huffman-Algorithmus codiert. Der Nachteil des Verfahrens ist aber, dass der Algorithmus Huffman-Codes für alle möglichen Folgen der Quellsymbole konstruieren muss, um einen Eingabetext zu codieren. Das heißt beispielsweise, dass für ein Quellenalphabet mit 256 Symbolen und für Folgen der Länge 3 der Algorithmus 16 777 216 neue Symbole betrachten muss. In diesem Kapitel betrachten wir arithmetische Codes: Statt einzelner Symbole werden Folgen von Symbolen codiert. Der Vorteil des Verfahrens ist dabei, dass jede Folge separat codiert werden kann. Das Schema des Verfahrens ist folgendes: Sei  $u_1 u_2 u_3 u_4 \in \Sigma$  ein Text. Berechne für die Folge eine numerische Repräsentation – einen Bruch zwischen 0 und 1, und für diese Repräsentation den binären Code.

Sei  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  das  $N$ -elementige Quellenalphabet mit zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten  $p(a_1), \dots, p(a_N)$  und  $t := a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$  ein Text. Für  $i = 0, \dots, N$  definiert man die kumulierte Wahrscheinlichkeit

$$F(i) := \sum_{k=0}^i p(a_i), \quad F(0) := 0.$$

Eine *numerische Repräsentation* von  $t$  ist ein Bruch im Intervall  $[l^m, u^m]$ , wobei

$$l^1 := F(i_1 - 1) \quad u^1 := F(i_1)$$

und

$$\begin{aligned} l^k &:= l^{k-1} + (u^{k-1} - l^{k-1}) \cdot F(i_k - 1) \\ u^k &:= l^{k-1} + (u^{k-1} - l^{k-1}) \cdot F(i_k), \quad k = 2, 3, \dots, m. \end{aligned}$$

#### Hilfssatz 2.3.2:

$$u^m - l^m = \prod_{k=1}^m p(a_{i_k}).$$

**Beispiel 2.3.4:**

Sei  $\Sigma = \{a, b, c\}$  mit  $p(a) = 0.7$ ,  $p(b) = 0.2$  und  $p(c) = 0.1$  und  $t = abb$ . Dann gilt  $i_1 = 1$  und  $i_2 = i_3 = 2$ . Dann erhält man

$k$	$l^k$	$u^k$
1	0.0	0.7
2	0.49	0.63
3	0.588	0.616

Als numerische Repräsentation lässt sich jetzt z.B das arithmetische Mittel

$$\mathfrak{T}(a_{i_1} \dots a_{i_m}) = \frac{l^m + u^m}{2}$$

wählen. Damit ist die einzige Information, die der Algorithmus zur Berechnung der numerischen Repräsentation benötigt, die Funktion  $F$ . Die Rekonstruktion der Folge aus  $\mathfrak{T}$  erfolgt dann über folgenden Algorithmus:

```

Sei  $l^0 = 0$ ,  $u^0 = 1$ ;
For  $k:=1$  to  $m$  do
    begin
         $\mathfrak{T}^* = (\mathfrak{T} - l^{k-1})/(u^{k-1} - l^{k-1})$ 
        Finde  $i_k$  so dass  $F(i_k - 1) \leq \mathfrak{T} < F(i_k)$ 
        Return  $(a_{i_k})$ ;
        Berechne  $l^k$  und  $u^k$ ;
    end

```

Sei  $\mathfrak{T}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}) = (u^m - l^m)/2$  eine numerische Repräsentation für die Folge  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$ . Die binäre Darstellung der numerischen Repräsentation kann beliebig lang bzw. unendlich sein. In diesem Kapitel zeigen wir, wie man die Repräsentation mit Hilfe einer kleinen Anzahl von Bits kodieren kann.

Es sei

$$p(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}) = p(a_{i_1}) \Delta p(a_{i_2}) \dots p(a_{i_m}),$$

dann definiert man

$$l(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}) := \left\lceil \log \frac{1}{p(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m})} \right\rceil + 1.$$

Den binären Code der Repräsentation definiert man als  $l(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m})$  höchswertige Bits des Bruchs  $\mathfrak{T}(a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m})$ .

**Beispiel 2.3.5:**

Sei  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $p(a) = 0.9$ ,  $p(b) = 0.1$  und die Länge  $m = 2$ . Dann erhält man folgende Kodierung für alle Folgen:

$x$	$\mathfrak{T}(x)$	binär	$l(x)$	Code
aa	0.405	0.0110011110...	2	01
ab	0.855	0.1101101011...	5	11011
ba	0.945	0.1111000111...	5	11110
bb	0.995	0.1111111010...	8	11111110

### 3 KOMPRESSION VON BILDDATEIEN DURCH ANWENDUNG VON FILTERN13

## 3 Kompression von Bilddateien durch Anwendung von Filtern

Um die Komprimierung effizienter zu gestalten erfolgt vor dem eigentlichen Komprimierungsschritt eine Vorfilterung, die mit Ausnahme der Wahl des Filtertyps **None** in einer Erniedrigung der Entropie resultieren kann. Im Folgenden sollen die implementierten Filter anhand eines Bildes ( i.F. als IMG bezeichnet) mit den Dimensionen h (Höhe), w (Breite) und c (Anzahl der Farbkanäle) kurz besprochen werden. Das Ergebnis der Vorfilterung wird mit PRE, das der Umkehrung mit POST bezeichnet. Zusätzlich müssen für die Umkehrung Werte gespeichert werden. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig für jeden Farbkanal Werte in einem std::Vector abzuspeichern, der i.F. als RES bezeichnet wird. Die Darstellung der Filter erfolgt in Pseudocode. Die neben den Algorithmen gezeichneten Gitter dienen der Orientierung.

### **Definition 3.0.1:**

Sei  $(i, j) \in [0, h - 1] \times [0, w - 1]$  und  $0 \leq k < c$ . Dann bezeichnet  $*(i, j, k) := *_{i,j,k}$  den Wert von  $*$  an der Stelle  $(i, j, k)$ .

Die Wahl der Filter orientiert sich an [12]:

### 3.1 Verwendete Filter

#### 3.1.1 Filtertyp 0: NONE

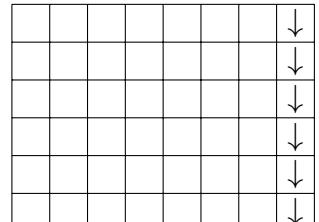
Hierbei wird keine Vorfilterung betrieben. Jedes Byte von IMG verbleibt unverändert:

##### **Algorithmus 3.1.1:**

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre>PROCEDURE ENCODE()     PRE=IMG     END PROCEDURE</pre>	<pre>PROCEDURE DECODE()     IMG=POST     END PROCEDURE</pre>

#### 3.1.2 Filtertyp 1: SUB

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu seinem linken Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die rechte Kante des Bildes gespeichert.

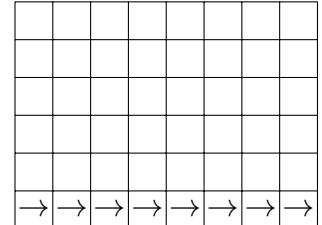


##### **Algorithmus 3.1.2:**

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 1; y = 0; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);         WHILE(k &lt; c)             WHILE(y &lt; h)                 Verschlüsselung                 WHILE(x &lt; w)                     PRE<sub>x,y,k</sub><sup>5</sup> ← IMG<sub>x,y,k</sub> - IMG<sub>x-1,y,k</sub>;                     x++;                 END WHILE                 buffer.save(IMG<sub>w-1,y,k</sub>); x = 1;                     y++;                 END while                 RES[k] = buffer;                     k++; y = 1;                 END WHILE             END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = w - 1; y = h - 1; k = c - 1;         WHILE(k &gt; 0)             buffer = RES[k];                 Entschlüsselung                 WHILE(y &gt; 0)                     POST<sub>x,y,k</sub> ← buffer[y]                     WHILE(x &gt; 1)                         POST<sub>x-1,y,k</sub><sup>4</sup> ← POST<sub>x,y,k</sub> - PRE<sub>x,y,k</sub>;                         x--;                     END WHILE;                     y--;                     x = w - 1;                 END WHILE                 k--;             END WHILE         END PROCEDURE </pre>

### 3.1.3 Filtertyp 2: UP

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu seinem oberen Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die untere Kante des Bildes gespeichert.



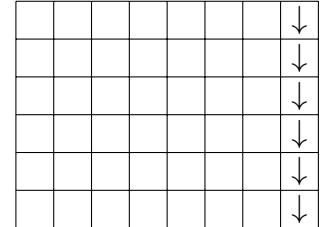
#### Algorithmus 3.1.3:

<sup>5</sup> Die Berechnung muß ohne Überlauf erfolgen.

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 0; y = 1; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);         WHILE(k &lt; c)             WHILE(x &lt; w)                 WHILE(y &lt; h)                     PRE<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← IMG<sub>x,y,k</sub> - IMG<sub>x,y-1,k</sub>;                     y++;                 END WHILE                 buffer.save(IMG<sub>x,y,k</sub>); y = 1;                 x++;             END WHILE             RES[k] = buffer;             k++; x = 1;         END WHILE     END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = w - 1; y = h - 1; k = c - 1;     WHILE(k &gt; 0)         buffer = RES[k];         WHILE(x &gt; 0)             POST<sub>x,y,k</sub> ← buffer[x];             WHILE(y &gt; 1)                 POST<sub>x,y-1,k</sub><sup>4</sup> ← POST<sub>x,y,k</sub> - PRE<sub>x,y,k</sub>;                 y--;             END WHILE             y = h - 1; x--;         END WHILE         k--;     END WHILE END PROCEDURE </pre>

### 3.1.4 Filtertyp 3: AVERAGE-2

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken und oberen Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die rechte Kante des Bildes gespeichert.

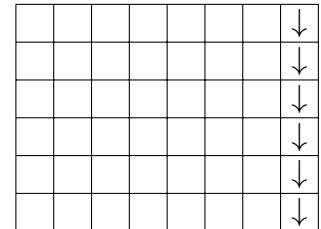


**Algorithmus 3.1.4:**

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 0; y = 0; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);         WHILE(k &lt; c)             WHILE(y &lt; h)                 WHILE(x &lt; w)                     PRE<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← IMG<sub>x,y,k</sub> - 1/2 * (IMG<sub>x-1,y,k</sub>                         + IMG<sub>x,y-1,k</sub>);                     x++;                 END WHILE                 buffer.save(IMG<sub>x,y,k</sub>);                 x = 0; y++;             END WHILE             RES[k] = buffer;             k++;             y = 0;         END WHILE     END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = w - 1; y = 0; k = c - 1;         WHILE(k &gt; 0)             buffer = RES[k];             WHILE(y &lt; h)                 POST<sub>x,y,k</sub> ← buffer[y];                 WHILE(x &gt;= 1)                     POST<sub>x-1,y,k</sub><sup>4</sup> ← POST<sub>x,y,k</sub> - 1/2 * (POST<sub>x,y-1,k</sub>                         + PRE<sub>x,y,k</sub>);                     x--;                 END WHILE;                 y++;             END WHILE;             x = w - 1;         END WHILE;         k--;     END WHILE END PROCEDURE </pre>

### 3.1.5 Filtertyp 4: AVERAGE-3

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken, oberen und rechten Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die rechte Kante des Bildes gespeichert.



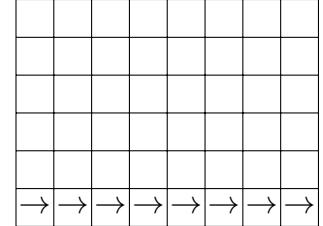
#### Algorithmus 3.1.5:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 0; y = 0; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c); </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = w - 1; y = 0; k = c - 1; </pre>

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> WHILE(<math>k &lt; c</math>) WHILE(<math>y &lt; h</math>)     WHILE(<math>x &lt; w</math>)         <math>\text{PRE}_{x,y,k}^4 \leftarrow \text{IMG}_{x,y,k} - 1/3 * (\text{IMG}_{x-1,y,k}</math>         + <math>\text{IMG}_{x,y-1,k} + \text{IMG}_{x+1,y,k});</math>         <math>x ++;</math>     END WHILE     buffer.save(<math>\text{IMG}_{x,y,k}</math>);     <math>x = 0; y ++;</math>     END WHILE     <math>\text{RES}[k] = \text{buffer};</math>     <math>k ++; y = 0;</math>     END WHILE END PROCEDURE </pre>	<pre> WHILE(<math>k &gt; 0</math>) buffer = <math>\text{RES}[k]</math>; WHILE(<math>y &lt; h</math>)     <math>\text{POST}_{x,y,k} \leftarrow \text{buffer}[y]</math>;     WHILE(<math>x &gt; 1</math>)         <math>\text{POST}_{x-1,y,k}^4 \leftarrow \text{POST}_{x,y,k} - 1/3 * (\text{POST}_{x,y-1,k}</math>         + <math>\text{POST}_{x+1,y,k} + \text{PRE}_{x,y,k});</math>         <math>x --;</math>     END WHILE;     <math>y ++; x = w - 1;</math>     END WHILE     <math>k --;</math> END WHILE END PROCEDURE </pre>

### 3.1.6 Filtertyp 5: AVERAGE-4

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken, oberen, rechten und unteren Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die untere Kante des Bildes gespeichert.



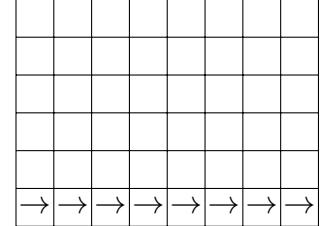
#### Algorithmus 3.1.6:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; <math>x = 0; y = 0; k = 0</math>;     PRE.resize(<math>(h - 1) * (w - 1) * c</math>);     WHILE(<math>k &lt; c</math>)         WHILE(<math>x &lt; w</math>)             WHILE(<math>y &lt; h</math>)                 <math>\text{PRE}_{x,y,k}^4 \leftarrow \text{IMG}_{x,y,k} - 1/4 * (\text{IMG}_{x-1,y,k}</math>                 + <math>\text{IMG}_{x,y-1,k} + \text{IMG}_{x+1,y,k}</math>                 + <math>\text{IMG}_{x,y+1,k});</math>                 <math>y ++;</math>             END WHILE             buffer.save(<math>\text{IMG}_{x,y,k}</math>);             <math>y = 0; x ++;</math>         END WHILE         <math>\text{RES}[k] = \text{buffer};</math>         <math>k ++; x = 0;</math>     END WHILE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize(<math>(h - 1) * (w - 1) * c</math>);     <math>x = 0; y = h - 1; k = c - 1</math>;     WHILE(<math>k &gt; 0</math>)         buffer = <math>\text{RES}[k]</math>;         write(buffer);         WHILE(<math>y &gt; 0</math>)             WHILE(<math>x &lt; w</math>)                 <math>\text{POST}_{x,y-1,k}^4 \leftarrow \text{POST}_{x,y,k} - 1/4 * (\text{POST}_{x-1,y,k}</math>                 + <math>\text{POST}_{x+1,y,k} + \text{POST}_{x,y+1,k}</math>                 + <math>\text{PRE}_{x,y,k});</math>                 <math>x ++;</math>             END WHILE;             <math>y --; x = 0;</math>         END WHILE         <math>k --; y = h - 1;</math>     END WHILE </pre>

Verschlüsselung	Entschlüsselung
END PROCEDURE	END PROCEDURE

### 3.1.7 Filtertyp 6: AVERAGE-5

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken, links oberen, oberen, rechten und unteren Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die untere Kante des Bildes gespeichert.

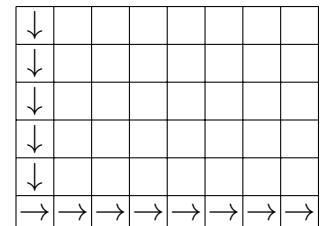


#### Algorithmus 3.1.7:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 0; y = 0; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);         WHILE(k &lt; c)             WHILE(x &lt; w)                 WHILE(y &lt; h)                     PRE<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← IMG<sub>x,y,k</sub> - 1/5 * (IMG<sub>x-1,y,k</sub>                         + IMG<sub>x-1,y-1,k</sub> + IMG<sub>x,y-1,k</sub>                         + IMG<sub>x+1,y,k</sub> + IMG<sub>x,y+1,k</sub>);                     y++;                 END WHILE                 buffer.save(IMG<sub>x,y,k</sub>);                 y = 0; x++;             END WHILE             RES[k] = buffer;             k++; x = 0;         END WHILE     END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = 0; y = h - 1; k = c - 1;         WHILE(k &gt; 0)             buffer = RES[k];             write(buffer);             WHILE(y &gt; 0)                 WHILE(x &lt; w)                     POST<sub>x,y-1,k</sub><sup>4</sup> ← POST<sub>x,y,k</sub> - 1/5 * (POST<sub>x-1,y,k</sub>                         + POST<sub>x-1,y-1,k</sub> + POST<sub>x+1,y,k</sub>                         + POST<sub>x,y+1,k</sub> + PRE<sub>x,y,k</sub>);                     x++;                 END WHILE;                 y--;             END WHILE;             k--;         END WHILE;     END PROCEDURE </pre>

### 3.1.8 Filtertyp 7: AVERAGE-6

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken, links oberen, oberen, rechts oberen, rechten und unteren Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die linke und die untere Kante des Bildes gespeichert.



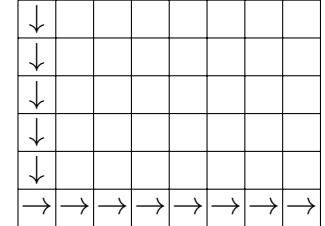
#### Algorithmus 3.1.8:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES) </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES) </pre>

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> new buffer; x = 0; y = 0; k = 0; PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     WHILE(k &lt; c)         RES[k] = Process(buffer);             buffer.clear();             WHILE(x &lt; w)                 WHILE(y &lt; h)                     PRE<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← IMG<sub>x,y,k</sub> - 1/6 * (IMG<sub>x-1,y,k</sub>                         + IMG<sub>x-1,y-1,k</sub> + IMG<sub>x,y-1,k</sub>                         + IMG<sub>x+1,y-1,k</sub> + IMG<sub>x+1,y,k</sub>;                         + IMG<sub>x,y+1,k</sub>);                     y++;                 END WHILE                 x++;             END WHILE             k++;         END WHILE     END PROCEDURE </pre>	<pre> POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c); x = 0; y = h - 1; k = c - 1;     WHILE(k &gt; 0)         buffer = RES[k];             write(buffer);             WHILE(y &gt; 0)                 WHILE(x &lt; w)                     POST<sub>x+1,y-1,k</sub><sup>4</sup> ← POST<sub>x,y,k</sub> - 1/6 * (POST<sub>x-1,y,k</sub>                         + POST<sub>x-1,y-1,k</sub> + POST<sub>x,y-1,k</sub>                         + POST<sub>x+1,y,k</sub> + POST<sub>x,y+1,k</sub>                         + PRE<sub>x,y,k</sub>);                     x++;                 END WHILE;                 y--;             END WHILE;             k--;         END WHILE;     END PROCEDURE </pre>

### 3.1.9 Filtertyp 8: AVERAGE-7

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken, links oberen, oberen, rechts oberen, rechten, rechts unteren und unteren Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die linke und die untere Kante des Bildes gespeichert.



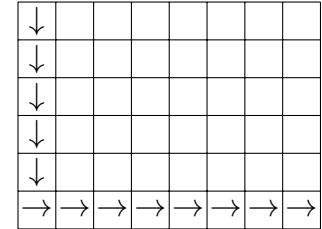
#### Algorithmus 3.1.9:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 0; y = 0; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);         WHILE(k &lt; c)             RES[k] = Process(buffer);                 buffer.clear();                 WHILE(x &lt; w)                     WHILE(y &lt; h)                         PRE<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← IMG<sub>x,y,k</sub> - 1/7 * (IMG<sub>x-1,y,k</sub>                             + IMG<sub>x-1,y-1,k</sub> + IMG<sub>x,y-1,k</sub>                             + IMG<sub>x+1,y-1,k</sub> + IMG<sub>x+1,y,k</sub>                             + IMG<sub>x+1,y+1,k</sub> + IMG<sub>x,y+1,k</sub>);                         y++;                     END WHILE                 x++;             END WHILE         END WHILE     END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = 0; y = h - 1; k = c - 1;         WHILE(k &gt; 0)             buffer = RES[k];                 write(buffer);                 WHILE(y &gt; 0)                     WHILE(x &lt; w)                         POST<sub>x+1,y-1,k</sub><sup>4</sup> ← POST<sub>x,y,k</sub> - 1/7 * (POST<sub>x-1,y,k</sub>                             + POST<sub>x-1,y-1,k</sub> + POST<sub>x,y-1,k</sub>                             + POST<sub>x+1,y,k</sub> + POST<sub>x+1,y+1,k</sub>                             + POST<sub>x,y+1,k</sub> + PRE<sub>x,y,k</sub>);                     x++;                 END WHILE;                 y--;             END WHILE;             k--;         END WHILE;     END PROCEDURE </pre>

Verschlüsselung	Entschlüsselung
END WHILE	END WHILE;
$x++$ ; $y = 0$ ;	$y--$ ; $x = 0$ ;
END WHILE	END WHILE
$k++$ ; $x = 0$ ;	$k--$ ; $y = h - 1$ ;
END WHILE	END WHILE
END PROCEDURE	END PROCEDURE

### 3.1.10 Filtertyp 9: AVERAGE-8

Jedes Pixel von IMG wird durch die Differenz zu dem Mittelwert aus seinem linken, links oberen, oberen, rechts oberen, rechten, rechts unteren, unteren und links unteren Nachbarn ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die linke und die untere Kante des Bildes gespeichert.

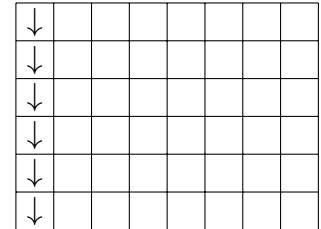


#### Algorithmus 3.1.10:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; <math>x = 0</math>; <math>y = 0</math>; <math>k = 0</math>;     PRE.resize(<math>(h - 1) * (w - 1) * c</math>);     WHILE(<math>k &lt; c</math>)         RES[<math>k</math>] = Process(buffer);         buffer.clear();         WHILE(<math>x &lt; w</math>)             WHILE(<math>y &lt; h</math>)                 <math>PRE_{x,y,k}^4 \leftarrow \text{IMG}_{x,y,k} - 1/8 * (\text{IMG}_{x-1,y,k} + \text{IMG}_{x-1,y-1,k} + \text{IMG}_{x,y-1,k} + \text{IMG}_{x+1,y-1,k} + \text{IMG}_{x+1,y,k} + \text{IMG}_{x+1,y+1,k} + \text{IMG}_{x,y+1,k} + \text{IMG}_{x-1,y+1,k})</math>;                 <math>y++</math>;             END WHILE             <math>x++</math>; <math>y = 0</math>;         END WHILE         <math>k++</math>; <math>x = 0</math>;     END WHILE END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize(<math>(h - 1) * (w - 1) * c</math>);     <math>x = 0</math>; <math>y = h - 1</math>; <math>k = c - 1</math>;     WHILE(<math>k &gt; 0</math>)         buffer = RES[<math>k</math>];         write(buffer);         WHILE(<math>y &gt; 0</math>)             WHILE(<math>x &lt; w</math>)                 <math>POST_{x+1,y-1,k}^4 \leftarrow POST_{x,y,k} - 1/8 * (POST_{x-1,y,k} + POST_{x-1,y-1,k} + POST_{x,y-1,k} + POST_{x+1,y,k} + POST_{x+1,y+1,k} + POST_{x,y+1,k} + POST_{x-1,y+1,k} + PRE_{x,y,k})</math>;                 <math>x++</math>;             END WHILE             <math>y--</math>; <math>x = 0</math>;         END WHILE         <math>k--</math>; <math>y = h - 1</math>;     END WHILE END PROCEDURE </pre>

### 3.1.11 Filtertyp 10: PAETH

Jedes Pixel von IMG wird seinen Paeth-Prädiktor ersetzt. Für jeden Farbkanal wird die linke Kante des Bildes gespeichert.



#### Algorithmus 3.1.11:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(IMG,PRE,RES)     new buffer; x = 0; y = 0; k = 0;     PRE.resize((h - 1) * (w - 1) * c);         WHILE(k &lt; c)             WHILE(y &lt; h)                 buffer.save(IMG<sub>0,y,k</sub>);                     WHILE(x &lt; w)                         PRE<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← PAETH(IMG<sub>x,y,k</sub>)                             x++;                         END WHILE                         x = 0; y++;                     END while                     RES[k] = buffer;                     k++; y = 0;                 END WHILE             END PROCEDURE </pre>	<pre> PROCEDURE DECODE(PRE,POST,RES)     POST.resize((h - 1) * (w - 1) * c);     x = 1; y = 0; k = c - 1;         WHILE(k &gt; 0)             buffer = RES[k];             WHILE(y &lt; h)                 POST<sub>x-1,y,k</sub> ← buffer[y]                     WHILE(x &gt; 1)                         POST<sub>x,y,k</sub><sup>4</sup> ← PAETH(POST<sub>x,y,k</sub>) + PRE<sub>x,y,k</sub>;                             x++;                     END WHILE                     y++; x = 1;                 END WHILE                 k--;             END WHILE         END PROCEDURE </pre>

Hierbei ermittelt der PAETH-Prediktor folgenden Wert

#### Algorithmus 3.1.12:

```

PAETH(IMGx,y,k) := IMGx-1,y,k + IMGx,y-1,k - IMGx-1,y-1,k;
left := |IMGx-1,y,k - PAETH(IMGx,y,k)| ;
up := |IMGx,y-1,k - PAETH(IMGx,y,k)| ;
leftUp := |IMGx-1,y-1,k - PAETH(IMGx,y,k)| ;
IF(left ≤ up && left ≤ leftUp)
    return left;
ELSE IF(up ≤ leftUp)
    return up;
return leftUp;

```

### 3.2 Fazit zur Wahl der Filter

Sämtliche Filtertypen lassen sich für jeden Farbkanal parallel verarbeiten, zusätzlich lässt sich der Filtertyp **Sub** für jede Reihe und der Filtertyp **Up** für jede Spalte parallelisieren. Die Implementierung der Filter findet sich in der Klasse Preconditioner. Eine Tabelle die den Einfluss der Filterung auf die Entropie wiedergibt, findet sich in den Ergebnissen.

## 4 Asymmetrische Zahlensysteme

### 4.1 Einführung

Sei  $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$  ein endliches Alphabets,  $\{p_s\}_{s \in \mathcal{A}}$  die Folge der zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten mit  $\sum_{s \in \mathcal{A}} p_s = 1$  und

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &: \mathcal{A} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ \mathcal{D} &: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathbb{N}\end{aligned}$$

die zugehörigen Kodierungs- und Dekodierungsfunktionen. Dabei liefert die Kodierungsfunktion  $\mathcal{C}$  für  $s \in \mathcal{A}$  und  $x \in \mathbb{N}$  den verschlüsselten Wert  $x' = \mathcal{C}(s, x)$  und  $\mathcal{D}$  bezeichnet die Inverse von  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{D} \circ \mathcal{C} (b, \mathcal{C}(a, x)) = (b, \mathcal{C}(a, x))$$

Nach Konstruktion verhält sich  $x$  wie ein Stack: Der letzte verschlüsselte Wert ist der erste, den die Dekodierungsfunktion liefert. Nachdem  $\mathcal{C}$  für wachsendes  $x$  über alle Grenzen wächst, muß  $x$  auf ein Intervall mit festen Grenzen eingeschränkt werden: Hierfür wird in [3] das sog. „normalisierte Intervall“

$$I(L, b) := \{L, L + 1, \dots, b \cdot L - 1\}$$

für beliebiges  $L \in \mathbb{N}$  und  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$  definiert, wobei  $b$  die Basis des Kodierungsverfahrens bezeichnet. Ferner muß gewährleistet sein, dass für  $x' = \mathcal{C}(s, x)$  und  $(s, y) = \mathcal{D}(y')$  stets  $(x', y) \in I \times I$  gilt. Hierfür wird in [1] folgende Konvention getroffen:

- 1) Sei  $x' > b \cdot L - 1$ . Ersetze  $x'$  solange durch  $\left\lfloor \frac{x'}{b} \right\rfloor$  bis  $x' \in I$
- 2) Sei  $x' < L$ . Ersetze  $x'$  solange durch  $x' \cdot b$  bis  $x' \in I$

Im allgemeinen funktioniert dieser Ansatz nicht, aber es kann folgendes gezeigt werden: Sind die „Index-Mengen“

$$I_s := \{x \mid \mathcal{C}(s, x) \in I\}$$

von der Form  $I_s = \{k, k + 1, \dots, b \cdot k - 1\}$ ,  $k \geq 1$  (eine Eigenschaft, die Duda in [3] als „b-Eindeutigkeit“ bezeichnet), dann sind die Algorithmen synchron.

## 4.2 Einführendes Beispiel: Uniform binary variant streaming (uABS)

Vorab lässt sich das Verfahren folgendermaßen beschreiben:

### Algorithmus 4.2.1:

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(x, buffer)     while <math>\mathcal{C}(x, s) \notin I_s</math> do         buffer.save(x mod b)         <math>x \leftarrow \lfloor x/b \rfloor</math>     END while     <math>x \leftarrow \mathcal{C}(x, s)</math> END PROCEDURE </pre>	<pre> FUNCTION DECODE(buffer)     <math>(s, x) \leftarrow D(x)</math>     while <math>x \notin I</math> do         <math>x \leftarrow b \cdot x + \text{buffer.read}()</math>     END while     return s END FUNCTION </pre>

Einführend betrachten wir das in [2] angebene Beispiel:

### Beispiel 4.2.1:

Wir betrachten die auf dem zwei-Symbol Alphabet  $\mathcal{A} := \{a, b\}$  mit  $p_a = 1/4, p_b = 3/4$  bestehende Nachricht „babba“. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(a, x) &= 4x \\ \mathcal{C}(b, x) &= 4 \lfloor x/3 \rfloor + (x \bmod 3) + 1\end{aligned}$$

und erhalten durch einfaches Rechnen für  $b = 2$  und  $L = 16$  die den Symbolen korrespondierenden  $b$ -eindeutigen Index-Mengen:

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
a	4				5				6				7			
b		12	13	14		15	16	17		18	19	20		21	22	23

Offensichtlich lässt sich dann folgende Inverse definieren:

$$\mathcal{D}(x) : \begin{cases} (a, x/4) & \text{falls } x \equiv 0 \pmod 4, \\ (b, 3 \lfloor x/4 \rfloor + (x \bmod 4) - 1) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei gilt: Wird  $u \in \mathcal{A}$  mit  $\mathcal{C}$  codiert, dann wächst  $x$  um den Faktor  $X = 1/p_u$ . Sei nun  $L = 16$  und  $b = 2$ , dann erhält man das normalisierte Intervall  $I = \{16, 17, 18, \dots, 31\}$ . Die Prozedur der Verschlüsselung und Entschlüsselung lässt sich nachfolgender Tabelle entnehmen:

Kodierer	x	Dekodierer
finaler Zustand		finaler Zustand
↑	19	↓
encode 'b'		decode 'b'
↑	14	↓
$x \notin I_b$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	28	↓
encode 'a'		decode 'a'
↑	7	↓
$x \notin I_a$ ; save(1)		$x \notin I$ ; read()=1;
↑	15	↓
$x \notin I_a$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	30	↓
encode 'b'		decode 'b'
↑	22	↓
encode 'b'		decode 'b'
↑	16	↓
encode 'a'		decode 'a'
↑	4	↓
$x \notin I_a$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	8	↓
$x \notin I_a$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	16	↓
initialer Zustand		lesen beendet

### 4.3 uABS für $n$ -elementige Symbolalphabete (uANS)

Ziel des folgenden Unterkapitels ist es das besprochene uABS-Verfahren auf  $n$ -elementige Symbolalphabete zu verallgemeinern. Dazu schränkt man die Menge der Auftrittswahrscheinlichkeiten ein:

Im folgenden sei  $\mathcal{A}$  ein  $n$ -elementiges Alphabet ( $n > 1$ ) mit zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P} := \{p_{i_k} \mid 1 \leq k \leq n - 1\}$  wobei gilt:

$$\forall p_{i_k} \in \mathcal{P} \exists i_k \in \mathbb{N} : p_{i_k} \cdot 2^{i_k} = 1, \sum_{p \in \mathcal{P}} p = 1.$$

Damit lässt sich das normalisierte Intervall in disjunkte Teilmengen zerlegen:

**Hilfssatz 4.3.1:**

Seien  $a_k, a_l \in \mathcal{A}$ ,  $k < l$  zwei Symbole mit zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten  $(1/2)^k$  und  $(1/2)^l$ . Dann sind die Mengen

$$I_{a_k} := \{2^k + n \cdot r_k \mid n \in \mathbb{N}\}, \text{ mit } 0 \leq r_k < 2^k,$$

und

$$I_{a_l} := \{2^l + n \cdot r_l \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad r_l := \min_{r \in \mathbb{N}} \{(r_k - r) \bmod 2^k \neq 0\}$$

disjunkt.<sup>6</sup>

### Beweis:

Sei  $\mu \in \mathbb{N}$  mit  $\mu \in I_{a_k} \cap I_{a_l}$ . Dann existieren  $s, t \in \mathbb{N}$  mit

$$s \cdot 2^k + r_k = t \cdot 2^l + r_l \quad \Leftrightarrow \quad 2^k \cdot (s - t \cdot 2^{l-k}) = r_l - r_k.$$

Hieraus folgt sofort der Widerspruch  $(r_l - r_k) \bmod 2^k \equiv 0$ , also  $I_{a_k} = I_{a_l}$ .

□

Folgender Algorithmus dient jetzt zur Zerlegung des normalisierten Intervalls in disjunkte Teilmengen:

### Algorithmus 4.3.1:

- 1 Fasse Symbole mit gleicher Wahrscheinlichkeit zusammen.
- 2 Sortiere Zusammenfassung nach fallender Wahrscheinlichkeit.
- 3 Für Wahrscheinlichkeit  $p_{i_k}$  existieren die Modulreste  $R_{i_k} := \{0, 1, 2, \dots, 2^{i_k} - 1\}$ .
- 4 Beginne bei  $k = 0$ .
- 5 Sei  $k < l \leq N - 1$ . Korrespondiert  $p_{i_k}$  zu  $t \in \mathbb{N}$  Symbolen, selektiere die ersten  $t$  Reste aus  $R_{i_k}$  zu  $R'_{i_k} \subseteq R_k$ . Entferne  $x \in R_{i_l}$  falls ein  $y \in R'_{i_k}$  existiert mit  $0 \equiv (x - y) \bmod 2^{i_k}$ .
- 6 Setze  $k = k + 1$  und gehe zu Schritt 5.

### Beispiel 4.3.1:

$x \in \mathcal{A}$	$p_{i_k} \in \mathcal{P}$	$R_{i_k}$
a	1/2	{0, 1}
b	1/4	{0, 1, 2, 3}
c	1/4	{0, 1, 2, 3}

$$\xrightarrow{3} \begin{array}{c|c|c|c} \text{a} & 1/2 & \{0\} \\ \text{b, c} & 1/4 & \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{c|c|c|c} \text{a} & 1/2 & \{0\} \\ \text{b, c} & 1/4 & \{\emptyset, 1, 2, 3\} \end{array}$$

$$\xrightarrow{5} \begin{array}{c|c|c|c} a & 1/2 & \{0\} \\ b, c & 1/4 & \{1, 3\} \end{array}$$

<sup>6</sup> Dieser Sachverhalt gilt für jede Primzahl.

**Beispiel 4.3.2:**

Für die Demonstration eines konkreten Beispiels kodieren und dekodieren wir die auf dem drei-Symbol Alphabet  $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$  mit  $p_a = 1/2, p_b = 1/4, p_c = 1/4$  bestehende Nachricht „abbac“ für  $b = 2$ ,  $L = 16$ . Dazu definieren wir

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(a, x) &= 2x \\ \mathcal{C}(b, x) &= 4x + 1 \\ \mathcal{C}(c, x) &= 4x + 3\end{aligned}$$

und erhalten durch einfaches Rechnen die den Symbolen korrespondierenden  $b$ -eindeutigen Index-Mengen:

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
a	8		9		10		11		12		13		14		15	
b		4				5				6				7		
c				4				5				6				7

Offensichtlich lässt sich dann folgende Inverse definieren:

$$\mathcal{D}(x) : \begin{cases} (a, x/2) & \text{für } x \equiv 0 \pmod{2}, \\ (b, (x-1)/4) & \text{für } x \equiv 1 \pmod{4} \\ (c, (x-3)/4) & \text{für } x \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Dabei gilt: Wird  $u \in \mathcal{A}$  mit  $\mathcal{C}$  codiert, dann wächst  $x$  um den Faktor  $X = 1/p_u$ . Sei nun  $L = 16$  und  $b = 2$ , dann erhält man das normalisierte Intervall  $I = \{16, 17, \dots, 31\}$ .

Kodierer	x	Dekodierer
finaler Zustand		finaler Zustand
↑	16	↓
encode 'a'		decode 'a'
↑	8	↓
$x \notin I_a$ ; save(1)		$x \notin I$ ; read()=1;
↑	17	↓
encode 'b'		decode 'b'
↑	4	↓
$x \notin I_b$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	8	↓
$x \notin I_b$ ; save(1)		$x \notin I$ ; read()=1;
↑	17	↓
encode 'b'		decode 'b'
↑	4	↓
$x \notin I_b$ ; save(1)		$x \notin I$ ; read()=1;
↑	9	↓
$x \notin I_b$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	18	↓
encode 'a'		decode 'b'
↑	9	↓
$x \notin I_a$ ; save(1)		$x \notin I$ ; read()=1;
↑	19	↓
encode 'c'		decode 'c'
↑	4	↓
$x \notin I_c$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	8	↓
$x \notin I_c$ ; save(0)		$x \notin I$ ; read()=0;
↑	16	↓
initialer Zustand		lesen beendet

Für das Wachstumsverhalten der Entropie erhalten wir:

**Hilfssatz 4.3.2:**

Sei  $\mathcal{A}$  ein  $N$  elementiges Symbolalphabet mit zugehörigen Auftrittswahrscheinlichkeiten  $(\frac{1}{2})^{i_k}$  und  $k + k_0 \geq \frac{2^{i_k}}{i_k} \geq k$  für alle  $k$  und  $k_0 \in \mathbb{N}$ , dann ist  $H(\mathcal{A}) - H_0$  beschränkt.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} H(Q) - H_0 &= - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{2}^{i_k} \log_2 \frac{1}{2}^{i_k} - \log_2(N-1) \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} i_k \cdot \frac{1}{2}^{i_k} - \frac{\log(N-1)}{\log(2)}. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+k_0} - \frac{\log(N-1)}{\log(2)} &\leq H(Q) - H_0 \leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} - \frac{\log(N-1)}{\log(2)} \\ &< \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \log(N-1). \end{aligned}$$

Wir betrachten nur die obere Reihe, die Schlussfolgerung für die untere Reihe ist analog:  
Die Folge

$$\gamma_n := \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \log(N)$$

ist monoton fallend und nach unten beschränkt:

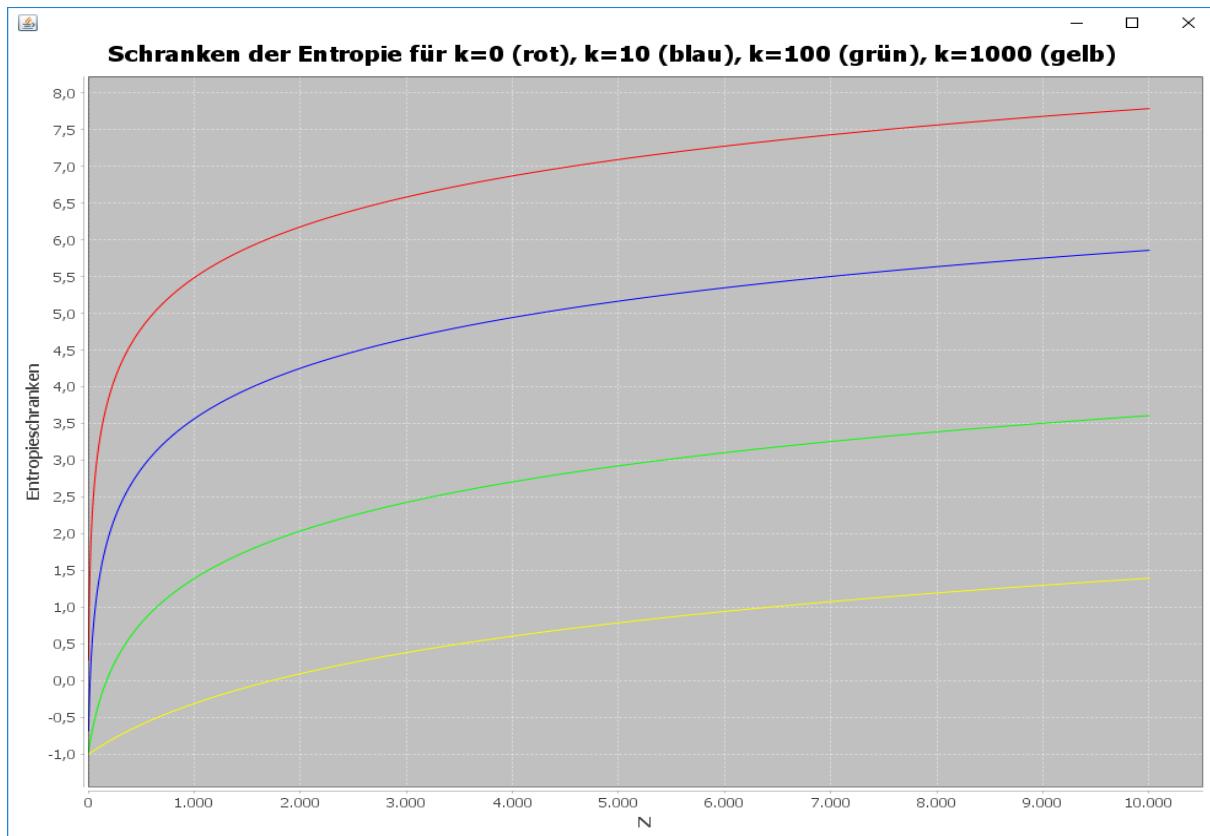
$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \frac{1}{N+1} - (\log(N+1) - \log(N)) \\ &= \frac{1}{N+1} - \log\left(1 + \frac{1}{N}\right) \end{aligned}$$

Da für alle  $x > 0 \log(x) \geq \frac{x-1}{x}$  gilt, folgt:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \leq \frac{1}{N+1} - \frac{\frac{1}{N}}{1 + \frac{1}{N}} = \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+1} = 0.$$

Also ist  $\gamma_n$  monoton fallend. Da für alle  $x > -1$  gilt  $\log(x+1) \leq x$  folgt

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \log\left(\prod_{k=1}^{N-1} \frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N-1} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &\geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} > 0. \end{aligned}$$



□

#### 4.4 Allgemeine Asymmetrische Zahlensysteme (ANS)

In diesem Abschnitt betrachten das in [1] angegebene Verfahren, welches ohne die Benutzung der in der uABS verwendeten Index-Mengen auskommt und insbesondere Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Symbole nicht durch Potenzen von 1/2 approximieren muss:

Sei  $F_s$  die Häufigkeit des Symbols  $s \in \mathcal{A}$  und  $M := \sum_{s \in \mathcal{A}} F_s$ .

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(s, x) &= x' := M \cdot \lfloor x/F_s \rfloor + B_s + (x \bmod F_s) \\ \mathcal{D}(x') &= (s, x) := (\mathcal{L}(\mathcal{R}), F_s \cdot \lfloor x'/M \rfloor + \mathcal{R} - B_s)\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &:= x' \bmod M, \quad B_s := \sum_{i=0}^{s-1} F_s \\ \mathcal{L}(z) &:= \max_{B_s \leq z} s.\end{aligned}$$

Die Funktion  $\mathcal{L}$  determiniert dabei das Symbol. Zunächst zeigen wir, dass  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  invers sind:

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \circ \mathcal{C}(s, x) &= (\mathcal{L}(\mathcal{R}), F_s \cdot \lfloor 1/M(M \cdot \lfloor x/F_s \rfloor + B_s + (x \bmod F_s)) \rfloor + \mathcal{R} - B_s) \\ &= \left( \mathcal{L}(\mathcal{R}), F_s \cdot \left\lfloor \lfloor x/F_s \rfloor + \frac{B_s + (x \bmod F_s)}{M} \right\rfloor + \mathcal{R} - B_s \right).\end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{B_s + (x \bmod F_s)}{M} \leq \frac{B_s + F_s - 1}{M} = \frac{B_{s+1} - 1}{M} < 1$$

folgt

$$\mathcal{D} \circ \mathcal{C}(s, x) = (\mathcal{L}(\mathcal{R}), F_s \cdot \lfloor x/F_s \rfloor + \mathcal{R} - B_s)$$

Mit  $\mathcal{R} = x' \bmod M = B_s + (x \bmod F_s)$  erhält man

$$\begin{aligned}\mathcal{D} \circ \mathcal{C}(s, x) &= (\mathcal{L}(\mathcal{R}), F_s \cdot \lfloor x/F_s \rfloor + (x \bmod F_s)) \\ &= \left( \mathcal{L}(\mathcal{R}), F_s \cdot \left( \frac{x - (x \bmod F_s)}{F_s} \right) + (x \bmod F_s) \right) \\ &= (\mathcal{L}(\mathcal{R}), x)\end{aligned}$$

Abschließend folgt:

$$\mathcal{L}(\mathcal{R}) = \mathcal{L}(x' \bmod M) = \mathcal{L}(B_s + x \bmod F_s) = \max_{0 \leq x \bmod F_s} s = s.$$

Das Verfahren lässt sich folgendermaßen beschreiben:

**Algorithmus 4.4.1:**

Verschlüsselung	Entschlüsselung
<pre> PROCEDURE ENCODE(x, List)     new buffer     while <math>\mathcal{C}(x, s) \notin I</math> do         buffer.save(x mod b)         <math>x \leftarrow \lfloor x/b \rfloor</math>     END while     List.add(buffer)     <math>x \leftarrow \mathcal{C}(x, s)</math> END PROCEDURE </pre>	<pre> FUNCTION DECODE(List)     buffer = List.get()     <math>(s, x) \leftarrow D(x)</math>     <math>x \leftarrow b \cdot x + \text{buffer.read}()</math>     return s END FUNCTION </pre>

**Beispiel 4.4.1:**

Zur Demonstration eines konkreten Beispiel betrachten wir das 3-Symbol-Alphabet  $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$  mit den Häufigkeiten  $F_a := 11, F_b := 3, F_c := 2$  und die Nachricht „abbac“:

Es gilt dann  $M = 16$ . Damit erhalten wir als Lookup-Tabelle:

$x$	$< 11$	$11 \leq x < 14$	$14 \leq x$
Symbol	a	b	c
Kodierer x Dekodierer			
finaler Zustand		finaler Zustand	
↑	26	↓	
encode 'a'		decode 'a'	
↑	21	↓	
$x \notin I$ ; save(1)		read()=1;	
↑	43	↓	
$x \notin I$ ; save(0)		read()=0;	
↑	86	↓	
$x \notin I$ ; save(0)		read()=0;	
↑	172	↓	
encode 'b'		decode 'b'	
↑	31	↓	
$x \notin I$ ; save(0)		read()=0;	
↑	62	↓	
$x \notin I$ ; save(0)		read()=0;	

Kodierer	x	Dekodierer
↑	124	↓
encode 'b'		decode 'b'
↑	22	↓
encode 'a'		decode 'a'
↑	17	↓
$x \notin I$ ; save(1)		read()=1;
↑	35	↓
$x \notin I$ ; save(1)		read()=1;
↑	71	↓
$x \notin I$ ; save(0)		read()=0;
↑	142	↓
encode 'c'		decode 'c'
↑	16	↓
initialer Zustand		lesen beendet

## 4.5 Vergleich der beiden Verfahren

Das ANS-Verfahren stellt keine Bedingungen an die Werte der Auftrittswahrscheinlichkeiten oder die Wahl des normalisierten Intervalls, außerdem ist das Verfahren sehr leicht zu implementieren.

Die Generierung der Indexmengen bei dem uANS-Verfahren ist sehr aufwendig und auch nur durch Einschränkung der Werte der Auftrittswahrscheinlichkeiten möglich.

Das normalisierte Intervall bei dem uANS-Verfahren muss so gewählt werden, dass jedes Symbol mindestens einen Repräsentanten innerhalb  $I(L, b)$  besitzt:

Sei z.B.  $L = 2$  und  $b = 3$ ,  $\mathcal{A} := \{a, b, c, d\}$  mit  $p_a = 1/2$ ,  $p_b = 1/4$  und  $p_c = p_d = 1/8$ . Dann gilt:

$$I_a = \{1, 2\}, \quad I_b = \{1\}, \quad I_c = \{1\}, \quad I_d = \emptyset.$$

Wählt man  $L^*$  derart, dass

$$L^* = \max \{r_k \mid r_k \in R_{i_k}, 0 \leq i_k < N - 1\} + 1$$

dann gilt für alle Reste  $0 \leq r_k < L^*$ . Verschiebt man dieses Intervall noch um die größte auftretende Potenz von 2 ( $=:M$ ), so besitzt jede Indexmenge einen Repräsentanten im Intervall  $[M, M + L^* - 1]$ , also auch in  $I(b, L)$  für  $b = 2$  und  $L := M$  (da  $L^* \leq M$ ), also gilt für die korrespondierenden Indexmengen  $I_{i_k} \neq \emptyset$ .

Eine weiterer Nachteil findet sich in dem Umstand, dass uANS-Verfahren nicht immer terminiert:

Sei z.B.  $b = 4$  und  $L = 16$  und  $\alpha$  ein Symbol mit der relativen Häufigkeit  $p_\alpha = 1/32$ . Angenommen Algorithmus 4.3 liefert einen Modulorest  $0 < r < 16$ , dann erhält man die

zugehörige Indexmenge  $I_\alpha = \{1\}$ . Falls der Kodierer bei  $x = 48$  das Symbol  $\alpha$  liest, so teilt er so lange durch  $b$  bis er einen Wert aus  $I_\alpha$  erhält, was nie der Fall ist.

Zusammenfassend ist das ANS-Verfahren damit besser geeignet.

Im Falle der Terminierung liefert das uANS-Verfahren aber die bessere Kompressionsrate:

#### **Beispiel 4.5.1:**

Man betrachte die Komprimierung des Wortes  $\mathcal{T} := \text{"MISSISSIPPI"}$  für  $b = 2$ ,  $L = 16$ ,  $M = 8$  durch beide Verfahren:

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\text{uANS}} 0010000010010110010110 \ 19 \quad \mathcal{T} \xrightarrow{\text{ANS}} 1|01|100|1|110|00|0|00|1|0010|19$$

Das ANS-Verfahren benötigt zur Dekomprimierung von  $\mathcal{T}$  zusätzliche Information. Der Grund dieser Umstände liegt in der Konstruktion: Das ANS-Verfahren normalisiert nur bei der Kodierung aus positiver Richtung in das „normalisierte Intervall“  $I(L, b)$ , während das uANS-Verfahren das Bitmuster so lange ausliest und den augenblicklichen Wert erhöht, bis ein Wert größer als  $L$  gefunden ist.

## 4.6 Beschleunigung des uANS-Verfahrens

In diesem Unterabschnitt wird eine Zusatzbedingung formuliert unter der die oben aufgeführten Schwächen des uANS-Verfahrens nicht auftreten.

## 5 Vergleich zu Huffmann und Arithmetischem Kodieren

Der Huffmann-Algorithmus kodiert jedes Symbol einzeln, während der erweiterte Huffmann-Algorithmus zu einer gegebenen Länge jede erdenkliche Folge einzeln verschlüsselt. Der Vorteil der Erweiterung liegt darin, dass sich ein anfänglich nicht zu komprimierender Code doch komprimieren lässt. Allerdings ist die Codierung ab einer bestimmten Länge kaum realisierbar. Dieses Problem tritt bei der Verwendung von asymmetrischen Zahlen-systemen nicht auf: Jede Folge ist komprimierbar.

## 6 Vektorisierung

In diesem Abschnitt werden die beiden in Kapitel 4 besprochenen Verfahren auf Bilddateien angewendet. Hierbei besteht das Quellalphabet  $\mathcal{A}$  aus den Zahlen  $0, 1, \dots, 255$ , also  $|\mathcal{A}| = 256$ . Die Ermittlung der Häufigkeiten  $F_s, s \in \mathcal{A}$  durch Iteration über sämtliche RGBA-Werte kann parallelisiert erfolgen. Als Container erweist sich hierfür ein std::vector als zweckmäßig. Die Ermittlung der Häufigkeiten erfolgt kann parallel erfolgen.<sup>7</sup>

### 6.1 Normalisierung

Um das Verfahren uANS anwenden zu können, müssen die auftretenden Häufigkeiten zunächst normalisiert werden, die Kompression mit ANS kann mit einer optionalen Normalisierung kombiniert werden.

#### 6.1.1 Normalisierung im Rahmen des uANS-Verfahrens

##### Algorithmus 6.1.1:

```
FUNCTION NEXTPOWEROF2(RES)
UP = 2; BELOW = 1;
WHILE(RES > 1)
RES >>= 1; UP <<= 1;
END WHILE
BELOW = UP » 1;
return UP-RES > RES - BELOW ?
BELOW : UP;
END FUNCTION
```

##### Algorithmus 6.1.2:

```
FUNCTION NORMALIZE()
P_Of_TWO = NEXTPOWEROF2(SUM);
WHILE((S=getSUM()) != P_Of_TWO)
IF(S > P_Of_TWO)
MAX = getMAXFREQ();MAX » 1;
ELSE
MIN = getMINFREQ();MIN « 1;
END WHILE
END FUNCTION
```

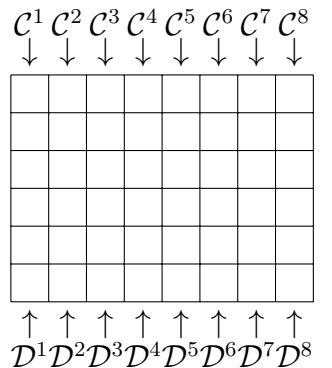
Zunächst approximiert man die Summe aller Häufigkeiten und jede auftretende Häufigkeit durch eine Potenz von Zwei mit Hilfe von Algorithmus 6.1.1. Anschließend werden die Häufigkeiten durch Algorithmus 6.1.1 normalisiert.<sup>8</sup> Aus Gründen der Performanz sollten hierbei nur echte positiven Häufigkeiten berücksichtigt werden.

#### 6.1.2 Normalisierung im Rahmen des ANS-Verfahrens

Die Normalisierung erfolgt analog zur Normalisierung des UANS-Verfahren, in Algorithmus 6.1.1 sind Rechts- bzw. Linksshift allerdings durch eine Dekrementierung bzw. Inkrementierung durch eins zu ersetzen.

<sup>7</sup> Die Implementierung hierfür erfolgt in der Klasse Histogram.

<sup>8</sup> Die Existenz und Eindeutigkeit der Binärdarstellung gewährleistet die Terminierung des Algorithmus.



Abschließend besprechen wir die Anwendung von uANS bei der Komprimierung von Bildern:

Anschließend werden alle vertikalen Pixelreihen parallel codiert.

### Beispiel 6.1.1:

Wir ermitteln für nebenstehendes Bild das Quellalphabet mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

Symbol	Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
0	12646	0.0015075206756591797
1	8275	9.864568710327148E-4
2	14176	0.001689910888671875
3	20429	0.00243532657623291
4	27937	0.0033303499221801758
5	36130	0.0043070316314697266
6	42426	0.005057573318481445
20	83726	0.009980916976928711
21	83340	0.00993490219116211
22	83170	0.009914636611938477
23	82148	0.009792804718017578
24	82140	0.009791851043701172
25	81860	0.009758472442626953
26	80743	0.00962531566619873
27	79633	0.009492993354797363
28	79572	0.009485721588134766
29	78508	0.009358882904052734
30	78026	0.009301424026489258
31	76967	0.00917518138885498
32	75330	0.008980035781860352

Abbildung 1: Auszug: erste 50 Symbole



Abbildung 2: Blick von der Antechima in das untere Sarchetal.

Wir dekomprimieren nach obigem Verfahren und setzen sämtliche rgb-Werte auf r00.

Symbol	Häufigkeit	Wahrscheinlichkeit
33	73876	0.008806705474853516
34	72291	0.008617758750915527
35	70384	0.008390426635742188
36	68368	0.008150100708007812
37	66323	0.007906317710876465
38	64607	0.007701754570007324
39	62227	0.007418036460876465
40	59856	0.0071353912353515625
41	57758	0.0068852901458740234
42	55613	0.006629586219787598
43	53136	0.0063343048095703125
44	50396	0.006007671356201172
45	48412	0.005771160125732422
46	45429	0.005415558815002441
47	43096	0.005137443542480469
48	41076	0.004896640777587891
49	38609	0.004602551460266113
50	36859	0.004393935203552246

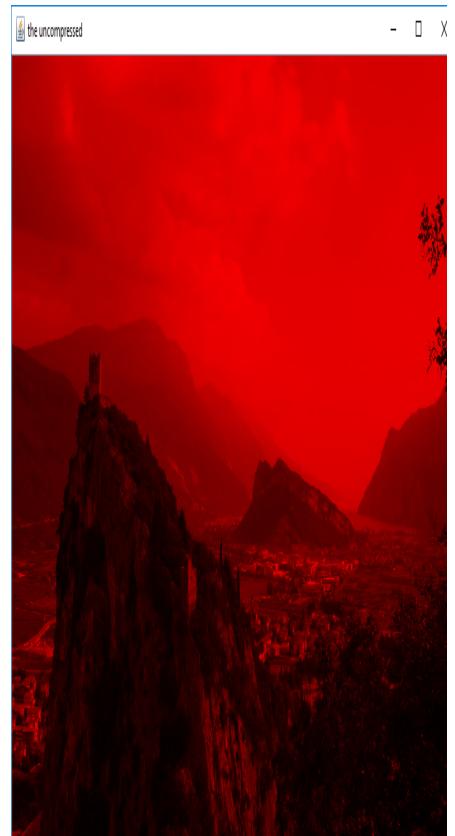


Abbildung 3: Auszug: erste 50 Symbole - Fortsetzung

## 7 Ergebnisse

Im Folgenden wird der Einfluss der Normalisierung und der Filterung auf Bilder demonstriert. Die Implementierung wurde in Java umgesetzt und steht unter <https://github.com/Hau-Bold/ImageProcessor> zu Verfügung.

### 7.1 Ergebnisse der Normalisierung

Im Folgenden wird der Einfluss der Normalisierung auf ein Bild (Siehe nächster Abschnitt Filtertyp 0) demonstriert:

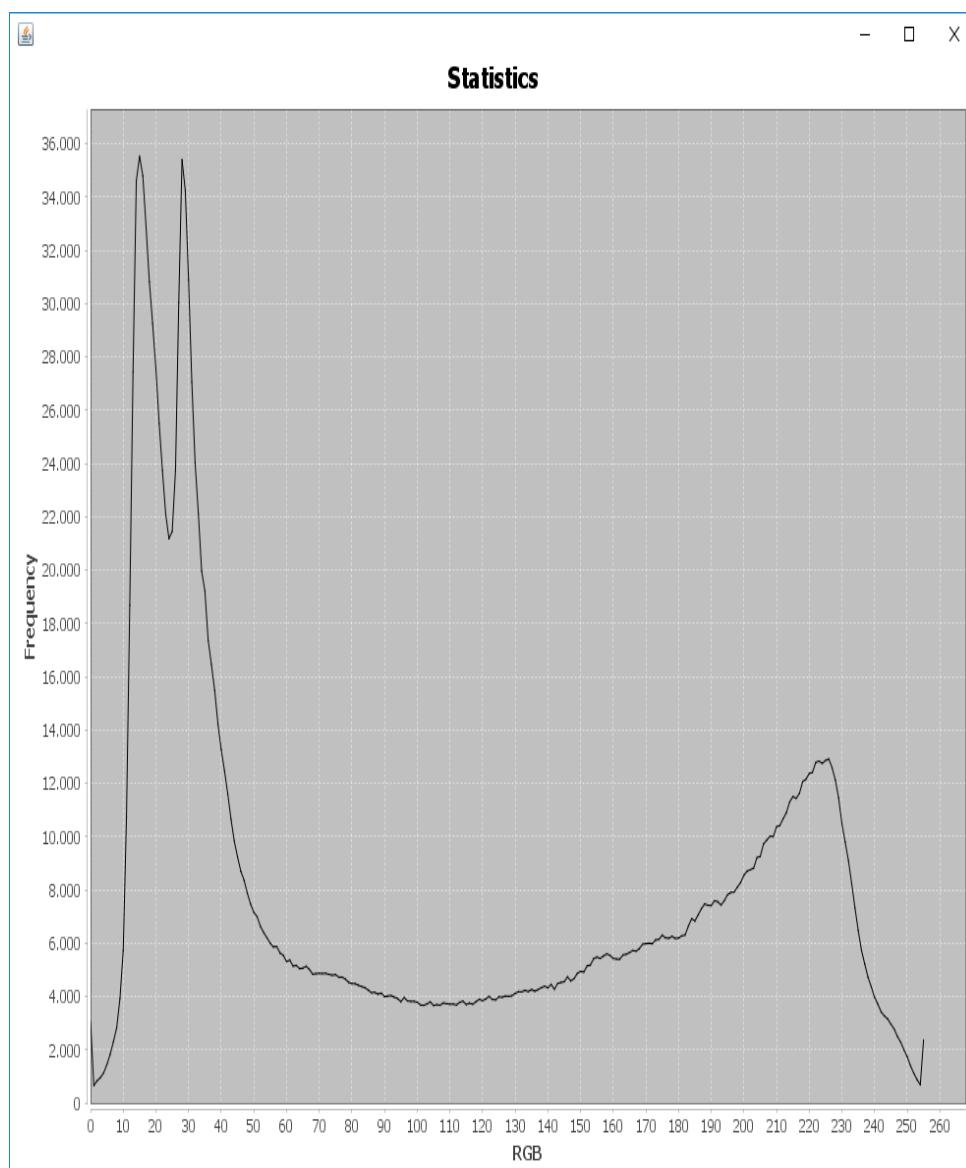


Abbildung 4: Häufigkeiten - Ohne Normalisierung

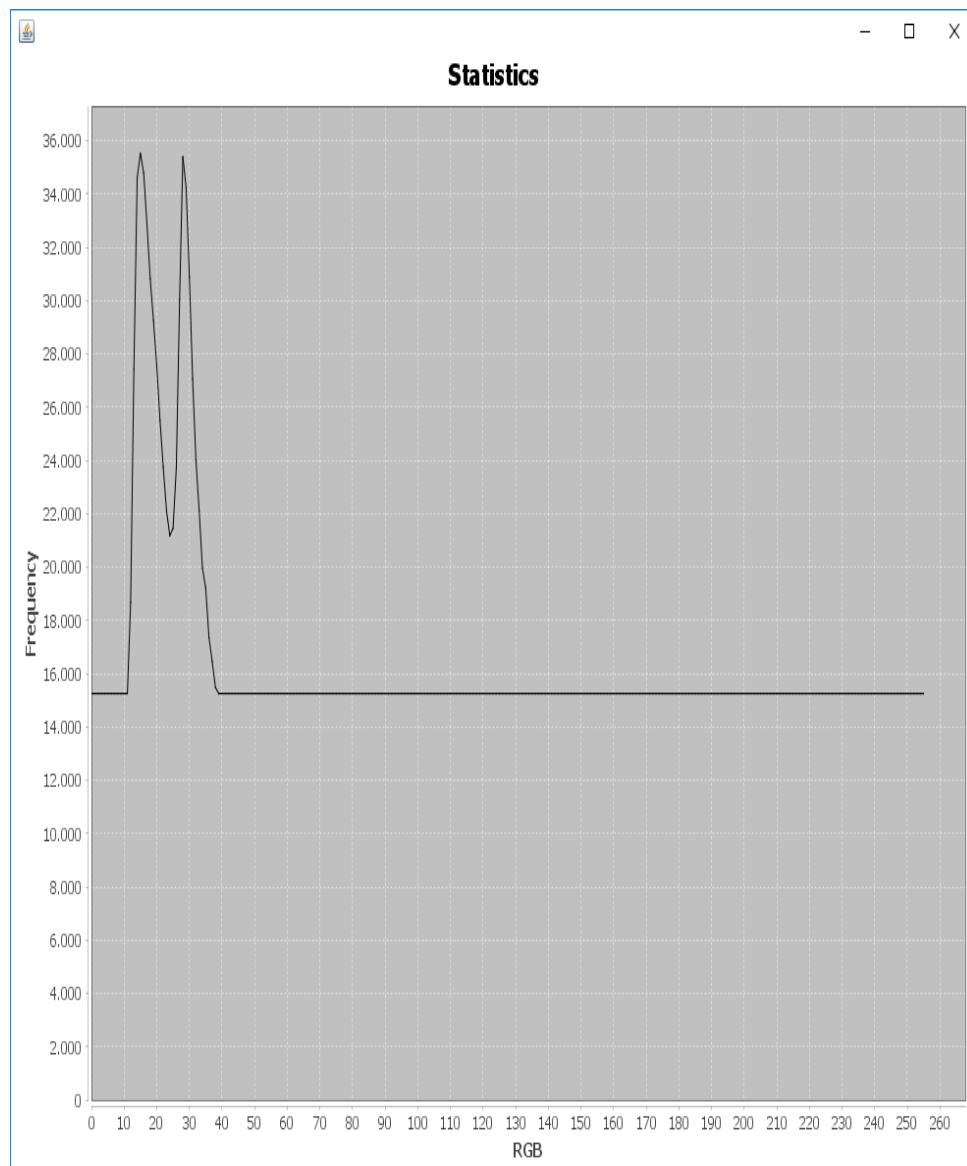


Abbildung 5: Häufigkeiten - Normalisierung ANS

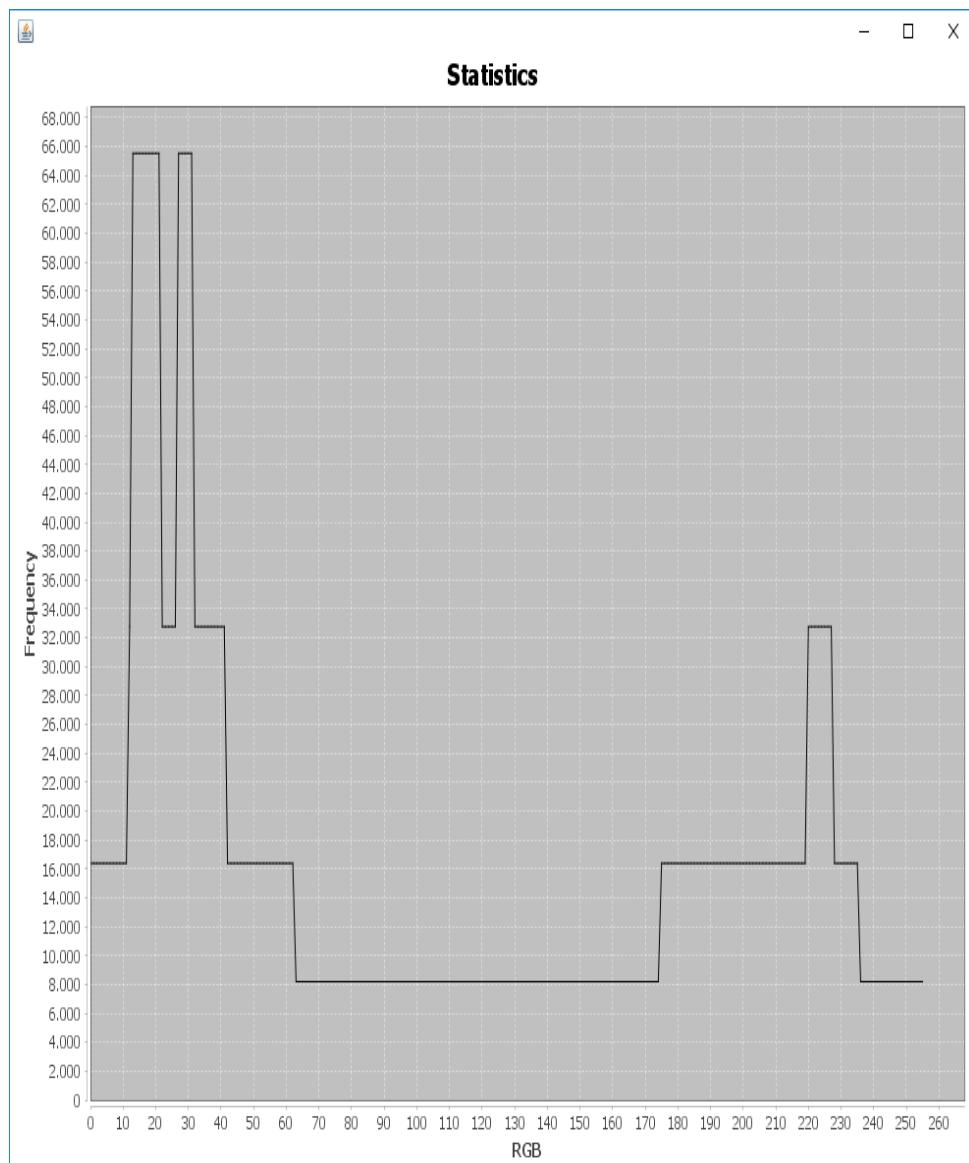


Abbildung 6: Häufigkeiten - Normalisierung uANS

## 7.2 Ergebnisse der Filterung

Im Folgenden wird der Einfluss der verwendeten Filter demonstriert.



Abbildung 7: Filtertyp 0 - NONE

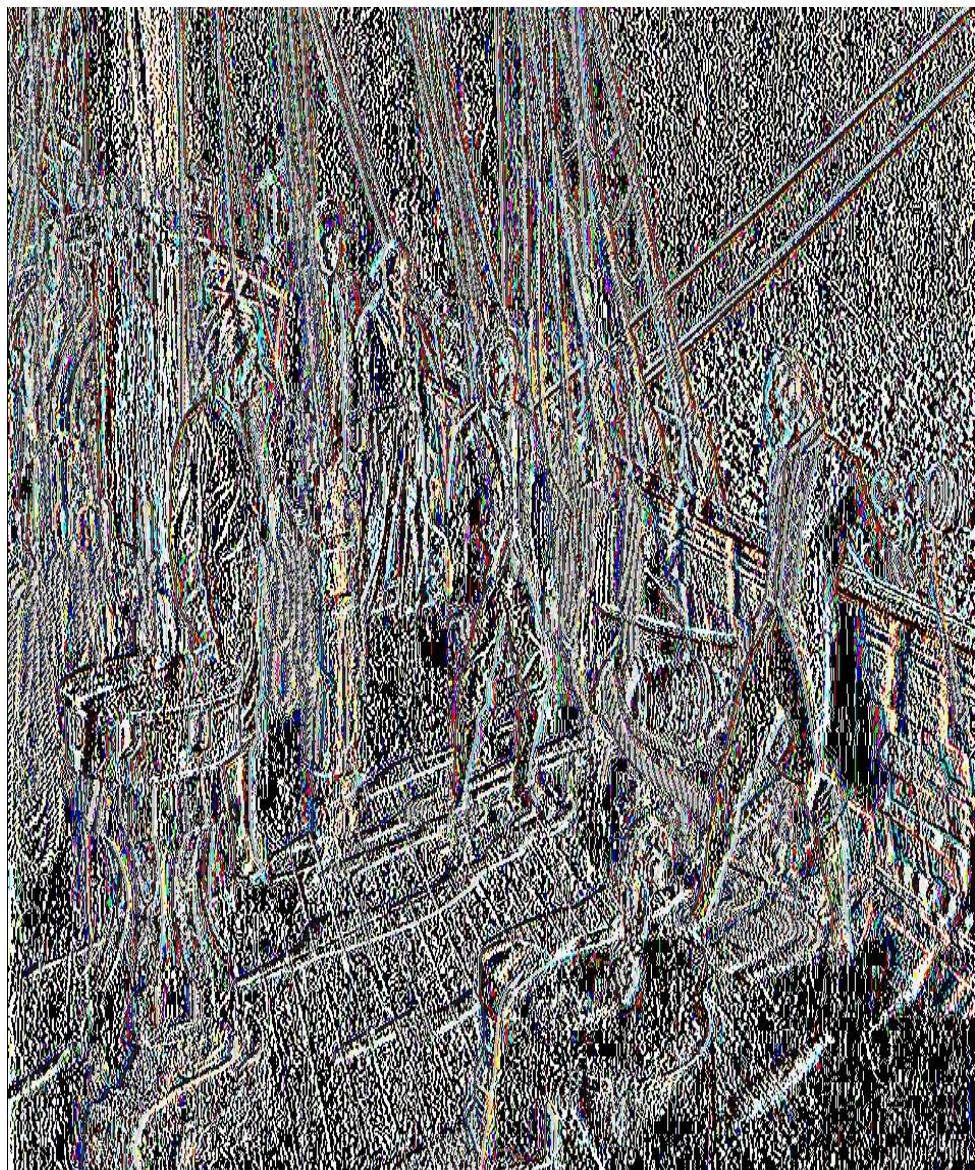


Abbildung 8: Filtertyp 1 - SUB

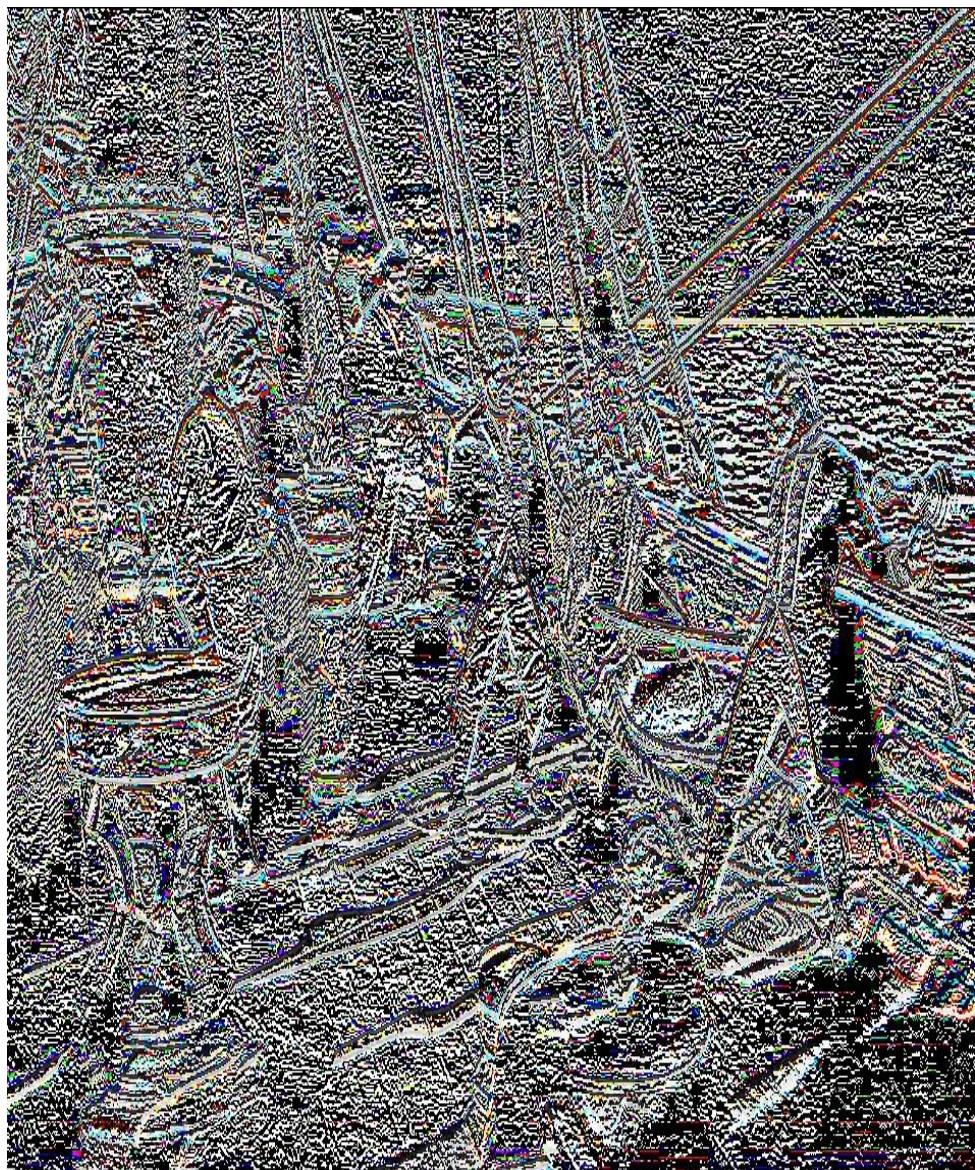


Abbildung 9: Filtertyp 2 - UP

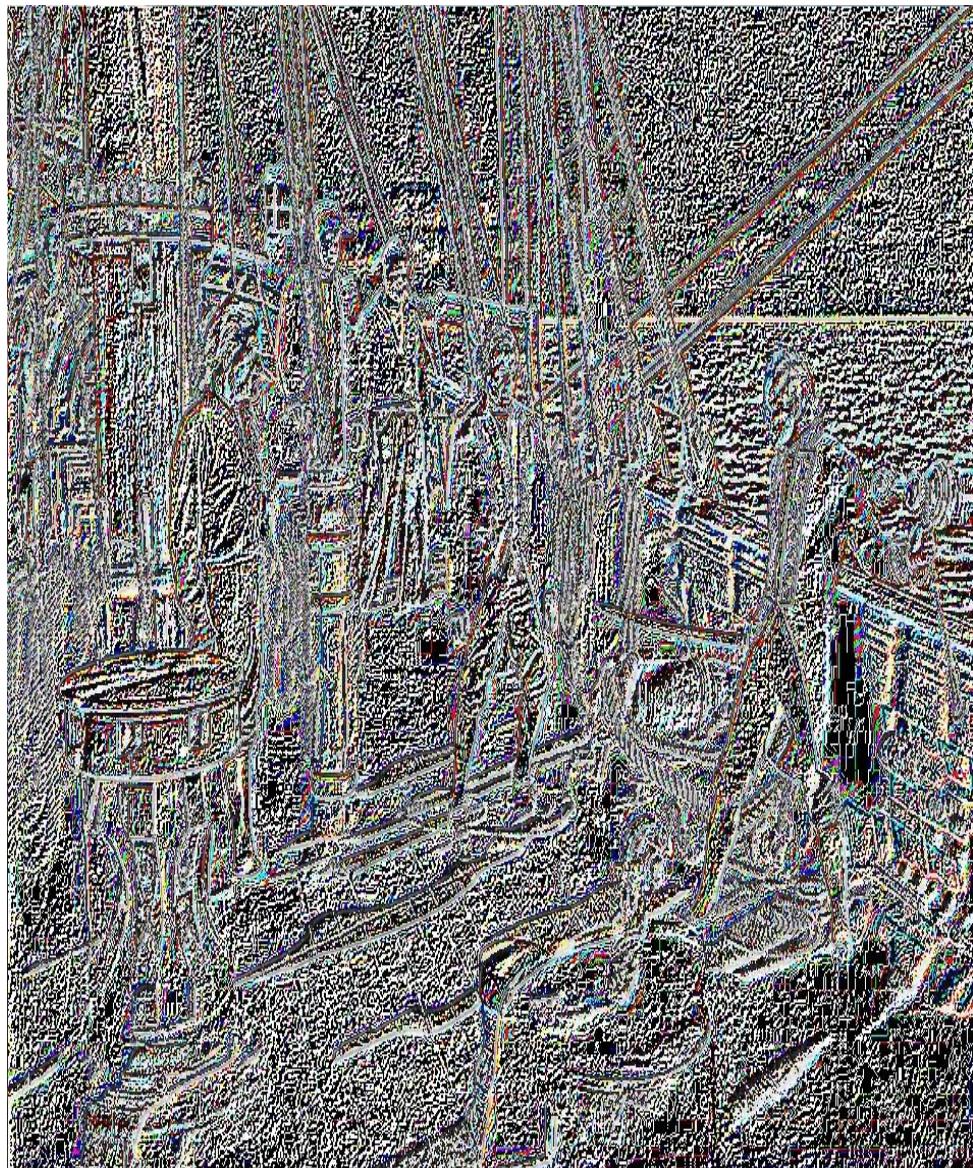


Abbildung 10: Filtertyp 3 - AVERAGE\_2

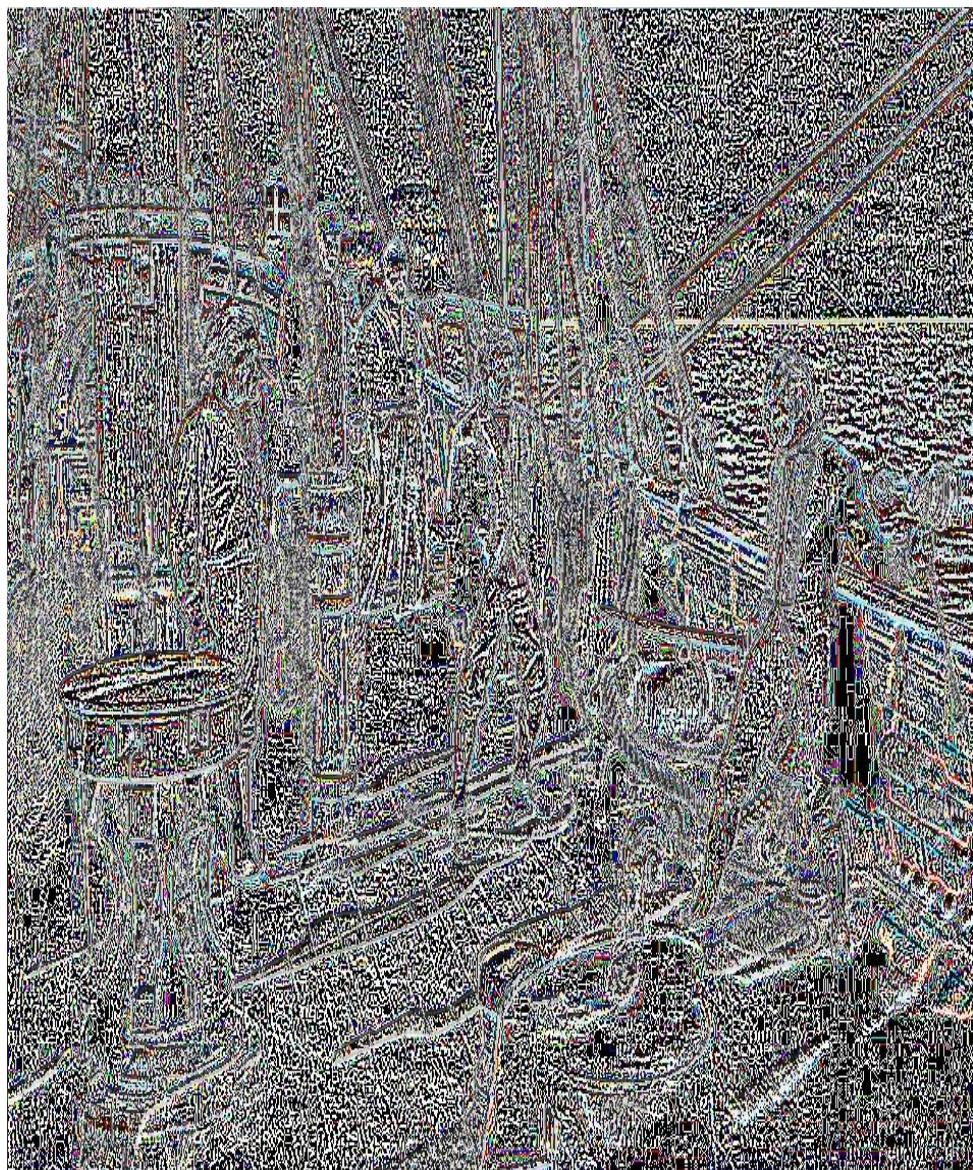


Abbildung 11: Filtertyp 4 - AVERAGE\_3



Abbildung 12: Filtertyp 5 - AVERAGE\_4

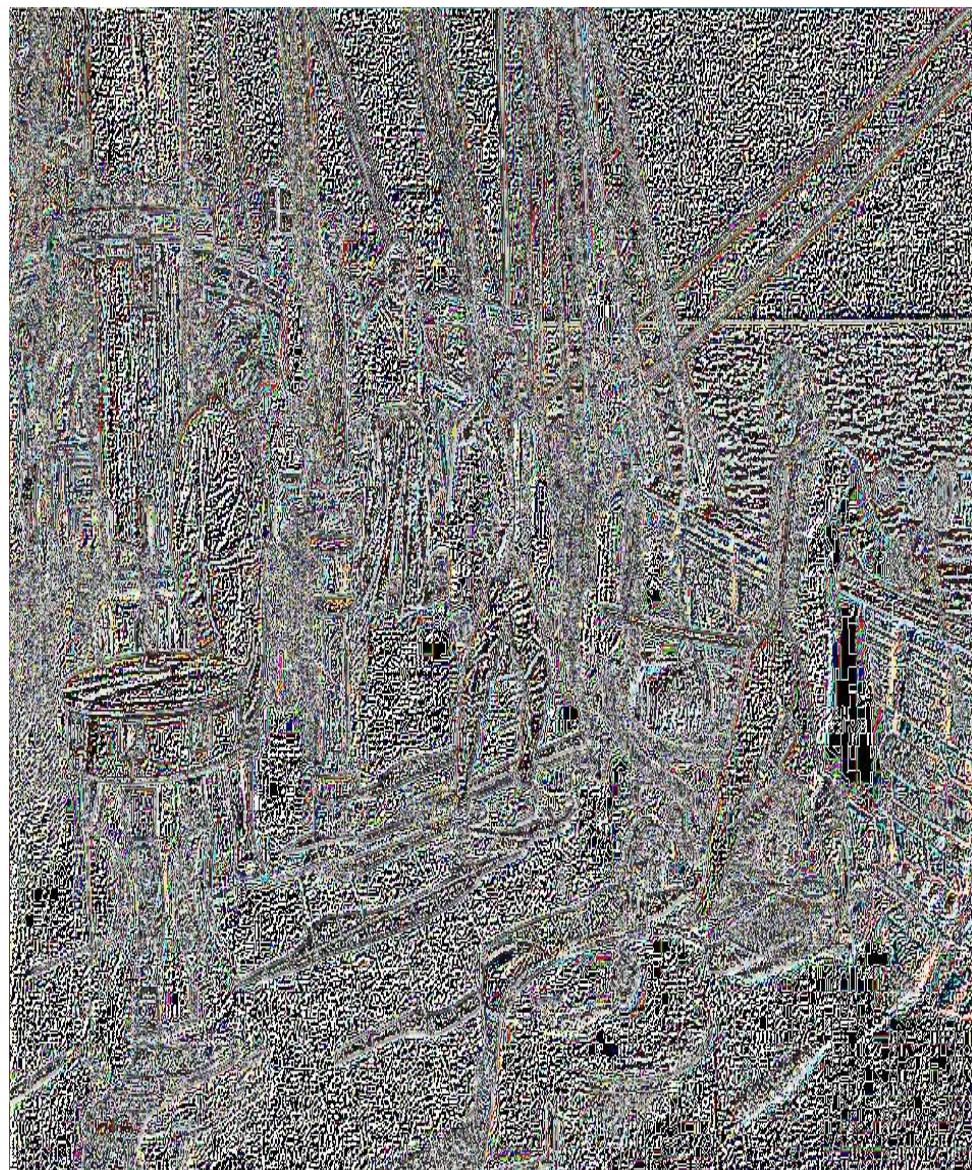


Abbildung 13: Filtertyp 6 - AVERAGE\_5

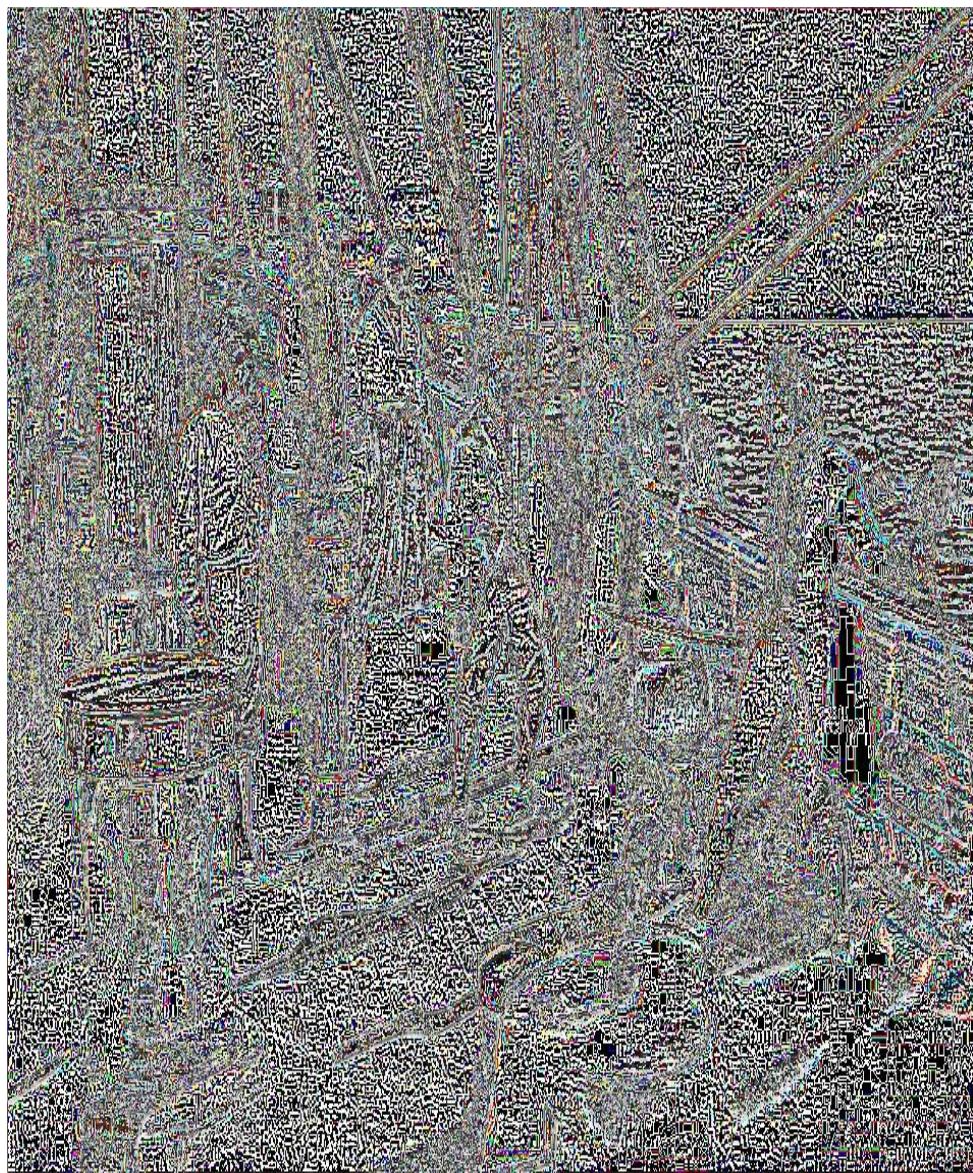


Abbildung 14: Filtertyp 7 - AVERAGE\_6



Abbildung 15: Filtertyp 8 - AVERAGE\_7

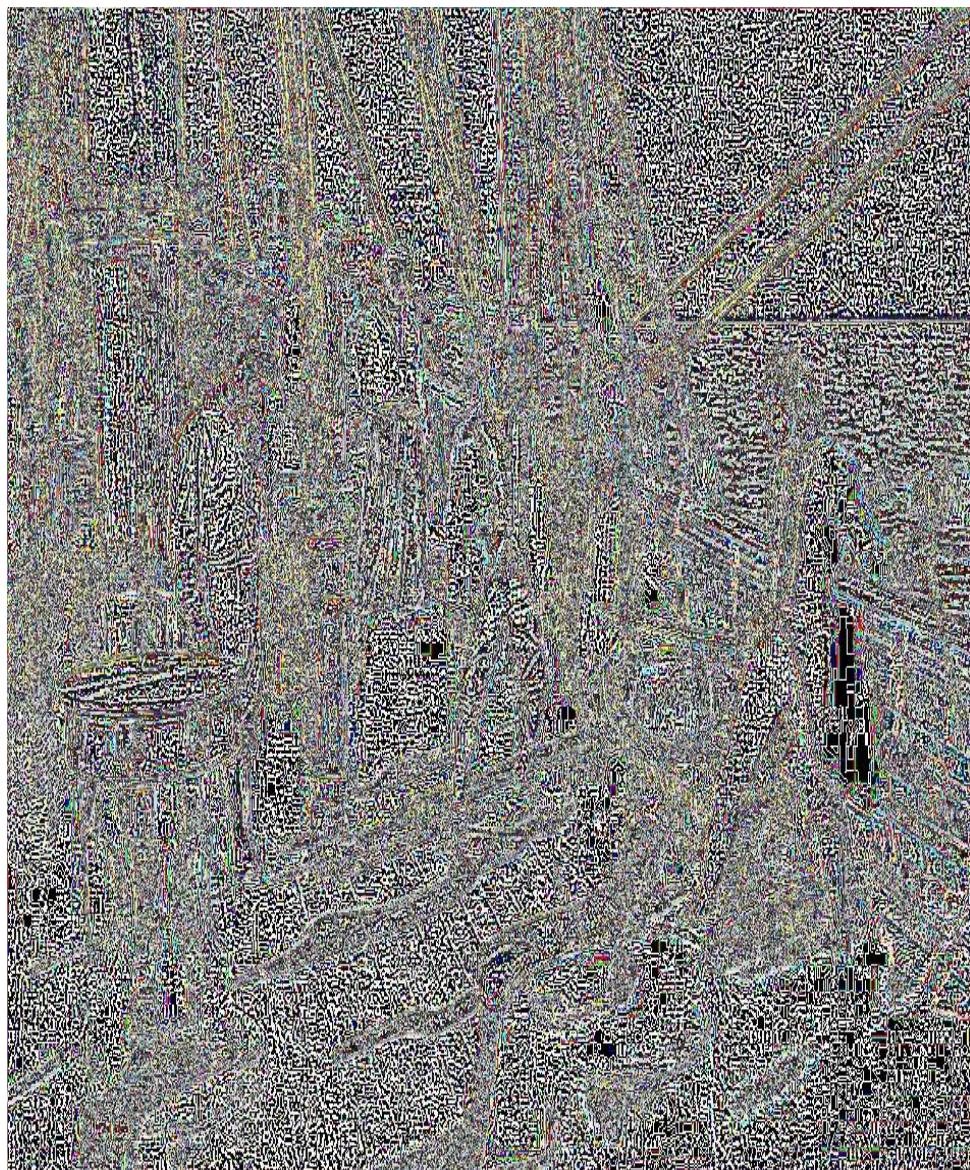


Abbildung 16: Filtertyp 9 - AVERAGE\_8

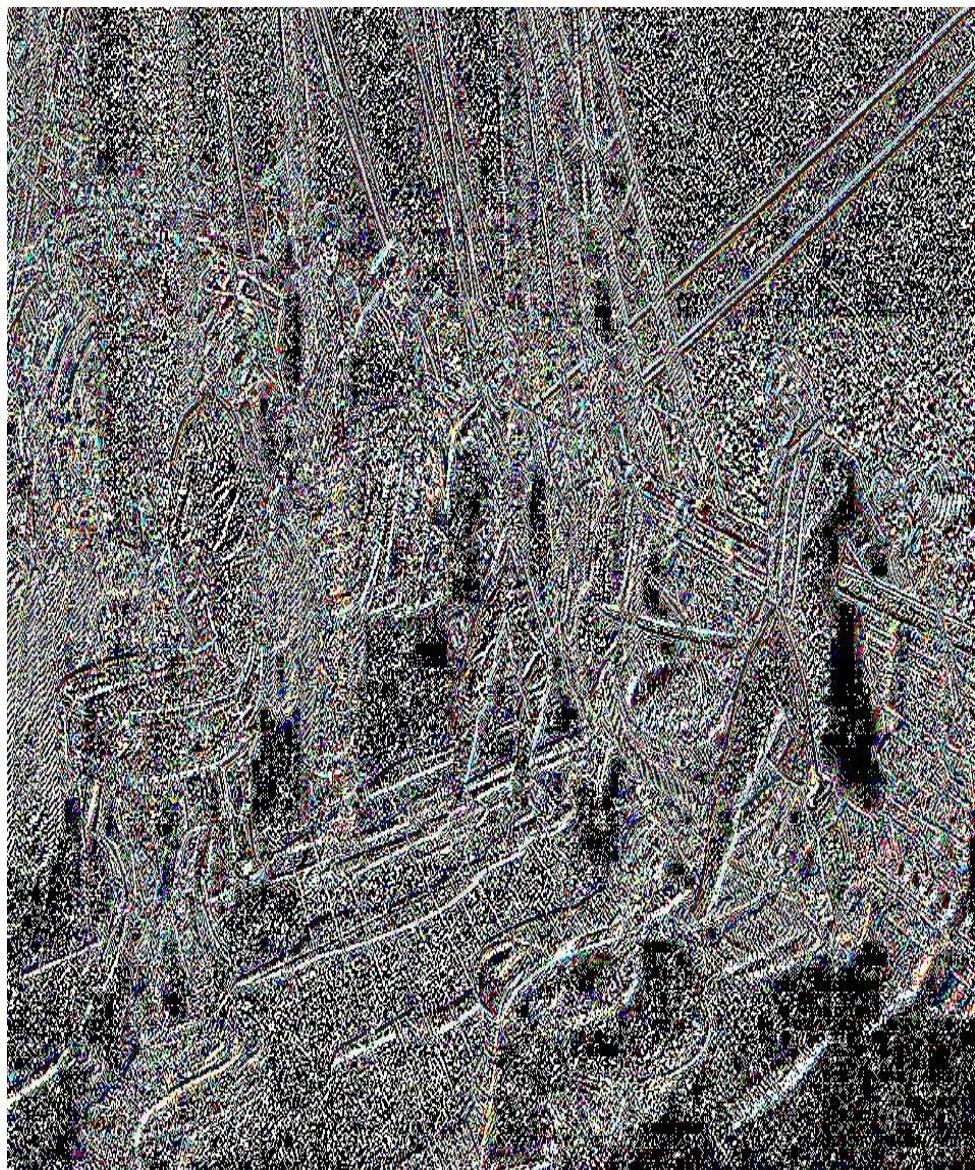


Abbildung 17: Filtertyp 6 - PAETH

### 7.2.1 Verhalten der Entropie unter Verwendung der Filterung und Normalisierung

Abschließend geben wir das Verhalten der Entropie unter Verwendung der Normalisierung der Filterung wieder. Stufe 0 steht für die Entropie ohne Normalisierung, Stufe 1 für die Entropie nach Normalisierung. Stufe 2 (3) gibt den Wert der Entropie nach Verwendung eines Filters ohne (mit) vorheriger Normalisierung wieder, und Stufe 4 (5) den Wert nach Einsatz eines Filters und anschließender Normalisierung mit (ohne) vorheriger Normalisierung.

Für die Normalisierung ANS erhält man folgende Werte:

Filtertyp	0	1	2	3	4A	4B
<b>None</b>	7.58792	7.58793	7.58792	7.58792	7.58793	7.58792
<b>Sub</b>	7.58792	7.58793	5.52772	5.52772	5.52773	5.52773
<b>Up</b>	7.58792	7.58793	5.3858	5.3858	5.38582	5.38582
<b>Average2</b>	7.58792	7.58793	6.1528	6.1528	6.1528	6.1528
<b>Average3</b>	7.58792	7.58793	6.39763	6.39763	6.39762	6.39762
<b>Average4</b>	7.58792	7.58793	6.58027	6.58027	6.58027	6.58027
<b>Average5</b>	7.58792	7.58793	6.95311	6.95311	6.95314	6.95314
<b>Average6</b>	7.58792	7.58793	7.16235	7.16235	7.16235	7.16235
<b>Average7</b>	7.58792	7.58793	7.2852	7.2852	7.2852	7.2852
<b>Average8</b>	7.58792	7.58793	7.38257	7.38257	7.38258	7.38258
<b>Paeth</b>	7.58792	7.58793	5.00477	5.00477	5.00478	5.00478

Für die Normalisierung uABS erhält man folgende Werte:

Filtertyp	0	1	2	3	4	5
<b>None</b>	7.58792	7.63281	7.58792	7.58792	7.58793	7.63281
<b>Sub</b>	7.58792	7.63281	5.52772	5.52772	5.52773	6.0918
<b>Up</b>	7.58792	7.63281	5.3858	5.3858	5.38582	6.00684
<b>Average2</b>	7.58792	7.63281	6.1528	6.1528	6.1528	6.20898
<b>Average3</b>	7.58792	7.63281	6.39763	6.39763	6.1528	6.6543
<b>Average4</b>	7.58792	7.63281	6.58027	6.58027	6.58027	6.62695
<b>Average5</b>	7.58792	7.63281	6.95311	6.95311	7.10156	7.10156
<b>Average6</b>	7.58792	7.63281	7.16235	7.16235	7.23828	7.23828
<b>Average7</b>	7.58792	7.63281	7.2852	7.2852	7.47656	7.47656
<b>Average8</b>	7.58792	7.63281	7.38257	7.38257	7.50391	7.50391
<b>Paeth</b>	7.58792	7.63281	5.00477	5.00477	5.21973	5.21973

## 8 Kommandozeilenparameter

## Abbildungsverzeichnis

1	Auszug: erste 50 Symbole . . . . .	36
2	Blick von der Antechima in das untere Sarchetal. . . . .	36
3	Auszug: erste 50 Symbole - Fortsetzung . . . . .	37
4	Häufigkeiten - Ohne Normalisierung . . . . .	38
5	Häufigkeiten - Normalisierung ANS . . . . .	39
6	Häufigkeiten - Normalisierung uANS . . . . .	40
7	Filtertyp 0 - NONE . . . . .	41
8	Filtertyp 1 - SUB . . . . .	42
9	Filtertyp 2 - UP . . . . .	43
10	Filtertyp 3 - AVERAGE_2 . . . . .	44
11	Filtertyp 4 - AVERAGE_3 . . . . .	45
12	Filtertyp 5 - AVERAGE_4 . . . . .	46
13	Filtertyp 6 - AVERAGE_5 . . . . .	47
14	Filtertyp 7 - AVERAGE_6 . . . . .	48
15	Filtertyp 8 - AVERAGE_7 . . . . .	49
16	Filtertyp 9 - AVERAGE_8 . . . . .	50
17	Filtertyp 6 - PAETH . . . . .	51

## 9 Literaturverzeichnis

### Literatur

- [1] Krajcevski P., Pratapa S., Manocha D. *GST: GPU-decodable Supercompressed Textures*, Proc. of ACM SIGGRAPH Asia, (2016).
- [2] Giesen F. *Interleaved entropy coders*, arXiv:1402.3392 , (2014).
- [3] Duda J. *Asymmetric numeral systems: entropy coding combining speed of Huffman coding with compression rate of arithmetic coding*, CoRR, abs/1311.2540v2, (2014).
- [4] Liśkiewicz M., Fernau H. *Datenkompression* <https://www.uni-trier.de/fileadmin/fb4/prof/INF/TIN/Folien/DK/script.pdf>.
- [5] Li M., Vitányi P. *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*, 2. Auflage, Springer, (1997).
- [6] Lajmi L. *Informationstheorie und Codierung* [https://www.ostfalia.de/export/sites/default/de/pws/lajmi/Lehre/Codierungstheorie/pdf/Quellencodierung\\_SS15.pdf](https://www.ostfalia.de/export/sites/default/de/pws/lajmi/Lehre/Codierungstheorie/pdf/Quellencodierung_SS15.pdf).
- [7] Rohling H. *Einführung in die Informations- und Codierungstheorie* B.G. Teubner Stuttgart, (1995).
- [8] Huffman D. A. *A method for the construction of minimum-redundancy codes* Proceedings of the I.R.E., S. 1098-1101, (1952).
- [9] *Smaller and faster data compression with Zstandard* <https://code.facebook.com/posts/1658392934479273/smaller-and-faster-data-compression-with-zstandard/>
- [10] *Apple Open-Sources its New Compression Algorithm LZFSE* <https://www.infoq.com/news/2016/07/apple-lzfse-lossless-opensource>
- [11] *Google Draco 3D compressor* <https://github.com/google/draco>
- [12] *PNG (Portable Network Graphics) Specification* <https://www.w3.org/TR/PNG-Filters.html>
- [13] Breymann U. *DER C++ Programmierer*, Carl Hanser Verlag München, (2015).
- [14] Williams A. *C++ Concurrency IN ACTION*, Manning Publications Co Shelter Island NY 11964 (2012).

## **Erklärung:**

Die vorliegende Bachelorarbeit wurde am Institut für Informatik der Hochschule Coburg nach einem Thema von Herrn Prof. Dr. Quirin Meyer erstellt. Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig angefertigt und dazu nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Coburg, den 5. Februar 2019

Michael Krasser