



Bayerische
Julius-Maximilians-Universität
Würzburg

Institut für Mathematik

Analytische Eigenschaften gewisser zu
linearen Rekursionen assoziierten
Dirichlet-Reihen

Diplomarbeit
von
Michael Krasser

Betreuer: Prof. Dr. Jörn Steuding

Würzburg, September 2010

Vorwort

Diese Arbeit entstand während des Winter- und des Sommersemesters 09/10. Für die Anregung und Ermutigung, mich mit diesem Thema auseinanderzusetzen, für die wertvollen Impulse und seine permanente Unterstützung möchte ich Herrn Prof. Dr. Jörn Steuding meinen besonderen Dank aussprechen.

Insbesondere möchte ich mich bei meinen lieben Eltern, Dr. Walter und Cornelia Krasser, und lieben Großeltern Dr. Konrad und Gisela Mahlo für die Ermöglichung dieses Studiums bedanken.

Zusammenfassung

Gegenstand des Interesses in dieser Arbeit ist die Konstruktion und Untersuchung einer speziellen Klasse von Dirichlet-Reihen. Aufbauend auf der Arbeit von Navas [11] über die Fibonacci Zeta-Funktion

$$\zeta_{\{F\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-s},$$

wird in den ersten drei Kapiteln das Ziel forciert, dem Leser einen sinnvollen Begriff von Dirichlet-Reihen der allgemeinen Form

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}, a_n \in \mathbb{N},$$

wobei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch eine lineare und homogene Gleichung l -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten festgelegt ist, zu vermitteln. Zunächst werden hierfür in ausführlicher Form die notwendigen Kenntnisse über Differenzen-Gleichungen und Dirichlet-Reihen bereitgestellt, um dann in Kapitel 3 diese beiden Begriffe, in dem Fall, dass die Differenzen-Gleichung linear und homogen ist, zu vermählen.

Die nachfolgenden Kapitel befassen sich dann einerseits mit dem Versuch, die von Navas in [11] und von Steuding in [19] entdeckten analytischen Eigenschaften von $\zeta_{\{F\}}$ auf obige Dirichlet-Reihen $\zeta_{\{a\}}$ zu verallgemeinern und andererseits werden neue analytische Eigenschaften gesucht:

Zunächst wird sich zeigen, dass die Existenz einer analytischen Fortsetzung von $\zeta_{\{a\}}$ in die gesamte komplexe Ebene \mathbb{C} , unter gewissen Zusatzbedingungen an die rekurrente Folge $\{a\}$, stets gesichert ist. Anschließend werden Singularitäten dieser analytischen Fortsetzung gesucht, klassifiziert und in gewissen Fällen unter ihnen Beziehungen aufgedeckt. Dabei wird sich zeigen, dass trotz der an die Rekursion $\{a\}$ gestellten Restriktionen, die analytische Fortsetzung der damit assoziierten Zeta-Funktion $\zeta_{\{a\}}$ ein recht chaotisches Verhalten besitzen kann. Dadurch motiviert, wird nach Zeta-Funktionen $\zeta_{\{a\}}$ gesucht, die auf der reellen Achse einer gewissen Regelmäßigkeit unterliegen. Desweiteren wird sich zeigen, dass allgemeine Dirichlet-Reihen der Gestalt

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-s},$$

innerhalb ihrer Konvergenzhalbebene \mathbb{H}_{σ_0} unter der Bedingung $b_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, keine Nullstelle besitzen können. Außerdem wird ein Versuch unternommen, die verblüffende Äquidistanz der trivialen Nullstellen von $\zeta_{\{F\}}$ zu erklären, um so auf ihre vorrangige Stellung unter der Menge obiger Dirichlet-Reihen hinzuweisen.

Abschließend wird, auf Grund von Steudings Arbeit [19], der Begriff der Hypertranszendenz erklärt und ein Kriterium geliefert, aus welchem sich hypertranszendente Dirichlet-Reihen $\zeta_{\{a\}}$ konstruieren lassen.

Inhaltsverzeichnis

1	Lineare Differenzen-Gleichungen	5
1.1	Vorbemerkung	5
1.2	Die Differenzen-Rechnung	5
1.3	Allgemeines über lineare Differenzen-Gleichungen	8
1.4	Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten	13
1.5	Der Hauptsatz für lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten	15
2	Grundlagen der allgemeinen Theorie von Dirichlet-Reihen	17
2.1	Vorbemerkung	18
2.2	Die elementare Theorie der Konvergenz von Dirichlet-Reihen	18
2.3	Die Bestimmung der Konvergenzabszisse	22
2.4	Absolute Konvergenz einer Dirichlet-Reihe	24
2.5	Vergleich der Konvergenz von Dirichlet- und Potenzreihe	26
3	Die Menge \mathfrak{R}^l und die Klasse ζ	28
3.1	Vorbemerkung	28
3.2	Die Menge \mathfrak{R}^l	32
3.2.1	Ganzzahligkeit	33
3.2.2	Festlegung des Wachstums	37
3.2.3	Positivität	37
3.2.4	Zusammenfassung: Eine Teilmenge \mathfrak{C}^l von \mathfrak{R}^l	40
3.3	Die Klasse ζ	40
4	Elementare Eigenschaften der Klasse ζ	41
4.1	Vorbemerkung	41
4.2	Analytische Fortsetzbarkeit der Elemente von ζ	42
4.3	Diskussion der Singularitäten	51
4.3.1	Konstruktion von Elementen $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ mit regelmäßigem Polverhalten auf der reellen Achse	59
4.4	Das Verhalten der Elemente der Klasse ζ in der rechten Halbebene	63
4.5	Anmerkungen	67
4.5.1	Über die trivialen Nullstellen der Fibonacci Zeta-Funktion	67
4.5.2	Nahe Verwandte von $\zeta_{\{F\}}$	75
5	Die Klasse ζ und Hypertranszendenz	79
5.1	Vorbemerkung	79
5.2	Die Hypertranszendenz für Dirichlet-Reihen im Allgemeinen	80
5.3	Hypertranszendente Elemente der Klasse ζ	81
6	Anhang	84
6.1	Ergebnisse der Funktionentheorie	84
6.2	Ergebnisse der Analysis	85

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	4
7 Verzeichnis der verwendeten Symbole	88
8 Literaturverzeichnis	89

1 Lineare Differenzen-Gleichungen

1.1 Vorbemerkung

In diesem Kapitel betrachten wir in elementarer Form lineare Differenzen-Gleichungen und stellen ein Konzept zur Lösung für den Fall, dass die lineare Differenzen-Gleichung homogen ist und nur konstante Koeffizienten besitzt, bereit. Wenn nicht anders erwähnt, ist der Inhalt des Kapitels in ausführlicher Form unter [8], Kapitel 2 und Kapitel 3 zu finden.

1.2 Die Differenzen-Rechnung

Wir stellen hier einige Werkzeuge bereit, welche im Umgang mit Differenzen-Gleichungen äußerst nützlich sind.

Definition 1.2.1:

Sei $y(t)$ eine Funktion einer reellen oder komplexen Veränderlichen t .

Der **Differenzen-Operator** Δ wird durch

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

definiert.

Die Schrittweite 1 bei der Definition des Differenzen-Operators spielt dabei keine Rolle: Besäße der Differenzen-Operator die Schrittweite h , also

$$\Delta y(t) = y(t+h) - y(t),$$

dann setzten wir $t = sh$ und $y(th) = z(t)$. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= y(h(s+1)) - y(hs) \\ &= z(s+1) - z(s) \\ &= \Delta z(s). \end{aligned}$$

Im Folgenden ist für uns die Funktion $y(t)$ stets über einer unendlichen Menge der Gestalt $a, a+1, a+2, \dots$ definiert, wobei a immer eine reelle oder komplexe Zahl ist. Analog können wir Differenzen-Operatoren höherer Ordnung durch die rekursive Definition

$$\Delta^n := \Delta(\Delta^{n-1})$$

betrachten:

Satz 1.2.1:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(t + n - k).$$

Beweis:

Durch vollständige Induktion:

(IA): Sei $n = 1$. Offensichtlich ist die Aussage erfüllt.

(IV): Die Aussage sei nun bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(IS): Schluss von n auf $n + 1$:

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} y(t) &= \Delta (\Delta^n y(t)) \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \Delta \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(t + n - k) \right) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(t + n + 1 - k) - y(t + n - k) \\ &= y(t + n + 1) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} y(t + n + 1 - k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k-1} y(t + n + 1 - k) + (-1)^{n+1} y(t) \\ &= y(t + n + 1) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} y(t + n + 1 - k) + (-1)^{n+1} y(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} y(t + n + 1 - k). \end{aligned}$$

□

Ein weiterer Operator, der oft im Zusammenhang mit dem Differenzen-Operator verwendet wird, ist der Shift-Operator.

Definition 1.2.2:

Der **Shift-Operator** E wird durch

$$Ey(t) = y(t + 1)$$

definiert.

Bezeichnet I den Identitäts-Operator, also $Iy(t) = y(t)$, erhalten wir

$$\Delta = E - I.$$

Außerdem gilt die Gleichung

$$\Delta^n y(t) = \sum_{k=0}^n (-I)^k \binom{n}{k} E^{n-k} y(t) = (E - I)^n. \quad (1)$$

Wir geben nun einige Eigenschaften von Δ wieder:

Satz 1.2.2:

- a) $\Delta^m(\Delta^n y(t)) = \Delta^{m+n} y(t)$ für $m, n \in \mathbb{N}$,
- b) $\Delta(y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t)$,
- c) $\Delta(Cy(t)) = C\Delta y(t)$ falls C konstant,
- d) $\Delta(y(t)z(t)) = y(t)\Delta z(t) + E(z(t))\Delta y(t)$,
- e) $\Delta \left(\frac{y(t)}{z(t)} \right) = \frac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}.$

Beweis:

a) Folgt unmittelbar durch Anwendung der rekursiven Definition von Δ .

b)

$$\Delta(y(t) + z(t)) = y(t+1) + z(t+1) - (y(t) + z(t)) = \Delta y(t) + \Delta z(t).$$

c) trivial.

d)

$$\begin{aligned} \Delta(y(t)z(t)) &= y(t+1)z(t+1) - y(t)z(t) \\ &= z(t+1)(\Delta(y(t)) + y(t)) - y(t)z(t) \\ &= E(z(t))\Delta y(t) + y(t)\Delta z(t). \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{y(t)}{z(t)} \right) &= \frac{y(t+1)}{z(t+1)} - \frac{y(t)}{z(t)} \\ &= \frac{y(t+1)z(t) - y(t)z(t+1)}{z(t)Ez(t)} \\ &= \frac{z(t)\Delta y(t) - y(t)\Delta z(t)}{z(t)Ez(t)}. \end{aligned}$$

□

Wir wenden nun den Differenzen-Operator auf Potenzen an:

Lemma 1.2.1:

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, dann gilt für $0 \leq k \leq n-1$:

$$\Delta^n t^k = 0.$$

Beweis:

Wegen Satz 1.2.2 a) müssen wir nur $\Delta^n t^{n-1} = 0$ beweisen, denn für $1 \leq k \leq n$ gilt:

$$\Delta^n t^{n-k} = \Delta^{k-1} (\Delta^{n-k+1} t^{n-k}).$$

(IA): Sei $n = 1$. Dann ist die Aussage offensichtlich erfüllt.

(IV): Die Aussage sei nun bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(IS): Schluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} t^n &= \Delta^n (\Delta(t^n)) \\ &= \Delta^n (\Delta(t^{n-1})t + Et^{n-1}\Delta t) \\ &= \Delta^n (((t+1)^{n-1} - t^{n-1})t + Et^{n-1}) \\ &= \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} t^{k+1} + Et^{n-1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \Delta^n t^{k+1} + \Delta^n \left(\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} t^k \right) \\ &\stackrel{(IV)}{=} 0. \end{aligned}$$

□

1.3 Allgemeines über lineare Differenzen-Gleichungen

Definition 1.3.1:

Eine **lineare Differenzen-Gleichung** der **Ordnung** $l+1$, $l \in \mathbb{N}$ ist eine Gleichung der Form

$$p_l(t)y(t+l) + \dots + p_0(t)y(t) = r(t), \quad (2)$$

wobei $p_0(t), \dots, p_l(t)$ und $r(t)$ als bekannt vorausgesetzt werden und $p_0(t), p_l(t) \neq 0$ für alle t gilt. Falls $r(t) \not\equiv 0$, sagt man Gl. (2) ist **inhomogen**, sonst **homogen**.

Wir werden später noch den Zusammenhang zwischen Gl. (2) und der zugehörigen homogenen Gleichung

$$p_l(t)y(t+l) + \dots + p_0(t)y(t) = 0 \quad (3)$$

betrachten.

Satz 1.3.1:

p_0, \dots, p_l und $r(t)$ seien für $t = a, a+1, \dots$ definiert. Außerdem gelte $p_0(t), p_l \neq 0$ für alle t . Dann existiert für jedes $t_0 \in \{a, a+1, \dots\}$ und beliebige Zahlen y_0, \dots, y_{l-1} genau eine Funktion $y(t)$, welche für $t = a, a+1, \dots$ Gl.(2) genügt und $y(t_0 + k) = y_k$ für $k = 0, 1, \dots, l-1$ erfüllt.

Beweis:

Der Beweis erfolgt durch Iteration:

Auf Grund der Voraussetzung $p_l(t) \neq 0$ für alle $t = a, a+1, \dots$, gilt:

$$y(t_0 + l) = \frac{r(t_0) - p_{l-1}(t_0)y_{l-1} - \dots - p_0(t_0)y_0}{p_l(t_0)}.$$

Damit wird die Lösung $y(t)$ für $t = t_0 + l$ durch die l bekannten Werte y_0, \dots, y_{l-1} eindeutig festgelegt. Wir können dann für $t > t_0 + l$ dieselbe Argumentation verwenden.

Analog ist $y(t)$ - auf Grund von $p_0(t) \neq 0$ - auch für $t < t_0$ eindeutig festgelegt.

□

Wir charakterisieren nun die allgemeine Lösung von Gl.(2) durch eine Folge von Sätzen:

Satz 1.3.2:

- a) Die Menge der Lösungen von Gl.(3) ist ein linearer Unterraum des Raums aller Lösungen von Gl.(2).
- b) Sei $u(t)$ eine Lösung Gl.(3) und $v(t)$ eine Lösung von Gl.(2), dann ist $u(t) + v(t)$ eine Lösung von Gl.(3).
- c) Seien $y_1(t)$ und $y_2(t)$ Lösungen von Gl.(2), dann ist $y_1(t) - y_2(t)$ eine Lösung von Gl.(3).

Beweis:

Wir erhalten analog zur Theorie linearer Gleichungssysteme alle Aussagen durch einfaches Einsetzen.

□

Korollar 1.3.1:

Ist $z(t)$ eine Lösung von Gl.(2), dann hat jede Lösung $y(t)$ von Gl.(2) die Gestalt

$$y(t) = z(t) + u(t),$$

wobei $u(t)$ eine Lösung von Gl.(3) ist.

□

Eine Folgerung aus Korollar 1.3.1 ist nun, dass das Problem der Auffindung aller Lösungen von Gl.(2) in zwei kleinere Probleme zerfällt:

- Bestimme alle Lösungen von Gl.(3).
- Finde eine Lösung von Gl.(2).

Bei der Betrachtung des ersten Problems benötigen wir zuerst ein paar Definitionen:

Definition 1.3.2:

Die Menge der Funktionen $\{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ heißt **linear abhängig** auf der Menge $t = a, a + 1, \dots$, wenn es Konstanten $C_1, \dots, C_l, C_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, l\}$ gibt, sodass

$$C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + \dots + C_l u_l(t) = 0$$

für $t = a, a + 1, \dots$ gilt.

Andernfalls bezeichnen wir die Menge der Funktionen als **linear unabhängig**.

Wir werden nun eine Matrix definieren, welche bei der Behandlung von linearen Gleichungen sehr nützlich ist:

Definition 1.3.3:

Die **Matrix von Casorati** für die Funktionen u_1, \dots, u_l wird definiert durch

$$W(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_l(t) \\ u_1(t+1) & u_2(t+1) & \dots & u_l(t+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t+l-1) & u_2(t+l-1) & \dots & u_l(t+l-1) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante

$$\omega(t) = \det W(t)$$

nennen wir dann die **Casorati-Determinante**.

Die Casorati-Determinante spielt bei der Untersuchung von linearen Gleichungen dieselbe Rolle wie die Wronski-Determinante bei linearen Differentialgleichungen:

Satz 1.3.3:

Seien $u_1(t), \dots, u_l(t)$, $t = a, a + 1, \dots$, Lösungen von Gl.(3).

Dann sind äquivalent:

- Die Menge $\{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ ist linear abhängig für $t = a, a + 1, \dots$,
- $\omega(t) = 0$ für mindestens ein t ,
- $\omega(t) = 0$ für alle t .

Beweis:

a) \Rightarrow c): Nach Definition 1.3.2 existieren Konstanten C_1, \dots, C_l , nicht alle gleich Null,

sodass

$$\begin{aligned} C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + \dots + C_l u_l(t) &= 0, \\ C_1 u_1(t+1) + C_2 u_2(t+1) + \dots + C_l u_l(t+1) &= 0, \\ &\vdots \\ C_1 u_1(t+l-1) + C_2 u_2(t+l-1) + \dots + C_l u_l(t+l-1) &= 0, \end{aligned}$$

für $t = a, a+1, \dots$ gilt. Besitzt nun dieses lineare Gleichungssystem eine nicht-triviale Lösung C_1, \dots, C_l , so gilt $\omega(t) = 0$ für alle t .

b) \Rightarrow c): Wir nehmen nun an, dass $\omega(t_0) = 0$ gilt. Folglich existieren Konstanten C_1, \dots, C_l , nicht alle gleich Null, mit

$$\begin{aligned} C_1 u_1(t_0) + C_2 u_2(t_0) + \dots + C_l u_l(t_0) &= 0, \\ C_1 u_1(t_0+1) + C_2 u_2(t_0+1) + \dots + C_l u_l(t_0+1) &= 0, \\ &\vdots \\ C_1 u_1(t_0+l-1) + C_2 u_2(t_0+l-1) + \dots + C_l u_l(t_0+l-1) &= 0. \end{aligned}$$

Setze

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + \dots + C_l u_l(t).$$

Nach Satz 1.3.2 a) ist $u(t)$ dann eine Lösung von Gl.(3), mit

$$u(t_0) = u(t_0+1) = u(t_0+2) = \dots = u(t_0+l-1) = 0.$$

Aus Satz 1.3.1 erhalten wir sofort, dass $u(t) = 0$ für $t = a, a+1, \dots$, also **c)** gilt. Insgesamt folgt dann auch, dass die Menge $\{u_1(t), \dots, u_l(t)\}$ linear abhängig ist, also **c) \Rightarrow a)**. □

Eine weitere schöne Eigenschaft der Lösungsmenge von Gl.(3) liefert der nächste Satz:

Satz 1.3.4:

Seien $u_1(t), \dots, u_l(t)$ linear unabhängige Lösungen von Gl.(3). Dann läßt sich jede weitere Lösung $u(t)$ von Gl.(3) in der Form

$$u(t) = C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + \dots + C_l u_l(t),$$

mit gewissen Konstanten C_1, C_2, \dots, C_l , darstellen.

Beweis:

Nach Voraussetzung gilt $\omega(t) \neq 0$ für $t = a, a+1, \dots$. Damit besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\left(\sum_{i=1}^l C_i u_i(a+j-1) = u(a+j-1) \right)_{1 \leq j \leq l},$$

genau eine Lösung C_1, \dots, C_l . Mit Satz 1.3.1 folgt die Behauptung.

□

Wir werden jetzt eine Lösung von Gl.(2) bestimmen. Dabei ist der Ansatz über die Methode der **Variation der Veränderlichen** eine Lösung von Gl.(2) zu finden, naheliegend:

Satz 1.3.5:

Seien $u_1(t), \dots, u_l(t)$ linear unabhängige Lösungen von Gl.(3) und $a_1(t), \dots, a_l(t)$ Lösungen der Matrix-Gleichung

$$W(t+1) \begin{pmatrix} \Delta a_1(t) \\ \vdots \\ \Delta a_l(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{r(t)}{p_l(t)} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$y(t) = a_1(t)u_1(t) + \dots + a_l(t)u_l(t) \quad (4)$$

eine Lösung von Gl.(2).

Beweis:

Sei $1 \leq m \leq l-1$. Wir betrachten nun Gl.(4) an den Punkten $t+1, t+2, \dots, t+l-1$:

$$\begin{aligned} y(t+m) &= a_1(t+m)u_1(t+m) + \dots + a_l(t+m)u_l(t+m) \\ &= \sum_{i=1}^l (\Delta(a_i(t+m-1))u_i(t+m) + a_i(t+m-1)u_i(t+m)) \\ &= \sum_{i=1}^l (\Delta(a_i(t+m-2))u_i(t+m) + a_i(t+m-2)u_i(t+m)) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=1}^l a_i(t)u_i(t+m). \end{aligned}$$

Völlig analog erhalten wir

$$\begin{aligned} y(t+l) &= \sum_{i=1}^l (\Delta(a_i(t))u_i(t+l) + a_i(t)u_i(t+l)) \\ &= \frac{r(t)}{p_l(t)} + \sum_{i=1}^l a_i(t)u_i(t+l). \end{aligned}$$

Nun substituieren wir für $0 \leq m \leq l$ den Ausdruck $y(t+m)$ in Gl.(2), sortieren nach den Termen $a_1(t), \dots, a_l(t)$ um, und erhalten

$$\begin{aligned} p_l(t)y(t+l) + \dots + p_0(t)y(t) &= p_l(t) \left(\frac{r(t)}{p_l(t)} + \sum_{i=1}^l a_i(t)u_i(t+l) \right) + \\ &\quad + \dots + p_0(t) \left(\sum_{i=1}^l a_i(t)u_i(t) \right) \\ &= r(t) + a_1(t)[p_l(t)u_1(t+l) + \dots + p_0(t)u_1(t)] + \\ &\quad + a_2(t)[p_l(t)u_1(t+l) + \dots + p_0(t)u_2(t)] + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_l(t)[p_l(t)u_l(t+l) + \dots + p_0(t)u_l(t)]. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung jeder Ausdruck in eckigen Klammern Gl.(3) genügt, folgt die Behauptung. □

1.4 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Wir wenden uns nun dem speziellen Problem zu, die linear unabhängigen Lösungen von Gl.(3) unter der Bedingung, dass alle Koeffizientenfunktionen $p_0(t), \dots, p_l(t)$ konstant sind, also $p_i(t) = p_i$ für $i = 0, \dots, l$, zu finden. Desweiteren gelte $p_0, p_l \neq 0$, dann können wir beide Seiten von Gl.(3) durch p_l teilen und erhalten

$$y(t+l) + \tilde{p}_{l-1}y(t+l-1) + \dots + \tilde{p}_0y(t) = 0 \quad (5)$$

mit $\tilde{p}_i = \frac{p_i}{p_l}$. Nun führen wir einige - im Folgenden wichtige - Begriffe ein:

Definition 1.4.1:

a) Das **charakteristische Polynom** P der Gl.(5) wird definiert durch

$$P(\varphi) = \varphi^l + \tilde{p}_{l-1}\varphi^{l-1} + \dots + \tilde{p}_0. \quad (6)$$

b) Die Gleichung $\varphi^l + \tilde{p}_{l-1}\varphi^{l-1} + \dots + \tilde{p}_0 = 0$ heißt **charakteristische Gleichung** der Gl.(5).

c) Die Nullstellen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ der charakteristischen Gleichung nennen wir die **charakteristischen Wurzeln**.

Das charakteristische Polynom besitzt dann nach dem Fundamentalsatz der Algebra die eindeutige Darstellung

$$P(z) = \prod_{i=1}^k (z - \varphi_i)^{\sigma_i}, \quad (7)$$

wobei σ_i für $1 \leq i \leq k$ die Vielfachheit der charakteristischen Wurzel φ_i angibt und $\sum_{i=1}^k \sigma_i = l$ gilt. Zusätzlich übernehmen wir noch einen Begriff aus [4]:

Definition 1.4.2:

Die charakteristischen Wurzeln von Gl.(5) seien dem Betrage nach geordnet:

$$|\varphi_1| \geq |\varphi_2| \geq \dots \geq |\varphi_k|.$$

Dann nennen wir diejenigen r Wurzeln

$$|\varphi_1| = \dots = |\varphi_r| > |\varphi_{r+1}| \geq |\varphi_{r+2}| \geq \dots \geq |\varphi_k|,$$

vom größten Betrage die **dominanten Wurzeln**.

Mit Hilfe des Shift-Operators E läßt sich Gl.(5) folgendermaßen schreiben:

$$(E^l + \tilde{p}_{l-1}E^{l-1} + \dots + \tilde{p}_0)u(t) = 0. \quad (8)$$

Unter Berücksichtigung des Fundamentalsatzes der Algebra erhalten wir für Gl.(8) dann

$$(E - \varphi_1)^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot (E - \varphi_k)^{\sigma_k} u(t) = 0,$$

wobei $\sigma_1 + \dots + \sigma_k = l$ gilt. Wegen $\tilde{p}_0 \neq 0$ sind dabei alle charakteristischen Wurzeln von Null verschieden. Wir müssen nun zuerst die Gleichung

$$(E - \varphi_1)^{\sigma_1} u(t) = 0 \quad (9)$$

lösen. Offensichtlich ist dann jede Lösung von Gl.(9) auch eine Lösung von Gl.(8). Für $\sigma_1 = 1$ vereinfacht sich Gl.(9) zu $u(t+1) = \varphi_1 u(t)$, welche dann die Lösung $u(t) = \varphi_1^t$ besitzt. Sei nun $\sigma_1 > 1$. Wir substituieren in Gl.(8)

$$u(t) = \varphi_1^t v(t)$$

und berechnen mit Hilfe von Gl.(1) und Lemma 1.2.1:

$$\begin{aligned} (E - \varphi_1)^{\sigma_1} \varphi_1^t v(t) &= \sum_{i=0}^{\sigma_1} \binom{\sigma_1}{i} (-\varphi_1)^{\sigma_1-i} E^i \varphi_1^t v(t) \\ &= \sum_{i=0}^{\sigma_1} \binom{\sigma_1}{i} (-\varphi_1)^{\sigma_1-i} \varphi_1^t E^i v(t) \\ &= (\varphi_1)^{\sigma_1+t} \sum_{i=0}^{\sigma_1} \binom{\sigma_1}{i} (-1)^{\sigma_1-i} E^i v(t) \\ &= (\varphi_1)^{\sigma_1+t} (E - 1)^{\sigma_1} v(t) \\ &= (\varphi_1)^{\sigma_1+t} \Delta^{\sigma_1} v(t) \\ &= 0, \end{aligned}$$

für $v(t) = 1, t, t^2, \dots, t^{\sigma_1-1}$. Folglich besitzt Gl.(9) insgesamt σ_1 Lösungen $\varphi_1^t, t\varphi_1^t, \dots, t^{\sigma_1-1}\varphi_1^t$. Dabei sehen wir leicht, dass diese Lösungen linear unabhängig sind:

Angenommen die Funktionen $\varphi_1^t, \dots, t^{\sigma_1-1}\varphi_1^t$ sind linear abhängig, dann existieren Konstanten C_1, \dots, C_{σ_1} , nicht alle gleich Null, mit

$$\begin{aligned}\tilde{p}(t) &:= \sum_{i=1}^{\sigma_1} C_i t^{\sigma_1-i} \varphi_1^t \\ &= \varphi_1^t \sum_{i=1}^{\sigma_1} C_i t^{\sigma_1-i} \\ &= 0\end{aligned}$$

für alle t . Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt $C_1 = C_2 = \dots$

$\dots = C_{\sigma_1} = 0$. Wenden wir nun obige Vorgehensweise auf jeden der Faktoren

$$(E - \varphi_i)^{\sigma_i}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

an, erhalten wir insgesamt l Lösungen $\varphi_1^t, \dots, t^{\sigma_1-1}\varphi_1^t, \varphi_2^t, \dots, t^{\sigma_2-1}\varphi_2^t, \varphi_k^t, \dots, t^{\sigma_k-1}\varphi_k^t$.

Sind alle Wurzeln von Gl.(5) einfach, also $\sigma_i = 1$ für $1 \leq i \leq k$, so können wir aus den Anfangsbedingungen schnell die allgemeine Lösung bestimmen. Besitzt dagegen Gl.(5) aber nur $k < l$ paarweise verschiedene Wurzeln φ_i mit zugehörigen Vielfachheiten $1 \leq \sigma_i \leq l$, so benötigen wir weitere $l - k$ linear unabhängige Lösungen um die allgemeine Lösung zu bestimmen. Der folgende Abschnitt behandelt einen Hauptsatz, den wir [15] entnehmen und welcher uns nun ein Verfahren zur Konstruktion der $l - k$ linear unabhängigen Lösungen von Gl.(5) aus den bekannten k -Lösungen von Gl.(5) liefert:

1.5 Der Hauptsatz für lineare Rekursionen mit konstanten Koeffizienten

Hauptsatz 1.5.1:

Das charakteristische Polynom der Gl.(5) und die zugehörigen charakteristischen Wurzeln φ_i mit Vielfachheiten $\sigma_i, (1 \leq i \leq k)$ seien wie in Definition 1.4.1. Dann gilt:

i) Für $1 \leq i \leq k$ existieren eindeutig bestimmte Polynome $g_i(n)$, $\text{Grad}(g_i) \leq \sigma_i - 1$, sodass

$$y(n) = \sum_{i=1}^k g_i(n) \varphi_i^n. \quad (10)$$

ii) Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ paarweise verschiedene Zahlen in \mathbb{C} und $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ positive ganze Zahlen mit $\sum_{i=1}^k \sigma_i = l$. Die Zahlen $\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{l-1}$ seien durch Gl.(6) und Gl.(7) definiert. Außerdem seien für $1 \leq i \leq k$ Polynome g_i mit $\text{Grad}(g_i) \leq \sigma_i$ gewählt. Dann erfüllt die durch

$$y(n) = \sum_{i=1}^k g_i(n) \varphi_i^n$$

definierte Funktion Gl.(5).

Beweis:

Bemerkung:

Bedauerlicherweise besitzt der Verfasser dieser Arbeit keinen Zugang zu einem allgemeinen Beweis dieses Hauptsatzes. Wir wollen aber zumindest einen Beweis für den Fall, dass die charakteristischen Wurzeln φ_i alle vom Betrag her paarweise verschieden sind, angeben.

i) Wir wissen bereits, dass die Funktionen $\varphi_1^t, \dots, t^{\sigma_1-1}\varphi_1^t, \varphi_2^t, \dots, t^{\sigma_2-1}\varphi_2^t, \varphi_k^t, \dots, t^{\sigma_k-1}\varphi_k^t$ Lösungen von Gl.(5) sind. Angenommen diese Lösungen sind linear unabhängig, dann garantiert uns Satz 1.3.4, dass sich jede weitere Lösung von Gl.(5) als Linearkombination dieser Funktionen darstellen lässt. Damit folgt dann schon ii). Außerdem können wir die Konstanten dieser Linearkombination aus gegebenen l Anfangsbedingungen eindeutig bestimmen und Satz 1.3.1 liefert uns die Eindeutigkeit dieser Linearkombination als Lösung von Gl.(5). Wir müssen also lediglich die lineare Unabhängigkeit der Lösungen

$$\varphi_1^t, \dots, t^{\sigma_1-1}\varphi_1^t, \varphi_2^t, \dots, t^{\sigma_2-1}\varphi_2^t, \varphi_k^t, \dots, t^{\sigma_k-1}\varphi_k^t$$

von Gl.(5) überprüfen. Angenommen die Funktionen sind linear abhängig, dann existieren für $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \sigma_i$, Konstanten C_{ij} , nicht alle gleich Null, mit

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{\sigma_i} C_{ij} t^{\sigma_i-j} \varphi_i^t = 0. \quad (11)$$

Zunächst bestimmen wir

$$|\varphi_{i_1}| = \max_{1 \leq i \leq k} |\varphi_i|.$$

Nach Voraussetzung können wir beide Seiten von Gl.(11) durch $\varphi_{i_1}^t$ teilen und erhalten:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^k \sum_{j=1}^{\sigma_i} C_{ij} t^{\sigma_i-j} \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{i_1}} \right)^t + \sum_{j=1}^{\sigma_{i_1}} C_{i_1 j} t^{\sigma_{i_1}-j} = 0. \quad (12)$$

Für $t \rightarrow +\infty$ verschwindet die Doppelsumme auf der linken Seite von Gl.(12). Damit muss aber

$$\sum_{j=1}^{\sigma_{i_1}} C_{i_1 j} t^{\sigma_{i_1}-j} = 0$$

für alle t gelten, was $C_{i_11} = C_{i_12} = \dots = C_{i_1\sigma_{i_1}} = 0$ impliziert. Damit reduziert sich Gl.(11) zu

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^k \sum_{j=1}^{\sigma_i} C_{ij} t^{\sigma_i-j} \varphi_i^t = 0.$$

Wir bestimmen nun

$$|\varphi_{i_2}| = \max_{1 \leq i \leq k, i \neq i_1} |\varphi_i|$$

und verfahren analog. Insgesamt erhalten wir so nach k Schritten $C_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \sigma_i$, also die lineare Unabhängigkeit der Funktionen $\varphi_1^t, \dots, t^{\sigma_1-1} \varphi_1^t, \varphi_2^t, \dots, t^{\sigma_2-1} \varphi_2^t, \varphi_k^t, \dots, t^{\sigma_k-1} \varphi_k^t$.

□

Korollar 1.5.1:

Das charakteristische Polynom der Gl.(5) und die zugehörigen charakteristischen Wurzeln φ_i mit Vielfachheiten $\sigma_i = 1$, ($1 \leq i \leq l$) seien wie in Definition 1.4.1. Dann gilt:

i) Für $1 \leq i \leq l$ existieren eindeutig bestimmte Konstanten α_i , sodass

$$y(n) = \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi_i^n. \quad (13)$$

ii) Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ paarweise verschiedene Zahlen in \mathbb{C} . Die Zahlen $\tilde{p}_0, \dots, \tilde{p}_{l-1}$ seien durch Gl.(6) und Gl.(7) definiert. Außerdem seien für $1 \leq i \leq l$ Konstanten α_i gewählt. Dann erfüllt die durch

$$y(n) = \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi_i^n$$

definierte Funktion Gl.(5).

□

2 Grundlagen der allgemeinen Theorie von Dirichlet-Reihen

Für dieses Kapitel wurde [7] Kapitel I und Kapitel II 3-11 als Quelle benutzt.

2.1 Vorbemerkung

Der Gegenstand unseres Interesses in diesem Kapitel sind Reihen der Gestalt

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad (14)$$

wobei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller und monoton wachsender Zahlen ist, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

und $s = \sigma + it$ eine komplexe Variable mit Realteil σ und Imaginärteil t bezeichnet. Desweiteren sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge beliebiger komplexer oder reeller Zahlen. Reihen der Gestalt (14) nennen wir Dirichlet-Reihen der **Gattung** (λ_n) . Falls $\lambda_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ist $f(s)$ eine Potenzreihe in e^{-s} und falls $\lambda_n = \log(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennen wir

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

eine **gewöhnliche** Dirichlet-Reihe.

Für das Folgende ist es nun hilfreich gleich ein paar Notationen festzuhalten:

Im Folgenden bezeichne $[x]$ (**Gauß-Klammer**) die größte ganze Zahl $\leq x$. Desweiteren verstehen wir unter $\sum_{\alpha}^{\beta} f(n)$ die Summe aller Werte $f(n)$ mit $\alpha \leq n \leq \beta$, also $[\alpha] \leq n \leq [\beta]$ oder $[\alpha] < n \leq [\beta]$ je nachdem ob $\alpha \in \mathbb{Z}$ oder nicht. Außerdem setzen wir $A(x) := \sum_1^x a_n$ und $A(x, y) := \sum_x^y a_n$, sowie $\tilde{\Delta} a_n := a_n - a_{n+1}$.

Mit

$$\sigma_0 := \inf\{\sigma \in \mathbb{R}; \exists t \in \mathbb{R} : |f(s)| < \infty\}$$

kennzeichnen wir die **Konvergenzabszisse** von f und verstehen unter der Geraden $\sigma = \sigma_0$ die zugehörige **Konvergenzlinie**.

Unter

$$W(s_0, \alpha) := \left\{ s_0 + r e^{i\varphi}; 0 \leq r, 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, |\varphi| < \alpha \right\},$$

verstehen wir eine Ebene im Punkt s_0 mit Öffnungswinkel α , die wir als **Winkel-Ebene** bezeichnen. Außerdem folgen wir Landau im Gebrauch der Symbole **o** und **O**:

Sei Φ eine positive Funktion einer Variablen. Dann schreiben wir $f = o(\Phi)$ falls der Ausdruck $\frac{f}{\Phi}$ gegen Null strebt und $f = O(\Phi)$ falls $\frac{|f|}{\Phi}$ beschränkt ist.

2.2 Die elementare Theorie der Konvergenz von Dirichlet-Reihen

Viele der nun folgenden Resultate bauen auf folgenden Lemmata auf:

Lemma 2.2.1:(Abels partielle Summation)

Es gilt folgende Identität:

$$\sum_x^y a_n f(n) = \sum_x^{y-1} A(x, n) \tilde{\Delta} f(n) + A(x, y) f(\lfloor y \rfloor). \quad (15)$$

Beweis:

Mit Hilfe obiger Notationen können wir für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben:

$$\begin{aligned} f(n) &= \tilde{\Delta} f(n) + f(n+1), \\ a_n &= A(x, n) - A(x, n-1). \end{aligned}$$

Damit können wir folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} \sum_x^y a_n f(n) &= \sum_x^y (A(x, n) - A(x, n-1)) (\tilde{\Delta} f(n) + f(n+1)) \\ &= \sum_x^y A(x, n) \tilde{\Delta} f(n) + \sum_x^y A(x, n) f(n+1) - \left(\sum_x^y A(x, n-1) (\tilde{\Delta} f(n) + f(n+1)) \right) \\ &= \sum_x^y A(x, n) \tilde{\Delta} f(n) + \sum_x^y A(x, n) f(n+1) - \sum_x^y A(x, n-1) f(n) \\ &= \sum_x^{y-1} A(x, n) \tilde{\Delta} f(n) + A(x, y) (\tilde{\Delta} f(\lfloor y \rfloor) + f(\lfloor y \rfloor + 1)) + \sum_x^{y-1} A(x, n) f(n+1) - \\ &\quad - \sum_x^y A(x, n-1) f(n) \\ &= \sum_x^{y-1} A(x, n) \tilde{\Delta} f(n) + A(x, y) f(\lfloor y \rfloor) + \sum_{x+1}^y A(x, n-1) f(n) - \sum_x^y A(x, n-1) f(n) \\ &= \sum_x^{y-1} A(x, n) \tilde{\Delta} f(n) + A(x, y) f(\lfloor y \rfloor) + \sum_{x+1}^{x+1} A(x, n-1) f(n). \end{aligned}$$

Da die letzte Summe sich nur über diejenigen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq n-1$ erstreckt, verschwindet sie identisch. Damit folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.2.2:

Sei $\sigma \neq 0$, dann gilt:

$$\left| \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n s} \right| \leq \frac{|s|}{\sigma} \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n \sigma}. \quad (16)$$

Beweis:

Wir schätzen einfach nach oben ab:

$$\left| \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n s} \right| = \left| e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right| = \left| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} s e^{-us} du \right| \leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-u\sigma} du = \frac{|s|}{\sigma} \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n \sigma}.$$

□

Wir werden nun die beiden wichtigsten Sätze aus der elementaren Theorie der Konvergenz von Dirichlet-Reihen beweisen:

Satz 2.2.1:

Konvergiert die Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ in $s_1 = \sigma_1 + it_1$, dann konvergiert sie auch in jedem $s \in \mathbb{C}$ dessen Realteil größer als σ_1 ist.

Die Aussage dieses Satzes ist in dem folgenden, allgemeineren und weniger elementaren Satz enthalten:

Satz 2.2.2:

Falls die Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ in $s = s_0$ konvergiert, so konvergiert sie in jeder Winkel-Ebene $W(s_0, \alpha)$ gleichmäßig und ist als Grenzwert einer Folge holomorpher Funktionen selbst holomorph.

Beweis:

O.B.d.A. sei $s_0 = 0$. Andernfalls betrachte $\tilde{f}(\tilde{s}) := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n n^{-\tilde{s}}$, mit $\tilde{a}_n := a_n n^{-s_0}$ und $\tilde{s} := s - s_0$. Mit Gl.(15) folgt

$$\sum_{n=m}^k a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=m}^{k-1} A(m, n) \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n s} + A(m, k) e^{-\lambda_k s}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben, dann kann man ein $m_0 \in \mathbb{N}$ wählen mit $\lambda_n > 0$ und $|A(m, n)| \leq \epsilon \cos \alpha$ für $m_0 \leq m \leq n$. Setze nun $\varphi = \arg(s)$, dann gilt für α mit $\cos \alpha \leq \cos \varphi = \frac{\sigma}{|s|}$ wegen Gl.(16):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=m}^k a_n e^{-\lambda_n s} \right| &\leq \sum_{n=m}^{k-1} \left| A(m, n) \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n s} \right| + |A(m, k) e^{-\lambda_k s}| \\ &\leq \sum_{n=m}^{k-1} \epsilon \cos \alpha \left| \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n s} \right| + \epsilon \cos \alpha e^{-\lambda_k \sigma} \\ &\stackrel{(\text{Gl.16})}{\leq} \epsilon \left(\sum_{n=m}^{k-1} \tilde{\Delta} e^{-\lambda_n \sigma} + e^{-\lambda_k \sigma} \right) \\ &= \epsilon e^{-\lambda_m \sigma} < \epsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz der Dirichlet-Reihe f gezeigt. Mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (s. Anhang) erhalten wir als leichte Folgerung, dass f in der Winkel-Ebene $W(s_0, \alpha)$ holomorph ist.

□

Korollar 2.2.1:

Falls die Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ in $s = s_0$ konvergiert, so gilt $f(s) \rightarrow f(s_0)$ für $s \rightarrow s_0$ entlang jedes ganz innerhalb $W(s_0, \alpha)$ gelegenen Weges zwischen s und s_0 .

□

Nun können wir die Konvergenz einer Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ folgendermaßen unterscheiden:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \infty, \text{ falls } f \text{ in keinem Punkt konvergiert,} \\ \sigma_0 &= -\infty, \text{ falls } f \text{ ganz,} \\ \sigma_0 &\in \mathbb{R}, \text{ sonst.}\end{aligned}$$

Im Falle $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert f in der Halbebene $\mathbb{H}_{\sigma_0} := \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$ kompakt. Letzteres folgt sofort aus der Tatsache das jedes Kompaktum $\mathfrak{K} \subset \mathbb{H}_{\sigma_0}$ auch in einer Winkel-Ebene $W(s_0, \alpha)$ enthalten ist und Satz 2.2.2. Damit wissen wir, dass Dirichlet-Reihen in Halbebenen konvergieren. Zusammenfassend erhalten wir:

Satz 2.2.3:

Eine Dirichlet-Reihe $f(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, $s \in \mathbb{C}$ konvergiert entweder für jedes s , für keines oder nur für manche. Im letzten Fall existiert eine reelle Zahl σ_0 , für die f für $\sigma > \sigma_0$ konvergiert und für $\sigma < \sigma_0$ divergent oder oszillierend divergent ist.

Die Frage nach der Konvergenz auf der Konvergenzabszisse σ_0 bleibt offen.

Beispiel 2.2.1:

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^{-s}$ mit $|a| < 1$, konvergiert in ganz \mathbb{C} .
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^{-s}$ mit $|a| > 1$, konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$.
- Die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ besitzt die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = 1$ und ist in jeder kompakten Teilmenge \mathfrak{K} der Konvergenzlinie $\sigma = 1$, wobei gilt $\mathfrak{K} \cap \mathbb{R} = \emptyset$, beschränkt.
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-s}}{(\log n)^2}$ besitzt ebenfalls die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = 1$, konvergiert aber in jedem Punkt der zugehörigen Konvergenzlinie.

Nach einem Satz von Weierstraß (s. Anhang) darf eine Reihe holomorpher Funktionen in einem Gebiet mit kompakter Konvergenz gliedweise differenziert werden. Die so entstehende Reihe ist dann ebenfalls kompakt konvergent und stellt die Ableitung der Grenzfunktion dar. Für $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ folgt:

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\log(n))^k n^{-s}, \quad k \in \mathbb{N}, \sigma > \sigma_0.$$

Desweiteren stellt sich nun die Frage nach der Eindeutigkeit einer Dirichlet-Reihe innerhalb ihrer Konvergenzebene:

Satz 2.2.4:

Die Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ sei konvergent in $s = 0$. Falls f in $W(0, \alpha)$ unendlich viele Nullstellen besitzt, gilt $a_n = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

Gemäß des Identitätsprinzips für holomorphe Funktionen (s. Anhang) können sich die Nullstellen von f in keiner Umgebung eines endlichen Punktes von $W(0, \alpha)$ häufen. Damit können wir abzählbar unendlich viele Punkte $s_n := \sigma_n + it_n$, wobei $\sigma_{n+1} > \sigma_n$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \infty$$

mit $f(s_n) = 0$ finden. Nun ist aber ebenfalls die Reihe

$$g(s) = e^{\lambda_1 s} f(s) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_1)s}$$

in $s = 0$ konvergent mit $g(s_n) = 0$ und konvergiert nach Satz 2.2.2 in ganz $W(0, \alpha)$ gleichmäßig. Daher gilt $g(s) \rightarrow a_1$ für $s \rightarrow \infty$ entlang eines beliebigen Weges in $W(0, \alpha)$ gemäß Korollar 2.2.1. Dieser Weg läßt sich aber so wählen, dass auf ihm unendlich viele der Nullstellen s_n liegen. Ist nun $a_1 \neq 0$, so könnten auf dem Weg aber nur endlich viele Nullstellen liegen. Ein Widerspruch. Wenden wir diese Argumentation sukzessive auf jedes a_n an, so erhalten wir $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

□

2.3 Die Bestimmung der Konvergenzabszisse

In dem vorhergehenden Unterabschnitt haben wir stillschweigend die Kenntnis der Konvergenzabszisse σ_0 von f vorausgesetzt. In diesem Abschnitt wollen wir diesen Mißstand nun beheben und eine explizite Formel für die Konvergenzabszisse angeben:

Satz 2.3.1:

Falls die Konvergenzabszisse der Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ positiv ist, erhalten wir ihren Wert aus der Formel

$$\sigma_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A(n)|}{\lambda_n}. \quad (17)$$

Beweis:

Sei

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A(n)|}{\lambda_n},$$

dann müssen wir zeigen, dass $\sigma_0 = \gamma$ gilt.

i) Sei $\delta > 0$ beliebig. Wir zeigen zuerst, dass die Dirichlet-Reihe f in $s = \gamma + \delta$ konvergiert. Dazu wählen wir ein ϵ mit $0 < \epsilon < \delta$ beliebig. Aus Gl.(17) folgt, dass für hinreichend großes n gilt:

$$\log |A(n)| < (\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_n \Leftrightarrow |A(n)| < e^{(\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_n}.$$

Mit Gl.(15) folgt:

$$\sum_1^n a_\nu e^{-\lambda_\nu s} = \sum_1^{n-1} A(\nu) \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu s} + A(n) e^{-\lambda_n s}.$$

Da der letzte Term mit wachsendem n gegen Null strebt, hängt die Konvergenz von f in s nur von der Konvergenz des Ausdrucks

$$\sum_1^{n-1} A(\nu) \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu s}$$

ab. Mit Gl.(16) folgt:

$$\left| \sum_1^{n-1} A(\nu) \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu s} \right| \leq \sum_1^{n-1} |A(\nu)| \left| \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu s} \right| \leq \sum_1^{n-1} e^{(\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_\nu} \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu(\gamma + \delta)}.$$

Da $\gamma + \delta - \epsilon > 0$, folgt weiter:

$$\begin{aligned} e^{(\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_\nu} \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu(\gamma + \delta)} &= e^{(\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_\nu} (e^{-\lambda_\nu(\gamma + \delta)} - e^{-\lambda_{\nu+1}(\gamma + \delta)}) \\ &= -(\gamma + \delta) e^{(\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_\nu} \int_{\lambda_{\nu+1}}^{\lambda_\nu} e^{-x(\gamma + \delta)} dx \\ &= (\gamma + \delta) \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{(\gamma + \delta - \epsilon)\lambda_\nu} e^{-x(\gamma + \delta)} dx \\ &\leq (\gamma + \delta) \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{(\gamma + \delta - \epsilon)x} e^{-x(\gamma + \delta)} dx \\ &= (\gamma + \delta) \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-\epsilon x} dx. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \left| \sum_1^{n-1} A(\nu) \tilde{\Delta} e^{-\lambda_\nu s} \right| &\leq (\gamma + \delta) \sum_1^{n-1} \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-\epsilon x} dx \\ &= \frac{\gamma + \delta}{\epsilon} (e^{-\epsilon \lambda_1} - e^{-\epsilon \lambda_n}). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist aber offensichtlich konvergent. Damit folgt $\sigma_0 \leq \gamma$.

ii) Nach Voraussetzung ist die Dirichlet-Reihe f für $s > \sigma_0 > 0$ konvergent, sei also $s > 0$. Wir setzen jetzt $a_\nu e^{-\lambda_\nu s} =: b_\nu$ und verwenden Gl.(15) mit $B(\nu) := \sum_1^\nu b_n$:

$$A(n) = \sum_1^n b_\nu e^{\lambda_\nu s} = \sum_1^{n-1} B(\nu) \tilde{\Delta} e^{\lambda_\nu s} + B(n) e^{\lambda_n s}.$$

Hier können wir ein $K > 0$ wählen, mit $|A(n)| < e^{K + \lambda_n s}$. Sei nun δ eine beliebige positive Zahl, dann erhalten wir für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$:

$$\log |A(n)| < \lambda_n s + K < (s + \delta) \lambda_n.$$

Also folgt:

$$s + \delta > \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |A(n)|}{\lambda_n}.$$

Da $\delta > 0$ beliebig, erhalten wir $s \geq \gamma$.

□

2.4 Absolute Konvergenz einer Dirichlet-Reihe

In diesem Unterabschnitt wollen wir die bisherigen Ergebnisse auf die Reihe

$$\tilde{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n s}, \quad (18)$$

übertragen und folgern zunächst den

Satz 2.4.1:

Es existiere eine Zahl $\bar{\sigma}$, sodass die durch Gl.(18) definierte Dirichlet-Reihe $\tilde{f}(s)$ für $\sigma > \bar{\sigma}$ absolut konvergiert und für $\sigma < \bar{\sigma}$ nicht absolut konvergiert. Diese Zahl, sofern positiv, erhalten wir aus der Formel

$$\bar{\sigma} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \bar{A}(n)}{\lambda_n}$$

mit $\bar{A}(n) = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$.

Dabei ist auch der Fall (wie ebenfalls bei σ_0) $\bar{\sigma} = +\infty$ zugelassen. Insgesamt folgt also, dass eine Dirichlet-Reihe auch eine Abszisse, Linie und Halbebene der absoluten Konvergenz besitzt. Es sollte hier noch kurz erwähnt werden, dass sich die Existenz einer Halbebene der absoluten Konvergenz viel elementarer beweisen lässt als Satz 2.2.2, denn offensichtlich folgt die Aussage von Satz 2.4.1 schon aus der Ungleichung

$$|e^{-\lambda_n s}| \leq |e^{-\lambda_n s_1}|, \text{ für } \sigma \geq \sigma_1,$$

und hängt nicht von Lemma 2.2.1 ab.

Im Allgemeinen stimmen σ_0 und $\bar{\sigma}$ nicht überein und wir erhalten einen Streifen zwischen den Linien der Konvergenz und der absoluten Konvergenz, in welchem die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

bedingt konvergiert. Dieser Streifen kann verschwinden (falls $\sigma_0 = \bar{\sigma}$), sich über die gesamte komplexe Ebene \mathbb{C} erstrecken (falls $\sigma_0 = -\infty, \bar{\sigma} = \infty$) oder eine Halbebene darstellen (falls $\sigma_0 = -\infty, -\infty < \bar{\sigma} < \infty$ oder $-\infty < \sigma_0 < \infty, \bar{\sigma} < \infty$). Auf jeden Fall ist die Breite dieses Streifens stets Gegenstand einer Grenzwertbildung.

Satz 2.4.2:

Es gilt

$$\bar{\sigma} - \sigma_0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\lambda_n}.$$

Beweis:

Sei $\delta > 0$ beliebig. Wir können ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart wählen, dass $|A(n)| < e^{(\sigma_0 + \delta)\lambda_n}$ für alle $n \geq n_0$. Wir wählen nun ein $\tilde{n}_0 \geq n_0$, sodass auch $e^{\delta\lambda_n} > 2$ für $n \geq \tilde{n}_0$ gilt. Dann folgt aber

$$|a_{n+1}| = |A(n+1) - A(n)| < 2e^{(\sigma_0 + \delta)\lambda_{n+1}} < e^{(\sigma_0 + 2\delta)\lambda_{n+1}},$$

und wir erhalten für $n \geq \tilde{n}_0$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \bar{A}(n) &= \sum_1^n |a_n| = \sum_1^{n_0} |a_n| + \sum_{n_0+1}^n |a_n| \\ &< \bar{A}(n_0) + (n - n_0)e^{(\sigma_0 + 2\delta)\lambda_n} \\ &< \bar{A}(n_0) + ne^{(\sigma_0 + 2\delta)\lambda_n}. \end{aligned}$$

Sei nun $\tilde{n}_1 \geq \tilde{n}_0$ hinreichend groß mit

$$\bar{A}(n_0) + ne^{(\sigma_0 + 2\delta)\lambda_n} < ne^{(\sigma_0 + 3\delta)\lambda_n} \text{ für } n \geq \tilde{n}_1.$$

Da auf beiden Seiten der letzten Ungleichung nur positive Terme stehen, dürfen wir logarithmieren und erhalten so für $n \geq \tilde{n}_1$:

$$\frac{\log \bar{A}(n)}{\lambda_n} < \frac{\log(n)}{\lambda_n} + \sigma_0 + 3\delta,$$

also folgt die Behauptung des Satzes. □

Falls $\log(n) = o(\lambda_n)$, stimmen σ_0 und $\bar{\sigma}$ überein. Speziell in dem Fall $\lambda_n = n$ und unter der Substitution $e^{-s} = x$ wird die Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ zu einer Potenzreihe.

Satz 2.2.1 bzw. 2.2.3 liefert die Existenz eines Konvergenzkreises und Satz 2.3.1 eine schwach veränderte Darstellung von Cauchys Formel für den Konvergenzradius. Ebenso liefern Satz 2.2.2, 2.2.4 und Korollar 2.2.1 bekannte Ergebnisse.

Falls $\log(n) = O(\lambda_n)$, dann gilt $\bar{\sigma} - \sigma_0 \leq 1$. Dies folgt aber auch sofort aus der Konvergenz der Reihe $\sum \frac{1}{n^{1+\sigma_0}}$ für jedes positive σ_0 .

Es ist nicht besonders schwer Beispiele zu finden, die zeigen, dass jede mögliche Anordnung der Linien von Konvergenz und absoluter Konvergenz Satz 2.4.2 nicht widerspricht. Wir begnügen uns mit der Angabe der Dirichlet-Reihe

$$f(s) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-s \log \log(n)},$$

welche in ganz \mathbb{C} bedingt, aber nirgendwo absolut konvergiert.

2.5 Vergleich der Konvergenz von Dirichlet- und Potenzreihe

Wir werden nun kurz unsere Aufmerksamkeit den wesentlichen Unterschieden zwischen der Theorie der Dirichlet-Reihen und der einfacheren Theorie der Potenzreihen widmen. Dabei gibt es zwei große Unterschiede:

i) Der erste Unterschied zeigt sich durch Satz 2.4.2:
Falls die Dirichlet-Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

absolut konvergiert, müssen die Abszisse der Konvergenz σ_0 und die Abszisse $\bar{\sigma}$ der absoluten Konvergenz nicht übereinstimmen. Dagegen stimmen bei einer Potenzreihe aber stets der Konvergenzradius R und der Radius \bar{R} der absoluten Konvergenz überein, wie aus der Formel

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

von Cauchy-Hadamard folgt.

ii) Der zweite große Unterschied zwischen Dirichlet-Reihen und Potenzreihen liegt darin, dass sich der Konvergenzradius einer Potenzreihe auch durch das Verhalten der analytischen Funktion der Reihe bestimmen lässt. Der Konvergenzradius kann nämlich als Abstand des Entwicklungspunktes zum nächstgelegenen Punkt, in den die Potenzreihe nicht mehr fortsetzbar ist, festgelegt werden. Dies trifft nicht auf Dirichlet-Reihen zu. Beispielsweise besitzt die von Navas in [11] diskutierte Fibonacci Zeta-Funktion

$$\zeta_{\{F\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-s},$$

bei der die Folge $\{F\} = (F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Fibonacci-Zahlen durchläuft, die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = 0$ und die analytische Fortsetzung¹

$$\zeta_{\{F\}}(s) = 5^{\frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi^{s+2k} + (-1)^k}, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

welche in ganz \mathbb{C} - ausgenommen der Polstellen von $\zeta_{\{F\}}$, welche bei $s = -2k + \frac{\pi i(2n+k)}{\log \varphi}$ für $k \geq 0$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und bei $s = -2k$ für gerades $k \geq 0$ liegen - normal konvergiert.

Zum Abschluss betrachten wir noch einen wichtigen Spezialfall, bei dem die Konvergenzlinie immer mindestens eine Singularität enthält:

Satz 2.5.1:(Landau)

Die Dirichlet-Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ besitze die Konvergenzabszisse $\sigma_0 \in \mathbb{R}$. Außerdem seien alle Koeffizienten a_n, λ_n reell und nicht-negativ. Dann ist f nicht in den Punkt $s = \sigma_0$ holomorph fortsetzbar.

Beweis:

O.B.d.A sei $\sigma_0 = 0$. Angenommen f ist in den Punkt $s = 0$ fortsetzbar, dann ist f in der Halbebene \mathbb{H}_0 - erweitert um einen Kreis vom Radius $\delta > 0$ um den Ursprung - holomorph. Insbesondere besitzt die Taylorentwicklung von f um $s = 1$ einen Konvergenzradius > 1 . Wir betrachten nun die Taylor-Entwicklung von f um $s = 1$:

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(1)}{\nu!} (s-1)^{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(s-1)^{\nu}}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{\nu} \lambda_n^{\nu} e^{-\lambda_n} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-s)^{\nu}}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{\nu} e^{-\lambda_n}. \end{aligned}$$

¹S.Kapitel 4 für Herleitung und Diskussion.

Nun betrachten wir den Punkt $\tilde{s} = -\frac{\delta}{2}$ welcher im Holomorphiebereich von f liegt. Offensichtlich sind alle Koeffizienten der Taylorentwicklung positiv.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\tilde{s})^{\nu}}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{\nu} e^{-\lambda_n}$$

Da Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzkreises absolut konvergieren, dürfen wir die Summations-Reihenfolge vertauschen:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(1-\tilde{s})^{\nu}}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{\nu} e^{-\lambda_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{((1-\tilde{s})\lambda_n)^{\nu}}{\nu!} \right) a_n e^{-\lambda_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{((1-\tilde{s})\lambda_n)} a_n e^{-\lambda_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\tilde{s}\lambda_n} = f(\tilde{s}) \end{aligned}$$

Damit wäre dann aber f in \tilde{s} konvergent. Ein Widerspruch zu $\sigma_0 > \tilde{s}$.

□

3 Die Menge \mathfrak{R}^l und die Klasse ζ

3.1 Vorbemerkung

Wir beginnen mit einer naiven Beschreibung der formalen Eigenschaften der Fibonacci Zeta-Funktion

$$\zeta_{\{F\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^{-s}$$

aus [11]. Zunächst betrachten wir die Folge der Fibonacci-Zahlen $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche durch eine homogene lineare Gleichung

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten und den Anfangswerten

$$F_1 = F_2 = 1$$

eindeutig festgelegt wird. Wir beobachten:

- $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für $n > 1$ streng monoton wachsend.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $F_n \in \mathbb{N}$.

Bei der Fibonacci Zeta-Funktion können wir nur recht schnell erkennen, dass ihre Konvergenzhalbebene mit der rechten Halbebene $\mathbb{H}_0 = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$ übereinstimmt (Siehe Lemma 3.3.1 oder [11]). Analog betrachten wir für den Rest dieser Arbeit Dirichlet-Reihen der Gestalt

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s},$$

wobei wir uns auf Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränken, welche die Eigenschaften

- die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genügt einer homogenen linearen Gleichung l -ter Ordnung

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_l a_{n-l}$$

mit konstanten Koeffizienten c_1, \dots, c_l und den Anfangswerten a_1, \dots, a_l ,

- $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist für $n \geq n_0$ streng monoton wachsend,
- für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \in \mathbb{N}$,

besitzen und der zugehörigen Dirichlet-Reihe

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s},$$

die Konvergenzhalbebene $\mathbb{H}_0 = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$ garantieren. Wir werden später zeigen, dass exponentielles Wachstum der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für Letzteres hinreichend ist. Im Folgenden werden wir eine homogene lineare Gleichung

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_l a_{n-l} \tag{19}$$

mit konstanten Koeffizienten c_1, \dots, c_l und den Anfangswerten a_1, \dots, a_l , eine **lineare Rekursion l -ter Ordnung** nennen und kurz mit $\{a\}$ bezeichnen.

Für das Weitere ist es notwendig, die algebraische Struktur von linearen Rekursionen und ihrem zugeordneten charakteristischen Polynom etwas genauer zu betrachten:

Lemma 3.1.1:

Jede lineare Rekursion $\{a\}$ besitzt eine Darstellung durch eine eindeutige lineare Rekursion minimaler Ordnung.

Beweis:

Angenommen die lineare Rekursion $\{a\}$ genüge zwei unterschiedlichen linearen Rekursionen gleicher Ordnung, also

$$a_n = \sum_{k=1}^l c_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^l d_k a_{n-k},$$

dann folgt

$$\sum_{k=1}^l (c_k - d_k) a_{n-k} = 0.$$

Wir setzen nun $\mu := \max\{k; c_k \neq d_k\} \leq l$, und erhalten

$$(c_\mu - d_\mu) a_{n-\mu} + \sum_{k=1}^{\mu-1} (c_k - d_k) a_{n-k} = 0.$$

Nach Voraussetzung dürfen wir nach $a_{n-\mu}$ auflösen:

$$a_{n-\mu} = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{(c_k - d_k)}{d_\mu - c_\mu} a_{n-k}.$$

Damit haben wir aber eine Darstellung für $\{a\}$ durch eine lineare Rekursion der Ordnung $\mu - 1 < l$. Hieraus folgt offensichtlich, dass die Darstellung von $\{a\}$ durch eine Rekursion minimaler Ordnung eindeutig ist.

□

Wir nennen das charakteristische Polynom der Rekursion minimaler Ordnung im Folgenden Minimalpolynom und überprüfen einen - für das Minimalpolynom einer Matrix - bekannten Sachverhalt, indem wir eine Bemerkung² aus [4] übernehmen und eigenständig³ beweisen:

Satz 3.1.1:

Sei P das Minimalpolynom der linearen Rekursion $\{a\}$ und H das charakteristische Polynom einer beliebigen linearen Rekursion für $\{a\}$.

Dann ist P ein Teiler von H .

Beweis:

Die lineare Rekursion $\{a\}$ besitzt für alle $n \in \mathbb{N}$, $n > l$ die eindeutige Darstellung

$$a_n = \sum_{k=1}^l c_k a_{n-k},$$

²„The minimal polynomial of a sequence a divides the characteristic polynomial of a “ Vgl. [4] S.2

³Leider hat der Verfasser dieser Arbeit auf einen Beweis dieser Aussage keinen Zugriff.

wobei die Ordnung l minimal ist. Wir bezeichnen mit $\varphi_1, \dots, \varphi_t$ die charakteristischen Wurzeln des Minimalpolynoms P mit zugehörigen Vielfachheiten $\sigma_1, \dots, \sigma_t$. Dann besitzt P die Darstellung

$$P(z) = z^l - \sum_{k=1}^l c_k z^{l-k} = \prod_{j=1}^t (z - \varphi_j)^{\sigma_j}.$$

Hauptsatz 1.5.1 i) liefert für $\{a\}$ die Existenz von Polynomen g_1, \dots, g_t mit $\text{Grad}(g_i) < \sigma_i$ für $1 \leq i \leq t$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_n = \sum_{i=1}^t g_i(n) \varphi_i^n. \quad (20)$$

Das charakteristische Polynom H einer beliebigen linearen Rekursion für $\{a\}$ besitze die Darstellung

$$H(z) = z^m - \sum_{i=1}^m \mu_i z^{m-i}.$$

Wir bezeichnen nun mit $\varphi_{t+1}, \dots, \varphi_s$, diejenigen Wurzeln von H , die keine Wurzeln von P sind. Dann besitzt $\{a\}$ - wieder nach Hauptsatz 1.5.1 i) - für alle $n \in \mathbb{N}$ die Darstellung

$$a_n = \sum_{i=1}^s h_i(n) \varphi_i^n, \quad (21)$$

wobei wir $h_i(n) \equiv 0$ setzen für diejenigen Wurzeln φ_i , mit $H(\varphi_i) \neq 0$. Wir betrachten nun das Produkt der beiden Polynome P und H

$$P(z) \cdot H(z) = \prod_{i=1}^s (z - \varphi_i)^{\eta_i} = z^{l+m} - \sum_{k=1}^{l+m} \nu_k z^{l+m-k},$$

wobei die Koeffizienten ν_k durch die letzte Gleichung definiert werden. Nach Hauptsatz 1.5.1 ii) erfüllen die beiden Darstellungen Gl.(20) und Gl.(21) für $\{a\}$ die lineare Rekursion

$$a_n = \sum_{k=1}^{l+m} \nu_k a_{n-k}.$$

Hauptsatz 1.5.1 i) liefert die Eindeutigkeit der Polynome g_i , $1 \leq i \leq t$ aus (20) und h_i , $1 \leq i \leq s$ aus (21). Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ $g_i(n) = h_i(n)$, für $1 \leq i \leq t$ und $h_i(n) \equiv 0$ für $t < i \leq s$. Damit besitzen nur die Wurzeln des Minimalpolynoms P Einfluss auf $\{a\}$. Um $\{a\}$ eindeutig durch eine lineare Rekursion minimaler Ordnung l darzustellen, benötigen wir l Anfangswerte a_1, \dots, a_l . Die Polynome g_1, \dots, g_t , in der

Darstellung (20), werden durch diese Anfangswerte eindeutig festgelegt. Dabei benötigen wir für das Polynom g_i , $\text{Grad}(g_i) + 1$ Werte. Damit gilt:

$$\sum_{i=1}^t (\text{Grad}(g_i) + 1) = l = \sum_{i=1}^t \sigma_i. \quad (22)$$

Offensichtlich kann dann nicht für alle $1 \leq i \leq t$, $\text{Grad}(g_i) < \sigma_i - 1$ gelten. Angenommen es gibt ein Polynom g_j mit $\text{Grad}(g_j) < \sigma_j - 1$, dann müsste wegen Gl.(22) mindestens ein Polynom g_k existieren, mit $\text{Grad}(g_k) > \sigma_k - 1$. Wegen Hauptsatz 1.5.1 i) kann das aber nicht sein. Damit gilt $\text{Grad}(g_i) = \sigma_i - 1$, für $1 \leq i \leq t$.

Wir bezeichnen nun für $1 \leq i \leq t$, mit ρ_i die Vielfachheit von φ_i in H . Dann gilt:

$$\sigma_i - 1 = \text{Grad}(g_i) = \text{Grad}(h_i) < \rho_i.$$

Folglich ist die Vielfachheit von φ_i in H stets größer oder gleich der Vielfachheit von φ_i in P . Damit ist P ein Teiler von H . □

Im Folgenden verstehen wir unter Gl.(19) stets eine lineare Rekursion minimaler Ordnung und meinen immer das zugehörige Minimalpolynom, wenn wir von einem charakteristischen Polynom sprechen. Desweiteren betrachten wir im Folgenden nur lineare Rekursionen $\{a\}$, welche Gl.(19) genügen und deren charakteristisches Polynom nur charakteristische Wurzeln φ_i mit Vielfachheit $\sigma_i = 1$ besitzt.

3.2 Die Menge \mathfrak{R}^l

Nun fassen wir alle linearen Rekursionen mit den obigen Eigenschaften zu einer Menge zusammen:

Definition 3.2.1:

Die Menge \mathfrak{R}^l enthält alle linearen Rekursionen $\{a\}$ l -ter Ordnung mit folgenden Eigenschaften:

- $\{a\} \subseteq \mathbb{N}$.
- $\{a\}$ ist für $n \geq n_0$ streng monoton wachsend.

Wir werden später gewissen linearen Rekursionen $\{a\} \in \mathfrak{R}^l$ eine Dirichlet-Reihe

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}$$

zuordnen. Insgesamt beschäftigen wir uns in diesem Kapitel mit der Fragestellung, wie wir eine Teilmenge von \mathfrak{R}^l charakterisieren können. Ziel ist es also Bedingungen zu finden, die einer linearen Rekursion $\{a\}$ garantieren in \mathfrak{R}^l zu liegen. Dabei drängen sich uns die folgenden Fragen auf:

- Wie müssen wir die Koeffizienten c_1, \dots, c_l von $\{a\}$ wählen, damit $\{a\}$ zu einer Teilmenge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} wird, also insbesondere kein Folgenglied von $\{a\}$ verschwindet?
- Gibt es eine einfache Bedingung, welche einer linearen Rekursion $\{a\}$ die bedingte Divergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

garantiert?

Im Hinblick auf späteres müssen diese linearen Rekursionen $\{a\}$ auch so bestimmt werden, dass sie der zugeordneten Dirichlet-Reihe

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}$$

eine Konvergenzhalbebene \mathbb{H}_{σ_0} garantieren.

In den folgenden Unterabschnitten werden wir Lösungsvorschläge für diese Fragen erarbeiten und so zeigen, dass sich eine Teilmenge von \mathfrak{R}^l tatsächlich recht schnell charakterisieren lässt.

3.2.1 Ganzzahligkeit

Wählen wir in Gl.(19) alle Anfangswerte a_1, \dots, a_l und Koeffizienten c_1, \dots, c_l aus den ganzen Zahlen \mathbb{Z} , so nimmt die Rekursion $\{a\}$ offensichtlich nur ganzzahlige Werte an. Wir werden nun untersuchen, ob sich die Ganzzahligkeit aller Glieder einer linearen Rekursion auf ihre Koeffizienten überträgt. Zunächst beweisen wir aber einen einfachen Sachverhalt, der uns später eine lästige Fallunterscheidung erspart:

Lemma 3.2.1:

Seien $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$, $l \geq 2$ und für beliebiges $j \in \{1, \dots, l\}$ existiere ein $t_j \in \mathbb{N}$ mit

$$q_j = t_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^l q_k, \quad (23)$$

dann gilt $q_1 = q_2 = \dots = q_l = 1$.

Beweis:

Wir multiplizieren einfach für $1 \leq j \leq l$ rechte und linke Seite von Gl.(23) miteinander, und erhalten:

$$\prod_{j=1}^l q_j = (q_1 \cdot \dots \cdot q_l)^{l-1} \prod_{j=1}^l t_j,$$

$$\text{also} \quad 1 = (q_1 \cdot \dots \cdot q_l)^{l-2} \prod_{j=1}^l t_j.$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Nun finden und beweisen wir eigenständig⁴:

Satz 3.2.1:

Die lineare Rekursion $\{a\}$ aus Gl.(19) besitze für $n > l$ nur ganzzahlige Glieder. Dann ist $\{a\}$ konstant oder alle Koeffizienten c_1, \dots, c_l sind ganzzahlig.

Beweis:

Sei die lineare Rekursion $\{a\}$ nicht konstant.

Nach Voraussetzung gilt für $n > l$

$$a_n = \sum_{k=1}^l c_k a_{n-k}. \quad (24)$$

Angenommen nicht alle Koeffizienten von Gl.(24) sind ganz, dann existieren nichtleere Indexmengen $P, Q, R \subseteq \{1, 2, \dots, l\}$ mit

$$(c_k)_{k \in P} \in \mathbb{Z}, (c_k)_{k \in Q} \in \mathbb{Q} \text{ und } (c_k)_{k \in R} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Wir können daher Gl.(24) umschreiben zu

$$a_n = \sum_{k \in P} c_k a_{n-k} + \sum_{k \in Q} c_k a_{n-k} + \sum_{k \in R} c_k a_{n-k}.$$

Wir wählen nun zu einem $s \in \mathbb{N}$ die l Glieder a_{s+1}, \dots, a_{s+l} und betrachten das lineare $l \times l$ Gleichungssystem

$$\left(\sum_{k=1}^l c_k a_{s+j-k} = a_{s+j} \right)_{1 \leq j \leq l}.$$

Hieraus lassen sich mit dem Gauß-Algorithmus die Koeffizienten c_1, \dots, c_l eindeutig in den Unbekannten a_{s+1}, \dots, a_{s+l} bestimmen, wobei wir nur rationale Operationen verwenden müssen. Die Ganzzahligkeit der Glieder a_{s+1}, \dots, a_{s+l} liefert $c_k \in \mathbb{Q}$ für $k \in \{1, \dots, l\}$, also $R = \emptyset$. Damit gilt:

$$a_n = \sum_{k \in P} c_k a_{n-k} + \sum_{k \in Q} c_k a_{n-k}. \quad (25)$$

⁴Dieser Sachverhalt ist bereits, was der Verfasser erst nach seinem eigenen hier niedergeschriebenen Beweisvorschlag erfuhr, in [3] zu finden, und wie andere Aussagen über lineare Rekursionen unter [2], [10], [13] oder [18] nachzulesen.

Da linke Seite und erste Summe auf der rechten Seite von Gl.(25) ganzzahlig sind, muss die Summe

$$\sum_{k \in Q} c_k a_{n-k}$$

ebenfalls ganzzahlig sein. Wir setzen nun für $k \in Q$:

$$c_k = \frac{p_k}{q_k}, p_k \in \mathbb{Z}, q_k \in \mathbb{N}, \text{ wobei } \text{ggT}(p_k, q_k) = 1.$$

Dann existiert zu jedem a_n aus Gl.(25) ein $t_n \in \mathbb{Z}$ mit $t_n = \sum_{k \in Q} \frac{p_k}{q_k} a_{n-k}$, also

$$t_n \prod_{k \in Q} q_k = \sum_{k \in Q} \left(p_k a_{n-k} \prod_{j \in Q \setminus \{k\}} q_j \right). \quad (26)$$

Die linke Seite von Gl.(26) ist dabei für jedes $k \in Q$ durch q_k teilbar, also auch die rechte Seite. Wir wählen nun $k_1 \in Q$ und dividieren Gl.(26) durch

$$\prod_{k \in Q \setminus \{k_1\}} q_k.$$

Wir erhalten:

$$t_n q_{k_1} = p_{k_1} a_{n-k_1} + q_{k_1} \sum_{k \in Q \setminus \{k_1\}} \left(\frac{p_k}{q_k} a_{n-k} \right).$$

Wegen Lemma 3.2.1 und der Annahme $q_{k_1} > 1$ existiert dann aber ein $t^{(k_1)} \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sum_{k \in Q \setminus \{k_1\}} \left(\frac{p_k}{q_k} a_{n-k} \right) = t^{(k_1)},$$

bzw.

$$t^{(k_1)} \prod_{k \in Q \setminus \{k_1\}} q_k = \sum_{k \in Q \setminus \{k_1\}} \left(p_k a_{n-k} \prod_{\substack{j \in Q \setminus \{k_1\} \\ j \neq k}} q_j \right). \quad (27)$$

Wir wählen nun ein $k_2 \in Q \setminus \{k_1\}$ und dividieren Gl.(27) durch

$$\prod_{k \in Q \setminus \{k_1, k_2\}} q_k,$$

und erhalten:

$$t^{(k_1)} q_{k_2} = p_{k_2} a_{n-k_2} + q_{k_2} \sum_{k \in Q \setminus \{k_1, k_2\}} \left(\frac{p_k}{q_k} a_{n-k} \right).$$

Analog existiert wieder ein $t^{(k_2)} \in \mathbb{Z}$ mit

$$t^{(k_2)} \prod_{k \in Q \setminus \{k_1, k_2\}} q_k = \sum_{k \in Q \setminus \{k_1, k_2\}} \left(p_k a_{n-k} \prod_{\substack{j \in Q \setminus \{k_1, k_2\} \\ j \neq k}} q_j \right).$$

Wir verfahren nun analog bei jedem Element aus der Indexmenge Q , bis Q nur noch ein Element enthält. Insbesondere wird die Mächtigkeit $|Q|$ von Q bei jedem Schritt um 1 verringert. Im Schritt r erhalten wir also ein $t^{(k_r)} \in \mathbb{Z}$ mit

$$t^{(k_r)} \prod_{k \in Q \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}} q_k = \sum_{k \in Q \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}} \left(p_k a_{n-k} \prod_{\substack{j \in Q \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\} \\ j \neq k}} q_j \right).$$

Im letzten Schritt haben wir dann r derart gewählt, dass $|Q \setminus \{k_1, k_2, \dots, k_r\}| = 1$. Also wird nur noch über $k_{r+1} \in Q$ summiert:

$$t^{k_{r+1}} q_{k_{r+1}} = p_{k_{r+1}} a_{n-k_{r+1}}.$$

Wegen $\text{ggT}(p_{k_{r+1}}, q_{k_{r+1}}) = 1$ ist $q_{k_{r+1}}$ ein Teiler von $a_{n-k_{r+1}}$. Damit ist dann aber $q_{k_{r+1}}$ für $n \geq k_{r+1}$ ein Teiler von $\{a\}$ und da wir die $k_1, \dots, k_{r+1} \in Q$ in beliebiger Reihenfolge gewählt hatten, folgt: Die Zahlen $q_k \in Q$ sind Teiler der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $n \geq l+1$. Wir betrachten nun für $n \geq l+1$ erneut Gl.(25)

$$a_n = \sum_{k=1}^l c_k a_{n-k} = \sum_{k \in P} c_k a_{n-k} + \sum_{k \in Q} \frac{p_k}{q_k} a_{n-k},$$

und setzen $k_1^* = \min\{k; k \in Q\}$. Dann können wir

$$a_n = \sum_{k \in P} c_k a_{n-k} + \sum_{k \in Q \setminus \{k_1^*\}} \left(\frac{p_k}{q_k} a_{n-k} \right) + \frac{p_{k_1^*}}{q_{k_1^*}} a_{n-k_1^*} \quad (28)$$

schreiben. Da jedes Glied der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $q_{k_1^*}$ teilbar ist, folgt, dass $q_{k_1^*}$ auch ein Teiler von $\frac{p_{k_1^*}}{q_{k_1^*}} a_{n-k_1^*}$ ist. Folglich muß dann aber auch jedes Glied a_n der Folge für $n \geq l+1$ durch $q_{k_1^*}^2$ teilbar sein. Insgesamt wäre dann stets $a_{n-k_1^*}$ einmal mehr durch $q_{k_1^*}$ teilbar als die linke Seite von Gl.(28). Folglich müsste $q_{k_1^*}$ die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unendlich oft teilen. Das geht aber nur wenn $q_{k_1^*} = 1$, also $c_{k_1^*} \in P$ gilt. Induktiv wählen wir nun $k_2^* = \min\{k; k \in Q \setminus \{k_1^*\}\}$ und argumentieren analog. Insgesamt erhalten wir so nach k_1^* -Schritten $q_k = 1$ für jedes $k \in Q$. Damit sind alle Koeffizienten der Gl.(24) ganzzahlig.

□

3.2.2 Festlegung des Wachstums

In diesem Unterabschnitt suchen wir nach einer einfachen Bedingung, welche einer linearen Rekursion $\{a\}$ die bedingte Divergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

garantiert. Zunächst gilt offensichtlich für ganzzahlige lineare Rekursionen $\{a\}$:

- $\{a\}$ **wächst streng monoton**, falls $a_{n+1} - a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nachdem die lineare Rekursion $\{a\}$ ab einem n_0 streng monoton wachsen soll, legen wir einfach fest:

Die Darstellung von $\{a\}$ durch Gl.(13) aus Korollar 1.5.1 besitzt eine positive dominante Wurzel $\varphi_1 > 1$ mit zugehörigem Koeffizienten $\alpha_1 > 0$.

3.2.3 Positivität

In diesem Unterabschnitt werden wir eine einfache Bedingung angeben, welche einer linearen Rekursion $\{a\}$ garantiert, dass keines ihrer Glieder verschwindet. Wir finden eine solche Bedingung leicht, indem wir die Darstellung für $\{a\}$ durch Gl.(13) aus Korollar 1.5.1 berücksichtigen:

Lemma 3.2.2:

i) Die Koeffizienten α_i der linearen Rekursion $\{a\}$ erfüllen die Ungleichung

$$\alpha_1 \geq \sum_{i=2}^l |\alpha_i|. \quad (29)$$

Dann sind alle Glieder der linearen Rekursion $\{a\}$ von Null verschieden.

ii) Für die Koeffizienten α_i der linearen Rekursion $\{a\}$ gelte für $1 \leq i < j \leq l$:

$$0 \neq \alpha_i = \alpha_j.$$

Gilt dann für die charakteristischen Wurzeln die Ungleichung

$$\varphi_1 > \sum_{i=2}^l |\varphi_i|, \quad (30)$$

so verschwindet kein Glied der zugehörigen linearen Rekursion $\{a\}$.

Beweis:

i) Einfaches Einsetzen von Ungl.(29) in die Folge $\{a\}$ liefert für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 |a_n| &= \left| \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi_i^n \right| \geq |\alpha_1 \varphi_1^n| - \left| \sum_{i=2}^l \alpha_i \varphi_i^n \right| \\
 &\geq \alpha_1 \varphi_1^n - \sum_{i=2}^l |\alpha_i \varphi_i^n| \\
 &> \alpha_1 \varphi_1^n - \sum_{i=2}^l |\alpha_i| \varphi_1^n \\
 &= \varphi_1^n \left(|\alpha_1| - \sum_{i=2}^l |\alpha_i| \right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

ii) Analog.

□

Diese Bedingungen an $\{a\}$ garantieren auch unsere letzte Forderung, dass $\{a\}$ nur Werte aus den natürlichen Zahlen \mathbb{N} annimmt:

Lemma 3.2.3:

Seien alle Koeffizienten c_1, \dots, c_l und alle Anfangswerte a_1, \dots, a_l der durch Gl.(19) definierten linearen Rekursion $\{a\}$ ganzzahlig, alle charakteristischen Wurzeln φ_i des zugehörigen charakteristischen Polynoms verschieden. Desweiteren besitzen die Koeffizienten α_i und die charakteristischen Wurzeln φ_i von $\{a\}$ die Eigenschaft **i)** oder **ii)** aus Lemma 3.2.2. Ist dann die dominante Wurzel $\varphi_1 > 1$ mit einem Vorfaktor $\alpha_1 > 0$, dann gilt: Die lineare Rekursion $\{a\} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nimmt nur Werte aus den natürlichen Zahlen \mathbb{N} an.

Insbesondere erhalten wir, dass die Anfangswerte der linearen Rekursion $\{a\}$ natürliche Zahlen sind.

Beweis:

Offensichtlich kann die lineare Rekursion $\{a\}$ nur ganzzahlige Werte annehmen. Desweiteren gilt nach Voraussetzung:

$$\varphi_1 > |\varphi_2| \geq \dots \geq |\varphi_l|.$$

Falls die charakteristischen Wurzeln von $\{a\}$ Ungl.(30) erfüllen und alle Koeffizienten α_i übereinstimmen und positiv sind ($\alpha_1 > 0$), ist die Aussage offensichtlich erfüllt. Erfüllen

dagegen die Koeffizienten von $\{a\}$ Ungl.(29), folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \varphi_1^n &\geq \sum_{i=2}^l |\alpha_i| \varphi_1^n > \sum_{i=2}^l |\alpha_i| |\varphi_k|^n \quad \text{für } k \in \{2, 3, \dots, l\}. \\
 \Rightarrow \alpha_1 \varphi_1^n + (l-2) \alpha_1 \varphi_1^n &> \sum_{k=2}^l \sum_{i=2}^l |\alpha_i \varphi_k^n| \\
 &= \sum_{k=2}^l |\alpha_k \varphi_k^n| + \sum_{k=2}^l \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^l |\alpha_i \varphi_k^n|. \tag{*}
 \end{aligned}$$

Wir schätzen nun die Doppelsumme ab:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^l \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^l |\alpha_i \varphi_k^n| &< \sum_{k=2}^l \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^l |\alpha_i| \varphi_1^n \\
 &= \sum_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^l \sum_{i=2}^l |\alpha_i| \varphi_1^n \\
 &= (l-2) \sum_{i=2}^l |\alpha_i| \varphi_1^n \\
 &\leq (l-2) \alpha_1 \varphi_1^n.
 \end{aligned}$$

Wegen $0 \leq \sum_{k=2}^l \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^l |\alpha_i \varphi_k^n| \leq (l-2) \alpha_1 \varphi_1^n$ folgt aus (*):

$$\alpha_1 \varphi_1^n > \sum_{i=2}^l |\alpha_i \varphi_i^n|. \tag{31}$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
 a_n &= \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi_i^n = \alpha_1 \varphi_1^n + \sum_{i=2}^l \alpha_i \varphi_i^n \\
 &\geq \alpha_1 \varphi_1^n - \sum_{i=2}^l |\alpha_i \varphi_i^n| \\
 &> 0.
 \end{aligned}$$

□

3.2.4 Zusammenfassung: Eine Teilmenge \mathfrak{C}^l von \mathfrak{R}^l

Offensichtlich haben wir nun die einfachste aller Teilmengen von \mathfrak{R}^l gefunden:

Definition 3.2.2:

Die Menge \mathfrak{C}^l ist definiert als die Menge aller linearen Rekursionen $\{a\}$ aus der Menge \mathfrak{R}^l , für die gilt:

- Alle Koeffizienten c_1, \dots, c_l und die Anfangswerte von $\{a\}$ sind ganzzahlig.
- Alle charakteristischen Wurzeln φ_i sind unterschiedlich und die dominante Wurzel $\varphi_1 > 1$ besitzt einen Vorfaktor $\alpha_1 > 0$.
- Die Koeffizienten von $\{a\}$ erfüllen Ungl.(29) oder stimmen überein und die charakteristischen Wurzeln von $\{a\}$ erfüllen Ungl.(30).

3.3 Die Klasse ζ

Wie bereits angekündigt, ordnen wir nun jedem Element der Menge \mathfrak{C}^l eine Dirichlet-Reihe zu.

Definition 3.3.1:

Unter der Menge der gewöhnlichen Dirichlet-Reihen $\{\zeta_{\{a\}}; \{a\} \in \mathfrak{C}^l\}$, mit

$$\zeta_{\{a\}} : \begin{cases} \mathfrak{C}^l \times \mathbb{C} & \rightarrow \\ (\{a\}, s) & \rightarrow \zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}, \end{cases}$$

verstehen wir die Klasse ζ .

In diesem Kapitel werden wir nur noch die Sinnhaftigkeit dieser Definition überprüfen. Dabei sind wir, im Rückblick auf alle vorherigen Ergebnisse, nur noch den Nachweis einer Konvergenzhalbebene \mathbb{H}_{σ_0} für jedes Element $\zeta_{\{a\}}$ der Klasse ζ schuldig:

Lemma 3.3.1:

Sei $\zeta_a \in \zeta$, dann besitzt ζ_a die Konvergenzhalbebene $\mathbb{H}_0 = \{s \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(s) > 0\}$.

Beweis:

Da die Konvergenzabszisse σ_0 von $\zeta_a \in \zeta$ offensichtlich positiv ist, können wir σ_0 mit Gl.(17) aus Satz 2.3.1 bestimmen: Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 und wegen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ gilt

$$\sigma_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log A(n)}{\lambda_n}.$$

Mit $A(n) = \sum_{k=1}^n 1 = n$ und $\lambda_n = \log(a_n)$, folgt

$$\sigma_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log(a_n)}.$$

Sei nun $0 < \epsilon < 1$ beliebig. Nach Voraussetzung gilt $\alpha_1 > 0$ und $\varphi_1 > 1$. Dann existiert aber ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$(\alpha_1 \varphi_1^n)^\epsilon > \frac{n}{(1-\epsilon)^\epsilon},$$

für alle $n \geq n_0$, und ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \frac{\alpha_2 \varphi_2^n + \dots + \alpha_l \varphi_l^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right| < \epsilon,$$

für alle $n \geq n_1$. Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ folgt dann:

$$\begin{aligned} a_n^\epsilon &= (\alpha_1 \varphi_1^n + \dots + \alpha_l \varphi_l^n)^\epsilon \\ &= |\alpha_1 \varphi_1^n + \dots + \alpha_l \varphi_l^n|^\epsilon \\ &= (\alpha_1 \varphi_1^n)^\epsilon \left| 1 + \frac{\alpha_2 \varphi_2^n + \dots + \alpha_l \varphi_l^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right|^\epsilon \\ &\geq (\alpha_1 \varphi_1^n)^\epsilon \left(1 - \left| \frac{\alpha_2 \varphi_2^n + \dots + \alpha_l \varphi_l^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right| \right)^\epsilon \\ &> (\alpha_1 \varphi_1^n)^\epsilon (1 - \epsilon)^\epsilon \\ &> n, \end{aligned}$$

also

$$\frac{\log(n)}{\log(a_n)} < \epsilon.$$

Folglich erhalten wir wie gewünscht für die Konvergenzabszisse $\sigma_0 = 0$.

□

Da für unsere gewöhnlichen Dirichlet-Reihen stets $A(n) = \overline{A}(n)$ gilt, fallen Abszisse der Konvergenz und Abszisse der absoluten Konvergenz zusammen:

$$\sigma_0 = \overline{\sigma}.$$

4 Elementare Eigenschaften der Klasse ζ

4.1 Vorbemerkung

In dem kommenden Unterabschnitt werden wir nachweisen, dass jedes Element der Klasse ζ eine analytische Fortsetzung zu einer in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} meromorphen Funktion besitzt, um dann in den nachfolgenden Unterabschnitten diese analytische Fortsetzung auf bestimmte Eigenschaften hin zu untersuchen.

4.2 Analytische Fortsetzbarkeit der Elemente von ζ

Wir werden nun die Vorgehensweise von Navas in [11] - bei der Herleitung der analytischen Fortsetzung der Fibonacci Zeta-Funktion - auf die Elemente der Klasse ζ verallgemeinern. Dabei beschränken wir uns auf diejenigen linearen Rekursionen $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$, deren Koeffizienten α_i paarweise verschieden sind und Ungl.(29) aus Lemma 3.2.2 erfüllen. Wir erhalten in vollkommen analoger Weise die Aussage für die linearen Rekursionen $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$, deren charakteristische Wurzeln Ungl.(30) genügen und deren Koeffizienten allesamt übereinstimmen. Zunächst müssen wir aber einige Bezeichnungen einführen: Unter Berücksichtigung des Multinomialsatzes (s. Anhang) definieren wir

$$\varphi := \prod_{i=2}^l \varphi_i,$$

für die charakteristischen Wurzeln $\varphi_2, \dots, \varphi_l$ von $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$. Desweiteren bezeichnet $\beta = (\beta_2, \dots, \beta_l) \in \mathbb{N}_0^{l-1}$ einen Multiindex und $|\beta| = \sum_{i=2}^l \beta_i$ die Ordnung von β . Der Multinomialkoeffizient $\binom{k}{\beta}$ wird definiert durch

$$\binom{k}{\beta} := \frac{k!}{\beta_2! \cdot \dots \cdot \beta_l!}.$$

Schließlich werden die Monome φ^β definiert durch

$$\varphi^\beta := \prod_{i=2}^l \varphi_i^{\beta_i}.$$

Nun beweisen wir das grundlegende Resultat dieser Arbeit:

Hauptsatz 4.2.1:

Die Koeffizienten α_i der lineare Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$ genügen Ungl.(29). Dann besitzt das zugeordnete Element $\zeta_{\{a\}}$ der Klasse ζ eine analytische Fortsetzung zu einer in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} meromorphen Funktion.

Beweis:

Wir werden den Beweis in zwei Schritten liefern:

In **Schritt 1** benutzen wir Gl.(13), um jedes Element der Klasse ζ in der Konvergenzhalbebene \mathbb{H}_0 in eine binomische Reihe zu entwickeln. Außerdem werden wir nachweisen, dass diese neue Reihendarstellung für $\zeta_{\{a\}}$ in \mathbb{H}_0 absolut konvergiert.

In **Schritt 2** werden wir beweisen, dass unsere neue Reihendarstellung für $\zeta_{\{a\}}$ in der gesamten komplexen \mathbb{C} - ausgenommen eventueller Singularitäten - absolut konvergiert.

Schritt 1:

Wir setzen nun

$$J := \{1, 2, \dots, l\}.$$

Für $\sigma > 0$ gilt

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i \in J} \alpha_i \varphi_i^n \right)^{-s}.$$

Zuerst ziehen wir die dominante Wurzel φ_1 aus der inneren Summe heraus:

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_1 \varphi_1^n + \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-s} \left(1 + \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \frac{\alpha_i \varphi_i^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right)^{-s}. \end{aligned}$$

Wegen $\{a\} \subset \mathbb{N}$ folgt

$$a_n = \alpha_1 \varphi_1^n \left(1 + \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right) > 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\alpha_1 \varphi_1^n > 0$ für alle n . Folglich muß auch die Ungleichung

$$\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} > -1$$

erfüllt sein. Ebenso folgt mit Ungl.(31) aus Lemma 3.2.3

$$\left| \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right| \leq \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n|}{\alpha_1 \varphi_1^n} < 1.$$

Damit können wir aber den Ausdruck

$$\left(1 + \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \frac{\alpha_i \varphi_i^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right)^{-s}$$

in eine binomische Reihe entwickeln:

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-k} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^k \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-(s+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^k. \end{aligned}$$

Nun werden wir nachweisen, dass diese Reihendarstellung für $\zeta_{\{a\}}(s)$ für $\sigma > 0$ absolut konvergiert:

$$\begin{aligned}
|\zeta_{\{a\}}(s)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-(s+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^k \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{-s}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-(s+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^k \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \binom{-s}{k} \right| (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-(\sigma+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n| \right)^k.
\end{aligned}$$

Hierfür schätzen wir zunächst den Binomialkoeffizienten ab durch

$$\begin{aligned}
\left| \binom{-s}{k} \right| &= \left| \frac{(-s) \cdot (-s-1) \cdot \dots \cdot (-s-k+1)}{k!} \right| \leq \frac{|s| \cdot (|s|+1) \cdot \dots \cdot (|s|+k-1)}{k!} \\
&= \binom{|s|+k-1}{k} = (-1)^k \cdot \frac{(-|s|) \cdot (-|s|-1) \cdot \dots \cdot (-|s|-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{-|s|}{k},
\end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
|\zeta_{\{a\}}(s)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-(\sigma+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n| \right)^k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-k} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n| \right)^k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \left(\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n|}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right)^k.
\end{aligned}$$

Wir erkennen die binomische Reihe und erhalten schließlich

$$|\zeta_{\{a\}}(s)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-\sigma} \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n|}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right)^{-|s|}.$$

Wegen $\varphi_1 > |\varphi_2| \geq \dots \geq |\varphi_l|$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n|}{\alpha_1 \varphi_1^n} &= \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \frac{|\alpha_i \varphi_i|^n}{\alpha_1 \varphi_1^n} \\ &= \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \frac{|\alpha_i|}{\alpha_1} \left(\frac{|\varphi_i|}{\varphi_1} \right)^n \\ &\leq \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \frac{|\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 \varphi_1}. \end{aligned}$$

Damit gilt dann aber für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n|}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right)^{-|s|} \leq \left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i| |\varphi_i|}{\alpha_1 \varphi_1} \right)^{-|s|}.$$

Insgesamt folgt jetzt mit der Summenformel für die geometrische Reihe

$$\begin{aligned} |\zeta_{\{a\}}(s)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-\sigma} \cdot \left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i^n|}{\alpha_1 \varphi_1^n} \right)^{-|s|} \\ &\leq \left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 \varphi_1} \right)^{-|s|} \frac{(\alpha_1 \varphi_1)^{-\sigma}}{1 - (\varphi_1)^{-\sigma}}. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihendarstellung für die Funktion $\zeta_{\{a\}}(s)$ aber für $\sigma > 0$ absolut, also dürfen wir die Summationsreihenfolge vertauschen. Außerdem benötigen wir jetzt den Multinomialsatz (s. Anhang) mit den Bezeichnungen, die wir am Anfang dieses Kapitels festgelegt haben und setzen abkürzend noch

$$\alpha := \prod_{i=2}^l \alpha_i,$$

für die Koeffizienten α_i von $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} (\alpha_1 \varphi_1^n)^{-(s+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-s}{k} \alpha_1^{-(s+k)} \varphi_1^{-n(s+k)} \left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} \alpha_i \varphi_i^n \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-s}{k} \alpha_1^{-(s+k)} \varphi_1^{-n(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} (\alpha \varphi^n)^{\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \alpha_1^{-(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_1^{-n(s+k)} \varphi^{n\beta} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \alpha_1^{-(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \alpha^\beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_1^{-(s+k)} \varphi^\beta \right)^n.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\left| \varphi_1^{-(s+k)} \varphi^\beta \right| &= \varphi_1^{-(\sigma+k)} \prod_{i \in J \setminus \{1\}} |\varphi_i|^{\beta_i} \\
&\leq \varphi_1^{-(\sigma+k)} \prod_{i \in J \setminus \{1\}} \varphi_1^{\beta_i} \\
&= \varphi_1^{-(\sigma+k)} \varphi_1^{|\beta|} \\
&= \varphi_1^{-\sigma} < 1,
\end{aligned}$$

folgt wieder mit der Summenformel für die geometrische Reihe:

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\binom{-s}{k} \alpha_1^{-(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta} \right). \quad (32)$$

Schritt 2:

Nun zeigen wir, dass die Darstellung (32) von $\zeta_{\{a\}}$ in ganz \mathbb{C} , ausgenommen der Singularitäten der Funktionenfolge

$$f_k = \alpha_1^{-(s+k)} \binom{-s}{k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

absolut konvergiert. Dabei schätzen wir zuerst die innere Summe von (32) ab:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta} \right| &\leq \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha\varphi|^\beta}{|\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta|} \\
&= \varphi_1^{-k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha\varphi|^\beta}{|\varphi_1^s - \frac{\varphi^\beta}{\varphi_1^k}|} \\
&\leq \varphi_1^{-k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha\varphi|^\beta}{\left| \varphi_1^\sigma - \frac{|\varphi|^\beta}{\varphi_1^k} \right|} \\
&= \varphi_1^{-k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha\varphi|^\beta}{\left| \varphi_1^\sigma - \prod_{i \in J \setminus \{1\}} \left(\frac{|\varphi_i|}{\varphi_1} \right)^{\beta_i} \right|}.
\end{aligned}$$

Nachdem gilt

$$\prod_{i \in J \setminus \{1\}} \left(\frac{|\varphi_i|}{\varphi_1} \right)^{\beta_i} \leq \left(\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1} \right)^{|\beta|} = \left(\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1} \right)^k,$$

konvergiert der Ausdruck

$$\prod_{i \in J \setminus \{1\}} \left(\frac{|\varphi_i|}{\varphi_1} \right)^{\beta_i}$$

für $k \rightarrow \infty$ gegen Null. Damit existiert aber ein hinreichend großes $k_0(\sigma) \in \mathbb{N}_0$, sodass für $k \geq k_0(\sigma)$ gilt:

$$\left| \varphi_1^\sigma - \prod_{i \in J \setminus \{1\}} \left(\frac{|\varphi_i|}{\varphi_1} \right)^{\beta_i} \right| \geq \varphi_1^\sigma \left(\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1} \right)^k.$$

Damit erhalten wir insgesamt als Abschätzung der inneren Summe von (32) für $k \geq k_0(\sigma)$:

$$\left| \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta} \right| \leq \varphi_1^{-k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha\varphi|^\beta}{\varphi_1^\sigma \left(\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1} \right)^k}.$$

Wir werden nun die Reihendarstellung (32) von $\zeta_{\{a\}}$ für $k \geq k_0(\sigma)$ abschätzen. Dafür benötigen wir noch - wie sich gleich zeigen wird - die Ungleichung

$$\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} \leq 1.$$

Nach Voraussetzung gilt für beliebiges $k \in J \setminus \{1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \alpha_1 |\varphi_2|^n &\geq \sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i| |\varphi_2|^n \\ &\geq \sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_k^n|. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} (l-1) \alpha_1 |\varphi_2|^n &\geq \sum_{k \in J \setminus \{1\}} \sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_k^n| \\ &= \sum_{k \in J \setminus \{1\}} |\alpha_k \varphi_k^n| + \sum_{k \in J \setminus \{1\}} \sum_{\substack{i \in J \setminus \{1\} \\ i \neq k}} |\alpha_i \varphi_k^n|. \end{aligned}$$

Dabei lässt sich die Doppelsumme wieder folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J \setminus \{1\}} \sum_{\substack{i \in J \setminus \{1\} \\ i \neq k}} |\alpha_i \varphi_k^n| &\leq \sum_{k \in J \setminus \{1\}} \sum_{\substack{i \in J \setminus \{1\} \\ i \neq k}} |\alpha_i \varphi_k^n| \\ &\leq (l-2) \alpha_1 |\varphi_2|^n \end{aligned}$$

Da auf beiden Seiten der letzten Ungleichung nur positive Zahlen stehen, folgt

$$\alpha_1 |\varphi_2|^n \geq \sum_{k \in J \setminus \{1\}} |\alpha_k \varphi_k^n|.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} \left(\binom{-s}{k} \alpha_1^{-(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha \varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \alpha_1^{-(\sigma+k)} \varphi_1^{-k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha \varphi|^\beta}{\varphi_1^\sigma \left(\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1} \right)^k} \\ &= (\alpha_1 \varphi_1)^{-\sigma} \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} (\alpha_1 |\varphi_2|)^{-k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} |\alpha \varphi|^\beta \\ &= (\alpha_1 \varphi_1)^{-\sigma} \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \left(\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} \right)^k. \end{aligned}$$

Wir müssen nun zwei Fälle unterscheiden:

Fall I:

Sei $\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} < 1$, dann folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \left(\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} \right)^k &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \left(\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} \right)^k \\ &= \left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} \right)^{-|s|}. \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} |\zeta_{\{a\}}(s)| &\leq \sum_{k=0}^{k_0(\sigma)-1} |f_k(s)| + \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} |f_k(s)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{k_0(\sigma)-1} |f_k(s)| + (\alpha_1 \varphi_1)^{-\sigma} \left(1 - \frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} \right)^{-|s|}. \end{aligned}$$

Damit ist $\zeta_{\{a\}}(s)$ aber in ganz \mathbb{C} - Singularitäten von f_k ausgenommen - beschränkt.

Fall II:

Sei nun $\frac{\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i \varphi_i|}{\alpha_1 |\varphi_2|} = 1$, dann folgt mit Ungl. (29)

$$\sum_{i \in J \setminus \{1,2\}} |\alpha_i \varphi_i| = (\alpha_1 - |\alpha_2|) |\varphi_2| \geq |\varphi_2| \sum_{i \in J \setminus \{1,2\}} |\alpha_i|.$$

Da aber auch nach Voraussetzung

$$\sum_{i \in J \setminus \{1,2\}} |\alpha_i \varphi_i| \leq |\varphi_2| \sum_{i \in J \setminus \{1,2\}} |\alpha_i|$$

gilt, folgt

$$\sum_{i \in J \setminus \{1,2\}} |\alpha_i| \underbrace{\frac{|\varphi_i|}{|\varphi_2|}}_{\leq 1} = \sum_{i \in J \setminus \{1,2\}} |\alpha_i|.$$

Die letzte Gleichung impliziert nun $|\varphi_2| = |\varphi_3| = \dots = |\varphi_l|$, also $\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i| = \alpha_1$. Wir prüfen nun erneut, ob die Reihendarstellung (32) von $\zeta_{\{a\}}$ unter den gerade an die charakteristischen Wurzeln φ_i und Koeffizienten α_i gestellten Bedingungen in ganz \mathbb{C} - ausgenommen irgendwelcher Singularitäten von f_k - absolut konvergiert:

$$\begin{aligned} |\zeta_{\{a\}}(s)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \binom{-|s|}{k} \alpha_1^{-(\sigma+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{|\alpha \varphi|^\beta}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi|^\beta|} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \alpha_1^{-(\sigma+k)} |\varphi_2|^k \frac{\sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} |\alpha|^\beta}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \alpha_1^{-(\sigma+k)} |\varphi_2|^k \frac{\left(\sum_{i \in J \setminus \{1\}} |\alpha_i| \right)^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} \\ &= \alpha_1^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} \\ &= \alpha_1^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{1}{\left| \varphi_1^\sigma \left(\frac{\varphi_1}{|\varphi_2|} \right)^k - 1 \right|}. \end{aligned}$$

Wegen $|\varphi_2| < \varphi_1$ strebt der Ausdruck $\varphi_1^\sigma \left(\frac{\varphi_1}{|\varphi_2|} \right)^k$ für beliebiges $\sigma \in \mathbb{R}$ bei $k \rightarrow \infty$ gegen ∞ . Damit existiert ein $k_0(\sigma)$ mit

$$\left| \varphi_1^\sigma \left(\frac{\varphi_1}{|\varphi_2|} \right)^k - 1 \right| \geq \left(\sqrt{\frac{\varphi_1^\sigma}{|\varphi_2|}} \right)^k > 0, \text{ für } k \geq k_0(\sigma).$$

Insgesamt folgt in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
0 \leq |\zeta_{\{a\}}(s)| &\leq \alpha_1^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} \\
&= \alpha_1^{-\sigma} \left(\sum_{k=0}^{k_0(\sigma)-1} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} + \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} \right) \\
&\leq \alpha_1^{-\sigma} \left(\sum_{k=0}^{k_0(\sigma)-1} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} + \sum_{k=k_0(\sigma)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \left(\sqrt{\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1^{\sigma}}} \right)^k \right) \\
&\leq \alpha_1^{-\sigma} \left(\sum_{k=0}^{k_0(\sigma)-1} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \left(\sqrt{\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1^{\sigma}}} \right)^k \right) \\
&= \alpha_1^{-\sigma} \left(\sum_{k=0}^{k_0(\sigma)-1} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{|\varphi_2|^k}{|\varphi_1^{\sigma+k} - |\varphi_2|^k|} + \left(1 - \sqrt{\frac{|\varphi_2|}{\varphi_1^{\sigma}}} \right)^{-|s|} \right).
\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihendarstellung (32) für $\zeta_{\{a\}}$ in ganz \mathbb{C} - Singularitäten von f_k ausgenommen - absolut.

□

Völlig analog erhalten wir:

Hauptsatz 4.2.2:

Die charakteristischen Wurzeln φ_i der lineare Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$ genügen Ungl.(30) und für die Koeffizienten α_i gelte für $i, j \in J : 0 \neq \alpha_i = \alpha_j$. Dann besitzt das zugeordnete Element $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ eine analytische Fortsetzung zu einer in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} meromorphen Funktion.

□

Bemerkung:

Der Leser könnte bei dem Studium des Beweises von Hauptsatz 4.2.1 dem Eindruck verfallen sein, dass die Koeffizienten α_i der linearen Rekursion $\{a\}$ notwendigerweise Ungl.(29) erfüllen müssen, um der zugehörigen Zeta-Funktion $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ eine analytische Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene \mathbb{C} zu garantieren. Letztlich liefert diese Restriktion an die Koeffizienten von $\{a\}$ aber nur die Angabe der analytischen Fortsetzung in sehr kompakter Form. Insgesamt eröffnet uns schon die Eigenschaft von $\{a\}$ eine dominante Wurzel $\varphi_1 > 1$ zu besitzen, die Möglichkeit für die zugeordnete Zeta-Funktion $\zeta_{\{a\}}$ eine Reihendarstellung analog zur Reihendarstellung (32) abzuleiten. Allerdings besitzt diese bedeutend weniger Übersichtlichkeit. Darüberhinaus können wir die Positivität bzw. das Nichtverschwinden einzelner Glieder der linearen Rekursion $\{a\}$ nicht mehr garantieren.

4.3 Diskussion der Singularitäten

Wir bestimmen nun im Allgemeinen die Singularitäten der Funktion $\zeta_{\{a\}}$. Dazu bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(\zeta_{\{a\}})$ die Menge aller Singularitäten von $\zeta_{\{a\}}$ und unterscheiden zwischen dem komplexen Logarithmus **Log** und dem reellen **log**. Zunächst betrachten wir für $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen

$$f_k(s) = \alpha_1^{-(s+k)} \binom{-s}{k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta}.$$

Offensichtlich beschreibt dann die Menge

$$\mathfrak{P}(f_k) := \{s \in \mathbb{C}; \varphi_1^{s+k} = \varphi^\beta\}$$

alle Singularitäten von f_k , d.h. wenn wir die Elemente der Menge $\mathfrak{P}(f_k)$ bestimmen wollen, müssen wir die Gleichung

$$\varphi_1^{s+k} = \varphi^\beta \tag{33}$$

lösen. Gl.(33) besitzt für jeden Multiindex β mit Ordnung $|\beta| = k$ unendlich viele Lösungen, wobei von diesen wegen $(\varphi_1 > 1)$ keine reell ist, falls $\varphi^\beta < 0$. Wir lösen nun Gl.(33):

$$\varphi_1^{s+k} = e^{(s+k)\log(\varphi_1)} \stackrel{!}{=} \varphi^\beta.$$

Auf der rechten Seite müssen wir das Vorzeichen von φ^β beachten:

$$\begin{aligned} e^{(s+k)\log(\varphi_1)} &= e^{\text{Log}(\varphi^\beta)} \\ &= e^{\log(|\varphi|^\beta) + i \cdot \arg(\varphi^\beta) + m \cdot 2\pi i}, \end{aligned}$$

für $m \in \mathbb{Z}$. Also

$$s = -k + \frac{\log(|\varphi|^\beta) + i \cdot \arg(\varphi^\beta) + m \cdot 2\pi i}{\log(\varphi_1)} =: \rho_{k,m}(\beta).$$

Damit gilt

$$\mathfrak{P}(f_k) = \{\rho_{k,m}(\beta) \in \mathbb{C}; k \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}, |\beta| = k\}.$$

Folglich liegen die Singularitäten von f_k auf den Abszissen $\sigma = -k + \frac{\log(|\varphi|^\beta)}{\log \varphi_1}$ im Abstand $i \frac{2\pi + \arg(\varphi^\beta)}{\log \varphi_1}$. Substituieren wir in den Termen $\frac{1}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta}$ von f_k die Größe φ_1^{s+k} durch z , sehen wir schnell, dass f_k als Singularitäten nur einfache Pole in $\rho_{k,m}(\beta)$ besitzt. Außerdem gilt wegen $\zeta_{\{a\}} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$:

$$\mathfrak{P}(\zeta_{\{a\}}) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}(f_k).$$

Wir bestimmen nun das Residuum von $\zeta_{\{a\}}$ in der Polstelle $\rho_{k,m}(\tilde{\beta})$. Dazu bemerken wir zunächst, dass für $k \neq \tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathbb{N}_0$ die Funktionen f_k und $f_{\tilde{k}}$ gemeinsame Polstellen besitzen können (Siehe Lemma 4.3.2), ebenso müssen nicht alle Pole von f_k paarweise verschieden sein und können sogar übereinstimmen (Siehe Lemma 4.3.1).

O. B. d. A. seien also für beliebige $k \neq \tilde{k}$ die Polstellen von f_k und $f_{\tilde{k}}$, ebenso wie die Polstellen von f_k untereinander paarweise verschieden.

Wie wir später noch besprechen werden, liegt die Menge $\mathfrak{P}(\zeta_{\{a\}})$ als abzählbare Menge diskret in \mathbb{C} . Folglich können wir eine ganze Umgebung $\emptyset \neq U_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})}$ von $\rho_{k,m}(\tilde{\beta})$ finden, in der die Funktion

$$\zeta_{\{a\},k}(s) := \zeta_{\{a\}}(s) - f_k(s)$$

holomorph ist. Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun das Residuum von $\zeta_{\{a\}}$ in der Polstelle $\rho_{k,m}(\tilde{\beta})$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \zeta_{\{a\}}(s) &= \lim_{U_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \ni s \rightarrow \rho_{k,m}(\tilde{\beta})} (s - \rho_{k,m}(\tilde{\beta})) \zeta_{\{a\}}(s) \\ &= \lim_{U_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \ni s \rightarrow \rho_{k,m}(\tilde{\beta})} (s - \rho_{k,m}(\tilde{\beta})) (\zeta_{\{a\},k}(s) + f_k(s)) \\ &= \text{Res}_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} f_k(s) \\ &= \lim_{U_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \ni s \rightarrow \rho_{k,m}(\tilde{\beta})} (s - \rho_{k,m}(\tilde{\beta})) \alpha_1^{-(s+k)} \binom{-s}{k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta} \\ &= \lim_{U_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \ni s \rightarrow \rho_{k,m}(\tilde{\beta})} (s - \rho_{k,m}(\tilde{\beta})) \alpha_1^{-(s+k)} \binom{-s}{k} \binom{k}{\tilde{\beta}} \frac{(\alpha\varphi)^{\tilde{\beta}}}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^{\tilde{\beta}}} \\ &= \alpha_1^{-(\rho_{k,m}(\tilde{\beta})+k)} \binom{-\rho_{k,m}(\tilde{\beta})}{k} \binom{k}{\tilde{\beta}} \lim_{U_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \ni s \rightarrow \rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \frac{(\alpha\varphi)^{\tilde{\beta}}}{\frac{\varphi_1^{s+k} - \varphi^{\tilde{\beta}}}{s - \rho_{k,m}(\tilde{\beta})}} \end{aligned}$$

Wir erkennen im Nenner den Differenzenquotienten der Funktion $s \mapsto \varphi_1^{s+k}$, welcher für $s = \rho_{k,m}(\tilde{\beta})$ den Wert $\varphi_1^{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})+k} \log(\varphi_1)$ annimmt. Damit erhalten wir:

$$\text{Res}_{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})} \zeta_{\{a\}}(s) = \alpha_1^{-(\rho_{k,m}(\tilde{\beta})+k)} \binom{-\rho_{k,m}(\tilde{\beta})}{k} \binom{k}{\tilde{\beta}} \frac{(\alpha\varphi)^{\tilde{\beta}}}{\log(\varphi_1) \varphi_1^{\rho_{k,m}(\tilde{\beta})+k}}.$$

Wir werden nun die Polstellen $\rho_{k,m}(\beta)$ von f_k und die Polstellenmenge $\mathfrak{P}(\zeta_{\{a\}})$ von $\zeta_{\{a\}}$ genauer untersuchen.

Zunächst suchen wir nach einer Bedingung, unter der die Polstellen $\rho_{k,m}(\beta)$ von f_k alle verschieden sind. Dazu definieren wir zunächst für die beiden Multiindizes

$$\beta = (\beta_2, \beta_3, \dots, \beta_l), \tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_2, \tilde{\beta}_3, \dots, \tilde{\beta}_l) \in \mathbb{N}_0^{l-1} \text{ mit } |\beta| = |\tilde{\beta}| :$$

$$i^* := \min \left\{ i \in J \setminus \{1\}; \beta_i \neq \tilde{\beta}_i \right\}.$$

Aufschluss über das Verhalten der Polstellen von f_k liefert nun folgendes Lemma:

Lemma 4.3.1:

Seien $\beta, \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^{l-1}$ mit $|\beta| = |\tilde{\beta}| = k \in \mathbb{N}_0$ und $m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$. Gilt $\rho_{k,m}(\beta) = \rho_{k,\tilde{m}}(\tilde{\beta})$, dann folgt $m = \tilde{m}$ und es existieren für $j \in J \setminus \{1\}$, $j > i^*$ rationale Zahlen p_j mit $|p_j| \leq 2k$, sodass für die charakteristische Wurzel φ_{i^*} gilt:

$$|\varphi_{i^*}| = \prod_{\substack{j \in J \setminus \{1\} \\ j > i^*}} |\varphi_j|^{p_j}.$$

Beweis:

Wenn die beiden Polstellen $\rho_{k,m}(\beta)$, $\rho_{k,\tilde{m}}(\tilde{\beta})$ von f_k übereinstimmen, dann gilt

$$-k + \frac{\log |\varphi|^\beta + i \cdot \arg(\varphi^\beta) + m \cdot 2\pi i}{\log(\varphi_1)} = -k + \frac{\log |\varphi|^{\tilde{\beta}} + i \cdot \arg(\varphi^{\tilde{\beta}}) + \tilde{m} \cdot 2\pi i}{\log(\varphi_1)} \quad (34)$$

wobei auf beiden Seiten Real- und Imaginärteil gleich sein müssen. Wir betrachten zuerst den Imaginärteil, für welchen gelten muss:

$$\begin{aligned} \arg(\varphi^\beta) + m \cdot 2\pi &= \arg(\varphi^{\tilde{\beta}}) + \tilde{m} \cdot 2\pi \\ \Leftrightarrow \frac{\arg(\varphi^\beta) - \arg(\varphi^{\tilde{\beta}})}{2\pi} &= \tilde{m} - m. \end{aligned}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist dabei eine ganze Zahl und es gilt bekanntlich $0 \leq \arg(z) < 2 \cdot \pi$ für $z \in \mathbb{C}$. Wegen $-2\pi < \arg(\varphi^\beta) - \arg(\varphi^{\tilde{\beta}}) < 2\pi$ kann aber nur $\tilde{m} - m = 0$ gelten. Insbesondere erhalten wir $\arg(\varphi^\beta) = \arg(\varphi^{\tilde{\beta}})$.

Wir betrachten nun den Realteil beider Seiten, nachdem wir überflüssige Summanden und Faktoren gekürzt haben:

$$\log |\varphi|^\beta = \log |\varphi|^{\tilde{\beta}}.$$

Hierfür liefert uns nun die Injektivität des reellen Logarithmus:

$$|\varphi|^\beta = \prod_{j \in J \setminus \{1\}} |\varphi_j|^{\beta_j} = \prod_{j \in J \setminus \{1\}} |\varphi_j|^{\tilde{\beta}_j} = |\varphi|^{\tilde{\beta}}.$$

Wir verwenden nun unsere Notion von oben und erhalten

$$\prod_{\substack{j \in J \setminus \{1\} \\ j \geq i^*}} |\varphi_j|^{\beta_j} = \prod_{\substack{j \in J \setminus \{1\} \\ j \geq i^*}} |\varphi_j|^{\tilde{\beta}_j}.$$

Umstellen nach $|\varphi_{i^*}|$ liefert uns

$$|\varphi_{i^*}| = \prod_{\substack{j \in J \setminus \{1\} \\ j > i^*}} |\varphi_j|^{\frac{\tilde{\beta}_j - \beta_j}{\beta_{i^*} - \tilde{\beta}_{i^*}}} =: \prod_{\substack{j \in J \setminus \{1\} \\ j > i^*}} |\varphi_j|^{p_j}.$$

Offensichtlich gilt $|p_j| \leq 2k$ und damit ist die Behauptung bewiesen. Besitzen umgekehrt die charakteristischen Wurzeln φ_i , $i \in J \setminus \{1\}$ nicht obige Eigenschaft, dann kann für kein $k \in \mathbb{N}_0$ Gl.(34) erfüllt sein, d.h. f_k besitzt nur paarweise verschiedene Polstellen $\rho_{k,m}(\beta)$.

□

Offensichtlich gilt:

Korollar 4.3.1:

Für $i \in J \setminus \{1\}$ gelte $\varphi_i > 0$. Dann gilt auch die Umkehrung von Lemma 4.3.1.

□

Wir wollen nun kurz noch den Fall besprechen, in welchem alle Polstellen $\rho_{k,m}(\beta)$ der Funktion f_k übereinstimmen, also f_k nur einen einzigen Pol besitzt. Mit Gl.(34) erhalten wir:

$$|\varphi|^\beta = \prod_{i \in J \setminus \{1\}} |\varphi_i|^{\beta_i} = \text{konst. für alle } \beta \in \mathbb{N}_0^{l-1} \text{ mit } |\beta| = k.$$

Hierraus folgt sofort $|\varphi_2| = |\varphi_3| = \dots = |\varphi_l|$, d.h. falls wir nur diejenigen Elemente der Klasse ζ betrachten, deren charakteristische Wurzeln φ_i reell sind, liefert uns die Vielfachtheit $\sigma_i = 1$ von φ_i für die Ordnung l von $\{a\}$: $l \leq 3$, also $\varphi_2 = -\varphi_3$ für $l = 3$.

Betrachten wir dagegen auch komplexe charakteristische Wurzeln φ_i , $i \in J \setminus \{1\}$, so kann die Ordnung l beliebig groß werden, falls alle diese $l - 1$ charakteristischen Wurzeln auf derselben Kreislinie in \mathbb{C} liegen.

Nachdem wir nun wissen wann die Funktion f_k nur paarweise verschiedene Polstellen besitzt, wollen wir eine Bedingung finden, unter welcher die Funktion

$$\zeta_{\{a\}} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

nur paarweise verschieden Polstellen besitzt. Hierfür ergibt sich:

Lemma 4.3.2:

Seien $k, \tilde{k} \in \mathbb{N}_0$, mit $k \neq \tilde{k}$. Ist dann der Durchschnitt der beiden Polstellenmengen $\mathfrak{P}(f_k)$ und $\mathfrak{P}(f_{\tilde{k}})$ nicht leer, so existieren rationale Zahlen p_2, \dots, p_l , mit

$$\sum_{i=2}^l p_i = 1 \text{ und } \sum_{i \in J \setminus \{1\}} p_i \frac{\log |\varphi_i|}{\log(\varphi_1)} = 1.$$

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert ein $\rho_{k,m}(\beta) \in \mathfrak{P}(f_k) \cap \mathfrak{P}(f_{\tilde{k}})$. Folglich besitzt die Polstelle $\rho_{k,m}(\beta)$ zwei unterschiedliche Darstellungen

$$-k + \frac{\log |\varphi|^\beta + i \cdot \arg(\varphi^\beta) + m \cdot 2\pi i}{\log(\varphi_1)} = -\tilde{k} + \frac{\log |\varphi|^{\tilde{\beta}} + i \cdot \arg(\varphi^{\tilde{\beta}}) + \tilde{m} \cdot 2\pi i}{\log(\varphi_1)}, \quad (35)$$

und auf beiden Seiten von Gl.(35) müssen Real- und Imaginärteil übereinstimmen. Analog zu Lemma 4.3.1 folgt wieder $m = \tilde{m}$. Für den Realteil erhalten wir:

$$\begin{aligned} -k + \frac{\log |\varphi|^\beta}{\log(\varphi_1)} &= -\tilde{k} + \frac{\log |\varphi|^{\tilde{\beta}}}{\log(\varphi_1)} \\ \Leftrightarrow \tilde{k} - k &= \frac{\log |\varphi|^{\tilde{\beta}} - \log |\varphi|^\beta}{\log(\varphi_1)}. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Rechengesetze für den Logarithmus liefert uns:

$$\begin{aligned} \log \prod_{i \in J \setminus \{1\}} |\varphi_i|^{\tilde{\beta}_i - \beta_i} &= \sum_{i \in J \setminus \{1\}} (\tilde{\beta}_i - \beta_i) \log |\varphi_i| = (\tilde{k} - k) \log(\varphi_1) \\ \Leftrightarrow \sum_{i \in J \setminus \{1\}} \frac{\tilde{\beta}_i - \beta_i}{\tilde{k} - k} \frac{\log |\varphi_i|}{\log \varphi_1} &= 1. \end{aligned}$$

Definieren wir noch für $2 \leq i \leq l$

$$p_i := \frac{\tilde{\beta}_i - \beta_i}{\tilde{k} - k},$$

so sehen wir schnell, dass auch $\sum_{i=2}^l p_i = 1$ erfüllt ist.

□

Wieder sehen wir:

Korollar 4.3.2:

Für $i \in J \setminus \{1\}$ gelte $\varphi_i > 0$. Dann gilt auch die Umkehrung von Lemma 4.3.2.

□

Wir beschließen nun diesen Unterabschnitt, indem wir noch die maximale Anzahl aller reellen Polstellen von f_k - welche wir mit $\tilde{\mathfrak{P}}(f_k)$ bezeichnen - bestimmen. Dafür müssen wir die Anzahl der Multiindizes $\beta, |\beta| = k$ berechnen. Hierfür benötigen wir:

Lemma 4.3.3:

Für $k, l, m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- a) $\sum_{\tau=0}^n \binom{m+\tau}{k} = \binom{m+n+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$.
b) $\sum_{\tau=0}^n \binom{n-\tau+m}{m}(\tau+1) = \binom{n+m+2}{m+2}$.

Beweis:

Jeweils durch vollständige Induktion:

a)

(IA): Sei $n=0$, dann gilt: $\sum_{\tau=0}^0 \binom{m+\tau}{k} = \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1} - \binom{m}{k+1}$.

(IV): Die Aussage sei nun bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(IS): Schluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{n+1} \binom{m+\tau}{k} &= \sum_{\tau=0}^n \binom{m+\tau}{k} + \binom{m+n+1}{k} \\ &\stackrel{(IV)}{=} \binom{m+n+1}{k+1} - \binom{m}{k+1} + \binom{m+n+1}{k} \\ &= \binom{m+n+2}{k+1} - \binom{m}{k+1}. \end{aligned}$$

b)

(IA): Sei $n=0$, dann ist die Aussage offensichtlich erfüllt.

(IV): Die Aussage sei nun bereits für ein $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(IS): Schluss von n auf $n+1$:

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{n+1} \binom{n+1-\tau+m}{m}(\tau+1) &= \sum_{\tau=0}^{n+1} \left(\binom{n-\tau+m}{m} + \binom{n-\tau+m}{m-1} \right) (\tau+1) \\ &= \binom{n+m+2}{m+2} + \sum_{\tau=1}^{n+1} \binom{n-\tau+m}{m-1}(\tau+1) + \binom{n+m}{m-1} \\ &= \binom{n+m+2}{m+2} + \sum_{\tau=0}^n \binom{n-\tau+m-1}{m-1}(\tau+2) + \\ &\quad + \binom{n+m}{m-1} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{(IV)}}{=} \binom{n+m+2}{m+2} + \binom{n+m+1}{m+1} + \sum_{\tau=0}^n \binom{n-\tau+m-1}{m-1} + \binom{n+m}{m-1}.$$

Aus **a)** erhalten wir

$$\sum_{\tau=0}^n \binom{n-\tau+m-1}{m-1} = \binom{m+n}{m} - \underbrace{\binom{m-1}{m}}_{=0}.$$

Das setzen wir nun wieder ein und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=0}^{n+1} \binom{n+1-\tau+m}{m} (\tau+1) &= \binom{n+m+2}{m+2} + \binom{n+m+1}{m+1} + \binom{m+n}{m} + \binom{n+m}{m-1} \\ &= \binom{n+m+2}{m+2} + \binom{n+m+1}{m+1} + \binom{m+n+1}{m} \\ &= \binom{n+m+2}{m+2} + \binom{n+m+2}{m+1} \\ &= \binom{(n+1)+m+2}{m+2}. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.3.4:

Seien n, m, α wie im Multinomialsatz (s. Anhang). Dann gilt für die Anzahl $\mathfrak{A}_{m,n}(\alpha)$ aller Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit Ordnung n :

$$\mathfrak{A}_{m,n}(\alpha) = \binom{n+m-1}{m-1}.$$

Beweis:

Wir werden die Aussage durch Induktion nach m beweisen:

(IA): Sei $m = 1$. Dann gilt offensichtlich $\mathfrak{A}_{1,n}(\alpha) = 1$.

(IV): Die Behauptung sei nun für ein beliebiges $m < n$ bewiesen.

(IS): Wir ordnen nun die m -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m, |\alpha| = n$, nach der Größe von α_m . Jedes $m+1$ -Tupel $(\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{m+1}) \in \mathbb{N}_0^{m+1}, |\tilde{\alpha}| = n$ entsteht dabei aus einem m -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$, indem wir die Zahl α_m als Summe der Zahlen $\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ darstellen. Nach **(IV)** können wir die Zahl α_m auf genau

$$\mathfrak{A}_{2,\alpha_m}(\alpha) = \binom{\alpha_m+1}{1} = \alpha_m + 1$$

Weisen als Summe zweier Zahlen $\tilde{\alpha}_m, \tilde{\alpha}_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ darstellen. Da die Zahl α_m nach (IV) bei genau $\mathfrak{A}_{m-1, n-\alpha_m}(\alpha)$ -Tupeln an letzter Stelle steht, entstehen aus jedem α_m insgesamt $\mathfrak{A}_{2, \alpha_m}(\alpha) \mathfrak{A}_{m-1, n-\alpha_m}(\alpha)$ neue Tupel.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{m+1, n}(\alpha) &= \sum_{\alpha_m=0}^n \mathfrak{A}_{2, \alpha_m}(\alpha) \mathfrak{A}_{m-1, n-\alpha_m}(\alpha) \\ &= \sum_{\alpha_m=0}^n (\alpha_m + 1) \binom{n - \alpha_m + m - 2}{m - 2}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 4.3.3 b) erhalten wir schließlich:

$$\mathfrak{A}_{m+1, n}(\alpha) = \binom{n + m}{m}.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. □

Als Folgerung ergibt sich:

Korollar 4.3.3:

Die Menge $\tilde{\mathfrak{P}}(f_k)$ der reellen Polstellen von f_k enthält höchstens $\mathfrak{A}_{l-1, k}(\beta)$ Elemente. □

Um der Vollständigkeit ihren Willen zu lassen, zeigen wir noch:

Korollar 4.3.4:

Die Menge der Polstellen von $\zeta_{\{a\}}$ ist abzählbar.

Beweis:

Offensichtlich ist die Menge $\tilde{\mathfrak{P}}(\zeta_{\{a\}})$ der reellen Polstellen von $\zeta_{\{a\}}$ Teilmenge der abzählbaren Vereinigung der abzählbaren Mengen $\tilde{\mathfrak{P}}(f_k)$, also selbst wieder abzählbar. Die Menge $\mathfrak{P}(\zeta_{\{a\}})$ ist dann als kartesisches Produkt zweier abzählbarer Mengen abzählbar. □

Damit haben wir nun bewiesen, dass jedes Element $\zeta_{\{a\}}$ der Klasse ζ , wobei die Koeffizienten der linearen Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$ der Ungl.(29) genügen, eine meromorphe Fortsetzung in die gesamte komplexe Ebene \mathbb{C} besitzt.

Für den Fall, dass die Mächtigkeit der Menge der reellen Polstellen $\tilde{\mathfrak{P}}(\zeta_{\{a\}})$ von $\zeta_{\{a\}}$ maximal ist, wollen wir noch eine explizite Bijektion

$$\tilde{\mathfrak{P}}(\zeta_{\{a\}}) \rightarrow \mathbb{N}$$

angeben. Dazu kennzeichnen wir vorübergehend die reellen Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$ von f_k mit einem weiteren Index um die Abzählbarkeit der Menge $\tilde{\mathfrak{P}}(f_k)$ zu suggerieren:

$$\tilde{\mathfrak{P}}(f_k) = \{\rho_{k,0}^j(\beta); 1 \leq j \leq \mathfrak{A}_{l-1,k}(\beta)\}.$$

Nun werden wir beweisen, dass die rekursive Folge

$$\psi : \begin{cases} \tilde{\mathfrak{P}}(\zeta_{\{a\}}) & \rightarrow & \mathbb{N} \\ \rho_{k,0}^j(\beta) & \rightarrow & \psi(\rho_{k,0}^j(\beta)) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \\ \sum_{n=1}^k \psi(\rho_{n,0}^{\mathfrak{A}_{l-1,n-1}}(\beta)) + j & \text{für } k \geq 1, 1 \leq j \leq \mathfrak{A}_{l-1,k}. \end{cases} \end{cases}$$

die Menge der reellen Polstellen von ζ_a - unter den oben genannten Bedingungen an die charakteristischen Wurzeln - bijektiv auf die natürlichen Zahlen \mathbb{N} abbildet:

Injektivität:

Offensichtlich gilt $\psi(\rho_{k,0}^{j+1}(\beta)) > \psi(\rho_{k,0}^j(\beta))$. Damit ist ψ streng monoton wachsend und insbesondere injektiv.

Surjektivität:

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann existiert $k^* := \max\{k \in \mathbb{N}_0; \sum_{n=1}^k \psi(\rho_{n,0}^{\mathfrak{A}_{l-1,n-1}}(\beta)) < n_0\}$ und es gilt $k_0 = \psi(\rho_{k^*,0}^j(\beta))$ für ein $1 \leq j \leq \mathfrak{A}_{l-1,k^*}$. Damit ist ψ bijektiv und folglich $\tilde{\mathfrak{P}}(\zeta_{\{a\}})$ abzählbar.

4.3.1 Konstruktion von Elementen $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ mit regelmäßigem Polverhalten auf der reellen Achse

In diesem Abschnitt werden wir an die charakteristischen Wurzeln $\varphi_2, \dots, \varphi_l$ der linearen Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{C}^l$ Bedingungen stellen, welche der zugeordneten Funktion $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ in den Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$ ein regelmäßiges Verhalten garantiert. Dazu fordern wir, dass $\zeta_{\{a\}}$ auf der reellen Achse nur reelle Werte annimmt. Dies erreichen wir, indem wir nur reelle charakteristischen Wurzeln $\varphi_i, i \in J \setminus \{1\}$ betrachten. Außerdem setzen wir voraus, dass $\zeta_{\{a\}}$ nur paarweise verschiedene Polstellen besitzt (Siehe Lemma 4.3.1 und Lemma 4.3.2). Zunächst studieren wir wieder das Verhalten von

$$f_k = \alpha_1^{-(s+k)} \binom{-s}{k} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{(\alpha\varphi)^\beta}{\varphi_1^{s+k} - \varphi^\beta}$$

in den reellen Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$.

Nachdem diejenigen Multiindizes $\beta \in \mathbb{N}_0^{l-1}$ mit $\text{sign}(\varphi^\beta)^5 < 0$ keine reellen Polstellen liefern, seien alle charakteristischen Wurzeln $\varphi_i, i \in J \setminus \{1\}$ von $\zeta_{\{a\}}$ der Einfachheit halber

⁵Mit sign bezeichnen wir die Signumsfunktion, also $\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

positiv. Wir betrachten also in diesem Abschnitt nur diejenigen Elemente $\zeta_{\{a\}}$ der Klasse ζ , deren reelle Polstellen die Form

$$\rho_{k,0}(\beta) = -k + \frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)}$$

besitzen. Als erstes untersuchen wir das Vorzeichen des Binomalkoeffizienten $\binom{-s}{k}$ in den Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$:

Lemma 4.3.5:

- a) Genau dann gilt $\text{sign}\left(\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k}\right) > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, wenn alle charakteristischen Wurzeln φ_i , $i \in J \setminus \{1\}$, $\varphi_i \leq 1$ erfüllen.
- b) Die Gleichung $\text{sign}\left(\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k}\right) = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, kann nicht gleichzeitig für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt sein.
- c) $\text{sign}\left(\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k}\right) < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist unerfüllbar.

Beweis:

a), „ \Leftarrow “ Nach Voraussetzung gilt $0 < \varphi_i \leq 1$, $i \in J \setminus \{1\}$. Angenommen es existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\text{sign}\left(\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k}\right) < 0$, also

$$\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{-\rho_{k,0}(\beta) + 1 - j}{j} = \prod_{j=1}^k \frac{k - \frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)} + 1 - j}{j} < 0,$$

dann existiert mindestens ein Index $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ mit

$$k - \frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)} + 1 - j < 0.$$

Wir lösen die letzte Beziehung nach φ_1 auf und erhalten

$$\varphi_1^{k+1-j} < \varphi^\beta. \quad (36)$$

Ungl.(36) muss dann für jeden Multiindex $\beta \in N_0^{l-1}$ mit $|\beta| = k$ erfüllt sein. Folglich wäre auch $\varphi_1^{k+1-j} < \varphi_i^k$, $i \in J \setminus \{1\}$. Wegen $\varphi_1 > 1$ ist diese Ungleichung aber unerfüllbar.

„ \Rightarrow “ Nach Voraussetzung gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\text{sign}\left(\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k}\right) = \prod_{j=1}^k \frac{-\rho_{k,0}(\beta) + 1 - j}{j} > 0.$$

Nachdem sich jeder Faktor

$$\frac{-\rho_{k,0}(\beta) + 1 - j}{j}$$

des Binomialkoeffizienten durch

$$\frac{-\rho_{k,0}(\beta) + 1 - j}{j} = \frac{\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{j}}{\binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{j-1}},$$

ausdrücken läßt, kann keiner der Faktoren negativ sein. Damit gilt:

$$\frac{-\rho_{k,0}(\beta) + 1 - j}{j} = \frac{k - \frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)} + 1 - j}{j} \geq 0. \quad (37)$$

Wir sortieren Ungl.(37) und erhalten

$$k + 1 - j \geq \frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)}. \quad (38)$$

Die rechte Seite von Ungl.(38) ist für festgewähltes $\beta \in \mathbb{N}_0^{l-1}$ konstant, folglich muss für jeden Multiindex β mit $|\beta| = k$ gelten:

$$\frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)} \leq 1.$$

Insbesondere erhalten wir

$$\log(\varphi_i) \leq \frac{\log(\varphi_1)}{k},$$

für $i \in J \setminus \{1\}$, was aber nur für $\varphi_i \leq 1$ möglich ist.

b) Nach Voraussetzung gilt

$$\text{sign} \binom{-\rho_{k,0}(\beta)}{k} = (-1)^k,$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist jeder Faktor des Binomialkoeffizienten negativ:

$$\frac{k - \frac{\log(\varphi^\beta)}{\log(\varphi_1)} + 1 - j}{j} < 0, \text{ für } 1 \leq j \leq k. \quad (39)$$

Aus Ungl.(39) folgt sofort, dass $\log(\varphi_1^k) < \log(\varphi^\beta)$ gelten muss. Ein Widerspruch zur Definition der Klasse ζ , nach der $|\varphi_i| < \varphi_1$, für $i \in J \setminus \{1\}$ gilt.

c) Gilt trivialerweise wegen $\rho_{0,0}(\beta) = 0$ und $\binom{0}{0} = 1$.

□

Nachdem der Binomialkoeffizient nur für $\varphi_i \leq 1, i \in J \setminus \{1\}$ keinen Einfluss auf das Verhalten von f_k in den Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$ besitzt, betrachten wir im Folgenden auch nur charakteristische Wurzeln $\varphi_i \leq 1, i \in J \setminus \{1\}$. Dann kann nur noch der Term $(\alpha\varphi)^\beta$ das Vorzeichen von f_k in den Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$ beeinflussen, da

$$\lim_{\sigma \nearrow \rho_{k,0}(\beta)} \alpha_1^{-(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{1}{\varphi_1^{\sigma+k} - \varphi^\beta} = -\infty,$$

und

$$\lim_{\sigma \searrow \rho_{k,0}(\beta)} \alpha_1^{-(s+k)} \sum_{|\beta|=k} \binom{k}{\beta} \frac{1}{\varphi_1^{\sigma+k} - \varphi^\beta} = +\infty.$$

für alle Polstellen von f_k gilt. Insgesamt sind zwei Fälle eines regelmäßigen Polverhaltens von f_k möglich:

Fall I:

Die Funktion f_k besitzt an jedem Pol $\rho_{k,0}(\beta)$ den gleichen Vorzeichenwechsel.

Folglich darf sich das Vorzeichen des Terms $(\alpha\varphi)^\beta$ für $\beta \in \mathbb{N}_0^{l-1}, |\beta| = k$ nicht ändern:

$$\text{sign}(\alpha\varphi)^\beta = \text{konst.}, \text{ für alle } \beta \in \mathbb{N}_0^{l-1} \text{ mit } |\beta| = k.$$

Die letzte Gleichung impliziert:

$$\text{sign}(\alpha_2\varphi_2)^k = \text{sign}(\alpha_3\varphi_3)^k = \dots = \text{sign}(\alpha_l\varphi_l)^k.$$

Wir prüfen nun nach, ob das Vorzeichen von $(\alpha\varphi)^\beta$ für $|\beta| = k$, unter der Voraussetzung

$$\text{sign}(\alpha_2\varphi_2) = \text{sign}(\alpha_3\varphi_3) = \dots = \text{sign}(\alpha_l\varphi_l),$$

konstant bleibt. Sei also $\beta \in \mathbb{N}_0^{l-1}$ mit $|\beta| = k$ beliebig, dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\alpha\varphi)^\beta &= \text{sign} \left(\prod_{i \in J \setminus \{1\}} (\alpha_i \varphi_i)^{\beta_i} \right) = \prod_{i \in J \setminus \{1\}} \text{sign}(\alpha_i \varphi_i)^{\beta_i} \\ &= \prod_{i \in J \setminus \{1\}} (\text{sign}(\alpha_i \varphi_i))^{\beta_i} = \prod_{i \in J \setminus \{1\}} (\text{sign}(\alpha_2 \varphi_2))^{\beta_i} = (\text{sign}(\alpha_2 \varphi_2))^k. \end{aligned}$$

Also ist das Vorzeichen von $(\alpha\varphi)^\beta$ für $|\beta| = k$ tatsächlich konstant und f_k besitzt damit in allen reellen Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$ den gleichen Vorzeichenwechsel.

Gilt nun $\text{sign}(\alpha_i \varphi_i) > 0, i \in J \setminus \{1\}$, so besitzt $\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(s)$ in allen reellen Polstellen den gleichen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, also ein regelmäßiges Polverhalten.

Fall II:

Die Funktion f_k wechselt in jeder Polstelle $\rho_{k,0}(\beta)$ ihr Vorzeichen.

Dieser Fall ist von vornherein schwieriger zu konstruieren als **Fall I**. Offensichtlich besteht das Problem bei dieser Konstruktion darin, die Polstellen $\rho_{k,0}(\beta)$ der Größe nach zu ordnen. Für die Anordnung der Polstellen suchen wir zunächst nach einer Bedingung, unter welcher auf der reellen Achse - vom Ursprung aus gesehen - vor den Polstellen von f_{k+1} die Polstellen von f_k liegen, also die Ungleichung $\rho_{k+1,0}(\tilde{\beta}) < \rho_{k,0}(\beta)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Dabei ist die Polstelle $\rho_{k,0}(\beta)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^{l-1}$ mit $\beta = (0, 0, \dots, 0, k)$ von f_k am weitesten vom Ursprung entfernt, während die Polstelle $\rho_{k+1,0}(\tilde{\beta})$, $\tilde{\beta} \in \mathbb{N}_0^{l-1}$ mit $\tilde{\beta} = (k+1, 0, \dots, 0)$ von f_{k+1} am nächsten am Ursprung liegt. Folglich muss gelten:

$$-(k+1) + \frac{\log(\varphi_2^{k+1})}{\log(\varphi_1)} < -k + \frac{\log(\varphi_l^k)}{\log(\varphi_1)}$$

Durch Umformen erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{\log(\varphi_2^{k+1})}{\log(\varphi_1)} - \frac{\log(\varphi_l^k)}{\log(\varphi_1)} < 1 \\ \Leftrightarrow & (k+1) \log(\varphi_2) - k \log(\varphi_l) < \log(\varphi_1), \end{aligned}$$

was uns schließlich zu der Ungleichung

$$k \cdot \log\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_l}\right) < \log\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) \quad (40)$$

führt. Wegen $0 < \varphi_2 \leq 1$, ist die rechte Seite von Ungl.(40) stets positiv. Damit muss gelten:

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_l} \leq 1,$$

also $\varphi_2 \leq \varphi_l$. Gemäß der Definition der Klasse ζ gilt dann $l = 2$ in Gl.(19). Also ist in unserem Fall eine Konstruktion einer Funktion $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$, deren Polverhalten **Fall II** erfüllt, nur für lineare Rekursionen $\{a\} \in \mathfrak{C}^2$ möglich. Folglich erfüllen unter oben genannten Bedingungen nur diejenigen Funktionen $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ das regelmäßige Polverhalten aus **Fall II**, welche die Gestalt

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \alpha_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{(\alpha_2 \varphi_2)^k}{\varphi_1^{s+k} - \varphi_2^k}$$

mit $\alpha_2 \varphi_2 < 0$, $|\alpha_2| \leq \alpha_1$ und $0 < \varphi_2 \leq 1$ besitzen.

4.4 Das Verhalten der Elemente der Klasse ζ in der rechten Halbebene

Wir wollen nun kurz noch das Verhalten der Elemente der Klasse ζ auf der rechten Seite der Konvergenzabszisse diskutieren. Allgemein gilt für Dirichlet-Reihen (Vgl. [1] 11 S. 227.V):

Satz 4.4.1:

Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ eine Dirichlet-Reihe, die nicht identisch verschwindet. Dann existiert eine Halbebene \mathbb{H}_σ , $\sigma > \sigma_0$, in der f keine Nullstelle besitzt.

Beweis:

Angenommen es existiert keine solche Halbebene \mathbb{H}_σ , dann kann man in jeder vorgegebenen Halbebene $\mathbb{H}_\sigma \subseteq \mathbb{H}_{\sigma_0}$ eine Nullstelle von f finden und folglich existiert eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $f(s_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = +\infty.$$

Im Widerspruch zu Satz 2.2.4, nach dem f in jeder Winkel-Ebene $W(s_0, \alpha)$ nur endlich viele Nullstellen besitzen kann. □

In der rechten Halbebene \mathbb{H}_0 besitzt $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ die Darstellung

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s},$$

wobei a_n durch die Rekursion

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_l a_{n-l},$$

aus Gl.(19) festgelegt ist. Nachdem a_n streng monoton wächst, können wir folgendermaßen abschätzen:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_l a_{n-l} < a_{n-1} \sum_{k=1}^l c_k < a_{n-2} \left(\sum_{k=1}^l c_k \right)^2.$$

Induktiv erhalten wir:

$$a_n < a_{l+1} \left(\sum_{k=1}^l c_k \right)^{n-(l+1)} < \max_{1 \leq j \leq l} a_j \left(\sum_{k=1}^l c_k \right)^{n-l}.$$

Aus der strengen Monotonie der Folge $\{a\}$ folgt sofort, dass $\sum_{k=1}^l c_k > 1$ gelten muss. Damit können wir $\zeta_{\{a\}}$ auf der positiven reellen Achse nach unten abschätzen:

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(\sigma) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\sigma} > \left(\max_{1 \leq j \leq l} a_j \right)^{-\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^l c_k \right)^{-\sigma(n-l)} \\ &= \left(\max_{1 \leq j \leq l} a_j \left(\sum_{k=1}^l c_k \right)^{-l} \right)^{-\sigma} \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^l c_k \right)^{\sigma} - 1}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann $\zeta_{\{a\}}$ auf der positiven reellen Achse nicht verschwinden. Zusammenfassend wissen wir nun, dass $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ eine nullstellen-freie Halbebene $\mathbb{H}_\sigma \subset \mathbb{H}_0$ besitzt und auf der positiven reellen Achse nicht verschwindet. Wir erhalten sogar:

Lemma 4.4.1:

Sei $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$. Dann besitzt $\zeta_{\{a\}}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$ keine Nullstelle.

Beweis:

In der rechten Halbebene \mathbb{H}_0 besitzt $\zeta_{\{a\}}$ die Darstellung

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s},$$

und ist als gleichmäßiger Limes einer holomorphen Funktionenfolge nach einem Satz von Weierstraß (s. Anhang) holomorph. Damit besitzt jedes $s \in \mathbb{H}_0$ eine ganz innerhalb \mathbb{H}_0 gelegene Umgebung, in der sich $\zeta_{\{a\}}$ in eine konvergente Taylor-Reihe entwickeln lässt. Wir nehmen nun an, dass $\zeta_{\{a\}}$ in $s^* = \sigma^* + i\tau^* \in \mathbb{H}_0$ eine Nullstelle besitzt und betrachten die Taylorentwicklung mit Radius $R > 0$ in einer Umgebung von s^* :

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta_{\{a\}}^{(k)}(s^*)}{k!} (s - s^*)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_{\{a\}}^{(k)}(s^*)}{k!} (s - s^*)^k. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist dann auch die Funktion

$$\xi_{\{a\}}(s) := \frac{\zeta_{\{a\}}(s)}{s - s^*}$$

in $s = s^*$ holomorph und besitzt für $|s - s^*| < R$ die Potenzreihendarstellung

$$\begin{aligned} \xi_{\{a\}}(s) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_{\{a\}}^{(k)}(s^*)}{k!} (s - s^*)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-\log a_n)^k a_n^{-s^*}}{k!} (s - s^*)^{k-1}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die Doppelsummen-Darstellung von $\xi_{\{a\}}$ absolut konvergiert. Dazu

sei $0 < r < R$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ und $s = s^* + re^{i\varphi}$. Wegen $a_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-\log a_n)^k a_n^{-s^*}}{k!} (s - s^*)^{k-1} \right| &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log a_n)^k a_n^{-\sigma^*}}{k!} r^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta_{\{a\}}^{(k)}(\sigma^*)|}{k!} r^{k-1} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\zeta_{\{a\}}^{(k)}(\sigma^*)|}{(k-1)!} r^{k-1}. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Taylorentwicklung von $\zeta_{\{a\}}$ im Punkt σ^* , welche den Konvergenzradius R_1 besitze. Dann gilt für $|s - \sigma^*| < R_1$:

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_{\{a\}}^{(k)}(\sigma^*)}{k!} (s - \sigma^*)^k.$$

Nachdem Potenz-Reihen innerhalb ihres Konvergenzkreises gliedweise differenziert werden dürfen, erhalten wir:

$$\zeta'_{\{a\}}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta_{\{a\}}^{(k)}(\sigma^*)}{(k-1)!} (s - \sigma^*)^{k-1}.$$

Dieser Ausdruck konvergiert aber für $|s - \sigma^*| < R_1$ absolut, folglich konvergiert auch die Doppelsummen-Darstellung von ξ_a für $r \leq \min\{R, R_1\}$ absolut, und wir dürfen nach dem Doppelreihensatz die Summations-Reihenfolge vertauschen.

$$\begin{aligned} \xi_{\{a\}}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log a_n)^k a_n^{-s^*}}{k!} (s - s^*)^{k-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s - s^*} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-\log a_n (s - s^*))^k}{k!} a_n^{-s^*} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(s-s^*)\log a_n} - 1}{s - s^*} a_n^{-s^*} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{-s} - a_n^{-s^*}}{s - s^*} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{-s}}{s - s^*}. \end{aligned}$$

Folglich konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{-s}}{s - s^*}$$

für $|s - s^*| \leq r < \min\{R, R_1\}$ absolut. Setzen wir $s = s^* + re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi[$, dann ist der Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n^{-s}}{s - s^*} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{-(\sigma^* + r \cos \varphi)}}{r}$$

beschränkt. Insbesondere muss auch für jede Nullfolge $r_k, k \in \mathbb{N}$, der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{-\sigma^* + r_k \cos \varphi}}{r_k}$$

existieren. Da innerhalb der Summe nur positive Terme stehen, kann der Grenzwert nur dann existieren, wenn $\zeta_{\{a\}}$ in σ^* eine Nullstelle besitzt. Das kann aber nicht sein. □

Nachdem wir in unserem Beweis an keiner Stelle verwendet haben, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch eine lineare Rekursion festgelegt ist können wir sogar noch allgemeiner formulieren:

Satz 4.4.2:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 1$ für alle n . Dann besitzt die Dirichlet-Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-s}$$

für $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ keine Nullstelle. □

4.5 Anmerkungen

In diesem Unterabschnitt wollen wir noch kurz auf einige Besonderheiten der von Navas in [11] diskutierten Fibonacci Zeta-Funktion $\zeta_{\{F\}}$ eingehen und so versuchen ihre vorrangige Stellung unter den Elementen der Klasse ζ hervorzuheben.

4.5.1 Über die trivialen Nullstellen der Fibonacci Zeta-Funktion

Leider konnten wir in dieser Arbeit die trivialen Nullstellen⁶ der Reihendarstellung (32) von $\zeta_{\{a\}}$ nicht explizit bestimmen. Der große Unterschied zwischen $\zeta_{\{a\}}$ und der in [11] diskutierten Fibonacci Zeta-Funktion $\zeta_{\{F\}}$ besteht darin, dass die trivialen Nullstellen von $\zeta_{\{F\}}$ äquidistant verteilt sind, während der allgemeine Fall $\zeta_{\{a\}}$ weder Nullstellen zwischen seinen reellen Polstellen besitzen muss, noch gewährleistet ist, dass diese äquidistant verteilt sind. Hierfür begnügen wir uns mit der Angabe von zwei Beispielen:

⁶In [11] bezeichnet Navas die reellen Nullstellen von $\zeta_{\{F\}}$ als trivial.

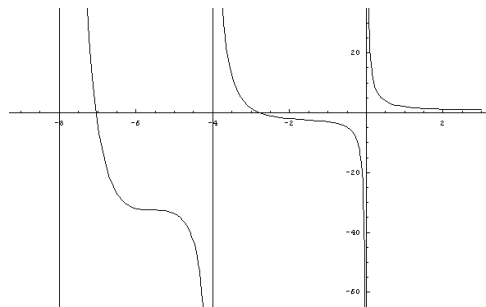
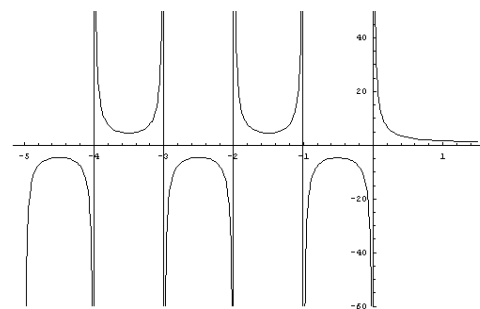
Abbildung 1: Die ersten 100 Glieder der Lucas Zeta-Funktion $\zeta_{\{L\}}$ auf der reellen Achse.Abbildung 2: Die ersten 100 Glieder einer Zeta-Funktion $\zeta_{\{a\}}$ die keine Nullstellen zwischen ihren Polstellen zu besitzen braucht.

Abbildung 1: Die Lucas Zeta-Funktion

$$\zeta_{\{L\}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{-s},$$

bei der die Folge $\{L\}$ der Lucas-Zahlen durch die lineare Rekursion

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n, \\ L_1 &= 1, L_2 = 2 \end{aligned}$$

festgelegt wird, besitzt die in ganz \mathbb{C} - Singularitäten ausgenommen - meromorphe Fortsetzung

$$\zeta_{\{L\}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{(-1)^k}{\varphi_1^{s+2k} + (-1)^{k+1}}, \quad \varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Wir haben hier die Berechnung nach dem 100-sten Glied abgebrochen.

Abbildung 2: Diese Zeta-Funktion besitzt die in ganz \mathbb{C} - Singularitäten ausgenommen - meromorphe Fortsetzung

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{(-1)^k}{2^{s+k} - 1},$$

und ist der durch die lineare Rekursion

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} - 2a_n \\ a_1 &= 1, a_2 = 3 \end{aligned}$$

festgelegten Folge $\{a\}$ zugeordnet.

Es drängt sich uns daher die Frage auf, warum die trivialen Nullstellen von $\zeta_{\{F\}}$ äquidistant verteilt sind. Dazu betrachten wir für $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $\varphi > 1$ folgende Schar von Binomialreihen:

$$B_{\varphi, n, m}(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi^{s-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}}. \quad (41)$$

Zunächst zeigen wir, dass $B_{\varphi, n, m}$ sinnvoll definiert ist:

Lemma 4.5.1:

Die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi, n, m}(s)$ konvergiert in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} - ausgenommen ihrer Singularitäten - absolut.

Beweis:

Mit der umgekehrten Dreiecksungleichung und der Abschätzung des komplexen Binomialkoeffizienten von Seite 44 erhalten wir:

$$|B_{\varphi, n, m}(s)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{1}{|\varphi^{\sigma-n(2m+1)+k(n+2)} - 1|}.$$

Nachdem $\varphi > 1$, existiert ein $k_0(\sigma, n, m) \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\varphi^{\sigma-n(2m+1)+k(n+2)} - 1 \geq \varphi^{\sigma+k},$$

für $k \geq k_0(\sigma, n, m)$. Wir schätzen nun obige Summe für $k \geq k_0(\sigma, n, m)$ ab:

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0(\sigma, n, m)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \frac{1}{|\varphi^{\sigma-n(2m+1)+k(n+2)} - 1|} &\leq \sum_{k=k_0(\sigma, n, m)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \varphi^{-(\sigma+k)} \\ &= \varphi^{-\sigma} \sum_{k=k_0(\sigma, n, m)}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \varphi^{-k} \\ &< \varphi^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-|s|}{k} \varphi^{-k} \\ &= \varphi^{-\sigma} \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right)^{-|s|} < \infty. \end{aligned}$$

Damit konvergiert die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi,n,m}(s)$ in jeder Teilmenge von \mathbb{C} , die keine ihrer Singularitäten enthält, absolut.

□

Desweiteren besitzen $B_{\varphi,n,m}$ und $\zeta_{\{F\}}$ mindestens eine gemeinsame Nullstelle:

Lemma 4.5.2:

Die durch (41) definierte Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi,n,m}$ besitzt unabhängig von $n \in \mathbb{N}_0$ und φ eine Nullstelle in $s = s_m = -(4m + 2)$, $m \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Die Vorgehensweise erfolgt vollkommen analog zu der Bestimmung der trivialen Nullstellen von $\zeta_{\{F\}}$ in [11]. Zunächst setzen wir - wobei wir für $n, k \in \mathbb{N}_0$ beachten, dass der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ für $k > n$ verschwindet - zur Abkürzung für $d \in \mathbb{N}_0$:

$$\sigma_{\varphi,n,m}^k(d) = \binom{d}{k} \frac{1}{\varphi^{-d-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}}.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} B_{\varphi,n,m}(-d) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{\varphi,n,m}^k(d) \\ &= \sum_{k=0}^d \sigma_{\varphi,n,m}^k(d). \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$B_{\varphi,n,m}(-(4m + 2)) = \sum_{k=0}^{4m+2} \sigma_{\varphi,n,m}^k(4m + 2).$$

Wir fassen nun in der letzten Summe diejenigen Terme mit gleichen Binomialkoeffizienten zusammen:

$$\begin{aligned} &\sigma_{\varphi,n,m}^k(4m + 2) + \sigma_{\varphi,n,m}^{4m+2-k}(4m + 2) = \\ &= \binom{4m+2}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+2)-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}} + \\ &\quad + \binom{4m+2}{4m+2-k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+2)-n(2m+1)+(4m+2-k)(n+2)} + (-1)^{4m+2-k+1}} \\ &= \binom{4m+2}{k} \left(\frac{1}{\varphi^{-(4m+2)-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}} + \frac{1}{\varphi^{(4m+2)(n+1)-n(2m+1)-k(n+2)} + (-1)^{k+1}} \right) \\ &= \binom{4m+2}{k} \left(\frac{1}{\varphi^{-(4m+2)-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}} + \frac{1}{\varphi^{4m+2+n(2m+1)-k(n+2)} + (-1)^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Durch Hauptnennerbildung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{\varphi,n,m}^k(4m+2) + \sigma_{\varphi,n,m}^{4m+2-k}(4m+2) = \\
 & = \binom{4m+2}{k} \left(\frac{\varphi^{4m+2+n(2m+1)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+2)-n(2m+1)+k(n+2)} + 2 \cdot (-1)^{k+1}}{2 + (-1)^{k+1} (\varphi^{4m+2+n(2m+1)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+2)-n(2m+1)+k(n+2)})} \right) \\
 & = \binom{4m+2}{k} (-1)^{k+1}.
 \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
 B_{\varphi,n,m}(-(4m+2)) &= \sum_{k=0}^{4m+2} \sigma_{\varphi,n,m}^k(4m+2) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4m+2} (\sigma_{\varphi,n,m}^k(4m+2) + \sigma_{\varphi,n,m}^{4m+2-k}(4m+2)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4m+2} \binom{4m+2}{k} (-1)^{k+1} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

□

Nachdem die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi,n,m}(s)$ wie die Fibonacci Zeta-Funktion $s \mapsto \zeta_{\{F\}}(s)$ in $s = s_m = -(4m+2)$, $m \in \mathbb{N}_0$ verschwindet, stellt sich uns nun die Frage, ob ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $\varphi > 1$ so existieren, dass $B_{\varphi,n,m}$ die gleichen trivialen Nullstellen wie $\zeta_{\{F\}}$ besitzt. Wir können diese Frage zumindest teilweise beantworten:

Lemma 4.5.3:

Im Allgemeinen sind die trivialen Nullstellen der Binomialreihe $B_{\varphi,n,m}$ nicht äquidistant verteilt.

Beweis:

Wir werten die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi,n,m}(s)$ bei $s = s_{m+1} = -(4m+6)$, $m \in \mathbb{N}_0$ aus:

$$B_{\varphi,n,m}(-(4m+6)) = \sum_{k=0}^{4m+6} \binom{4m+6}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+6)-n(1+2m)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}}.$$

Wir sortieren wieder nach denjenigen Termen mit gleichem Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
& \sigma_{\varphi,n,m}^k(4m+6) + \sigma_{\varphi,n,m}^{4m+6-k}(4m+6) = \\
& = \binom{4m+6}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}} + \\
& \quad + \binom{4m+6}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)-k(n+2)+(4m+6)(n+2)} + (-1)^{k+1}} \\
& = \binom{4m+6}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}} + \\
& \quad + \binom{4m+6}{k} \frac{1}{\varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + (-1)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Anschließend erhalten wir durch Hauptnennerbildung:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{\varphi,n,m}^k(4m+6) + \sigma_{\varphi,n,m}^{4m+6-k}(4m+6)}{\binom{4m+6}{k}} = \\
& = (-1)^{k+1} \frac{2 \cdot (-1)^{k+1} + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}}{(-1)^{k+1} \cdot (\varphi^{4n} + 1) + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}}.
\end{aligned}$$

Zunächst schenken wir dem Vorzeichen des Ausdrucks

$$\frac{2 \cdot (-1)^{k+1} + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}}{(-1)^{k+1} \cdot (\varphi^{4n} + 1) + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}}, \quad (42)$$

unsere ganze Aufmerksamkeit. Dazu betrachten wir als erstes den Zähler von (42):

$$\begin{aligned}
& \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)} > 2 \cdot (-1)^k \\
& \Leftrightarrow \varphi^{12+8m+n(4m+6)-2 \cdot k(n+2)} + 1 > 2\varphi^{4m+6+n(2m+1)-k(n+2)} \cdot (-1)^k \\
& \Leftrightarrow \varphi^{4m+6+n(2m+3)-k \cdot (n+2)} + \varphi^{-(4m+6+n(2m+3)-k \cdot (n+2))} > 2\varphi^{-2n} \cdot (-1)^k \\
& \Leftrightarrow 2 \cosh((4m+6+n(2m+3)-k(n+2)) \log(\varphi)) > 2\varphi^{-2n} \cdot (-1)^k.
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die letzte Ungleichung für ungerades $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Ansonsten ist die rechte Seite der letzten Ungleichung natürlich für $n \in \mathbb{N}$ stets kleiner als zwei, während die linke Seite immer größer oder gleich zwei ist. Folglich ist der Zähler von (42) stets positiv. Analog betrachten wir den Nenner von (42):

$$\begin{aligned}
& \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)} > (-1)^k \cdot (\varphi^{4n} + 1) \\
& \Leftrightarrow \varphi^{4m+6+n(2m+3)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6+n(2m+3)-k(n+2))} > (-1)^k \cdot (\varphi^{4n} + 1) \cdot \varphi^{-2n} \\
& \Leftrightarrow \cosh((4m+6+n(2m+3)-k(n+2)) \log(\varphi)) > (-1)^k \cdot \cosh(2n \log(\varphi)).
\end{aligned}$$

Offensichtlich ist der Nenner von (42) für ungerades $k \in \mathbb{N}_0$ stets positiv. Daher muss die letzte Ungleichung nur für gerades $k \in \mathbb{N}_0$ überprüft werden. Nach Voraussetzung ist $\log(\varphi)$ positiv, ebenso wie $2n$. Da $\cosh(x)$ für positive Argumente x streng monoton

wächst und für negative Argumente streng monoton fällt, ist die letzte Ungleichung genau für diejenigen $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt, für die

$$4m + 6 + n(2m + 3) - k(n + 2) > 2n, \quad (43)$$

oder

$$4m + 6 + n(2m + 3) - k(n + 2) < -2n, \quad (44)$$

gilt. Ungl. (43) liefert uns:

$$\begin{aligned} 4m + 6 + n(2m + 3) - k(n + 2) &> 2n \\ \Leftrightarrow \frac{4m + 6 + n(2m + 1)}{n + 2} &> k \\ \Leftrightarrow 2m + 1 + \frac{4}{n + 2} &> k. \end{aligned}$$

Folglich ist der Nenner von (42) für gerades $k \leq 2m$ positiv. Desweiteren liefert uns Ungl. (44):

$$\begin{aligned} 4m + 6 + n(2m + 3) - k(n + 2) &< -2n \\ \Leftrightarrow \frac{4m + 6 + n(2m + 5)}{n + 2} &< k \\ \Leftrightarrow 2m + 1 + 4 \cdot \frac{n + 1}{n + 2} &< k. \end{aligned}$$

Dabei gilt $4 \cdot \frac{n+1}{n+2} < 3$ für $n < 2$ und $4 \cdot \frac{n+1}{n+2} < 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist der Nenner von (42) für $n = 1$ und $k \geq 2m + 4$ und für $n > 1$ und $k \geq 2m + 6$ positiv. Wir müssen also zwei Fälle unterscheiden:

Fall I:

Sei $n = 1$ und $k = 2m + 2$. Dann gilt

$$\cosh((4m + 6 + 2m + 3 - 3(2m + 2)) \log(\varphi)) = \cosh(3 \log(\varphi)) > \cosh(2 \log(\varphi)),$$

und damit ist der Nenner von (42) positiv.

Fall II:

Für $n > 1$ und $k = 2m + 2$ gilt

$$4m + 6 + n(2m + 3) - (2m + 2)(n + 2) = 2 + n > 2n, \text{ nur für } n = 1.$$

Sei $n > 1$ und $k = 2m + 4$. Dann gilt

$$4m + 6 + n(2m + 3) - (2m + 4)(n + 2) = -(2 + n) < -2n \text{ nur für } n = 1.$$

Damit ist der Nenner von (42) negativ. Sei nun k ungerade, dann gilt wegen $\varphi > 1$:

$$\frac{2 + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}}{\varphi^{4n} + 1 + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}} < 1.$$

Ebenso sieht man für gerades k , $k \neq 2m + 2, 2m + 4$ und $n > 1$ schnell

$$\frac{-2 + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}}{-\varphi^{4n} - 1 + \varphi^{4m+6+n(2m+5)-k(n+2)} + \varphi^{-(4m+6)-n(2m+1)+k(n+2)}} > 1.$$

Für $n = 1$ ist dann die letzte Ungleichung für alle geraden k mit $0 \leq k \leq 4m + 6$ erfüllt. Auf Grund obiger Diskussion können wir nun folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} B_{\varphi,1,m}(-(4m+6)) &= \sum_{k=0}^{4m+6} \binom{4m+6}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4m+6)-(1+2m)+3k} + (-1)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4m+6} (\sigma_{\varphi,1,m}^k(4m+6) + \sigma_{\varphi,1,m}^{4m+6-k}(4m+6)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4m+6} (-1)^{k+1} \binom{4m+6}{k} \frac{2 \cdot (-1)^{k+1} + \varphi^{6m+11-3k} + \varphi^{-6m-7+3k}}{(-1)^{k+1} \cdot (\varphi^4 + 1) + \varphi^{6m+11-3k} + \varphi^{-6m-7+3k}} \\ &< \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{4m+6} \binom{4m+6}{k} (-1)^{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Also besitzt $s \mapsto B_{\varphi,1,m}(s)$ keine Nullstelle in $s = s_{m+1}$. Leider können wir für $n > 1$ nicht analog abschätzen, trotzdem können wir unendlich viele Binomialreihen $B_{\varphi,n,m}$ angeben, deren triviale Nullstellen nicht äquidistant verteilt sind:

Die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi,n,m}(s)$ besitzt für $n = 4l - 2, l \in \mathbb{N}$ in $s = s_{m+l}$ eine Polstelle.

Es gilt:

$$B_{\varphi,n,m}(s_{m+l}) = \sum_{k=0}^{4(m+l)+2} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi^{-(4(m+l)+2)-n(2m+1)+k(n+2)} + (-1)^{k+1}}.$$

Offensichtlich kann der Nenner der einzelnen Summanden nur für gerades k verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 &= -(4(m+l) + 2) - n(2m+1) + k(n+2) \\ \Leftrightarrow k &= \frac{4(m+l) + 2 + n(2m+1)}{n+2} \\ \Leftrightarrow k &= 2m+1 + \frac{4l}{n+2}. \end{aligned}$$

Für $n = 4l - 2$ erhalten wir $k = 2m + 2$ und damit besitzt $s \mapsto B_{\varphi, 4l-2, m}(s)$ einen Pol in $s = s_{m+l}$. Insgesamt können daher die Binomialreihen $B_{\varphi, n, m}$ für $n = 1, 2, 6, 10, 14, 18, \dots$ keine äquidistanten Nullstellen besitzen.

□

Als Konsequenz von Lemma 4.5.2 erhalten wir, dass die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi, 0, m}(s)$ - welche wir für $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ als die Fibonacci Zeta-Funktion $\zeta_{\{F\}}$ identifizieren - feste Nullstellen bei $s = s_i = -(4i + 2)$, $i \in \mathbb{N}_0$ besitzt. Darüber hinaus garantiert uns Lemma 4.5.3, dass nur wenige Binomialreihen $B_{\varphi, n, m}$ mit einer äquidistanten Verteilung trivialer Nullstellen existieren können.

Auf Grund obiger Diskussion vermuten wir:

Die Binomialreihe $s \mapsto B_{\varphi, n, m}(s)$ besitzt für $n \in \mathbb{N}$ keine äquidistant verteilten trivialen Nullstellen.

4.5.2 Nahe Verwandte von $\zeta_{\{F\}}$

In diesem Unterabschnitt wollen wir noch kurz darauf aufmerksam machen, dass unendliche viele Funktionen $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ existieren, welche dieselben trivialen Nullstellen und Polstellen wie $\zeta_{\{F\}}$ besitzen.

Ausschlaggebend für die trivialen Nullstellen und Polstellen von $\zeta_{\{F\}}$ ist die algebraische Bedingung $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -1$.

Dazu betrachten wir - unter der gerade genannten Bedingung - erneut die Reihendarstellung (32) von $\zeta_{\{a\}}$ für $\beta \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(s) &= \alpha_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \alpha_1^{-k} \frac{(\alpha_2 \varphi_2)^k}{\varphi_1^{s+k} - \varphi_2^k} \\ &= \alpha_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{(-1)^k}{\varphi_1^s \cdot \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)^k - 1} \\ &= \alpha_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{(-1)^k}{\varphi_1^s \cdot (-\varphi_1^2)^k - 1} \\ &= \alpha_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi_1^{s+2k} + (-1)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$, $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = -1$ lassen sich schnell weitere lineare Rekursionen konstruieren:

Dazu wählen wir eine lineare Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{R}^2$, also

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}, \text{ für } n \in \mathbb{N}, n > 2.$$

Dann besitzt $\{a\}$ das charakteristische Polynom

$$P(\varphi) = \varphi^2 - c_1\varphi - c_2,$$

mit den charakteristischen Wurzeln

$$\varphi_1 = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2}, \quad \varphi_2 = \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2}.$$

Aus der Bedingung $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = -1$ folgt

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2} \cdot \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c_2}}{2} \\ &= \frac{c_1^2 - (c_1^2 + 4c_2)}{4} = -c_2, \end{aligned}$$

also $c_2 = 1$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} \varphi_{c_1} &:= \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4}}{2}, \\ \varphi_{c_1}^* &:= \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4}}{2}. \end{aligned}$$

Wegen $\alpha_1 = -\alpha_2$, gilt nach der Formel aus Korollar 1.5.1:

$$a_1 = \alpha_1 \cdot (\varphi_{c_1} - \varphi_{c_1}^*) = \alpha_1 \cdot \sqrt{c_1^2 + 4}.$$

Also läßt sich α_1 eindeutig bestimmen. Desweiteren ist die lineare Rekursion $\{a\}$ nur für $c_1 \in \mathbb{N}$ ein Element der Menge \mathfrak{C}^2 : Offensichtlich ist α_1 positiv. Wir müssen also nur noch - da c_1 wegen Satz 3.2.1 ganzzahlig ist - nachweisen, dass $\{a\}$ nur für $c_1 > 0$ eine positive dominante Wurzel $\varphi_{c_1} > 1$ besitzt. Wir schätzen ab:

$$\left| \frac{\varphi_{c_1}^*}{\varphi_{c_1}} \right| = \left| \frac{\frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4}}{2}}{\frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4}}{2}} \right| \leq \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4}}{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4}} = 1.$$

Für $\left| \frac{\varphi_{c_1}^*}{\varphi_{c_1}} \right| < 1$, ist definitionsgemäß $\{a\}$ eine Element aus \mathfrak{C}^2 falls $\varphi_{c_1} > 1$ (siehe weiter unten).

Sei nun $\left| \frac{\varphi_{c_1}^*}{\varphi_{c_1}} \right| = 1$. Wegen $c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4} > c_1 + |c_1| \geq 0$, ist $\varphi_{c_1} > 0$ und insbesondere $\varphi_{c_1}^*$ negativ. Folglich gilt

$$\varphi_{c_1}^* = -\varphi_{c_1},$$

also

$$\begin{aligned} \varphi_{c_1}^2 = 1 &\Leftrightarrow c_1^2 + 2c_1\sqrt{c_1^2 + 4} + c_1^2 + 4 = 4 \\ &\Leftrightarrow c_1^2 + c_1\sqrt{c_1^2 + 4} = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 \left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Nachdem die letzte Gleichung nur für $c_1 = 0$ zu erfüllen ist, wir uns aber zu Beginn des dritten Kapitels auf Rekursionen $\{a\}$ minimaler Länge beschränkt hatten, ist die letzte Gleichung nicht zu erfüllen. Damit folgt, dass φ_{c_1} dominant ist und das die Rekursion $\{a\}$ genau dann ein Element der Menge \mathfrak{E}^2 ist, falls $\varphi_{c_1} > 1$.

$$\begin{aligned}\varphi_{c_1} > 1 &\Leftrightarrow \frac{2c_1^2 + 2c_1\sqrt{c_1^2 + 4} + 4}{4} > 1 \\ &\Leftrightarrow c_1 \left(c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4} \right) > 0.\end{aligned}$$

Dies ist aber nur dann der Fall, falls $c_1 > 0$.

Insbesondere besitzt $\zeta_{\{a\}}$ für $c_1 \in \mathbb{N}$ nach Hauptsatz 4.2.1 immer eine analytische Fortsetzung zu einer in der gesamten komplexen Ebene \mathbb{C} meromorphen Funktion. Zusammenfassend können wir sagen: Jede lineare Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{E}^2$, deren zugeordnete Dirichlet-Reihe die gleichen trivialen Nullstellen und Polstellen wie $\varphi_{\{F\}}$ besitzt, genügt der Darstellung

$$a_n = \frac{a_1}{\sqrt{c_1^2 + 4}} \left(\frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4}}{2} \right)^n - \frac{a_1}{\sqrt{c_1^2 + 4}} \left(\frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4}}{2} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (45)$$

mit $c_1 \in \mathbb{N}$. Da wir in dieser Darstellung für die lineare Rekursion $\{a\} \in \mathfrak{E}^2$ die Größen a_1 und c_1 beliebig aus den natürlichen Zahlen wählen können, folgt, dass es unendliche viele Rekursionen $\{a\} \in \mathfrak{E}^2$ gibt, deren zugeordnete Dirichlet-Reihe $\zeta_{\{a\}}$ dieselben trivialen Nullstellen und Polstellen wie $\zeta_{\{F\}}$ besitzt. Als weiteren prominenten Vertreter aus der Menge \mathfrak{E}^2 mit diesen günstigen Eigenschaften, erwähnen wir die Folge der Pell-Zahlen $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche durch die Rekursion

$$\begin{aligned}P_n &= 2P_{n-1} + P_{n-2}, \\ P_1 &= 1, \quad P_2 = 2\end{aligned}$$

festgelegt ist.

Eine weiter in [11] bewiesene Eigenschaft der Fibonacci Zeta-Funktion ζ_F ist ihre Rationalität in den negativen ungeraden Zahlen. Wir werden nun prüfen, ob auch die Funktion

$$\zeta_{\{a\}}(s) = \alpha_1^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-s}{k} \frac{1}{\varphi_{c_1}^{s+2k} + (-1)^{k+1}},$$

wobei die lineare Rekursion $\{a\}$ der Darstellung aus (45) genügt, in den negativen ungeraden Zahlen $-(2i+1)$, $i \in \mathbb{N}_0$ rationale Werte besitzt. Wir verfahren hierfür völlig analog

der Berechnung von $B_{\varphi,n,m}(-(4m+2))$ aus Unterabschnitt 4.5.1:

$$\begin{aligned}\zeta_{\{a\}}(-(2i+1)) &= \alpha_1^{2i+1} \sum_{k=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{k} \frac{1}{\varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} + (-1)^{k+1}} \\ &= \alpha_1^{2i+1} \sum_{k=0}^{2i+1} \sigma_{\varphi_{c_1},0,m}^k(2i+1) \\ &= \alpha_1^{2i+1} B_{\varphi_{c_1},0,m}(-(2i+1)).\end{aligned}$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi_{c_1},0,m}^{2i+1-k}(2i+1) &= \binom{2i+1}{2i+1-k} \frac{1}{\varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2(2i+1-k)} + (-1)^{2i+1-k+1}} \\ &= \binom{2i+1}{k} \frac{1}{\varphi_{c_1}^{2i+1-2k} + (-1)^k}.\end{aligned}$$

Wir sortieren wieder nach Termen mit gleichen Binomialkoeffizienten und berechnen:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\varphi_{c_1},0,m}^k(2i+1) + \sigma_{\varphi_{c_1},0,m}^{2i+1-k}(2i+1)}{\binom{2i+1}{k}} &= \frac{1}{\varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} + (-1)^{k+1}} + \frac{1}{\varphi_{c_1}^{2i+1-2k} - (-1)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{\varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} + (-1)^{k+1}} + \frac{1}{-\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} - (-1)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{\varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} + (-1)^{k+1}} - \frac{1}{\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} + (-1)^{k+1}} \\ &= \frac{\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} - \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k}}{(-1)^{2k-(2i+1)} + (-1)^{k+1} \varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} + (-1)^{k+1} \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} + 1} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} - \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k}}{\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} + \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k}}.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die rechte Seite der letzten Gleichung genauer:

$$\begin{aligned}\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} - \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} &= \frac{\varphi_{c_1}^{2i+1-2k} - \varphi_{c_1}^{*2i+1-2k}}{(-1)^{2k-(2i+1)}} \\ &= (-1)^{2i+1} (\varphi_{c_1}^{2i+1-2k} - \varphi_{c_1}^{*2i+1-2k}) \\ &= (-1)^{2i+1} \frac{\sqrt{c_1^2 + 4}}{a_1} a_{2i+1-k} \\ &= (-1)^{2i+1} \frac{a_{2i+1-k}}{\alpha_1}.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} + \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k} = (-1)^{2i+1} (\varphi_{c_1}^{2i+1-2k} + \varphi_{c_1}^{*2i+1-2k}).$$

Die Folge

$$\bar{a}_n := \varphi_{c_1}^n + \varphi_{c_1}^{*n}$$

besitzt das gleiche charakteristische Polynom $P(\varphi)$ wie die lineare Rekursion $\{a\}$. Damit wird auch $\{\bar{a}\} := (\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die gleiche lineare Rekursion wie $\{a\}$ beschrieben und besitzt ganzzahlige Werte falls die Anfangswerte \bar{a}_1 und \bar{a}_2 ganzzahlig sind. Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \varphi_{c_1} + \varphi_{c_1}^* = \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4}}{2} + \frac{c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4}}{2} \\ &= c_1. \\ \bar{a}_2 &= \varphi_{c_1}^2 + \varphi_{c_1}^{*2} = \frac{4c_1^2 + 8}{4} = c_1^2 + 2. \end{aligned}$$

Damit besitzt die lineare Rekursion $\{\bar{a}\}$ ebenfalls nur ganzzahlige Werte. Damit können wir nun abschließend berechnen:

$$\begin{aligned} \zeta_{\{a\}}(-(2i+1)) &= \alpha_1^{2i+1} \sum_{k=0}^{2i+1} \sigma_{\varphi_{c_1}, 0, m}^k(2i+1) \\ &= \frac{\alpha_1^{2i+1}}{2} \sum_{k=0}^{2i+1} \sigma_{\varphi_{c_1}, 0, m}^k(2i+1) + \sigma_{\varphi_{c_1}, 0, m}^{2i+1-k}(2i+1) \\ &= \frac{\alpha_1^{2i+1}}{2} \sum_{k=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{k} (-1)^{k+1} \frac{\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} - \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k}}{\varphi_{c_1}^{*2k-(2i+1)} + \varphi_{c_1}^{-(2i+1)+2k}} \\ &= \frac{\alpha_1^{2i+1}}{2} \sum_{k=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{k} (-1)^{k+1} (-1)^{2i+1} \frac{a_{2i+1-k}}{\alpha_1 (-1)^{2i+1} \bar{a}_{2i+1-k}} \\ &= \frac{\alpha_1^{2i}}{2} \sum_{k=0}^{2i+1} \binom{2i+1}{k} (-1)^{k+1} \frac{a_{2i+1-k}}{\bar{a}_{2i+1-k}}. \end{aligned}$$

Ferner liefert uns Lemma 3.2.2 und die Dominanz der Wurzel φ_{c_1} gegenüber $\varphi_{c_1}^*$, dass kein Glied der linearen Rekursion $\{\bar{a}\}$ verschwindet. Damit gilt für jede lineare Rekursion $\{a\}$ deren Folgenglieder durch Gl.(45) festgelegt werden:

$$\zeta_{\{a\}}(-(2i+1)) \in \mathbb{Q}, \text{ für } i \in \mathbb{N}_0.$$

5 Die Klasse ζ und Hypertranszendenz

5.1 Vorbemerkung

In diesem Kapitel werden wir uns auf Grund des Resultates von Steuding aus [19] über die Fibonacci Zeta-Funktion $\zeta_{\{F\}} \in \zeta$, auf die Suche nach weiteren Elementen der Klasse ζ begeben, welche keiner algebraischen Differential-Gleichung genügen, also hypertranszendent sind.

5.2 Die Hypertranszendenz für Dirichlet-Reihen im Allgemeinen

Wir geben hier kurz ein wichtiges Resultat von Reich, welches unter [16] zu finden ist, wieder und verweisen für eine detailliertere Betrachtung der Hypertranszendenz von Dirichlet-Reihen auf [16] und [12].

Definition 5.2.1:

Es bezeichne \mathfrak{D} die Menge aller gewöhnlichen Dirichlet-Reihen $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ welche den beiden folgenden Bedingungen genügen:

- Die zugehörige Abszisse der absoluten Konvergenz ist endlich: $\bar{\sigma}(f) < \infty$,
- Die Menge aller Teiler der Indizes n mit $a_n \neq 0$ enthält unendlich viele Primzahlen.

Darüber hinaus verwenden wir folgende Abkürzung: Sei $\nu \in \mathbb{N}_0$, dann schreiben wir

$$\underline{f}^{[\nu]}(s) = (f(s), f'(s), \dots, f^{(\nu)}(s)).$$

In [16] beweist Reich für obige Menge \mathfrak{D} :

Satz 5.2.1:

Sei $f \in \mathfrak{D}$ und $h_0 < h_1 < \dots < h_m$ irgendwelche reellen Zahlen. Desweiteren seien $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_m \in \mathbb{N}_0$ und $\sigma_0 > \bar{\sigma}(f) - h_0$. Schließlich setzen wir noch $k := \sum_{j=0}^m (\nu_j + 1)$. Falls $\Phi : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ ganz ist und die Differenzen-Differential-Gleichung

$$\Phi \left(\underline{f}^{[\nu_0]}(s + h_0), \underline{f}^{[\nu_1]}(s + h_1), \dots, \underline{f}^{[\nu_m]}(s + h_m) \right) = 0$$

für alle s mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ erfüllt ist, dann verschwindet Φ identisch.

Um dieses Resultat auf die Klasse ζ anwenden zu können, benötigen wir ein Lemma von Pólya aus [14]:

Lemma 5.2.1:

Sei (a_n) eine rekurrente Folge ganzer Zahlen, für welche die Menge der Primteiler von (a_n) ,

$$P := \{p \in \mathbb{P}; \exists n : p | a_n\},$$

endlich ist. Dann existieren natürliche Zahlen N und j_0 sowie ganze Zahlen d_l , $1 \leq l \leq N$, mit

$$a_{l+j \cdot N} = a_{l+j_0 \cdot N} \cdot d_l^{j-j_0}$$

für $j \geq j_0$, $1 \leq l \leq N$.

5.3 Hypertranszendente Elemente der Klasse ζ

Erfüllt nun eine lineare Rekursion $\{a\}$ die Voraussetzung aus dem Lemma von Pólya, dann besitzt insbesondere die Teilfolge $(a_{N+j \cdot N})_{j \in \mathbb{N}_0}$ von $\{a\}$ für $j \geq j_0$ einen festen Teiler. Folglich würde uns eine Bedingung, unter der keine solche Teilfolge von $\{a\}$ einen festen Teiler besitzt, die Mächtigkeit $|P| = \infty$ der obigen Menge P garantieren. Diese Überlegungen und der Satz von Reich führen uns zu dieser Schlussfolgerung:

Korollar 5.3.1:

Sei $\zeta_{\{a\}} \in \zeta$ und $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ die charakteristischen Wurzeln von $\{a\}$. Dann genügt $\zeta_{\{a\}}$ keiner algebraischen Differential-Gleichung, falls gilt:

$$\{\varphi_i^n; 1 \leq i \leq l, n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir, dass für ein festgewähltes $m \in \mathbb{N}$ jede Teilfolge $(a_{m \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$ der linearen Rekursion $\{a\}$ aus der Menge \mathfrak{C}^l wieder ein Element der Menge \mathfrak{C}^l ist:

Wegen Korollar 1.5.1 i) existieren Konstanten $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, sodass sich jedes Folgenglied von $\{a\}$ in der Form

$$a_n = \sum_{i=1}^l \alpha_i \varphi_i^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

darstellen lässt. Folglich besitzt jedes Glied der Teilfolge $(a_{m \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$ die Darstellung

$$a_{m \cdot n} = \sum_{i=1}^l \alpha_i (\varphi_i^m)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit können wir die Potenzen φ_i^m der charakteristischen Wurzeln von $\{a\}$ als charakteristische Wurzeln einer Rekursion für die Teilfolge $(a_{m \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$ auffassen. Insbesondere verstehen wir unter

$$P_m(z) := \prod_{i=1}^l (z - \varphi_i^m) =: z^l - \sum_{j=1}^l d_j z^{l-j}$$

das charakteristische Polynom einer Rekursion für die Teilfolge $(a_{m \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Korollar 1.5.1 ii) garantiert uns nun, dass die Teilfolge $(a_{m \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Lösung der linearen Rekursion

$$b_n = \sum_{j=1}^l d_j b_{n-j}, \quad n \in \mathbb{N},$$

ist, wobei die Koeffizienten d_j nach Satz 3.2.1 wieder ganzzahlig sind. Damit ist die Rekursion der Teilfolge $(a_{m \cdot n})_{n \in \mathbb{N}}$ wieder ein Element der Menge \mathfrak{E}^l , wobei wir im Folgenden berücksichtigen müssen, dass jedes Element $a_{m \cdot n}$ eine Umindizierung erfährt, also den Index n erhält. Um Missverständlichkeiten auszuschließen kennzeichnen wir daher diese Teilfolge besonders durch:

$$a_{m \cdot n} := a_n^*.$$

Wir beweisen nun unsere Aussage durch Kontraposition:

Angenommen die Rekursion $\{a\}$ besitzt trotz der oben genannten Voraussetzungen nur endlich viele Primteiler, dann existieren nach dem Satz von Pólya natürliche Zahlen N und j_0 , sodass die Teilfolge $(a_{N(1+j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ für $j \geq j_0$ die Darstellung

$$a_{N(1+j)} = a_{N(1+j_0)} d_N^{j-j_0},$$

für eine ganze Zahl d_N besitzt. Berücksichtigen wir die neue Indizierung, die die Rekursion der Teilfolge $(a_{N(1+j)})_{j \in \mathbb{N}_0}$ verleiht, so besitzt das Element $a_{N(1+j)}$ die Gestalt a_{1+j}^* . Insgesamt erhalten wir in der neuen Indizierung für $j \geq j_0$:

$$a_{1+j}^* = a_{1+j_0}^* d_N^{j-j_0}. \quad (46)$$

Wir verwenden nun die Tatsache, dass sich für hinreichend großes $j \in \mathbb{N}_0$ das Element a_{1+j}^* als Rekursion mit ganzzahligen Koeffizienten r_i , $1 \leq i \leq t$, schreiben lässt:

$$a_{1+j}^* = \sum_{i=1}^t r_i a_{1+j-i}^*. \quad (47)$$

Für $j \geq j_0 + t - 1$ können wir dann Gl.(46) in Gl.(47) einsetzen:

$$a_{1+j_0}^* d_N^{j-j_0} = a_{1+j}^* = \sum_{i=1}^t r_i a_{1+j-i}^* = \sum_{i=1}^t r_i a_{1+j_0}^* d_N^{j-i-j_0}.$$

Durch Kürzen erhalten wir

$$d_N^{j-j_0} = \sum_{i=1}^t r_i d_N^{j-i-j_0},$$

was bedeutet, dass die Zahl d_N charakteristische Wurzel der linearen Rekursion für die Teilfolge $(a_{1+j}^*)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist. Nach Voraussetzung ist aber die Zahl d_N ganz, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

□

Wir können nun einen alternativen Beweis zu Steudings Beweis der Hypertranszendenz der Fibonacci Zeta-Funktion ζ_F aus [19] liefern:

Lemma 5.3.1:

Die Fibonacci Zeta-Funktion ζ_F ist hypertranszendent.

Beweis:

Wegen Korollar 5.3.1 reicht es aus zu zeigen, dass natürliche Potenzen der charakteristischen Wurzeln

$$\varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } \varphi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

nicht in den natürlichen Zahlen \mathbb{N} liegen. Offensichtlich müssen wir dabei die Aussage nur für die Nenner der charakteristischen Wurzeln φ_1 und φ_2 verifizieren. Angenommen es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$(1 + \sqrt{5})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{5}^k = m. \quad (48)$$

Wir sortieren nun Gl.(48) nach geraden und ungeraden Potenzen der irrationalen Zahl $\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} m = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{5}^k &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} \sqrt{5}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k + \sqrt{5} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k \\ &=: a + \sqrt{5} \cdot b. \end{aligned}$$

Wir erkennen sofort das a und b natürliche Zahlen sind. Folglich würde gelten

$$\sqrt{5} = \frac{m - a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

Ein Widerspruch. Der Beweis für $(1 - \sqrt{5})^n \notin \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfolgt vollkommen analog. Damit ist die Aussage bewiesen.

□

6 Anhang

6.1 Ergebnisse der Funktionentheorie

Satz 6.1.1:(Weierstraß) Vgl. [5] S. 100.

Sei $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f_n eine in \mathfrak{F} gegen f gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen. Dann gilt:

- f ist holomorph in \mathfrak{F} .
- Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert $f^{(k)}$ lokal gleichmäßig in \mathfrak{F} gegen $f^{(k)}$.

Satz 6.1.2:(Identitätsprinzip für holomorphe Funktionen) Vgl. [5] S. 119.

Sei $f : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ eine von der Nullfunktion verschiedene analytische Funktion auf dem Gebiet $\mathfrak{F} \subset \mathbb{C}$. Dann liegt die Menge $\mathfrak{N}(f)$ der Nullstellen von f diskret in \mathfrak{F} .

Beweis:

Angenommen die Menge $\mathfrak{N}(f)$ besitzt einen Häufungspunkt $a \in \mathfrak{F}$. Nach Voraussetzung läßt sich dann f um a in eine Potenzreihe entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad |z-a| < r.$$

Da $a \in \mathfrak{F}$ ein Häufungspunkt von $\mathfrak{N}(f)$ ist, gibt es in jeder Umgebung von a Punkte $z \neq a$ mit $f(z) = 0$. Hieraus folgt wegen der Stetigkeit von f

$$a_0 = f(a) = 0.$$

Wenden wir nun denselben Schluss auf die Reihe $\frac{f(z)}{z-a} = a_1 + a_2(z-a) + \dots$ an, so erhalten wir $a_1 = 0$ usw. Die Koeffizienten der Potenzreihe verschwinden also. Wir erhalten $f(z) = 0$ in einer vollen Umgebung von a . (Sogar in der größten offenen Kreisscheibe um a , welche in \mathfrak{F} enthalten ist). Die Menge $\mathfrak{U} = \{z \in \mathfrak{F}; z \text{ ist Häufungspunkt von } \mathfrak{N}(f)\}$ ist also offen.

Trivialerweise ist aber auch die Menge $\mathfrak{V} = \{z \in \mathfrak{F}; z \text{ ist kein Häufungspunkt von } \mathfrak{N}(f)\}$ offen. Die Funktion

$$g : \begin{cases} \mathfrak{F} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ z & \rightarrow & g(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z \in \mathfrak{U} \\ 0 & \text{für } z \in \mathfrak{V} \end{cases} \end{cases}$$

ist lokal konstant, da \mathfrak{U} und \mathfrak{V} offen sind. Nun ist aber \mathfrak{F} zusammenhängend, g also konstant.

Da \mathfrak{U} nicht leer ist, folgt $\mathfrak{V} = \emptyset$ und damit $f \equiv 0$.

□

Satz 6.1.3:(Majorantenkriterium von Weierstrass.) Vgl. [17] S. 81.

Es sei $f_\nu : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge und $A \neq \emptyset$ eine Teilmenge von X . Desweiteren sei M_ν eine Folge reeller Zahlen mit

$$|f_\nu(x)| \leq M_\nu, \nu \in \mathbb{N}, x \in A \text{ und } \sum_{\nu=1}^{\infty} M_\nu < \infty.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ gleichmäßig in A .

Beweis:

Für alle $n > m$ und $x \in A$ gilt:

$$\left| \sum_{\nu=m+1}^n f_\nu(x) \right| \leq \sum_{\nu=m+1}^n |f_\nu(x)| \leq \sum_{\nu=m+1}^n M_\nu < \infty.$$

Damit existiert aber zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{\nu=m+1}^n M_\nu < \epsilon$$

für alle $n > m \geq n_0$. Dies bedeutet aber, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu$ nach dem Cauchyschen Kriterium in A gleichmäßig konvergiert.

□

6.2 Ergebnisse der Analysis

Multinomialsatz:

Für jedes $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0$ und $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha} x^\alpha$$

wobei $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ einen Multiindex bezeichnet und $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ die Ordnung von α ist. Die Multinomialkoeffizienten sind definiert durch

$$\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha!} \quad \text{für} \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m!$$

und die Monome x^α sind definiert durch:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} \quad (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

Beweis:

Wir beweisen den Multinomialssatz durch eine Induktion nach $m \in \mathbb{N}$:

(IA): Sei $m = 1$, dann gilt $|\alpha| = \alpha_1 = n$ und $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}$, also folgt die Behauptung.

(IV): Die Aussage sei nun bereits für ein $m \in \mathbb{N}$ bewiesen.

(IS): Schluss von m auf $m + 1$:

Unter Verwendung der binomischen Formel erhalten wir:

$$\begin{aligned} (x_1 + \dots + x_m + x_{m+1})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_{m+1}^{n-k} (x_1 + \dots + x_m)^k \\ &\stackrel{\text{(IV)}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_{m+1}^{n-k} \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha|=k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} \cdot x_{m+1}^{n-k}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m+1}) \in \mathbb{N}_0^{m+1}, \text{ mit } \beta_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{für } 1 \leq i \leq m, \\ n - k & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{|\alpha|=k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{\alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} \cdot x_{m+1}^{n-k} &= \sum_{|\beta|=n} \frac{n!}{\beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_{m+1}!} x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_{m+1}^{\beta_{m+1}} \\ &= \sum_{|\beta|=n} \binom{n}{\beta} x^\beta. \end{aligned}$$

□

Doppelreihensatz: Vgl. [9] S. 71.

Die Familie $(a_{ik})_{(i,k) \in I \times K}$ sei summierbar. Dann ist jede der Familien $(a_{ik})_{i \in I}$ und $(a_{ik})_{k \in K}$ summierbar, und es gilt

$$\sum_{(i,k) \in I \times K} a_{ik} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{k \in K} a_{ik} \right) = \sum_{k \in K} \left(\sum_{i \in I} a_{ik} \right).$$

Satz 6.2.1: Vgl. [6] S. 299.

Die Binomialreihe $B(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ konvergiert für $|x| < 1$ gegen $(1+x)^\alpha$.

Beweis:

Wir bestimmen den Konvergenzradius der Reihe mit der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} \right| &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1)}{\alpha(\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n)} \right| \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= \frac{n+1}{|\alpha-n|} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{\alpha}{n}}, \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck konvergiert gegen 1. Damit ist aber $B(x)$ auf dem offenen Intervall $] -1; 1[$ differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} B'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \binom{\alpha}{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n+1} x^n \\ &= \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} (1+x) B'(x) &= \alpha \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-1}{n} x^{n+1} \right) \\ &= \alpha \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1} \right) x^n \right) \\ &= \alpha \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \right) = \alpha \cdot B(x). \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$h(x) := \frac{B(x)}{(1+x)^\alpha},$$

so folgt:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(1+x)^\alpha B'(x) - B(x) \alpha (1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \\ &= \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} \cdot \left((1+x) B'(x) - \alpha B(x) \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Demnach muss $h(x)$ konstant sein und wegen $h(0) = 1$ folgt, dass $B(x) = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$ ist.

□

7 Verzeichnis der verwendeten Symbole

Δ	5
E	6
$W(t)$	10
$P(\varphi)$	13
$\varphi_1, \dots, \varphi_k$	13
$\sigma_i, 1 \leq i \leq k$	13
$s = \sigma + it$	18
$\lfloor x \rfloor$	18
$\tilde{\Delta}$	18
σ_0	18
$W(s_0, \alpha)$	18
$A(x)$	18
$A(x, y)$	18
o, O	18
\mathbb{H}_{σ_0}	21
$\bar{\sigma}$	24
$\zeta_{\{F\}}$	27
$(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$	28
$\zeta_{\{a\}}$	29
$\{a\}$	29
\mathfrak{R}^l	32
\mathfrak{C}^l	40
ζ	40
φ	42
β	42
$ \beta $	42
$\binom{k}{\beta}$	42
φ^β	42
J	43
α	45
\mathfrak{P}	51
$\rho_{k,m}(\beta)$	51
$\tilde{\mathfrak{P}}$	56
$\mathfrak{A}_{m,n}(\alpha)$	57
$B_{\varphi,n,m}(s)$	69
$\sigma_{\varphi,n,m}^k(d)$	70
\mathfrak{D}	80

8 Literaturverzeichnis

Literatur

- [1] APOSTOL T. M., *Introduction to analytic Number Theory*, Springer-Verlag, (1976).
- [2] BENZAGHOU B., *Algébres de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France **98** (1970), 209 - 252.
- [3] ERDÖS P., MAXSEIN TH., SMITH P.R., *Primzahlpotenzen in rekurrenten Folgen*, Analysis 10, 71-83 (1990).
- [4] EVEREST G., VAN DER POORTEN A., SHPARLINSKI I. AND WARD T., *Recurrence sequences*, AMS Mathematical Surveys and Monographs, **104** (2003).
- [5] FREITAG E., BUSAM R., *Funktionentheorie*, Springer-Verlag, (1993).
- [6] FRITZSCHE K., *Grundkurs Analysis 1: Differentiation und Integration in einer Veränderlichen*, Spektrum Akademischer Verlag, (2005).
- [7] HARDY G.H. AND RIESZ M., *The general theory of Dirichlet's series*, Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics, **18** (1915), Cambridge University Press, (1952).
- [8] KELLEY W. G. AND PETERSON A. C., *Difference Equations: an introduction with applications*, Academic Press, INC., (1991)
- [9] KÖNIGSBERGER K., *Analysis 1*, Springer-Verlag, (2004).
- [10] LIDL R., NIEDERREITER H., *Introduction to finite fields and their applications*, Cambridge University Press, (1986).
- [11] NAVAS L., *Analytic continuation of the Fibonacci Dirichlet series*, Fibonacci Q., **39** (2001), 409-418.
- [12] OSTROWSKI A., *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Math. Z., **8** (1920), 241-298.
- [13] PARENT D.P., *Exercises in Number Theory*, Springer-Verlag, (1984).
- [14] PÓLYA G., *Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklung rationaler Funktionen*, J. Reine Angew. Math., **151** (1921), 1-31.
- [15] POONEN B., *Linear recursive sequences*, <http://mathcircle.berkeley.edu/BMC6/ps/linear.pdf>.

- [16] REICH A., *Über Dirichletsche Reihen und algebraische Differentialgleichungen*, Analysis, **4** (1984), 27-44.
- [17] REMMERT R., *Funktionentheorie I*, Springer-Verlag, (1989).
- [18] SHOREY T.N., TIJDEMAN R., *Exponential Diophantine Equations*, Cambridge University Press, (1986).
- [19] STEUDING J., *The Fibonacci Zeta-Function is Hypertranszendental*, Cubo 10, No. 3, 133-136 (2008).

Erklärung:

Die vorliegende Diplomarbeit wurde am Institut für Mathematik der Universität Würzburg nach einem Thema von Herrn Prof. Dr. Jörn Steuding erstellt.

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig angefertigt und dazu nur die angegebenen Quellen verwendet habe.

Würzburg, den 17. November 2017

Michael Krasser