

Cette méthode de résolution de problèmes inverses par moindres carrés correspond à l'optimisation itérative de la localisation de l'hypocentre d'un séisme par l'algorithme de Gauss-Newton (lui-même étant une généralisation pour un espace multidimensionnel de la méthode de Newton-Raphson). C'est donc un processus déterministe qui attribue une unique solution à un problème surdéterminé.

On suppose un séisme dont l'hypocentre est inconnu, mais dont on dispose des temps d'arrivées de quatre différentes phases (P_n , P_g , S_n et S_g) enregistrées en m stations. On définit alors $f_{ij}(\mathbf{x}_h)$, le temps d'arrivée de la phase i à la $j^{\text{ème}}$ station où \mathbf{x}_h représente les paramètres de l'hypocentre :

$$\mathbf{x}_h = (\phi_h, \theta_h, z_h, t_h)^T. \quad (1)$$

Afin de retrouver \mathbf{x}_h , on part d'une solution *a priori* \mathbf{x}_1 proche de \mathbf{x}_h . À la première itération, \mathbf{x}_1 est défini arbitrairement, il correspond généralement à la position et au temps d'arrivée de la première onde à la station où l'enregistrement commence le plus tôt. La différence entre \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_h est notée $\delta\mathbf{x}_k$. On verra par la suite que, à chaque itération, \mathbf{x}_k prend la valeur de $\mathbf{x}_{k-1} + \delta\mathbf{x}_{k-1}$. Ainsi,

$$f_{ij}(\mathbf{x}_h) = f_{ij}(\mathbf{x}_k + \delta\mathbf{x}_k), \quad (2)$$

et par développement de Taylor du polynôme du premier degré¹, on obtient :

$$\begin{aligned} f_{ij}(\mathbf{x}_h) &\simeq f_{ij}(\mathbf{x}_k) + \frac{\partial f_{ij}}{\partial \phi} \delta\phi_k + \frac{\partial f_{ij}}{\partial \theta} \delta\theta_k + \frac{\partial f_{ij}}{\partial z} \delta z_k + \frac{\partial f_{ij}}{\partial t} \delta t_k \\ &\simeq f_{ij}(\mathbf{x}_k) + \nabla f_{ij}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{x}_k, \end{aligned} \quad (3)$$

avec $f_{ij}(\mathbf{x}_h)$, le temps d'arrivée réel et $f_{ij}(\mathbf{x}_k)$, le temps d'arrivée théorique calculé pour une position approchée de l'hypocentre. On note γ_{ij} la différence $f_{ij}(\mathbf{x}_h) - f_{ij}(\mathbf{x}_k)$. Ainsi, on a :

$$\gamma_{ij} = \nabla f_{ij}(\mathbf{x}) \delta\mathbf{x}_k. \quad (4)$$

Le facteur de correction $\nabla f_{ij}(\mathbf{x})$, est alors fonction de dérivées partielles calculables analytiquement (*c.f.* [exemple 1](#)). Le système défini par l'équation (3) est un système à $4 \times m$ équations et 4 inconnues ($\delta\phi$, $\delta\theta$, δz et δt) correspondant à un problème surdéterminé dont l'écriture matricielle est :

$$A \delta\mathbf{x}_k = \gamma, \quad (5)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{P_n1}}{\partial \phi} & \frac{\partial f_{P_n1}}{\partial \theta} & \frac{\partial f_{P_n1}}{\partial z} & \frac{\partial f_{P_n1}}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_{S_gm}}{\partial \phi} & \frac{\partial f_{S_gm}}{\partial \theta} & \frac{\partial f_{S_gm}}{\partial z} & \frac{\partial f_{S_gm}}{\partial t} \end{pmatrix}, \quad \delta\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\theta \\ \delta z \\ \delta t \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{P_n1} \\ \vdots \\ \gamma_{S_gm} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

La solution des moindres carrés pour le système défini par l'équation (5) est de la forme :

$$A^T A \delta\mathbf{x}_k = A^T \gamma, \quad (7)$$

et ainsi,

$$\delta\mathbf{x}_k = (A^T A)^{-1} A^T \gamma. \quad (8)$$

1. On peut noter que [Thurber \(1985\)](#) utilise à la fois les dérivés du premier et second ordre, constatant ainsi une amélioration de la stabilité de la méthode dans certains cas.

Une fois le vecteur de correction, $\delta \mathbf{x}_k$, évalué, il est ajouté à \mathbf{x}_k en vue d'une nouvelle itération. Ce processus est répété jusqu'à ce que le critère d'erreur donnée soit rempli, permettant à partir d'une solution initiale \mathbf{x}_1 proche de \mathbf{x}_h de converger vers \mathbf{x}_h . $\delta \mathbf{x}_k$ diminue rapidement et la solution finale est généralement approchée après seulement quelques itérations. L'effet total de l'inadéquation entre les temps d'arrivées observés et calculés, R , est appelé résidu, avec :

$$R = \sqrt{\frac{\gamma^T \gamma}{p - q}} , \quad (9)$$

où p correspond au nombre d'équation ($p = 4 \times m$) et q est le degré de liberté. Pour le nombre de paramètres définis par l'équation (1), le degré de liberté est égal à 4.

Exemple 1 :

Prenons l'exemple d'arrivées des ondes P_g à la station Δ dans le cas d'un modèle de vitesse homogène et isotrope en coordonnées cartésiennes (pour des exemples plus complexes *c.f.* Lee & Lahr, 1975, p. 97-110). Soit R_Δ , le trajet parcouru par l'onde entre la station et l'hypocentre, avec

$$R_\Delta = \sqrt{(x_\Delta - x_h)^2 + (y_\Delta - y_h)^2 + (z_\Delta - z_h)^2} .$$

Le temps d'arrivée théorique de l'onde P_g est donné par l'équation :

$$f_{P_g \Delta}(\mathbf{x}) = \frac{R_\Delta}{V_P} .$$

On peut ainsi définir les éléments de la A (équation 6), tels que :

$$\frac{\partial f_{P_g \Delta}}{\partial x} = -\frac{x_\Delta - x_h}{V_P R_\Delta} , \quad \frac{\partial f_{P_g \Delta}}{\partial y} = -\frac{y_\Delta - y_h}{V_P R_\Delta} , \quad \frac{\partial f_{P_g \Delta}}{\partial z} = -\frac{z_\Delta - z_h}{V_P R_\Delta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_{P_g \Delta}}{\partial t} = 1 .$$

La solution du problème peut diverger suite à une instabilité potentielle du système mathématique associée, ce qui est généralement le résultat d'une mauvaise géométrie du réseau, d'un modèle de terre mal contraint ou complexe (anisotropie, présence de discontinuités intracrustales, hétérogène, *etc.*), ou d'une anomalie des données. C'est un phénomène commun associé à de nombreux algorithmes itératifs. La solution *a priori* \mathbf{x}_1 doit être proche de la solution finale. Un des paramètres clé est la profondeur *a priori* du séisme (Z_1). On mesure la confiance que l'on peut donner à la solution finale en testant plusieurs \mathbf{x}_1 ; la solution est d'autant plus bonne que Z_1 est proche de la profondeur déterminée par l'inversion (p. ex., Mazabraud, 2004 ; Arroucau, 2006). On peut aussi fixer la profondeur et choisir de ne plus l'inverser.

La méthode de Geiger est donc une méthode fiable, dont les deux principales limites sont la nécessité d'avoir une bonne estimation :

- de la profondeur *a priori* du séisme ;
- du modèle de terre.

Bibliographie

- ARROUCAU, P. (2006) : *Sismicité du Massif Armoricaïn : relocalisations et interprétation tectonique*, thèse de troisième cycle, LPG Nantes, Université de Nantes, 230 p., cit. p. 2.
- LEE, W., & J. LAHR (1975) : *HYP071 (Revised): a computer program for determining hypocenter, magnitude and first-motion pattern of local earthquakes*, U.S. Geological Survey Open File Report, 113 p., cit. p. 2.
- MAZABRAUD, Y. (2004) : *Déformation active d'une région intraplaque à déformation lente : le cas de la France. Sismicité et modélisations thermomécaniques 2D et 3D*, thèse de troisième cycle, Géoazur, Université de Nice Sophia-Antipolis, 220 p., cit. p. 2.
- THURBER, C. (1985) : Nonlinear earthquake location: theory and examples, *Bulletin of the Seismological Society of America* , **75**, 779–790, [Errata in BSSA, 76 (1), p. 328, 1986], cit. p. 1.

Achevé à Nantes, le 16 août 2013.