Lecture 1

1.1 Organisatorisches

Alle Infomationen sind Online zu finden aber für die form von der Mitschrift sollte hier etwas stehen.: Die LVa ist eine UE + Vo.

1.1.1 Übung

Für das Positive absolvieren der Übung benötigt man ca. 60% der Käuze und zwei positive Tafeleistungen. Man darf einmal fehlen + nachbringen aber ohne guten Grund. Für weiteres fehlen braucht man einen guten Grund (meine Oma ist gestoreben, ist ab dem zweiten mal kein guter Grund mehr).

1.1.2 Vorlesung

Die Vorlesung ist ein Tafelvortag. Prüfung teilt sich auf in schriftlich und mündlich. Die schriftliche Prüfung ist als Ticket für die Mündliche zu verstehen. Der stoff der Schriftlichen prüfug sind die Übungsbeispiel. Der Stoff der Mündlichen Prüfung ist der Inhalt der Vorlesung (Wichtig hierbei der Vorlesung heißt nicht ihrgendeine Vorlesung).

1.2 Topologische Grundbegriffe

Da wir für viele Themen die in Analysis 3 behandelt werden, Resultate aus der Mastheorie benötigen, fangen wir mit einigen Grundlagen der Topologie an. Da man für Topologie nix braucht (man muss nur ein bisschen mit Mengen spielen).

Im Folgenden geht es darum den Konvergenz Begriff zu verallgemeinern. Dazu betrachten wir Räume, gerade noch soviel Struktur tragen, dass man von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit und so weiter sprechen kann.

Zur wiederholung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1.2.1 (Offene ϵ-Kugel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und O die Menge aller offenen Teilmengen von X, wobei $O \subsetneqq X$ ist offen, wenn $\forall x \in O \exists \varepsilon > 0$ so dass die ε-Kugel

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

ganz in O enthalten ist. Die Menge $O \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die Eigenschaften:

1. $\emptyset, X \in O$,
2. $O_1, O_2 \in O \implies O_1 \bigcap O_2 \in O$,
3. $O_i \in O, i \in I$ Indexmenge beliebig $\implies \bigcup_{i \in I} O_i \in O$.

Wörtlich bedeutet (1), dass sowohl die leere Menge als auch der ganze Raum offen sind. (2), dass der Schnitt zweier offener Mengen wieder offen ist. Und (3) dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist.

Diese Eigenschaften bilden den Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung. Und wir erhalten die folgende Definition.

Definition 1.2.2: Topologie

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, wenn $\mathcal{T}$ folgende Eigenschaften hat.

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$.

(O2) $\forall n \in \mathbb{N} und O_1, \dots O_n \in \mathcal{T} : \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T},\ i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet man als *topologischen Raum*.

Note:-

Die Bedinnung (O2) kann auch abgespeckter formuliert werden. Es reicht zu fordern, dass

$$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} : O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{T}$$

gilt. Dann folt die allgemeine Formulierung durch Vollständige Induktion.

Beispiel 1.2.3 (Topologien)

(i) **Diskrete Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

(ii) **Indiscrete (Klumpen) Topologie:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(iii) **cofinite Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\}.$$

Proof. Die Beispiele sind so schon sehr schön aber noch schöner sind sie wenn wir nicht nur glauben müssen das es Topologien sind sondern es auch überprüfen können.

(i) Diskrete Topologie: Überprüfung durch hinsehen.

(ii) Indiscrete Topologie: Überprüfung durch hinsehen.

(iii) cofinite Topologie: überprüfen durch genauer hinschauen

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

1. Fall $Y = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$
2. Fall $V = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$ Wähle $O \in V$ dann gilt $X \setminus \bigcap V \subset X \setminus O$ endlich. [a]

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

(O3) Sei $V + \emptyset$, dann gilt $X \setminus \bigcup V = \bigcap_{\text{endlich}}$ ist endlich.

Damit haben wir (Das wir impliziert das es eine art Gruppen arbeit ist. Diese Implikation ist grundlegend falsch was jedem beusucher einer Vorlesung klar sein sollte.) gezeigt das die cofinite Topologie Tatsächlich eine Topologie ist.

☺

[a] $\bigcup V := \{x \mid \forall v \in \mathcal{V} : x \in V\}$

Wir witmen uns nun noch weiteren Beispielen für Topologien.

Beispiel 1.2.4 (Eine durch eine Metrik induziert Topologie)

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. mit $X \times X \to \mathbb{R}$ Dann ist $U_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ eine offene Menge für alle $x \in X$ und $r > 0$. Wir definieren darauf die Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq O\}.$$

Auch hier wollen wir noch zeigen das es sich tatsächlich um eine Topologie handelt.

Proof. Um einzusehen, dass $\mathcal{T}_d$ eine Topologie ist, müssen wir wieder die drei Eigenschaften überprüfen bzw. schon zwei mal hinschauen.... oder dreimal:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$. Wobei

$$X \subseteq X, \quad \forall x \in X,\ r > 0 : \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subseteq X$$

Hierbei ist interessant zu bermerken das die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist, also insbesondere auch eine Teilmenge von der Umgebung $U_r(x)$. Da Eine Menge der Form $U_r(x)$ nie leer sein kann, da $x \in X$ und $d(x,x) = 0 < r$, Das heist das $U_r(x)$ immer zumindest das Element x selbst enthält.

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}_d, x \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $r > 0$ so dass $U_r(x) \subseteq V$. Dann gilt auch

$$U_r(x) \subseteq V \subset \bigcup V$$

.

(O3) Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_d$ endlich, $x \in \bigcap V$. Dann wähle für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $r_V > 0$ so dass $U_{r_V}(x) \subseteq V$ Dann gilt auch

$$U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V \Rightarrow \bigcap_{V \in \mathcal{V}} U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V$$

Das noch etwas genauer aufgetröselt:

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \{y \in X \mid d(x,y) < r_V\} = \{y \in X \mid \forall V \in \mathcal{V} : d(x,y) < r_V\}$$

.

😊

Beispiel 1.2.5 (Geometrische Regression)

Betrachte $\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $l \geq 1$ sei $U_{k,l} := \{k + nl \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Weiters definiere $\mathcal{T} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in = \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq ; U_{k,l} \subset 0\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{Z}$.

(O1) $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei $V \subset \mathcal{T}$, $y \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathbb{Z}, l \geq 1$ so dass $U_{x,l} \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{x,l} \subseteq V \subset \bigcup V$.

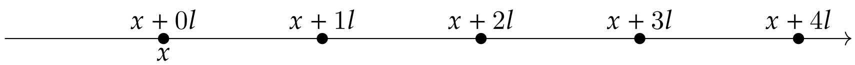
(O3) Sei $V \subset \mathcal{B} endlich x \in \bigcap V$ Ein $V \in \mathcal{V}$ wähle $l_v \in \mathbb{Z}. l_v \geq 1$ so dass $U_{x,l_v} \subseteq V$.

Lecture 2

Jetzt etwas für Bastel intusiasten. Wenn wir eine Metrik haben, dann können wir eine Topologie Basteln. Hirfür definieren wir die Menge:

$$Z : U_{x,l} := x + l\mathbb{Z} = \{x + ln \mid n \in \mathbb{Z}\}, x \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 1$$

.



Das ganze ist sehr lustig, also unanschaulich. Also lustig für Mathematiker halt. Es kann natüich sein das einem der Witz an dem ganzen bis dato noch nicht aufgefallen ist. Aber nach dem man darauf aufmerksam gemacht wurde, ist es sehr lustig.

Betrachten wir also die Topologie:

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall x \in O \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq 1 : U_{x,l} \subseteq O\}$$

- Sei $U_{k,l} \in \mathcal{T}, x \in U_{k,l}$.
  Dann gilt: $U_{x,l} = U_{k,l}$: endlich Denn mit $n_x \in \mathbb{Z} : x = k + n_x l$. erhalten wir:

  - Sei $y \in U_{x,l} : y = x + n_y l = U_{k,l} \ni k + (n_x + n_y)l$.
  - Sei $y \in U_{k,l} : y = k + n_y l = U_{x,l} \ni x + (n'_y - n_x)l$.

- Das folgende ist eine Mengenspielerei und zur Erinnerung: Das gefällt uns!
  Wir betrachten also die Menge

$$\mathbb{Z} \setminus U_{k,l} \in \mathcal{T} : \mathbb{Z} \setminus U_{k,l} = \bigcup_{x=k+1}^{k+l-1} U_{x,l} \in \mathcal{T}$$

  Und weiters

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p} \ldots \{1, -1\}$$

  Hir ist wichtig zu bemerken das die Geometrische Progession unendlich ist und die Menge $\{-1, 1\}$ nicht. Das bedute $\{1, -1\} \notin \mathcal{T}$.
  $= \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \underbrace{\mathbb{Z} \setminus U_{0,p}}_{\in \mathcal{T}}$. $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Prim}\} \Rightarrow \mathbb{P}$ unendlich. Damit haben wir auch gezeigt das die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Definition 2.0.1: Halbordnung auf der Menge der Topologien

Sei X eine Menge. Betrachte

$$\mathbb{T}(x) := \{\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } X\}$$

Die Potenzmenge einer Menge ist in natürlicher Weise halbgeordnet durch die Teilmengenbeziehung $\subseteq$. Damit ist auch $\mathbb{T}(X)$ halbgeordnet durch $\subseteq$. Konkreter definieren wir $\mathbb{T}(X)$ ist eine halbgeordnet mit $\subseteq$

Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}(x)$ Dann ist $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ eine Hablbordnung mit:

$$\forall O \subseteq X : O \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_2$$

Note:-

Definition 2.0.2: Feinheit

Sei X eine Menge, und $\mathcal{T}, \mathcal{V} \in \mathbb{T}(X)$. *Wir sagen* $\mathcal{T}$ *ist* feiner *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, *und sagen* $\mathcal{T}$ *ist* gröber *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$.

Weiters schauen wir uns noch zwei Eigenschaften von $\mathbb{T}(X)$ an .

- $\{\emptyset, X\} \in \mathbb{T}$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T} : \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}$ so wie $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{T}(X)$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) : \mathcal{T} \subset \mathbb{P}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ Dann gilt: $\mathbb{V} \neq \emptyset$[1] hat ein Infimum in $\mathbb{T}(X)$.

Die Erste eigenschaft geht aus vorherigen Beobachtungen hervor. Die zweite Eigenschaft bedarf etwas mehr Arbeit.

Proof. Wir wollen zeigen das jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ ein Infimum hat.

1. Im ersten Schritt wählen wir einen Kandidaten $\mathbb{V}$ in $\mathbb{T}(X)$ Hierfür betrachten wir $\bigcap \mathbb{V} \in \mathbb{T}(X)$
   - Sei $V \in \mathbb{V}$ dann ist $\emptyset \in V$ und $X \in V \Rightarrow \emptyset \in \bigcap \mathbb{V}$ und damit auch $x \in \bigcap \mathbb{V}$
   - Betrachte weiters $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$ und $V \in \mathbb{V}$. Dann gilt:
   $$\mathcal{V} \subseteq V \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \in V \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \in \bigcap \mathbb{V}.$$
   - $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$ endlich und sei $V \in \mathbb{V}$. Dann gilt:
   $$\mathcal{V} \subseteq V \Rightarrow \bigcap \mathcal{V} \in V \Rightarrow \bigcap \mathcal{V} \in \bigcap \mathbb{V}.$$

   Damit sehen wir das unser gewählter Kandidat in der Grundmenge ist - was ihn zu einem guten Kandidatenmacht -. (Hier Politik Bashing einfügen - da, da gibt es zu meißt keinen guten Kandidaten -)

2. Im nächten schritt zeigen wir das $\bigcap \mathbb{V}$ eine Untere Schranke ist:
   Sei $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ dann gilt $\bigcap \mathbb{V} \in \mathbb{T}(X)$
   Mit $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$: fehlt zu zeigen das $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$. Was direkt daraus folgt das $V \in \bigcap \mathbb{V}$: da $V \in \mathcal{V}$

3. Wir zeigen jetzt noch das $\bigcap \mathbb{V}$ nicht nur ihrgend eine unter schranke ist sondern die größte.
   Sei $\mathcal{W} \in \mathbb{T}(X)$ eine untere Schranke von $\mathbb{V}$ - hir ihrgend eine unter schranke - und fragen uns: Was bedeutet es eine untere Schranke zu sein?
   $$\forall V \in \mathbb{V} : \mathcal{W} \subseteq V$$
   Zu zeigen ist noch: $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$. Das heißt $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} : \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Das heißt wiederum $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V}, \forall O \in \mathcal{W} : O \in \mathcal{V}$. also $\forall O \in \mathcal{W} : O \in \bigcap \mathbb{V}$. Das heißt $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$.

☺

Note:-
Jede Menge, die ein Infimum hat und ein größtes Element, dann hat jede Teilmenge auch ein Supremum.

An der Bemerkung angelehnt, wollen wir jetzt noch zeigen, dass jede Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ auch ein Supremum hat.

[1] um Sonderfälle zu vermeiden

Note:-

Korollar 2.0.3 Jede Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ hat ein Supremum.

ergleichen wir das mit der Eigenschaft das $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ ein Infimum hat. Dan Wäre dsa Äquivallent das die vereinigung der Topologien das Supremum ist. Aber im Algemeinen ist die Vereinigung von Topologien keine Topologie.

Proposition 2.0.4

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{S}$[a] $\subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$\bigstar := \left\{ \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} O_{ij} \,\middle|\, I \text{ Menge},\ n_i \in \mathbb{N},\ O_{ij} \in \mathcal{S} \right\}.$$

eine Topologie

[a] Weil S oder $\mathcal{S}$ macht keinen Unterschied - Die begründung begründet etwas -

Proof. Proposition: 2.0.4:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Folgt direkt aus $\mathbb{I} = \emptyset \Rightarrow \emptyset$ und $n_i = 0 \Rightarrow X$,

(O2) Sei $V \subseteq \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

(O3) Es fehlt zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Seien also

$$\bigcup_{i \in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \in \mathcal{T}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Dann gilt

$$\bigcap_{k=1}^{m} \left[\bigcup_{i \in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \right] = \bigcup_{(i_1, \ldots, i_m) \in I_1 \times \cdots \times I_m} \left(\bigcap_{j=1}^{n_{i_1 1}} O_{i_1 j 1} \cap \cdots \cap \bigcap_{j=1}^{n_{i_m k}} O_{i_m j k} \right)$$

und diese Menge ist wieder eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$, gehört also zu $\mathcal{T}$.

☺

Lemma 2.0.5 $\bigstar$ Ist die Kleinste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält.

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\bigstar$ die kleinste [a] Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält

[a] Die gröbste

Proof. Lemma 2.0.5:
jede Topologie, die $\mathcal{S}$ umfasst, muss auch $\mathcal{T}$ umfassen. Also ist $\bigstar \subseteq \mathcal{T}$. ☺

Korollar 2.0.6

Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$. Dann ist $\sup \mathbb{V}$ die von $\bigcup \mathbb{V}$ erzeugte Topologie.

Proof. Korollar 2.0.6:

$$\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} : \sup \mathbb{V} \geq \mathcal{V} \Rightarrow \sup \mathbb{V} \supseteq \bigcup \mathbb{V} \Rightarrow \sup \mathbb{V} \geq \mathcal{R}.$$

😊

Definition 2.0.7: Stetig

Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ topologische Räume, und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig**, wenn

$$\forall O \in \mathcal{V} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}.$$

Muss man sich spezifischer ausdrücken, so sagt man auch: f ist $\mathcal{T}$–$\mathcal{V}$–stetig.[a]

[a] An diesem Punkt ist es angebracht, Panik zu bekommen, da wir hier den Begriff der Stetigkeit mit einer zweiten Definition belegen

2.0.1 Einschub: Metrik

Welche Begriffe kennen wir? - das wir \{Woracheck}- (Er kennt vermutlich auch noch andere Begriffe, von denen wir noch bis jetzt "verschont geblieben" sind.)

- konvergente Folge
- $A \subseteq X$. Der **Innere** von A $(=: \mathring{A})$ ist

$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A \mid \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq A\}.$$

- $A \subseteq X$ heißt **offen** $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
- $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.
- $A \subseteq X$ heißt **Abschluss** von A $(\overline{A})$ ist

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0 : U_r(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ heißt **stetig** $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

- $A \subseteq X$ heißt **kompakt** $\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d. h.

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies \exists I_0 \subseteq I \text{ endlich mit } A \subseteq \bigcup_{i \in I_0} O_i.$$

- **Satz:** f ist stetig $\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ offen.

2.0.2 Definitionen in topologischen Räumen

Definition 2.0.8: Offen und abgeschlossen

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

- $A \subseteq X$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$.
- $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

Lemma 2.0.9 Lemmerchen

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologisch und $A \subseteq X$.

1. $\bigcup \{O \subseteq X \mid O \in \mathcal{T}, O \subseteq A\}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.
2. $\underbrace{\bigcap \{C \subseteq X \mid X \setminus C \in \mathcal{T}, A \subseteq C\}}_{\text{Dieser}}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.

Proof. Lemma 2.1.3:

(ii)+(iii) $\forall C$ aus **Dieser** Menge halt: Erfüllt $C \supseteq A$, so gilt auch $\bigcap \{C \dots\} \supseteq A$.
Denn: $X \setminus \bigcap \{C) \subseteq X \setminus A$. Also ist $\bigcap C \supseteq A$.
Sei $D \subseteq X$, sodass $D \supseteq A$. $\Rightarrow D$ kann noch in $\bigcap C$ enthalten sein.

$$X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) \subseteq X \setminus A \Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \supseteq A.$$

Sei $D \subseteq X$, also $D \supseteq A$.

$$\Rightarrow D \text{ kann nur in } \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \text{ enthalten sein.}$$

😃

Definition 2.0.10: Innere, Äußere und Rand

- Das *Innere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\mathring{B} = \bigcup \{\, O \in \mathcal{T} : O \subseteq B \,\}.$$

- Das *Äußere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\bar{B} = \bigcap \{\, C \subseteq X : X \setminus C \in \mathcal{T}, B \subseteq C \,\}.$$

- Der *Rand* ∂B einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\partial B = \bar{B} \setminus \mathring{B}.$$

Definition 2.0.11: kompakt

Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K, also $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq K,$$

eine endliche Teilüberdeckung besitzt, es also $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ gibt mit

$$V_1 \cup \dots \cup V_n \supseteq K.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\mathrm{cl}(A) \subseteq X$ kompakt ist.
Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X, also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{C}$ die **endliche Durchschnittseigenschaft** hat, wenn für je endlich viele $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ stets

$$C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$$

gilt.

Satz 2.0.12 Zusammenhang Zwischen Metrischen und Topologischen Räumen

Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum. Dann betrahte den Topologischen Raum $\langle X, \mathcal{T}_d \rangle$ mit Dann sind alle Begriffe die wir in metrischen Räumen definiert haben auch in topologischen Räumen definiert.

- $\forall A \subseteq X$: A ist offen im Metrischen sinne $\Leftrightarrow$ A ist offen im topologischen sinne
- usw

Lecture 3

Ein großes Problem in der Mathematik ist die Benennung von Objekten. Hier wird einem diese Problem deutlich vor Augen geführt. Um eine kleine Orientierung zu bieten lege ich jetzt fest, und hoffe, dass ich mich auch daran halte, welche schriftarten ich für welche Objekte festlegen möchte.

Note:-

Notation:

- Standart Menge: $A, B, C, \dots X$
- Umgebungen (Spezifischere Mengen): $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \dots \mathscr{X}$
- Topologie (Menge mit Offenen Mengen): $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \mathcal{X}$
- Filter (Menge mit bestimmten Eigenschaften): $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots \mathfrak{X}$
- Punkte (Elemente der Menge); $a, b, c, \dots x$

Wir haben (leider[1]) noch mehr Objekte, und mehr schriftarten würden nicht zur besseren Übersichtlichkeit beitragen. - Ich persönlich, weiß auch das ich früher oder noch früher durcheinander kommen werde wen ich neben: mathcal, mathbf mathfrak, mathbb, mathscr noch mehr schriftarten verwende.- [2] [3]

Definition 3.0.1: Dicht, Häufungspunkt, Isolierter Punkt

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum und $A \subset X$.

- A ist **dicht** in X, falls $\bar{A} = X$.
- $x \in X$ ist ein **Häufungspunkt** von A, falls: $\forall 0 \in \mathcal{T} : x \in O \Rightarrow 0 \cap A \neq \emptyset$.
- $x \in X$ ist ein **isolierter Punkt** von A, falls: $\exists 0 \in \mathcal{T} : x \in O : 0 \cap A = \{x\}$.

Definition 3.0.2: Umgebung

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $\boldsymbol{\mathcal{U}} \subset X$ heißt **Umgebung** von x, falls

$$\exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset \boldsymbol{\mathcal{U}}$$

.

Definition 3.0.3: Umgebungsfilter

Für eine nichtleere Menge M heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein *Filter* auf M, wenn

[1] Die Mathematik wäre möglicherweise einfacher, mit weniger

[2] Es sind so schon zu vile für meine geschmack.

[3] $\mathcal{S}\mathbf{S}\mathfrak{S}\mathbb{S}\mathscr{S}$

(F1) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(F2) $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$,

(F3) $F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1 \in \mathfrak{F}$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M$.

Lemma 3.0.4

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Menge aller Umgebungen

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$$

von x ein Filter auf X.

Proof. Lemma: 3.0.4
Wir überprüfen die Filtereigenschaften.:

(F1) $x \in \mathcal{U}(x)$ und $X \in \mathcal{T}, x \in X \subseteq X$ Damit haben wir

$$\emptyset \notin \mathcal{U}(x) \text{ und } \forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U$$

(F2) $U_1, U_2 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$ $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ mit $x \in O_1 \subseteq U_1,\ x \in O_2 \subseteq U_2$

$$\Rightarrow x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$$

(F3) $U \in \mathcal{U}(x), V \supseteq$ Wähle

$$O \in \mathcal{T} \text{ und } x \in O \subseteq \mathcal{U} \subseteq V$$

☺

Hir ist meine Notationelle einführung schon an seine Grenze gekommen. Wie nehmen sie die Menge (Also U) aller Umgebungen von x und nennen sie $\mathcal{U}(x)$. aber wir zeigen das es ein Filter ist. Damit wäre ja $\mathfrak{U}(x)$ die Richtige Notation. - Ich wil konsistent bleiben aber habe es schon aufgegeben. -

Proposition 3.0.5

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Top-Raum und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Top-Raum Dann gilt:

1. $\forall O \in X \Leftrightarrow (\forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x))$
2. Sei $f : X \to Y$, dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X \forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \in \mathcal{U}^X(f(x)) \exists u \in \mathcal{U}^Y(f(x)) : f(u) \subseteq \mathcal{U}^Y(f(U)) \subseteq V$$

3. Sei $A \in X$, dann ist $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall u \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset\}$

Proof. Prop: 3.0.5

1. "$\Rightarrow$" Sei $x \in O \in \mathcal{T}$, dann gilt:

$$x \in O \subseteq 0$$

"$\Leftarrow$" $\forall x \in O$ wähle $\mathcal{Q}_x \subseteq O$ Dann haben wir:

$$\{x\} \subseteq O_x \subseteq O \Rightarrow \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in O} \mathcal{Q}_x}_{\text{Offen}} \subseteq \bigcup_{x \in O} O = O$$

2."$\Rightarrow$" Sei $x \in X$, $V \in \mathcal{U}^Y(f(x))$. Wähle $Q \in \mathfrak{B}$
mit $f(x) \in Q \subseteq V$
$\Rightarrow f^{-1}(Q) \in \mathcal{T}$ Das Folgt aus unseer Charakterisierung von stetigen Funktionen.
Betrachte $x \in f^{-1}(Q) \in \mathcal{U}^X(x)$ damit haben wir:

$$f(f^{-1}(Q)) \subseteq Q \subseteq \mathfrak{B}$$

"$\Leftarrow$" Sei $O \in \mathfrak{B}$ Wir wollen zeigen dass, das Vollständige Urbild wieder offen ist. Sei $x \in f^{-1}(O)$, d.h. $(f(x) \in O \Rightarrow O \in \mathcal{U}^Y(f(x)))$
Wähle $U \in \mathcal{U}^X(x)$ mit $f(U) \subseteq O$

$$\Rightarrow U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(O)$$

und

$$U \in \mathcal{U}^X(x) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{U}^X(x) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$$

3. "$\subseteq$" Sei $x \notin \overline{A}$, d.h. $x \in X \setminus \overline{A}$ (Wobei $X \setminus \overline{A}$) ist offen $:\leftrightarrow$ Offen $\Leftrightarrow X \setminus \overline{A} \in \mathcal{U}(x)$

$$\overline{A} \supseteq A \Rightarrow X \setminus \overline{A} \Rightarrow A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$$

"$\supseteq$" Sei $x \in X$ und $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset$ wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$

$$\Rightarrow O \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \setminus O$$
$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq X \setminus O \Rightarrow x \in \overline{A}$$

☺

Lemma 3.0.6

- $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer-Raum, dann ist id_X stetig.
- $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ und $\langle Z, \mathcal{W} \rangle$ Topologische-Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Proof. Lemma: 3.0.6

- $X \xrightarrow{id:X} X$ Sei $O \in \mathcal{T}$, dann gilt:
$$id_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}$$
- $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ Sei $O \in \mathcal{W}$, dann gilt:

$$g^{-1}(O) \in \mathcal{V} \text{ und } f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$$
$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$$
$$\Rightarrow g \circ f \text{ ist stetig.}$$

☺

Note:-

Zur wiederholung: Aus Analysis 1 wissen wir das jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.

Proof. Eindeutigkeit des Grenzwerts
Seien $x_n \to x$ und $x_n \to y$ mit $x \neq y (\Leftrightarrow d(x,y) > 0)$.
Wähle $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \frac{d(x,y)}{3} \forall n \geqslant N_1$, und $d(x_n, y) < \frac{d(x,y)}{3}\ \forall n \geqslant N_2$.

Dann folgt für $N := \max\{N_1, N_2\}$ der Widerspruch:

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_N) + d(x_N,y) < \frac{d(x,y)}{3} + \frac{d(x,y)}{3} = \frac{2\,d(x,y)}{3} < d(x,y).$$

😄

Im Folgenden Betrachten wir Hausdorff-Räume. Das sind Räume in denen sich Punkte trennen lassen (Die T2-Eigenschaft bzw. Hausdorff-Eigenschaft). Diese Eigenschaft ist im Grunde vergleichbar mit der Eindeutigkeit von Grenzwerten in metrischen Räumen.

Definition 3.0.7: Hausdorff-Raum

Ein topologischer Raum $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ heißt *Hausdorff-Raum* oder $(T2)$-*Raum*, wenn folgendes Trennungsaxiom erfüllt ist:

(T2) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es disjunkte offene Mengen O_x und O_y mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$.

Bevor wir weiter mit der Hausdorff-Eigenschaft arbeiten, betrachten wir bzw definieren wir noch gerichtete Mengen.
Die nebenbei viel mehr sinn machen um das Riemann Integral zu definieren.

Definition 3.0.8: Gerichtete Menge

Sei I eine nicht leere Menge und $\leqslant$ eine Relation auf I. Dann heißt $(I, \leqslant)$ eine *gerichtete Menge*, wenn $\leqslant$ folgenden drei Bedingungen genügt:

- **Reflexivität:**
$$\forall i \in I: \; i \leqslant i.$$
- **Transitivität:**
$$\forall i,j,k \in I: \; (i \leqslant j \wedge j \leqslant k) \Rightarrow i \leqslant k.$$
- **Richtungseigenschaft:**
$$\forall i,j \in I \; \exists k \in I: \; i \leqslant k \wedge j \leqslant k.$$

Nach dem Wir jetzt wissen was eine gerichtete Menge ist, können wir uns auchgleich die Riemansumme anschauen.

Beispiel 3.0.9 (Riemansumme)

Wir nennen das Paar
$$\mathcal{R} = \left((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, (\eta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}\right)$$
eine *Riemann-Zerlegung* eines Intervalls $[a,b]$, falls
$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{R})} = b, \qquad \eta_j \in [\xi_{j-1}, \xi_j], \quad j = 1, \ldots, n(\mathcal{R}),$$
und nennen
$$|\mathcal{R}| := \max\{\, \xi_j - \xi_{j-1} \; ; \; j = 1, \ldots, n(\mathcal{R}) \,\}$$
die *Feinheit der Zerlegung*.
Weiter sei
$$\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 \; :\Longleftrightarrow \; |\mathcal{R}_2| \leqslant |\mathcal{R}_1|$$

Ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller solcher Zerlegungen, dann ist $(\mathfrak{R}, \preceq)$ eine gerichtete Menge. In diesem Beispiel ist $\preceq$ sicher nicht antisymmetrisch.

Dieser gerichteten Menge und der aus dem letzten Beispiel werden wir bei der Einführung des Integrals wieder begegnen.

Proposition 3.0.10

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ein Hausdorff-Raum.

(ii) Jede Folge in X hat höchstens einen Grenzwert

Proof. Prop: 3.0.9

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wären x, y zwei verschiedene Grenzwerte, so könnten wir disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ wählen und infolge $i_1 \in I$ und $i_2 \in I$ derart wählen, dass

$$x_i \in U \quad \text{für alle } i \geqslant i_1 \qquad \text{und} \qquad x_i \in V \quad \text{für alle } i \geqslant i_2.$$

Da I gerichtet ist, gibt es ein $i \in I$ mit $i \geqslant i_1$ und $i \geqslant i_2$, und daher $x_i \in U \cap V$, was aber im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$ steht.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Beweis durch contraposition.([$\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i)])

- Wir definieren eine gerichtete Menge:
  Wähle $x, y \in X$ und $x \neq y$.
  Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist, existieren offene Mengen $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ mit

$$x \in O_x, \quad y \in O_y \quad \text{und} \quad O_x \cap O_y = \varnothing.$$

  Sei nun

$$I := \{ (O_1, O_2) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid x \in O_1 \ \wedge \ y \in O_2 \}$$

  und definiere die Ordnung

$$(O_1, O_2) \preceq (O_1', O_2') \ :\Longleftrightarrow \ O_1' \subseteq O_1 \ \wedge \ O_2' \subseteq O_2.$$

- Damit ist $(I, \preceq)$ gerichtet.

  * Reflexivität:

$$(O_x, O_y) \in I \text{ und } (O_x, O_y) \preceq (O_x, O_y)$$

    .

  * Transitivität: Für $(O_1, O_2) \preceq (O_1', O_2')$ und $(O_1', O_2') \preceq (O_1'', O_2'')$ gilt offensichtlich auch

$$(O_1, O_2) \preceq (O_1'', O_2'')$$

    .

  * Richtungseigenschaft: Für $(O_1, O_2), (O_1', O_2') \in I$ ist

$$(O_1 \cap O_2, \ O_1' \cap O_2') \in I$$

    ist gröber

- Die Menge $\{O_1 \cap O_2 \mid (O_1, O_2) \in I\}$ ist nicht leer, da $(x, y) \in I$.
  Wähle nun eine $\alpha : I \to \bigcup_{(O_1,O_2)\in I}$ eine Abbildung
  mit
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : \alpha(O_1, O_2) \in O_1 \cap O_2$$
  [4]
- Es fehlt noch zu zeigen, dass α ein konvergiertes Netz ist.
  $$\lim_{(O_1,O_2)} \alpha(O_1, O_2) = x.$$
  Sei $U \in \mathscr{U}(x)$, wähle $O \in \mathcal{T} : x \in O \subseteq U$
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : \exists\ O \Rightarrow (O_1, O_2) \geq (O, O_x) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \subseteq O_1 \subseteq O$$ [5]
  mit $i_0 := (O, x)$
  Auf der anderen Seite haben wir:
  $\forall (O_1, O_2) \in I : O_2 \subseteq O$ (Das selbe spiel umgekehrt)
  Sei $U \in \mathscr{U}(y)$, wähle $O \in \mathcal{T} : y \in O \subseteq U$
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : O_2 \subseteq O \Rightarrow \alpha((O_1, O_2)) \in O_1 \cap O_2 \subseteq O_2 \subseteq O \subseteq U$$

😄

Die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) hat keinen wirklichen Mehrwert - Ausser dass wir über zwei offene Mengen indexiert haben (WOW)-. Wir haben diese Richtung also Vorallem dem Beweis zu zu liebe gemacht.

[4] Das ist die Stelle an der das Auswahlaxiom verwendet wird. Also lobtpreiset das Auswahlaxiom. (Das Auswahlaxiom ist in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht beweisbar, aber auch nicht widerlegbar.)

[5] Das geht wegen dem Auswahl axiom

Lecture 4

Um Die Volgenden Sachverhalte leichter einsehen zu können macht es sinn sich zuerst schon bekannte Objekte/Dinge/Sachverhalte vor Augen zu führen.

Figure 4.1: https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/

In diesem Fall macht es vorallem sinn Folgen zu betrachten. Sei also α eine Abbildung von $\mathbb{B} \to X$ also die Folge $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots \alpha(n), \dots$ Weiters betrachte die Abbildung $\beta : \mathbb{N} \to X$ wobei wir β als Teilfolge von α bezeichnen. Wen es eine streng monoton wachsende Abbildung $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass $\beta(n) = \alpha(k(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\alpha"] & X \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\kappa"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$$\text{mit} \quad \beta = \alpha \circ \kappa$$

Definition 4.0.1: Teilnetz

Sind $(I, \preceq_I)$ und $(J, \preceq_J)$ zwei gerichtete Mengen, ist X eine Menge und $\alpha : I \to X$ ein Netz in X, Und $\kappa : J \to I$ ein Funktion, so das

$$\bigstar \forall i_0 \in I \; \exists j_0 \in J : \; \forall j \succeq_J j_0 \Rightarrow \kappa(j) \succeq_I i.$$

Dann ist $\alpha \circ \kappa : J \to X$ ein **Teilnetz** von α. Ist $(J, \preceq_J) = (\mathbb{N}, \leqslant)$, dann wäre $\alpha \circ \kappa : J \to X$ Eine **Teilfolge**.

Note:-

Seien $\langle I, \preceq_I \rangle$ und $\langle J, \preceq_J \rangle$ gerichtete Mengen und $\kappa : J \to I$ eine monotine Abbildung. wenn

- κ monoton
- $\forall i \in I \exists j_0 \in J : \kappa(j_0) \succeq_I i$

dann ist $\alpha \circ \kappa(j)$ ein Teilnetz von α.

Proof. Beweis der Implikation:
Sei $i_0 \in I$ beliebig. Dann gibt es ein $j_0 \in J$ mit $\kappa(j_0) \geq_I i_0$. Für alle $j \geq_J j_0$ gilt $\kappa(j) \geq_I \kappa(j_0) \geq_I i_0$. ☺

Das soll *nicht* zur verwirrung führen. Aber:
Der implikationspfeil ist in disem Fall nicht nur eine Stylistische entscheidung. und wir erfahrne später das es sich eigentlich um eine aquivalenz handelt. Es handlet sich also wirklich nur um eine Implikation (dh. die andere richtung gilt nicht) In der Mathematischen Literatur wird anstelle von unserer Definition von Teilnetzen Die eigenscchaften der Bemerjung als Definition verwendet.

Satz 4.0.2

ei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $(I, \leq_I)$ gerichtete Menge, $\varphi : I \to X$, Netz in X, $x \in X$.
Dann sind äquivalent:

(i) φ konvergiert gegen x.

(ii) Jedes Teilnetz von φ konvergiert gegen x.

(iii) Jedes Teilnetz von φ hat ein Teilnetz, das gegen x konvergiert.

Proof. Satz: 4.0.2:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\langle J, \leq_J \rangle$ und$\kappa : J \to I$ ein Teilnetz von φ also erfüllt $\bigstar$.
Sei $U \in textU(x)$ Wähle $i_0 \in I$ so dass $\forall i \geq_I i_0 : \varphi(i) \in U$ Nach $\bigstar$ gibt es ein $j_0 \in J$ so dass $\forall j \geq_J j_0 : \kappa(j) \geq_I i_0$. Also gilt für alle $j \geq_J j_0$:

$$\varphi(\kappa(j)) \in U$$

Also konvergiert das Teilnetz gegen x.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jedes Netz ist ein Teilnetz von sich selbst. $I \xrightarrow{\text{id}} I \xrightarrow{\text{id}} X$ Sei $\varphi \circ \kappa$ Teilnetz von $\varphi \Rightarrow \varphi \circ \kappa$ konvergiert gegen $x \Rightarrow \varphi \circ \text{id}$ konvergiert gegen x.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Für diese richtung verwenden wir Kontraposition. - Weil wir das schon länger nicht gemaht haben -
$\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$:
Wähle $U \in \mathcal{U}(x)$ $\forall i_0 \in I \exists i \geq i_0$ sodass $\varphi(i) \notin U$

$$(**) \quad J := \{i \in I \mid \varphi(i) \notin U\} \subseteq I$$

Diesmal ist es leichter, die Bemerkung zu verwenden
Definiere $j_1, j_2 \in J : j_1 \leq_J j_2 :\Leftrightarrow j_1 \leq_I j_2$.
- Die Einschränkung der Ordnung auf I als Ordnung auf J -
Damit ist $(J, \leq_J)$ reflexiv und transitiv. Seien $j_1, j_2 \in J$. Wähle $i \in I : j_1 \geq_I i, j_2 \geq i. \Rightarrow j_1 \geq i, j_1 \geq_J i, j_2 \geq_J i$.

$\Rightarrow (J, \geq_J)$ ist gerichtete Menge.

Definiere:

$$\kappa : \begin{cases} j \mapsto j \\ i \mapsto i \end{cases}$$

Sei $i \in I$. Wegen $(**)$ wähle $j_0 \in I$ sodass $\varphi(j_0) \notin U$. $j_0 \in J$.

Sei $(K, \leq_K)$ eine gerichtete Menge, mit $\lambda : K \to J$ mit $(\bigstar)$. Also $(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda : K \to X$.

Angenommen

$$\lim_{k \in K} [(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda](k) = x.$$

Wähle $k_0 \in K : \forall k \geq k_0 : [(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda](k) \in U$.
Was ein Widerspruch ist, da $\varphi(\kappa(\lambda(k_0))) \notin U$ Per definition von $(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda$.

😃

Wir sehen also im, vergleich zu Folgen haben wir keine Index schlacht mehr. Dafür haben wir jetzt sehr vile abbildungen $\circ$ abbildungen.

Satz 4.0.3

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

(i) $A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $\varphi : I \to A \subseteq X$ in A, das gegen $x \in X$ konvergiert, gilt $x \in A$.

(ii) Sei $\langle Y, \mathcal{S} \rangle$ ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $\alpha : I \to X$ in X, das gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt,

$$\lim_{i \in I} \alpha(i) \leftarrow \lim_{i \in I} (f \circ \alpha)(i) = f(x)$$

.

Der zweite punkt ist so zu verstehen das wenn x eine grenzwert von α ist dann ist $f(x)$ der grenzwert von $f \circ \alpha$ Der Grenzwert muss hir nicht eindeutig sein.

Proof. Satz: 4.03:

"(i)$\Rightarrow$" Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, angenommen $\alpha : I \to A$ ist ein Netz in X, mit $x \in X$. So dass $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$. und $x \notin A$. Sei $U := X \setminus A \in \mathcal{U}(x)$. aber $\forall i \in I : \alpha(i) \in A \Rightarrow \alpha(i) \notin U$.

"(i)$\Leftarrow$" Sei $A \subseteq X$ nicht abgeschlossen. Dann ist $X \setminus A$ nicht offen. Also gibt es ein $x \in X \setminus A$ so dass $\forall U \in \mathcal{U}(x)$: $U \not\subseteq X \setminus A$. $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : \neg(U \subset X \setminus A)$ (dh.: $U \cap A \neq \emptyset$). Wähle $\alpha : \mathcal{U}(x) \to X$ mit $\alpha(U) \in U_1$. Das können wir dank des Auswahlaxioms. So machen Für $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_1 \preceq U_2 :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$. Sei $\langle \mathcal{U}(x), \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Also Transitivität und Reflexivität sind klar. Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$. Wähle $U_3 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dann ist $U_3 \preceq U_1$ und $U_3 \preceq U_2$. Also ist $\langle \mathcal{U}(x), \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$.
α ist konvergent gegen x. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Setze $U_0 := U$. Sei $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \preceq U_0$. Das heißt $V \subseteq U_0$. Also gilt $\alpha(V) \in V \subseteq U_0$. Damit haben wir ein netz in A gefunden das gegen x konvergiert.

(ii)"$\Leftarrow$" Sei $\alpha : I \to A$ ein Netz in X mit $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$. $A \subseteq \bar{\{A\}}$

"(ii)$\Rightarrow$" Sei $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

"(i)$\Rightarrow$(ii)" Sei $A \subseteq Y$ Abgeschlossen Und $alpha : I \to f^{-1}(A)$, mit $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$, $x \in X$. $\Rightarrow \lim_{i \in I} (f \circ f_\alpha)(i) = f(x)$ Da $(f \circ f_\alpha)(i) \in A$ für alle $i \in I$, folgt $f(x) \in \overline{A} \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

😃