Lecture 1

1.1 Organisatorisches

Alle Infomationen sind Online zu finden aber für die form von der Mitschrift sollte hier etwas stehen.: Die LVa ist eine UE + Vo.

1.1.1 Übung

Für das Positive absolvieren der Übung benötigt man ca. 60% der Käuze und zwei positive Tafeleistungen. Man darf einmal fehlen + nachbringen aber ohne guten Grund. Für weiteres fehlen braucht man einen guten Grund (meine Oma ist gestoreben, ist ab dem zweiten mal kein guter Grund mehr).

1.1.2 Vorlesung

Die Vorlesung ist ein Tafelvortag. Prüfung teilt sich auf in schriftlich und mündlich. Die schriftliche Prüfung ist als Ticket für die Mündliche zu verstehen. Der stoff der Schriftlichen prüfug sind die Übungsbeispiel. Der Stoff der Mündlichen Prüfung ist der Inhalt der Vorlesung (Wichtig hierbei der Vorlesung heißt nicht ihrgendeine Vorlesung).

1.2 Topologische Grundbegriffe

Da wir für viele Themen die in Analysis 3 behandelt werden, Resultate aus der Mastheorie benötigen, fangen wir mit einigen Grundlagen der Topologie an. Da man für Topologie nix braucht (man muss nur ein bisschen mit Mengen spielen).

Im Folgenden geht es darum den Konvergenz Begriff zu verallgemeinern. Dazu betrachten wir Räume, gerade noch soviel Struktur tragen, dass man von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit und so weiter sprechen kann.

Zur wiederholung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1.2.1 (Offene ϵ-Kugel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und O die Menge aller offenen Teilmengen von X, wobei $O \subsetneqq X$ ist offen, wenn $\forall x \in O \exists \varepsilon > 0$ so dass die ε-Kugel

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

ganz in O enthalten ist. Die Menge $O \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die Eigenschaften:

1. $\emptyset, X \in O$,
2. $O_1, O_2 \in O \implies O_1 \bigcap O_2 \in O$,
3. $O_i \in O, i \in I$ Indexmenge beliebig $\implies \bigcup_{i \in I} O_i \in O$.

Wörtlich bedeutet (1), dass sowohl die leere Menge als auch der ganze Raum offen sind. (2), dass der Schnitt zweier offener Mengen wieder offen ist. Und (3) dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist.

Diese Eigenschaften bilden den Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung. Und wir erhalten die folgende Definition.

Definition 1.2.2: Topologie

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, wenn $\mathcal{T}$ folgende Eigenschaften hat.

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$.

(O2) Aus $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T},\ i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet man als *topologischen Raum*.

Beispiel 1.2.3 (Topologien)

(i) **Diskrete Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

(ii) **Indiscrete (Klumpen) Topologie:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(iii) **cofinite Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\}.$$

Note:-

Wir überprüfen das die cofinite Topologie eine Topologie ist.
Um das eizuhsehen muss man kurz hinschauen. Im Vergleich dazu muss man das bei der diskreten und indiscrete Topologie nicht machen.

(O1) Sei $V \subset \mathcal{T}$:

1. Fall $Y = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$
2. Fall $V = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$ Wähle $O \in V$ dann gilt $X \setminus \bigcap V \subset X \setminus O$ endlich. [a]

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

(O3) Sei $V + \emptyset$, dann gilt $X \setminus \bigcup V = \bigcap_{\text{endlich}}$. ist endlich

Damit haben wir (Unser Professor alias Mathegott in der Vorlesung) gezeigt das die cofinite Topologie Tatsächlich eine Topologie ist -auch wen man schon mal hinschauen muss um das zu sehen-.

[a] $\bigcup V := \{x \mid \forall v \in \mathcal{V} : x \in V\}$

Wir witmen uns nun noch weiteren Beispielen für Topologien.

Beispiel 1.2.4 (Eine durch eine Metrik induziert Topologie)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. mit $X \times X \to \mathbb{R}$ Dann ist $U_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ eine offene Menge für alle $x \in X$ und $r > 0$. Wir definieren darauf die Topologie

$$\mathcal{T} = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq O\}.$$

Um einzusehen, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist, müssen wir die drei Eigenschaften überprüfen bzw. schon zwei mal hinschauen. ...oder dreimal:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}, x \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $r > 0$ so dass $U_r(x) \subseteq V$. Dann gilt auch $U_r(x) \subseteq V \subset \bigcup V$.

(O3) Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ endlich, $x \in \bigcap V$. Dann für jedes $V \in \mathcal{V}$ wähle $r_V > 0$ so dass $U_{r_V}(x) \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V \Rightarrow \bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V$. Das noch etwas genauer aufgetröselt: $\bigcap\limits_{V \in \mathcal{V}} \{y \in X \mid d(x,y) < r_V\} = \{y \in X \mid \forall V \in \mathcal{V} : d(x,y) < r_V\}$.

Beispiel 1.2.5 (Geometrische Regression)

Betrachte $\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $l \geq 1$ sei $U_{k,l} := \{k + nl \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Weiters definiere $\mathcal{T} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in = \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq ; U_{k,l} \subset 0\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{Z}$.

(O1) $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei $V \subset \mathcal{T}$, $y \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathbb{Z}, l \geq 1$ so dass $U_{x,l} \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{x,l} \subseteq V \subset \bigcup V$.

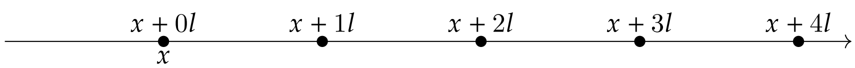
(O3) Sei $V \subset \mathcal{B} endlich x \in \bigcap V$ Ein $V \in \mathcal{V}$ wähle $l_v \in \mathbb{Z}. l_v \geq 1$ so dass $U_{x,l_v} \subseteq V$.

Lecture 2

Für alle handwerklich begabten wird es jetzt interessant. - Ich vermute das die Schnittmenge zwischen mathematik Studenten und handwerklich begabten gering ist - Aber wenn wir eine Metrik haben, dann können wir eine Topologie Basteln. Hirfür definieren wir die Menge:

$$Z : U_{x,l} := x + l\mathbb{Z} = \{x + ln \mid n \in \mathbb{Z}\}, x \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 1$$

.



Das ganze ist sehr lustig, also unanschaulich. Also lustif für Mathematiker halt. Es kann natüich sein das einem der Witz an dem ganzen bis dato nicht aufgefallen ist. Aber nach dem man darauf aufmerksam gemacht wurde, ist es sehr lustig.

Betrachten wir also die Topologie

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall x \in O \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq 1 : U_{x,l} \subseteq O\}$$

- Sei $U_{k,l} \in \mathcal{T}, x \in U_{k,l}$.
  Dann gilt: $U_{x,l} = U_{k,l}$ endlich Denn mit $n_x \in \mathbb{Z} : x = k + n_x l$. erhalten wir:

  – Sei $y \in U_{x,l} : y = x + n_y l = U_{k,l} \ni k + (n_x + n_y)l$.
  – Sei $y \in U_{k,l} : y = k + n_y l = U_{x,l} \ni x + (n'_y - n_x)l$.

- Das folgende ist eine Mengenspielerei und zur Erinnerung: Das gefällt uns!
  Wir betrachten also die Menge

  $$\mathbb{Z} \setminus U_{k,l} \in \mathcal{T} : \mathbb{Z} \setminus U_{k,l} = \bigcup_{x=k+1}^{k+l-1} U_{x,l} \in \mathcal{T}$$

  Und weiters

  $$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p} \ldots \{1, -1\}$$

  Hir ist wichtig zu bemerken das die Geometrische Progession unendlich ist und die Menge $\{-1, 1\}$ nicht. Das bedute $\{1, -1\} \notin \mathcal{T}$.
  $= \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \underbrace{\mathbb{Z} \setminus U_{0,p}}_{\in \mathcal{T}}$. $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Prim}\} \Rightarrow \mathbb{P}$ unendlich. Damit haben wir auch gezeigt das die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Definition 2.0.1: Halbordnung und Infimum

Sei X eine Menge. Betrachte $\mathbb{T}(x) := \{\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{Topologie auf } X\}$. Dan nennen wir

1. $\mathbb{T}(X)$ ist halbgeordnet mit $\subset$ Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}(x)$ Dann ist $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ Eine Hablbordnung das heißt $\forall O \subseteq X : O \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_2$

2. Weiters betrachten wir $\{\emptyset, X\} \in \mathbb{T}$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T} : \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}$ $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{T}(X)$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) : \mathcal{T} \subset \mathbb{P}$
3. $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ Dann gilt: $\mathbb{V} \neq \emptyset$ hat ein Infimum in $\mathbb{T}(X)$.