# Lecture 1

Da ich eine Persönliche Dragödia hatte (ich habe mein Tablet vergessen), konnte ich nicht alles mitschreiben. Aber an dieser stelle möchte ich mich herzlich bei meinen Vater bedanken, der mir das Tablet gebracht hat. Daher gibt es zumindest den zweiten Teil der Vorlesung. Mit etwas Glück kann ich den ersten Teil auch noch nachliefern wen mir jemand seine Notizen zur Verfügung stellt. (Das ist eine implizit vormulierte Bitte !)

Figure 1.1: Begging Monk by John Kenn Mortensen
https://creativecommons.org/publicdomain/zero/1.0/deed.en

**Korollar 1.0.1** Um das Lemma anzuwenden

ei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ Punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}, A, B \subseteq X$ Abgeschliossen, $A \cap B = \emptyset$.

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \exists f \in A : \forall x \in X : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \forall x \in B : f(x) \geqslant 1 - \epsilon$$

*Proof.* $\mathcal{A} = \emptyset$.Dann ist das ganze trivial. Sei also $A \neq \emptyset$. Für $a \in A$ Wähle $V_a \in \dashv$ offen.
Und $V_a \cap B = \emptyset$

**Note:-**

$x, y \in$ X$, x \neq y$ Wähle $f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$ Dann:

$$f^{-1}((f(x) - \delta, f(x) + \delta)), f^{-1}((f(y) - \delta, f(y) + \delta))$$

Dann wähle $\delta := |\frac{f(x) - f(y)}{3}|$.
Dann sind die beiden Mengen disjunkt.
(Beweis $\langle X, d \rangle$ erfüllt (T2))

$A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a \Rightarrow$ Wähöe $a_1, \ldots, a_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$

## 1.1 Korrektur

In der Vorlesungvom 2025.11.04 gab es eine kleine große verwirrung. Also ich habe nicht nur mein Tablet vergessen, es ist noch mehr schief gegeanen (What a day). Aufjedenfall hat uns, unser Professor (The one and only Woracek) eine Korrektur zukommen lassen. Hier ist sie:

**Lemma 1.1.1** Das Lemma (starke Variante)

$\forall A \subseteq X$ abgeschlossen

$$\forall z \in X \setminus A \exists V \subseteq X \forall \epsilon > 0 \exists f \in \mathcal{A}$$

sodass
V ist offene Umgebung von z

$$\wedge V \cap A = \emptyset \wedge \forall x \in X : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \wedge \forall x \in V : f(x) \leqslant \epsilon \wedge \forall x \in A : f(x) \geqslant 1 - \epsilon$$

*Proof.* Lemma 10.1.1 (starke Variante)
Wir gehen den beweis schritt für schritt durch

Schritt 1: hier haben wir gezeigt dass

$\forall A \subseteq X$ abgeschlossen

$$\forall z \in X \setminus A \exists V \subseteq X \exists h \in \mathcal{A} \exists \delta \in (0, 1]$$

sodass

$V$ ist offene Umgebung von z

$$\wedge V \cap A = \emptyset \wedge \forall x \in X : 0 \leqslant h(x) \leqslant 1 \wedge \forall x \in V : h(x) \leqslant \delta/3 \wedge \forall x \in A : h(x) \geqslant \delta$$

Schritt 2: hier haben wir gezeigt dass

Sei h wie in Schritt 1 und definiere $p_n := (1 - h^n)^{k^n}$. Dann gilt "$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = 0$ gleichmaessig für $x \in Aund$ $\lim_{n \to \infty} p_n(x) = 1$ gleichmaessig für $x \in V$".

Der Beweis des oben stehenden Lemmas (starke Variante) ist nun fertig, weil:

Seien A,z gegeben. Waehle V wie in Schritt 1 . Sei $\epsilon > 0$gegeben. Waehle n so gross, dass

$$p_n(x) \leqslant \epsilon fuerallex \in A$$

und

$$p_n(x) \geqslant 1 - \epsilon \forall x \in V.Setzef := 1 - p_n.$$

zum Korollar:

**Korollar 1.1.2**
$\forall A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt
$$\forall \epsilon > 0 \exists f \in \mathcal{A}$$
sodass
$$\forall x \in X : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \wedge \forall x \in A : f(x) \leqslant \epsilon \wedge \forall x \in B : f(x) \geqslant 1 - \epsilon$$

*Proof.* Korollar: 10.1.2
Seien $A, B, \epsilon$ gegeben

- Fuer jedes $z \in A$wenden wir das Lemma an mit der Menge B und dem Punkt z. Dies gibt $V_z$.
- Nun reichen endlich viele $V_z$ aus um A zu ueberdecken, waehle solche: $V_{z_1}, \ldots, V_{z_N}$.
- Aus der Eigenschaft des Lemmas waehle nun $f_{z_j}$ für $\epsilon/N$
- Betrachte das Produkt dieser $f_{z_j}$. Mit Bernoullischer Ungleichung sieht man dass das Gewuenschte gilt.

## 1.2 Weiter in der Vorlesung

Nach diesem einschub kommen wir nun zum Nächsten Punkt (alias Satz 10.2.4)

**Satz 1.2.1**

Sei $X$ Kompakt, $C(CX, \mathbb{R})$ mit Unteralgebra, nirgends verschwindend und abgeschlossen bezüglich Komplexer konjugation. $\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{\infty} = C(X, \mathbb{R})$

*Proof.* Satz; 10.2.1
Sei $B = \{f \in \mathcal{A} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Es gelte $\forall \in \mathcal{A} : Ref, imf \in B : Ref = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$
$Imf = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$
Sei $x \in X$ Wähle $f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y) \Rightarrow$ entweder $Ref(x) \neq Ref(y)$ oder $Imf(x) \neq Imf(y) \Rightarrow B$ ist punktetrennend.
Aus dem Korollar folgt nun $\overline{B}^{\infty} = C(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{\infty} = C(X, \mathbb{R})$ Sei $f \in C(X, \mathbb{C})$ $Ref \in \overline{B}^{\infty} \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\infty} \Rightarrow f = Ref + iImf \in \overline{\mathcal{A}}^{\infty}$

**Satz 1.2.2**

$X$ kompakt, $T_2$. $C(X, \mathbb{R}) \supseteq \mathcal{A}$ Unteralgebra $\Rightarrow \mathcal{A}$ ist:
$$\mathcal{A}^{t^*} := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \ |, \ker f \supseteq \bigcap_{g \in \mathcal{A}} \ker g\}.$$

*Proof.* 10.2.2

"$\subseteq$": Sei $f \in \mathcal{A}^{t^*}$.
Wähle $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in \mathcal{A}$ mit $g_n \to f$.
$\forall x, y$ mit $e(x) = e(y)$ gilt:
$0 \in \ker g_n \quad \Rightarrow \quad g_n(x) = g_n(y)$ für alle $n$.
$\Rightarrow g_n(x) = g_n(y) \to f(x) = f(y)$.

"⊇" Betrachte
$$Y := X \Big/ \bigcap_{g \in \mathcal{A}} \ker g.$$

Sei $q : X \to Y$ stetig.
$\Rightarrow \ker q$ ist Algebra.
$e(x_1) = e(x_2) \Rightarrow q(x_1) = q(x_2)$.