TU Wien • WS20/21

Abschrift und Zusammenfassung

der VO Unterlagen von Hr. Prof. Woracek

Analysis 3

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Topologische Räume und stetige Funktionen

1.1 Definition. *Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann heißt $\mathcal{T}$ eine* **Topologie auf** X*, wenn*

(i) $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathcal{T}$

(ii) $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}: \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$

(iii) $\forall \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ endlich: $\bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{T}$

1.2 Bemerkung. *Wir verwenden folgende Notationen/Bezeichnungen:*

- *Sei X eine Menge. Wir bezeichnen die Menge aller Topologien auf X mit $\mathbb{T}(X)$.*
- *Ist X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so heißt das Paar $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein* **topologischer Raum**.
- *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die bzgl. $\mathcal{T}$* **offenen Mengen**.

So wie nahezu jede mathematische Struktur, kommen auch topologische Räume gemeinsam mit einem Begriff von *"strukturerhaltenden Abbildungen"*.

1.3 Definition. *Seien $\langle X, \mathcal{T}\rangle, \langle Y, \mathcal{V}\rangle$ topologische Räume, und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f* **stetig***, wenn*

$$\forall O \in \mathcal{V}: f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$$

Muss man sich spezifischer ausdrücken, so sagt man auch f ist $\mathcal{T}-\mathcal{V}$**-stetig**.

1.4 Lemma.

(i) *Sei* $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ *ein topologischer Raum. Dann ist die Funktion* id_X, $\mathcal{T}-\mathcal{T}$*-stetig.*

(ii) *Seien* $\langle X, \mathcal{T}\rangle, \langle Y, \mathcal{V}\rangle, \langle Z, \mathcal{W}\rangle$ *topologische Räume,*
und $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ *Funktionen. Ist* $f, \mathcal{T}-\mathcal{V}$*–stetig und* $g, \mathcal{V}-\mathcal{W}$*-stetig, so ist die Komposition* $g \circ f, \mathcal{T}-\mathcal{W}$*-stetig.*

Beweis.

von (i): Sei $O \in \mathcal{T}$, dann ist $\mathrm{id}_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}$.

von (ii): Sei $O \in \mathcal{W}$. Dann ist $g^{-1}(O) \in \mathcal{V}$, und daher $f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$. Nun gilt

$$(g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)).$$

□

1.5 Definition. *Seien* $\langle X, \mathcal{T}\rangle, \langle Y, \mathcal{V}\rangle$ *topologische Räume und* $f\colon X \to Y$ *eine Funktion. Dann heißt* f *ein* **Homöomorphismus***, wenn* f *bijektiv ist und* f *und* f^{-1} *beide stetig sind.*
Zwei topologische Räume heißen **homöomorph***, wenn es einen Homöomorphismus zwischen diesen gibt.*

Die relation auf (der Klasse aller) topologischen Räume

$$\langle X, \mathcal{T}\rangle \sim \langle Y, \mathcal{V}\rangle :\Leftrightarrow \langle X, \mathcal{T}\rangle, \langle Y, \mathcal{V}\rangle \text{ homöomorph},$$

ist offenbar reflexiv (id_X*), symmetrische (*f *und* f^{-1}*), und transitiv (*$g \circ f$*).*

1.6 Beispiel. *Sei* X *eine Menge.*

(i) $\mathcal{P}(X)$ *ist eine Topologie auf* X*. Sie heißt die* **diskrete Topologie***.*

(ii) $\{\varnothing, X\}$ *ist eine Topologie auf* X*. Sie heißt die* **Klumpentopologie***.*

(iii) *Die Menge*

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq X \mid X \setminus O \text{ endlich}\} \cup \{\varnothing\}$$

ist eine Topologie auf X*. Sie heißt die* **cofinite Topologie***.*

Die erforderlichen Eigenschaften (aus der Definition einer Topologie) sind in $(i), (ii)$ *trivialerweise erfüllt, und für* (iii) *bemerke, dass ein endlicher Durchschnitt von Mengen mit endlichem Komplement wieder endliches Komplement hat:*

$$X \setminus \bigcap_{i=1}^{n} O_i = \bigcup_{i=1}^{n} (X \setminus O_i).$$

1.7 Beispiel. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, d.h. X ist eine Menge und d ist eine Metrik auf X. Dann definieren wir*

$$\mathcal{T}_d \coloneqq \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists r > 0\colon U_r(x) \subseteq O\},$$

wobei $U_r(x)$ die Kugel

$$U_r(x) \coloneqq \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

bezeichnet.

Beweis. *Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_d$ eine Topologie auf X ist.*

- *Die Mengen $\varnothing$ und X liegen offensichtlich in $\mathcal{T}_d$.*

  $$X \subseteq X, \quad \forall x \in X, r > 0\colon \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \subseteq X$$

  wobei ein solches $U_r(x)$ auch nie leer sein kann, da $x \in X$ und $d(x, x) = 0 < r$ also immer zumindest das Element x selbst enthaelt.

  ▷ *Die Leere Menge ist Teilmenge jeder Menge, also auch Teilmenge jeder Umgebung U_r und damit Teilmenge von $\mathcal{T}_d$.*

- *Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_d$. Für $x \in \bigcup \mathcal{S}$ waehle $O \in \mathcal{S}$ mit $x \in O$. Wegen $O \in \mathcal{T}_d$ finden wir $r > 0$ mit $U_r(x) \subseteq O \in \mathcal{S} \subseteq \bigcup \mathcal{S}$.*

- *Sei schliesslich $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_d$ endlich. Für $x \in \bigcap \mathcal{S}$ und $S \in \mathcal{S}$ waehle $r(S) > 0$ mit $x \in U_{r(S)} \subseteq S$. Da $\mathcal{S}$ endlich ist, ist*

  $$r \coloneqq \min\{r(S) \mid S \in \mathcal{S}\} > 0.$$

  Offensichtlich gilt mit diesem r schliesslich auch $U_r(x) \subseteq \bigcap \mathcal{S}$.

Wir bezeichnen $\mathcal{T}_d$ als die **von** *d* **induzierte** *Topologie auf X.*

1.8 Bemerkung. *Vermöge der Konsturktion im Beispiel der von einer Metrik induzierten Topologie hat man also eine Zuordnung die jedem metrischen Raum einen topologischen Raum zuweist i.e.,*

$$\langle X, d\rangle \mapsto \langle X, \mathcal{T}_d\rangle.$$

Man kann also metrischen Räume als eine Teilklasse topologischer Räume auffassen. Tatsächlich ist diese eine ziemilch spezielle Teilklasse; in metrischen Räumen gelten viel mehr Eigenschaften als in allgemeinen topologischen Räumen, und es treten in vielerlei Kontext topologische Räume auf die nicht in obiger Weise von einer Metrik induziert werden. Dazu drei Beispiele

- *die Topologie der punktweisen Konvergenz auf Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (siehe später),*

- *die w^*-Topologie auf einen unendlich-dimensionalen Banachraum (siehe Fana1),*

- *die Zariski-Topolie am Spektrum eins kommutativen Ringes (siehe vielleicht Algebra).*

Diese Objekte zu definieren, oder zu untersuchen, ist zum jetzigen Zeitpunkt (Ana3) nicht möglich.
Zwei triviale Beispiele von Topologien die nicht von einer Metrik induziert werden, sind

- *die* **Klumpentopologie** *auf einer Menge X mit $|X| \geq 2$,*
- *sowie die* **cofinite Topologie** *auf einer Menge X mit $|X| = \infty$.*

Die liegt ganz einfach daran, dass Topologien die von einer Metrik induziert werden immer relativ viele offene Mengen haben.

1.9 Definition. *Ein topologischer Raum $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ heißt* **Hausdorff**, *man sagt auch er* **erfüllt das Trennungsaxiom** *($T2$), dann gilt:*

$$\forall x, y \in X, x \neq y \exists O_x, O_y \in \mathcal{T} \colon x \in O_x, y \in O_y, O_x \cap O_y = \varnothing.$$

1.10 Lemma. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann gilt*

i) Jede Kugel $U_r(x)$ mit $x \in X, r > 0$ ist offen in $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$.

ii) $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ ist Hausdorff.

Beweis. i): Sei $x \in X, r > 0$, und $y \in U_r(x)$. Setze $\delta \coloneqq \frac{1}{2}(r - d(x,y))$. Dann ist $\delta > 0$. Für $z \in U_\delta(y)$ gilt

$$\begin{aligned} d(z,x) &\leq d(z,y) + d(y,x) \\ &< \delta + d(y,x) = \frac{1}{2}(r - d(y,x)) + d(y,x) \\ &= \frac{1}{2}(r + d(y,x)) < r. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass

$$U_\delta(z) \subseteq U_r(x).$$

Es folgt, dass tatsächlich $U_r(x) \in \mathcal{T}_d$.

ii): Seien $x, y \in X, x \neq y$. Setze $r \coloneqq \frac{1}{3}d(x,y)$. Dann ist $r > 0$. Für $u \in U_r(x)$ und $v \in U_r(y)$ gilt

$$\begin{aligned} 3r = d(x,y) &\leq d(x,u) + d(u,v) + d(v,y) \\ &\leq 2r + d(u,v) \\ &\iff 0 < r \leq d(u,v) \end{aligned}$$

Also haben wir $U_r(x) \cap U_r(y) = \varnothing$. Da dies für alle $x, y \in X$ gilt folgt die Behauptung ii).

□

1.11 Bemerkung. $\mathbb{T}(X) \coloneqq \{\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T}(X) \text{ ist Topologie auf } X\}$ *i.e., die Menge aller Topologien auf* X.

Dann ist $\mathbb{T} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. *Die Potenzmenge einer Menge ist in natürlicher Weise halbgeordnet, nämlich mit der mengentheoretischen Inklusion. Damit ist auch* $\mathbb{T}(X)$, *als Teilmenge einer Potenzmenge, in natürlicher Weise halbgeordnet.*

1.12 Definition. *Sei* X *eine Menge, und* $\mathcal{T}, \mathcal{V} \in \mathbb{T}(X)$.
Wir sagen $\mathcal{T}$ *ist* **feiner** *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, *und sagen* $\mathcal{T}$ *ist* **gröber** *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$.

1.13 Lemma. *Sei* X *eine Menge. Für die halbgeordnete Menge* $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$ *gilt:*

i) Es gibt eine größtes und ein kleinstes Element.

ii) Jede Teilmenge hat ein Infimum.

Beweis.

i) $\triangleright$ Die halbgeordnete Menge $\langle \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \subseteq \rangle$ hat ein größtes Element, nämlich die diskrete Topologie $\mathcal{P}(X)$, weil $\mathcal{T}(X) \subseteq \mathcal{P}(X) \subseteq \mathbb{T}(X)$, für alle Topologien $\mathcal{T}(X)$ gilt.
$\triangleright$ Die Klumpentopologie $\{\varnothing, X\}$ ist das kleinste Element von $\mathbb{T}(X)$, da jede Topologie $\varnothing$ und X enthalten muss.

ii) Sei $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}(X)$. In der halbgeordneten Menge $\langle \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \subseteq \rangle$ exisiteren stets Infima, nämlich ist $\bigcap \mathbb{S}$ das Infimum von $\mathbb{S}$. Wir zeigen nun, dass $\bigcap \mathbb{S}$ wieder eine Topologie ist; damit ist es dann auch das Infimum von $\mathbb{S}$ in $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$.
$\triangleright$ Die Mengen $\varnothing, X$ gehören zu jedem Element von $\mathbb{S}$, also auch zu $\bigcap \mathbb{S}$.
$\triangleright$ Sei $\mathcal{S} \subseteq \bigcap \mathbb{S}$. Dann gilt für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{S}$, dass $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, und damit auch $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$. Es folgt $\bigcup \mathcal{S} \in \bigcap \mathbb{S}$ i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \subseteq \bigcap \mathbb{S} &\implies \forall \mathcal{T} \in \mathbb{S}: \mathcal{S} \in \mathcal{T} \\ &\implies \bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T} \\ &\implies \bigcup \mathcal{S} \in \bigcap \mathbb{S}. \end{aligned}$$

$\triangleright$ Sei $\mathcal{S} \subseteq \bigcap \mathbb{S}$ endlich. Dann gilt für alle $\mathcal{T} \in \mathbb{S}$, dass $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, und damit auch $\bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{T}$. Es folgt $\bigcap \mathcal{S} \in \bigcap \mathbb{S}$ i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \subseteq \bigcap \mathbb{S} \text{ endlich} &\implies \forall \mathcal{T} \in \mathbb{S}: \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} \\ &\implies \bigcap \mathcal{S} \in \mathcal{T} \\ &\implies \bigcap \mathcal{S} \in \bigcap \mathbb{S}. \end{aligned}$$

□

1.14 Bemerkung. *Sei* $\langle A, \leq \rangle$ *eine halbgeordnete Menge. Dann gilt:*
Hat $\langle A, \leq \rangle$ *ein größtes Element und hat jede Teilmenge ein Infimum, so hat auch jede Teilmenge ein Supremum. Denn:*

$$B \subseteq A \implies \inf\{a \in A: \forall b \in B, b \leq a\} = \sup B.$$

Insbesondere hat also jede Menge $\mathbb{S}$ *von Topologien auf einer Menge* X *in* $\langle \mathbb{T}(X), \subseteq \rangle$ *ein Supremum. Dieses Supremum ist aber im Allgemeinen verschieden von dem Supremum von* $\mathbb{S}$ *an* $\langle \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)), \subseteq \rangle$*, welches gleich* $\bigcup \mathbb{S}$ *ist.*
Zum Beispiel betrachte $X = \{x, y, z\}$ *sowie* $\mathcal{T}_1 \coloneqq \{ O \subseteq X \colon x \in O\} \cup \{\varnothing\}$ *und* $\mathcal{T}_2 \coloneqq \{ O \subseteq X \colon z \in O\} \cup \{\varnothing\}$*. Dann sind* $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ *Topologien auf* X*, ihre Vereinigung aber nicht, denn*

$$\{x, y\} \in \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2,\ \{y, z\} \in \mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2,$$

aber

$$\{x, y\} \cap \{y, z\} = \{y\} \notin \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2.$$

1.15 Definition. *Sein* $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ *topologischer Raum.* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ *heißt* **Basis** *von* $\mathcal{T}$*, wenn gilt*

$$\forall O \in \mathcal{T} \exists B_i \in \mathcal{V}_i, i \in I \colon O = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Kapitel 2

Konstruktion von Topologien

Eine Topologie ist eine Familie von Teilmengen der Grundmenge X mit gewissen Eigenschaften. Hat man nun irgendeine Familie von Teilmengen von X, so stellt sich die Frage: Gibt es eine Topologie die alle diese Elemente enthält, aber nicht unnötig viele andere?
Topologische Räume kommen automatisch mit stetigen Funktionen. Hat man eine Menge X und Funktionen von dieser in topologische Räume, gibt es eine Topologie auf X die alle diese Funktionen stetig macht, aber nicht unnötig viele andere?
Die Antwort auf beide Fragen ist "ja".

2.1 Proposition. *Sei X eine Menge.*

(i) Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodass $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$.

(ii) Sei I eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$ topologische Räume, und $f_i : X \to Y_i$ Funktionen. Dann existiert eine gröbste Topologie $\mathcal{T}$ auf X sodass jedes f_i $\mathcal{T} - \mathcal{V}_i$-stetig ist.

Wir geben zwei Beweise für diese Aussage.
Zuerst ein Existenzbeweis als Korollar der Existenz von Infima.

Beweis. (1)

von (i): Die Menge

$$\mathbb{S} := \{\mathcal{V} \in \mathbb{T}(X) : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}\}$$

enthält $\mathcal{P}(X)$. Sie ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen. Damit hat $\inf \mathbb{S}$ die gewünschte Eigenschaft.

von (ii): Die Menge

$$\mathbb{S} := \{\mathcal{V} \in \mathbb{T}(X) : \forall i \in I, f_i \text{ ist } \mathcal{V} - \mathcal{V}_i\text{–stetig}\}$$

enthält $\mathcal{P}(X)$ und ist unter Durschnitten abgeschlossen. Denn ist $O \in \mathcal{V}_i$, dann gilt für alle $\mathcal{V} \in \mathbb{S}$, dass das Urbild $f_i^{-1}(O)$ in $\mathcal{V}$, und damit ist $f_i^{-1}(O) \in \bigcap \mathbb{S}$. Wir sehen wieder, dass $\inf \mathbb{S}$ die gewünschte Eigenschaft hat.

Beweis (1) gibt eine abstrakte Beschreibung der gesuchten Objekte von außen.
Unser zweiter Beweis gibt eine konkrete Beschreibung von innen.

□

Beweis. (2)

von (i): Setze

$$\mathcal{T} := \{\varnothing, X\} \cup \Big\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} : I \text{ Menge}, n_i \in \mathbb{N}, O_{ij} \in \mathcal{S} \Big\}.$$

Offensichtlich muss jede Topologie die $\mathcal{S}$ umfasst auch $\mathcal{T}$ umfassen.
Wir zeigen, dass $\mathcal{T}$ selbst schon eine Topologie ist. Die Eigenschaften (i) und (ii) aus der Definition einer Topologie sind klar. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{T}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Seien also

$$\bigcup_{i\in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \in \mathcal{T}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Nun gilt

$$\bigcap_{k=1}^{m} \bigcup_{i\in I_k} \Big[\bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \Big] = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_1\times\ldots\times I_k} \Big(\big[\bigcap_{j=1}^{n_{i_1 1}} O_{i_1 j 1} \big] \cap \ldots \cap \big[\bigcap_{j=1}^{n_{i_k k}} O_{i_k jk} \big] \Big)$$

und diese Menge ist wieder eine Vereinigung ovn endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$, gehört also zu $\mathcal{T}$.

von (ii): Setze

$$\mathcal{T} := \{\varnothing, X\} \cup \Big\{ \bigcup_{l\in L} \bigcap_{j\in J_l} f_j^{-1}(O_{lj}) : L \text{ Menge}, J_l \subseteq I \text{ endlich}, O_{lj} \in \mathcal{V}_j \Big\}.$$

Jede Topologie die alle f_j stetig macht, muss die von der Menge

$$\mathcal{S} := \big\{ f_j^{-1}(O_j) : j \in I, O_j \in \mathcal{V}_j \big\}$$

erzeugte Topologie umfassen. Wir zeigen, dass die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}'$ gleich $\mathcal{T}$ ist. Dabei ist $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ klar. Für die umgekehrte Inklusion beachte, dass Urbilder mit Durchschnitten verträglich sind. Das gibt

$$\bigcap_{l=1}^{n} f_{j_l}^{-1}(O_l) = \bigcap_{j\in\{j_1,\ldots,j_n\}} \bigcap_{\substack{l=1,\ldots,n\\ j_l=j}} f_j^{-1}(O_l) = \bigcap_{j\in\{j_1,\ldots,j_n\}} f_j^{-1}\Big(\underbrace{\bigcap_{\substack{l=1,\ldots,n\\ j_l=j}} O_l}_{\in\mathcal{V}_j} \Big). \qquad \square$$

$\square$

2.2 Definition. *Sei X eine Menge.*

(i) Ist $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, so heißt die gröbste Topologie die $\mathcal{S}$ umfasst, die **von $\mathcal{S}$ erzeugte** *Topologie.*

(ii) Sind I Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$ topologische Räume, und $f_i : X \to Y_i$ Funktionen, so heißt die gröbste Topologie die alle f_i stetig macht, die **initiale Topologie bzgl. der** *f_i.*

2.3 Bemerkung. *Sei X eine Menge, $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ ein topologischer Raum, und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann ist die initiale Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{f\}$ gegeben als*

$$\left\{f^{-1}(O)\colon O \in \mathcal{V}\right\}.$$

Dies folgt, da Urbildfunktionen mit Vereinigungen und Durchschnitten verträglich sind, und daher die angeschriebene Menge eine Topologie ist.

2.4 Beispiel. *Sei $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ ein toplogischer Raum, $X \subseteq Y$ und bezeichne*

$$\iota\colon \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto x \end{cases}$$

die **Inklusionsabbildung***. Die initiale Topologie auf X bzgl. der einelementigen Familie $\{\iota\}$ heißt die* **Spurtopologie** *von $\mathcal{V}$ auf X, und wir schreiben $\mathcal{V}|_X$.*
Explizit gilt:

$$\mathcal{V}|_X = \left\{O \cap X\colon O \in \mathcal{V}\right\}.$$

2.5 Beispiel. *Sei $\langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle, i \in I$, eine Familie topologischer Räume. Betrachte das direkte Produkt $X \coloneqq \prod_{i\in I} X_i$, mit den kanonischen Projektionen*

$$\pi_j\colon \begin{cases} \prod_{i\in I} X_i \to X_j \\ (x_i)_{i\in I} \mapsto x_j \end{cases}$$

Die initiale Topologie auf X bzgl. der Familie $\{\pi_j\colon j \in I\}$ heißt die **Produkttopologie** *auf X, und wir schreiben $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.*
Sie ist gegeben als die Menge aller Vereinigungen von Mengen der Gestalt $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i \in \mathcal{T}_i$ wobei für alle bis auf endlich viele $i \in i$ gilt, dass $O_i = X_i$ ist.

Es ist eine wesentliche Tatsache, dass sich initiale Topologien durch eine universelle Eigenschaft beschreiben lassen.

2.6 Satz. *Sei X eine menge, seien $\langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle, i \in I$, topologische Räume, und seinen $f_i\colon X \to Y_i$ Funktionen. Bezeichne $\mathcal{T}_{\text{ini}}$ die initiale Topologie auf X bzgl. der f_i, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.*
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{ini}}$

(ii) $\forall\langle Z, \mathcal{W}\rangle$ *topologischer Raum,* $g\colon Z \to X$: *(g ist $\mathcal{W}-\mathcal{T}$-stetig* $\iff \forall i \in I\colon f_i \circ g$ *ist $\mathcal{W}-\mathcal{V}_i$-stetig)*

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$: ("$\Rightarrow$"): Die Funktionen f_i sind alle $\mathcal{T}_{\text{ini}}$-$\mathcal{V}_i$-stetig. Ist $g\colon \mathcal{W}-\mathcal{T}_{\text{ini}}$-stetig, so folgt, dass alle $f_i \circ g\colon \mathcal{W}-\mathcal{V}_i$-stetig sind.

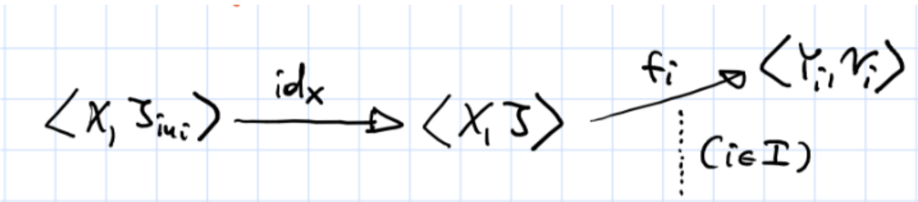
$(i) \Rightarrow (ii)$: ("$\Leftarrow$"): Betrachte eine Menge der Gestalt $f_i^{-1}(O_i)$ mit $O_i \in \mathcal{V}_i$. Es ist

$$g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \mathcal{W}.$$

Urbilder sind mit Mengenoperationen verträglich, also haben wir damit auch

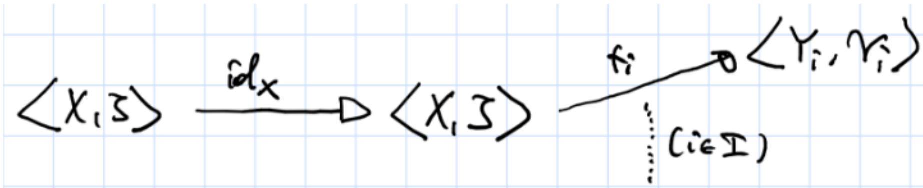
$$g^{-1}\Bigg(\bigcup_{l\in L}\bigcap_{j=1}^{n_l} f_{i_{lj}}^{-1}(O_l j)\Bigg) = \bigcup_{l\in L}\bigcap_{j=1}^{n_l} g^{-1}\big(f_{i_{lj}}^{-1}(O_{lj})\big) \in \mathcal{W}.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: $(\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{ini}})$: Betrachte das Diagramm



Alle $f_i \circ \text{id}_X$ sind $\mathcal{T}_{\text{ini}}$-$\mathcal{V}_i$-stetig, als ist $\text{id}_X : \mathcal{T}_{\text{ini}}$-$\mathcal{T}$-stetig.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $(\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{\text{ini}})$: Betrachte das Diagramm



Die Funktion id_X ist $\mathcal{T}$-$\mathcal{T}$-stetig, also sind alle $f_i \circ \text{id}_X : \mathcal{T}$-$\mathcal{V}_i$-stetig.

□

Die nächste Aussage kann man als Assoziativität des Bildens initialer Topologien verstehen.

2.7 Proposition. *Seien X eine Menge, $Y_i, i \in I$, Mengen, und $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij}\rangle, i \in I, j \in J_i$, topologische Räume. Weiters seien $f_i : X \to Y_i, i \in I$, und $g_{ij} : Y_i \to Z_{ij}, i \in I, j \in J_i$, Funktionen. Bezeichne*

▷ $\mathcal{T}_1$ *die initiale Topologie auf X bzgl. der Funktionen*

$$\{f_i \circ g_{ij} : i \in I, j \in J_i\}$$

in die topologischen Räume $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij}\rangle$,

▷ $\mathcal{V}_i$ *die initiale Topologie auf Y_i bzgl. der Funktionen*

$$\{g_{ij} : j \in J_i\}$$

in die topologischen Räume $\langle Z_{ij}, \mathcal{W}_{ij}\rangle$,

▹ $\mathcal{T}_2$ *die initiale Topologie auf* X *bzgl.*

$$\{f_i : i \in I\}$$

in die topologischen Räume $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle$.

Dann ist $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

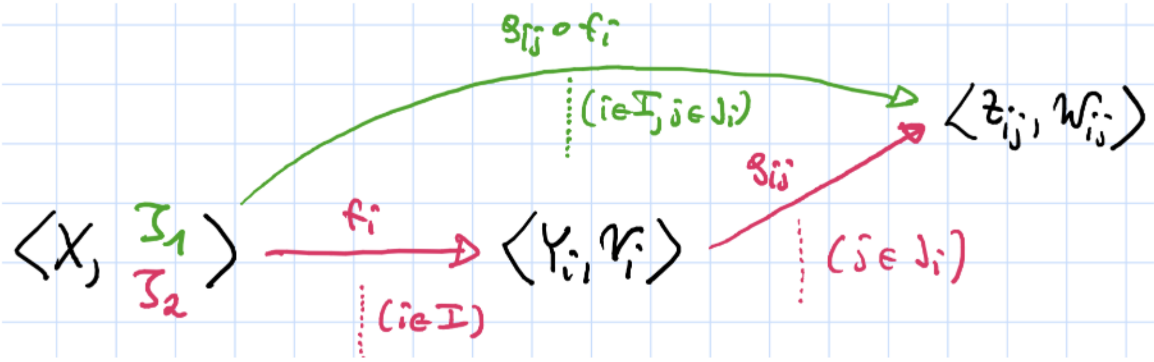


Abbildung 2.1: Illustration der in 2.7 angegebenen Strukturen.

Beweis. Sei $\langle X', \mathcal{T}' \rangle$ ein topologischer Raum, und $h : X' \to X$ eine Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} & h \text{ ist } \mathcal{T}' - \mathcal{T}_1\text{–stetig} \\ \iff & \forall i \in I, j \in J_i : (g_{ij} \circ f_i) \circ h \text{ ist } \mathcal{T}' - \mathcal{W}_{ij}\text{–stetig} \\ \iff & \forall i \in I : \big(\forall j \in J_i : g_{ij} \circ (f_i \circ h) \text{ ist } \mathcal{T}' - \mathcal{W}_{ij}\text{–stetig}\big) \\ \iff & \forall i \in I : \big(f_i \circ h \text{ ist } \mathcal{T}' - \mathcal{V}_i\text{–stetig}\big) \\ \iff & h \text{ ist } \mathcal{T}' - \mathcal{T}_2\text{–stetig.} \end{aligned}$$

Wendet man diese Tatsache an mit $\langle X', \mathcal{T}' \rangle := \langle X, \mathcal{T}_1 \rangle$ und $h := \mathrm{id}_X$, so folgt $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. Nimmt man $\langle X', \mathcal{T}' \rangle := \langle X, \mathcal{T}_2 \rangle$ und $h := \mathrm{id}_X$, so folgt $\mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_1$. □

Mittels der Konstruktion der initialen Topologie hat man erreicht eine gegebene Familie von Funktionen mit domain X stetig zu machen. Es stellt sich die Frage, ob das auch für Funktionen mit codomain X möglich ist. Die Antowort ist "ja".

2.8 Proposition. *Sei* X *eine Menge,* $\langle Y_i, \mathcal{V}_i \rangle, i \in I$, *topologische Räume, und* $f_i : Y_i \to X$ *Funktionen. Dann existiert eine feinste Topologie* $\mathcal{T}$ *auf* X *sodass jedes* $f_i : \mathcal{V}_i - \mathcal{T}$*-stetig ist.*

Beweis. Eine Topologie $\mathcal{W}$ auf X hat genau dann die Eigenschaft, dass alle $f_i : \mathcal{V}_i - \mathcal{W}$-stetig sind, wenn

$$W \subseteq \left\{ O \subseteq X : \forall i \in I, f_i^{-1}(O) \in \mathcal{V}_i \right\} =: \mathcal{T}$$

Nun bemerke, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie ist. Die mengen $\varnothing, X$ gehören offensichtlich zu $\mathcal{T}$. Da Urbilder mit Mengenoperationen verträglich sind, folgt, dass $\mathcal{T}$ unter Vereinigungen und endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. □

2.9 Definition. *Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle, i \in I$, topologische Räume, und $f_i\colon Y_i \to X$ Funktionen. Die feinste Topologie auf X die alle f_i stetig macht heißt die* **finale Topologie bzgl. der** f_i.

Analog wie bei initialen Topologien hat man eine Charakterisierung finaler Topologien mit einer universellen Abbildungseigenschaft.

2.10 Satz. *Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle, i \in I$, topologische Räume und $f_i\colon Y_i \to X$ Funktionen. Bezeichne mit $\mathcal{T}_{\text{fin}}$ die finale Topologie auf X bzgl. der f_i, und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X.*
Dann sind ie folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{fin}}$

(ii) $\forall \langle Z, \mathcal{W}\rangle$ *topologischer Raum,* $g\colon X \to Z\colon \big(g \text{ ist } \mathcal{T} - \mathcal{W}\text{-}\textit{stetig} \iff \forall i \in I\colon g \circ f_i \text{ ist } \mathcal{V}_i - \mathcal{W}\text{-}\textit{stetig}\big)$

Beweis.

▷ $(i) \implies (ii)$:
▷▷" $\implies$ ": f_i ist $\mathcal{V}_i - \mathcal{T}_{\text{fin}}$-stetig, und $g \circ f_i$ daher $\mathcal{V}_i - \mathcal{W}$-stetig.
▷▷" $\impliedby$ ": Sei $O \in \mathcal{W}$, dann gilt für alle $i \in I$, dass $f_i^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f_i)^{-1}(O) \in \mathcal{V}_i$. Also ist $g^{-1}(O) \in \mathcal{T}_{\text{fin}}$.

▷ $(ii) \implies (i)$:
▷▷ $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}_{\text{fin}}$: Betrachte das Diagramm

$$\underset{(i \in I)}{\langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle} \xrightarrow{f_i} \langle X, \mathcal{T}\rangle \xrightarrow{\mathrm{id}_X} \langle X, \mathcal{T}_{\text{fin}}\rangle$$

Alle $\mathrm{id}_X \circ f_i$ sind $\mathcal{V}_i - \mathcal{T}_{\text{fin}}$-stetig, also ist id_X, $\mathcal{T} - \mathcal{T}_{\text{fin}}$-stetig.
▷▷ $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{fin}}$: Betrachte das Diagramm

$$\underset{(i \in I)}{\langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle} \xrightarrow{f_i} \langle X, \mathcal{T}\rangle \xrightarrow{\mathrm{id}_X} \langle X, \mathcal{T}\rangle$$

Die Funktion id_X ist $\mathcal{T} - \mathcal{T}$-stetig, also sind alle $\mathrm{id}_X \circ f_i$, $\mathcal{V}_i - \mathcal{T}$-stetig.

□

Ebenso analog zu initialen Topologien erhält man eine Assoziativitätseigenschaft.

2.11 Proposition.
Betrachte eine Situation wie im folgenden Diagramm:

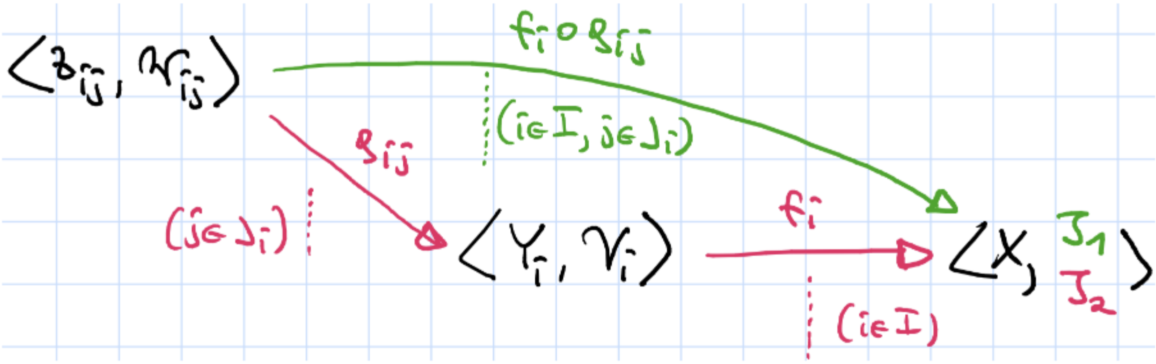


Abbildung 2.2: Illustration der in 2.11 angegebenen Strukturen.

Dabei ist $\mathcal{T}_1$ *die finale bzgl. der* $f_i \circ g_{ij}$, $\mathcal{V}_i$ *die finale bzgl. der* g_{ij}, *und* $\mathcal{T}_2$ *die finale bzgl. der* f_i.
Dann gilt $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Beweis. Sei $\langle X', \mathcal{T}'\rangle$ ein topologischer Raum, und $h\colon X \to X'$ eine Funktion. Dann gilt:

h ist $\mathcal{T}_1$-$\mathcal{T}'$-stetig

$$\begin{aligned}
&\iff \forall i \in I, j \in J_i\colon h \circ (f_i \circ g_{ij}) \text{ ist } \mathcal{W}_{ij} - \mathcal{T}'\text{–stetig}\\
&\iff \forall i \in I\colon \Big(\forall j \in J_i\colon (h \circ f_i) \circ g_{ij} \text{ ist } \mathcal{W}_{ij} - \mathcal{T}'\text{–stetig}\Big)\\
&\iff \forall i \in I\colon h \circ f_i \text{ ist } \mathcal{W}_{ij} - \mathcal{V}_i\text{–stetig}\\
&\iff h \text{ ist } \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}'\text{–stetig}
\end{aligned}$$

□

2.12 Beispiel. *Sei* $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ *ein topologischer Raum, sei* $\sim$ *eine Äquivalenzrelation auf* X, *und bezeichne*

$$\pi\colon \begin{cases} X \to X/_\sim \\ x \mapsto [x]_\sim \end{cases}$$

die kanonische Projektion. Die finale Topologie auf X *bzgl. der einelementigen Familie* $\{\pi\}$ *heißt die* **Faktortopologie** *von* $\mathcal{T}$ *auf* $X/_\sim$, *und wir schreiben* $\mathcal{T}/_\sim$.

Kapitel 3

Einige Begriffe in topologischen Räumen

3.1 Abgeschlossene Mengen & Abschlussoperator

3.1.1 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt ***abgeschlossen*** in $\langle X, \mathcal{T}\rangle$, wenn $X \setminus A \in \mathcal{T}$ gilt.

3.1.2 Proposition. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, und bezeichne*

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{A \subseteq X \colon A \text{ abgeschlossen}\right\}.$$

Das Mengensystem $\mathcal{A}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}, X \in \mathcal{A}$

(ii) $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \colon \bigcap \mathcal{B} \in \mathcal{A}$

(iii) $\forall \mathcal{B} \in \mathcal{A} \text{ endlich} \colon \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es gilt

(i) $X \setminus \emptyset = X, X \setminus X = \emptyset$,

(ii) $X \setminus \bigcap \mathcal{B} = \bigcup_{A \in \mathcal{B}} X \setminus A$,

(iii) $X \setminus \bigcup \mathcal{B} = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} X \setminus A$.

□

3.1.3 Bemerkung. Man kann (leicht) die folgende Aussage zeigen.

Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften aus 3.1.2 Proposition, so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass

$$\forall M \in \mathcal{P}(X) \colon M \in \mathcal{A} \iff M \text{ abgeschlossen in } \langle X, \mathcal{T}\rangle$$

3.1.4 Korollar. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, und sei $M \subseteq X$. Dann existiert eine kleinste abgeschlossene Menge die M umfasst.*

Beweis. Der Durchschnitt

$$\bigcap\big\{A\subseteq X\colon A\text{ abgeschlossen}, A\supseteq M\big\}$$

hat die gewünschte Eigenschaft. □

3.1.5 Definition. Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum.

(i) Ist $M\subseteq X$, so heißt die kleinste abgeschlossene Menge die M umfasst der ***Abschluss*** von M in $\langle X,\mathcal{T}\rangle$, und wir schreiben für diese Menge

$$\operatorname{Clos}_{\langle X,\mathcal{T}\rangle}M \quad\text{oder kurz}\quad \overline{M}.$$

(ii) Die Abbildung

$$\overline{\cdot}\ :\begin{cases}\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)\\ M\mapsto\overline{M}\end{cases}$$

heißt der ***Abschlußoperator*** von $\langle X,\mathcal{T}\rangle$.

3.1.6 Proposition. *Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Der Abschlußoperator von $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\overline{\emptyset}=\emptyset$

(ii) $\forall M\in\mathcal{P}(X)\colon M\subseteq\overline{M}$

(iii) $\forall M_1,M_2\in\mathcal{P}(X)\colon\overline{M_1\cup M_2}=\overline{M_1}\cup\overline{M_2}$

(iv) $\forall M\in\mathcal{P}(X)\colon\overline{\overline{M}}=\overline{M}$

Beweis.

von (i): Die Menge $\emptyset$ ist abgeschlossen.

von (ii): Nach Definition umfasst der Abschluß einer Menge diese Menge.

von (iii): Die Menge $\overline{M_1\cup M_2}$ ist eine abgeschlossene Menge. Es gilt

$$M_1\subseteq M_1\cup M_2\subseteq\overline{M_1\cup M_2},$$

und daher $\overline{M_1}\subseteq\overline{M_1\cup M_2}$. Genauso folgt $\overline{M_2}\subseteq\overline{M_1\cup M_2}$, und wir erhalten

$$\overline{M_1}\cup\overline{M_2}\subseteq\overline{M_1\cup M_2}.$$

Die Menge $\overline{M_1}\cup\overline{M_2}$ ist abgeschlossen. Es gilt

$$M_1\subseteq\overline{M_1}\subseteq\overline{M_1}\cup\overline{M_2},\, M_2\subseteq\overline{M_2}\subseteq\overline{M_1}\cup\overline{M_2},$$

also $M_1\cup M_2\subseteq\overline{M_1}\cup\overline{M_2}$. Damit folgt $\overline{M_1\cup M_2}\subseteq\overline{M_1}\cup\overline{M_2}$.

von (iv): Die Menge $\overline{M}$ ist abgeschlossen, und daher ist

$$\overline{(\overline{M})}=\overline{M}.$$

□

3.1.7 Bemerkung. Man kann die folgende Aussage zeigen:

Sei X eine Menge. Ist $\alpha: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) – (iv) aus 3.1.6 Proposition, so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass

$$\forall M \in \mathcal{P}(X): \alpha(M) = \mathrm{Clos}_{\langle X, \mathcal{T} \rangle} M$$

3.1.8 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann ist M abgeschlossen, genau dann wenn $M = \overline{M}$.*

Beweis.

$\Longrightarrow$: M selbst ist eine abgeschlossene Menge die M umfasst.

$\Longleftarrow$: Nach Definition ist $\overline{M}$ abgeschlossen.

□

3.1.9 Satz. *Seien $\langle X, \mathcal{T} \rangle, \langle Y, \mathcal{V} \rangle$ topologische Räume, und $f: X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig*

(ii) $\forall A \subseteq Y$ abgeschlossen: $f^{-1}(A)$ abgeschlossen

(iii) $\forall M \subseteq Y: f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Es gilt $f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Es gilt $f(M) \subseteq \overline{f(M)}$, also $M \subseteq f^{-1}(\overline{f(M)})$.
Damit ist auch

$$\overline{M} \subseteq \overline{f^{-1}(\overline{f(M)})} \stackrel{\text{(ii)}}{=} f^{-1}(\overline{f(M)}),$$

also $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Sei $O \subseteq Y$ offen. Dann gilt

$$f(\overline{X \setminus f^{-1}(O)}) \subseteq \overline{f(X \setminus f^{-1}(O))} \subseteq \underbrace{\overline{Y \setminus O} = Y \setminus O}_{\substack{=\overline{O^c} = O^c \\ \text{Komplement offener Menge ist abgeschlossen}}}.$$

Also ist

$$\overline{X \setminus f^{-1}(O)} \subseteq f^{-1}(Y \setminus O) = X \setminus f^{-1}(O),$$

und daher $X \setminus f^{-1}(O)$ abgeschlossen, gleich $f^{-1}(O)$ offen.

□

Ein Begriff der im Zusammenhang mit Abgeschlossenheit auftritt ist der folgende.

3.1.10 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ eine topologischer Raum.

(i) Eine Teilmenge $M \subseteq X$ heißt ***dicht*** in X bzgl. $\mathcal{T}$ wenn $\mathrm{Clos}_{\langle X, \mathcal{T} \rangle} M = X$.

(ii) Sei $Y \subseteq X$ und $M \subseteq Y$. Dann heißt M ***dicht in*** Y bzgl. $\mathcal{T}$, wenn gilt $\mathrm{Clos}_{\langle Y, \mathcal{T}|_y \rangle} M = Y$.

3.1.11 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Dann ist M dicht in X genau dann, wenn*

$$\forall O \in \mathcal{T} \setminus \{\varnothing\} \colon M \cap O \neq \varnothing.$$

Beweis. Wir zeigen beide Implikationen mit Kontraposition.

$\Longrightarrow$: Sei $O \subseteq X$ offen nichtleer mit $O \cap M = \varnothing$. Dann gilt $M \subseteq X \setminus O$, und da $X \setminus O$ abgeschlossen ist also auch $\overline{M} \subseteq X \setminus O$. Nun ist $X \setminus O \subset X$ i.e., $X \setminus O \neq X$.

$\Longleftarrow$: Setze $O \coloneqq X \setminus \overline{M}$. Dann ist O offen, nichtleer, und $O \cap M \subseteq O \cap \overline{M} = \varnothing$.

□

3.2 Umgebung und Umgebungsfilter

3.2.1 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt ***Umgebung von*** x bzgl. $\mathcal{T}$, wenn

$$\exists O \in \mathcal{T} \colon x \in O \subseteq U.$$

Die Menge aller Umgebungen $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ heißt ***Umgebungsfilter von*** x bzgl. $\mathcal{T}$.

An dieser Stelle erinner wir an das mengentheoretische Konzept der Filter.

3.2.2 Definition. Sei X eine Menge. Eine Familie von Teilemgen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt ***Filter***, wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

(i) $\mathcal{F} \neq \varnothing$, $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) $\forall \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ endlich: $\bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}$

(iii) $\forall F \in \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{P}(X) \colon F \subseteq \mathcal{G} \implies \mathcal{G} \in \mathcal{F}$

3.2.3 Proposition. *Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum, und sei $x \in X$. Dann gilt:*

(i) $X \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$

(ii) $\forall U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x) \colon x \in U$

(iii) $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ *ist Filter*

(iv) $\forall U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x) \exists O \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x) \colon O \subseteq U \wedge (\forall y \in O \colon O \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(y))$

Beweis.

von (i): Es gilt $X \in \mathcal{T}$ und $x \in X \subseteq X$.

von (ii): Es gibt eine Menge O mit $x \in O \subseteq U$, insbesondere ist $x \in U$.

von (iii): Das bereits Gezeigte besagt insbesondere, dass $\mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x) \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$. Sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ endlich. Für jedes $G \in \mathcal{G}$ wähle $O_G \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_G \subseteq G$. Dann ist

$$\bigcap_{G \in \mathcal{G}} O_G \in \mathcal{G}, \quad x \in \bigcap_{G \in \mathcal{G}} O_G \subseteq \bigcap \mathcal{G}.$$

Sei $F \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ und $G \in X$ mit $F \subseteq G$. Wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq F$. Dann gilt auch $x \in O \subseteq G$.

von (iv): Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ und wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Für jedes $y \in O$ gilt $y \in O \subseteq O$, also $O \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(y)$.

□

3.2.4 Bemerkung. Man kann die folgenden Aussagen zeigen.

Sei X eine Menge. Ist $\mathcal{U}: X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (i) – (iv) aus VO04 Proposition (Umgebungen), so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, sodass

$$\forall x \in X: \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$$

Die uns bereits bekannten Begriffe lassen sich auch mit Umgebungen beschreiben.

3.2.5 Proposition. *Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.*

(i) Sei $M \subseteq X$, dann gilt

$$M \text{ offen} \iff \forall x \in M: M \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$$

(ii) Sei $M \subseteq X$ und $x \in X$, dann gilt

$$x \in \mathrm{Clos}_{\langle X, \mathcal{T} \rangle} M \iff \forall U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x): U \cap M \neq \emptyset$$

(iii) Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ein topologischer Raum und $f: X \to Y$ eine Funktion, dann gilt

$$f \text{ stetig} \iff \forall x \in X, U \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x)) \exists V \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x): f(V) \subseteq U$$

Beweis.

von (i):

$\Longrightarrow$: Für alle $x \in M$ gilt $x \in M \subset M$.

$\Longleftarrow$: Für $x \in M$ wähle $O_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in O_x \subseteq M$. Dann gilt

$$M = \bigcup_{x \in M} O_x \in \mathcal{T}.$$

von (ii): Wir zeigen beide Implikationen mittel Kontraposition.

$\Longrightarrow$: Sei $x \notin \overline{M}$, dann ist $X \setminus \overline{M} \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ und $M \cap (X \setminus \overline{M}) = \emptyset$.

$\Longleftarrow$: Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ mit $M \cap U = \emptyset$, und wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$. Dann ist $X \setminus O$ abgeschlossen und $x \notin X \setminus O, M \subseteq X \setminus O$.

von (iii):

$\Longrightarrow$: Sei $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x))$. Wähle $O \in \mathcal{V}$ mit $f(x) \in O \subseteq U$. Dann ist $x \in f^{-1}(O)$ und $f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$, also $f^{-1}(O) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$. Es gilt $f(f^{-1}(O)) \subseteq O \subseteq U$.

$\Longleftarrow$: Sei $O \in \mathcal{V}$. Für $x \in f^{-1}(O)$ ist $f(x) \in O$ und daher $O \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x))$. Wähle $V_x \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$ mit $f(V_x) \subseteq O$, und $W_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in W_x \subseteq V_x$. Dann gilt $W_x \subseteq f^{-1}(O)$, und wir erhalten

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} W_x \in \mathcal{T}.$$

□

3.3 Konvergenz

Wir beginnen mit einem allgemeinen Konzept.

3.3.1 Definition. Ein Paar $\langle I, \leq \rangle$ heißt ***gerichtete Menge***, wenn I eine Menge ist und $\leq$ eine reflexive und transitive Relation auf I mit der Eigenschaft, dass jede endliche Teilmenge von I eine obere Schranke besitzt.

3.3.2 Beispiel.

(i) Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit ihrer natürlichen Ordnung ist eine gerichtete Menge.

(ii) Das Intervall $(0, 1]$ mit der Relation $\geq$ ($\geq$ ist die natürliche Ordnung auf $\mathbb{R}$)

$$x \leq y :\Leftrightarrow x \geq y$$

(iii) Sei $[a, b]$ ein Intervall. Die Menge aller Partitionen, d.h. aller endlichen Teilmengen von $[a, b]$ die a und b enthalten, mit der mengentheoretischen Inklusion.

(iv) Sei X eine Menge und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X. Dann ist $\mathcal{F}$ versehen mit der Relation

$$F_1 \leq F_2 :\Leftrightarrow F_1 \supseteq F_2$$

eine gerichtete Menge.

3.3.3 Definition. Sei X eine Menge. Ist $\langle I, \leq \rangle$ eine gerichtete Menge, und $\varphi: I \to X$ eine Funktion, so heißt φ ein ***Netz in*** X (synonym auch eine ***Moore-Smith-Folge in*** X).

Wir schreiben ein Netz oft auch in der gewohnten "Folgenschreibweise" also $(x_i)_{i\in I}$. Bemerke hier, dass eine Folge eigentlich ja auch eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach X ist.
Nun definieren wir Konvergenz von Netzen.

3.3.4 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, $\langle I, \leq\rangle$ gerichtet, $\varphi: I \to X$ ein Netz in X, und $x \in X$. Dann heißt φ ***konvergent gegen*** x bzgl. $\mathcal{T}$, wenn

$$\forall\, U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}}(x)\,\exists i_0 \in I\,\forall\, i \geq i_0 : \varphi(i) \in U.$$

3.3.5 Beispiel. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Betrachte die Menge

$$I := \left\{ \left((t_k)_{k=0}^n, (\zeta_k)_{k=1}^n\right) \middle| \substack{n\in\mathbb{N},\\ a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b,\\ \zeta_k\in[t_{k-1},t_k],} \right\}$$

mit

$$\begin{aligned} &\left((t_k)_{k=0}^n, (\zeta_k)_{k=1}^n\right) \leq \left((t'_k)_{k=0}^{n'}, (\zeta'_k)_{k=1}^{n'}\right) \\ :\Leftrightarrow &\max_{k=1,\ldots,n} |t_k - t_{k-1}| \leq \max_{k=1,\ldots,n'} |t'_k - t'_{k-1}|. \end{aligned}$$

Dann ist $\langle I, \leq\rangle$ eine gerichtete Menge. Um dabei die Existenz einer gemeinsamen größeren zu zeigen, beobachte eine gemeinsame Verfeinerung der entsprechenden Partitionen mit angeordneter Zwischenstellen.
Sei nun $S: I \to \mathbb{R}$ das Netz

$$S(i) := \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(t_k - t_{k-1}),$$

für einen Index $i = \left((t_k)_{k=0}^n, (\zeta_k)_{k=1}^n\right)$. Dann konvergiert S genau dann, wenn f Riemann integrierbar ist. Ist f Riemann integrierbar, so ist $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ Grenzwert von S.

3.3.6 Beispiel. Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $\varphi: \mathbb{N} \to X$ eine Folge in X (d.h. ein Netz mit der gerichteten Indexmenge $\langle \mathbb{N}, \leq\rangle$). Weiters sei $x \in X$. Bezeichne $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie auf X. Dann gilt:
Das Netz φ konvergiert in $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ gegen x, genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} = x$ im Sinne der Theorie metrischer Räume.

Beweis. Wir beweisen diese Äquivalenz. Die Konvergenz in $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ bedeutet

$$\forall\, U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_d}(x)\,\exists n_0 \in \mathbb{N}\,\forall\, n \geq n_0 : \varphi(n) \in U,$$

und die Konvergenz im Sinne metrischer Räume bedeutet

$$\forall \epsilon > 0\,\exists n_0 \in \mathbb{N}\,\forall n \geq n_0 : d(\varphi(n), x) < \epsilon.$$

$\Uparrow$: Sei $U \in \mathfrak{U}^{\mathcal{T}_d}(x)$. Wähle $O \in \mathcal{T}_d$ mit $x \in O \subseteq U$, und wähle $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $d(\varphi(n), x) < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt

$$\varphi(n) \in U_\epsilon(x) \subseteq O \subseteq U,\ \forall\, n \geq n_0$$

$\Downarrow$: Sei $\epsilon > 0$. Es gilt $U_\epsilon(x) \in \mathcal{T}_d$, und daher $U_\epsilon(x) \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_d}(x)$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\varphi(n) \in U_\epsilon(x)$ für alle $n \geq n_0$. Dann ist also

$$d(\varphi(n), x) < \epsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

□

Im Allgemeinen kann ein Netz φ keine, oder auch viele, Grenzwerte haben.

3.3.7 Beispiel. Sei X eine nichtleere Menge versehen mit der Klumpentopologie, sei $\langle I, \leq\rangle$ gerichtet, wähle $x_0 \in X$, und betrachte das konstante Netz $\varphi(i) = x_0, i \in I$. Dann ist jeder Punkt $x \in X$ Grenzwert von φ. Dies gilt, da $\mathcal{U}(x) = \{x\}$ für alle $x \in X$.

3.3.8 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Ist $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ Hausdorff, so hat jedes Netz höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Wir verwenden Kontraposition.
Sei $\varphi: I \to X$ ein Netz und seien x, y Grenzwerte von φ mit $x \neq y$. Seien O_x, O_y offen mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$. Wähle $i_x, i_y \in I$ sodass

$$(\forall i \geq i_x: \varphi(i) \in O_x) \wedge (\forall i \geq i_y: \varphi(i) \in O_y).$$

Wähle $i \in I$ mit $i \geq i_x$ und $i \geq i_y$. Dann ist also $\varphi(i) \in O_x \cap O_y$.
Insbesondere ist $O_x \cap O_y \neq \emptyset$. Da dies für alle O_x, O_y gilt, steht die Annahme in Kontraposition zu der Hausdorff Eigenschaft.↯ □

Wir kommen nun zum Analogon des Begriffes von Teilfolgen.

3.3.9 Definition. Sei X eine Menge, $\langle I, \geq\rangle$ eine gerichtete Menge, und $\varphi: I \to X$ ein Netz in X. Ist $\langle J, \geq\rangle$ eine gerichtete Menge, und $\iota: J \to I$ eine Funktion mit

$$\forall i \in I \exists j_0 \in J \forall j \geq j_0: \iota(j) \geq i$$

so heißt das Netz

$$\varphi \circ \iota: J \to X$$

ein ***Teilnetz von*** φ.

3.3.10 Bemerkung. Die Bedingung von ι in 3.3.9 Definition ist insbesondere dann erfüllt, wenn ι monoton ist und $\iota(J)$ cofinal in I.
Dabei nennen wir eine Teilmenge M und I ***cofinal in*** I, wenn

$$\forall i \in I \exists i' \in M: i \geq i'.$$

Für fast alle Zwecke genügt es solche speziellen Teilnetze zu verwenden.

So wie man es von Folgen kennt, kann man Konvergenz eines Netzes auch mittels Teilnetzen charakterisieren.

3.3.11 Satz. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, $\langle I, \geq\rangle$ eine gerichtete Menge, $\varphi: I \to X$ ein Netz, und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(i) f konvergiert gegen x bzgl. $\mathcal{T}$.

(ii) Jedes Teilnetz von φ konvergiert gegen x bzgl. $\mathcal{T}$.

(iii) Jedes Teilnetz von φ hat ein Teilnetz welches gegen x konvergiert.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$,$(ii) \Rightarrow (iii)$

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\langle J, \geq\rangle$ gerichtet, $\iota: J \to I$, so dass $\varphi \circ \iota: J \to X$ ein Teilnetz von φ ist. Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x)$. Wähle $i_0 \in I$ sodass $\varphi(i) \in U$ für alle $i \geq i_0$, und wähle $j_0 \in J$ sodass $\iota(j) \geq i_0$ für alle $j \geq j_0$. Dann ist

$$(\varphi \circ \iota)(j) \in U, \ \forall j \geq j_0.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Jedes Netz ist Teilnetz von sich selbst, nämlich vermöge der identischen Abbildung (die offenbar monoton mit cofinalem Bild ist).

□

So wie man es von Folgen kennt, kann man Konvergenz eines Netzes auch mittels Teilnetzen charakterisieren.

3.3.12 Satz. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, $\langle I, \geq\rangle$ eine gerichtete Menge, $\varphi: I \to X$ ein Netz, und $x \in X$. Dann sind äquivalent:*

(i) f konvergiert gegen x bzgl. $\mathcal{T}$.

(ii) Jedes Teilnetz von φ konvergiert gegen x bzgl. $\mathcal{T}$.

(iii) Jedes Teilnetz von φ hat ein Teilnetz welches gegen x konvergiert.

Beweis. $(iii) \implies (i)$:

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wir verwenden Kontraposition.
Sei vorausgesetzt, dass

$$\exists U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}}(x) \forall i_0 \in I \exists i \geq i_0 : \varphi(i) \notin U.$$

Sei ein U mit dieser Eigenschaft festgehalten, und betrachte

$$J := \{i \in I | \varphi(i) \notin U\}$$

versehen mit der Einschränkung von $\geq$. Dann ist $\langle J, \geq\rangle$ eine gerichtete Menge, denn: Reflexivität und Transitivität verstehen sich klarerweise. Sei $J' \subseteq J$ endlich, dann gibt es $i_0 \in I$ welches obere Schranke von J' ist. Nach obiger Eigenschaft gibt es $j \in J$ mit $i_0 \geq j$, und jedes solcher j ist obere Schranke von J'

in J.
Sei nun ι die Inklusionsabbildung

$$\iota: \begin{cases} J \to I \\ i \mapsto i \end{cases}$$

dann ist ι jedenfalls monoton, und nach obiger Eigenschaft auch cofinal. Betrachte das Teilnetz $\varphi \circ \iota: J \to X$, und ein Teilnetz von diesem:

$$(\varphi \circ \iota) \circ \chi: K \to X$$

wo K gerichtet und $\chi: K \to J$. Die Umgebung U hat die Eigenschaft, dass

$$\forall k \in K: \varphi(k) \notin U,$$

insebesondere kann x nicht Grenzwert von $(\varphi \circ \iota) \circ \chi$ sein.

□

3.3.13 Proposition. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) *Sei $A \subseteq X$. Dann ist A abgeschlossen, genau dann wenn gilt:*
Für jedes Netz φ in X dessen Bild in A liegt, liegt auch jeder Grenzwert in A.

(ii) *Sei $M \subseteq X$ und $x \in X$. Dann ist $x \in \overline{M}$, genau dann wenn gilt:*
Es gibt ein Netz φ in X dessen Bild in A liegt, und so dass x Grenzwert von φ ist.

(iii) *Sei $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ ein topologischer Raum und $f: X \to Y$. Dann ist f stetig, genau dann wenn gilt:*
Ist φ ein Netz in X und $x \in X$ ein Grenzwert von φ, so ist $f(x)$ ein Grenzwert von $f \circ \varphi$.

Beweis.

von (i) “ $\Longrightarrow$ ”: Sei $\varphi: I \to X$ ein Netz mit $\varphi(I) \subseteq A$, und sei x ein Grenzwert von φ in $\langle X, \mathcal{T}\rangle$. Sei $U \in \mathfrak{U}(x)$, dann finden wir $i_0 \in I$ sodass $\varphi(i) \in U$ für alle $i \geq i_0$. Insebesondere ist $A \cap U \neq \emptyset$. Es folgt, dass $x \in \overline{A} = A$.

von (ii) “ $\Longrightarrow$ ”: Für $U \in \mathfrak{U}(x)$ wähle $x_U \in M \cap U$. Betrachte nun den Filter $\mathfrak{U}(x)$ als gerichtete Menge, und das Netz $\varphi(U) \coloneqq x_U, U \in \mathfrak{U}(x)$. Wir zeigen, dass x Grenzwert von φ ist. Sei dazu $U \in \mathfrak{U}(x)$ gegeben. Ist $V \subseteq U$, so gilt

$$\varphi(V) = x_V \in M \cap V \subseteq U.$$

von (i) “ $\Longleftarrow$ ”: Sei $x \in \overline{A}$. Nach dem bereits bewiesenen existiert ein Netz mit Bild in A und Grenzwert x. Es folgt $x \in A$.

von (ii) “ $\Longleftarrow$ ”: Sei φ ein Netz mit Bild in M und Grenzwert x. Dann ist das Bild von φ auch in der abgeschlossenen Menge $\overline{M}$, und nach dem bereits bewiesenen folgt $x \in \overline{M}$.

von (iii) " $\Longleftarrow$ ": Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen, sei φ ein Netz in X mit Bild in $f^{-1}(A)$, und sei $x \in X$ ein Grenzwert von φ. Dann ist $f \circ \varphi$ ein Netz in Y mit Bild in A und $f(x)$ ist ein Grenzwert von $f \circ \varphi$. Nun gilt $(f \circ \varphi)(I) \subseteq A$, und daher auch $f(x) \in A$. D.h. $x \in f^{-1}(A)$.

von (iii) " $\Longrightarrow$ ": Sei $\varphi\colon I \to X$ ein Netz in X, und sei $x \in X$ Grenzwert von φ. Weiters sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(f(x))$. Wähle $V \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}}(x)$ mit $f(V) \subseteq U$ und $i_0 \in I$ sodass $\varphi(i) \in V$ für alle $i \geq i_0$. Dann ist auch $(f \circ \varphi)(i) \in U$ für alle $i \geq i_0$.

□

Als Beispiel betrachten wir näher was Konvergenz in initialen Topologien bedeutet.

3.3.14 Lemma. *Sei X eine Menge, $\langle Y_i, \mathcal{V}_i\rangle, i \in I$, topologische Räume, und $f_i\colon X \to Y_i$ Funktionen, und bezeichne $\mathcal{T}_{\text{ini}}$ die initiale Topologie auf X bzgl. der f_i. Weiters sei $\langle J, \geq\rangle$ gerichtet, $\varphi\colon J \to X$ ein Netz in X, und $x \in X$.*
Dann ist x ein Grenzwert von φ bzgl. $\mathcal{T}_{\text{ini}}$, genau dann wenn für jedes $i \in I$ der Punkt $f_i(x) \in Y_i$ Grenzwert des Netzes $f_i \circ \varphi$ bzgl. $\mathcal{V}_i$ ist.

Beweis. Wir erinnern uns, dass die initiale Topologie die von $\{f_i^{-1}(O_i) | i \in I, O_i \in \mathcal{V}_i\}$ erzeugte Topologie ist. Also ist jedes Element von $\mathcal{T}_{\text{ini}}$ eine Vereinigung endlicher Durchschnitte von Mengen $f_i^{-1}(O_i)$. Für jedes $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\text{ini}}}(x)$ existieren also $n \in \mathbb{N}, i_1, \ldots, i_n \in I,\ O_1 \in \mathcal{V}_{i_1}, \ldots, O_n \in \mathcal{V}_{i_n}$, sodass

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} f_{i_k}^{-1}(O_k) \subseteq U.$$

$\Longleftarrow$: Sei $U \in \mathcal{U}^{\mathcal{T}_{\text{ini}}}$, und wähle einen endlichen Durchschnitt wie oben. Wähle $j_k \in J, k = 1, \ldots, n$, sodass

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \forall j \geq j_k\colon (f_{i_k} \circ \varphi)(j) \in O_k.$$

Wähle nun eine obere Schranke $j_0 \in J$ der endlichen Mengen $\{j_1, \ldots, j_n\}$. Dann ist $\varphi(j) \in U$ für alle $j \geq j_0$.

$\Longrightarrow$: Sei $i \in I$ und $U_i \in \mathcal{U}^{\mathcal{V}_i}(f_i(x))$.
Wähle $j_0 \in J$ sodass $\varphi(j) \in f_i^{-1}(O_i)$ für alle $j \geq j_0$.
Dann ist auch $(f_i \circ \varphi)(j) \in U_i$ für alle $j \geq j_0$.

□

3.3.15 Beispiel. Sei Ω eine Menge und $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ ein topologischer Raum. Betrachte die Menge

$$M \coloneqq Y^{\Omega}$$

aller Funktionen von Ω nach Y. Wir versehen X mit der initialen Topologie $\mathcal{T}$ bzgl. der Punktauswertungen

$$\pi_\omega\colon \begin{cases} Y^{\Omega} \to Y \\ f \mapsto f(\omega), \quad \omega \in \Omega \end{cases}$$

Sei nun $\langle I, \succeq \rangle$ eine gerichtete Menge, und $(f_i)_{i \in I}$ ein Netz von Funktionen $f_i \in Y^\Omega$. Weiters sei $f \in Y^\Omega$.
Dann ist f Grenzwert von $(f_i)_{i \in I}$ bzgl. $\mathcal{T}$, genau dann wenn

$$\forall \omega \in \Omega : f(\omega) \text{ ist Grenzwert von } \big(f_i(\omega)\big)_{i \in I} \text{ bzgl. } \mathcal{V}_i.$$

Die Topologie $\mathcal{T}$ heißt die ***Topologie der punktweisen Konvergenz*** auf Y^Ω.

Kapitel 4

Kompaktheit

4.0.1 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $K \subseteq X$ heißt ***kompakt in*** $\langle X, \mathcal{T}\rangle$, wenn

$$\forall \mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}: \left(\bigcup \mathcal{E} \supseteq K \implies \exists \mathcal{D} \subseteq \mathcal{E} \text{ endlich:} \bigcup \mathcal{D} \supseteq K \right).$$

Falls die Vereinigung aller Teilmengen einer Teilmenge $\mathcal{E}$ der Topologie $\mathcal{T}$ das K "überdeckt", dann gibt es eine endliche Untermenge $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$, die ebenfalls K "überdeckt".

4.0.2 Beispiel. Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, und $K \subseteq X$ endlich.
Dann ist K kompakt.

Um das zu sehen, sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K$ gegeben. Für jedes $x \in K$ wähle $E_x \in \mathcal{E}$ mit $x \in E_x$. Dann ist

$$\mathcal{D} := \{E_x | x \in K\}$$

eine endliche Teilmenge von $\mathcal{E}$ und $\bigcup \mathcal{D} \supseteq K$.

4.0.3 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) Sei $K \subseteq X$. Dann ist K kompakt in $\langle X, \mathcal{T}\rangle$, genau dann wenn K kompakt in $\langle K, \mathcal{T}|_K\rangle$ ist.

(ii) Sind $K_1, \ldots, K_n \subseteq X$ kompakt, so ist auch $K_1 \cup \ldots \cup K_n$ kompakt.

(iii) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq K$ abgeschlossen in $\langle K, \mathcal{T}|_K\rangle$. Dann ist A kompakt.

(iv) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist $K \cap A$ kompakt.

Beweis.

von (i): Wir erinnern uns, dass

$$\mathcal{T}|_K = \{O \cap K | O \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{T}.$$

$\Longleftarrow$: Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}|_K$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K$. Für $E \in \mathcal{E}$ wähle $O_E \in \mathcal{T}$ mit $E = O_E \cap K$. Dann ist $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} O_E \supseteq K$. Wähle $E_1, \ldots, E_n$ mit $\bigcup_{j=1}^n O_{E_j} \supseteq K$.
Dann ist
$$\bigcup_{j=1}^n E_j = \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(O_{E_j} \cap K)}_{\in \mathcal{T}|_K} = \left(\bigcup_{j=1}^n O_{E_j} \right) \cap K = K.$$

$\Longrightarrow$: Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K$. Dann ist $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} (E \cap K) = K$ und wir finden $E_1, \ldots, E_n$ mit $\bigcup_{j=1}^n (E_j \cap K) = K$. Damit ist auch $\bigcup_{j=1}^n E_j \supseteq K$.

von (ii): Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_n$. Dann ist für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ auch $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K_j$. Wähle $\mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{E}$ endlich mit $\bigcup \mathcal{D}_j \supseteq K_j$.
Dann ist $\mathcal{D} := \bigcup_{j=1}^n \mathcal{D}_j \subseteq \mathcal{E}$ endlich, und
$$\bigcup \mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_1 \cup \ldots \cup \bigcup \mathcal{D}_n \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_n.$$

von (iv): Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} \supseteq K \cap A$.
Dann ist $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \cup \{X \setminus A\} \subseteq \mathcal{T}$ und $\bigcup \mathcal{E}' \supseteq K$. Also finden wir
$$E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E} \colon E_1 \cup \ldots \cup E_n \cup (X \setminus A) \supseteq K,$$
und damit $E_1 \cup \ldots \cup E_n \supseteq K \cap A$.

von (iii): Da A in$\mathcal{T}|_K$ abgeschlossen ist, finden wir $B \subseteq X$ abgeschlossen in $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ sodass $A = K \cap B$.

$\square$

4.0.4 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Hausdorffscher topologischer Raum. Dann gilt:*

(i) $\forall K \subseteq X, y \in X, y \notin K \exists O_K, O_X \in \mathcal{T} \colon K \subseteq O_K, x \in O_X, O_K \cap O_X = \varnothing$

(ii) Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist K auch abgeschlossen.

Beweis.

von (i): Sei $x \in K$. Dann existieren $W_x, V_x \in \mathcal{T}$ mit $x \in W_x, y \in V_x, W_x \cap V_x = \varnothing$. Offenbar gilt $\bigcup_{x \in K} W_x \supseteq K$. Wähle $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $\bigcup_{j=1}^n W_{x_j} \supseteq K$.
Setze
$$O_K := \bigcup_{j=1}^n W_{x_j}, \; O_y := \bigcap_{j=1}^n V_{x_j},$$
dann gilt $K \subseteq O_K, y \in O_y$, es sind O_K, O_y offen, und
$$O_K \cap O_y = \bigcup_{j=1}^n W_{x_j} \cap \bigcap_{l=1}^n V_{x_l} = \bigcup_{j=1}^n \left(W_{x_j} \cap \bigcap_{l=1}^n V_{x_l} \right) \subseteq \bigcup_{l=1}^n \left(W_{x_j} \cap V_{x_j} \right) = \varnothing.$$

von (ii): Zu jedem $y \in X \setminus K$ wähle $W_y, O_y \in \mathcal{T}$ mit $K \subseteq W_y, y \in O_y, W_y \cap O_y = \varnothing$. Dann gilt
$$X \setminus K \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus K} O_y \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus K} (X \setminus W_y) = X \setminus \bigcap_{y \in X \setminus K} W_y \subseteq X \setminus K.$$
Also ist $X \setminus K = \bigcup_{y \in X \setminus K} O_y$ und daher offen.

$\square$

4.0.5 Lemma. *Seien $\langle X,\mathcal{T}\rangle, \langle Y,\mathcal{V}\rangle$ topologische Räume, und $f\colon X\to Y$ eine stetige Funktion. Dann gilt*

$$\forall K\subseteq X\colon K \text{ kompakt} \implies f(K) \text{ kompakt}.$$

Beweis. Sei $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{V}$ mit $\bigcup\mathcal{E}\supseteq f(K)$. Dann ist

$$\mathcal{E}' := \{f^{-1}(E) | E\in\mathcal{E}\}\subseteq\mathcal{T}$$

und $\bigcup\mathcal{E}'\supseteq K$. Wähle $\mathcal{D}'\subseteq\mathcal{E}'$ endlich mit $\bigcup\mathcal{D}'\supseteq K$, und wähle für jedes $D'\in\mathcal{D}'$ ein $E_{D'}\in\mathcal{E}$ mit $D' = f^{-1}(E_{D'})$. Die Menge

$$\mathcal{D} := \{E_{D'} | D'\in\mathcal{D}'\}$$

ist eine endliche Teilmenge von $\mathcal{E}$, und es gilt

$$f(K)\subseteq f\Bigg(\bigcup_{D'\in\mathcal{D}'} D'\Bigg) = \bigcup_{D'\in\mathcal{D}'} f(D') \subseteq \bigcup_{D'\in\mathcal{D}'} E_{D'}.$$

$\square$

4.0.6 Korollar. *Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ kompakt und $\langle Y,\mathcal{V}\rangle$ Hausdorff. Ist $f\colon X\to Y$ bijektiv und stetig, so ist f ein* **Homöomorphismus**.

Beweis. Sei $A\subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A auch kompakt in X, und daher $f(A)$ kompakt in Y. Da Y Hausdorff ist, ist $f(A)$ auch abgeschlossen. Nun gilt, da f bijektiv ist,

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A).$$

$\square$

4.0.7 Definition. Sei X eine Menge, und $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$. Wir sagen $\mathcal{A}$ hat die ***endliche Durchschnittseigenschaft***, wenn

$$\forall\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A} \text{ endlich:} \bigcap\mathcal{B}\neq\emptyset.$$

4.0.8 Satz. *Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum und $K\subseteq X$. Dann sind äquivalent:*

(i) K ist kompakt.

(ii) Jede Familie $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ deren Elemente abgeschlossen bzgl. $\mathcal{T}|_K$ sind, und die die endliche Durchschnittseigenschaft hat, erfüllt

$$\bigcap\mathcal{A}\neq\emptyset.$$

(iii) Jedes Netz in K hat ein in $\langle K,\mathcal{T}|_K\rangle$ konvergentes Teilnetz.

Beweis. Da K als Teilmenge von $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ kompakt ist, genau dann wenn es als Teilmenge von $\langle K,\mathcal{T}|_K\rangle$ kompakt ist, genügt es den Fall $K = X$ zu betrachten.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Wir verwenden Kontraposition.
Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft und $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$. Dann ist

$$\mathcal{E} := \{X \setminus A | A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{T},$$

und es gilt $\bigcup \mathcal{E} = X$. Ist $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ endlich, so gilt

$$X \setminus \bigcup \mathcal{D} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}} (X \setminus D) \neq \varnothing.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $\langle I, \leq \rangle$ gerichtet und $\varphi: I \to X$ ein Netz.

- Im ersten Schritt betrachte das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \left\{ \overline{\{\varphi(j) | j \geq i\}} \middle| i \in I \right\} \subseteq \mathcal{P}(X).$$

Dieses hat die endliche Durchschnittseigenschaft, denn:
Ist $I' \subseteq I$ endlich, so gibt es eine obere Schranke i_0 von I'.
Für diese gilt

$$\begin{aligned} \{\varphi(j) | j \geq i_0\} &\subseteq \bigcap_{i \in I'} \{\varphi(j) | j \geq i\} \\ &\subseteq \bigcap_{i \in I'} \overline{\{\varphi(j) | j \geq i\}}, \end{aligned}$$

und daher auch

$$\varnothing \neq \overline{\{\varphi(j) | j \geq i_0\}} \subseteq \bigcap_{i \in I'} \overline{\{\varphi(j) | j \geq i\}}.$$

Wähle nun

$$x \in \bigcap_{i \in I} \overline{\{\varphi(j) | j \geq i\}}.$$

- Im zweiten Schritt konstruieren wir ein Teilnetz von φ welches gegen dieses Element x konvergiert. Setze

$$\begin{aligned} J &:= \left\{ (j, U) \in I \times \mathcal{U}(x) \middle| \varphi(j) \in U \right\}, \\ (j, U) \leq (j', U') &:\Leftrightarrow j \leq j' \wedge U \supseteq U', \\ \iota &: \begin{cases} J \to I \\ (j, U) \mapsto j \end{cases}. \end{aligned}$$

Das die Relation $\leq$ auf J reflexiv und transitiv ist, ist klar. Seien $(j_1, U_1), \ldots, (j_n, U_n) \in J$. Wähle $k \in I$ mit $k \geq j_l, l = 1, \ldots, n$. Da $x \in \overline{\{\varphi(j) | j \geq k\}}$ ist, existiert $j \geq k$ mit $x_j \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Dann ist $(j, U_1 \cap \ldots \cap U_n) \in J$, und

$$(j, U_1 \cap \ldots \cap U_n) \geq (j_l, U_l), l = 1, \ldots, n.$$

Die Funktion ι ist offensichtlich monoton. Da für jedes $j \in I$ das Paar $(j, X) \in J$ liegt, ist ι surjektiv, und hat insbesondere cofinales Bild in I. Wir haben also tatsächlich ein Teilnetz

$$\varphi \circ \iota: J \to X$$

von φ.

▷ Im dritten Schritt zeigen wir, dass x Grenzwert von $\varphi \circ \iota$ ist. Dazu sei $U \in \mathcal{U}(x)$ gegeben. Da U mit jeder Menge $\{\varphi(j) | j \geq i\}$ nichtleeren Schnitt hat, exitiert - insbesondere $j_0 \in i$ mit $(j_0, U) \in J$. Ist $(j, V) \in J$ mit $(j, V) \geq (j_0, U)$, so gilt

$$(\varphi \circ \iota)(j, V) = \varphi(j) \in V \subseteq U.$$

$(iii) \Rightarrow (i)$: Wir verwenden Kontraposition.
Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup \mathcal{E} = X$ und $\bigcup \mathcal{D} \neq X$ für alle $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{E}$ endlich. Sei

$$I \coloneqq \{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D} | \mathcal{D} \text{ endlich}\},$$
$$\mathcal{D} \leq \mathcal{D}' :\Leftrightarrow \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'^{\cdot}$$

Da die Vereinigung endlich vieler endlichen Mengen wieder endlich ist, ist $\langle I, \leq \rangle$ gerichtet. Sei nun $\varphi: I \to X$ eine Funktion mit

$$\forall \mathcal{D} \in I : \varphi(\mathcal{D}) \in X \setminus \bigcup \mathcal{D} \quad \text{(Auswahlaxiom)}.$$

Sei $\varphi \circ \iota: J \to X$ ein Teilnetz von φ und sei $x \in X$. Wähle $E \in \mathcal{E}$ mit $x \in E$. Dann ist $E \in \mathcal{U}(x)$, und es gilt

$$\forall \mathcal{D}_0 \in I : \mathcal{D}_0 \cup \{E\} \geq \mathcal{D}_0 \wedge \varphi(\mathcal{D}_0 \cup \{E\}) \notin E.$$

Also ist x nicht Grenzwert von $\varphi \circ \iota$

□

4.1 Kompaktheit in metrischen Räumen

4.1.1 Definition. Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.

(i) Der ***Durchmesser*** von M ist die Zahl

$$\mathbf{d(M)} \coloneqq \sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\}.$$

(ii) M heißt ***beschränkt,*** wenn $d(M) < \infty$.

(iii) M heißt ***total beschränkt***, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists M_1, \dots, M_n \subseteq X : d(M_1), \dots, d(M_n) \leq \epsilon \wedge M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} M_j$$

Zwei einfache Eigenschaften sind:

4.1.2 Lemma. *Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Dann gilt:*

(i) M ist totalbeschränkt, genau dann wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in X : M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_\epsilon(x_j)$$

(ii) *Ist M total beschränkt, so ist M auch beschränkt.*

Beweis.

von (i): Einerseits gilt $d(U_\epsilon(x)) \le 2\epsilon$. Andererseits gilt für eine Teilmenge M sodass

$$\forall \delta > 0 \forall x \in M \colon M \subseteq U_{d(M)+\delta}(x)$$

von (ii): Ist $M = \emptyset$, so ist M beschränkt. Sei $M \neq \emptyset$. Wähle $x \in M$ und $M_1, \dots, M_n \subseteq X$ mit $d(M_j) \le 1$ und $M \subseteq \bigcup_{j=1}^n M_j$. O.B.d.A. seien alle M_j nicht-leer. Wähle $x_j \in M_j$ und setze

$$R \coloneqq \max\{d(x_j, x_i) \mid i, j = 1, \dots, n\} + 2.$$

Sind $x, y \in M$ wähle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in M_i$ und $y \in M_j$. Dann gilt

$$d(x,y) \le d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \le R + 2$$

□

4.1.3 Satz. *Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) *K ist kompakt bezüglich der von d induzierten Topologie $\mathcal{T}_d$.*

(ii) *Jede Folge in K hat eine gegen einen Punkt von K konvergente Teilfolge.*

(iii) *K ist total beschränkt und, mit der von d induzierten Metrik $d|_{K\times K}$, vollständig.*

Beweis. Wir werden die Implikationen $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$ zeigen. Jede dieser Implikationen beinhaltet unterschiedliche Argumentationsweisen.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\varphi\colon \mathbb{N} \to K$ eine Folge in K. Um zu zeigen, dass dann ein Teilnetz $\varphi \circ \iota\colon I \to K$ existiert, welches gegen einen Punkt $x \in K$ konvergiert, müssen wir eine konvergente Teilfolge konstruieren. Die Konstruktion beruht auf einer allgemeinen Tatsache - nämlich, dass jeder Punkt eines metrischen Raumes eine ***abzählbare Umgebungsbasis*** besitzt, d.h. es gilt

$$\forall x \in X \exists \mathcal{W}(x) \subseteq \mathfrak{U}(x) \text{ höchstens abzählbar:}$$
$$\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists W \in \mathcal{W}(x) \colon W \subseteq U.$$

Zum Beispiel wähle man die Familie der Kugeln

$$\mathcal{W}(x)\colon \{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ist nämlich $U \in \mathfrak{U}(x)$, so gibt es $O \in \mathcal{T}_d$ mit $x \in O \subseteq U$, und daher $\epsilon > 0$ mit $U_\epsilon(x) \subseteq O$ und schließlich $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} \le \epsilon$ und daher $U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq O \subseteq U$.
Wir definieren nun rekursiv eine Teilfolge $\kappa\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

▷ Wähle $i \in I$ mit $(\varphi \circ \iota)(i) \in U_1(x)$, und setze $\kappa(1) \coloneqq \iota(i)$.

▷ Seien $\kappa(1), \ldots, \kappa(n)$ bereits konstruiert.
Wähle $i_0 \in I$ sodass $(\varphi \circ \iota)(i) \in U_{\frac{1}{n+1}}(x)$ für alle $i \geq i_0$, wähle $i_1 \in I$ sodass $\iota(i) \geq \kappa(n) + 1$ für alle $i \geq i_1$, wähle $j \in I$ sodass $j \geq i_0, i_1$, und setze $\kappa(n+1) \coloneqq \iota(j)$.
Die Teilfolge $\varphi \circ \kappa$ konvergiert nun tatsächlich gegen x bzgl. $\mathcal{T}_d$. Denn ist $U \in \mathfrak{U}(x)$ gegeben, so wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $U_{\frac{1}{n_0}}(x) \subseteq U$. Dann gilt nach der Konstruktion von κ für alle $n \geq n_0$

$$\varphi(\kappa(n)) \in U_{\frac{1}{n}}(x) \subseteq U_{\frac{1}{n_0}}(x) \subseteq U.$$

□

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Wir verwenden Kontraposition.
▷▷ **Sei K nicht total beschränkt.** Wähle $\epsilon > 0$ sodass sich K nicht mit endlich vielen Kugeln vom Radius ϵ überdecken lässt. Wir definieren rekursiv eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K.

▷ Wähle $x_1 \in K$ beliebig (beachte hier, dass $K \neq \emptyset$).

▷ Seien $x_1, \ldots, x_n$ schon konstruiert. Wähle

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_\epsilon(x_j).$$

Ist $n > m$, so haben wir also stets $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$. Also ist jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht Cauchy-Folge und daher nicht konvergent.
▷▷ **Sei $\langle K, d|_{K\times K}\rangle$ nicht vollständig.** Wir erinnern uns, dass eine Cauchy-Folge die eine konvergente Teilfolge hat bereits selbst konvergiert. *(z.B. [Fundament Analysis, Kaltenbäck][2], Lemma 3.5.7, rudimentär auch [EN-Skript][3] letzter Teil im Beweis von Satz 3.22)*
Sei nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K die nicht konvergiert. Dann gibt es also keine konvergente Teilfolge.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Die in diesem Beweisteil verwendete Argumentation ist eigentlich ein allgemeines Lemma aus der Graphentheorie. (*siehe* ***Lemma (von König)***).
Ist $K \neq \emptyset$, so ist K kompakt. Sei also $K \neq \emptyset$.
▷▷**Wir verwenden, dass K total beschränkt ist**.
Wir definieren induktiv Partitionen $\mathcal{Q}_n, n \geq 1$, von K mit den Eigenschaften, dass

(i) $\forall A \in \mathcal{Q}_n\colon d(A) \leq \frac{1}{n}$,

(ii) $\forall n \geq 2, A \in \mathcal{Q}_n \exists B \in \mathcal{Q}_{n-1}\colon B \supseteq A$.

▷ Wähle eine endliche Überdeckung $\{A_1, \ldots, A_m\}$ von K wobei $d(A_j) \leq 1$. Setze

$$B_k \coloneqq A_k \setminus \bigcup_{l<k} A_l$$
$$\text{und } \mathcal{Q}_1 \coloneqq \big\{B_k \mid k \in \{1, \ldots, m\}, B_k \neq \emptyset\big\}.$$

▷ Sei angenommen, dass $\mathcal{Q}_n$ bereits konstruiert ist. Wähle eine endliche Überdeckung von K durch Mengen $A_1, \ldots, A_m$ mit $d(A_j) \le \frac{1}{n+1}$, setze

$$B_k \coloneqq A_k \setminus \bigcup_{l<k} A_l, \quad k = 1, \ldots, m,$$
$$\text{und } \mathcal{Q}_{n+1} \coloneqq \Big\{ C \cap B_k \mid C \in \mathcal{Q}_n, k \in \{1, \ldots, m\}, C \cap B_k \neq \varnothing \Big\}.$$

Die Mengen $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots$ sind alle nicht-leer und endlich. Für jedes $n \ge 2$ und $A \in \mathcal{Q}_n$ gibt es ein eindeutiges $B \in \mathcal{Q}_{n-1}$ mit $B \supseteq A$. Es ist also eine Funktion

$$f \colon \dot{\bigcup_{n\ge 2}}$$

Es ist also eine Funktion

$$f \colon \dot{\bigcup_{n\ge 2}} \mathcal{Q}_n \to \dot{\bigcup_{n\ge 1}} \mathcal{Q}_{n-1}$$

durch die Eigenschaft

$$\forall n \ge 2, A \in \mathcal{Q}_n \colon f(A) \supseteq A$$

wohldefiniert.

▷▷**Wir verwenden die Vollständigkeit**
Sei $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge mit $A_n \in \mathcal{Q}_n$ und $A_{n-1} = f(A_n)$ für alle $n \ge 2$. Wir zeigen, dass

$$\exists x \in X \forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge n_0 \colon A_n \subseteq U.$$

Dann wähle $x_n \in A_n, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n < m$ dass $x_n, x_m \in A_n$ und daher $d(x_n, x_m) \le \frac{1}{n}$. Wir sehen, dass $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist.
Sei x der Grenzwert von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x_m \in A_m \subseteq A_n$ für $m \ge n$, und daher folgt

$$x = \lim_{m\to\infty} x_m \in \overline{A_n}.$$

Wegen $d(\overline{A_n}) = d(A_n) \le \frac{1}{n}$ sehen wir, dass $\overline{A_n} \subseteq U_\epsilon(x)$ falls $\frac{1}{n} < \epsilon$.

▷▷**Beweis der Kompaktheit von K**
Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}(K)$ eine Familie von in der Spurtopologie $\mathcal{T}_d|_K$ offenen Mengen. Setze

$$\hat{\mathcal{Q}}_n \coloneqq \Big\{ A \in \mathcal{Q}_n \mid \nexists\, O \in \mathcal{V} \colon O \supseteq A \Big\},$$

- **Fall1,$\exists n \in \mathbb{N} \colon \hat{\mathcal{Q}}_n = \varnothing$:** Ist $\hat{\mathcal{Q}}_n = \varnothing$, so können wir zu jedem Element $A \in \mathcal{Q}_n$ ein $O_A \in \mathcal{V}$ wählen mit $O_A \supseteq A$. Das sind endlich viele Mengen, und es gilt

$$\bigcup \Big\{ O_A \mid A \in \mathcal{Q}_n \Big\} \supseteq \bigcup \mathcal{Q}_n = K.$$

Wir haben also eine endliche Teilüberdeckung.

- **Fall2,$\forall n \in \mathbb{N} \colon \hat{\mathcal{Q}}_n \neq \varnothing$:** Betrachte die Einschränkung

$$\hat{f} \coloneqq f|_{\dot{\bigcup}_{n\ge 2} \hat{\mathcal{Q}}_n}.$$

Wegen $f(A) \supseteq A$ gilt sicher $\hat{f}(\hat{\mathcal{Q}}_n) \subseteq \hat{\mathcal{Q}}_{n-1}$. Nach dem König-Lemma finden wir eine Folge $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $A_n \in \hat{\mathcal{Q}}_n$ und $f(A_n) = A_{n-1}$ für alle $n \geq 2$. Wegen der im vorigen Schritt gezeigten Aussage (und der Definition von $\hat{\mathcal{Q}}_n$) finden wir $x \in X$ welches in keiner Menge O aus $\mathcal{V}$ liegt, d.h.

$$\bigcup \mathcal{V} \neq K.$$

□

4.1.4 Lemma (von König). *Sei $V_1, V_2, \ldots$ eine unendliche Folge nichtleerer und endlicher Mengen, und sei f eine Funktion*

$$f \colon \dot{\bigcup_{n\geq 1}} V_n \to \dot{\bigcup_{n\geq 0}} V_n \quad \textit{(disjunkte Vereinigung)}$$

mit der Eigenschaft, dass $f(V_n) \subseteq V_{n-1}$ für alle $n \geq 1$.
Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n \in V_n$ sodass

$$\forall n \geq 1 \colon x_{n-1} = f(x_n).$$

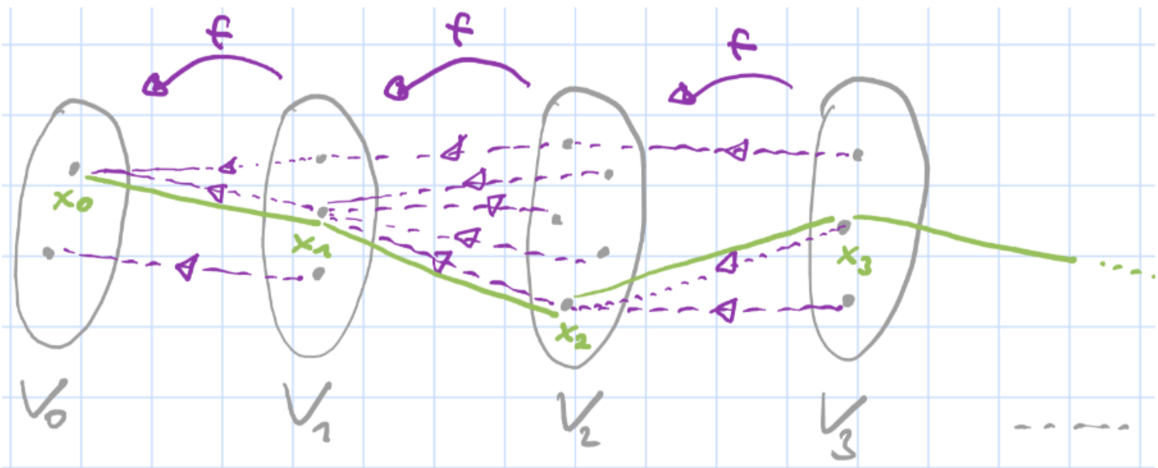


Abbildung 4.1: Illustration des 4.1.4 Lemma von König.

Beweis. Betrachte die Menge

$$\mathcal{M} := \left\{(x_0, x_1, \ldots, x_N) \mid N \in \mathbb{N}, \forall n = 1, \ldots, N \colon x_n \in V_n \wedge x_{n-1} = f(x_n)\right\}.$$

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $x_N \in V_N$ ist also die endliche Folge $(f^{(N)}(x), f^{(N-1)}(x), \ldots, f(x), x)$ in $\mathcal{M}$, und je zwei solche Folgen sind unterschiedlich. Da $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} V_N$ unendlich ist, ist also auch $\mathcal{M}$ unendlich.
Wir definieren nun induktiv eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sodass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\mathcal{M}_{z_0,\ldots,z_n} := \left\{(x_0, \ldots, x_N) \in \mathcal{M} \mid N \geq n, x_0 = z_0, \ldots, x_n = z_n\right\}$$

unendlich ist.

- ▷ Die Menge $\mathcal{M}$ ist unendlich und V_0 ist endlich. Also gibt es $z_0 \in V_0$ sodass $\mathcal{M}_{z_0}$ unendlich ist.
- ▷ Seien $z_0, \dots, z_n$ schon konstruiert. Die Menge $\mathcal{M}_{z_0,\dots,z_n}$ ist unendlich und V_{n+1} ist endlich. Also gibt es $z_{n+1} \in V_{n+1}$ sodass $\mathcal{M}_{z_0,\dots,z_n,z_{n+1}}$ unendlich ist.

□

4.1.5 Korollar. *Sei $\langle X, d\rangle$ ein vollständig metrischer Raum, und $M \subseteq X$. Dann ist $\overline{M}$ kompakt, genau dann wenn M total beschränkt ist.*

Beweis. Aus einer endlichen Überdeckung von M

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

erhält man eine Überdeckung von $\overline{M}$, nämlich

$$\overline{M} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}.$$

Beachte hier, dass eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist. Weiters gilt für jede Menge $A \subseteq X$ dass $d(A) = d(\overline{A})$. Wir sehen, dass M total beschränkt ist, genau dann wenn $\overline{M}$ total beschränkt ist.

"$\Longrightarrow$": Ist $\overline{M}$ kompakt, so ist $\overline{M}$ auch total beschränkt, und damit insbesondere M totalbeschränkt.

"$\Longleftarrow$": Ist M total beschränkt, so ist auch $\overline{M}$ total beschränkt. Nun ist $\overline{M}$ als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes selbst auch vollständig. Damit ist $\overline{M}$ kompakt.

□

Eine Menge deren Abschluß kompakt ist nennt man auch ***relativ kompakt***. Wir erhalten als Korollar auch einen Beweis des Satzes von Heine-Borel.

4.1.6 Korollar.

(i) *Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $K \subseteq X$. Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.*

(ii) **(Heine-Borel):** *Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) versehen mit der euklidischen Metrik. Ist K abgeschlossen und beschränkt, so ist K kompakt.*

Beweis.

von (i): Jeder metrische Raum erfüllt $(T2)$, denn ist $x, y \in X, x \neq y$, so sind die Kugeln $U_\epsilon(x)$ und $U_\epsilon(y)$ mit $\epsilon := \frac{1}{3}d(x,y)$ offen und disjunkt. Also gilt "kompakt $\Longrightarrow$ abgeschlossen".
Weiters gilt, nach obigem Satz,

$$\text{"kompakt} \Longrightarrow \text{total beschränkt} \Longrightarrow \text{beschränkt"}.$$

von (iii): Es genügt zu zeigen, dass jede beschränkte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ total beschränkt ist. Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
Wähle $R \in \mathbb{N}$ sodass $K \subseteq U_R(0)$ und $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{1}{N} \leq \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Betrachte das Gitter mit Maschenweite $\frac{1}{N}$ im Würfel $[-R, R]^n$, das ist

$$\mathcal{G} := \left\{ \left(\frac{j_1}{N}, \dots, \frac{j_n}{N} \right) \,\middle|\, \forall k = 1, \dots, n \colon j_k \in Z \ \wedge\ |j_k| \leq RN \right\}.$$

Der Durchmesser einer Masche dieses Gitter ist $\frac{\sqrt{2}}{N} \leq \epsilon$, und alle Maschen gemeinsam überdecken $[-R, R]^n$, und damit auch K.

□

4.2 Der Satz von Tychonoff

Kompaktheit ist eine sehr starke Eigenschaft. Es ist daher interessant Sätze zu haben, die es erlauben zu zeigen, dass gewisse Räume oder Mengen tatsächlich kompakt sind.

4.2.1 Satz (Tychonoff). *Sei I eine Menge und seien $\langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle, i \in I$, topologische Räume. Dabei sei vorausgesetzt, dass $I \neq \emptyset$ und $X_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$.*
Bezeichne $X := \prod_{i\in I} X_i$, und sei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf X. Dann sind äquivalent:

(i) *$\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ist kompakt.*

(ii) *Für jedes $i \in I$ ist $\langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle$ kompakt.*

Beweis.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Diese Implikation ist klar, denn die kanonische Projektion $\pi_j \colon X \to X_j$ ist $\mathcal{T} \to \mathcal{T}_j$ stetig und surjektiv.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Diese Implikation ist der tiefliegende Teil des Satzes. Wir verwenden die Charakterisierung der Kompaktheit durch Netze. Sei uns $\langle J, \leq\rangle$ gerichtet und $\varphi: J \to X$ gegeben. Ziel ist ein konvergentes Teilnetz zu konstruieren.

Die Voraussetzung (ii) gewährleistet, dass man für jede einzelne Komponente $i \in I$ ein in dieser Komponente konvergentes Teilnetz findet, und damit (leicht) auch für jede endliche Teilmenge von I ein Teilnetz, das für alle Komponenten dieser endlichen Teilmenge konvergiert.
Um Existenz eines **an jeder Komponente** konvergierenden Teilnetzes zu zeigen, benützt man ein typisches *"Lemma von Zorn"*-Argument.

▷▷**eine halbgeordnete Menge:**
Betrachte die Menge

$$\begin{aligned}\mathcal{M} := \Big\{(D, g) \in \mathcal{P}(I) \times \prod_{i \in D} X_i \;\Big|\; \\ \exists \text{ Teilnetz } \varphi' \text{ von } \varphi \; \forall i \in D: \varphi(i) \text{ ist Grenzwert von } \pi_i \circ \varphi'\Big\},\end{aligned}$$

versehen mit der Ordnungsrelation

$$\begin{gathered}(D, g) \leq (D', g') :\Leftrightarrow \\ D \subseteq D' \quad \wedge \quad \forall i \in D: g(i) = g'(i).\end{gathered}$$

▷▷**die Voraussetzungen des Lemma von Zorn:**

(1), "$\mathcal{M} \neq \varnothing$": Es ist $X \neq \varnothing$, und für jedes $g \in X$ gilt $(\varnothing, g) \in \mathcal{M}$.

(2), "jede totalgeordnete Teilmenge hat obere Schranke":
Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ totalgeordnet und nicht-leer. Setze

$$\hat{D} := \bigcup_{(D,g) \in \mathcal{N}} D,$$

und definiere ein Element $\hat{g} \in X$ durch

- Für $i \in \hat{D}$ wähle $(D, g) \in \mathcal{N}$ mit $i \in D$, und setze $\hat{g}(i) := g(i)$,
- Für $i \in I \setminus \hat{D}$ wähle $x_i \in X_i$ und setze $\hat{g}(i) := x_i$.

Man beachte folgende Eigenschaft:
Ist $i \in \hat{D}$ und $(D', g') \in \mathcal{N}$ mit $i \in D'$, so folgt $\hat{g}(i) = g'(i)$.
Denn, ist (D, g) wie in der Definition von $\hat{g}(i)$, so gilt $(D, g) \leq (D', g')$ oder $(D', g') \leq (D, g)$. In beiden Fällen haben wir $g(i) = g'(i)$.
Für das so konstruierte Paar $(\hat{D}, \hat{g}) \in \mathcal{P}(I) \times \prod_{i \in \hat{D}} X_i$ gilt also

$$\forall (D, g) \in \mathcal{N}: D \subseteq \hat{D} \wedge (\forall i \in D: g(i) = \hat{g}(i)).$$

Wir müssen zeigen, dass $(\hat{D}, \hat{g}) \in \mathcal{M}$. Dazu sei $\hat{J}$ die Menge aller Paare $(j, \prod_{i \in I} U_i) \in J \times \mathcal{P}(X)$ wobei $U_i \in \mathfrak{U}(\hat{g}(i))$ ist und die Menge

$$\{i \in I \mid U_i \neq X_i\}$$

eine endliche Teilmenge von $\hat{D}$ ist.

(2), ad “jede totalgeordnete Teilmenge hat obere Schranke”:
Weiters sei

$$(j,\prod_{i\in I} U_i) \le (j',\prod_{i\in I} U_i') :\Leftrightarrow$$
$$j \le j' \quad\wedge\quad \forall i\in I\colon U_i \supseteq U_i'.$$

Damit wird $\hat{J}$ eine gerichtete Menge. Das $\le$ reflexiv und transitiv ist, ist klar. Sind $(j,\prod_{i\in I} U_i)$ und $(j',\prod_{i\in I} U_i')$ in $\hat{J}$, wähle $j_0\in J$ mit $j_0 \ge j, j'$ und betrachte

$$(j_0,\prod_{i\in I}(U_i\cap U_i')).$$

Dieses Paar liegt in $\hat{J}$ und ist eine obere Schranke für die beiden gegebenen Paare.
Als nächstes konstruieren wir $\hat{\iota}\colon \hat{J}\to J$. Dazu sei $(j,\prod_{i\in I} U_i)\in\hat{J}$ gegeben. Bezeichne

$$L := \{i\in I \mid U_i \ne X_i\}.$$

Für jedes $l\in L$ finden wir $(D_l,g_l)\in\mathcal{N}$ mit $l\in D_l$. Sei

$$(D,g) := \max\{(D_l,g_l) \mid l\in L\},$$

und K gerichtet, $\kappa\colon K\to J$, sodass $\varphi\circ\kappa$ ein Teilnetz ist mit

$$\forall i\in D\colon g(i) \text{ ist Grenzwert von } \pi_i\circ(\varphi\circ\kappa).$$

Nun gilt $L\subseteq D$, wir finden also für jedes $l\in D$ ein $k_l\in K$ mit

$$\forall k\ge k_l\colon \big[\pi_l\circ(\varphi\circ\kappa)\big](k)\in U_l.$$

Wieder finden wir $k'\in K$ sodass

$$\forall k\ge k'\colon \kappa(k)\ge j.$$

Wähle nun eine obere Schranke k der Menge

$$\{k'\}\cup\{k_l \mid l\in L\},$$

und setze

$$\hat{\iota}(j,\prod_{i\in I} U_i) := \kappa(k).$$

Dann gilt $\hat{\iota}(j,\prod_{i\in I} U_i)\ge j$ und

$$\forall l\in I\colon (\pi_l\circ\varphi\circ\hat{\iota})(j,\prod_{i\in I} U_i)\in U_l.$$

Es ist $\varphi\circ\hat{\iota}$ ein Teilnetz von φ, denn:
Ist $j\in J$, und $(j',\prod_{i\in I} U_i')\ge(j,\prod_{i\in I} X_i)$, so gilt

$$j\le j'\le\hat{\iota}(j',\prod_{i\in I} U_i).$$

Für jdes $l \in \hat{D}$ ist $\hat{g}(l)$ Grenzwert von $\varphi \circ \hat{\iota}$, denn:
Sei $l \in \hat{D}$ und $W_l \in \mathfrak{U}(\hat{g}(l))$. Wähle $j_0 \in J$ und setze

$$V_i := \begin{cases} W_l, & i = l \\ X_i, & i \in I \setminus \{l\}. \end{cases}$$

Dann ist $(j_0, \prod_{i \in I} V_i) \in \hat{J}$, und

$$\forall (j, \prod_{i \in I} U_i) \in \hat{J} \text{ mit } (j, \prod_{i \in I} U_i) \geq (j_0, \prod_{i \in I} V_i):$$
$$(\pi_l \circ \varphi \circ \hat{\iota})(j, \prod_{i \in I} U_i) \in U_l \subseteq V_l = W_l.$$

▷▷**Konklusio des Lemma von Zorn:**
Die halbgeordnete Menge $\mathcal{M}$ besitzt maximale Elemente.

▷▷**Für jedes maximale Element (D, g) ist $D = I$:**
Wir verwenden Kontraposition. Sei $(D, g) \in \mathcal{M}$ mit $D \neq I$. Wähle $l \in I \setminus D$ und ein Teilnetz

$$J' \to J \xrightarrow{\varphi} X,$$

sodass für alle $i \in D$ der Punkt $g(i)$ Grenzwert von $\pi_i \circ \varphi \circ \iota$ ist.
Da X_l kompakt ist finden wir für das Netz $\pi_l \circ \varphi \circ \iota \colon J' \to X_l$ ein konvergentes Teilnetz, d.h.

$$K \xrightarrow{\kappa} J' \xrightarrow{\pi_l \circ \varphi \circ \iota} X_l$$

mit einem Grenzwert $x_l \in X_l$. Setze nun

$$D' := D \cup \{l\}, \quad g'(i) := \begin{cases} g(i), & i \in I \setminus \{l\} \\ x_l, & i = l. \end{cases}$$

Nun ist $\varphi \circ (\iota \circ \kappa)$ ein Teilnetz von φ, und es gilt

$$\forall i \in D' \colon g'(i) \text{ Grenzwert von } \pi_i \circ \varphi \circ (\iota \circ \kappa).$$

Also ist $(D', g') \in \mathcal{M}$. Weiters haben wir offenbar

$$(D', g') \geq (D, g) \quad \text{und} \quad (D', g') \neq (D, g).$$

□

4.2.2 Bemerkung. Der Beweis des Satzes von Tychonoff beruht auf dem Auswahlaxiom (in Form des Lemmas von Zorn). Tatsächlich kann man zeigen, dass der Satz von Tychonoff äquivalent zum Auswahlaxiom ist.

4.2.3 Beispiel. Hat man eine endliche Folge reeller Zahlen, $a_1, \ldots, a_n$, so kann man in natürlicher Weise die Zahl

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} a_j$$

als den Mittelwert von $a_1, \ldots, a_N$ verstehen. Kann man auch für unendliche Folgen

$$\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots$$

einen "vernünftigen Mittelwert" zuordnen?
Dazu muss man zunächst überlegen was man von einem "vernünftigen Mittelwert" erwartet.

4.2.4 Satz. *Bezeichne*

$$\mathbb{B} := \big\{ a = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \alpha_n \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{Z}} |\alpha_n| < \infty \big\}.$$

Wir nennen $\mu: \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ *ein* **invariantes Mittel**, *wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $\forall\, a \in \mathbb{B}: \inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \le \mu(a) \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n$,

(ii) μ *ist linear,*

(iii) Bezeichnet $\mathcal{S}: \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ *den* **Rechts-Shift**

$$\mathcal{S}(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}} := (\alpha_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}},$$

so gilt

$$\forall\, a \in \mathbb{B}: \mu(\mathcal{S}(a)) = \mu(a).$$

(iv) Ist $a \in \mathbb{B}, \alpha \in \mathbb{R}$, *und gilt* $\alpha_n = \alpha$ *für alle bis auf endlich viele* $n \in \mathbb{Z}$, *so ist* $\mu(a) = \alpha$

Beweis.
▷**Wir zeigen, dass ein invariantes Mittel existiert.**
Dazu betrachte für jedes $N \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\mu_N: \begin{cases} \mathbb{B} \to \mathbb{R} \\ a \mapsto \frac{1}{2N+1} \sum\limits_{|n|\le N} \alpha_n. \end{cases}$$

Das sind keine invarianten Mittel, haben aber doch für "gewisse" Folgen "fast" die gewünschte Eigenschaften. Was jedenfalls gilt ist

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{B}: \inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \le \mu_N(a) \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n,$$

sowie

$$\forall\, N \in \mathbb{N}: \mu_n \text{ ist linear.}$$

Betrachte nun die Funktionen $\mu_N: \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ als Elemente des Produktraumes

$$X := \prod_{a\in\mathbb{B}} \mathbb{R},$$

und sei X versehen mit der Produkttopologie $\mathcal{T}$ wo jeder Faktor die euklidische Topologie trägt. Ein Netz $(f_i)_{i\in I}$ von Funktionen $f_i: \mathbb{B} \to \mathbb{R}$ konvergiert also bzgl. $\mathcal{T}$ gegen

ein $f:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$, genau dann wenn für alle $a\in\mathbb{B}$ gilt, dass $f_i(a)$ gegen $f(a)$ in $\mathbb{R}$ konvergiert.
Das erste der oben genannten Eigenschaften der μ_N besagt nun, dass

$$\mu_N \in \prod_{a\in\mathbb{B}} \Big[\inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n, \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n\Big],$$

und wir wollen Teilmengen von X mit K bezeichnen.

▷**Wir zeigen, dass ein invariantes Mittel existiert.**
Nach Tychonoff ist K kompakt. Also hat die Folge $\varphi:\mathbb{N}\to K, \varphi(N) := \mu_N$, ein Teilnetz

$$I \xrightarrow{\iota} \mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \prod_{a\in\mathbb{B}} \Big[\inf_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n, \sup_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n\Big],$$

welches in X einen Grenzwert hat.
Sei $\mu\in K$ ein in dieser Weise erhatenes Element. Dann ist $\mu:\mathbb{B}\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft (i) (4.2.4). Da die Vektorraumoperationen von $\mathbb{R}$ stetig bzgl. der euklidischen Topologie sind, ist μ linear (beachte hier, dass X Hausdorff ist, und daher Grenzwerte eindeutig sind)

$$\begin{aligned}\mu(\alpha a+\beta b) &= \lim_{i\in I} \mu_{\iota(i)}(\alpha a+\beta b) = \\ &= \lim_{i\in I}\big[\alpha\mu_{\iota(i)}(a)+\beta\mu_{\iota(i)}(b)\big] = \\ &= \alpha\lim_{i\in I}\big[\mu_{\iota(i)}(a)\big]+\beta\lim_{i\in I}\big[\mu_{\iota(i)}(b)\big] = \\ &= \alpha\mu(a)+\beta\mu(b).\end{aligned}$$

Als nächstes gilt

$$\begin{aligned}\mu(\mathcal{S}(a))-\mu(a) &= \lim_{i\in I}\big[\mu_{\iota(i)}(\mathcal{S}(a))-\mu_{\iota(i)}(a)\big] = \\ &= \lim_{i\in I}\frac{1}{2\iota(i)+1}\big(\alpha_{-\iota(i)-1}-\alpha_{\iota(i)}\big) = 0\end{aligned}$$

Ist schließlich $a\in\mathbb{B}$ mit $\alpha_n=\alpha$ für alle $|n|\ge n_0$, so gilt

$$\begin{aligned}\mu(a) &= \lim_{i\in I}\mu_{\iota(i)}(a) = \\ &= \lim_{i\in I}\frac{1}{2\iota(i)+1}\Bigg(2\big(\iota(i)-n_0\big)\cdot\alpha+\sum_{|n|\le n_0}\alpha_n\Bigg) = \alpha.\end{aligned}$$

□

4.3 Der Satz von Arzela-Ascoli

4.3.1 Satz (Arzela-Ascoli)**.** *Auch in diesem Abschnitt wollen wir einen Satz zeigen, der es erlaubt auf Kompaktheit zu schliessen. Nämlich für Teilmengen des vollständig normierten Raumes*

$$\langle C(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty\rangle$$

mit X kompakter topologischer Raum.

Des wesentliche Werkzeug für den Beweis dieses Satzes ist das folgende einfache Lemma. *Siehe ergänzend dazu auch 12.13.1 f.f. [Kaltenbäck, Fundament Analysis])*

4.3.2 Lemma. *Sei $\langle\Omega, d\rangle$ ein metrischer Raum. Sei vorausgesetzt, dass*

$$\begin{aligned}\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0, \langle\tilde{\Omega}, \tilde{d}\rangle \text{ metrischer Raum, } \Phi\colon \Omega \to \tilde{\Omega}\colon \\ \Phi(\Omega) \text{ ist totalbeschränkt} \wedge \\ \forall x, y \in \Omega\colon \tilde{d}(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \delta \implies d(x, y) \leq \epsilon\end{aligned}$$

Dann ist $\langle\Omega, d\rangle$ total beschränkt.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
Wähle $\langle\tilde{\Omega}, \tilde{d}\rangle, \delta, \Phi$ wie in der Voraussetzung, und wähle $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n \subseteq \tilde{\Omega}$ mit

$$\tilde{d}(\tilde{A}_1), \ldots, \tilde{d}(\tilde{A}_n) \leq \delta, \quad \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{A}_j \supseteq \Phi(\Omega).$$

Dann gilt

$$d(\Phi^{-1}(\tilde{A}_j)) \leq \epsilon, \quad \bigcup_{j=1}^{n} \Phi^{-1}(\tilde{A}_j) = \Omega.$$

□

4.3.3 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^X$. Dann heißt $\mathcal{F}$

(i) ***punktweise beschränkt***, wenn

$$\forall x \in X\colon \sup\{|f(x)| \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

(ii) ***gleichgradig stetig***, wenn

$$\forall x \in X, \epsilon > 0 \exists U \in \mathfrak{U}^X(x) \forall f \in \mathcal{F} \forall y \in U\colon |f(y) - f(x)| \leq \epsilon.$$

4.3.4 Satz (Arzela-Ascoli)**.** *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein kompakter topologischer Raum, und $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{F}$ ist total beschränkt (bzgl. der von $\|.\|_\infty$ induzierten Metrik).

(ii) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt und gleichgradig stetig.

Beweis.

▷ $(i) \Rightarrow (ii)$: Da $\mathcal{F}$ total beschränkt ist, ist $\mathcal{F}$ auch beschränkt d.h.,

$$\sup\{\|f\|_\infty \mid f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Nun gilt

$$\forall x \in X\colon \sup\{|f(x)| \mid f \in \mathcal{F}\} \leq \sup\{\|f\|_\infty \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ und $x \in X$ gegeben. Wähle $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}$ mit

$$d_\infty(\mathcal{F}_j) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \wedge \quad \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{F}_j = \mathcal{F}.$$

O.b.d.A seien $\mathcal{F}_j \neq \emptyset$. Wähle $f_j \in \mathcal{F}_j$ und $U_j \in \mathfrak{U}(x)$ mit

$$\forall y \in U_j \colon |f_j(y) - f_j(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Setze $U \coloneqq U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Dann ist $U \in \mathfrak{U}(x)$. Ist $f \in \mathcal{F}$ wähle $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $f \in \mathcal{F}_j$, und schätze ab

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \\ &\leq \|f - f_j\|_\infty + \frac{\epsilon}{3} + \|f_j - f\|_\infty \leq \epsilon. \end{aligned}$$

▷ $(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Für jedes $x \in X$ wähle $U_X \in \mathfrak{U}(x)$ mit

$$\forall f \in \mathcal{F} \forall y \in U_X \colon |f(y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Da X kompakt ist, finden wir endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n$, sodass $U_{X_1} \cup \ldots \cup U_{X_n} = X$. Sei nun $\Phi \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\Phi(f) \coloneqq \big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big).$$

Da $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist, ist $\Phi(\mathcal{F})$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Nach dem Satz von *Heine-Borel* ist $\overline{\Phi(\mathcal{F})}$ kompakt. Daher ist $\overline{\Phi(\mathcal{F})}$, und insbesondere auch $\Phi(\mathcal{F})$, total beschränkt.
Seien $f, g \in \mathcal{F}$ mit $\|\Phi(f) - \Phi(g)\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Für $x \in X$ wähle $j \in \{1, \ldots, n\}$ sodass $x \in U_{x_j}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon. \end{aligned}$$

Aus dem obigen 4.3.2 Lemma folgt nun, dass $\mathcal{F}$ total beschränkt ist.

□

4.3.5 Definition. Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \alpha \in (0, 1]$, und $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion f ***Lipschitz stetig mit Exponent*** α, wenn gilt

$$\exists L > 0 \forall x, y \in [a, b] \colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

Wir bezeichnen die Menge aller Funktionen die Lipschitz stetig mit Exponent α auf $[a, b]$ sind mit $\mathbf{Lip}_\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, und setzen

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{Lip},\alpha} \coloneqq \inf \left\{ L > 0 \mid \forall x, y \in [a, b] \colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \right\}$$

für $f \in \mathrm{Lip}_\alpha(a, b)$.

Offenbar ist $\mathrm{Lip}_\alpha(a, b)$ ein **linearer Raum**, es gilt $\mathrm{Lip}_\alpha(a, b) \subseteq C([a, b], \mathbb{R})$, und $\|.\|_{\mathrm{Lip},\alpha}$ erfüllt

$$\begin{aligned} &\forall f, g \in \mathrm{Lip}_\alpha(a, b) \colon \|f + g\|_{\mathrm{Lip},\alpha} \leq \|f\|_{\mathrm{Lip},\alpha} + \|g\|_{\mathrm{Lip},\alpha}, \\ &\forall f \in \mathrm{Lip}_\alpha(a, b), \lambda \in \mathbb{R} \colon \|\lambda f\|_{\mathrm{Lip},\alpha} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\mathrm{Lip},\alpha}. \end{aligned}$$

Schließlich gilt $\|f\|_{\mathrm{Lip},\alpha} = 0$, genau dann wenn f konstant ist.

4.3.6 Korollar. *Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b, \alpha \in (0,1], L > 0, t_0 \in [a,b]$, und $\eta_0 > 0$. Dann ist die Menge*

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in Lip_\alpha(a,b) \;\middle|\; \|f\|_{Lip,\alpha} \leq L, |f(t_0)| \leq \eta_0 \right\}$$

kompakt in $\langle C([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty \rangle$.

Beweis. Die Menge $\mathcal{F}$ ist (sogar unter punktweiser Konvergenz) abgeschlossen: gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in [a,b]$, und erfüllen alle f_n dass $|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x-y|^\alpha$, so gilt dies auch für f.
Die Menge $\mathcal{F}$ ist (sogar gleichmäßig) beschränkt: für jedes $t \in [a,b]$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt

$$|f(t)| \leq |f(t) - f(t_0)| + |f(t_0)| \leq L(b-a) + \eta.$$

Die Menge $\mathcal{F}$ ist gleichgradig (sogar gleichmäßig) stetig:
für $\epsilon > 0$ setze $\delta := \left(\frac{\epsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}$ und $x, y \in [a,b]$, dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ wenn $|x-y| < \delta$. □

4.3.7 Satz (Fixpunktsatz Peano)**.** *Als eine Anwendung des Satzes von Arzela-Ascoli wollen wir den Fixpunktsatz von Peano herleiten. Dieser zeigt lokale Existenz von Lösungen von Anfangswertproblemen erster Ordnung mit stetiger rechter Seite.*
Seien $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1,\ D \subseteq \mathbb{R}^n,\ F\colon [t_0,t_1] \times D \to \mathbb{R}^n$ stetig, und $y_0 \in D$. Betrachte das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t, y(t)), t \in [t_0, t_1], \\ y(t_0) &= y_0. \end{cases}$$

Eine **Lösung** *des Problems ist eine Funktion $y\colon [t_0,t_1] \to \mathbb{R}^n$ mit*

(i) $y([t_0,t_1]) \subseteq D$,

(ii) *y ist differenzierbar (an den Randpunkten einseitig differenzierbar),*

(iii) *y erfüllt die beiden Gleichungen $y'(t) = F(t,y(t)), t \in [t_0,t_1]$, und $y(t_0) = y_0$.*

Man kann die Differenzialgleichung auch äquivalent als **Integralgleichung** *anschreiben, und das ist in vielfacher Hinsicht die bessere Sichtweise. Nach dem Hauptsatz der Differenzial-Integralrechnung ist eine Funktion Lösung des obigen Anfangswertproblems, genau dann wenn*

(i) $y([t_0,t_1]) \subseteq D$

(ii) *y ist stetig,*

(iii) *y erfüllt die Gleichung (Integration vektorwertiger Funktionen ist komponentenweise definiert)*

$$\forall\, t \in [a,b]\colon y \in (t) = y_0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) \mathrm{d}s.$$

4.3.8 Satz. *Sei $t_0, t_1 \in \mathbb{R}, t_0 < t_1, y_0 \in \mathbb{R}^n, R > 0$, und sei $F\colon [t_0, t_1] \times \overline{U_R(y_0)} \to \mathbb{R}^n$ stetig.*
Setze

$$\tau \coloneqq \min\left\{t_1, t_0 + \frac{R}{\|F\|_\infty}\right\}.$$

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(t) &= F(t, y(t)), t \in [t_0, t_1], \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

eine Lösung.

Beweis.
▷ **Die Tonelli-Approximation:** Sei $N \in \mathbb{N}$ und setze $\delta \coloneqq \frac{\tau - t_0}{N}$. Wir definieren rekursiv stetige Funktionen

$$y_{N,j}\colon [t_0, t_0 + j\delta] \to \overline{U_R(y_0)}, \quad j = 1, \dots, N.$$

- ▷ $j = 1$: Setze $y_{N,1}(t) \coloneqq y_0, \quad t \in [t_0, t_0 + \delta]$.
- ▷ $j \mapsto j + 1$: Setze

$$y_{N,j+1}(t) \coloneqq \begin{cases} y_0 & , \quad t \in [t_0, t_0 + \delta], \\ y_0 + \int\limits_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_{N,j}(s))\mathrm{d}s & , \quad t \in [t_0 + \delta, t_0 + (j+1)\delta], \end{cases}$$

Klarerweise ist $y_{N,j+1}$ stetig. Weiters gilt ($\|.\|$ bezeichnet die euklidische Norm aus $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \|y_{N,j+1}(t) - y_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_{N,j}(s))\mathrm{d}s \right\| \\ &\le (t - \delta - t_0)\|F\|_\infty \le (\tau - t_0)\|F\|_\infty \le R \end{aligned}$$

also bildet $y_{N,j+1}$ tatsächlich $[t_0, t_0 + (j+1)\delta]$ nach $\overline{U_R(y_0)}$ ab. ▷ $\forall j \in \{1, \dots, N-1\}\colon y_{N,j+1}|_{[t_0, t_0+j\delta]} = y_{N,j}$:

Wir verwenden Induktion.

- ▷ $j = 1$: Für $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ gilt $y_{N,2} = y_0 = y_{N,1}(t)$.
- ▷ $j \mapsto j + 1$: Ist $t \in [t_0, t_0 + \delta]$, so gilt wieder $y_{N,j+1}(t) + y_0 = y_{N,j}(t)$.
  Sei $t \in [t_0 + \delta, t_0 + j\delta]$. Dann liegt die Integrationsvariable s in der definierten Gleichung
  $$y_{N,j+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_{N,j}(s))\mathrm{d}s,$$
  stets in $[t_0, t_0 + (j-1)\delta]$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $y_{N,j}(s) = y_{N,j-1}(s)$, und wir sehen, dass die rechte Seite gleich $y_{N,j}(t)$ ist.

▷ $y_N \coloneqq y_{N,N}$ **ist "approximative Lösung":** Da $y_N|_{[t_0,\tau-\delta]} = y_{N,N-1}$ ist, gilt

$$y_N(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t-\delta} F(s, y_N(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0, \tau].$$

Für $l \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\pi_l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die l-te Koordinate.
▷

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, l \in \{1, \ldots, N\} : \pi_l \circ y_N &\in \mathrm{Lip}_1(t_0, \tau) \\ &\wedge \|\pi_l \circ y_N\|_{\mathrm{Lip}_1} \le \|F\|_\infty \\ &\wedge |(\pi_l \circ y_N)(t_0)| \le \|y_0\|. \end{aligned}$$

Nach Definition ist $y_N(t_0) = y_0$, und damit $\|(\pi_l \circ y_N)(t_0)\| \le \|y_0\|$. Seien nun $t, t' \in [t_0, \tau]$, $t' \le t$. Im Fall $t_0 + \delta \le t'$ hat man

$$\begin{aligned} \|y_N(t) - y_N(t')\| &= \left\| \int_{t'-\delta}^{t-\delta} F(s, y_{N,N-1}(s))\mathrm{d}s \right\| \\ &\le \big(t - (t_0 + \delta)\big)\|F\|_\infty \le (t - t')\|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Schließlich ist für $t \le t_0 + \delta$

$$\|y_N(t) - y_N(t')\| = 0 \le (t - t')\|F\|_\infty$$

▷**Anwendung von Arzela-Ascoli**: Nach (dem Korollar von) Arzela-Ascoli ist die Menge

$$\left\{ f \in \mathrm{Lip}_1(t_0, \tau) \;\middle|\; \|f\|_{\mathrm{Lip},1} \le \|F\|_\infty,\ |f(t_0) \le \|y_0\| \right\}$$

kompakt in $\langle C([t_0, \tau], \mathbb{R}), \|.\|_\infty \rangle$.
Wähle eine Teilfolge $(\pi_1 \circ y_{N(2,j)})_{j=1}^\infty$ von $(\pi_2 \circ y_{N(1,j)})_{j=1}^\infty$ die gleichmäßig konvergiert. Verfährt man induktiv weiter, erhält man eine Teilfolge

$$(y_{N_j})_{j=1}^\infty \quad \text{von} \quad (y_N)_{N=1}^\infty$$

sodass alle Komponentenfolgen $(\pi_l \circ y_{N_j})_{j=1}^\infty$ gleichmäßig konvergieren.
Bezeichne den Grenzwert dieser Teilfolge mit y.

▷y **ist Lösung:** Da für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt, dass $y_N([t_0, \tau]) \subseteq \overline{U_R(y_0)}$, gilt dies auch für y. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und $t \in [t_0, \tau]$ gilt

$$y_{N_j}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbb{1}_{[t_0, t - \frac{(\tau - t_0)}{N_j}]}(s) \cdot F(s, y_{N_j}(s))\mathrm{d}s.$$

Der Integrand ist unabhängig von j beschränkt durch die Konstante Funktion $\|F\|_\infty$, und er konvergiert für $j \to \infty$ punktweise gegen $\mathbb{1}_{[t_0,t)}(s) \cdot F(s, y(s))$. Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, y(s))\mathrm{d}s, \quad t \in [t_0, \tau].$$

□

4.4 Der Satz von Stone-Weierstraß

4.4.1 Satz. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein kompakter topologischer Raum. Wir betrachten die Menge $C(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$, versehen mit der* **Supremumsnorm**

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Man beachte hier, dass das Bild $f(X)$ von f eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, und obiges Supremum daher endlich ist (und sogar angenommen wird).
Die Menge $C(X, \mathbb{R})$ ist ein linearer Raum über dem Standardkörper $\mathbb{R}$, und $\|.\|_\infty$ ist eine Norm auf $C(X, \mathbb{R})$. Nun trägt $C(X, \mathbb{R})$ eine weitere algebraische Operation, nämlich die punktweise Multiplikation

$$(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x).$$

Diese binäre Operation $\cdot : C(X, \mathbb{R}) \times C(X, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$ ist bilinear, assoziativ und kommutativ, und es gibt ein Einselement (nämlich die konstante Funktion 1). Man spricht von einer **kommutativen assoziativen $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement**.
Die Norm $\|.\|_\infty$ ist submultiplikativ*, d.h.*

$$\forall f, g \in C(X, \mathbb{R}) \colon \|f \cdot g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

Man sagt $C(X, \mathbb{R})$ ist mit $\|.\|_\infty$ eine kommutative assoziative **normierte Algebra** *mit Einselement. Die Abbildung $\cdot$ ist* stetig*, denn*

$$\|f \cdot g - \tilde{f} \cdot \tilde{g}\|_\infty \leq \|f - \tilde{f}\|_\infty \cdot \|g\|_\infty + \|\tilde{f}\|_\infty \cdot \|g - \tilde{g}\|_\infty.$$

4.4.2 Bemerkung. Genau die gleichen Aussagen gelten wenn man anstelle von $\mathbb{R}$ den Skalarkörper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen verwendet:
$C(X, \mathbb{C})$ ist eine kommutative assoziative normierte $\mathbb{C}$-Algebra mit Einselement.

4.4.3 Proposition. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ kompakter topologischer Raum, und $\langle \Omega, d\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum. Bezeichne $C(X, \Omega)$ die Menge aller stetigen Funktionen von X nach Ω, und setze für $f, g \in C(X, \Omega)$*

$$d_\infty(f, g) \coloneqq \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

Dann ist $\langle C(X, \Omega), d_\infty\rangle$ ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis. Die Tatsache, dass d_∞ eine Metrik ist, ist klar. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\langle C(X, \Omega), d_\infty\rangle$.
▷ Mit Hilfe der Vollständigkeit von Ω erhalten wir einen Kandidaten für den gesuchten Grenzwert. Dazu bemerke, dass für jedes $z \in X$ die Punktauswertungsabbildung

$$\varphi_z \colon \begin{cases} \langle C(X, \Omega), d_\infty\rangle & \to \langle \Omega, d\rangle, \\ f & \mapsto f(z), \end{cases}$$

kontraktiv ist: $d(f(z),g(z)) \leq \sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$. Also ist, für jedes feste $z \in X$, die Folge $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Ω. Sie hat daher einen Grenzwert, und wir definieren

$$f(z) \coloneqq \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in \Omega.$$

▷ Dieser Grenzwert ist sogar gleichmäßig, denn: sei $\epsilon > 0$ gegeben und wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall n,m \geq N\colon d_\infty(f_n,f_m) \leq \epsilon.$$

Dann folgt für jedes feste $z \in X$, dass

$$\forall n,m \geq N\colon d(f_n(z),f_m(z)) \leq \epsilon,$$

und lässt man $m \to \infty$ streben damit

$$\forall n \geq N\colon d(f_n(z),f(z)) \leq \epsilon.$$

Also ist $\sup_{z\in X} d(f_n(z),f(z)) \leq \epsilon$ für alle $n \geq N$.
▷ Es bleibt zu zeigen, dass f stetig ist. Sei dann $x \in X$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $n \in \mathbb{N}$ sodass $d_\infty(f_n,f) < \frac{\epsilon}{3}$. Da f_n stetig ist, finden wir eine Umgebung $U \in \mathcal{U}^X(x)$, sodass $f_n(U) \subseteq U_{\frac{\epsilon}{3}}(f_n(x))$. Für $y \in U$ gilt dann

$$d(f(y),f(x)) \leq d(f(y),f_n(y)) + d(f_n(y),f_n(x)) + d(f_n(x),f(x)) < \epsilon.$$

□

Wir kommen nun zum eigentlichen Ziel dieses Abschnittes. Dazu noch eine Definition.

4.4.4 Definition. Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$. Dann heißt $\mathcal{A}$

(i) eine ***Unteralgebra***, wenn gilt

$$\forall f,g \in \mathcal{A} \subseteq, \lambda \in \mathbb{R}\colon f+g, \lambda f, f\cdot g \in \mathcal{A}$$

(ii) ***punktetrennend***, wenn gilt

$$\forall x,y \in X, x \neq y \exists f \in \mathcal{A}\colon f(x) \neq f(y).$$

(iii) ***nirgends verschwindend***, wenn gilt

$$\forall x \in X \exists f \in \mathcal{A}\colon f(x) \neq 0.$$

Die analoge Terminologie wird für Teilmengen von $C(X,\mathbb{C})$ verwendet, wobei dann in (i) auch $\lambda \in \mathbb{C}$ sein darf.

4.4.5 Satz. *Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ ein kompakter topologischer Raum, und $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$. Ist $\mathcal{A}$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende Unteralgebra von $C(X,\mathbb{R})$, so ist $\mathcal{A}$ dicht in $\langle C(X,\mathbb{R}), \|.\|_\infty\rangle$.*
Wir präsentieren den Beweis in mehreren Schritten.

4.4.6 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ eine nirgends verschwindende Unteralgebra.*

(i) $\exists f \in \mathcal{A} \colon \inf_{x \in X} f(x) > 0 \ \wedge \ \|f\|_\infty = 1.$

(ii) $1 \in \operatorname{Clos}_{\|.\|_\infty} \mathcal{A}.$

Beweis. ▷**Beweis von (i):**
Für $z \in X$ wähle $f_z \in \mathcal{A}$ mit $f_z(z) = 1$. Dann ist

$$X = \bigcup_{z \in X} \{x \in X \mid f_z(x) > \frac{1}{2}\},$$

und wir finden endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_N \in X$ sodass

$$X = \bigcup_{j=1}^{N} \{x \in X \mid f_{z_j}(x) > \frac{1}{2}\}.$$

Die Funktion $f_0 := \sum_{j=1}^N f_{z_j}^2$ liegt in $\mathcal{A}$ und es gilt $f_0(x) \geq \frac{1}{4}$ für alle $x \in X$, da für jedes x mindenstens ein $f_{z_j}(x)$ größer gleich $\frac{1}{2}$ ist. Setze nun $f := \frac{1}{\|f_0\|_\infty} f_0$.

▷**Beweis von (ii):**

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 = (1-t) \sum_{n=0}^{N} t^n + t^{N+1}.$$

Schreibt man $t = 1 - s$, so erhält man also

$$1 = s \sum_{n=0}^{N} (1-s)^n + (1-s)^{N+1}.$$

Wähle $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{A}$ sodass $\forall x \in X \colon \delta \leq f(x) \leq 1$. Die Funktion

$$g_N := f \cdot \sum_{n=0}^{N} (1-f)^n$$

gehört zu $\mathcal{A}$ und es gilt für alle $x \in X$

$$1 - g_n(x) = (1 - f(x))^{N+1} \in [0, (1-\delta)^{N+1}].$$

Wir sehen, dass $\lim_{N \to \infty} \|1 - g_N\|_\infty = 0.$ □

4.4.7 Korollar. *Der Satz von Stone-Weierstraß ist äquivalent zu folgendem Satz:*

- ▷ *Sei X kompakt und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\langle C(X, \mathbb{R}), \|.\|_\infty \rangle$.*

Beweis. Wenn Stone-Weierstraß gilt, so folgt klarerweise der genannte Satz. Gelte umgekehrt der genannte Satz, und sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine punktetrennende nirgends verschwindende Unteralgebra. Dann ist die lineare Hülle

$$\mathcal{B} := \operatorname{span}(\mathcal{A} \cup \{1\})$$

eine punktetrennende Unteralgebra die 1 enthält. Nach dem letzten Lemma ist $\mathcal{B} \subseteq \operatorname{Clos}_{\|.\|_\infty} \mathcal{A}$, und nach dem vorausgesetzten Satz ist $\operatorname{Clos}_{\|.\|_\infty} \mathcal{B} = C(X, \mathbb{R})$. □

4.4.8 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$, sei $z \in X$ und $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $z \neq A$.*
Dann existiert eine offene Umgebung V von z mit $V \cap A = \varnothing$ und den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0 \exists f \in \mathcal{A} : \forall x \in X : 0 \leq f(x) \leq 1, \\ \forall x \in V : f(x) \leq \epsilon, \\ \forall x \in A : f(x) \geq 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

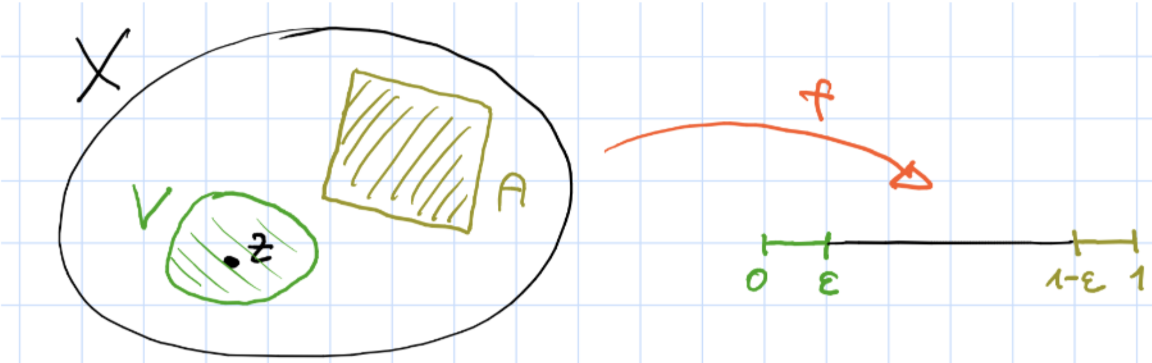


Abbildung 4.2: Illustration 4.4.8 Lemma.

Beweis. ▷**Wir konstruieren eine Funktion $h \in \mathcal{A}, \delta \in (0,1]$, und $V \in \mathcal{U}(z)$ mit :**

$$\forall x \in V : h(x) < \frac{\delta}{3} \quad \text{und} \quad \forall x \in A : h(x) \geq \delta.$$

Für $y \in X \setminus O$ wähle $g_y \in \mathcal{A}$ mit $g_y(y) \neq 0$ und $g_y(z) = 0$, und setze $h_y \coloneqq \|g_y\|^{-2} \cdot g_y^2$. Dann gilt

$$h_y \in \mathcal{A}, \quad h_y(y) > 0, \quad h_y(z) = 0, \quad \forall x \in X : 0 \leq h_y(x) \leq 1.$$

Setze $O_y \coloneqq \{x \in X \mid h_y(x) > 0\}$, dann ist O_y offen und $y \in O_y$. Also haben wir $A \subseteq \bigcup_{y \in X \setminus O} O_y$. Als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X ist auch A kompakt, und daher finden wir $y_1, \ldots, y_N \in A$ sodass

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} O_{y_j}.$$

Setze nun

$$h \coloneqq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} h_{y_j}.$$

Dann ist

$$h \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in A : h(x) > 0, h(z) = 0, \forall x \in X : 0 \leq h(x) \leq 1.$$

Die Menge $h(A)$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und enthält daher ihr Infimum. Wir sehen, dass

$$\delta \coloneqq \inf_{x \in X \setminus O} h(x) = \min_{x \in X \setminus O} h(x) \in (0,1].$$

Sei $V \coloneqq \{x \in X \mid h(x) < \frac{\delta}{3}\}$, dann ist V offen und $z \in V$ (also auch $V \in \mathcal{U}(z)$), sowie $V \cap A = \varnothing$.

▷Wir "dehnen" h um die gewünschte Funktion f zu beliebig vorgegebenem $\epsilon > 0$ zu erhalten.
Sei dazu k jene natürliche Zahl mit $k - 1 \le \frac{1}{\delta} < k$, und betrachte die Funktionen

$$\rho_n \coloneqq [1 - h^n]^{k^n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Dann gilt

$$\rho_n \in \mathcal{A}, \quad \rho_n(z) = 1, \quad \forall x \in X{:}\, 0 \le \rho_n(x) \le 1.$$

Für $x \in V$ ist $-h(x)^n > -\left(\frac{\delta}{3}\right)^n > -1$, und die Bernoullische Ungleichung gibt

$$\rho_n(x) = (1 - h(x)^n)^{k^n} \ge 1 + k^n \cdot (-h(x)^n) > 1 - \left(\frac{k\delta}{3}\right)^n.$$

Nun gilt $k\delta \le 1 + \delta \le 2$, und daher $1 - \left(\frac{k\delta}{3}\right)^n \to 1$. Es folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n(x) = 1$ gleichmäßig für $x \in V$.
Sei nun $x \in A$. Dann ist $kh(x) \ge k\delta > 1$, insbesondere $kh(x) \ne 0$. Die Bernoullische Ungleichung gibt

$$1 + k^n \cdot h(x)^n \le [1 + h(x)^n]^{k^n},$$

und wir können ρ_n wie folgt abschätzen:
Sei nun $x \in A$. Dann ist $kh(x) \ge k\delta > 1$, insbesondere $kh(x) \ne 0$. Die Bernoullische Ungleichung gibt

$$1 + k^n \cdot h(x)^n \le [1 + h(x)^n]^{k^n},$$

und wir können ρ_n wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\rho_n(x) &= \frac{1}{k^n h(x)^n} [1 - h(x)^n]^{k^n} \cdot k^n h(x)^n \\
&\le \frac{1}{k^n h(x)^n} [1 - h(x)^n]^{k^n} \cdot [1 + k^n h(x)^n] \\
&\le \frac{1}{k^n h(x)^n} [1 - h(x)^n]^{k^n} \cdot [1 + h(x)^n]^{k^n} \\
&= \frac{1}{k^n h(x)^n} \underbrace{[1 - h(x)^{2n}]^{k^n}}_{\le 1} \le \frac{1}{(k\delta)^n}.
\end{aligned}$$

Wegen $k\delta > 1$ gilt $\frac{1}{(k\delta)^n} \to 0$, und wir sehen, dass $\lim_{n\to\infty} \rho_n(x) = 0$ gleichmäßig für $x \in A$.
Ist nun $\epsilon > 0$ gegeben, so erfüllt wegen der gleichmäßigen Konvergenz die Funktion $1 - \rho_n$ für hinreichend großes n die verlangten Eigenschaften. □

Das vorhergehende Lemma läßt sich leicht ein bisschen weiter verallgemeinern.

4.4.9 Lemma. *Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ eine punkttrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$, seinen $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert $f \in \mathcal{A}$ mit*

$$\forall x \in X{:}\, 0 \leq f(x) \leq 1,$$
$$\forall x \in A{:}\, f(x) < \epsilon, \quad \forall x \in B{:}\, f(x) > 1 - \epsilon.$$

Beweis. Ist $A = \varnothing$, so wähle $f = 1$. Sei im Folgenden angenommen $A \neq \varnothing$.
Für jeden Punkt $z \in A$ wähle eine offene Umgebung V_z von z mit $V_z \cap B = \varnothing$ und der Eigenschaft aus dem obigen Lemma. Es ist $A \subseteq \bigcup_{z \in A} V_z$, und wir finden wegen der Kompaktheit von A endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_N \in A$ sodass

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} V_{z_j}.$$

Wähle nun $f_j \in \mathcal{A}$, sodass

$$\forall x \in X{:}\, 0 \leq f_j(x) \leq 1 \quad \text{und} \quad \forall x \in V_{z_j}{:}\, f_j(x) < \frac{\epsilon}{N}, \quad \forall x \in B{:}\, f_j(x) \geq 1 - \frac{\epsilon}{N}.$$

Die Funktion $f := f_1 \cdot \ldots \cdot f_N$ gehört zu $\mathcal{A}$, erfüllt (o.B.d.A sei $\epsilon < 1$)

$$\forall x \in X{:}\, 0 \leq f(x) \leq 1,$$
$$f(x) < \frac{\epsilon}{N} \leq \epsilon \quad \text{für} \quad x \in \bigcup_{j=1}^{n} V_{z_j} \supseteq A,$$
$$f(x) \geq [1 - \frac{\epsilon}{N}]^N \geq 1 - N(\frac{\epsilon}{N}) = 1 - \epsilon \quad \text{für} \quad x \in B.$$

□

Wir kommen nun zum Beweis des Satzes der äquivalent zum Satz von Stone-Weierstraß ist.

Beweis. Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X,\mathbb{R})$ eine punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}$, und sei $f \in C(X,\mathbb{R})$.
Wir müssen eine Funktion $g \in \mathcal{A}$ finden, die hinreichend genau approximiert. Sei dazu $\epsilon > 0$ festgehalten.

▷**Wir konstruieren eine Zerlegung von X nach "Niveau-Linien" von f:**
Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $N\epsilon \geq 2\|f\|_\infty$, und setze für $j \in \mathbb{N}$

$$A_j := \{x \in X \mid f(x) + \|f\|_\infty \leq (j-1)\epsilon\},$$
$$B_j := \{x \in X \mid f(x) + \|f\|_\infty \geq j\epsilon\}.$$

Dann sind A_j, B_j abgeschlossen und disjunkt, und es gilt

$$\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_{N+1} = X,$$
$$X = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_{N+1} = \varnothing.$$

$\triangleright$Wir konstruieren eine Funktion $g \in \mathcal{A}$ die auf den "Niveau-Schichten" $A_j \setminus A_{j-1}$ fast die gleiche Größe wie $f + \|f\|_\infty$ hat:
Für $j = 1, \dots, N$ wähle $g_j \in \mathcal{A}$ mit

$$\begin{aligned} &\forall x \in X\colon 0 \le g_j(x) \le 1, \\ &\forall x \in A_j\colon g_j(x) < \frac{\epsilon}{N}, \quad \forall x \in B_j\colon g_j(x) > 1 - \frac{\epsilon}{N}, \end{aligned}$$

und setze

$$g := \epsilon \sum_{j=1}^{N} g_j.$$

Dann ist $g \in \mathcal{A}$.
Sei $z \in X$ gegeben. Wähle $l \in \{0, \dots, N\}$ sodass $x \in A_{l+1} \setminus A_l$. Das heißt also, dass

$$(l-1)\epsilon < f(x) \le l\epsilon.$$

Man sieht, dass $x \in B_j$ ist für alle $j \le l-1$. Um g abzuschätzen schreiben wir

$$g(x) = \epsilon\left(\sum_{j=1}^{l-1} g_j(x) + g_l(x) + \sum_{j=l+1}^{N} g_j(x)\right).$$

Die leere Summe sowie g_0 verstehen wir dabei als 0. Es ist

$$(l-1) - \epsilon \le (l-1)\big(1 - \frac{\epsilon}{N}\big) \le \sum_{j=1}^{l-1} g_j(x) \le \begin{cases} l-1, & l \ge 1 \\ 0, & l = 0 \end{cases}$$

$$0 \le g_l(x) \le 1,$$

$$0 \le \sum_{j=l+1}^{N} g_j(x) \le (N-l)\frac{\epsilon}{N} \le \epsilon,$$

und damit

$$(l-1)\epsilon - \epsilon^2 \le g(x) \le l\epsilon + \epsilon^2.$$

Also ist $|f(x) - g(x)| \le \epsilon + \epsilon^2$. $\square$

Als ein Beispiel für den Satz von Stone-Weierstraß erhält man den klassischen Satz von Weierstraß.

4.4.10 Bemerkung. Sei $[a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$, und sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Folge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomen mit $\lim_{n\to\infty} \rho_n = f$ gleichmäßig auf $[a, b]$.

Um dies zu sehen bemerke, dass die Menge $\mathcal{A}$ aller Polynome mit reellen Koeffizienten eine Unteralgebra von $C([a, b], \mathbb{R})$ ist, $1 \in \mathcal{A}$ gilt, und die punktetrennend ist, da $x \in \mathcal{A}$.

Betrachtet man komplexwertige Funktionen, so muss man die Voraussetzungen am Satz von Stone-Weierstraß verstärken damit der Satz richtig bleibt.

4.4.11 Satz (Stone-Weierstraß komplexwertig). *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein kompakter topologischer Raum, und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{C})$. Ist $\mathcal{A}$ eine punktetrennende und nirgends verschwindende $\mathbb{C}$-Unteralgebra von $C(X, \mathbb{C})$ die unter komplexer Konjugation abgeschlossen ist, dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\langle C(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\rangle$.*

Beweis. Da $\mathcal{A}$ mit einer Funktion f auch die Konjugierte $\overline{f}$ enthält, gilt

$$\forall f \in C(X, \mathbb{C}) : f \in \mathcal{A} \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{A}.$$

Betrachte nun die Menge

$$\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{A} \mid f(x) \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Klarerweise ist $\mathcal{B}$ eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von $C(X, \mathbb{R})$. Sie ist nirgends verschwindend: zu $z \in X$ wähle $f \in \mathcal{A}$ mit $f(z) \neq 0$. Dann ist $\operatorname{Re} f(z) \neq 0$ oder $\operatorname{Im} f(z) \neq 0$, und beide diese Funktionen gehören zu $\mathcal{B}$.
Sie ist auch punktetrennend: ist $x, y \in X$ mit $x \neq y$ wähle $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Also ist $\operatorname{Re} f(x) \neq \operatorname{Re} f(y)$ oder $\operatorname{Im} f(x) \neq \operatorname{Im} f(y)$.
Es folgt, dass $\mathcal{B}$ in $C(X, \mathbb{R})$ dicht ist. Hat man nun $f \in C(X, \mathbb{C})$ und $\epsilon > 0$, so findet man $g_1, g_2 \in \mathcal{B}$ mit $\|\operatorname{Re} f - g_1\|_\infty < \epsilon$ und $\|\operatorname{Im} f - g_2\|_\infty < \epsilon$. □

4.5 Das Lemma von Urysohn

Das Lemma von Urysohn ist ein Satz der gewährleistet, dass es viele stetige reellwertige Funktionen auf einem topologischen Raum gibt.
Wir beginnen mit einer Konstruktion stetiger Funktionen, dem ***Höhenlinien-Lemma***.

4.5.1 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum, $M \subseteq [0,1]$ dicht mit $\{0,1\} \subseteq M$, und $\alpha: M \to \mathcal{T}$ eine Funktion mit den Eigenschaften*

(i) $\alpha(0) = \varnothing, \alpha(1) = X$,

(ii) $\forall r, s \in M, r < s : \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)$.

Definiere $f: X \to [0,1]$ als

$$f(x) := \inf\{r \in M \mid x \in \alpha(r)\}.$$

Dann ist f stetig.

Beweis.
▷ $f^{-1}\big((-\infty, v)\big)$ **ist offen:**
Für $v > 1$ ist $f^{-1}\big((-\infty, v)\big) = X$, für $v \leq 0$ ist $f^{-1}\big((-\infty, v)\big) = \varnothing$. Sei $v \in (0,1]$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((-\infty, v)\big) &= \{x \in X \mid \exists r \in M, r < v : x \in \alpha(r)\} \\ &= \bigcup_{r<v} \alpha(r). \end{aligned}$$

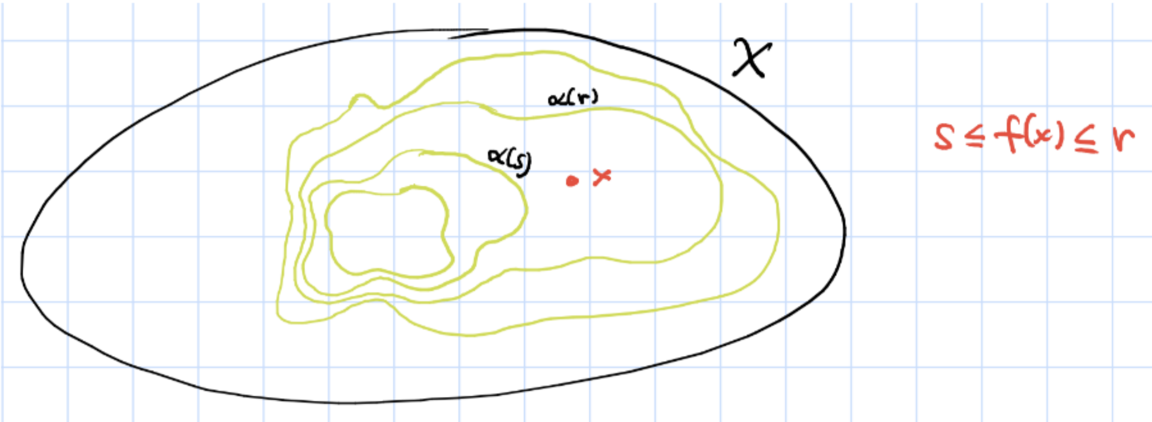


Abbildung 4.3: Illustration des 4.5.1 Höhenlinien-Lemma.

▷ $f^{-1}\big((v,\infty)\big)$ **ist offen:**
Für $v<0$ ist $f^{-1}\big((v,\infty)\big)=X$, für $v\geq 1$ ist $f^{-1}\big((v,\infty)\big)=\varnothing$. Sei $v\in[0,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} f^{-1}\big((v,\infty)\big) &= \{x\in X \mid \exists r\in M, r>v\colon x\notin\alpha(r)\} \\ &= \bigcup_{r>v}\big(X\smallsetminus\alpha(r)\big). \end{aligned}$$

Sei $r>v$. Da M dicht ist gibt es $r'\in(v,r)$. Für ein solches r' gilt

$$\alpha(r)\supseteq\overline{\alpha(r')}\supseteq\alpha(r'),$$

und wir schließen, dass

$$\bigcap_{r>v}\alpha(r)=\bigcap_{r>v}\overline{\alpha(r)}.$$

Geht man zu den Komplementen über, folgt also

$$f^{-1}\big((v,\infty)\big)=\bigcup_{r>v}\big(X\smallsetminus\overline{\alpha(r)}\big).$$

▷ **Die euklidische Topologie ist die von allen Halbstrahlen (halb-offenen Intervallen) erzeugte Topologie, und es folgt, dass f stetig ist.**

□

Das man Funktionen α wie im Höhenlinien-Lemma tatsächlich findet, wird durch ein Trennungsaxiom gewährleistet.

4.5.2 Definition. Sei $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Man sagt $\langle X,\mathcal{T}\rangle$ ***erfüllt das Trennungsaxiom*** (T_4), wenn gilt:

$$\forall A,B\subseteq X \text{ abgeschlossen, } A\cap B=\varnothing\,\exists O_A,O_B\in\mathcal{T}\colon A\subseteq O_A, B\subseteq O_B, O_A\cap O_B=\varnothing.$$

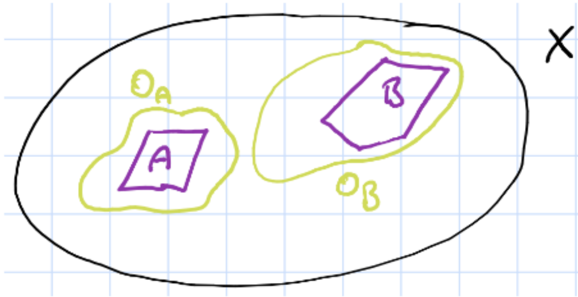


Abbildung 4.4: Darstellung des in 4.5.2 definierten Trennungsaxioms T_4.

4.5.3 Satz (Lemma von Urysohn)**.** *Sei* $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ *ein topologischer Raum der* (T_4) *erfüllt, und seinen* A, B *disjunkte abgeschlossene Teilmenge von* X*. Dann gibt es eine stetige Funktion* $f\colon X \to [0,1]$ *mit*

$$f(A) = \{0\}, \quad f(B) = \{1\}.$$

Zum Beweis konstruieren wir eine geeignete Funktion α.

4.5.4 Lemma. *Erfülle* $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ *das Trennungsaxiom* (T_4)*, und seien* $A, B \subseteq X$ *abgeschlossen und disjunkt. Sei*

$$M := \Big\{\frac{j}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\Big\} \cap [0,1].$$

Dann ist M *dicht in* $[0,1]$ *und* $\{0,1\} \subseteq M$*.*
Es existiert eine Funktion $\alpha\colon M \to \mathcal{T}$ *mit den Eigenschaften*

(i) $\alpha(0) = \varnothing, \quad \alpha(1) = X,$

(ii) $\forall r, s \in M, r < s\colon \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s),$

(iii) $\forall r \in M \setminus \{0,1\}\colon A \subseteq \alpha(r), \overline{\alpha(r)} \subseteq X \setminus B.$

Beweis. Wir verfahren induktiv nach der Potenz im Nenner der gekürzten Darstellung von $r \in M$.

▷ $n = 0:$ Setze $\alpha(0) := \varnothing$, $\alpha(1) := X$.

▷ $n = 1:$ Wähle O_A, O_B offen und disjunkt mit $A \subseteq O_A$ und $B \subseteq O_B$, und setze $\alpha\big(\frac{1}{2}\big) := O_A$. Dann gilt

$$A \subseteq \alpha\Big(\frac{1}{2}\Big) \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B,$$

und damit $\overline{\alpha\big(\frac{1}{2}\big)} \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B$.

▷ $n \mapsto n+1$: Sei angenommen wir haben bereits

$$\alpha\colon \quad \underbrace{\left\{\frac{j}{2^n} \mid j = 0, \dots, 2^n\right\}}_{=:M_n} \to \mathcal{T}$$

konstruiert, sodass

(a) $\alpha(0) = \varnothing,\ \alpha(1) = X$,

(b) $\forall\, r, s \in M_n, r < s\colon \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)$,

(c) $\forall\, r \in M_n \setminus \{0,1\}\colon A \subseteq \alpha(r), \overline{\alpha(r)} \subseteq X \setminus B$.

Wir definieren $\alpha(r)$ für $r \in M_{n+1} \setminus M_n$ d.h., für $r = \frac{2j+1}{2^{n+1}}$ wobei $j = 0, \dots, 2^n - 1$.

▷▷ $j = 0$: Wähle O_A, O offen und disjunkt mit $A \subseteq O_A, X \setminus \alpha\big(\frac{1}{2^n}\big) \subseteq O$, und setze $\alpha\big(\frac{1}{2^{n+1}}\big) \coloneqq O_A$. Dann ist

$$A \subseteq \alpha\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big), \quad \overline{\alpha\Big(\frac{1}{2^{n+1}}\Big)} \subseteq X \setminus O \subseteq \alpha\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subseteq X \setminus B.$$

▷▷ $j = 2^n - 1$: Wähle O, O_B offen und disjunkt mit $\overline{\alpha\big(\frac{2^n-1}{2^n}\big)} \subseteq O, X \setminus B \subseteq O_B$, und setze $\alpha\big(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\big) \coloneqq O$. Dann ist

$$\overline{\alpha\Big(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\Big)} \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B.$$

▷▷ $1 \le j < 2^n - 1$: Es gibt nach Induktionsvoraussetzung

$$\overline{\alpha\Big(\frac{j}{2^n}\Big)} \subseteq \alpha\Big(\frac{j+1}{2^n}\Big).$$

Wähle O_1, O_2 offen und disjunkt mit $\overline{\alpha\big(\frac{j}{2^n}\big)} \subseteq O_1$ und $X \setminus \alpha\big(\frac{j+1}{2^n}\big) \subseteq O_2$, und setze

$$\alpha\Big(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\Big) \coloneqq O_1.$$

Dann gilt

$$\overline{\alpha\Big(\frac{2j+1}{2^{n+1}}\Big)} \subseteq X \setminus O_2 \subseteq \alpha\Big(\frac{j+1}{2^n}\Big).$$

Wir haben also α unter Beibehaltung der Eigenschaften $(a), (b), (c)$ auf M_{n+1} fortgesetzt. □

Beweis (Urysohn). Sei α wie im Lemma konstruiert, und $f\colon X \to [0,1]$ die stetige Funktion die von α induziert wird. Wegen

$$\forall\, r \in M \setminus \{0,1\}\colon A \subseteq \alpha(r) \subseteq X \setminus B,$$

ist $f(x) = 0$ für alle $x \in A$ und $f(x) = 1$ für $x \in B$. □

Wir wollen nun zeigen, dass zwei wichtige Klassen topologischer Räume (T_4) erfüllen.

4.5.5 Proposition.

(i) Ist $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ kompakt und Hausdorff, so ist (T_4) erfüllt.

(ii) Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum, und $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie, so erfüllt $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ (T_4).

Wir haben schon gesehen, nämlich in einem Lemma in Kapitel 4, dass man in Hausdorff Räumen Punkte von kompakten Mengen trennen kann. Wiederholt man das dort durchgeführte Argument, so erhält man die folgende Aussage.

4.5.6 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Dann ist $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ Hausdorff, genau dann, wenn gilt:*

$$\forall A, B \subseteq X \text{ kompakt, } A \cap B = \emptyset \exists O_A, O_B \in \mathcal{T}\colon A \subseteq O_A, B \subseteq O_B, O_A \cap O_B = \emptyset.$$

Beweis. Die Implikation " $\Longleftarrow$ " ist trivial, da einpunktige Mengen kompakt sind. Für " $\Longrightarrow$ " seien A, B kompakt und disjunkt. Zu $y \in B$ wähle W_y, V_y offen disjunkt mit $A \subseteq W_y, y \in V_y$. Es ist $B \subseteq \bigcup_{y\in B} V_y$, und a B kompakt ist, finden wir $y_1, \ldots, y_n \in B$ sodass

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j} =: O_B.$$

Setze $O_A := \bigcap_{j=1}^{n} W_{y_j}$, dann ist O_A offen, $A \subseteq O_A$, und $O_A \cap O_B = \emptyset$. □

Beweis (von Proposition).

von (i): Da $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ kompakt ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge auch kompakt. Nach dem obigen Lemma kann man daher je zwei abgeschlossene Mengen mit offenen Mengen trennen.

von (ii): Seien A, B abgeschlossen und disjunkt. Zu jedem $x \in A$ wähle $\epsilon_x > 0$ sodass $U_{\epsilon_x}(x) \subseteq X \setminus B$, und zu $y \in B$ wähle $\delta_y > 0$ sodass $U_{\delta_y}(y) \subseteq X \setminus A$. Setze

$$O_A := \bigcup_{x\in A} U_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x), \quad O_B := \bigcup_{y\in B} U_{\frac{\delta_y}{2}}(y).$$

Dann sind O_A, O_B offen und $A \subseteq O_A, B \subseteq O_B$. Angenommen es wäre $O_A \cap O_B \neq \emptyset$, dann wähle $x \in A, y \in B$ mit $U_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x) \cap U_{\frac{\delta_y}{2}}(y) \neq \emptyset$. Für diese ist

$$d(x, y) < \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\delta_x}{2} \leq \max\{\epsilon_x, \delta_x\}.$$

Also gilt $y \in U_{\epsilon_x}(x)$ oder $x \in U_{\delta_y}(y)$, ein Widerspruch.

□

4.6 Der Satz von Luzin

Auf einem topologischen Raum hat man in natürlicher Weise eine σ-Algebra gegeben.

4.6.1 Definition.
Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ topologischer Raum. Die kleinste σ-Algebra die $\mathcal{T}$ umfasst heißt die ***Borel-σ-Algebra***, und ihre Elemente heißen ***Borelmengen***. Ein positives Maß das auf der Borel-σ-Algebra definiert ist, und jeder kompakten Menge endliches Maß zuweist, heißt ***Borelmaß***.
Ein Borelmaß μ heißt ***regulär***, wenn für jede Borelmenge B gilt, dass

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \inf\{\mu(O) \mid O \text{ offen}, O \supseteq B\}\\ &= \sup\{\mu(K) \mid K \text{ kompakt}, K \subseteq B\}.\end{aligned}$$

4.6.2 Satz (N.N. Luzin)**.**
Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ kompakt und (T_2), und μ ein reguläres Borelmaß auf X. Dann gilt

$$\begin{aligned}&\forall f\colon X \to \mathbb{R} \text{ Borel-meßbar } \forall \epsilon > 0\\ &\exists g \in C(X,\mathbb{R})\colon \mu\big(\{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}\big) < \epsilon.\end{aligned}$$

Beweis.

▷ **Wir betrachten die Binärdarstellung reeller Zahlen:**
Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$t = \lfloor t\rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(t) \cdot \frac{1}{2^n},$$

wobei $\lfloor t\rfloor$ die größte ganze Zahl $\leq t$ bezeichnet und

$$\beta_n = \mathbb{1}_{B_n} \quad \text{mit} \quad B_n := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \Big[\frac{j}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \frac{j+1}{2^{n-1}}\Big).$$

Eine Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ läßt sich also darstellen als

$$\begin{aligned}f(x) &= \lfloor f(x)\rfloor + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \circ f)(x)\frac{1}{2^n}\\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{f^{-1}\big([j,j+1)\big)}(x) \cdot j + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{f^{-1}(B_n)}(x) \cdot \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Beachte hier, dass in der ersten Summe genau ein Summand verschieden von Null ist.

▷ **Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar und $\epsilon > 0$ gegeben:**
Es ist $\mu(X) < \infty$ und $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} f^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1)\big) = \emptyset$.
Also gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mu\Big(f^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1)\big)\Big) = 0.$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\mu\Big(f^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1)\big)\Big) < \frac{\epsilon}{3}$. Als nächstes wähle Mengen O_j und K_j sodass

$$\begin{aligned} &O_j \text{ offen, } K_j \text{ kompakt, } K_j \subseteq f^{-1}\big([j, j+1)\big) \subseteq O_j \\ &\mu\big(O_j \setminus K_j\big) < \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2N+1}. \end{aligned}$$

Schließlich wähle Mengen $\tilde{O}_n$ und $\tilde{K}_n$ sodass

$$\begin{aligned} &\tilde{O}_n \text{ offen, } \tilde{K}_n \text{ kompakt, } \tilde{K}_n \subseteq f^{-1}(B_n) \subseteq \tilde{O}_n, \\ &\mu\big(\tilde{O}_n \setminus \tilde{K}_n\big) < \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Das Lemma von Urysohn gibt uns nun stetige Funktionen g_j und $\tilde{g}_n$ mit $0 \le g_j \le 1$, $0 \le \tilde{g}_n \le 1$, und

$$\begin{aligned} g_j(x) &= \mathbb{1}_{f^{-1}\left([j,j+1)\right)}(x) \quad \text{für} \quad x \in K_j \cup (X \setminus O_j), \\ \tilde{g}_n &= \mathbb{1}_{f^{-1}(B_n)}(x) \quad \text{für} \quad x \in \tilde{K}_n \cup (X \setminus \tilde{O}_n). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=-N}^{N} g_j(x) \cdot j + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n(x) \cdot \frac{1}{2^n}$$

für alle $x \in X$ die nicht in der Ausnahmemenge

$$f^{-1}\big(\mathbb{R} \setminus [-N, N+1)\big) \cup \bigcup_{j=-N}^{N} (O_j \setminus K_j) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\tilde{O}_n \setminus \tilde{K}^n)$$

liegen. Das Maß dieser Ausnahmemenge ist

$$< \frac{\epsilon}{3} + \sum_{j=-N}^{N} \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2N+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^n} = \epsilon.$$

Schlussendlich bemerke, dass wegen $\|\tilde{g}_n\|_\infty \le 1$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \cdot \frac{1}{2^n}$ gleichmäßig konvergiert, und die Funktion

$$\sum_{j=-N}^{N} g_j \cdot j + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n \cdot \frac{1}{2^n}$$

daher stetig ist.

□

Als eine Anwendung zeigen wir, dass stetige Funktionen in L^p-Räumen dicht sind. Dabei beschränken wir uns auf den Fall von Maßen auf der Borel-σ-Algebra des $\mathbb{R}^d$ die jeder kompakten Menge ein endliches Maß zuordnet (solche heißen auch ***Lebesgue-Stieltjes Maße***).
Weiter bezeichnen wir, für einen topologischen Raum $\langle X, \mathcal{T}\rangle$,

$$C_\infty(X, \mathbb{R}) := \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})} \text{ kompakt}\}.$$

4.6.3 Proposition.
Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes Maß auf $\mathbb{R}^d$, und sei $1 \leq \rho < \infty$.
Dann ist $C_\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ dicht in $\langle L^p(\mu), \|.\|_p\rangle$.

Beweis. Sei $f \in L^p(\mu)$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Dabei verstehen wir, dass f ein Repräsentant der Restklasse "f.ü." ist.

▷ **o.B.d.A ist f beschränkt:** Für $N \in \mathbb{N}$ setze

$$f_N := f \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}\left([-N,N]\right)}.$$

Dann gilt stets $|f_N| \leq |f|$ und f_N ist beschränkt.
Weiters ist $\lim_{N\to\infty} |f_N(x) - f(x)| = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$, und

$$|f_N(x) - f(x)| \in \{0, |f(x)|\},$$

insbesondere $|f_N(x) - f(x)| \leq |f(x)|$. Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz gilt

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_N(x) - f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Hat man gezeigt, dass alle f_N in $\overline{C_\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}])}^{\|.\|_p}$ liegen, so folgt also, dass auch f in dieser Menge liegt.

▷ **Sei $f \in L^p(\mu) \cap L^\infty(\mu)$ und $\epsilon > 0$:**
Wähle $R > 0$ sodass

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus U_R(0)} |f|^p \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{3},$$

und wähle $\delta \in (0,1)$ sodass

$$\mu\big(U_{R+\delta} \setminus \overline{U_R(0)}\big) < \frac{\epsilon}{3} \cdot (2\|f\|_\infty)^{-p}.$$

Betrachte nun die Einschränkung $f|_{\overline{U_{R+1}(0)}}$ und wähle mit Hilfe des Satzes von Luzin eine Funktion $g \in C(\overline{U_{R+1}(0)}, \mathbb{R})$ mit $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und

$$\mu\big(\{x \in \overline{U_{R+1}} \mid f(x) \neq g(x)\}\big) < \frac{\epsilon}{3} \cdot (2\|f\|_\infty)^{-p}.$$

Die erstgenannte Eigenschaft kann man stets erreichen indem man falls nötig zu der Funktion

$$\max\big\{-\|f\|_\infty, \min\{\|f\|_\infty, g(x)\}\big\},$$

übergeht.
Schließlich wähle $\chi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} 0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi(x) &= 1 \quad \text{für} \quad x \in \overline{U_R(0)}, \\ \chi(x) &= 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0), \end{aligned}$$

und definiere

$$h(x) := \begin{cases} \chi(x)g(x) & , \quad x \in U_{R+1}(0) \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{U_{R+\delta}(0)} \end{cases}.$$

Diese Funktion ist wohldefiniert, da $\chi(x) = 0$ falls $x \in U_{R+1}(0) \setminus \overline{U_{R+\delta}(0)}$. Sie ist auch stetig, da die beiden Mengen $U_{R+1}(0)$ und $\mathbb{R}^d \setminus \overline{U_{R+\delta}(0)}$ in der Fallunterscheidung offen sind (und die Einschränkungen auf diese stetig sind).
Wir zerlegen das Integral in die Summanden

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f-h|^p \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\overline{U_R(0)}} |f-h|^p \mathrm{d}\mu + \\ + \int\limits_{U_{R+\delta}(0) \setminus \overline{U_R(0)}} |f-h|^p \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0)} |f|^p \mathrm{d}\mu.$$

Auf $\overline{U_R(0)}$ gilt $h(x) = g(x)$, und damit

$$\int\limits_{\overline{U_R(0)}} |f-h|^p \mathrm{d}\mu \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mu\big(\{x \in \overline{U_R(0)} \mid f(x) \neq g(x)\}\big) \\ < (2\|f\|_\infty)^p \cdot \frac{\epsilon}{3}(2\|f\|_\infty)^{-p} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Beim zweiten Summanden wird über eine kleine Menge integriert:

$$\int\limits_{U_{R+\delta}(0) \setminus \overline{U_R(0)}} |f-h|^p \mathrm{d}\mu \leq (2\|f\|_\infty)^p \cdot \mu(U_{R+\delta}(0) \setminus \overline{U_R(0)}) \\ < (2\|f\|_\infty)^p \cdot \frac{\epsilon}{3}(2\|f\|_\infty)^{-p} = \frac{\epsilon}{3}.$$

Außerhalb von $U_{R+\delta}(0)$ ist $h = 0$, und es folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0)} |f-h|^p \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_{R+\delta}(0)} |f|^p \mathrm{d}\mu < \frac{\epsilon}{3}.$$

Zusammen folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f-h|^p \mathrm{d}\mu < \epsilon.$$

□

4.7 Der Satz von Kolmogoroff-Riesz

Dieser Satz gibt ein Kompaktheitskriterium für Teilmengen des $L^p(\mathbb{R}^n)$ für $1 \leq p < \infty$ (wobei der L^p-Raum bezüglich dem n-dimensionalen Lebesgue-Maß λ gebildet ist). Da $L^p(\mathbb{R}^n)$ ein vollständig normierter Raum ist, geht er also - genauso wie beim Satz von Arzela-Ascoli im $C(X, \mathbb{R})$ - darum, totale Beschränktheit zu charakterisieren.
Wir verwenden die folgende, auch in anderem Kontext wesentliche, Begriffsbildung.

4.7.1 Definition.
Sei $y \in \mathbb{R}^n$. Für eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit T_y die ***Translation*** um y

$$(T_y f)(x) := f(x+y).$$

Es ist also $T_y : \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$. Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^n & \to (\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}), \\ y & \mapsto T_y, \end{cases}$$

erfüllt die Rechenregeln

$$T_{(y_1+y_2)}(f) = (T_{y_1} \circ T_{y_2})(f), \quad T_0 = \mathrm{id},$$

ist also ein Gruppenhomomorphismus von der additiven Gruppe der $\mathbb{R}^n$ in die Permutationsgruppe auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^n}$; man spricht auch von der ***Translationsgruppe***.
Die Translationsgruppe hat auch topologische Eigenschaften.

4.7.2 Lemma.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen.

(i) Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}^n$

$$T_y f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \textit{mit} \quad \| T_y f \|_p = \|f\|_p.$$

(ii) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\lim_{y \to 0} \| T_y f - f \|_p = 0.$$

Beweis.

- ▷ **von (i):** Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant.
  Also haben wir, für alle $c \geq 0$,

  $$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |(T_y f)(x)| > c\}) = \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f(x)| > c\}).$$

  Daher ist $\| T_y f \|_\infty = \|f\|_\infty$. Weiter gilt, für $1 \leq p < \infty$,

  $$\int_{\mathbb{R}^n} |(T_y f)(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y)|^p \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p \mathrm{d}\lambda(z).$$

  Daher ist $\| T_y f \|_p = \|f\|_P$.

- ▷ **von (ii):** Betrachte zuerst den Fall, dass $f \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$.
  Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
  Wähle $R > 0$, sodass $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus U_R(0)$. Die Funktion f ist auf der kompakten Menge $\overline{U_{R+2}(0)}$ stetig, und daher dort sogar gleichmäßig stetig.
  Wähle $\delta \in (0,1)$, sodass

  $$x, y \in \overline{U_{R+2}(0)} \wedge \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(z)| < \epsilon \cdot \lambda(U_{R+1}(0))^{-\frac{1}{p}}.$$

  Sei $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|y\| < \delta$. Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus U_{R+1}(0)$ gilt $x + y, x \notin \overline{U_R(0)}$, und damit $f(x+y) = f(x) = 0$. Für $x \in U_{R+1}(0)$ gilt $x + y, x \in \overline{U_{R+2}(0)}$. Wir erhalten

  $$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{U_{R+1}(0)} |f(x+y) - f(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) \leq$$
  $$\leq \lambda(U_{R+1}(0)) \cdot \sup_{x \in U_{R+1}(0)} |f(x+y) - f(x)|^p < \epsilon^p.$$

□

Wir kommen nun zum Satz von Kolmogoroff-Riesz.

4.7.3 Satz (Kolmogoroff-Riesz)**.**
Sei $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$, *und* $\mathcal{F} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$. *Dann ist* $\mathcal{F}$ *total beschränkt, genau dann wenn*

(i) $\forall \epsilon > 0 \exists R > 0 \forall f \in \mathcal{F}\colon \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f \|_p < \epsilon$,

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \mathcal{F}\colon \sup\limits_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|_p < \epsilon$.

4.7.4 Bemerkung.
Vertauscht man in den Eigenschaften (i) bzw. (ii) den Existenzquantor mit dem Allquantor "$\forall f \in \mathcal{F}$", so erhält man wahre Aussagen. Denn jede Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ erfüllt nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} |f|^p \mathrm{d}\lambda = 0,$$

und nach dem vorigen Lemma

$$\lim_{y \to 0} \| T_y f - f \|_p = 0.$$

Die Bedeutung von (i) und (ii) ist also, dass diese Limiten gleichmäßig für alle $f \in \mathcal{F}$ sind.

Wir können nun die "einfache Richtung" des Beweises vom Satz von Kolmogoroff-Riesz schnell erledigen.

Beweis. (***total beschränkt*** $\implies (i) \wedge (ii)$): Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
Wähle $f_1, \dots, f_m \in L^p(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_\epsilon(f_j).$$

Nun wähle $\delta > 0$ sodass

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}\colon \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f_j - f_j \|_p < \epsilon,$$

und wähle $R > 0$ sodass

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}\colon \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f_j \|_p < \epsilon.$$

Ist $f \in \mathcal{F}$, so wähle $j \in \{1, \dots, m\}$ mit $f \in U_\epsilon(f_j)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f \|_p &\le \| \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} f_j \|_p + \| f_j - f \|_p < 2\epsilon, \\ \| T_y f - f \|_p &\le \| T_y (f - f_j) \|_p + \| T_y f_j - f_j \|_p + \| f_j - f \|_p \\ &< 3\epsilon \end{aligned}$$

□

Für den Beweis der Implikation "$(i)\wedge(ii) \implies$ totalbeschränkt" benützen wir das folgende - ganz einfache - Lemma.

4.7.5 Lemma.
Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Sei vorausgesetzt, dass

$$\forall \epsilon > 0 \exists B \subseteq X \colon \big(\forall x \in A \exists y \in B \colon d(x,y) < \epsilon \ \wedge\ B \text{ ist total beschränkt}\big).$$

Dann ist A total beschränkt.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle B mit den Eigenschaften aus der Voraussetzung für $\frac{\epsilon}{2}$, und wähle Kugeln $U_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$, mit

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\frac{\epsilon}{2}}(x_j).$$

Dann ist

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} U_{\epsilon}(x_j).$$

□

4.7.6 Bemerkung. Das ist eigentlich genau das gleiche Lemma wie beim Satz von Arzela-Ascoli, nur in anderem Gewand.

Die Grundidee des Beweises ist, dass sich jede L^p – *Funktion* durch Treppenfunktionen beliebig gut approximieren läßt, wenn man nur die Treppe hinreichend fein wählt. Die Bedingung (i) des Satzes gewährleistet, dass man mit einer kontrollierbaren Anzahl von Treppen auskommt, und die Bedingung (ii), dass man die Approximation quantitativ kontrollieren kann - und beides unabhängig von $f \in \mathcal{F}$.
Wir betrachten ein Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit ***Maschenweite*** α, d.h. wir schreiben

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{a \in \mathbb{Z}^n} \big(\alpha a + [0,\alpha]^n\big).$$

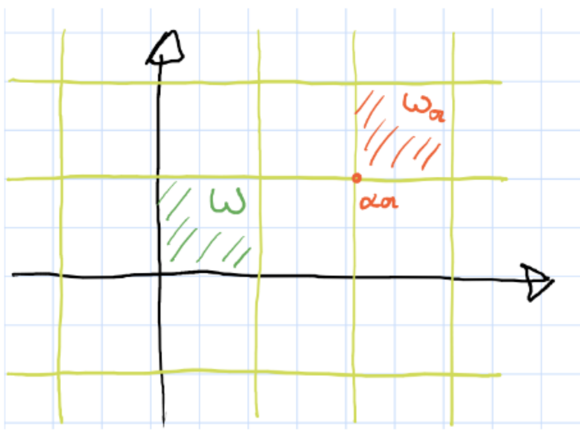


Abbildung 4.5: Skizze eines Gitters im $\mathbb{R}^n$

Wir bezeichnen

$$W_a \coloneqq \alpha a + [0, \alpha]^n, \quad \text{für} \quad a \in \mathbb{Z}^n.$$

$W \coloneqq [0, \alpha]^n$ heißt die ***Grundmasche*** des Gitters.

Für eine Funktion $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha > 0$ definieren wir eine Funktion $\Phi_\alpha f$ als (W_a sind die Maschen des Gitters mit Maschenweite α)

$$(\Phi_\alpha f)(x) \coloneqq \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \mathbb{1}_{W_a}(x) \cdot \left(\frac{1}{\lambda(W_a)} \int_{W_a} f(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right), \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Beachte hier, dass $f|_{W_a}$ integrierbar ist, da $f \in L^p$ und, dass W_a endliches Maß hat (es ist $\lambda(W_a) = \alpha^n$).
Punkt (iii) des folgenden Lemmas zeigt die erste Stelle wo die Eigenschaft (ii) des Satzes eingesetzt werden kann.
Wir bezeichnen mit Q_r die Einheitskugel bezüglich der Norm $\|.\|_\infty$ im $\mathbb{R}^n$, d.h. $Q_r \coloneqq [-r, r]^n$.

4.7.7 Lemma.
Sei $\alpha > 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \colon \Phi_\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n) \wedge \|\Phi_\alpha f\|_p \le \|f\|_p$,

(ii) $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n) \colon \|f - \Phi_\alpha f\|_p \le 2^{\frac{n}{p}} \cdot \sup\limits_{y \in Q_\alpha} \|T_y f - f\|_p$.

Beweis. Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Da $p \ge 1$ ist, ist die Funktion x^p konvex, und wir können die Jensensche Ungleichung mit dieser Funktion verwenden.

▷ **von (i):**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\alpha f(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) &= \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \int\limits_{W_a} \underbrace{|\Phi_\alpha f(x)|}_{\substack{\text{konvergent auf} \\ W_a}}{}^p \mathrm{d}\lambda(x) = \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \lambda(W_a) \cdot \left| \frac{1}{\lambda(W_a)} \int\limits_{W_a} f(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right|^p \le \\
&\le \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \lambda(W_a) \cdot \left(\int\limits_{W_a} |f(y)| \frac{\mathrm{d}\lambda(y)}{\mathrm{d}\lambda(W_a)} \right)^p \le \\
&\overset{\text{(Jensen)}}{\le} \sum_{a \in \mathbb{Z}^n} \lambda(W_a) \cdot \int\limits_{W_a} |f(y)|^p \frac{\mathrm{d}\lambda(y)}{\mathrm{d}\lambda(W_a)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \mathrm{d}\lambda(y).
\end{aligned}$$

▷ **von (ii):**

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \Phi_\alpha f(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) &= \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} \left| f(x) - \frac{1}{\lambda(W_a)} f(z)\mathrm{d}\lambda(z) \right|^p \mathrm{d}\lambda(x) = \\
&= \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} \left| \int_{W_a} \big(f(x) - f(z)\big) \frac{\mathrm{d}\lambda(z)}{\mathrm{d}\lambda(W_a)} \right|^p \mathrm{d}\lambda(x) \leq \\
&\leq \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} \left(\int_{W_a} |f(x) - f(z)| \frac{\mathrm{d}\lambda(z)}{\mathrm{d}\lambda(W_a)} \right)^p \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\overset{\text{(Jensen)}}{\leq} \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} \left(\int_{W_a} |f(x) - f(z)|^p \frac{\mathrm{d}\lambda(z)}{\mathrm{d}\lambda(W_a)} \right) \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} \int_{W_a - x} |f(x) - f(x+y)|^p \frac{\mathrm{d}\lambda(y)}{\mathrm{d}\lambda(W_a)} \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\overset{(W_a - W_a = Q_\alpha)}{\leq} \frac{1}{\alpha^n} \sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} \int_{Q_\alpha} |f(x) - (T_y f)(x)|^p \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\overset{\text{(Fubini)}}{=} \frac{1}{\alpha^n} \int_{Q_\alpha} \left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^n} \int_{W_a} |f(x) - (T_y f)(x)|^p \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \int_{Q_\alpha} \|f - T_y f\|_p^p \mathrm{d}\lambda(y) \leq \underbrace{\frac{\lambda(Q_\alpha)}{\alpha^n}}_{=2^n} \cdot \sup_{y\in Q_\alpha} \|f - T_y f\|_p^p .
\end{aligned}$$

□

Das nächste Lemma zeigt die zweite Stelle wo die Eigenschaft (ii) vom Satz arbeitet. Mit Hilfe dieser Aussage werden wir dann die Eigenschaft (i) des Satzes einsetzen können.

4.7.8 Lemma.
Für alle $a, b \in \mathbb{Z}^n$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\left| \|\mathbb{1}_{W_a} f\|_p - \|\mathbb{1}_{W_b} f\|_p \right| \leq \|a-b\|_\infty \cdot \sup_{y \in Q_\alpha} \|T_y f - f\|_p .$$

Beweis. Schreibe die Differenz $a - b$ als Summe

$$a - b = c_1 + \ldots + c_m$$

mit $c_j \in \mathbb{Z}^n$, $\|c_j\|_\infty = 1$, und $m = \|a - b\|_\infty$.

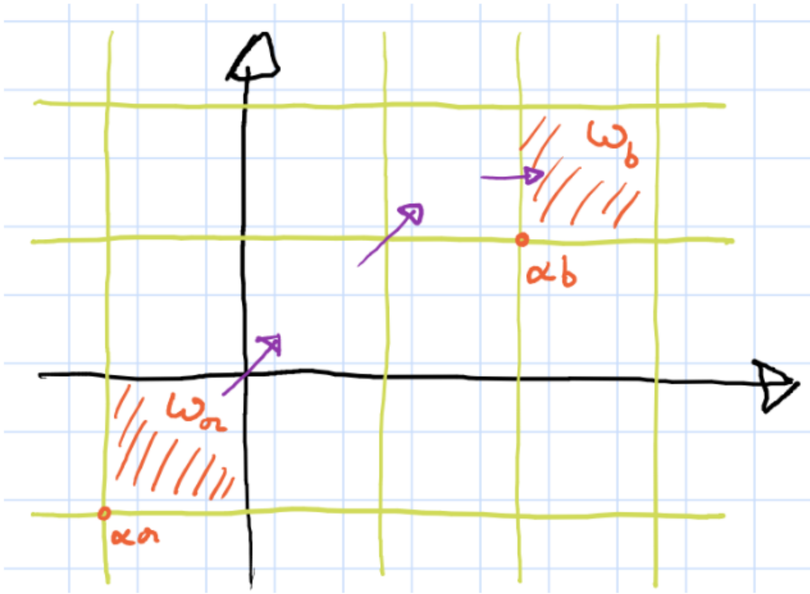


Abbildung 4.6: Illustration des Beweises von 4.7.8 Lemma.

So eine Darstellung von $a - b$ ist stets möglich: man zieht wie ein König am Schachbrett.
Formal wähle man c_j induktiv so, dass die $\|.\|_\infty$-Norm in jedem Schritt kleiner wird.
Wir schreiben $T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f$ als Teleskopsumme an:

$$\begin{aligned} T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f &= T_{\alpha b}(f - T_{\alpha(a-b)} f) = \\ &= T_{\alpha b}\left(\sum_{l=0}^{m-1} T_{\alpha(c_1 + \ldots + c_l)}(f - T_{\alpha c_{l+1}} f) \right). \end{aligned}$$

Da Translationen linear und isometrisch sind, folgt

$$\begin{aligned} \|T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f\|_p &\leq \sum_{l=0}^{m-1} \|f - T_{\alpha c_{l+1}} f\|_p \leq \\ &\leq \|a - b\|_\infty \cdot \sup_{y \in Q_\alpha} \|T_y f - f\|_p . \end{aligned}$$

Nun gilt, für jedes $a \in \mathbb{Z}^n$,

$$T_{\alpha a}(\mathbb{1}_{W_a} f) = \mathbb{1}_W \cdot T_{\alpha a} f ,$$

denn beide Seiten berechnen sich als

$$\begin{cases} f(\alpha a + x) & , \quad x \in W, \\ 0 & , \quad x \notin W. \end{cases}$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned} \big| \| \mathbb{1}_{W_b} f \|_p - \| \mathbb{1}_{W_a} f \|_p \big| &= \big| \| T_{\alpha b}(\mathbb{1}_{W_b} f) \|_p - \| T_{\alpha a}(\mathbb{1}_{W_a} f) \|_p \big| \\ &\le \| T_{\alpha b}(\mathbb{1}_{W_b} f) - T_{\alpha a}(\mathbb{1}_{W_a} f) \|_p = \| \mathbb{1}_W (T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f) \|_p \\ &\le \| T_{\alpha b} f - T_{\alpha a} f \|_p . \end{aligned}$$

□

Wir haben nun das nötige Werkzeug für den Beweis des Satzes.

Beweis. ($(i) \wedge (ii) \implies$ ***total beschränkt***): Wir gehen darauf los das allererste Lemma anzuwenden. Sei also $\epsilon > 0$ gegeben.

- ▷ **Konstruktion einer "approximierenden Menge":**
  Wähle $R > 0$ mit
  $$\forall f \in \mathcal{F}\colon \int_{\mathbb{R}^n \setminus U_R(0)} |f|^p \mathrm{d}\lambda \le \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p ,$$
  wähle $\delta > 0$ mit
  $$\forall f \in \mathcal{F}\colon \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|_p < \frac{\epsilon}{2} \cdot 2^{-\frac{n}{p}} ,$$
  wähle $N \in \mathbb{N}$ mit
  $$\frac{R}{\delta} < N.$$
  Nun seien $W_a,\ a \in \mathbb{Z}^n$, die Maschen des Gitters mit Maschenweite δ, und setze
  $$V \coloneqq \bigcup_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \le N}} W_a, \quad \mathcal{G} \coloneqq \big\{ \mathbb{1}_V \Phi_\delta f \mid f \in \mathcal{F} \big\}.$$

- ▷ **Nachweis der nötigen Eigenschaften von $\mathcal{G}$; Teil1:**
  Da V eine Vereinigung von ganzen Maschen des Gitters ist, gilt stets $\mathbb{1}_V \Phi_\delta f = \Phi_\delta \mathbb{1}_V f$. Weiter gewährleistet die Wahl von N, dass $U_R(0) \subseteq V$. Wir erhalten, für jedes $f \in \mathcal{F}$,
  $$\begin{aligned} \| f - \mathbb{1}_V \Phi_\delta f \|_p &\le \| f - \Phi_\delta f \|_p + \| \underbrace{\Phi_\delta f - \mathbb{1}_V \Phi_\delta f}_{= \Phi_\delta (f - \mathbb{1}_V f)} \|_p \\ &\le 2^{\frac{n}{p}} \sup_{y \in Q_\delta} \| T_y f - f \|_p + \| f - \mathbb{1}_V f \|_p < \epsilon . \end{aligned}$$

- ▷ **Nachweis der nötigen Eigenschaften von $\mathcal{G}$; Teil2:**
  Da V die disjunkte Vereinigung der Maschen W_a, $\|a\|_\infty \le N$ ist, haben wir
  $$\mathbb{1}_V = \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \le N}} \mathbb{1}_{W_a} ,$$

wobei an jeder Stelle höchstens ein Summand verschieden von Null ist. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathbb{1}_V \Phi_\delta f|^p \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg| \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \le N}} \mathbb{1}_{W_a} \Phi_\delta f \Bigg|^p \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \le N}} |\mathbb{1}_{W_a} \Phi_\delta f|^p \mathrm{d}\lambda = \sum_{\substack{a\in\mathbb{Z}^n \\ \|a\|_\infty \le N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\mathbb{1}_{W_a} \Phi_\delta f|^p \mathrm{d}\lambda.$$

Also gilt

$$\|\mathbb{1}_V \Phi_\delta f\|_{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{im } L^p(\mathbb{R}^n)}}{p}} = \Big\| \big(\|\mathbb{1}_{W_a} \Phi_\delta f\|_{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{im } L^p(\mathbb{R}^n)}}{p}} \big)_{\|a\|_\infty \le N} \Big\|_{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{im } \mathbb{R}^{n(2N+1)}}}{p}}$$

Wähle nun $b \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|b\|_\infty = N+1$. Dann gilt $W_b \cap U_R(0) = \varnothing$, und daher

$$\forall f \in \mathcal{F} \colon \|\mathbb{1}_{W_b} f\|_p < \frac{\epsilon}{2}.$$

Es folgt, dass für alle $a \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|a\|_\infty \le N$ gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbb{1}_{W_a} f\|_p &\le \|\mathbb{1}_{W_b} f\|_p + \|a-b\|_\infty \cdot \sup_{y\in Q_\delta} \|T_y f - f\| \\ &\le \frac{\epsilon}{2} + (2N+1) \cdot \frac{\epsilon}{2} \cdot 2^{-\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Menge

$$\Big\{ \big(\|\mathbb{1}_{W_a} \Phi_\delta f\|_p \big)_{\|a\|_\infty \le N} \in \mathbb{R}^{n(2N+1)} \mid f \in \mathcal{F} \Big\},$$

beschränkt ist. Daher ist sie auch total beschränkt.
Die Menge $\mathcal{G}$ ist also isometrisch zu einer total beschränkten Menge, und daher selbst total beschränkt.

□

4.8 Die Transformationsformel

Hat man zwei Maßräume X, Y, eine meßbare Abbildung $T \colon X \to Y$ und ein Maß μ auf X, so ist das ***Bildmaß*** (oder auch ***push-forward***) μ^T von μ unter T definiert als

$$\mu^T(B) \coloneqq \mu\big(T^{-1}(B)\big),$$

für alle meßbaren Mengen $B \subseteq Y$. Mit dieser Begriffsbildung erhält man die Transformationsformel für Integrale:

$$\int_{T^{-1}(Y)} (f \circ T) \mathrm{d}\mu = \int_Y f \mathrm{d}\mu^T.$$

Um diese Formel zu benützen ist es von Interesse den push-forward tatsächlich zu berechnen.

4.8.1 Bemerkung (cf. (Kusolitsch[1], Satz 6.68)).
Sei A eine $d \times d$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^d$, und T die invertierte affine Abbildung $Tx \coloneqq Ax + b$. Dann ist der push-forward des d-dimensionalen Lebesgue Maßes λ_d under der Abbildung T^{-1} gegeben als

$$\lambda_d^{T^{-1}} = |\det(A)| \cdot \lambda_d.$$

Wir zeigen nun für eine Klasse nicht-linearer Abbildungen eine dieser Formel entsprechende Tatsache. Die angesprochene Klasse sind Abbildungen die sich gut durch affine Abbildungen approximieren lassen, und auch der Beweis des Satzes wird auf dieser Approximierbarkeit berechnet.

4.8.2 Definition.
Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und sei $T: X \to Y$.Dann heißt T ein C^1***-Diffeomorphismus***, wenn T bijektiv ist, und T und T^{-1} beide stetig differenzierbar sind.

4.8.3 Satz (Transformationsformel).
Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und $T: X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus. Bezeichne mit λ_X und λ_Y das d-dimensionale Lebesgue Maß eingeschränkt auf X bzw. Y.
Dann ist $\lambda_Y^{T^{-1}}$ absolut stetig bezüglich λ_X, und die Radon-Nikodym Dichte ist gegeben als

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_Y^{T^{-1}}}{\mathrm{d}\lambda_X} = |\det \mathrm{d}T|,$$

wobei $\mathrm{d}T$ *das totale Differential (die Frechet-Ableitung) von T bezeichnet.*

Beweis. Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$ und $T: X \to Y$ wie im Satz festgehalten. Wir verwenden, aus rein praktischen Gründe, in diesem Beweis die Maximumsnorm im $\mathbb{R}^d$, das ist

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} \right\|_\infty \coloneqq \max_{j=1,\dots,d} |\alpha_j|.$$

Die $\|.\|_\infty$-Kugel mit Radius r und Mittelpunkt O ist der Würfel

$$Q_r \coloneqq [-r, r]^d.$$

Ist $A: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear, so ist die Abbildungsnorm bzgl. der $\|.\|_\infty$-Norm in Urbild- und Bildraum gerade die Zeilensummennorm ($A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^d$ bzgl. der kanonischen Basis)

$$\|(\alpha_{ij})_{i,j=1}^d\| \coloneqq \max_{i=1,\dots,d} \sum_{j=1}^d |\alpha_j|.$$

Es gilt also für jede lineare Abbildung

$$\|Ax\|_\infty \leq \|A\| \cdot \|x\|_\infty.$$

- ▷ **Wir zeigen die folgende Aussage:**
  Sei $B \subseteq X$ ein abgeschlossener Würfel mit Seitenlänge $l(B)$, d.h

  $$B = [\alpha_1, \alpha_1 + l(B)] \times \ldots \times [\alpha_d, \alpha_d + l(B)],$$

und setze

$$\alpha(B) := \sup_{x,y\in B} \|\mathrm{d}T(x) - \mathrm{d}T(y)\|,$$
$$\beta(B) := \sup_{x\in B} \|[\mathrm{d}T(x)]^{-1}\|.$$

Dann gilt für jedes $y \in B$

$$T(B) \subseteq T_y - [\mathrm{d}T(y)](y) + [\mathrm{d}T(y)]\big(B + Q_{l(B)\alpha(B)\beta(B)}\big).$$

Sei $y \in B$. Die Funktion $F(x) := T(x) - [\mathrm{d}T(y)](x)$ ist stetig differenzierbar, und $\mathrm{d}F(x) = \mathrm{d}T(x) - \mathrm{d}T(y)$.
Damit erhalten wir, für jedes $x \in B$,

$$\begin{aligned}\| Tx - \big(Ty + [\mathrm{d}T(y)](x-y)\big)\|_\infty &= \|F(x) - F(y)\|_\infty \\ &\le \sup_{t\in\mathrm{conv}\{x,y\}} \|\mathrm{d}F(t)\| \cdot \|x-y\|_\infty \\ &\le \alpha(B)\cdot l(B).\end{aligned}$$

Das zeigt, dass

$$T(B) \subseteq \big(Ty - [\mathrm{d}T(y)]y + [\mathrm{d}T(y)](B)\big) + Q_{\alpha(B)l(B)}.$$

Nun gilt, für jedes $r > 0$,

$$\begin{aligned}Q_r &= [\mathrm{d}T(y)]\big([\mathrm{d}T(y)]^{-1}(Q_r)\big) \subseteq \\ &\subseteq [\mathrm{d}T(y)]\big(Q_{r\cdot\|[\mathrm{d}T(y)]^{-1}\|}\big) \subseteq [\mathrm{d}T(y)]\big(Q_{r\beta(B)}\big).\end{aligned}$$

Es folgt

$$T(B) \subseteq Ty - [\mathrm{d}T(y)](y) + [\mathrm{d}T(y)]\big(B + Q_{\alpha(B)l(B)\beta(B)}\big).$$

▷ **Wir zeigen die folgende Aussage:**
Seien $B, l(B), \alpha(B), \beta(B)$ wie im vorigen Schritt. Dann gilt

$$\lambda\big(T(B)\big) \le \int_B |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda \cdot \big(1 + 2\alpha(B)\beta(B)\big)^d.$$

Das Lebesgue Maß ist translationsinvariant, also erhalten wir aus der im vorigen Schritt gezeigten Inklusion für jedes $y \in B$

$$\begin{aligned}\lambda\big(T(B)\big) &= \lambda\big([\mathrm{d}T(y)](B + Q_{\alpha(B)l(B)\beta(B)})\big) \\ &= |\det[\mathrm{d}T(y)]| \cdot \lambda\big(B + Q_{\alpha(B)l(B)\beta(B)}\big).\end{aligned}$$

Nun ist $B + Q_{\alpha(B)l(B)\beta(B)}$ ein Würfel mit Seitenlänge $l(B) + 2\alpha(B)l(B)\beta(B)$, und daher

$$\begin{aligned}\lambda(B + Q_{\alpha(B)l(B)\beta(B)}) &= l(B)^d\big(1 + 2\alpha(B)\beta(B)\big)^d \\ &= \lambda(B)\cdot\big(1 + 2\alpha(B)\beta(B)\big)^d.\end{aligned}$$

Jetzt machen wir eine Wahl für y. Nämlich sei $y \in B$ so dass

$$|\det[\mathrm{d}T(y)]| = \min_{x\in B} |\det[\mathrm{d}T(x)]|.$$

Dann gilt

$$|\det[\mathrm{d}T(y)]| \cdot \lambda(B) \leq \int_B |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda,$$

und wir erhalten die behauptete Abschätzung.

▷ Die im letzten Schritt bewiesene Abschätzung zeigt, dass für sehr kleine Würfel B eine Ungleichung der im Satz behaupteten Gleichung für die Radon-Nikodym Dichte schon fast gilt. Beachte, dass $\alpha(B)$ mit B klein wird.

Diese Beobachtung benützen wir um die folgende Aussage zu zeigen:
Sei $R \subseteq X$ ein abgeschlossener Quader mit rationalen Seitenlängen.
Dann gilt

$$\lambda\big(T(R)\big) \leq \int_R |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda.$$

Wähle $\gamma > 0$ sodass alle Seiten von R ganzzahlige Vielfache von γ sind, und unterteile für $N \in \mathbb{N}$ den Quader R äquidistant in Würfel mit Seitenlänge $\frac{\gamma}{N}$:

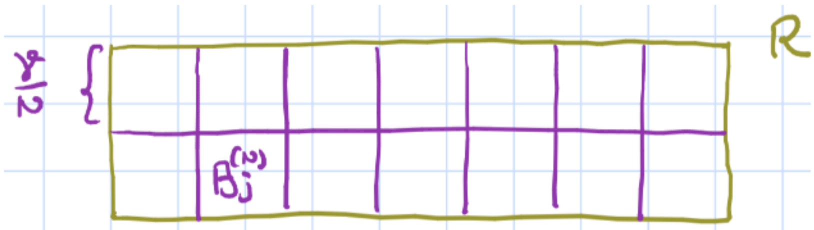


Abbildung 4.7: Veranschaulichung äquidistanter Würfel des Quaders R.

Bezeichne die so erhaltenen Würfel als $B_1^{(N)}, \dots, B_{m^{(N)}}^{(N)}$.
Dann gilt also

$$\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} B_j^{(N)} = R, \quad \overset{\circ}{B}{}_j^{(N)} \cap \overset{\circ}{B}{}_i^{(N)} = \varnothing \quad \text{falls } j \neq i.$$

Es gilt, für alle N und j,

$$\beta(B_j^{(N)}) \leq \sup_{x \in R} \|[\mathrm{d}T(x)]^{-1}\|.$$

Die Funktion $x \mapsto [\mathrm{d}T(x)]^{-1}$ ist stetig, und daher ist die rechte Seite endlich.
Die Funktion $\mathrm{d}T$ ist stetig, und auf R daher gleichmäßig stetig.
Sei $\epsilon > 0$. Dann finden wir $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall N \geq N_0, j \in \{1, \dots, m^{(N)}\} \colon 2\alpha(B_j^{(N)})\beta(B_j^{(N)}) < \epsilon.$$

Da der Rand eines Würfels eine λ-Nullmenge ist, erhalten wir nun, für alle

$N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}\lambda\big(T(R)\big) &= \lambda\Bigg(\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} T(B_j^{(N)})\Bigg) \leq \sum_{j=1}^{m^{(N)}} \lambda\big(T(B_j^{(N)})\big)\\ &\leq \sum_{j=1}^{m^{(N)}} \int\limits_{B_j^{(N)}} |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda \cdot (1+\epsilon)^d\\ &= \sum_{j=1}^{m^{(N)}} \int\limits_{\mathring{B}_j^{(N)}} |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda \cdot (1+\epsilon)^d = \int\limits_{\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} \mathring{B}_j^{(N)}} |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda \cdot (1+\epsilon)^d\\ &\leq \int_R |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda \cdot (1+\epsilon)^d.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig ist, folgt die behauptete Ungleichung.

$\triangleright$ Der Rest des Beweises ist nur mehr reine Routine.

$\triangleright\triangleright$ Sei μ das Maß

$$\mu(A) \coloneqq \int_A |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda.$$

Dann gilt also für alle abgeschlossenen Rechtecke $R \subseteq X$, dass $\lambda^{T^{-1}}(R) \leq \mu(R)$. Da diese Rechtecke die σ-Algebra der Borelmengen erzeugen, folgt $\lambda^{T^{-1}}(A) \leq \mu(A)$ für alle Borelmengen $A \subseteq X$. Insbesondere ist

$$\lambda^{T^{-1}} \ll \mu \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\lambda^{T^{-1}}}{\mathrm{d}\mu} \leq 1.$$

Wegen $\mu \ll \lambda$ mit $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda} = |\det \mathrm{d}T|$ folgt nun

$$\lambda^{T^{-1}} \ll \lambda \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}\lambda^{T^{-1}}}{\mathrm{d}\lambda} \leq |\det \mathrm{d}T|.$$

$\triangleright\triangleright$ Die obige Erkenntnis kann natürlich auch mit dem C^1-Diffeomorphismus $T^{-1}\colon Y \to X$ angewendet werden.
Benützt man die Kettenregel

$$\big([\mathrm{d}T] \circ T^{-1}\big) \cdot d(T^{-1}) = \mathrm{id},$$

so erhält man für alle Borelmengen $A \subseteq X$

$$\begin{aligned}\lambda\big(T(A)\big) \leq \int_A |\det \mathrm{d}T| \mathrm{d}\lambda &= \int\limits_{T^{-1}\left(T(A)\right)} |\det \mathrm{d}T| \circ T^{-1} \circ T \mathrm{d}\lambda\\ &= \int\limits_{T(A)} |\det \mathrm{d}T| \circ T^{-1} \mathrm{d}\lambda^T\\ &\leq \int\limits_{T(A)} \big(|\det \mathrm{d}T| \circ T^{-1}\big) \cdot |\det \mathrm{d}(T^{-1})| \mathrm{d}\lambda\\ &= \int\limits_{T(A)} 1 \cdot \mathrm{d}\lambda = \lambda\big(T(A)\big).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\lambda\big(T(A)\big) = \int_A |\det \mathrm{d}\,T| \mathrm{d}\lambda,$$

sprich $\frac{\mathrm{d}\lambda^{T^{-1}}}{\mathrm{d}\lambda} = |\det \mathrm{d}\,T|$.

□

4.9 Der Satz von Sard

Ist $T\colon X \to Y$ stetig differenzierbar, und $x_0 \in X$ mit $\det \mathrm{d}\,T(x_0) \neq 0$, so ist T zumindest auf einer gewissen Umgebung von x_0 ein C^1-Diffeomorphismus. Man kann also die Transformationsformel lokal bei Punkten wo $\mathrm{d}\,T$ invertierbar ist anwenden.

4.9.1 Definition.
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $T\colon X \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar.
Ein Punkt $x \in X$ heißt ***kritischer Punkt von*** T, wenn

$$\det \mathrm{d}\,T(x) = 0.$$

Die Menge aller kritischen Punkte von T bezeichnen wir mit C_T.

Es ist eine oft praktische Tatsache, dass man beim Transformieren von Integralen das Bild der Menge C_T immer getrost ignorieren kann (die Menge C_T selbst kann dagegen groß sein).

4.9.2 Satz (von Sard)**.**
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $T\colon X \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbar.
Dann ist die Menge $T(C_T)$ Legesgue-meßbar und hat Maß Null.

Beweis. Für den Beweis des Satzes analysieren - und modifizieren - wir den Beweis der Transformationsformel.

▷ **Eine Vorbereitung:**
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossener Würfel mit Seitenlänge $l(B)$, und sei $L\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine lineare Abbildung mit $\ker L \neq \{0\}$. Setze

$$\delta \coloneqq \dim(\ker L), \quad \rho \coloneqq \dim(\mathrm{ran} L),$$

sodass also $\delta \geq 1$ und $\delta + \rho = d$. Schließlich wähle eine unitäre Abbildung $U\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit

$$U(\mathrm{ran} L) = \mathbb{R}^\rho \times \{0\}^\delta.$$

Da die Zeilensummennorm einer unitären Matrix $\leq d$ ist, ist $\|U \circ L\| \leq d\|L\|$. Der Durchmesser des Würfels B ist $= l(B)$, und daher ist der Durchmesser der Menge $(U \circ L)(B)$ höchstens $d\|L\|l(B)$. Es gilt also, für beliebiges $z_B \in (U \circ L)(B)$, dass

$$(U \circ L)(B) \subseteq z_B + \big(Q^{\mathbb{R}^\rho}_{d\|L\|l(B)} \times \{0\}^\delta\big)$$

▷ **Sei X, T wie im Satz. Wir zeigen die folgende Aussage:**
Sei $B \subseteq X$ ein abgeschlossener Würfel mit Seitenlänge $l(B)$, sei $\alpha(B)$ wie vorher und $\gamma(B) \coloneqq \sup\{\|\mathrm{d}T(x)\| : x \in B\}$. Angenommen es gibt $y \in B$ mit $\delta \coloneqq \dim(\ker[\mathrm{d}T(y)]) \geq 1$.
Dann ist $T(B)$ enthalten in einer Menge mit Maß

$$\leq (2d)^d \lambda(B)\big(\gamma(B) + \alpha(B)\big)^{d-\delta} \alpha(B)^\delta.$$

Die Abschätzung im ersten Schritt des Beweises der Transformationsformel hat zur folgenden Inklusion geführt ($y \in B$ beliebig):

$$T(B) \subseteq Ty - [\mathrm{d}T(y)]y + [\mathrm{d}T(y)](B) + Q_{\alpha(B)l(B)}.$$

Sei nun angenommen, dass $\mathrm{d}T(y)$ nicht invertierbar ist, und sei $\delta \coloneqq \dim(\ker L)$, $\rho \coloneqq \dim(\mathrm{ran} L)$. Wähle U unitär sodass $U\big(\mathrm{rand}\, T(y)\big) = \mathbb{R}^\rho \times \{0\}^\delta$. Dann ist (mit $z \in [\mathrm{d}T(y)](B)$ beliebig gewählt)

$$\begin{aligned} U\big([\mathrm{d}T(y)](B) + Q_{\alpha(B)l(B)}\big) &\subseteq \\ &\subseteq \big(U \circ [\mathrm{d}T(y)]\big)(B) + U\big(Q_{\alpha(B)l(B)}\big) \subseteq \\ &\subseteq z + \big(Q^{\mathbb{R}^\rho}_{d\|\mathrm{d}T(y)\|l(B)} \times \{0\}^\delta\big) + Q_{d\cdot\alpha(B)l(B)} \\ &\subseteq z + \big(Q^{\mathbb{R}^\rho}_{d\left(\gamma(B)+\alpha(B)\right)l(B)} \times Q_{d\cdot\alpha(B)l(B)}\big). \end{aligned}$$

Da das Lebesgue Maß translationsinvariant ist und bei unitären Transformationen gleich bleibt, ist $T(B)$ enthalten in einer Menge mit Maß

$$\begin{aligned} &\leq \lambda\big(Q^{\mathbb{R}^\rho}_{d\left(\gamma(B)+\alpha(B)\right)l(B)} \times Q_{d\cdot\alpha(B)l(B)}\big) = \\ &\qquad = (2d)^d \cdot \underbrace{l(B)^d}_{=\lambda(B)} \big(\gamma(B) + \alpha(B)\big)^\rho \alpha(B)^\delta. \end{aligned}$$

▷ **Wir zeigen, dass für jeden abgeschlossenen Quader $R \subseteq X$ mit rationalen Seitenlängen die Menge $T(R \cap C_T)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.**
Wir verwenden die gleichen äquidistanten Zerlegungen von R in Würfel $B_j^{(N)}$, $j = 1, \ldots, m^{(N)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} T(R \cap C_T) &\subseteq \bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} T(B_j^{(N)} \cap C_T) \subseteq \\ &\subseteq \bigcup \big\{B_j^{(N)} \,\big|\, j \in \{1, \ldots, m^{(N)}\},\ B_j^{(N)} \cap C_T \neq \emptyset\big\}. \end{aligned}$$

Nach der im letzten Schritt gezeigten Abschätzung gilt für $B_j^{(N)}$ mit $B_j^{(N)} \cap C_T \neq \emptyset$, dass (mit geeignetem $\delta_j^{(N)} \geq 1$) $T(B_j^{(N)})$ enthalten ist in einer Menge mit Maß

$$\leq (2d)^d \lambda(B_j^{(N)})\big(\gamma(B_j^{(N)}) + \alpha(B_j^{(N)})\big)^{d-\delta_j^{(N)}} \alpha(B_j^{(N)})^{\delta_j^{(N)}}.$$

Sei nun $\epsilon \in (0,1)$, und wähle $N_0 \in \mathbb{N}$ sodass $\alpha(B_j^{(N)}) < \epsilon$ falls nur $N \geq N_0$. Weiter setze $\gamma(R) \coloneqq \sup_{x\in R} \|\mathrm{d}T(x)\|$, sodass also $\gamma(R) \geq \gamma(B_j^{(N)})$ für alle j und N. Dann haben wir, für $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}\left(\gamma(B_j^{(N)}) + \alpha(B_j^{(N)})\right)^{d-\delta_j^{(N)}} &\leq \left(\gamma(R)+1\right)^d,\\ \alpha(B_j^{(N)})^{\delta_j^{(N)}} &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Es folgt für $N \geq N_0$

$$\begin{aligned}&\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{m^{(N)}} \left\{B_j^{(N)} \,\middle|\, j \in \{1,\dots,m^{(N)}\},\ B_j^{(N)} \cap C_T\right\}\right) \leq \\ &\leq \sum_{\substack{j=1\\ B_j^{(N)} \cap C_T \neq \varnothing}}^{m^{(N)}} (2d)^d \lambda(B_j^{(N)})(\gamma(R)+1)^d \epsilon \leq \\ &\leq (2d)^d \lambda(R)(\gamma(R)+1)^d \epsilon.\end{aligned}$$

Also hat die Menge

$$\bigcap_{N\in\mathbb{N}} \left(\bigcup \left\{B_j^{(N)} \,\middle|\, j \in \{1,\dots,m^{(N)}\},\ B_j^{(N)} \cap C_T \neq \varnothing\right\}\right)$$

Maß Null. Die Menge $T(R \cap C_T)$ ist eine Teilmenge dieser Menge, und daher Lebesgue-meßbar mit Maß Null.

▷ Da X durch abzählbar viele Quader mit rationalen Seitenlängen überdeckt werden kann folgt, dass $T(C_T)$ Lebesgue-Nullmenge ist.

□

Kapitel 5

Mannigfaltigkeiten

5.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Der Begriff der Mannigfaltigkeiten verallgemeinert was man sich als “glatte Fläche” vorstellt. Bevor wir zur Definition kommen, wollen wir noch einen topologischen Begriff formulieren.

5.1.1 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum. Dann sagt man $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ erfüllt das ***zweite Abzählbarkeitsaxiom***, wenn $\mathcal{T}$ eine höchstens abzählbare Basis besitzt. Explizit formuliert: Es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ sodass sich jede Menge $O \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von gewissen Mengen aus $\mathcal{V}$ schreiben läßt.

5.1.2 Bemerkung. Erfüllt $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom, ist $Y \subseteq X$ und $\mathcal{T}|_Y$ die Spurtopologie von $\mathcal{T}$ auf Y, so erfüllt auch $\langle Y, \mathcal{T}|_Y\rangle$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Dies gilt, da bekanntlich $\mathcal{T}|_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$ ist.

5.1.3 Lemma. *Ist $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum der eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge besitzt, so erfüllt $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ das zweite Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Sei $D \subseteq X$ dicht und höchstens abzählbar. Dann ist die Menge

$$\mathcal{V} := \{U_q(z) \mid q > 0, q \in \mathbb{Q}, z \in D\}$$

ebenfalls höchstens abzählbar.
Sei nun $O \in \mathcal{T}_d$ gegeben. Für $x \in O$ wähle $r_x > 0$ sodass $U_{r_x}(x) \subseteq O$. Nun wähle $z_x \in D \cap U_{\frac{r_x}{2}}(x)$, und

$$q_x \in \Big(d(x, z_x), \frac{r_x}{2}\Big) \cap \mathbb{Q}.$$

Dann ist $U_{q_x}(z_x) \in \mathcal{V}$, und

$$x \in U_{q_x}(z_x) \subseteq U_{r_x}(x) \subseteq O.$$

Wir sehen, dass

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in O} U_{q_x}(z_x) \subseteq O,$$

also $O = \bigcup_{x \in O} U_{q_x}(z_x)$. □

5.1.4 Beispiel. Der Raum $\mathbb{R}^n$ (mit der euklidischen Topologie) erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. Denn er hat die abzählbare dichte Teilmenge $\mathbb{Q}^n$.

Die in unserem Kontext interessante Eigenschaft ist das folgende ***Lemma von Lindelöf***.

5.1.5 Lemma (Lindelöf). *Sei $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ ein topologischer Raum der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann gilt für jede Teilmenge $M \subseteq X$ die folgende Aussage*

- ▷ *Jede offene Überdeckung von M besitzt eine höchstens abzählbare Teilüberdeckung.*

Beweis. Wähle $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ höchstens abzählbar, sodass jede offene Menge Vereinigung von Elementen von $\mathcal{V}$ ist.
Sei nun $M \subseteq X$ und $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ mit $M \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ gegeben. Für $x \in M$ existiert $O_x \in \mathcal{U}$ mit $x \in O_x$, und in Folge existiert $V_x \in \mathcal{V}$ mit $x \in V_x \subseteq O_x$. Betrachte die Menge

$$\mathcal{W} := \{ V_x \mid x \in M \}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}, \ \bigcup \mathcal{W} \supseteq M, \ \forall W \in \mathcal{W}: \{ O \in \mathcal{U} \mid W \subseteq O \} \neq \emptyset.$$

Wähle eine Funktion $\varphi: \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ mit

$$\forall W \in \mathcal{W}: W \subseteq \varphi(W).$$

Dann ist $\varphi(\mathcal{W})$ eine höchstens abzählbare Teilmenge von $\mathcal{U}$, und

$$M \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \varphi(W) = \bigcup \varphi(\mathcal{W}).$$

□

Nun kommen wir zur Definition des Begriffes einer C^1-Mannigfaltigkeit.

5.1.6 Definition. Sei M ein topologischer Raum und $d \in \mathbb{N}$.

(i) Ein Paar (U, φ) heißt ***d-dimensionale Karte auf** M*, wenn

- ▷ $U \subseteq M$ offen, und $\varphi: U \to \mathbb{R}^d$,
- ▷ $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^d$ offen,
- ▷ φ Homöomorphismus von U (mit der Spurtopologie von M) auf $\varphi(U)$ (mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^d$).

(ii) Eine Menge $\{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ heißt ein ***d-dimensionaler C^1-Atlas von M***, wenn

- ▷ für jedes $i \in I$ ist (U_i, φ_i) eine d-dimensionale Karte auf M,
- ▷ $\bigcup_{i \in I} U_i = M$,

▷ Für je zwei Indizes $i, j \in I$ mit $U_{ij} \coloneqq U_i \cap U_j \neq \varnothing$ ist der ***Kartenwechsel***

$$\varphi_{ij} \coloneqq \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_{ij})} : \varphi_i(U_{ij}) \to \varphi_j(U_{ij})$$

stetig differenzierbar.

5.1.7 Definition. Sei $d \in \mathbb{N}$. Ein Paar $\big\langle \langle M, \mathcal{T} \rangle, \mathcal{A} \big\rangle$ heißt d***-dimensionale*** C^1***-Mannigfaltigkeit***, wenn

▷ $\langle M, \mathcal{T} \rangle$ ist topologischer Raum, der Hausdorff ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt,

▷ $\mathcal{A}$ ist ein d-dimensionaler C^1-Atlas von M.

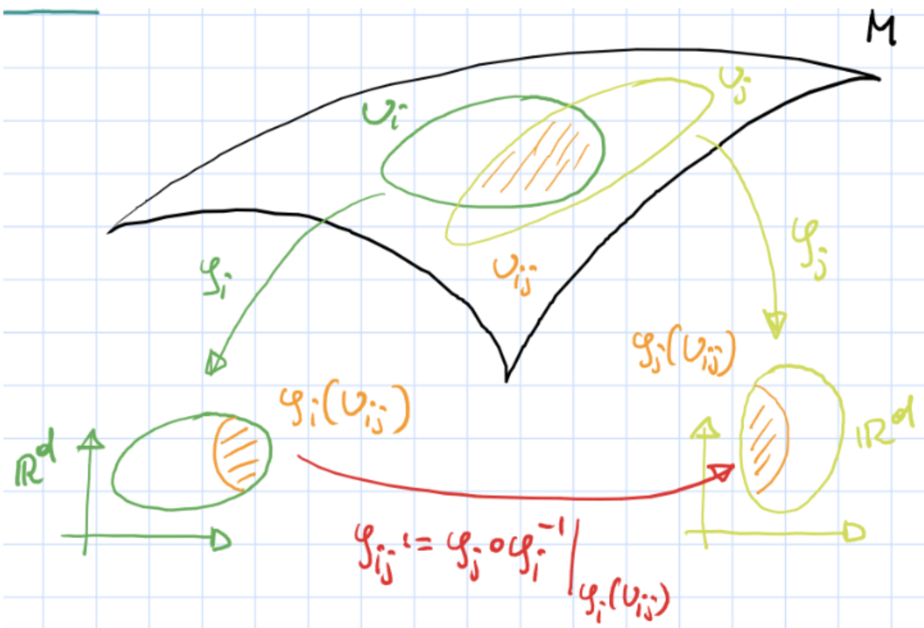


Abbildung 5.1: Illustration eines in 5.1.6 (ii) beschriebenen Kartenwechsels.

Wieder einmal hat man in natürlicher Weise einen Begriff von “strukturerhaltenden Abbildungen”.

5.1.8 Definition. Seien $\big\langle \langle M, \mathcal{T} \rangle, \mathcal{A} \big\rangle$ und $\big\langle \langle N, \mathcal{V} \rangle, \mathcal{B} \big\rangle$ zwei C^1-Mannigfaltigkeiten. Eine Funktion $F: M \to N$ heißt ***stetig differenzierbar***, wenn gilt

▷ F ist $\mathcal{T} - \mathcal{V}$-stetig,

▷ Für je zwei Karten $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ und $(V, \psi) \in \mathcal{B}$ mit $F(U) \cap V \neq \varnothing$, ist die Funktion

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap F^{-1}(V))} : \varphi(U \cap F^{-1}(V)) \to \psi(V)$$

stetig differenzierbar.

5.1.9 Bemerkung. Offenbar gilt stets

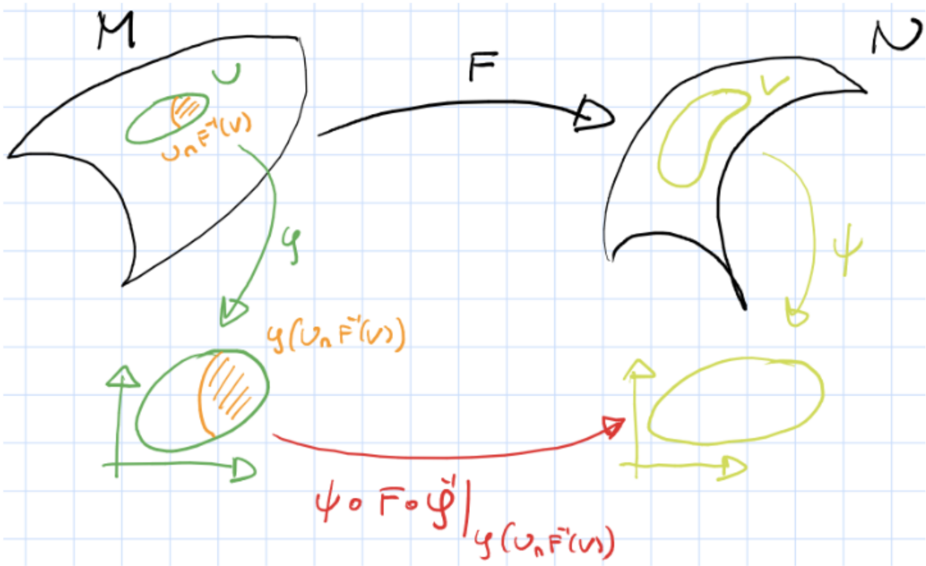


Abbildung 5.2: Illustration der in 5.1.8 angegebenen Funktionen.

(i) id ist stetig differenzierbar

(ii) F, G stetig differenzierbar $\implies$ $G \circ F$ stetig differenzierbar

Man hat nun auch den der betrachteten Struktur entsprechenden Begriff von "Isomorphie".

5.1.10 Definition. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, und $F\colon M \to N$. Dann heißt F ein C^1-***Diffeomorphismus***, wenn F bijektiv ist und F und F^{-1} beide stetig differenzierbar sind.

5.1.11 Bemerkung. Sind M und N ***diffeomorph*** d.h., gibt es einen Diffeomorphismus von M auf N, so müssen M und N die gleiche Dimension haben. Dies gilt, da für einen Diffeomorphismus F und je zwei Karten φ und ψ gilt, dass

$$\mathrm{d}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \cdot \mathrm{d}(\varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}) = \mathrm{id}.$$

5.1.12 Lemma. *Sei $\big\langle \langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{A}\big\rangle$ eine Mannigfaltigkeit, N eine Menge, und $F\colon M \to N$ eine bijektive Funktion.*
Dann existiert eine Topologie $\mathcal{V}$ auf N und ein Atlas $\mathcal{B}$ auf N, sodass F ein Diffeomorphismus von $\big\langle \langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{A}\big\rangle$ auf $\big\langle \langle N, \mathcal{V}\rangle, \mathcal{B}\big\rangle$ ist.

Beweis. Setze

$$\mathcal{V} := \{F(O) \mid O \subseteq M \text{ offen }\}.$$

Das ist eine Topologie auf N (tatsächlich gleich die initiale Topologie bzgl. $\{F^{-1}\}$ und auch gleich der finalen Topologie bzgl. $\{F\}$), und F ist ein Homöomorphismus von $\langle M, \mathcal{T}\rangle$ auf $\langle N, \mathcal{V}\rangle$.
Nun setze

$$\mathcal{B} := \Big\{\big(F(U), \varphi \circ (F|_U)^{-1}\big) \,\Big|\, (U, \varphi) \in \mathcal{A}\Big\}.$$

Jedes Paar $\big(F(U), \varphi\circ(F|_U)^{-1}\big)$ ist eine Karte auf M, und die Kartenmengen $F(U)$ überdecken gemeinsam ganz $F(M)$. Die Kartenwechsel dieser Karten sind gleich jenen der Karten aus $\mathcal{A}$:

$$\big(\psi\circ(F|_V)^{-1}\big)\circ\big(\varphi\circ(F|_U)^{-1}\big)^{-1} = \psi\circ\varphi^{-1},$$

also stetig differenzierbar (*da per def. Kartenwechsel stetig differenzierbar sind*). Daher ist $\mathcal{B}$ ein Atlas von M.
Schließlich gilt stets

$$\big(\varphi\circ(F|_U)^{-1}\big)\circ F\circ\varphi^{-1} = \mathrm{id},$$
$$\varphi\circ F^{-1}\circ\big(\varphi\circ(F|_U)^{-1}\big)^{-1} = \mathrm{id},$$

also sind F und F^{-1} stetig differenzierbar. □

5.1.13 Bemerkung. Man kann die gleichen Definitionen machen und dabei C^1 durch C^k, C^∞, stetig, etc. ersetzen. Dann bekommt man analoge Begriffe von ***C^k-Mannigfaltigkeit***, ***C^∞-Mannigfaltigkeit***, ***topologische Mannigfaltigkeit***, oder ähnliches.

Die folgende Aussage ist ein äußerst tiefliegender Satz, den wir hier **nicht beweisen** können - und daher auch nicht verwenden werden. Er sei trotzdem formuliert um das Gesamtbild richtig darzustellen.

5.1.14 Satz. *Sei $\big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{A}\big\rangle$ eine C^1-Mannigfaltigkeit. Dann existiert ein C^∞-Atlas $\mathcal{B}$ auf M sodass*

$$\mathrm{id}\colon \big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{A}\big\rangle \to \big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{B}\big\rangle,$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist.
Für je zwei solche C^∞-Atlanten $\mathcal{B},\mathcal{B}'$, ist

$$\mathrm{id}\colon \big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{B}\big\rangle \to \big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{B}'\big\rangle$$

ein C^∞-Diffeomorphismus.

Beweis. ohne Beweis. □

5.1.15 Beispiel. Ein (triviales) Beispiel einer Mannigfaltigkeit ist durch eine offene Teilmenge M der $\mathbb{R}^d$. Nämlich ist das Paar $(M,\subseteq)$, wobei $\subseteq\colon M\to\mathbb{R}^d$ die Inklusionsabbildung ist, eine Karte, und $\{(M,\subseteq)\}$ ein Atlas.

5.1.16 Beispiel. Sei $M\subseteq\mathbb{R}^3$ die Oberfläche der Einheitskugel d.h.,

$$M := \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1\right\}.$$

Bezeichne, für $j\in\{1,2,3\}$,

$$U_{j,+} := \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\in M \;\middle|\; \alpha_j>0\right\},\quad U_{j,-} := \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\in M \;\middle|\; \alpha_j<0\right\}.$$

Dann sind $U_{j,\pm}$ offene Teilmengen von M. Seien $\varphi_{j,\pm}: U_{j,\pm} \to \mathbb{R}^2$ die Projektionen von $U_{j,\pm}$ auf die Koordinaten die $\neq j$ sind z.B., also

$$\varphi_{1,-}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\varphi_{j,\pm}$ stetig, und $\varphi_{j,\pm}(U_{j,\pm}) = \mathbb{D}$, wobei $\mathbb{D}$ die offene Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.
Die Funktionen $\varphi_{j,\pm}$ sind bijektiv und ihre Inverse lässt sich explizit hinschreiben z.B., ist

$$\varphi_{1,-}^{-1}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix}-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind die $\varphi_{j,\pm}^{-1}$ stetig, also $\varphi_{j,\pm}$ ein Homöomorphismus.
Die Paare $(U_{j,\pm}, \varphi_{j,\pm})$ sind also Karten auf M.
Die Menge

$$\mathcal{A} \coloneqq \big\{(U_{j,\sigma}, \varphi_{j,\sigma}) \,\big|\, j \in \{1,2,3\}, \sigma \in \{+,-\}\big\},$$

ist ein Atlas. Denn zunächst gilt offenbar

$$M = \bigcup_{\substack{j\in\{1,2,3\}\\ \sigma\in\{+,-\}}} U_{j,\sigma},$$

und die Kartenwechsel lassen sich auch explizit hinschreiben z.B., ist

$$\begin{aligned} U_{1,-} \cap U_{2,+} &= \left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} \in M \;\middle|\; \alpha_1 < 0, \alpha_2 > 0\right\},\\ \varphi_{1,-}(U_{1,-} \cap U_{2,+}) &= \left\{\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \in \mathbb{D} \;\middle|\; \xi > 0\right\},\\ (\varphi_{2,+} \circ \varphi_{1,-}^{-1})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}\\ \eta\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Anm.: Man erhält so insgesamt 6 *Karten von Halbkugeln - obere, untere, linke, rechte, vordere, hintere - und deckt so die ganze Kugel ab.*

Die Vorgangsweise vom letzten Beispiel lässt sich auch viel allgemeiner durchführen. Man spricht von ***implizit definierten Mannigfaltigkeiten***.

5.1.17 Beispiel. Seinen $n, d \in \mathbb{N}$, $1 \le d < n$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und sei $F: D \to \mathbb{R}^{n-d}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit

$$\forall x \in D: \mathrm{d}F(x) \text{ surjektiv.}$$

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachte das ***Level set***

$$M \coloneqq \{x \in D \mid F(x) = \alpha\}.$$

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass M in ganz natürlicher Weise zu einer Mannigfaltigkeit gemacht werden kann.

$\triangleright$ **Die Topologie:** Es ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$, und wir versehen M mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^n$.
$\triangleright$ **Konstruktion von Karten:** Sei $x \in M$. Da $\mathrm{d}F(x)$ surjektiv ist, finden wir $n-d$ Spalten von $\mathrm{d}F(x)$ die linear unabhängig sind; seien jene mit Spaltenindizes

$$1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-d} \le n$$

solche. Bezeichne mit

$$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_d \le n$$

die Spaltenindizes der restlichen d Spalten.
Schreibe $x = (\xi_l)_{l=1}^n$, und setze

$$a := (\xi_{j_l})_{l=1}^{n-d}, \quad b := (\xi_{i_l})_{l=1}^{d}.$$

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen existieren offen Umgebungen

$$V \in \mathfrak{U}^{\mathbb{R}^{n-d}}(a), \quad W \in \mathfrak{U}^{\mathbb{R}^d}(b),$$

und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon W \to V$, sodass für die im $\mathbb{R}^n$ offene Menge

$$O := \{(\eta_l)_{l=1}^n \in \mathbb{R}^n \mid (\eta_{j_l})_{l=1}^{n-d} \in V,\ (\eta_{i_l})_{l=1}^d \in W\},$$

gilt

$$M \cap O = \Big\{(\eta_l)_{l=1}^n \in \mathbb{R}^n \mid (\eta_{i_l})_{l=1}^d \in W,\ (\eta_{j_l})_{l=1}^{n-d} = g\big((\eta_{i_l})_{l=1}^d\big)\Big\}.$$

Setze nun $U_x := M \cap O$

$$\pi_x\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}^d \\ (\eta_l)_{l=1}^n & \mapsto (\eta_{i_l})_{l=1}^d \end{cases}, \varphi_x\colon \pi_x|_{U_x}.$$

Es ist U_x offen in M und $\varphi_x(U_x) = W$ offen im $\mathbb{R}^d$ Die Projektion π_x ist stetig, und damit ist auch φ_x stetig.
Die Funktion $\psi_x\colon W \to U_x$ die definiert ist durch

$$\Big(\big[\psi_x\big((\eta_{i_l})_{l=1}^d\big)\big]_{i_k}\Big)_{k=1}^d = (\eta_{i_l})_{l=1}^d,$$
$$\Big(\big[\psi_x\big((\eta_{i_l})_{l=1}^d\big)\big]_{j_k}\Big)_{k=1}^{n-d} = g\big((\eta_{i_l})_{l=1}^d\big),$$

ist stetig differenzierbar, und

$$\varphi_x \circ \psi_x = \mathrm{id}_W, \quad \psi_x \circ \varphi_x = \mathrm{id}_{U_x}.$$

Also ist φ_x bijektiv mit - insbesondere - stetiger Inversen. Wir sehen, dass jedes Paar (U_x, φ_x) eine Karte von M ist.
$\triangleright$ **Der Atlas:** Wir betrachten die Gesamtheit aller oben konstruierten Karten

$$\mathcal{A} := \{(U_x, \varphi_x) \mid x \in M\}.$$

Zunächst gilt, wegen $x \in U_x$ für alle $x \in M$, dass

$$M = \bigcup \{ U_x \mid x \in M \}.$$

Sind $x, y \in M$ mit $U_x \cap U_y \neq \varnothing$. Der Kartenwechsel ist gegeben als

$$\varphi_x \circ \varphi_y^{-1} = \pi_x \circ \psi_y,$$

und ist daher stetig differenzierbar. Wir sehen, dass $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M ist.

Jede Mannigfaltigkeit hat gewisse "gute" topologische Eigenschaften.

5.1.18 Definition. Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum. Dann heißt $\langle X, \mathcal{T} \rangle$

(i) ***lokalkompakt***, wenn jeder Punkt von X eine kompakte Umgebung besitzt.

(ii) σ-***kompakt***, wenn sich X als höchstens abzählbare Vereinigung kompakter Mengen schreiben lässt.

5.1.19 Lemma. *Jede Mannigfaltigkeit ist lokalkompakt.*

Beweis. Sei M eine Mannigfaltigkeit, und $x \in M$. Wähle eine Karte (U, φ) von M mit $x \in U$, und wähle $r > 0$ sodass

$$\overline{U_r\big(\varphi(x)\big)} \subseteq \varphi(U).$$

Nun ist $\varphi: U \to \varphi(U)$ ein Homöomorphismus. Also ist

$$\varphi^{-1}\Big(\overline{U_r\big(\varphi(x)\big)}\Big)$$

eine kompakte Umgebung von x. □

5.1.20 Lemma. *Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum der lokalkompakt ist und das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann ist $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ σ-kompakt.*
Insbesondere ist jede Mannigfaltigkeit σ-kompakt.

Beweis. Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ eine höchstens abzählbare Basis. Zu $x \in X$ wähle eine kompakte Umgebung K_x von x. Dann wähle $O_x \in \mathcal{V}$ mit $x \in O_x \subseteq K_x$.
Die Menge

$$\mathcal{W} := \{ O_x \mid x \in X \},$$

ist höchstens abzählbar, und für jedes $W \in \mathcal{W}$ ist

$$\{ K \subseteq X \mid K \text{ kompakt}, W \subseteq K \} \neq \varnothing.$$

Wähle eine Funktion

$$\varphi: \mathcal{W} \to \{ K \subseteq X \mid K \text{ kompakt} \},$$

sodass für jedes $W \in \mathcal{W}$ gilt $W \subseteq \varphi(W)$. Dann ist $\varphi(\mathcal{W})$ höchstens abzählbar, und

$$X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subseteq \bigcup \mathcal{W} \subseteq \bigcup \varphi(\mathcal{W}) \subseteq X,$$

also $X = \bigcup \varphi(\mathcal{W})$. □

5.2 Eingebettete Mannigfaltigkeiten

5.2.1 Definition. Seien M und N Mannigfaltigkeiten und $F\colon M \to N$. Dann heißt F eine ***Einbettung***, wenn

▷ F ist stetig differenzierbar,

▷ für je zwei Karten (U, φ) von M und (V, ψ) von N und jeden Punkt $a \in \varphi\big(U \cap F^{-1}(V)\big)$ ist

$$\mathrm{d}(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(a) \text{ injektiv },$$

▷ F ist ein Homöomorphismus von M auf $F(M)$ versehen mit der Spurtopologie von N.

Offenbar gilt

(i) id ist eine Einbettung,

(ii) jeder Diffeomorphismus ist eine Einbettung,

(iii) Sind F, G Einbettungen, so ist auch $G \circ F$ Einbettung.

5.2.2 Lemma. *Seien M, N zwei Mannigfaltigkeiten der gleichen Dimension, und $F\colon M \to N$ bijektiv und eine Einbettung. Dann ist F ein Diffeomorphismus.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass F^{-1} stetig differenzierbar ist. Da wir voraussetzen, dass M und N gleiche Dimension haben, folgt mit dem Satz von der inversen Funktion, dass

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ F^{-1} \circ \psi^{-1}$$

stetig differenzierbar ist. □

5.2.3 Bemerkung. Seien M, N Mannigfaltigkeiten, und $F\colon M \to N$ Einbettung. Betrachte die Menge $F(M)$ als Mannigfaltigkeit mit der von F geerbten Struktur d.h., mit der Topologie

$$\{F(O) \mid O \subseteq M \text{ offen}\},$$

und dem Atlas

$$\Big\{\big(F(U), \varphi \circ (F|_U)^{-1}\big) \,\Big|\, (U, \varphi) \text{ Karte von M}\Big\}.$$

Dann ist F ein Diffeomorphismus von M auf $F(M)$, und die Inklusionsabbildung $\subseteq\colon F(M) \to N$ ist eine Einbettung.
Betrachtet man die Menge aller Mannigfaltigkeiten M die in einer festgehaltenen Mannigfaltigkeit N eingebettet sind, und denkt man modulo Diffeomorphismen, so genügt es also solche Mannigfaltigkeiten M zu betrachten wo $M \subseteq N$ und $\subseteq\colon M \to N$ eine Einbettung ist.

Die folgende Aussage ist ein äußerst tiefliegender Satz, den wir hier **nicht beweisen** können - und daher auch nicht verwenden werden. Wir wollen ihn trotzdem formulieren, denn er motiviert warum wir uns im folgenden auf das Studium spezieller Mannigfaltigkeiten einschränken.

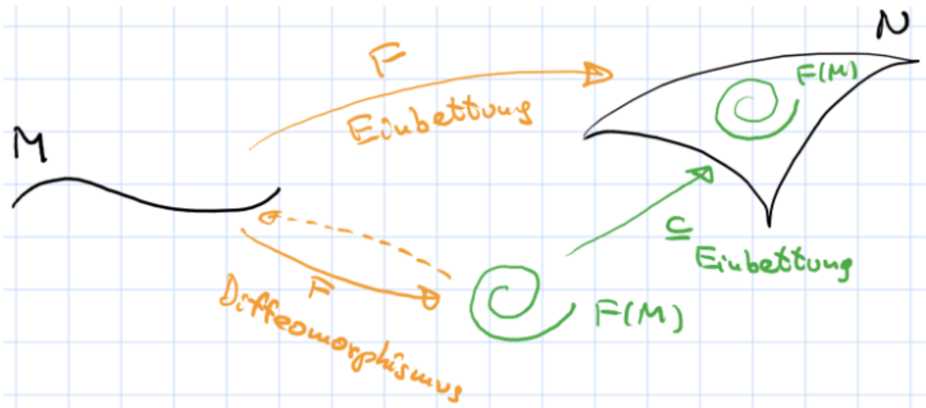


Abbildung 5.3: Illustration der in 5.2.3 aufgezeigten Strukturen.

5.2.4 Satz (Whitney)**.** *Sei M eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine Einbettung von M in den $\mathbb{R}^{2d}$ (betrachtet als $2d$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit dem Atlas $\{(\mathbb{R}^{2d}, \mathrm{id})\}$).*

5.2.5 Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Dann heißt M ***eingebettete Mannigfaltigkeit***, wenn es $p \in \mathbb{N}$ gibt sodass

- ▹ $M \subseteq \mathbb{R}^p$,
- ▹ $\subseteq: M \to \mathbb{R}^p$ ist Einbettung.

Betrachtet man eingebettete Mannigfaltigkeiten, so hat dies den

- ▹ Vorteil, dass man das Instrumentarium des Umgebungsraumes $\mathbb{R}^p$ zur Verfügung hat,
- ▹ Nachteil, dass die konzeptuelle Klarheit der Unterscheidung von intrinsischen geometrischen Größen einerseits, und vom Umgebungsraum kommenden extrinsischen Größen andererseits, verwaschen sind.

5.2.6 Beispiel. Wir betrachten eine implizit definierte Mannigfaltigkeit. Sei also $1 \le d < n$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F: D \to \mathbb{R}^{n-d}$ stetig differenzierbar sodass $\mathrm{d}F$ stets surjektiv ist, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei

$$M \coloneqq \{x \in D \mid F(x) = \alpha\}$$

versehen mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^n$ und dem im vorangegangenen Beispiel konstruierten Atlas. Sei $\iota: M \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung. Da M die Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$ trägt, ist ι ein Homöomorphismus von M auf $\iota(M)$. Er ist $\mathrm{id} \circ \iota \circ \varphi_x^{-1} = \psi_x$ und daher stetig differenzierbar. Also ist ι stetig differenzierbar. Weiters gilt $\mathrm{id} = \pi_x \circ \psi_x$, und daher $I = \mathrm{d}\pi_x \cdot \mathrm{d}\psi_x$. Also ist $\mathrm{d}\psi_x$ stets injektiv, und daher ι eine Einbettung.

Eine eingebettete Mannigfaltigkeit hat lokal immer die Gestalt einer implizit definierten Mannigfaltigkeit.

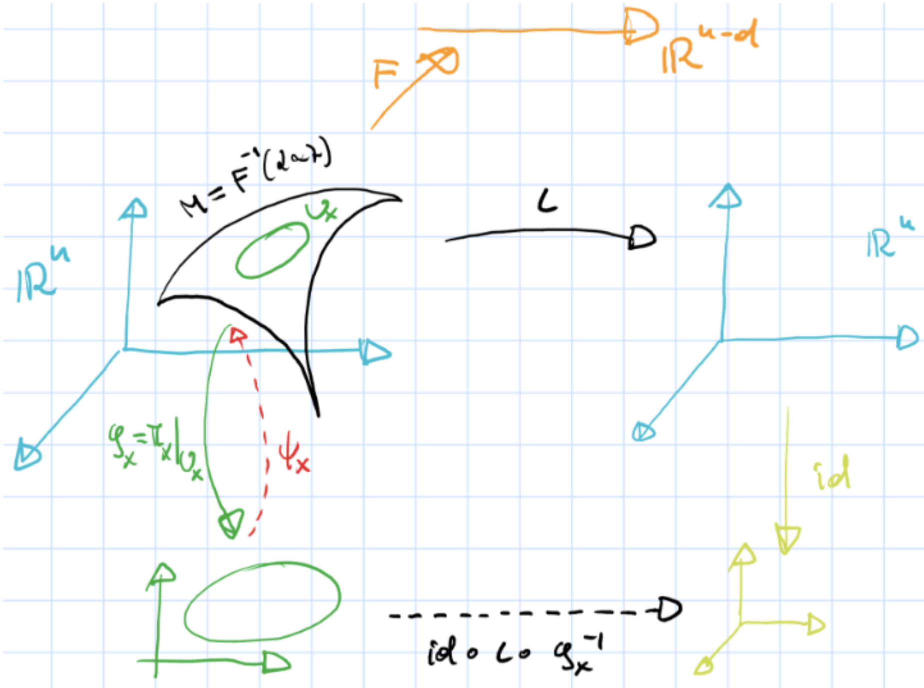


Abbildung 5.4: Illustration von 5.2.6 Beispiel.

5.2.7 Satz. *Sei $1 \leq d < n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine eingebettete d-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann existiert für jedes $x \in M$ eine offene Menge $D_x \in \mathfrak{U}^{\mathbb{R}^n}(x)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $F\colon D_x \to \mathbb{R}^{n-d}$ für die $\mathrm{d}F$ stets surjektiv ist, sodass*

$$M \cap D_x = \{x \in D_x \mid F(x) = 0\}.$$

Die Gleichheit meint, das id_M ein Diffeomorphismus ist (linke Seite: offene Teilmenge von M; rechte Seite: implizite Mannigfaltigkeit).

Wir zeigen sogar einen etwas spezifischeren Satz.

5.2.8 Satz. *Sei $1 \leq d < n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit, $x \in M$, und (U, φ) eine Karte von M mit $x \in U$. Dann existieren*

$$D_x \in \mathfrak{U}^{\mathbb{R}^n}(x) \text{ offen}, \; E_x \in \mathfrak{U}^{\mathbb{R}^n}\left(\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ 0\end{pmatrix}\right) \text{ offen}, \; \Phi\colon D_x \to E_x,$$

sodass

(i) Φ ist Diffeomorphismus von D_x auf E_x,

(ii) $M \cap D_x \subseteq U$,

(iii) $\pi \circ \Phi|_{D_x \cap M} = \varphi|_{D_x \cap M}$ wobei $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ die Projektion auf die ersten d Koordinaten ist,

(iv) $M \cap D_x = (\tilde{\pi} \circ \Phi)^{-1}(\{0\})$ wobei $\tilde{\pi}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ die Projektion auf die letzten $n-d$ Koordinaten ist.

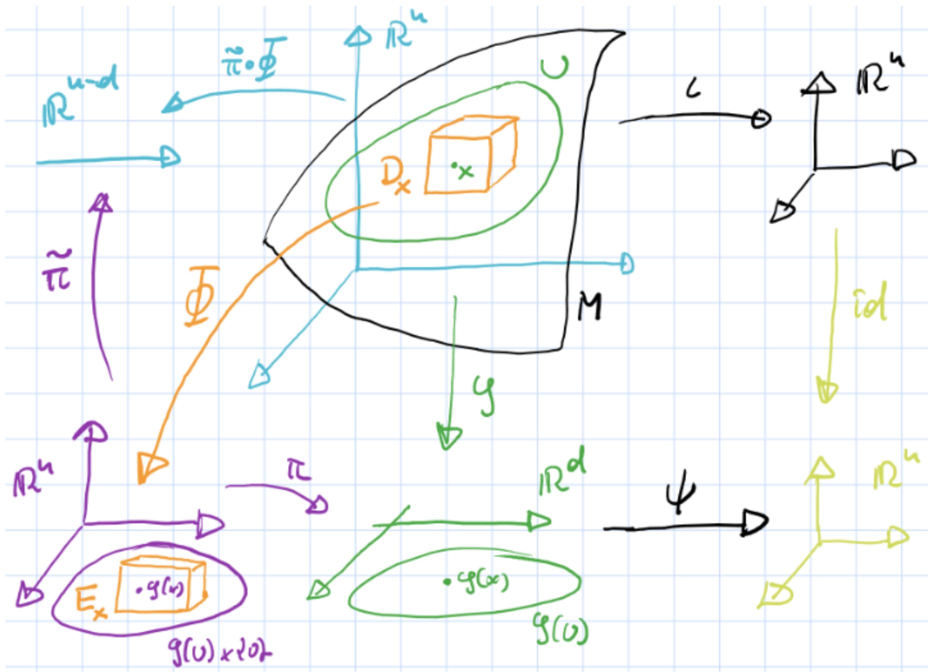


Abbildung 5.5: Illustration des Settings im 5.2.8 Satz. Dabei ist $\iota\colon M \to \mathbb{R}^n$ die Inklusionsabbildung, und $\psi \coloneqq \mathrm{id} \circ \iota \circ \varphi^{-1}$.

Beweis. (Siehe auch Abb. 5.5.)
Da ι eine Einbettung ist, wissen wir, dass $\mathrm{d}\psi\big(\varphi(x)\big)$ injektiv ist. Bezeichne die Spalten von $\mathrm{d}\psi\big(\varphi(x)\big)$ als $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^n$ d.h.,

$$\mathrm{d}\psi\big(\varphi(x)\big) = \left(a_1 \,\middle|\, a_2 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_d\right) \quad [n \times d\text{-Matrix}].$$

Dann sind $a_1, \dots, a_d$ linear unabhängig. Wähle Vektoren $a_{d+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ sodass $\{a_1, \dots, a_n\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist und definiere

$$\Psi\colon \begin{cases} \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d} & \to \mathbb{R}^n, \\ (\eta_l)_{l=1}^n & \mapsto \psi\big((\eta_l)_{l=1}^d\big) + \sum_{l=d+1}^n \eta_l a_l. \end{cases}$$

Dann ist Ψ stetig differenzierbar, und es gilt

$$\forall y \in U\colon \Psi\left(\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \psi\big(\varphi(y)\big) = y.$$

Weiters haben wir

$$\mathrm{d}\Psi\left(\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left(a_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_d \,\middle|\, a_{d+1} \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_n\right) \quad [n \times n\text{-Matrix}]$$

und diese Matrix ist invertierbar.
Nach dem Satz von den inversen Funktionen gibt es

$$V \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}\left(\begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ offen},\ V \subseteq \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d},\ W \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}(x) \text{ offen},$$

sodass $\Psi|_V$ ein Diffeomorphismus von V auf W ist.

Die gesuchte Funktion Φ agiert nun wie $(\Psi|_V)^{-1}$. Wir müssen nur noch ihren Definitionsbereich geeignet einschränken um die gewünschten Eigenschaften zu erhalten.
Da U offen in M ist, gibt es $O \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $U = M \cap O$. Setze nun

$$D_x \coloneqq W \cap O, \quad E_x \coloneqq (\Psi|_V)^{-1}(D_x), \quad \Phi \coloneqq (\Psi|_V)^{-1}|_{D_x}.$$

Dann ist $D_x \in \mathcal{U}^{\mathbb{R}^n}(x)$ offen, $E_x \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und Φ ein Diffeomorphismus von D_x auf E_x. Weiters gilt $M \cap D_x \subseteq M \cap O = U$.
Sei nun $y \in M \cap D_x$. Dann ist, wie oben schon festgestellt,

$$\Psi\left(\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ 0 \end{pmatrix}\right) = y$$

und daher

$$\begin{pmatrix} \varphi(y) \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(y),$$

d.h. $(\pi \circ \Phi)(y) = \varphi(y)$ und $(\tilde{\pi} \circ \Phi)(y) = 0$.

Schließlich sei $y \in D_x$ mit $(\tilde{\pi} \circ \Phi)(y) = 0$ gegeben.
Dann ist also

$$\Phi(y) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit einem gewissen } a \in \mathbb{R}^d.$$

Wegen $\operatorname{ran}\Phi \subseteq \operatorname{dom}\Psi = \varphi(U) \times \mathbb{R}^{n-d}$, finden wir $z \in U$ sodass $a = \varphi(z)$. Es folgt

$$y = \Psi\big(\Phi(y)\big) = \Psi\begin{pmatrix} \varphi(z) \\ 0 \end{pmatrix} = \psi\big(\varphi(z)\big) = z,$$

insbesondere ist $y \in U \subseteq M$. ☐

Der als erstes formulierte Satz folgt tatsächlich mit Hilfe des gerade bewiesenen. Zunächst ist

$$\mathrm{d}(\tilde{\pi} \circ \Phi) = \tilde{\pi} \cdot \mathrm{d}\Phi$$

stets surjektiv, also die Darstellung "$M \cap D_x = (\tilde{\pi} \circ \Phi)^{-1}(\{0\})$" eine lokale Darstellung der Menge M als implizite Mannigfaltigkeit. Um zu sehen, dass die Gleichheit sogar als Gleichheit von Mannigfaltigkeiten besteht, bemerke, dass einerseits jede offene Teilmenge einer eingebetteten Mannigfaltigkeit selbst auch eingebettete Mannigfaltigkeit ist (der Atlas ist $\{(U \cap D_x, \varphi|_{D_x} \mid (U, \varphi) \text{ Karte von } M\})$ und, dass wir andererseits gezeigt haben, dass eine implizit definierte Mannigfaltigkeit (mit den Karten aus dem Hauptsatz über implizite Funktionen) eine eingebettete Mannigfaltigkeit ist. Nun gilt das folgende Lemma.

5.2.9 Lemma. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}$ die Spurtopologie auf M von $\mathbb{R}^n$, und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Atlanten auf $\langle M, \mathcal{T}\rangle$ sodass die Inklusionsabbildung $\subseteq : M \to \mathbb{R}^n$ für beide eine Einbettung ist*

$$\big\langle \langle M, \mathcal{T}\rangle, \mathcal{A}\big\rangle \xrightarrow[\subseteq]{\text{Einbettung}} \mathbb{R}^n,$$
$$\big\langle \langle M, \mathcal{T}\rangle\big\rangle, \mathcal{B}\big\rangle \xrightarrow[\subseteq]{\text{Einbettung}} \mathbb{R}^n$$

Dann ist id_M *ein Diffeomorphismus von* $\big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{A}\big\rangle$ *auf* $\big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{B}\big\rangle$.

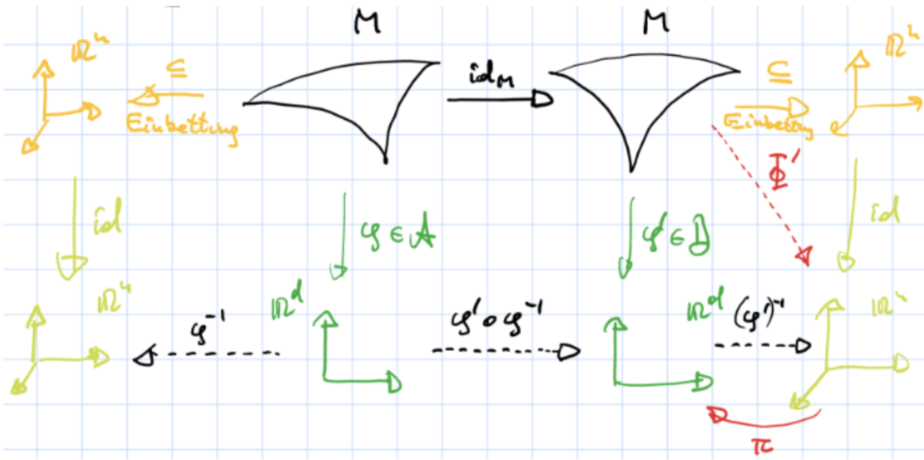


Abbildung 5.6: Illustration der Struktur in 5.2.9 Lemma.

Beweis. Nach dem bewiesenen Satz finden wir einen Diffeomorphismus Φ' mit $\varphi' = \pi \circ \Phi$ (auf geeigneten kleinen offenen Mengen).
Also ist

$$\varphi' \circ \varphi^{-1} = \pi \circ \Phi \circ \varphi^{-1},$$

und π, Φ, φ^{-1} sind alle stetig differenzierbar.
Also ist $\mathrm{id}_M\colon \big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{A}\big\rangle \to \big\langle\langle M,\mathcal{T}\rangle,\mathcal{B}\big\rangle$ stetig differenzierbar. Das gleiche Argument funktioniert mit den Rollen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ vertauscht. □

Als Folgerung können wir zeigen, dass eine eingebettete Mannigfaltigkeit deren Dimension kleiner als die des umgebenden Raumes ist, auch im maßtheoretischen Sinne klein ist.

5.2.10 Korollar. *Sei* $1 \le d < n$ *und* $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine eingebettete* d*-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann ist* M *eine Borel-Teilmenge des* $\mathbb{R}^n$*, und hat Lebesgue-Maß Null.*

Beweis. Jede Mannigfaltigkeit ist σ-kompakt. Da Kompaktheit in der Spurtopologie äquivalent ist mit Kompaktheit im umgebenden Raum, ist also M eine abzählbare Vereinigung von in $\mathbb{R}^n$ kompakten, und daher abgeschlossenen Mengen. Insbesondere ist M eine Borelmenge.
Sei nun $x \in M$ festgehalten, wähle eine Karte (U,φ) von M mit $x \in U$, und D_x, E_x, Φ wie im Satz. Wir haben

$$\lambda(M \cap D_x) = \lambda\Big(\Phi^{-1}\big(E_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})\big)\Big) = \lambda^{\Phi}\big(E_x \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})\big).$$

Nach der Transformationsformel ist $\lambda^\Phi \ll \lambda$. Da $d < n$ ist, haben wir $\lambda(\mathbb{R}^d \times \{0\}) = 0$. Nach dem Lemma von Lindelöf können wir M mit abzählbar vielen der Mengen $M \cap D_x$ überdecken, und erhalten somit $\lambda(M) = 0$. □

5.3 Das Oberflächenmaß

Wir wollen auf einer Mannigfaltigkeit ein Maß definieren, dass dem anschaulichen Begriff der Oberfläche Sinn gibt. Die Idee dabei ist (wie immer in der Theorie der Mannigfaltigkeiten), dass man sich mittels der Karten in den euklidischen Raum zurückzieht, wo man einen natürlichen Inhaltsbegriff hat - nämlich das Lebesgue-Maß. Natürlich muss man dabei aufpassen, dass die "Größe der Oberfläche" eines Stückes der Mannigfaltigkeit nicht davon abhängt, mittels welcher speziellen Karte man es berechnet. Wie immer in der Theorie der Mannigfaltigkeiten kann ein Begriff nur dann eine wahre geometrische Größe sein, wenn er unabhängig von der Wahl der Karte ist.

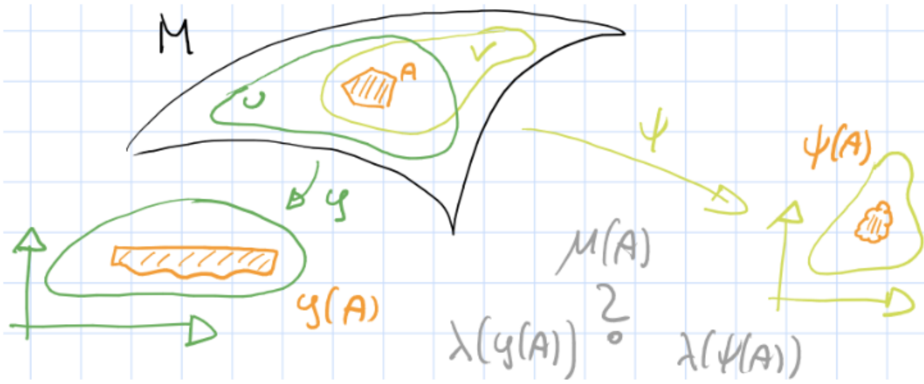


Abbildung 5.7: Veranschaulichung der Motivation und Anforderungen an ein Oberflächenmaß. Hier bezeichnet $\lambda(\varphi(A))$ resp. $\lambda(\psi(A))$ das Lebesgue-Maß der Menge in der jeweiligen Mannigfaltigkeit.

Die entscheidende Feststellung ist, dass man mit Hilfe der Transformationsformel eine geometrische Invariante wie folgt findet.

5.3.1 Lemma. *Sei $d \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Seien weiters (U_i, φ_i) und (U_j, φ_j) zwei Karten von M mit $U_{ij} := U_i \cap U_j \neq \emptyset$, und sei A eine Borelmenge von M mit $A \subseteq U_{ij}$. Schließlich bezeichne $\psi_i := \varphi_i^{-1}$ und $\psi_j := \varphi_j^{-1}$. Dann gilt*

$$\int_{\varphi_i(A)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\psi_i)}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi_j(A)} \sqrt{\det\big(\mathrm{d}\psi_j^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\psi_j\big)}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Beweis. Sei φ_{ij} der Kartenwechsel $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Dann ist φ_{ij} ein Diffeomorphismus, nämlich mit $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$. Wir erhalten $\psi_j \circ \varphi_{ij} = \psi_i$, und daher

$$\mathrm{d}\psi_i = [(\mathrm{d}\psi_j) \circ \varphi_{ij}] \cdot \mathrm{d}\varphi_{ij}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\det\big(\mathrm{d}\psi_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\psi_i\big) &= \det\Big((\mathrm{d}\varphi_{ij})^{\mathrm{T}} \cdot [(\mathrm{d}\psi_j) \circ \varphi_{ij}]^{\mathrm{T}} \cdot [(\mathrm{d}\psi_j) \circ \varphi_{ij}] \cdot (\mathrm{d}\varphi_{ij})\Big) \\
&= \det(\mathrm{d}\varphi_{ij})^{\mathrm{T}} \cdot \det\Big([(\mathrm{d}\psi_j) \circ \varphi_{ij}]^{\mathrm{T}} \cdot [(\mathrm{d}\psi_j \circ \varphi_{ij})]\Big) \cdot \det(\mathrm{d}\varphi_{ij}) \\
&= \det\Big([(\mathrm{d}\psi_j) \circ \varphi_{ij}]^{\mathrm{T}} \cdot [(\mathrm{d}\psi_j) \circ \varphi_{ij}]\Big) \cdot \Big(\det(\mathrm{d}\varphi_{ij})\Big)^2.
\end{aligned}$$

Weiters haben wir $\varphi_{ij}\big(\varphi_i(A)\big) = \varphi_j(A)$. Die Transformationsformel zeigt nun

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\varphi_j(A)} \sqrt{\det\big(\mathrm{d}\psi_j^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi_j\big)}\mathrm{d}\lambda = \\
&= \int\limits_{\varphi_i(A)} \sqrt{\det\left([(\mathrm{d}\psi_j)\circ\varphi_{ij}]^{\mathrm{T}}\cdot[(\mathrm{d}\psi_j)\circ\varphi_{ij}]\right)}|\det\varphi_{ij}|\mathrm{d}\lambda \\
&= \int\limits_{\varphi_i(A)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_i^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi_i)}\mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

□

Hat man eine beliebige Borelmenge A von M gegeben, so muss man diese geeignet zerstückeln, die "Oberfläche" der einzelnen kleinen Teile berechnen, und wieder zusammensetzen. Die Existenz einer "geeigneten Zerstückelung" liegt daran, dass man das zweite Abzählbarkeitsaxiom hat.

5.3.2 Lemma. *Sei $d \leq n$, und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine höchstens abzählbare Partition $\mathcal{Q}$ von M, sodass für alle $B \in \mathcal{Q}$ gilt:*

- ▷ *B ist Borelmenge von M,*
- ▷ *es gibt eine Karte (U_B, φ_B) von M mit*

$$B \subseteq U_B, \quad \mathrm{Clos}_{\mathbb{R}^d}\varphi_B(B) \subseteq \varphi_B(U_B),$$

- ▷ $\mathrm{Clos}_{\mathbb{R}^d}\varphi_B(B)$ *ist kompakt.*
- ▷ *Jede kompakte Teilmenge von M läßt sich durch endlich viele Mengen aus $\mathcal{Q}$ überdecken.*

Beweis. Für $x \in M$ wähle eine Karte (U_x, φ_x) von M mit $x \in U_x$. Dann wähle $r_x > 0$ sodass

$$\overline{U_{r_x}\big(\varphi_x(x)\big)} \subseteq \varphi_x(U_x).$$

Die Familie $\left\{\varphi_x^{-1}\left(U_{r_x}\big(\varphi_x(x)\big)\right) \,\middle|\, x \in M\right\}$ ist eine offen Überdeckung von M. Nach dem Lemma von Lindelöf finden wir $x_1, x_2, \ldots \in M$ sodass

$$M = \bigcup_{l=1,2,\ldots} \varphi_{x_l}^{-1}\left(U_{r_{x_l}}\big(\varphi_{x_l}(x_l)\big)\right).$$

Nun setze $\mathcal{Q} \coloneqq \{B_l \mid l = 1, 2, \ldots\}$ wobei induktiv

$$B_l \coloneqq \varphi_{x_l}^{-1}\left(U_{r_{x_l}}\big(\varphi_{x_l}(x_l)\big)\right) \setminus \bigcup_{k<l} B_k.$$

□

5.3.3 Definition. Sei $d \leq n$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit. Wähle eine Partition $\mathfrak{Q}$ wie im letzten Lemma, wähle zu jedem $B \in \mathfrak{Q}$ eine Karte (U_B, φ_B) von M mit $B \subseteq U_B$, und setze $\psi_B := \varphi_B^{-1}$. Nun definiere, für eine Borelmenge A in M,

$$\mu(A) := \sum_{B \in \mathfrak{Q}} \int_{\varphi_B(A \cap B)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi_B)} \mathrm{d}\lambda \in [0, \infty].$$

Die Abbildung

$$\mu\colon \text{Borel-}\sigma\text{-Algebra von } M \to [0, \infty]$$

heißt das ***Oberflächenmaß von*** M.

Man erinnere sich hier, dass ψ_B stetig differenzierbar ist, und ran $\mathrm{d}\psi_B(a) = d$ für alle $a \in \varphi_B(U_B)$ gilt. Daraus folgt, dass die Matrix

$$\mathrm{d}\psi_B(a)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{d}\psi_B(a)$$

injektiv und positiv semidefinit ist. Also hat sie nur positive Eigenwerte, es gilt stet

$$\det\big(\mathrm{d}\psi_B(a)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi_B(a)\big) > 0,$$

und diese Determinanten hängt stetig von a ab.
Weiters hat $\varphi_B(B)$ kompakten Abschluss in $\mathbb{R}^d$ und dieser liegt ganz in $\varphi_B(U_B)$. Daher ist

$$\lambda\big(\varphi_B(B)\big) < \infty, \quad \sup_{a \in \varphi_B(B)} \det\big(\mathrm{d}\psi(a)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi(a)\big) < \infty.$$

Wir sehen, dass jeder einzelne Summand in der Definition von $\mu(A)$ endlich ist.

Um obige Definition zu rechtfertigen müssen wir zeigen, dass der Wert $\mu(A)$ unabhängig von der Wahl der Partitionen und der Karten ist. Um die Wahl des Namens zu rechtfertigen, sollen wir zeigen, dass μ tatsächlich ein Maß ist.

5.3.4 Proposition. *Der Wert der obigen Summe von Integralen ist unabhängig von der Wahl von Partitionen und Karten, und die Funktion μ ist ein Maß.*

Beweis. Das $\mu(A)$ wohldefiniert ist, folgt aus dem ersten Lemma. Seien nämlich $\mathfrak{Q}$ mit (U_B, φ_B) und $\mathfrak{R}$ mit (V_C, χ_C) zwei Wahlen von Partitionen und zugehörigen Karten. Dann ist $(\psi_B := \varphi_B^{-1}, \omega_C := \chi_C^{-1})$

$$\begin{aligned}
&\sum_{B \in \mathfrak{Q}} \int_{\varphi_B(A \cap B)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi_B)} \mathrm{d}\lambda = \\
&\stackrel{1}{=} \sum_{B \in \mathfrak{Q}} \sum_{C \in \mathfrak{R}} \int_{\varphi_B(A \cap B \cap C)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi_B)} \mathrm{d}\lambda = \\
&\stackrel{2}{=} \sum_{C \in \mathfrak{R}} \sum_{B \in \mathfrak{Q}} \int_{\varphi_B(A \cap B \cap C)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi_B)} \mathrm{d}\lambda = \\
&\stackrel{3}{=} \sum_{C \in \mathfrak{R}} \sum_{B \in \mathfrak{Q}} \int_{\chi_C(A \cap B \cap C)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\omega_C^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\omega_C)} \mathrm{d}\lambda = \\
&\stackrel{1}{=} \sum_{C \in \mathfrak{R}} \int_{\chi_C(A \cap C)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\omega_C^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\omega_C)} \mathrm{d}\lambda.
\end{aligned}$$

Die Tatsache, dass μ ein Maß ist, gilt da jede einzelne Funktion

$$A \mapsto \int\limits_{\varphi_B(A\cap B)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\varphi_B^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\varphi_B)}\mathrm{d}\lambda,$$

ein Maß ist, und dieses sich mit Hilfe des Satzes von der monotonen Konvergenz auf die Summe überträgt. □

Im Folgenden Satz stellen wir einige Eigenschaften von Oberflächenmaßen zusammen.

5.3.5 Satz. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit, und μ ihr Oberflächenmaß.*
Dann gelten:

(i) Ist $O \subseteq M$ offen (in M) und nicht-leer, so ist $\mu(O) > 0$.

(ii) Ist $K \subseteq M$ kompakt, so ist $\mu(K) < \infty$. Insbesondere ist μ σ-endlich.

(iii) Ist M' eine Mannigfaltigkeit mit Dimension $d' < d$, und $F\colon M' \to M$ eine Einbettung, so ist $\mu\big(F(M')\big) = 0$.

(iv) μ ist regulär.

Beweis. ▷ **von (i):** Sei $O \subseteq M$ offen, $O \neq \emptyset$. Wähle $x \in O$, und eine Karte (U,φ) mit $x \in U$. Dann ist $\varphi(O\cap U)$ eine nicht-leere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, und hat daher positives Lebesgue-Maß. Es folgt, dass

$$\mu(O) \geq \mu(O \cap U) = \int\limits_{\varphi(O\cap U)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^T\mathrm{d}\psi_B)}\mathrm{d}\lambda > 0.$$

▷ **von (ii):** Sei $K \subseteq M$ kompakt. Dann wird K durch endlich viele der Mengen von Ω überdeckt. Da jeder einzelne Summand in der Definition von $\mu(A)$ endlich ist, ist daher auch $\mu(K)$ endlich.

▷ **von (iii):** Sei (U,φ) eine Karte von M und (U',φ') eine Karte von M'. Sei angenommen, dass $U \cap F(U') \neq \emptyset$. Betrachte die Menge

$$N := \varphi\big(U \cap F(U')\big) \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Die Funktion

$$\varphi \circ F \circ (\psi|_{F^{-1}(U)\cap U'})^{-1}\colon \psi\big(F^{-1}(U) \cap U'\big) \to N,$$

ist ein Homöomorphismus. Sei β seine Inverse. Da $\psi\big(F^{-1}(U) \cap U'\big)$ offen im $\mathbb{R}^{d'}$ ist, ist (N,β) eine Karte auf N, und $N \subseteq \mathbb{R}^d$ wird mit dem Atlas $\{(N,\beta)\}$ eine d'-dimensionale Mannigfaltigkeit. Nun ist N eine eingebettete Mannigfaltigkeit, denn die

[1] Ein Integral als Funktion des Integrationsbereiches ist σ-additiv.
[2] Der Satz von Fubini gilt für nicht-negativen Integrand (de facto “Summand”).
[3] 5.3.1 Lemma

Inklusionsabbildung $\iota\colon N \to \mathbb{R}^d$ ist homöomorph auf ihr Bild (da N die Spurtopologie trägt) und es ist

$$\iota = \left(\varphi \circ F \circ (\psi|_{F^{-1}(U)\cap U'})^{-1}\right) \circ \beta.$$

Da F eine Einbettung ist, ist $\mathrm{d}(\varphi \circ F \circ \psi^{-1})$ stets injektiv. Wir schließen wegen $d' < d$, dass

$$\lambda(N) = 0.$$

Also ist auch $\mu\big(U \cap F(U')\big) = 0$.
Da sowohl M als auch M' durch höchstens abzählbar viele Karten überdeckt werden kann folgt, dass

$$\mu\big(F(M')\big) = 0.$$

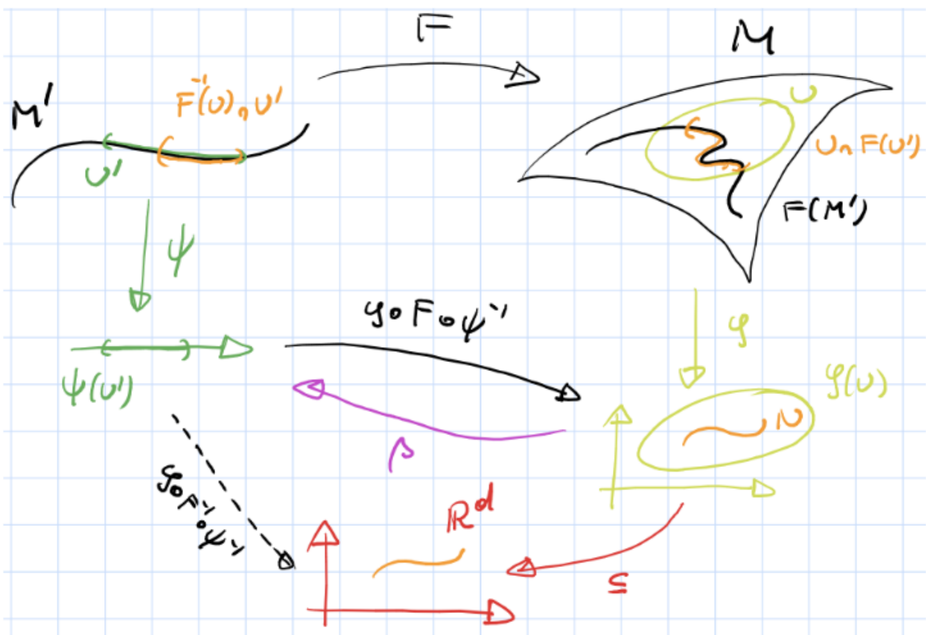


Abbildung 5.8: Illustration des Beweises von (iii) im 5.3.5 Satz.

▷ **von (iv):** Sei $\epsilon > 0$ gegeben, und wähle $\epsilon_B > 0,\ B \in \mathfrak{Q}$, mit

$$\sum_{B\in\mathfrak{Q}} \epsilon_B = \epsilon.$$

Die Menge $\varphi_B(A \cap B)$ ist eine Borelmenge in $\mathbb{R}^d$, und $\lambda\big(\varphi_B(A\cap B)\big) < \infty$. Wähle $K_B, O_B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit

$$\begin{aligned} K_B \text{ kompakt},\quad & K_B \subseteq \varphi_B(A \cap B),\\ O_B \text{ offen},\quad & \varphi_B(A\cap B) \subseteq O_B \subseteq \varphi_B(B),\\ \lambda(O_B \setminus K_B) < \epsilon_B \cdot & \left[\sup_{a\in\varphi_B(B)} \sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi_B)}\right]^{-1}. \end{aligned}$$

Dann gilt für jede endliche Teilmenge $\mathcal{Q}'$ von $\mathcal{Q}$, dass

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathcal{Q}'}\int_{O_B}&\sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi_B)}\mathrm{d}\lambda \le\\ &\le \sum_{B\in\mathcal{Q}'}\int_{\varphi_B(A\cap B)}\sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{T}\mathrm{d}\psi_B)}\mathrm{d}\lambda + \underbrace{\sum_{B\in\mathcal{Q}}\epsilon_B}_{\le\epsilon}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{B\in\mathcal{Q}'}\int_{K_B}&\sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi_B)}\mathrm{d}\lambda \ge\\ &\ge \sum_{B\in\mathcal{Q}'}\int_{\varphi_B(A\cap B)}\sqrt{\det(\mathrm{d}\psi_B^{T}\mathrm{d}\psi_B)}\mathrm{d}\lambda - \underbrace{\sum_{B\in\mathcal{Q}'}\epsilon_B}_{\le\epsilon}\end{aligned}$$

Setze

$$O := \bigcup_{B\in\mathcal{Q}}\varphi_B^{-1}(O_B),\quad K := \bigcup_{B\in\mathcal{Q}'}\varphi_B^{-1}(K_B).$$

Dann ist O offen mit $O\supseteq A$, und K kompakt mit $K\subseteq A$.
Ist $\mu(A)<\infty$, so ist

$$\begin{aligned}\mu(O) = \sup_{\substack{\mathcal{Q}'\subseteq\mathcal{Q}\\ \text{endlich}}}\;&\mu\Big(\bigcup_{B\in\mathcal{Q}'}\varphi_B^{-1}(O_B)\Big)\le\\ \le \sup_{\substack{\mathcal{Q}'\subseteq\mathcal{Q}\\ \text{endlich}}}\;&\mu\Big(A\cap\bigcup_{B\in\mathcal{Q}'}B\Big)+\epsilon = \mu(A)+\epsilon.\end{aligned}$$

Da $\epsilon>0$ beliebig war, sehen wir, dass

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O)\mid A\subseteq O \text{ offen}\}.$$

Weiters gilt

$$\mu(K)\ge\mu\Big(A\cap\bigcup_{B\in\mathcal{Q}'}B\Big)-\epsilon,$$

und daher

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup_{\substack{\mathcal{Q}'\subseteq\mathcal{Q}\\ \text{endlich}}}\mu\Big(A\cap\bigcup_{B\in\mathcal{Q}'}B\Big) =\\ &= \sup\{\mu(K)\mid K\subseteq A \text{ kompakt}\}.\end{aligned}$$

□

5.3.6 Bemerkung. Die Regularität des Borelmaßes μ folgt eigentlich in einer allgemeineren Situation aus rein topologischen Grund. Das zeigen wir in dieser Vorlesung aber nicht.

Kapitel 6

Funktionenräume

6.1 $L^1(\mathbb{R}^d)$ als Banachalgebra

6.1.1 Definition. Eine ***Banachalgebra*** ist ein Tripel $\langle X, \cdot, \|.\|\rangle$, wo $\langle X, \|.\|\rangle$ ein vollständig normierter Raum ist, und $\cdot : X \times X \to X$ eine bilineare und assoziative Abbildung ist für die

$$\forall x, y \in X : \|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

gilt.
Eine Banachalgebra heißt ***kommutativ***, wenn ihre Multiplikation "$\cdot$" kommutativ ist. Ein Element $e \in X$ heißt ***Einselement***, wenn

$$\forall x \in X : e \cdot x = x \cdot e = x$$

gilt.

6.1.2 Beispiel.

(i) Sei K kompakter Hausdorff-Raum, und sei

$$\cdot : C(K) \times C(K) \to C(K)$$

die punktweise definierte Multiplikation, d.h.,

$$(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x), \quad x \in K.$$

Dann ist $\langle C(K), \cdot, \|.\|_\infty\rangle$ eine kommutative Banachalgebra, und hat das Einselement 1.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\cdot : \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ die Matrixmultiplikation, und $\|.\|$ die Spaltensummennorm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist $\langle \mathbb{C}^{n\times n}, \cdot, \|.\|\rangle$ eine (nicht kommutative) Banachalgebra, und hat das Einselement $I_{n\times n}$.

Wir wollen nun eine binäre Operation "$*$" im $L^1(\mathbb{R}^d)$ definieren, die diesen Raum zu einer Banachalgebra macht.

6.1.3 Definition. Für $f, g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ sei $f * g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ definiert als

$$(f * g)(x) \coloneqq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}\lambda(y) & , \text{ falls } y \mapsto f(x-y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Funktion $f * g$ heißt die ***Faltung*** von f mit g.

6.1.4 Satz.

(i) Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Dann tritt für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ der erste Fall in der Definition von $f * g$ ein, und es gilt $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(ii) $\langle L^1(\mathbb{R}^d), *, \|.\|_1\rangle$ ist eine kommutative Banachalgebra.

Beweis.
▹ Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gegeben. Als Hintereinanderausführung meßbarer Funktionen, ist die Funktion $y \mapsto f(x-y)g(y)$ für jedes feste $x \in \mathbb{R}^d$ jedenfalls meßbar.

Nach dem *Satz von Fubini*, und da das Lebesuge-Maß translationsinvariant ist, gilt

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x) \\ =&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}\lambda(x)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \\ \leq&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)|\mathrm{d}\lambda(x)\right)|g(y)|\mathrm{d}\lambda(y) \\ =&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}\lambda(x)\right)|g(y)|\mathrm{d}\lambda(y) \\ =&\|f\|_1\cdot\|g\|_1<\infty \end{aligned}$$

Daher muss der Integrand im ersten Integral fast überall endlich sein. Es tritt also in der Definition von $f * g$ fast überall der erste Fall ein.
Weiters sehen wir, dass

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d}|(f*g)(x)|\mathrm{d}\lambda(x) = \\ =&\int_{\mathbb{R}^d}\left|\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)g(y)\mathrm{d}\lambda(y)\right|\mathrm{d}\lambda(x) \\ \leq&\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}|f(x-y)g(y)|\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(x) \\ \leq&\|f\|_1\cdot\|g\|_1 \end{aligned}$$

gilt. Insbesondere gehört $f * g$ zu $L^1(\mathbb{R}^d)$.

▹ Wegen der Linearität des Integrals ist die Abbildung $*: L^1(\mathbb{R}^d) \times L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$

bilinear. Sie ist auch kommutativ: Sei $x \in \mathbb{R}^d$ sodass beide Funktionen $y \mapsto f(x-y)g(y)$ und $y \mapsto g(x-y)f(y)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ liegen. Dann gilt, da λ translationsinvariant ist,

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}\lambda(y) = \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(x-z)\mathrm{d}\lambda(z) = (g * f)(x).\end{aligned}$$

Für den Beweis der Assoziativität betrachte zunächst $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $f, g, h \geq 0$. Dann gilt, wieder für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}&[(f * g) * h](x) \overset{\text{f.ü.}}{=} [h * (f * g)](x) \overset{\text{f.ü.}}{=} \\ &\int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(y-z)g(z)\mathrm{d}\lambda(z)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} h(x-y)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)g(z-x+y)\mathrm{d}\lambda(z)\right)\mathrm{d}\lambda(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-z)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(z-x+y)h(x-y)\mathrm{d}\lambda(y)\right)\mathrm{d}\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(z-y)h(y)\mathrm{d}\lambda(y)\right)f(x-z)\mathrm{d}\lambda(z) \\ &\overset{\text{f.ü.}}{=} [f * (g * h)](x).\end{aligned}$$

Sind nun $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ beliebig, so zerlege man jede dieser Funktionen in Real- und Imaginärteil und diese dann in Positiv- und Negativteil, und verwende, dass "$*$" bilinear ist. □

6.1.5 Definition. Sei $\langle X, \cdot, \|.\|\rangle$ eine Banachalgebra. Eine Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $k_n \in X$ heißt eine ***approximative Einheit*** von $\langle X, \cdot, \|.\|\rangle$, wenn

$$\begin{aligned}\forall x \in X\colon \lim_{n\to\infty} \|x - x \cdot k_n\| = 0 \,\wedge \\ \lim_{n\to\infty} \|x - k_n \cdot x\| = 0\end{aligned}$$

6.1.6 Proposition.
Sei $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^1(\mathbb{R}^d)$ mit

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\colon k_n \geq 0 \wedge \|k_n\|_1 = 1$

(ii) $\forall r > 0\colon \lim_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_r(0)} k_n\|_1 = 0$

Dann ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
▷**Fall $f \in C_{00}(\mathbb{R}^d)$:** Wähle $R > 0$ sodass $\operatorname{supp}(f) \subseteq U_R(0)$. Die Funktion f ist, als stetige Funktion mit kompaktem Träger, gleichmäßig stetig. Wähle $\delta \in (0,1]$ sodass

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d\colon \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Schließlich wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass

$$\forall n \geq N \colon \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n\|_1 < \epsilon.$$

Aus Voraussetzung (i) erhalten wir, für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y),$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\|f - f * k_n\|_1 = \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) - \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f(x)| \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) + \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} f(x-y) k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right| \right. \\
&\left. + \int_{U_\delta(0)} \big| f(x) - f(x-y) \big| k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x)
\end{aligned}$$

Wir schätzen die drei Summanden einzeln ab:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) = \\
= \|f\|_1 \cdot \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n\|_1 < \|f\|_1 \cdot \epsilon,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} f(x-y) k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right| \mathrm{d}\lambda(x) = \\
= \|f * \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_\delta(0)} k_n\|_1 \\
< \|f\|_1 \cdot \epsilon.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{U_\delta(0)} \big| f(x) - f(x-y) \big| k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) = \\
= \int\limits_{U_{R+1}(0)} \int\limits_{U_\delta(0)} \big| f(x) - f(x-y) \big| k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \mathrm{d}\lambda(x) \\
\leq \epsilon \cdot \lambda(U_{R+1}(0)) \cdot \int\limits_{U_\delta(0)} k_n(y) \mathrm{d}\lambda(y) \leq \epsilon \lambda(U_{R+1}(0)).
\end{aligned}$$

$\triangleright$ $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ **beliebig:** Wir verwenden nun, dass $C_{00}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^1(\mathbb{R}^d)$ ist. Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $g \in C_{00}(\mathbb{R}^d)$, sodass $\|f - g\|_1 < \epsilon$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, sodass $\|g - g * k_n\|_1 < \epsilon$ für alle $n \geq N$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|f - f * k_n\|_1 \leq \underbrace{\|f - g\|_1}_{<\epsilon} + \underbrace{\|g - g * k_n\|_1}_{<\epsilon} + \\
+ \underbrace{\|g * k_n - f * k_n\|_1}_{\leq \|g-f\|_1 \cdot \|k_n\|_1 < \epsilon} < 3\epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Mit Hilfe dieser Proposition können wir jetzt zeigen, dass es (viele) approximative Einheiten im $L^1(\mathbb{R}^d)$ gibt.

6.1.7 Beispiel.
Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$, und setze

$$k_n(x) := \frac{1}{\|f\|_1} n^d |f(nx)|,\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine approximative Einheit.
Um dies zu beweisen rechnen wir die Eigenschaften (i) und (ii) aus der Proposition nach.

Beweis. $\triangleright k_n \geq 0:$ Das ist offensichtlich.
$\triangleright \|k_n\|_1 = 1:$ Die lineare Transformation $x \mapsto \frac{x}{n}$ hat Determinante $\frac{1}{n^d}$, und es folgt

$$\begin{aligned}\|k_n\|_1 &= \frac{1}{\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^d} n^d |f(nx)| \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \frac{1}{\|f\|_1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \mathrm{d}\lambda(x) = 1.\end{aligned}$$

$\triangleright \lim_{n\to\infty} \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus U_r(0)} k_n\|_1 = 0:$ Wir verwenden wieder die lineare Transformation $x \mapsto \frac{x}{n}$, und erhalten

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_r(0)} n^d |f(nx)| \mathrm{d}\lambda(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus U_{nr}(0)} |f(x)| \mathrm{d}\lambda(x).$$

Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz strebt dieses Integral für $n \to \infty$ gegen 0. □

Kapitel 7

Fouriertransformation

7.1 Algebraische Eigenschaften

7.1.1 Definition. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Dann definieren wir eine Funktion $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} d\lambda(x), \ \xi \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\hat{f}$ heißt die ***Fouriertransformierte von*** f, die Abbildung $\hat{.}: f \mapsto \hat{f}$ die ***Fouriertransformation***.

Man beachte hier, dass $|e^{-2\pi i x \xi}| = 1$ für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$, und daher $f(x)e^{-2\pi i x \xi} \in L^1(\mathbb{R})$. Wir bezeichnen im Folgenden

$$C_0(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}, \lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = 0\}.$$

Versehen mit der Supremumsnorm $\|.\|_\infty$ und der punktweisen Multiplikation wird $C_0(\mathbb{R})$ eine kommutative Banachalgebra. Bemerke hier, dass $C_0(\mathbb{R})$ ein abgeschlossener Teilraum des vollständig normieren Raumes $C_b(\mathbb{R})$ aller beschränkten stetigen Funktionen ist.
Man bemerke, dass $C_0(\mathbb{R})$ kein Einselement hat: Wähle eine überall positive Funktion in $C_0(\mathbb{R})$, z. B. $f(x) := e^{-x^2}$. Gilt für eine Funktion $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dass $f \cdot g = f$, so folgt $g(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit $g \notin C_0(\mathbb{R})$.

7.1.2 Satz.
Die Fouriertransformation "$\hat{.}$" ist ein kontraktiver Algebra-Homomorphismus von $\langle L^1(\mathbb{R}), *, \|.\|_1 \rangle$ *nach* $\langle C_0(\mathbb{R}), \cdot, \|.\|_\infty \rangle$.

Im Beweis benützen wir eine sehr oft nützliche Tatsache. Wir formulieren sie gleich etwas allgemeiner.

7.1.3 Lemma.
Sei μ ein Lebesgue-Stieltjes-Maß an $\mathbb{R}^d$, und sei $1 \le p < \infty$. Dann ist

$$\operatorname{span}\left\{ \mathbb{1}_R \,\middle|\, R = \prod_{j=1}^d (a_j, b_j] \ \ \textit{mit} \ -\infty < a_j < b_j < \infty \right\}$$

dicht im $L^p(\mu)$.

Dies folgt eigentlich rein maßtheoretisch, da der Halbring der halb-offenen Rechtecke die σ-Algebra der Borelmengen erzeugt. Wir geben hier einen alternativen Beweis, der allerdings den *Satz von Luzin* verwendet (und daher eigentlich ein "unnötiger Umweg" ist).

Beweis (vom Lemma). Wir wissen schon, dass $C_{00}(\mathbb{R})$ in $L^p(\mu)$ dicht ist. Es genügt also zu zeigen, dass $C_{00}(\mathbb{R})$ im Abschluss der linearen Hülle der Funktionen $\mathbb{1}_R$ liegt. Sei $f \in C_{00}(\mathbb{R})$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Wähle $R > 0$, sodass $\operatorname{supp}(f) \subseteq (-R,R)^d$. Wähle $\delta > 0$, sodass

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d\colon \|x-y\|_\infty < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Wähle $N \in \mathbb{N}$ sodass $\frac{2R}{N} < \delta$, und überdecke $(-R,R)^d$ mit Maschen des Gitters mit Seitenlänge $\frac{2R}{N}$:

$$(-R,R)^d \subseteq \bigcup_{\substack{(j_1,\dots,j_d)\in\mathbb{Z}^d \\ -N\le j_l<N}} \left[\frac{2R}{N}\cdot\begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_d\end{pmatrix} + \big(0, \frac{2R}{N}\big]^d\right]$$

Liegen x und y in einer Masche des Gitters, so gilt $\|x-y\|_\infty \le \frac{2R}{N} < \delta$, und daher $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
Wir sehen, dass

$$\left\| f - \underbrace{\sum_{\substack{(j_1,\dots,j_d)\in\mathbb{Z}^d \\ -N\le j_l<N}} f\left(\frac{2R}{N}\begin{pmatrix} j_1 \\ \vdots \\ j_d\end{pmatrix}\right)\cdot \mathbb{1}_{\frac{2R}{N}(j_1,\dots,j_d)^{\mathrm{T}} + (0,\frac{2R}{N}]^d}}_{=:g} \right\|_\infty < \epsilon.$$

Es folgt

$$\|f-g\|_{L^p(\mu)}^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f-g|^p \mathrm{d}\mu \le \mu\big((-R,R]^d\big)\cdot\epsilon^p.$$

Wir schließen, dass f im Abschluss der genannten linearen Hülle von Indikatorfunktionen ist. □

Beweis (vom Satz).
▹**Wir zeigen die Rechenregeln:** Das die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ linear ist, ist klar wegen der Linearität des Integrals. Um die Homomorphie-Eigenschaft bezüglich der entsprechenden Multiplikationen zu zeigen, seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben. Da die Funktionen

$$(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$$

integrierbar bezüglich dem Produktmaß $\mathrm{d}\lambda(x) \times \mathrm{d}\lambda(y)$ ist, gibt der Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \mathrm{d}\lambda(y) \right) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \right) g(y) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} (x-y) \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \right) g(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y \xi} \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(z) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} z \xi} \mathrm{d}\lambda(z) \right) g(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y \xi} \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

▹**Wir zeigen** $\forall f \in L^1(\mathbb{R})\colon \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}) \wedge \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$**:**
Wegen $|f(x)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi}| = |f(x)|$ hat der Integrand im Integral $\hat{f}(\xi)$ eine von ξ unabhängige integrierbare Majorante. Mit dem *Satz von der beschränkten Konvergenz* folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{f}(\xi) &= \lim_{\xi \to \xi_0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{\xi \to \xi_0} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi_0} \mathrm{d}\lambda(x) = \hat{f}(\xi_0).
\end{aligned}$$

Also ist $\hat{f}$ stetig für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$. Weiters gilt

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \right| \mathrm{d}\lambda(x) = \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Also ist $\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1$ für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$.

▹**Wir zeigen** $\forall f \in L^1(\mathbb{R})\colon \hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$**:**
Wir zeigen die Limes-Beziehung $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ für Funktionen sehr einfacher Gestalt: Sei $-\infty < a < b < \infty$, dann gilt (für $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$)

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbb{1}_{(a,b]}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a,b]}(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) = \\
&= \int_a^b \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} b \xi} - \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} a \xi}}{-2\pi \mathrm{i} \xi}.
\end{aligned}$$

Nun gilt offensichtlich

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \widehat{\mathbb{1}_{(a,b]}}(\xi) = 0.$$

Da die Fouriertransformation linear ist und $C_0(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $C_b(\mathbb{R})$ ist, folgt

$$\hat{\cdot}\big(\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{(a,b]} \mid -\infty < a < b < \infty\}\big) \subseteq C_0(\mathbb{R}).$$

Da $\hat{\cdot}\colon L^1(\mathbb{R}) \to C_b(\mathbb{R})$ kontraktiv ist, ist " $\hat{\cdot}$ " insbesondere stetig. Also folgt, da $C_0(\mathbb{R})$ abgeschlossen ist,

$$\hat{\cdot}\left(\overline{\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{(a,b]} \mid -\infty < a < b < \infty\}}^{L^1(\mathbb{R})}\right) \subseteq C_0(\mathbb{R}).$$

Wegen dem vorangegangenen Lemma ist

$$\overline{\operatorname{span}\{\mathbb{1}_{(a,b]} \mid -\infty < a < b < \infty\}}^{L^1(\mathbb{R})} = L^1(\mathbb{R}).$$

□

Auf den Räumen $L^1(\mathbb{R})$ bzw. $C_0(\mathbb{R})$ hat man natürlich noch andere Operationen ausser der Algebra-Struktur - z. B. die Konjugation oder Translation.
Wir zeigen als nächstes, dass die Fouriertransformation entsprechenden Rechenregeln genügt. Wir beginnen mit *Konjugation* und *Skalierung*.

7.1.4 Proposition.

(i) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, und setze $g(x) := \overline{f(x)}$. Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$, und es gilt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\colon \hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}.$$

(ii) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und setze $g(x) := f(rx)$. Dann ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \frac{1}{|r|}\|f\|_1$, und es gilt

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\colon \hat{g}(\xi) = \frac{1}{|r|}\hat{f}\left(\frac{1}{r}\xi\right).$$

Beweis.

(i) Es gilt (die Determinante von $x \mapsto -x$ hat Betrag 1)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |\overline{f(-x)}| \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(-x)| \mathrm{d}\lambda(x) \\ = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}\lambda(x),\end{aligned}$$

also ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \|f\|_1$.
Weiters haben wir

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f(-x)} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{d}\lambda(x) = \\ &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(-x) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x\xi} \mathrm{d}\lambda(x)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(-x)\xi} \mathrm{d}\lambda(x)} \\ &= \overline{\hat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

(ii) Es gilt (die Determinante von $x \mapsto \frac{x}{r}$ hat Betrag $\frac{1}{|r|}$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |g(x)| \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} |f(rx)| \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{|r|} \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{|r|} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \mathrm{d}\lambda(x),\end{aligned}$$

also ist $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\|g\|_1 = \frac{1}{|r|}\|f\|_1$. Weiter ist

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(rx) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x \xi} \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} (\frac{x}{r}) \xi} \frac{1}{|r|} \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{|r|} \hat{f}\left(\frac{1}{r}\xi\right).\end{aligned}$$

□

Wir kommen nun zur *Translation*. In diesem Kontext ist es praktisch die Rechenregeln etwas struktureller zu formulieren.
Dazu betrachte, für $y \in \mathbb{R}$, die Abbildung

$$T_y \colon \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f(x) & \mapsto f(x+y) \end{cases}.$$

Diese induziert sowohl auf $L^1(\mathbb{R})$ als auch auf $C_0(\mathbb{R})$ eine lineare und isometrische Bijektion. Wir bezeichnen diese mit $T_y[L^1]$ bzw. $T_y[C_0]$. Betreffend der entsprechenden Multiplikationen gilt

$$\begin{aligned}&\forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \colon (T_y[L^1] f) * g = T_y[L^1](f * g) \\ &\forall f, g \in C_0(\mathbb{R}) \colon (T_y[C_0] f) \cdot (T_y[C_0] g) = T_y[C_0](f \cdot g)\end{aligned}$$

Man spricht vom ***Translationsoperator*** im $L^1(\mathbb{R})$ bzw. $C_0(\mathbb{R})$.
Für $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ betrachte die Abbildung

$$M_g \colon \begin{cases} \mathbb{C}^{\mathbb{R}} & \to \mathbb{C}^{\mathbb{R}} \\ f(x) & \mapsto g(x) f(x). \end{cases}$$

Ist g beschränkt, so induziert M_g eine lineare und beschränkte Abbildung in $L^1(\mathbb{R})$ bzw. in $C_0(\mathbb{R})$. Wir bezeichnen diese als $M_g[L^1]$ bzw. $M_g[C_0]$. Gilt sogar $|g(x)| = 1$, $x \in \mathbb{R}$, so sind $M_g[L^1]$ und $M_g[C_0]$ isometrisch und bijektiv.

7.1.5 Proposition.
Es gilt

$$\begin{aligned}&\forall y \in \mathbb{R} \colon \hat{\ } \circ T_y[L^1] = M_{\mathrm{e}^{e\pi \mathrm{i} y \cdot \xi}}[C_0] \circ \hat{\ } \\ &\forall \eta \in \mathbb{R} \colon T_\eta[C_0] \circ \hat{\ } = \hat{\ } \circ M_{\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \eta \cdot x}}[L^1]\end{aligned}$$

Beweis. Für $f \in L^1(\mathbb{R})$, und $y \in \mathbb{R}$ bzw. $\eta \in \mathbb{R}$, sowie $\xi \in \mathbb{R}$, gilt

$$\begin{aligned}
&[(\hat{.} \circ T_y)f](\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(z)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(z-y)\xi}\mathrm{d}\lambda(z) \\
&= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y\xi}\int_{\mathbb{R}} f(z)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}z\xi}\mathrm{d}\lambda(z) \\
&= \big[(M_{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}y\xi}}[C_0] \circ \hat{.})f\big](\xi).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[(\hat{.} \circ M_{\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\eta\cdot x}}[L^1])f](\xi) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\eta x} \cdot \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x(\xi+\eta)}\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \big[(T_\eta[C_0] \circ \hat{.})f\big](\xi).
\end{aligned}$$

□

7.2 Differenzierbarkeit

Die Fouriertransformation erfüllt auch Rechenregeln bezüglich Differenzierens. Wir formulieren diese wieder mit Hilfe von Operatoren. Bezeichne

$$D: \begin{cases} C^1(\mathbb{R}) & \to C(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto f' \end{cases}$$

und sei $D[L^1]$ die Einschränkung von D auf

$$\{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f, f' \in L^1(\mathbb{R})\},$$

sowie analog $D[C_0]$ die Einschränkung von D auf

$$\{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f, f' \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

Es tritt in diesem Kontext auch der Multiplikationsoperator mit der unbeschränkten Funktion x auf: $M_x[L^1]$ ist die Einschränkung von M_x auf

$$\{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid xf(x) \in L^1(\mathbb{R})\},$$

und $M_x[C_0]$ die Einschränkung auf

$$\{f \in C_0(\mathbb{R}) \mid xf(x) \in C_0(\mathbb{R})\}.$$

7.2.1 Proposition.

(i) Sei $f \in \mathrm{dom} M_x[L^1]$. *Dann ist* $\hat{f} \in \mathrm{dom} D[C_0]$, *und es gilt*

$$(D[C_0] \circ \hat{.})f = -2\pi\mathrm{i}(\hat{.} \circ M_x[L^1])f.$$

(ii) Sei $f \in \mathrm{dom} D[L^1]$. *Dann ist* $\hat{f} \in \mathrm{dom} M_\xi[C_0]$ *und es gilt*

$$(\hat{\cdot} \circ D[L^1])f = 2\pi\mathrm{i}(M_\xi[C_0] \circ \hat{\cdot})f.$$

Beweis.
▷**von (i):** Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ sodass $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Betrachte die Funktion

$$F(x,\xi) \coloneqq f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}.$$

Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial \xi} F(x,\xi) = -2\pi\mathrm{i} \cdot xf(x) \cdot \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x},$$

also

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} F(x,\xi) \right| \le 2\pi \cdot |xf(x)|.$$

Wir haben also eine von ξ unabhängige integrierbare Majorante, und schließen, dass das Parameterintegral $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,\xi)\mathrm{d}\lambda(x)$ differenzierbar ist mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} F(x,\xi)\mathrm{d}\lambda(x)}_{=\hat{f}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \xi} F(x,\xi)\mathrm{d}\lambda(x).$$

Also ist die Fouriertransformierte $\hat{f}$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f}(\xi) = -2\pi\mathrm{i} \cdot \widehat{M_x[L^1]f}(\xi).$$

Insbesondere ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$, und wir sehen auch, dass tatsächlich $\hat{f} \in \mathrm{dom} D[C_0]$ gilt.

▷**von (ii):** Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ sodass $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$. Wir zeigen als erstes, dass $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = 0$. Da f stetig differenzierbar ist haben wir, für $x > 0$,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(y)\mathrm{d}y = f(0) + \int_{[0,x]} f'(y)\mathrm{d}\lambda(y).$$

Nach dem Satz von der beschränkten Konvergenz - beachte, dass $f' \in L^1(\mathbb{R})$ - folgt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \int_{[0,\infty)} f'(y)\mathrm{d}\lambda(y).$$

Da $f \in L^1(\mathbb{R})$, kann $|f|$ keinen von 0 verschiedenen Limes haben, und wir schließen, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Benützt man analog, dass für $x < 0$

$$f(x) = f(0) - \int_x^0 f'(y)\mathrm{d}y = f(0) - \int_{[x,0]} f'(y)\mathrm{d}\lambda(y),$$

und daher

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = f(0) - \int_{(-\infty,0]} f'(y)\mathrm{d}\lambda(y),$$

so sieht man, dass auch $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ gelten muss.
Jetzt berechnen wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}
&\widehat{D[L^1]}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\lambda(x) = \\
=&\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f'(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\
=&\lim_{T\to\infty}\left(f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\Big|_{x=-T}^{T} - \int_{-T}^{T} f(x)(-2\pi\mathrm{i}\xi)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x\right) \\
=&2\pi\mathrm{i}\xi\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}x \\
=&2\pi\mathrm{i}\xi\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}x\xi}\mathrm{d}\lambda(x) = 2\pi\mathrm{i}\cdot\xi\hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Wendet man die Proposition induktiv an, so erhält man die folgenden beiden Aussagen:

7.2.2 Korollar.
Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}$.

(i) Ist $f(x), xf(x), \dots, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, so ist $\hat{f}\in C^n(\mathbb{R})$ und

$$(\hat{f})^{(n)}(\xi) = (-2\pi\mathrm{i})^n\widehat{x^n f(x)}(\xi).$$

(ii) Ist $f\in C^n(\mathbb{R})$ und $f, f', \dots, f^{(n)}\in L^1(\mathbb{R})$, so ist

$$\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi\mathrm{i})^n\xi^n\hat{f}(\xi).$$

Beweis.
▷ **von (i):** Wir machen Induktion nach n.
$n = 1$. Das ist die Aussage der Proposition.
$n \mapsto n+1$. Betrachte die Funktion $g(x) \coloneqq x^n f(x)$. Dann ist $g(x), xg(x)\in L^1(\mathbb{R})$ und die Proposition zeigt, dass $\hat{g}\in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$\hat{g}'(\xi) = (-2\pi\mathrm{i})\widehat{xg(x)}(\xi) = (-2\pi\mathrm{i})\widehat{x^{n+1}f(x)}(\xi).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt, dass

$$\hat{g}(\xi) = \widehat{x^n f(x)}(\xi) = \frac{1}{(-2\pi\mathrm{i})^n}\hat{f}^{(n)}(\xi).$$

▷ **von (ii):** Wir machen wieder Induktion nach n.
$n = 1$. Gilt nach Proposition.
$n \mapsto n+1$. Setze $g(x) \coloneqq f^{(n)}(x)$. Dann ist $g\in C^1(\mathbb{R})$ und $g, g'\in L^1(\mathbb{R})$. Die Proposition zeigt, dass

$$\widehat{f^{(n+1)}}(\xi) = \widehat{g'}(\xi) = (2\pi\mathrm{i})\xi\hat{g}(\xi).$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$\hat{g}(\xi) = \widehat{f^{(n)}}(\xi) = (2\pi \mathrm{i})^n \xi^n \hat{f}(\xi).$$

$\square$

7.2.3 Bemerkung.
Wir stellen fest, dass:

- ▹ je schneller f bei $\pm\infty$ gegen Null geht, desto glatter ist $\hat{f}$.
- ▹ je glatter f ist, desto schneller geht $\hat{f}$ gegen Null.

Dies motiviert die folgende Definition.

7.2.4 Definition.
Die ***Schwartz Klasse*** ist die Menge

$$S(\mathbb{R}) \coloneqq \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}) \wedge \\ \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon \lim_{|x|\to\infty} |x|^n f^{(m)}(x) = 0\}.$$

7.2.5 Beispiel.

(i) Die Funktion $f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-x^2}$ gehört zur Schwartz-Klasse.

(ii) Bezeichne
$$C_{00}^\infty(\mathbb{R}) \coloneqq \{f \in C^\infty(\mathbb{R} \mid \mathrm{supp} f \text{ kompakt}\}.$$
Dann ist $C_{00}^\infty(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$.

7.2.6 Bemerkung. Die Schwartz-Klasse hat offenbar die folgenden beiden Eigenschaften.

(i) $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$

(ii) $\forall f \in S(\mathbb{R})\ \forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\colon x^n f^{(m)} \in S(\mathbb{R})$

7.2.7 Korollar. *Es gilt* $S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ *und* $\hat{\cdot}\big(S(\mathbb{R})\big) \subseteq S(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann ist nach der ersten Regel $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\hat{f}^{(n)}(\xi) = (-2\pi \mathrm{i})^n \widehat{x^n f(x)}(\xi), \quad n \geq 0.$$

Mit der Produktregel sieht man, dass die Funktion $g(x) \coloneqq x^n f(x)$ erfüllt, dass $g, \ldots, g^{(m)} \in L^1(\mathbb{R})$. Nach der zweiten Regel ist

$$\xi^m \hat{f}^{(n)}(\xi) = \xi^m (-2\pi \mathrm{i})^n \hat{g}(\xi) = (-1)^n \widehat{g^{(m)}}(\xi),$$

insbesondere also $\lim_{|\xi|\to\infty} \xi^m \hat{f}^{(n)}(\xi) = 0$. Wir sehen, dass $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. $\square$

Mit Hilfe der obigen Rechenregeln kann man auch einen Fixpunkt von $\hat{\cdot}$ in $S(\mathbb{R})$ bestimmen.

7.2.8 Beispiel.
Sei $\alpha > 0$ und $f(x) \coloneqq \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$. Dann ist $f \in S(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{e}^{-\pi x^2}$ ein Fixpunkt von $\hat{.}$.

Zunächst ist - durch iteratives Differenzieren - klar, dass $f \in S(\mathbb{R})$. Um $\hat{f}$ zu bestimmen verwenden wir einen Trick. Die Funktion f erfüllt die Gleichung

$$f'(x) = -2\alpha \cdot x f(x).$$

Wendet man $\hat{.}$ an, so erhält man

$$\begin{aligned} 2\pi \mathrm{i} \cdot \xi \hat{f}(\xi) = \widehat{f'}(\xi) &= -2\alpha \cdot \widehat{x f(x)}(\xi) \\ &= -2\alpha \cdot (-2\pi \mathrm{i})^{-1} \hat{f}'(\xi). \end{aligned}$$

Also ist

$$\hat{f}'(\xi) = -2\frac{\pi^2}{\alpha} \cdot \xi \hat{f}(\xi).$$

Weiters gilt

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} \mathrm{d}\lambda(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Wir erhalten, dass

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\alpha}\xi^2}.$$

7.3 Invertierbarkeit

Es ist eine wesentliche Tatsache, dass die Fouriertransformation - in gewissem Sinne - nahezu idempotent ist.

7.3.1 Satz.
Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, und sei vorausgesetzt, dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \quad \textit{f.ü.}$$

Beweis. Wir beginnen mit der Feststellung, dass sich die Gültigkeit der gewünschten Beziehung auf Faltungen überträgt.

▷ $\forall f, g \in L^1(\mathbb{R})\colon\ \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}) \ \wedge\ \hat{\hat{g}}(x) = g(-x)$
$\Longrightarrow\ \widehat{f * g} \in L^1(\mathbb{R}) \ \wedge\ \widehat{\widehat{f * g}}(x) = (f * g)(-x)$

Zunächt ist $(f * g) \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Da $\hat{f}$ beschränkt ist, folgt $\widehat{f * g} \in L^1(\mathbb{R})$. Wir berechnen mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{f * g}}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f * g}(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \mathrm{d}\lambda(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \mathrm{d}\lambda(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y \xi} \mathrm{d}\lambda(y) \right) \hat{g}(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x} \mathrm{d}\lambda(\xi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} (y+x) \xi} \mathrm{d}\lambda(\xi) \right) f(y) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \hat{\hat{g}}(y + x) f(y) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}} g\big((-x) - y\big) f(y) \mathrm{d}\lambda(y) \\
&= (g * f)(-x) = (f * g)(-x).
\end{aligned}$$

Die Anwendung des Satzes von Fubini ist hier gerechtfertigt, da

$$|f(y) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} y \xi} \hat{g}(\xi) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} \xi x}| = |f(y)| \cdot |\hat{g}(\xi)| \in L^1\big(\mathrm{d}\lambda(y) \times \mathrm{d}\lambda(\xi)\big).$$

Wir konstruieren eine approximative Einheit $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die " $\hat{k}_n \in L^1(\mathbb{R}) \;\wedge\; \hat{\hat{k}}_n(x) = k_n(-x)$ " erfüllt.

Sei h der Fixpunkt von $\hat{\cdot}$:

$$h(x) := \mathrm{e}^{-\pi x^2},$$

und

$$k_n(x) := n h(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da h gerade ist, haben wir offensichtlich

$$\forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \colon \; k_n(-x) = k_n(x).$$

Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
\hat{k}_n(\xi) &= n \cdot \frac{1}{n} \hat{h}\left(\frac{1}{n} \xi \right) = h\left(\frac{1}{n} \xi \right) \in L^1(\mathbb{R}), \\
\hat{\hat{k}}_n(x) &= n \cdot \hat{h}(nx) = n h(nx) = k_n(x).
\end{aligned}$$

Wir sehen, dass tatsächlich

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \; \hat{k}_n \in L^1(\mathbb{R}) \;\wedge\; \hat{\hat{k}}_n(x) = k_n(-x).$$

Wir machen zwei Limes-Argumente.

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Die Abbildung " $g(x) \mapsto g(-x)$ " ist isometrisch, insbesondere stetig, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \to \infty} \|f(-x) - \widehat{\widehat{f * k_n}}(x)\|_1 = \\
&= \lim_{n \to \infty} \|f(-x) - (f * k_n)(-x)\|_1 = 0.
\end{aligned}$$

Es folgt, dass es eine Teilfolge $(\widehat{\widehat{f * k_{n_l}}})_{l\in\mathbb{N}}$ gibt, sodass für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{l\to\infty} \widehat{\widehat{f * k_{n_l}}}(x) = f(-x).$$

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ sodass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Es ist

$$\|\hat{k}_n\|_\infty = 1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}\colon \lim_{n\to\infty} \hat{k}_n(\xi) = 1,$$
$$|\hat{f}(\xi)\hat{k}_n(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}| \le |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Wir erhalten, mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \widehat{\widehat{f * k_n}}(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{k}_n(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\lambda(\xi)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\xi x}\mathrm{d}\lambda(\xi) = \hat{\hat{f}}(x).\end{aligned}$$

Also ist $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}$. □

Die Voraussetzung des Satzes, dass auch $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ liegt, ist oft erfüllt, aber oft auch nicht erfüllt.

7.3.2 Beispiel.

(i) Ist $f \in S(\mathbb{R})$, so ist auch $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ und damit insbesondere $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

(ii) Ist $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$, so stimmt $f(x)$ f. ü. mit einer stetigen Funktion überein (nämlich mit $\hat{\hat{f}}(-x)$). Nun gibt es viele Funktionen die nicht f. ü. gleich einer stetigen Funktion sind. Hat f z. B. eine Sprungstelle, so kann f nicht f. ü. gleich einer stetigen Funktion sein.
Wir sehen, dass z. B. $\widehat{\mathbb{1}_{(a,b]}} \notin L^1(\mathbb{R})$ ist.

Eine wichtige Folgerung aus dem Satz ist:

7.3.3 Korollar.
Die Fouriertransformation $\hat{\cdot}: L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ *ist injektiv.*

Beweis. Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\hat{f} = \hat{g}$. Dann ist $\widehat{f-g} = 0 \in L^1(\mathbb{R})$, und wir erhalten (für fast alle $x \in \mathbb{R}$)

$$0 = \widehat{\widehat{f-g}}(x) = (f-g)(-x),$$

also $f - g = 0$ f. ü. □

7.3.4 Korollar.
Die Fouriertransformation $\hat{\cdot}$ *bildet die Schwartz-Klasse* $S(\mathbb{R})$ *bijektiv auf sich ab.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\hat{\cdot}\big(S(\mathbb{R})\big) \subseteq S(\mathbb{R})$ und, dass $\hat{\cdot}$ injektiv ist. Sei $f \in S(\mathbb{R})$, dann ist $\hat{f} \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$. Also ist auch $g(\xi) := \hat{f}(-\xi) \in S(\mathbb{R})$, und es folgt

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(-x) = \hat{g}(x) \in \hat{\cdot}\big(S(\mathbb{R})\big).$$

□

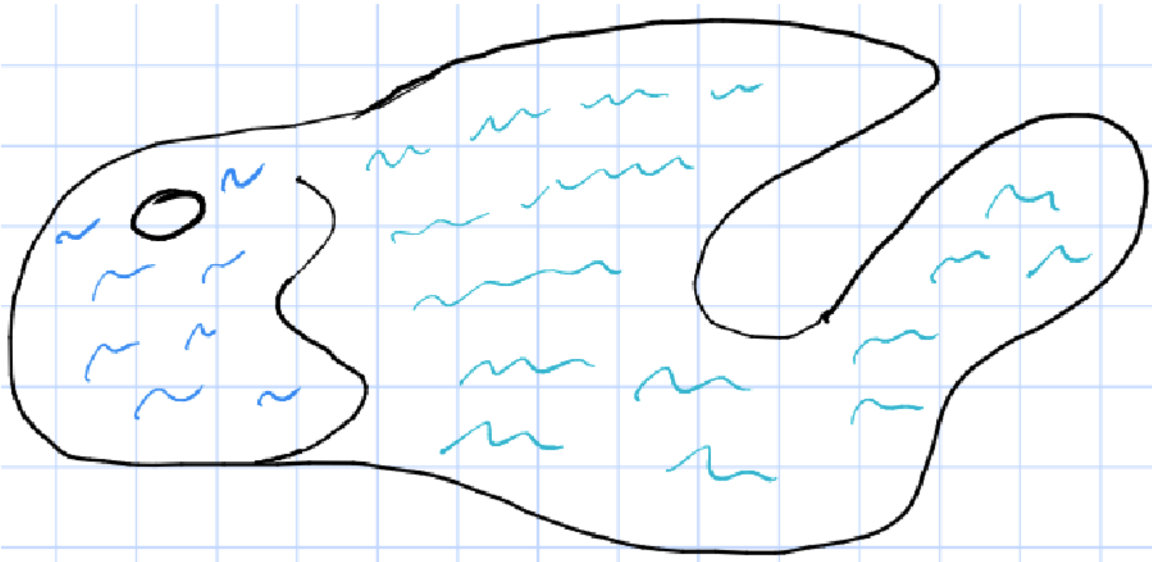
7.3.5 Korollar.
Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ *derart, dass auch* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. *Dann ist* $f \in C_0(\mathbb{R})$ *(f. ü.).*

Beweis. Es ist $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$ f. ü. □

Kapitel 8

Der orientierbare Rand

Man denke an die Strömung einer Flüssigkeit in einem Schwimmbad:



Die Umwältzung des Wassers im Pool wird durch Düsen im Inneren und Abfluss über den Rand erreicht.
Entscheidend für das Verhalten des Wassers ist das Strömungsfeld (Fließgeschwindigkeit). Denn eine Quelle (Düse) bewirkt eine Änderung der Strömung. Klarerweise muss die Gesamtsumme des durch Quellen einfließenden Wassers gleich der Gesamtsumme des durch den Rand ausfließenden Wassers sein. Also ist

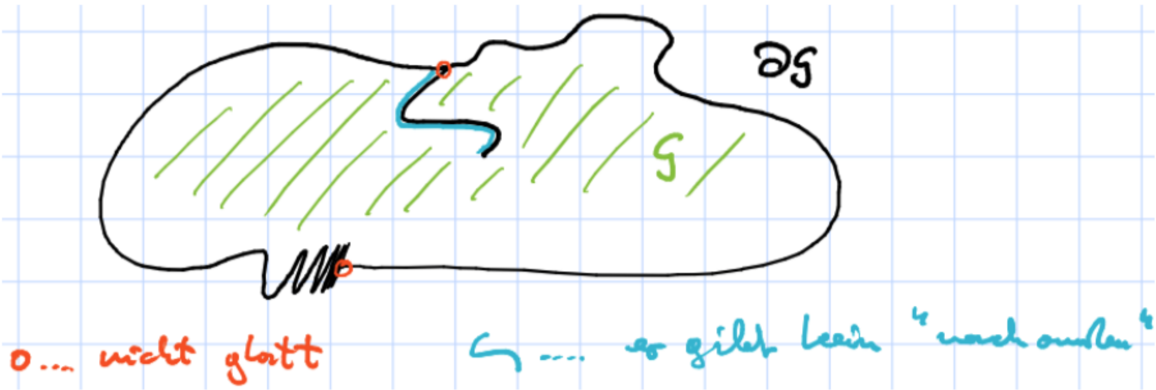
Integral über die Fläche der Änderung der Strömung
=
Integral über den Rand der Strömung in äußere Richtung.

Offensichtlich besteht hier Erklärungsbedarf was diese Feststellung wirklich bedeuten soll.
Als erstes eine ganz allgemeine Bezeichnung.

8.1 Definition.
Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Der **Rand** *von A ist*

$$\begin{aligned} \partial A &:= \overline{A} \setminus \mathring{A} \\ &= \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon\ U \cap A \neq \varnothing,\ U \cap (X \setminus A) \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

Um der oben geschriebenen “Aussage” Sinn zu geben, müssen wir uns klar machen was “über den Rand integrieren” bedeutet, und was “äußere Richtung” sein soll. Ersteres legt nahe, dass man nur glatte Teile des Randes betrachten kann - Zweites, dass man nur Teile des Randes betrachtet wo man entscheiden kann, dass G nur auf einer Seite des Randes liegt.



8.2 Definition.
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Der **orientierbare Rand** *von G ist die Menge aller Punkte $z \in \partial G$ sodass:*

$\exists (W, \Phi)$ mit den folgenden Eigenschaften

- ▷ $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $z \in W$
- ▷ $\Phi\colon W \to \mathbb{R}^n,\ V := \Phi(W) \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen*
- ▷ $\Phi\colon W \to V \quad C^1$*-Diffeomorphismus*
- ▷ $\Phi(W \cap \partial G = V \cap \big(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}\big)$
- ▷ $\Phi(W \cap G = V \cap \big(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)\big)$.

Wir bezeichnen den orientierbaren Rand von G als $\boldsymbol{\partial^o G}$.

Bemerke, dass für (W, Φ) wie oben stets $W \cap \partial G \subseteq \partial^o G$ gilt. Der orientierbare Rand kann in natürlicher Weise zu einer $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden.

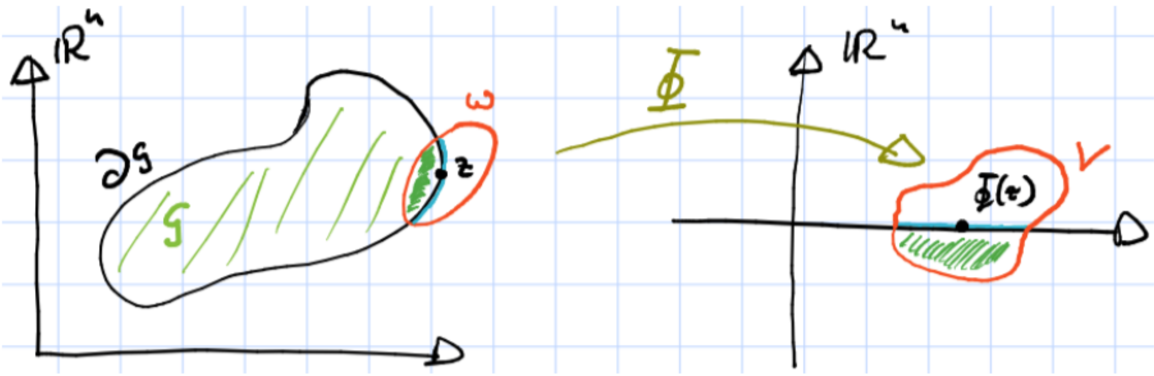


Abbildung 8.1: Illustration der 8.2 Definition.

8.3 Satz.
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Bezeichne mit $\mathfrak{T}$ die Spurtopologie von $\mathbb{R}^n$ auf $\partial^o G$, mit $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}$ die Projektion auf die ersten $n-1$ Koordinaten, und

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \coloneqq \{ & (W \cap \partial^o G, \pi \circ \Phi|_{W \cap \partial^o G}) \mid \\ & (W, \Phi) \text{ alle Paare mit den Eigenschaften aus der Definition von } \partial^o G\}.\end{aligned}$$

Dann gilt:

(i) $\langle \partial^o G, \mathfrak{T}, \mathcal{A} \rangle$ *ist eine $(n-1)$-dimensionale eingebettete Mannigfaltigkeit.*

(ii) Es existiert eine eindeutige stetige Funktion $\Lambda : \partial^o G \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{aligned}&\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A},\ x \in U : \Lambda(x) \perp \operatorname{ran} \mathrm{d}(\varphi^{-1})(\varphi(x)) \\ &\forall x \in \partial^o G : \|\Lambda(x)\| = 1 \\ &\forall x \in \partial^o G \exists \epsilon > 0 \forall \alpha \in (0, \epsilon) : x + \alpha\Lambda(x) \notin G \ \wedge\ x - \alpha\Lambda(x) \in G\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Funktion Λ als die ***äußere Normale*** von G.

Beweis.
▷ Bemerkung zur Definition der Karten von $\mathcal{A}$.

Die Projektion π ist gegeben durch die (Block-)Matrix

$$\pi = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{array}\right) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}.$$

Sie hat offenbar eine Rechtsinverse. Tatsächlich ist

$$\pi \circ \pi^{\mathrm{T}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Die Abbildung π^{T} ist eine Isometrie von $\mathbb{R}^{n-1}$ auf $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Insbesondere ist daher

$$\pi|_{\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}} : \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \to \mathbb{R}^{n-1}$$

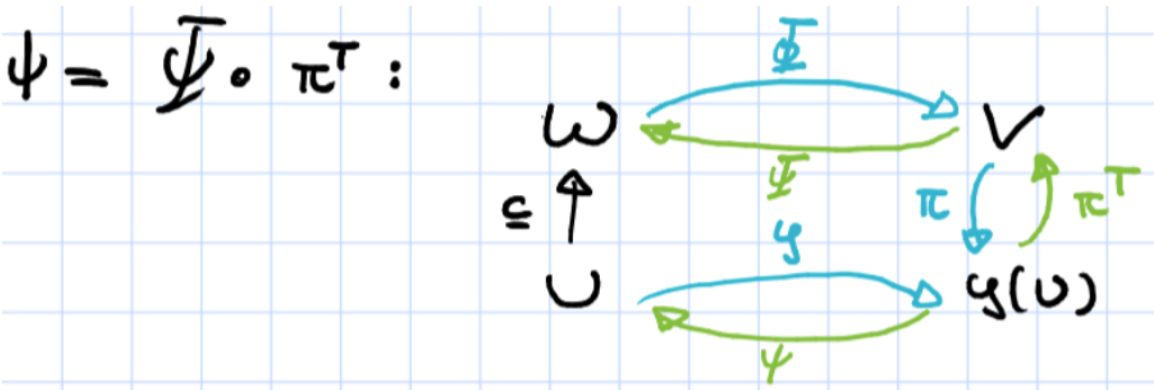


Abbildung 8.2: Illustration des ersten Beweisabschnittes.

ein Homöomorphismus.
Aus der Definition der Karten (U, φ) in $\mathcal{A}$ als $U = W \cap \partial^o G$, $\varphi = \Phi|_U$, sieht man (mit der Notation $\psi \coloneqq \varphi^{-1}$ und $\Psi \coloneqq \Phi^{-1}$) in Abbildung 8.2 die Struktur der Abbildungen.

▹ Wir zeigen, dass jedes Paar $(W \cap \partial^o G, \Phi|_{W \cap \partial^o G})$ eine $(n-1)$-dimensionale Karte von $\langle \partial^o G, \mathfrak{T} \rangle$ ist.

Dazu benützen wir die folgende allgemeine Tatsache: Ist $\Phi\colon X \to Y$ ein Homöomorphismus und $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ mit $\Phi(A) = B$, dann ist $\Phi|_A$ ein Homöomorphismus wenn A und B mit der Spurtopologie von X bzw. Y versehen sind.

Betrachte man ein Paar $(W \cap \partial^o G, \Phi|_{W \cap \partial^o G})$. Dann gilt

(i) $W \cap \partial^o G \in \mathfrak{T}$ da W offen im $\mathbb{R}^n$ ist,

(ii) $V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ ist offen im $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ da V offen in $\mathbb{R}^n$ ist,

(iii) $\Phi|_{W \cap \partial^o G}\colon W \cap \partial^o G \to V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ ist ein Homöomorphismus, da $\Phi\colon W \to V$ ein Homöomorphismus ist und $\Phi(W \cap \partial^o G) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$,

(iv) $\pi\big(V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big)$ ist offen und $\pi \circ \Phi|_{W \cap \partial^o G}$ ist ein Homöomorphismus, da $\pi|_{\mathbb{R}^{n-1}} \times \{0\}$ einer ist.

▹ Wir zeigen, dass $\mathcal{A}$ ein Atlas ist.

Die Abbildungen π und π^{T} sind offenbar stetig differenzierbar. Nun gilt, für je zwei gegebene Paare (W_1, Φ_1) und (W_2, Φ_2), dass $((U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$ die entsprechenden Karten)

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)} = \pi \circ \Phi_2 \circ \Phi_1^{-1} \circ \pi^{\mathrm{T}}|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$$

und wir sehen, dass der Kartenwechsel stetig differenzierbar ist.

▹ Wir zeigen, dass $\subseteq\colon \partial^o G \to \mathbb{R}^n$ eine Einbettung ist.

Da $\partial^o G$ mit der Spurtopologie versehen ist, ist $\subseteq$ ein Homöomorphismus von $\partial^o G$ auf $\subseteq(\partial^o G)$, Sei (W, Φ) gegeben und (U, φ) die zugehörige Karte. Als Atlas für $\mathbb{R}^n$

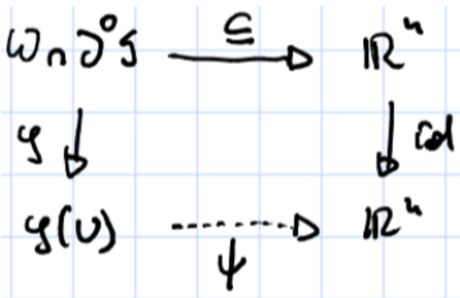


Abbildung 8.3: Illustration des Beweisabschnittes.

verwenden wir wie üblich $\{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})\}$.

Es gelten die in Abbildung 8.3 illustrierten Beziehungen und wir sehen, dass die Abbildung $\mathrm{id}\circ \subseteq \circ\varphi^{-1}$ stetig differenzierbar ist. Weiters ist, für alle $y \in \varphi(U)$,

$$\mathrm{d}\psi(y) = \big(\mathrm{d}\Psi\big)\big(\pi^{\mathrm{T}}(y)\big) \cdot \pi^T,$$

und wir sehen, dass $\mathrm{d}\psi(y)$ injektiv ist.

▷ Wir konstruieren eine lokale äußere Normale.

Betrachte eine Karte (U, φ) (mit zugehörigem (W, Φ)), und definiere eine Funktion $\Gamma\colon U \to \mathbb{R}^n$ als

$$\Gamma(x) \coloneqq \big[\mathrm{d}\Phi(x)\big]^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; x \in U.$$

Da $\mathrm{d}\Phi$ bijektiv ist, ist jedenfalls $\Gamma(x) \neq 0$.
Wir bezeichnen mit e_j den j-ten kanonischen Basisvektor

$$e_j \coloneqq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Stelle},$$

wobei wir die Länge des Vektors nicht explizit anschreiben. Für jedes $y \in \varphi(U)$ und $v \in \mathbb{R}^{n-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \Gamma\big(\psi(y)\big)^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\psi(y) v &= e_n^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\Phi\big(\psi(y)\big)\mathrm{d}\psi(y) v \\ &= e_n^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\Phi\Big(\Psi\big(\pi^{\mathrm{T}}(y)\big)\Big)\mathrm{d}\Psi\big(\pi^{\mathrm{T}}(y)\big)\pi^{\mathrm{T}} v \\ &= e_n^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\big(\Phi \circ \Psi\big)\big(\pi^{\mathrm{T}}(y)\big)\pi^{\mathrm{T}} v = e_n^{\mathrm{T}} \pi^{\mathrm{T}} v = 0, \end{aligned}$$

d. h. $\forall x \in U\colon \Gamma(x) \perp \operatorname{ran} \mathrm{d}\big(\varphi^{-1}\big)\big(\varphi(x)\big)$.
Schließlich zeigen wir

$$\begin{aligned} \forall x \in U \exists \epsilon > 0 \forall \alpha \in (0, \epsilon)\colon\; & x \pm \alpha\Gamma(x) \in W \;\wedge \\ & e_n^{\mathrm{T}} \Phi\big(x + \alpha\Gamma(x)\big) > 0 \;\wedge\; e_n^{\mathrm{T}} \Phi\big(x - \alpha\Gamma(x)\big) < 0. \end{aligned}$$

Beachte hier, dass $\forall y \in W\colon\ y \in G \iff e_n^{\mathrm{T}}\Phi(y) < 0$. Definiere $R(x,z)$ durch die Gleichung

$$\Phi(z) = \Phi(x) + \mathrm{d}\Phi(x)\cdot(z-x) + R(x,z).$$

Dann gilt $\lim_{z\to x}\frac{1}{\|z-x\|}R(x,z) = 0$. Nun ist, für $\alpha \neq 0$ mit $x+\alpha\Gamma(x) \in W$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}e_n^{\mathrm{T}}\Phi\big(x+\alpha\Gamma(x)\big) &= \frac{1}{\alpha}e_n^{\mathrm{T}}\Phi(x)\\ &+e_n^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Phi(x)\mathrm{d}\Phi(x)^{\mathrm{T}}e_n + e_n^{\mathrm{T}}\frac{R\big(x,x+\alpha\Gamma(x)\big)}{\alpha\|\Gamma(x)\|}\end{aligned}$$

Der erste Summand ist Null, der zweite die von α unabhängige positive Zahl $\|\mathrm{d}\Phi(x)^{\mathrm{T}}e_n\|^2$, und der letzte Summand strebt gegen Null für $\alpha\downarrow 0$. Wir sehen, dass für $|\alpha|$ hinreichend klein stets gilt

$$\operatorname{sgn} e_n^{\mathrm{T}}\Phi\big(x+\alpha\Gamma(x)\big) = \operatorname{sgn}\alpha.$$

$\triangleright$ Wir kleben die lokalen Normalen zu einer globalen äußeren Normalen zusammen.

Sei $x\in\partial^o G$, und seien (U_1,φ_1) und (U_2,φ_2) zwei Karten in $\mathcal{A}$ mit $x\in U_1\cap U_2$. Es ist $\psi_2 = \psi_1\circ(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})$, und daher

$$\mathrm{d}\psi_2\big(\varphi_2(x)\big) = \mathrm{d}\psi_1\big(\varphi_1(x)\big)\cdot\mathrm{d}\big(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1}\big)\big(\varphi_2(x)\big).$$

Da $\mathrm{d}(\varphi_1\circ\varphi_2^{-1})$ an jeder Stelle bijektiv ist folgt, dass

$$\operatorname{ran}\,\mathrm{d}\psi_2\big(\varphi_2(x)\big) = \operatorname{ran}\,\mathrm{d}\psi_1\big(\varphi_1(x)\big).$$

Das orthogonale Komplement von $\operatorname{ran}\psi_1\big(\varphi_1(x)\big)$ ist 1-dimensional, also erhalten wir

$$\Gamma_2(x) = \beta\Gamma_1(x),$$

mit einem gewissen $\beta\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Für alle hinreichend kleinen $\alpha>0$ gilt

$$x+(\alpha\beta)\Gamma_1(x) = x+\alpha\Gamma_2(x)\in G,$$

also muss $\beta>0$ sein. Wir schließen, dass

$$\frac{1}{\|\Gamma_1(x)\|}\Gamma_1(x) = \frac{1}{\|\Gamma_2(x)\|}\Gamma_2(x).$$

Es ist daher eine Funktion $\Lambda\colon\partial^o G\to\mathbb{R}^n$ durch die folgende Vorschrift wohldefiniert: Für $x\in\partial^o G$ wähle $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ mit $x\in U$ und setze

$$\Lambda(x) := \frac{1}{\|\Gamma(x)\|}\cdot\Gamma(x).$$

Diese Funktion ist stetig, da jeder Punkt eine Umgebung besitzt, wo Λ mit einer stetigen Funktion übereinstimmt (nämlich $\frac{1}{\|\Gamma\|}\cdot\Gamma$ für $(U,\varphi)\in\mathcal{A}$ geeignet). Klarerweise hat sie die drei im Satz verlangten Eigenschaften und ist (wie das für die Wohldefiniertheit gemachte Argument zeigt) durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. $\square$

Kapitel 9

Ein Integralsatz

Wir wollen nun einen Integralsatz formulieren und beweisen, der ein Integral über G mit einem Integral über den orientierten Rand verbindet.
Dieser Satz ist sehr stark, zum Beispiel hat er recht allgemeine Versionen der Integralsätze von Gauß, Green, und Stokes als Korollar.
Der Beweis des Satzes ist - sowohl methodisch als auch technisch - ziemlich aufwendig, aber auch eine sehr gute Demonstration ganz typischer Argumentationsweisen:

▷ wir verwenden die Freiheit der Wahl (bzw. Konstruktion) der Karte,

▷ wir machen ein "lokal→global" Argument mittels einer Zerlegung der Eins,

▷ wir machen ein Approximationsargument mittels einer approximativen Identität.

Um den Satz zu formulieren, brauchen wir noch eine Notation.

9.1 Satz & Notation

9.1.1 Definition.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir sagen A ***ist klein vom Grad*** 1, wenn

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} \lambda\big(A + U_\delta(0)\big) = 0.$$

9.1.2 Satz.
Sei $n \geq 2$ und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, und beschränkt. Weiters sei $f: \overline{G} \to \mathbb{R}$ mit

▷ *f ist stetig und $f|_G$ ist stetig differenzierbar,*

▷ *$\forall j = 1, \dots, n$: $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(G, \lambda)$ wobei λ das (die Einschränkung auf G des) Lebesgue-Maß ist,*

▷ *$f|_{\partial^o G} \in L^1(\partial^o G, \mu)$ wobei μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist,*

▷ *$(\operatorname{supp} f) \setminus (G \cup \partial^o G)$ ist klein vom Grad 1.*

Schließlich bezeichne Λ die äußere Normale von G.
Dann gilt, für alle $w \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_G \big[\mathrm{d}f(x)\big] w \,\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\partial^o G} f(y) \cdot \big(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} w\big) \mathrm{d}\mu(y).$$

9.1.3 Definition.
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Schreibe $f(x) = \big(f_j(x)\big)_{j=1}^n$ und $x = (\xi_j)_{j=1}^n$. Dann heißt

$$\operatorname{div} f \coloneqq \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \xi_j}$$

die ***Divergenz*** von f.

9.1.4 Satz (Gauß'scher Integralsatz)**.** *Sei $n \geq 2$ und $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer, und beschränkt. Weiters sei $f\colon \overline{G} \to \mathbb{R}^n$ mit*

- ▹ *f ist stetig und $f|_G$ ist stetig differenzierbar,*
- ▹ *$\forall i, j = 1, \ldots, n$: $\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \in L^1(G, \lambda)$ wobei λ das (die Einschränkung auf G des) Lebesgue Maß ist,*
- ▹ *$\forall i = 1, \ldots, n$: $f_i|_{\partial^o G} \in L^1(\partial^o G, \mu)$ wobei μ das Oberflächenmaß von $\partial^o G$ ist,*
- ▹ *$(\operatorname{supp} f) \setminus (G \cup \partial^o G)$ ist klein vom Grad 1.*

Schließlich bezeichne Λ die äußere Normale von G.
Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} f(x) \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\partial^o G} \Lambda(y)^{\mathrm{T}} f(y) \mathrm{d}\mu(y).$$

Beweis. Wir wenden den Integralsatz an mit den Funktionen f_i und dem Vektor e_i. Dies gibt

$$\begin{aligned}\int_G \frac{\partial f_i}{\partial \xi_i} \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_G \mathrm{d}f_i(x) \cdot e_i \mathrm{d}\lambda(x) = \\ &= \int_{\partial^o G} f_i(y) \big(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} e_i\big) \mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{\partial^o G} \Lambda(y)^{\mathrm{T}} \cdot \big(f_i(y) e_i\big) \mathrm{d}\mu(y)\end{aligned}$$

Summiert man über alle $i = 1, \ldots, n$, folgt die Behauptung. □

Der Beweis des Integralsatzes selbst gliedert sich als:

(1) Wir zeigen eine lokale Version des Satzes:

Jeder Punkt $z \in G \cup \partial^o G$ hat eine offene Umgebung U_z sodass für jede Funktion f die zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes noch

$$\operatorname{supp} f \subseteq U_z$$

erfüllt, die Aussage des Satzes gilt.

Der Beweis dieser lokalen Version zerfällt in zwei Fälle:
▹ Fall $z \in G$. Dieser Fall ist einfach zu erledigen.
▹ Fall $z \in \partial^o G$. Das ist die Essenz des gesamten Beweises.

(2) Wir machen ein "lokal→global" Argument um zum Fall supp $f \subseteq G \cup \partial^o G$ zu kommen.

Dabei kleben wir mit Hilfe einer glatten Zerlegung der 1 die lokalen Aussagen zusammen; ein typisches Standardargument.

(2) Wir machen ein Approximationsargument um zum allgemeinen Fall zu kommen.

Dabei verwenden wir eine glatte approximative Identität um den Träger nach $G \cup \partial^o G$ hineinzuschieben; ein technisches Standardargument.

Kapitel 10

Beweis des Integralsatzes

10.1 Schritt 1, Fall $z \in G$

Schreibe $z = (\zeta_j)_{j=1}^n$, und wähle $\epsilon > 0$ sodass der abgeschlossene Quader

$$Q \coloneqq \prod_{j=1}^{n} [\zeta_j - \epsilon, \zeta_j + \epsilon] \subseteq G.$$

Sei f eine Funktion die der Voraussetzung des Satzes genügt und zusätzlich

$$\mathrm{supp} f \subseteq \prod_{j=1}^{n} (\zeta_j - \epsilon, \zeta_j + \epsilon)$$

erfüllt. Dann ist $f|_{\partial^o G} = 0$ und daher trivialerweise

$$\int_{\partial^o G} f(y) \cdot \big(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} w\big) \mathrm{d}\mu(y) = 0.$$

Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$ und betrachte das Integral

$$\int_G \big[\mathrm{d}f(x)\big] e_j \mathrm{d}\lambda(x).$$

Nach der Voraussetzung an $\mathrm{supp} f$ und mit dem Satz von Fubini erhalten wir ($x = (\xi_j)_{j=1}^n$)

$$\begin{aligned}\int_G \big[\mathrm{d}f(x)\big] e_j \mathrm{d}\lambda(x) = \int_Q \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \mathrm{d}\lambda(x) = \\ = \int_{[-\epsilon,\epsilon]^{n-1}} \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \mathrm{d}\lambda(t_j) \right) \mathrm{d}\lambda \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{j-1} \\ t_{j+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Da f am Rand von Q gleich Null ist, haben wir

$$\begin{aligned}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(z + t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n) \mathrm{d}\lambda(t_j) = \\ &= f(z + t_1 e_1 + \ldots + t_{j-1} e_{j-1} + \epsilon e_j + t_{j+1} e_{j+1} + \ldots + t_n e_n) \\ &- f(z + t_1 e_1 + \ldots + t_{j-1} e_{j-1} - \epsilon e_j + t_{j+1} e_{j+1} + \ldots + t_n e_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die behauptete Formel gilt also für $w \in \{e_1, \ldots, e_n\}$. Jedes Element des $\mathbb{R}^n$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ schreiben, und da die behauptete Formel linear in w ist folgt ihre Gültigkeit für alle $w \in \mathbb{R}^n$.

10.2 Schritt 1, Fall $z \in \partial^o G$

Wir benötigen eine einfache Tatsache aus der linearen Algebra.

10.2.1 Lemma.
Sei $n \geq 2$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$. Setze $a_j := A e_j$ (e_j ist wieder der j-te kanonische Basisvektor), und definiere

$$B := \left(\; a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_{n-1} \; \right) \in \mathbb{R}^{n \times (n-1)},$$
$$\Gamma := A^{-\mathrm{T}} e_n.$$

Dann gilt

$$\det\left(B^{\mathrm{T}} B\right) = (\det A)^2 \|\Gamma\|^2.$$

Beweis. Für eine Matrix M bezeichnen wir mit $M_{(i,j)}$ jene Matrix die entsteht, wenn man aus M die i-te Zeile und j-te Spalte streicht.
Nach der Grammschen Regel ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left[\left((-1)^{i+j} \det A_{(i,j)} \right)_{i,j=1}^{n} \right]^{\mathrm{T}},$$

und daher

$$\Gamma = \frac{1}{\det A} \left((-1)^{i+n} \det A_{(i,n)} \right)_{i=1}^{n}.$$

Betrachte nun die Matrix die entsteht, wenn man in A die letzte Spalte durch Γ ersetzt:

$$C = \left(\; a_1 \mid a_2 \mid \ldots \mid a_{n-1} \mid \Gamma \; \right) = \left(\; B \mid \Gamma \; \right).$$

Berechnet man $\det C$ indem man nach der letzten Spalte entwickelt, so erhält man $(\Gamma = (\Gamma_i)_{i=1}^n)$

$$\begin{aligned}\det C &= \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \cdot (-1)^{i+n} \det C_{(i,n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \cdot \underbrace{(-1)^{i+n} \det A_{(i,n)}}_{= \det A \cdot \Gamma_i} \\ &= \det A \cdot \|\Gamma\|^2.\end{aligned}$$

Nun berechnen wir $\det C$ auf eine andere Weise, nämlich vermöge der Beziehung

$$(\det C)^2 = \det C^{\mathrm{T}} \cdot \det C = \det\big(C^{\mathrm{T}} C\big).$$

Es ist, für $j = 1, \dots, n-1$

$$\Gamma^{\mathrm{T}} a_j = e_n^{\mathrm{T}} A^{-1} \cdot A e_j = 0,$$

und damit $\Gamma^{\mathrm{T}} B = 0$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} C^{\mathrm{T}} C &= \begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}} \\ \hline \Gamma^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \cdot \big(\ B \mid \Gamma \ \big) = \begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}} B & B^{\mathrm{T}} \Gamma \\ \Gamma^{\mathrm{T}} B & \Gamma^{T} \Gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B^{\mathrm{T}} B & 0 \\ 0 & \Gamma^{\mathrm{T}} \Gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und damit

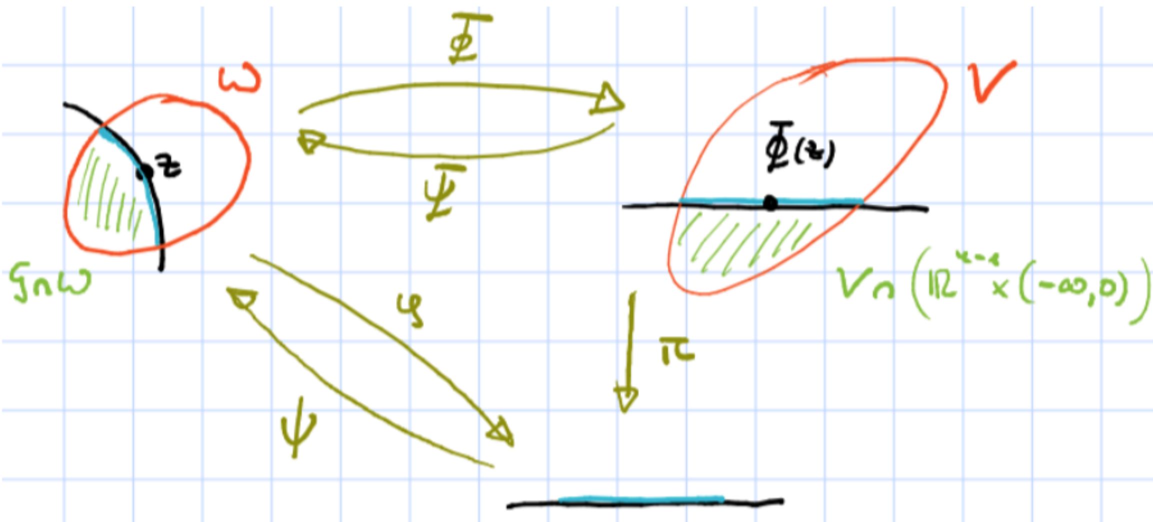
$$\det\big(C^{\mathrm{T}} C\big) = \det\big(B^{\mathrm{T}} B\big) \cdot \|\Gamma\|^2.$$

Gemeinsam folgt also

$$(\det A)^2 \|\Gamma\|^4 = \det\big(B^{\mathrm{T}} B\big) \cdot \|\Gamma\|^2.$$

□

Wir kommen nun zum Beweis der Gleichheit der Integrale lokal bei einem Punkt aus $\partial^o G$. Sei also $z \in \partial^o G$ gegeben. Wähle eine Karte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ mit $z \in U$. Die Notation W, V, Φ, ψ, Ψ seien wie üblich.



Wieder sei $\Lambda : \partial^o G \to \mathbb{R}^n$ die äußere Normale. Aufgrund der Linearität in w der gewünschten Beziehung von Integralen genügt es Beziehung für alle $w \in \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{ran} d\psi\big(\varphi(z)\big)$ nachzuweisen. Sei ein solcher Vektor w festgehalten.

Die äußere Normale kann mit Hilfe des Diffeomorphismus Φ ausgedrückt werden, und das Integral über $W \cap G$ mittels Φ zu einem Integral über $V \cap \big(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)\big)$ transformiert werden. Es stellt sich heraus, dass man, um gut rechnen zu können, besser einen in Abhängigkeit von w leicht modifizierten Diffeomorphismus verwendet.

▷ Konstruktion eines “geschickten” Diffeomorphismus $\tilde{\Phi}$.

Wir definieren eine Abbildung

$$\mathring{\Psi}\colon \big(V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) + \operatorname{span}\{e_n\} \to \mathbb{R}^n$$

durch

$$\mathring{\Psi}\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \tau_i e_i\Bigg) := \Psi\Bigg(\sum_{i=1}^{n-1} \tau_i e_i\Bigg) + \tau_n w.$$

Dann gilt offenbar

$$\mathring{\Psi}|_{V\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})} = \Psi|_{V\cap(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})} = \psi \circ \pi$$

insbesondere $\mathring{\Psi}\big(\Phi(z)\big) = z$. Wir sehen weiters, dass

$$\mathrm{d}\mathring{\Psi}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} \tau_i e_i\Bigg) = \Big(\ \mathrm{d}\psi\big(\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \tau_i e_i\big)\ \Big|\ w\ \Big)$$

(beachte hier, dass e_i auf der linken Seite in $\mathbb{R}^n$ ist und auf der rechten Seite im $\mathbb{R}^{n-1}$, ohne dass notationell unterschieden wird).
Da $w \notin \operatorname{ran} \mathrm{d}\psi\big(\varphi(z)\big)$ und da $\mathrm{d}\psi$ injektiv ist, folgt dass $\mathrm{d}\Psi\big(\Phi(z)\big)$ invertierbar ist. Nach dem Satz von der inversen Funktion gibt es offene Mengen $\mathring{W}, \mathring{V} \in \mathbb{R}^n$ mit $z \in \mathring{W}, \Phi(z) \in \mathring{V}$, sodass $\mathring{\Psi}|_{\mathring{V}}$ ein Diffeomorphismus von $\mathring{V}$ auf $\mathring{W}$ ist. ObdA sei dabei $\mathring{V} \subseteq V$.
Wir zeigen nun, dass

$$\mathring{\Phi}\big(\mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) = \partial^o G \cap \Psi(\mathring{V}).$$

Die Inklusion "$\subseteq$" gilt da $\mathring{\Psi}$ auf $\mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ mit Ψ übereinstimmt. Sei $x \in \partial^o G \cap \Psi(\mathring{V})$. Dann ist $\Phi(x) \in \mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$, und es gilt

$$\mathring{\Psi}\big(\Phi(x)\big) = \Psi\big(\Phi(x)\big) = x.$$

Wähle nun $r > 0$ und $\rho > 0$ sodass die Menge

$$\tilde{V} := U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\varphi(z)\big) \times (-\rho, \rho)$$

die folgenden Eigenschaften hat:

$$\tilde{V} \subseteq \mathring{V}, \quad \mathring{\Psi}(\tilde{V}) \subseteq \Psi(\mathring{V}).$$

Dies ist möglich, da $\mathring{V}$ eine Umgebung von $\Phi(z)$ und $\Psi(\mathring{V})$ eine Umgebung von z ist.

Bezeichne weiters $\tilde{W} := \mathring{\Psi}(\tilde{V})$.
Klarerweise gilt

$$\mathring{\Psi}\big(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) \subseteq \tilde{W} \cap \partial^o G.$$

Sei nun $t \in \tilde{V} \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ und sei indirekt angenommen, dass $\mathring{\Psi}(t) \in \partial^o G$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathring{\Psi}(t) \in \partial^o G \cap \mathring{\Psi}(\tilde{V}) \subseteq \partial^o G \cap \Psi(\mathring{V}) = \\ = \mathring{\Psi}\big(\mathring{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big).\end{aligned}$$

Da $\mathring{\Psi}|_{\mathring{V}}$ injektiv ist, folgt $t \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, ein Widerspruch. Wir schließen, dass

$$\mathring{\Psi}\big(\tilde{V} \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) \subseteq \tilde{W} \setminus \partial^o G.$$

Gemeinsam erhalten wir, dass in beiden Inklusionen Gleichheit gelten muss, d. h.,

$$\begin{aligned}\mathring{\Psi}\big(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) &= \tilde{W} \cap \partial^o G, \\ \mathring{\Psi}\big(\tilde{V} \setminus (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})\big) &= \tilde{W} \cap \partial^o G.\end{aligned}$$

Betrachte nun die Menge

$$\tilde{V}_+ := \tilde{V} \cap \big(\mathbb{R}^{n-1} \times (0, \infty)\big) = U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\varphi(z)\big) \times (0, \rho).$$

Wir zeigen

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}_+) \cap G \neq \varnothing \;\Rightarrow\; \mathring{\Psi}(\tilde{V}_+) \subseteq G.$$

Sei dazu indirekt angenommen, dass es $t_1, t_2 \in \tilde{V}_+$ gibt mit

$$\mathring{\Psi}(t_1) \in G, \quad \mathring{\Psi}(t_2) \notin G.$$

Betrachte den stetigen Weg (die Verbindungsstrecke von t_1 mit t_2)

$$\gamma\colon \begin{cases} [0,1] & \to \tilde{V}_+ \\ p & \mapsto pt_1 + (1-p)t_2 \end{cases}$$

und den stetigen Weg

$$\delta\colon \begin{cases} [0,1] & \to \mathring{V} \\ p & \mapsto \big(\Phi \circ \mathring{\Psi} \circ \gamma\big)(p). \end{cases}$$

Wegen $\mathring{\Psi}\big(\gamma(0)\big) \notin G$ und $\mathring{\Psi}\big(\gamma(1)\big) \in G$, gilt

$$e_n^{\mathrm{T}} \delta(0) > 0, \quad e_n^{\mathrm{T}} \delta(1) < 0.$$

Also existiert $p \in (0,1)$ mit $e_n^{\mathrm{T}} \delta(p) = 0$. Für ein solches p haben wir

$$\begin{aligned}\mathring{\Psi}\big(\delta(p)\big) = \Psi\big(\delta(p)\big) = \Psi\Bigg(\Phi\bigg(\mathring{\Psi}\big(\gamma(p)\big)\bigg)\Bigg) \\ = \mathring{\Psi}\big(\gamma(p)\big).\end{aligned}$$

Wieder wegen der Injektivität von $\mathring{\Psi}|_{\mathring{V}}$ folgt

$$\tilde{V}_+ \ni \gamma(p) = \delta(p) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\},$$

ein Widerspruch.

In genau der gleichen Weise erhalten wir für die Menge

$$\tilde{V}_- := \tilde{V} \cap \left(\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0)\right) = U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right) \times (-\rho, o),$$

dass

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}_-) \cap G \neq \varnothing \Rightarrow \mathring{\Psi}(\tilde{V}_-) \subseteq G.$$

Die Menge $\mathring{\Psi}(\tilde{V})$ ist eine Umgebung von z, und z ist im Rand von G. Also ist

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}) \cap G \neq \varnothing \quad \wedge \quad \mathring{\Psi}(\tilde{V}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G}) \neq \varnothing.$$

Es gilt also

$$\mathring{\Psi}(\tilde{V}_+) = \tilde{W} \cap G \quad \vee \quad \mathring{\Psi}(\tilde{V}_-) = \tilde{W} \cap G.$$

Im zweiten Fall setze $\tilde{\Psi} := \mathring{\Psi}|_{\tilde{V}}$, im ersten Fall machen wir noch eine Spiegelung und definieren

$$\tilde{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i e_i\right) := \mathring{\Psi}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \tau_i e_i - \tau_n e_n\right), \quad \text{für } \sum_{i=1}^{n} \tau_i e_i \in \tilde{V}.$$

Bezeichnet man nun $\tilde{\Phi} := \tilde{\Psi}^{-1}$, so ist $\tilde{\Phi}$ ein Diffeomorphismus von $\tilde{W}$ auf $\tilde{V}$ und das Paar $(\tilde{W}, \tilde{\Phi})$ erfüllt alle notwendigen Eigenschaften um eine Karte von $\partial^o G$ zu induzieren. Offenbar ist diese Karte nichts anderes als

$$\left(\tilde{W} \cap \partial^o G,\ \varphi|_{\tilde{W} \cap \partial^o G}\right).$$

▷ Nachrechnen der Integralbeziehung für $\operatorname{supp} f \subseteq \tilde{W}$.

Sei nun f entsprechend der Voraussetzung des Satzes, und sei zusätzlich $\operatorname{supp} f \subseteq \tilde{W}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\partial^o G} f(y)\left(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} w\right)\mathrm{d}\mu(y) &= \int_{\partial^o G \cap \tilde{W}} f(y)\left(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} w\right)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{-1}}\left(\varphi(z)\right)} (f \circ \psi)(t)\left(\Lambda\left(\psi(t)\right)^{\mathrm{T}} w\right)\sqrt{\det\ \mathrm{d}\psi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi(t)}\mathrm{d}\lambda(t)\end{aligned}$$

Wir verwenden das Lemma mit der Matrix

$$A := \mathrm{d}\tilde{\Psi}\left(\pi^{\mathrm{T}}(t)\right) = \left(\ \mathrm{d}\psi(t) \mid w\ \right).$$

Dann ist, mit der Notation des Lemmas,

$$\begin{aligned}\Gamma = A^{-\mathrm{T}} e_n = \mathrm{d}\tilde{\Psi}\left(\pi^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-\mathrm{T}} e_n = \mathrm{d}\tilde{\Phi}\left(\tilde{\Psi}\left(\pi^{\mathrm{T}}(t)\right)\right)^{\mathrm{T}} e_n \\ = \mathrm{d}\tilde{\Phi}\left(\psi(t)\right)^{\mathrm{T}} e_n,\end{aligned}$$

also $\Lambda\big(\psi(t)\big) = \frac{\Gamma}{\|\Gamma\|}$. Weiters ist $B = \mathrm{d}\psi(t)$, und es gilt

$$\Gamma^{\mathrm{T}} w = e_n^{\mathrm{T}} \mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big)^{-1} \cdot \mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big) e_n = 1.$$

Wir erhalten, dass

$$\begin{aligned}\left(\Lambda\big(\psi(t)\big)^{\mathrm{T}} w\right)\sqrt{\det\ \mathrm{d}\psi(t)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\psi(t)} &= \frac{1}{\|\Gamma\|}\sqrt{\det B^{\mathrm{T}} B} \\ &= |\det A| = \big|\det\ \mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big)\big|.\end{aligned}$$

Setzt man dies ein, so folgt also

$$\int_{\partial^o G} f(y)\big(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} w\big)\mathrm{d}\mu(y) = \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right)} f\left(\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big)\right)\big|\mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big)\big|\mathrm{d}\lambda(t).$$

Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz schließt man nun, dass dieses Integral weiter gleich ist

$$= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right)} (f \circ \tilde{\Psi})(\pi^{\mathrm{T}}(t) - \epsilon e_n)\big|\det\ \mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big)\big|\mathrm{d}\lambda(t).$$

Da $\mathrm{supp}(f \circ \tilde{\Psi}) \subseteq U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\big(\varphi(z)\big) \times (-\rho, 0]$ und $f \circ \tilde{\Psi}$ stetig differenzierbar ist, haben wir

$$\begin{aligned}(f \circ \tilde{\Psi})(\pi^{\mathrm{T}}(t) - \epsilon e_n) &= (f \circ \tilde{\Psi})(\pi^{\mathrm{T}}(t) - \epsilon e_n) - (f \circ \tilde{\Psi})(\pi^{\mathrm{T}}(t) - \rho e_n) \\ &= \int_{-\rho}^{-\epsilon} \frac{\partial}{\partial \tau}(\pi^{\mathrm{T}}(t) + \tau e_n)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

Jetzt verwenden wir den Satz von Fubini und erhalten, dass das Integral im Limes weiter gleich ist

$$\begin{aligned}&= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right)\times(-\rho,-\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \tau}\big(f \circ \tilde{\Phi}\big)\big(\pi^{\mathrm{T}}(t) + \tau e_n\big)\big|\det\ \mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t)\big)\big|\mathrm{d}\lambda(t) \times \mathrm{d}\lambda(\tau) \\ &= \int_{U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right)\times(-\rho,-\epsilon)} \frac{\partial}{\partial \tau}\big(f \circ \tilde{\Phi}\big)\big(\pi^{\mathrm{T}}(t) + \tau e_n\big)\big|\det\ \mathrm{d}\tilde{\Psi}\big(\pi^{\mathrm{T}}(t) + \tau e_n\big)\big|\mathrm{d}\lambda(t) \times \mathrm{d}\lambda(\tau).\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} = \mathrm{d}(f \circ \tilde{\Psi}) e_n &= [(\mathrm{d}f) \circ \tilde{\Psi}] \cdot \mathrm{d}\tilde{\Psi} \cdot e_n \\ &= [(\mathrm{d}f) \circ \tilde{\Psi}] w.\end{aligned}$$

Die Transformationsformel gibt, dass das obige Integral weiter gleich ist

$$+ \int_{\tilde{\Phi}\left(U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right)\times(-\rho,-\epsilon)\right)} \mathrm{d}f(x) \cdot w \mathrm{d}\lambda(x).$$

Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz erhält man

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{\tilde{\Phi}\left(U_r^{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\varphi(z)\right)\times(-\rho,-\epsilon)\right)} \mathrm{d}f(x) \cdot w \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\underbrace{\tilde{\Psi}(\tilde{V}_-)}_{=\tilde{W}\cap G}} \mathrm{d}f(x) \cdot w \mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \mathrm{d}f(x) \cdot w \mathrm{d}\lambda(x).$$

10.3 Schritt 2

Wir benützen in diesem Schritt, das es ***glatte Zerlegungen der 1*** gibt.

10.3.1 Lemma.
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $\mathcal{W}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existieren $N \in \mathbb{N}$ und Funktionen $f_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n), i = 1, \dots, N$ mit

▷ $\forall i \in \{1, \dots, N\}, x \in \mathbb{R}^n \colon 0 \leq f_i(x) \leq 1$

▷ $\forall x \in K \colon \sum_{j=1}^N f_i(x) = 1$

▷ $\forall i \in \{1, \dots, N\} \colon \mathrm{supp} f_i$ *kompakt* $\wedge \exists W_i \in \mathcal{W} \colon \mathrm{supp} f_i \subseteq W_i$

Beweis. Sei $z \in K$. Wähle $W_z \in \mathcal{W}$ mit $z \in W_z$ und $\delta > 0$ mit $U_\delta(z) \subseteq W_z$. Nun wähle $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$g \geq 0, \ \mathrm{supp} g \subseteq U_{\frac{1}{4}\delta}(0), \ \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathrm{d}\lambda(x) = 1,$$

und setze

$$f_z(x) \coloneqq \Big(\mathbb{1}_{U_{\frac{1}{2}\delta}(z)} * g \Big)(x) = \int_{U_{\frac{1}{4}\delta}(0)} \mathbb{1}_{U_{\frac{1}{2}\delta}(z)}(x-y) g(y) \mathrm{d}\lambda(y)$$

Da g eine C^∞-Funktion mit kompaktem Träger ist, sind alle Ableitungen integrierbar, und daher $f_z \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiters gilt offenbar $0 \leq f_z \leq 1$ und

$$f_z|_{U_{\frac{1}{4}\delta}(z)} = 1, \quad \mathrm{supp} f_z \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}\delta}(z)} \subseteq W_z.$$

Die Mengen $U_{\frac{1}{4}\delta}(z), z \in K$, sind eine offene Überdeckung von K, und wir finden daher $N \in \mathbb{N}$ und $z_1, \dots, z_N \in K$ sodass

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^N U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j).$$

Die Funktion $\sum_{j=1}^N f_{z_j}$ ist C^∞ und ≥ 1 auf $\bigcup_{j=1}^N U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j)$. Da $\mathrm{supp} f_{z_l} \subseteq U_{\frac{1}{4}\delta}(z_l)$ gilt, ist

$$f_l(x) \coloneqq \begin{cases} \Big(\sum_{j=1}^N f_{z_j}(x)\Big)^{-1} \cdot f_{z_l}(x) & , \ x \in \bigcup_{j=1}^N U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j) \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

eine C^∞-Funktion. Offenbar gilt

$$0 \leq f_l \leq 1, \quad \mathrm{supp} f_l \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}\delta}(z_l)} \subseteq W_{z_l},$$
$$\sum_{l=1}^N f_l(x) = 1 \quad \text{für} \quad x \in \bigcup_{j=1}^N U_{\frac{1}{4}\delta}(z_j).$$

□

Sei nun eine Funktion f gegeben die den Voraussetzungen des Satzes genügt, und zusätzlich $\operatorname{supp} f \subseteq G \cup \partial^o G$ erfüllt.

Zu jedem $z \in G \cup \partial^o G$ sei O_z eine offene Umgebung sodass der Satz für Funktionen deren Träger in O_z liegt gilt. Wähle eine glatte Zerlegung der 1 zu der offenen Überdeckung

$$\{O_z \mid z \in G \cup \partial^o G\}$$

der kompakten Menge $\operatorname{supp} f$; wir bezeichnen sie als $f_1, \ldots, f_N$.
Für jede der Funktionen $f \cdot f_j, j = 1, \ldots, N$, ist die im Satz behauptete Formel richtig. Da diese Formel linear in f ist, folgt ihre Gültigkeit auch für

$$\sum_{j=1}^{N} f \cdot f_j = f \cdot \sum_{j=1}^{N} f_j = f.$$

10.4 Schritt 3

Wähle eine Funktion $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$h \geq 0, \quad \|h\|_1 = 1, \quad \operatorname{supp} h \subseteq U_1(0),$$

und setze

$$k_l(x) \coloneqq l^n h(lx), \ l \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren nun eine Approximation von f angepasst an die Menge

$$L \coloneqq (\operatorname{supp} f) \smallsetminus (G \cup \partial^o G).$$

Nämlich setze

$$f_l \coloneqq (1 - \mathbb{1}_{L + U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l) \cdot f, \ l \in \mathbb{N}.$$

Es ist

$$0 \leq \mathbb{1}_{L + U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l \leq 1,$$

$$(\mathbb{1}_{L + U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin L + U_{\frac{3}{l}}(0) \\ 1 & , \quad x \in L + U_{\frac{1}{l}}(0) \end{cases}$$

und daher

$$|f_l| \leq |f|, \quad f_l(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \notin L + U_{\frac{3}{l}}(0) \\ 0 & , \quad x \in L + U_{\frac{1}{l}}(0) \end{cases}$$

Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} f_l &\subseteq (\operatorname{supp} f) \cap (L + U_{\frac{1}{l}}(0))^C \\ &\subseteq (\operatorname{supp} f) \cap \big((\operatorname{supp} f) \smallsetminus (G \cup \partial^o G)\big)^C \\ &\subseteq G \cup \partial^o G. \end{aligned}$$

Nach dem in den Schritten 1 und 2 bereits bewiesenen erhalten wir also

$$\int_G [\mathrm{d}f_l(x)] w \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{\partial^o G} f_l(y) \cdot \big(\Lambda(y)^{\mathrm{T}} w\big) \mathrm{d}\mu(y).$$

Wir müssen überlegen was passiert, wenn $l \to \infty$ strebt. Dazu beginnen wir mit dem rechten Integral. Der Integrand ist beschränkt durch die von l unabhängige und nach μ integrierbare Funktion $|f(y)| \cdot \|w\|$. Sei $y \in \partial^o G$. Wählt man (W, Φ) wie in der Definition von $\partial^o G$, so gilt $\overline{G} \cap W \subseteq G \cup \partial^o G$ da $W \cap \partial G \subseteq \partial^o G$ ist. Es folgt, dass $L \cap W = \varnothing$, und daher finden wir $l_0 \in \mathbb{N}$ sodass

$$y \notin L + U_{\frac{2}{l_0}}(0).$$

Für alle $l \geq l_0$ gilt daher $f_l(y) = f(y)$. Wir sehen, dass punktweise auf $\partial^o G$,

$$\lim_{l \to \infty} f_l(\Lambda^{\mathrm{T}} w) = f(\Lambda^{\mathrm{T}} w).$$

Der Satz von der beschränkten Konvergenz impliziert nun

$$\lim_{l \to \infty} \int_{\partial^o G} f_l(\Lambda^T w) \mathrm{d}\mu = \int_{\partial^o G} f(\Lambda^{\mathrm{T}}) \mathrm{d}\mu.$$

Um das linke Integral zu behandeln, müssen wir die partiellen Ableitungen von $f_l - f$ abschätzen ($x = (\xi_j)_{j=1}^n$):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_j}[f_l - f](x) &= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big[(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l) f\Big](x) \\
&= \frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big[\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l\Big](x) \cdot f(x) + (\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \\
&= \left(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l\right)(x) f(x) + (\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) \frac{\partial f}{\partial \xi_j}.
\end{aligned}$$

Das Integral über den zweiten Summanden lässt sich leicht behandeln. Zunächst ist

$$|(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) \frac{\partial f}{\partial \xi_j}| \leq |\frac{\partial f}{\partial \xi_j}|$$

und für $x \in G$ finden wir $l_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \notin L + U_{\frac{3}{l_0}}(0)$ da $L \cap G = \varnothing$, also $(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) = 0$ für alle $l \geq l_0$. Mit dem Satz von der beschränkten Konvergenz folgt

$$\lim_{l \to \infty} \int_G \left|(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\right| \mathrm{d}\lambda(x) = 0.$$

Um das Integral über den ersten Summanden abzuschätzen, bemerke dass

$$\begin{aligned}
\left|(\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l)(x) f(x)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)}(x-y) \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(y)\right| \mathrm{d}\lambda(y) \cdot |f(x)| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(x)\right| \mathrm{d}\lambda(x) \cdot \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Die L^1-Norm von $\frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(x)$ berechnet man mit Hilfe der Transformation $x \to \frac{x}{l}$ als

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} k_l(x) \right| \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} l^{n+1} \left| [\frac{\partial}{\partial \xi_j} h](lx) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} l \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} h(x) \right| \mathrm{d}\lambda(x) = l \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} h \right\|_\infty \lambda(U_1(0)).\end{aligned}$$

Nun erhält man

$$\begin{aligned}\int_G \left| (\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) f(x) \right| \mathrm{d}\lambda(x) &= \int_G \mathbb{1}_{L+U_{\frac{3}{l}}(0)}(x) \cdot \left| (\mathbb{1}_{L+U_{\frac{2}{l}}(0)} * k_l)(x) f(x) \right| \mathrm{d}\lambda(x) \\ &\le \lambda(L + U_{\frac{3}{l}}(0)) \cdot l \left\| \frac{\partial}{\partial \xi_j} h \right\|_\infty \lambda(U_1(0)) \cdot \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Da L klein vom Grad 1 ist, strebt dieser Ausdruck für $l \to \infty$ gegen 0.

Wir schließen, dass

$$\lim_{l\to\infty} \int_G |(\mathrm{d}f_l(x) - \mathrm{d}f(x))w| \mathrm{d}\lambda(x) = 0,$$

und daher

$$\lim_{l\to\infty} \int_G \mathrm{d}f_l(x) w \mathrm{d}\lambda(x) = \int_G \mathrm{d}f(x) w \mathrm{d}\lambda(x).$$

Der Beweis des Satzes ist damit vollständig. □

Literaturverzeichnis

[1] Kusolitsch, Norbert. *Maß und Wahrscheinlichkeitstheorie: Eine Einführung*. Springer, 2014.

[2] Kaltenbäck, Michael. *Fundament Analysis*. Heldermann, 2014.

[3] Engl, Heinz W.; Neubauer, Andreas. *Skriptup Analysis*. Institut für Industriemathematik, Johannes Kepler Universität Linz.

Stichwortverzeichnis