

Lecture 1

1.1 Organisatorisches

Alle Informationen sind Online zu finden aber für die Form von der Mitschrift sollte hier etwas stehen.: Die LVA ist eine UE + Vo.

1.1.1 Übung

Für die Übung benötigt man ca. 60% der Käuze und zwei positive Tafelleistungen. Man darf einmal fehlen + nachbringen aber ohne guten Grund. Ansonsten braucht man einen guten Grund (meine Oma ist gestorben, ist ab dem zweiten mal kein guter Grund).

1.1.2 Vorlesung

Die Vorlesung ist ein Tafelvortrag. Prüfung teilt sich auf in schriftlich und mündlich ... steht alles in der Email. für die Form reicht der Text

1.2 Topologische Grundbegriffe

Da wir für viele Themen die in Analysis 3 behandelt werden, Resultate aus der Maßtheorie benötigen, fangen wir mit einigen Grundlagen der Topologie an. Da man für Topologie nix braucht (man muss nur ein bisschen mit Mengen spielen).

Im Folgenden geht es darum den Konvergenz Begriff zu verallgemeinern. Dazu betrachten wir Räume, gerade noch soviel Struktur tragen, dass man von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit und so weiter sprechen kann.

Zur Wiederholung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1.2.1 (Offene ϵ -Kugel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und O die Menge aller offenen Teilmengen von X , wobei $O \subseteq X$ ist offen, wenn $\forall x \in O \exists \epsilon > 0$ so dass die ϵ -Kugel

$$U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \epsilon\}$$

ganz in O enthalten ist. Die Menge $O \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die Eigenschaften:

1. $\emptyset, X \in O$,
2. $O_1, O_2 \in O \implies O_1 \cap O_2 \in O$,
3. $O_i \in O, i \in I$ Indexmenge beliebig $\implies \bigcup_{i \in I} O_i \in O$.

Wörtlich bedeutet (1), dass sowohl die leere Menge als auch der ganze Raum offen sind. (2), dass der Schnitt zweier offener Mengen wieder offen ist. Und (3) dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist.

Diese Eigenschaften bilden den Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung. Und wir erhalten die folgende Definition.

Definition 1.2.2: Topologie

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X , wenn \mathcal{T} folgende Eigenschaften hat.

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Aus $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ folgt $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T}, i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von \mathcal{T} heißen *offene Mengen*. Das Paar (X, \mathcal{T}) bezeichnet man als *topologischen Raum*.

Beispiel 1.2.3 (Topologien)

(i) **Diskrete Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

(ii) **Indiscrete (Klumpen) Topologie:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(iii) **cofinite Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\}.$$

Note:-

Wir überprüfen, dass die cofinite Topologie eine Topologie ist.

Um das einzusehen, muss man kurz hinschauen. Im Vergleich dazu muss man das bei der diskreten und indiscrete Topologie nicht machen.

(O1) Sei $V \subset \mathcal{T}$:

1. Fall $V = \emptyset$: $\bigcup V = \emptyset$

2. Fall $V \neq \emptyset$: $\bigcup V = \emptyset$ Wähle $O \in V$ dann gilt $X \setminus \bigcap V \subset X \setminus O$ endlich. ^a

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset$: $\bigcap V = X$

(O3) Sei $V \neq \emptyset$, dann gilt $X \setminus \bigcup V = \bigcap_{\text{endlich}} \dots$ ist endlich

$$^a \bigcup V := \{x \mid \forall v \in V : x \in v\}$$

Beispiel 1.2.4 (Eine Metrik induziert eine Topologie)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. mit $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ Dann ist $U_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ eine offene Menge für alle $x \in X$ und $r > 0$. Wir definieren darauf die Topologie

$$\mathcal{T} = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq O\}.$$

Um einzusehen, dass \mathcal{T} eine Topologie ist, müssen wir die drei Eigenschaften überprüfen bzw. schon zwei mal hinschauen.

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}, x \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $r > 0$ so dass $U_r(x) \subseteq V$. Dann gilt auch $U_r(x) \subseteq V \subset \bigcup V$.

(O3) Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}$ endlich, $x \in \bigcap V$. Dann für jedes $V \in \mathcal{V}$ wähle $r_V > 0$ so dass $U_{r_V}(x) \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V \Rightarrow \bigcap_{V \in \mathcal{V}} U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V$. Das noch etwas genauer aufgetröselt: $\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \{y \in X \mid d(x, y) < r_V\} = \{y \in X \mid \forall V \in \mathcal{V} : d(x, y) < r_V\}$.

Beispiel 1.2.5

Betrachte \mathbb{Z} . Für $k \in \mathbb{Z}$ und $l \geq 1$ sei $U_{k,l} := \{k + nl \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Weiters definiere $\mathcal{T} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in \mathbb{Z} \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq 1; U_{k,l} \subset 0\}$. Dann ist \mathcal{T} eine Topologie auf \mathbb{Z} .

(O1) $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

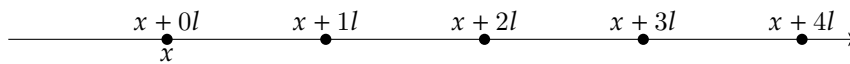
(O2) Sei $V \subset \mathcal{T}$, $y \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathbb{Z}, l \geq 1$ so dass $U_{x,l} \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{x,l} \subseteq V \subset \bigcup V$.

(O3) Sei $V \subset \mathcal{B}$ endlich $x \in \bigcap V$ Ein $V \in \mathcal{V}$ wähle $l_v \in \mathbb{Z}, l_v \geq 1$ so dass $U_{x,l_v} \subseteq V$.

Lecture 2

Für alle handwerklich begabten wird es jetzt interessant. - Ich vermute das die Schnittmenge zwischen mathematik Studenten und handwerklich begabten gering ist - Aber wenn wir eine Metrik haben, dann können wir eine Topologie Basteln. Hierfür definieren wir die Menge:

$$Z : U_{x,l} := x + l\mathbb{Z} = \{x + ln \mid n \in \mathbb{Z}\}, x \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 1$$



Das ganze ist sehr lustig, also unanschaulich. Also lustig für Mathematiker halt. Es kann natürlich sein das einem der Witz an dem ganzen bis dato nicht aufgefallen ist. Aber nach dem man darauf aufmerksam gemacht wurde, ist es sehr lustig.

Betrachten wir also die Topologie $\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall x \in O \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq 1 : U_{x,l} \subseteq O\}$.

- Sei $U_{k,l} \in \mathcal{T}, x \in U_{k,l}$.
Dann gilt

$$U_{x,l} = U_{k,l} \text{ endlich}$$

Denn mit $n_x \in \mathbb{Z} : x = k + n_x l$. erhalten wir:

- Sei $y \in U_{x,l} : y = x + n_y l = U_{k,l} \ni k + (n_x + n_y)l$.
- Sei $y \in U_{k,l} : y = k + n_y l = U_{x,l} \ni x + (n'_y - n_x)l$.

- Das folgende ist eine Mengenspiellerei und zur Erinnerung: Das gefällt uns!
Wir betrachten also die Menge

$$\mathbb{Z} \setminus U_{k,l} \in \mathcal{T} : \mathbb{Z} \setminus U_{k,l} = \bigcup_{x=k+1}^{k+l-1} U_{x,l} \in \mathcal{T}$$

Und weiters

$$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p} \dots \{1, -1\}$$

Hier ist wichtig zu bemerken das die Geometrische Progression unendlich ist und die Menge $\{-1, 1\}$ nicht. Das bedutet $\{1, -1\} \notin \mathcal{T}$.
 $= \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ \in \mathcal{T}}} \mathbb{Z} \setminus U_{0,p}$. $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Prim}\} \Rightarrow \mathbb{P}$ unendlich. Damit haben wir auch gezeigt das die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Definition 2.0.1

Sei X eine Menge. Betrachte $\mathbb{T}(x) := \{\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } X\}$.

1. $\mathbf{T}(X)$ ist halbgeordnet mit