Lecture 1

1.1 Organisatorisches

Alle Infomationen sind Online zu finden aber für die Form von der Mitschrift sollte hier etwas stehen: Die LVa ist eine UE + VO.

1.1.1 Übung

Für das Positive absolvieren der Übung benötigt man ca. 60% der Kreuze und zwei positive Tafeleistungen. Man darf einmal fehlen + nachbringen aber nicht ohne guten Grund. Für weiteres fehlen braucht man einen guten Grund ("meine Oma ist gestorben" ist ab dem zweiten Mal kein guter Grund mehr [1]).

1.1.2 Vorlesung

Die Vorlesung ist ein Tafelvortag. Die Prüfung teilt sich auf in schriftlich und mündlich. Die schriftliche Prüfung ist als Ticket für die Mündliche zu verstehen. Der Stoff der Schriftlichen Prüfung sind die Übungsbeispiele. Der Stoff der Mündlichen Prüfung ist der Inhalt der Vorlesung (Wichtig hierbei: "der Vorlesung" heißt hier nicht irgendeine Vorlesung, sondern jene, die zum Zeitpunkt der Entstehung des Skriptes gehalten wurde).

1.2 Topologische Grundbegriffe

Da wir für viele Themen die in Analysis 3 behandelt werden, Resultate aus der Maßtheorie benötigen, fangen wir mit einigen Grundlagen der Topologie an. Da man für Topologie nix braucht (man muss nur ein bisschen mit Mengen spielen).

Im Folgenden geht es darum, den Konvergenzbegriff zu verallgemeinern. Dazu betrachten wir Räume, welche gerade noch soviel Struktur tragen, dass man von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit und so weiter sprechen kann.

Zur Wiederholung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1.2.1 (Offene ϵ-Kugel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X, wobei $O \subsetneqq X$ ist offen, wenn $\forall x \in O \exists \varepsilon > 0$ so dass die ε-Kugel

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

ganz in O enthalten ist. Die Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die Eigenschaften:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{O}$,
3. $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$ Indexmenge beliebig $\implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

[1] Im nachhinein muss ich sagen, es ist schon möglich mehr als zwei Omas zu haben. Ich denke es ist ein guter Grund, wenn man es nachweisen kann.

Wörtlich bedeutet (1), dass sowohl die leere Menge als auch der ganze Raum offen sind. (2), dass der Schnitt zweier offener Mengen wieder offen ist. Und (3) dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist.

Diese Eigenschaften bilden den Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung. Und wir erhalten die folgende Definition:

Definition 1.2.2: Topologie

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, wenn $\mathcal{T}$ folgende Eigenschaften hat.

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$.

(O2) $\forall n \in \mathbb{N}$ und $O_1, \dots O_n \in \mathcal{T} : \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T},\ i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet man als *topologischen Raum*.

Note:-

Die Bedinnung (O2) kann auch abgespeckter formuliert werden. Es reicht zu fordern, dass

$$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} : O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{T}$$

gilt. Dann folt die allgemeine Formulierung durch Vollständige Induktion.

Beispiel 1.2.3 (Topologien)

(i) **Diskrete Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

(ii) **Indiscrete (Klumpen) Topologie:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(iii) **cofinite Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\}.$$

Proof. Die Beispiele sind so schon sehr schön, aber noch schöner sind sie, wenn wir nicht nur glauben müssen das es Topologien sind, sondern es auch überprüfen können.

(i) Diskrete Topologie: Überprüfung durch hinsehen.

(ii) Indiscrete Topologie: Überprüfung durch hinsehen.

(iii) cofinite Topologie: überprüfen durch genauer hinschauen

  (O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
  1. Fall $Y = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$
  2. Fall $V = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$ Wähle $O \in V$ dann gilt $X \setminus \bigcap V \subset X \setminus O$ endlich. [a]

  (O2) Sei $V \in \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

  (O3) Sei $V + \emptyset$, dann gilt $X \setminus \bigcup V = \bigcap\limits_{\text{endlich}}$ ist endlich.

Damit haben Wir (Das "Wir" impliziert das es eine Art Gruppenarbeit ist. Diese Implikation ist grundlegend falsch was jedem Beusucher einer Vorlesung klar sein sollte.) gezeigt das die kofinite Topologie Tatsächlich eine Topologie ist.

[a] $\bigcup V := \{x \mid \forall v \in \mathcal{V} : x \in V\}$

Wir widmen uns nun noch weiteren Beispielen für Topologien.

Beispiel 1.2.4 (Eine durch eine Metrik induzierte Topologie)

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. mit $X \times X \to \mathbb{R}$ Dann ist $U_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ eine offene Menge für alle $x \in X$ und $r > 0$. Wir definieren darauf die Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq O\}.$$

Auch hier wollen wir noch zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Topologie handelt.

Proof. Um einzusehen, dass $\mathcal{T}_d$ eine Topologie ist, müssen wir wieder die drei Eigenschaften überprüfen bzw. schon zwei mal hinschauen....oder dreimal:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$. Wobei

$$X \subseteq X, \quad \forall x \in X,\ r > 0 : \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subseteq X$$

Hierbei ist interessant zu bemerken, dass die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist, also insbesondere auch eine Teilmenge von der Umgebung $U_r(x)$. Da eine Menge der Form $U_r(x)$ nie leer sein kann, da $x \in X$ und $d(x,x) = 0 < r$, Das heist das $U_r(x)$ immer zumindest das Element x selbst enthält.

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}_d, x \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $r > 0$ so dass $U_r(x) \subseteq V$. Dann gilt auch

$$U_r(x) \subseteq V \subset \bigcup V$$

.

(O3) Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_d$ endlich, $x \in \bigcap V$. Dann wähle für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $r_V > 0$ so dass $U_{r_V}(x) \subseteq V$
Dann gilt auch

$$U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V \Rightarrow \bigcap_{V \in \mathcal{V}} U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V$$

Das noch etwas genauer aufgedröselt:

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \{y \in X \mid d(x,y) < r_V\} = \{y \in X \mid \forall V \in \mathcal{V} : d(x,y) < r_V\}$$

.

Beispiel 1.2.5 (Geometrische Regression)

Betrachte $\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $l \geq 1$ sei $U_{k,l} := \{k + nl \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Weiters definiere $\mathcal{T} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in = \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq ; U_{k,l} \subset 0\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{Z}$.

(O1) $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei $V \subset \mathcal{T}$, $y \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathbb{Z}, l \geq 1$ so dass $U_{x,l} \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{x,l} \subseteq V \subset \bigcup V$.

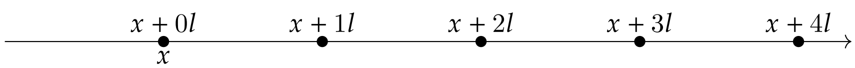
(O3) Sei $V \subset \mathcal{B} endlich x \in \bigcap V$ Ein $V \in \mathcal{V}$ wähle $l_v \in \mathbb{Z}. l_v \geq 1$ so dass $U_{x,l_v} \subseteq V$.

Lecture 2

Jetzt etwas für Bastelenthusiasten. Wenn wir eine Metrik haben, dann können wir eine Topologie basteln. Hirfür definieren wir die Menge:

$$Z : U_{x,l} := x + l\mathbb{Z} = \{x + ln \mid n \in \mathbb{Z}\}, x \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 1$$

.



Das ganze ist sehr lustig, also unanschaulich. Also lustig für Mathematiker halt. Es kann natürlich sein das einem der Witz an dem ganzen bis dato noch nicht aufgefallen ist. Aber nach dem man darauf aufmerksam gemacht wurde, ist es sehr lustig.

Betrachten wir also die Topologie:

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall x \in O \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq 1 : U_{x,l} \subseteq O\}$$

- Sei $U_{k,l} \in \mathcal{T}, x \in U_{k,l}$.
  Dann gilt: $U_{x,l} = U_{k,l}$: endlich Denn mit $n_x \in \mathbb{Z} : x = k + n_x l$. erhalten wir:

  - Sei $y \in U_{x,l} : y = x + n_y l = U_{k,l} \ni k + (n_x + n_y)l$.
  - Sei $y \in U_{k,l} : y = k + n_y l = U_{x,l} \ni x + (n'_y - n_x)l$.

- Das folgende ist eine Mengenspielerei und zur Erinnerung: Das gefällt uns!
  Wir betrachten also die Menge

  $$\mathbb{Z} \setminus U_{k,l} \in \mathcal{T} : \mathbb{Z} \setminus U_{k,l} = \bigcup_{x=k+1}^{k+l-1} U_{x,l} \in \mathcal{T}$$

  Und weiters

  $$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p} \ldots \{1, -1\}$$

  Hir ist wichtig zu bemerken, dass die Geometrische Progession unendlich ist und die Menge $\{-1, 1\}$ nicht. Das bedeutet $\{1, -1\} \notin \mathcal{T}$.
  $= \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \underbrace{\mathbb{Z} \setminus U_{0,p}}_{\in \mathcal{T}}$. $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Prim}\} \Rightarrow \mathbb{P}$ unendlich. Damit haben wir auch gezeigt, dass die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Definition 2.0.1: Halbordnung auf der Menge der Topologien

Sei X eine Menge. Betrachte

$$\mathbb{T}(x) := \{\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } X\}$$

Die Potenzmenge einer Menge ist in natürlicher Weise halbgeordnet durch die Teilmengenbeziehung $\subseteq$. Damit ist auch $\mathbb{T}(X)$ halbgeordnet durch $\subseteq$. Konkreter definieren wir $\mathbb{T}(X)$ ist eine halbgeordnet mit $\subseteq$

Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}(x)$ Dann ist $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ eine Hablbordnung mit:

$$\forall O \subseteq X : O \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow O \in \mathcal{T}_2$$

Note:-

Definition 2.0.2: Feinheit

Sei X eine Menge, und $\mathcal{T}, \mathcal{V} \in \mathbb{T}(X)$. *Wir sagen* $\mathcal{T}$ *ist* feiner *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, *und sagen* $\mathcal{T}$ *ist* gröber *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$.

Weiters schauen wir uns noch zwei Eigenschaften von $\mathbb{T}(X)$ an .

- $\{\emptyset, X\} \in \mathbb{T}$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T} : \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}$ so wie $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{T}(X)$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) : \mathcal{T} \subset \mathbb{P}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ Dann gilt: $\mathbb{V} \neq \emptyset$[1] hat ein Infimum in $\mathbb{T}(X)$.

Die erste Eigenschaft geht aus vorherigen Beobachtungen hervor. Die zweite Eigenschaft bedarf etwas mehr Arbeit.

Proof. Wir wollen zeigen, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ ein Infimum hat.

1. Im ersten Schritt wählen wir einen Kandidaten $\mathbb{V}$ in $\mathbb{T}(X)$ Hierfür betrachten wir $\bigcap \mathbb{V} \in \mathbb{T}(X)$
   - Sei $V \in \mathbb{V}$ dann ist $\emptyset \in V$ und $X \in V \Rightarrow \emptyset \in \bigcap \mathbb{V}$ und damit auch $x \in \bigcap \mathbb{V}$
   - Betrachte weiters $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$ und $V \in \mathbb{V}$. Dann gilt:

   $$\mathcal{V} \subseteq V \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \in V \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \in \bigcap \mathbb{V}.$$

   - $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$ endlich und sei $V \in \mathbb{V}$. Dann gilt:

   $$\mathcal{V} \subseteq V \Rightarrow \bigcap \mathcal{V} \in V \Rightarrow \bigcap \mathcal{V} \in \bigcap \mathbb{V}.$$

   Damit sehen wir, dass unser gewählter Kandidat in der Grundmenge ist - was ihn zu einem guten Kanditaten macht -. (Hier Politik Bashing einfügen - da, da gibt es zu meist keinen guten Kandidaten etc. -)

2. Im nächsten Schritt zeigen wir, dass $\bigcap \mathbb{V}$ eine Untere Schranke ist:
   Sei $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ dann gilt $\bigcap \mathbb{V} \in \mathbb{T}(X)$
   Mit $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$: fehlt zu zeigen, dass $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$. Was direkt daraus folgt das $V \in \bigcap \mathbb{V}$: da $V \in \mathcal{V}$

3. Wir zeigen jetzt noch, dass $\bigcap \mathbb{V}$ nicht nur irgend eine untere Schranke ist, sondern die Größte.
   Sei $\mathcal{W} \in \mathbb{T}(X)$ eine untere Schranke von $\mathbb{V}$ - hier irgend eine untere Schranke - und fragen uns: Was bedeutet es, eine untere Schranke zu sein?

   $$\forall V \in \mathbb{V} : \mathcal{W} \subseteq V$$

   Zu zeigen ist noch: $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$. Das heißt $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} : \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Das heißt wiederum $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V}, \forall O \in \mathcal{W} : O \in \mathcal{V}$. also $\forall O \in \mathcal{W} : O \in \bigcap \mathbb{V}$. Das heißt $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$.

Note:-

Jede Menge, die ein Infimum hat und ein größtes Element, dann hat jede Teilmenge auch ein Supremum.

An der Bemerkung angelehnt, wollen wir jetzt noch zeigen, dass jede Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ auch ein Supremum hat.

[1] um Sonderfälle zu vermeiden

Note:-

Korollar 2.0.3 Jede Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ hat ein Supremum.

ergleichen wir das mit der Eigenschaft das $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ ein Infimum hat. Dan Wäre dsa Äquivallent das die vereinigung der Topologien das Supremum ist. Aber im Algemeinen ist die Vereinigung von Topologien keine Topologie.

Proposition 2.0.4

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{S}^{a} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$\bigstar := \left\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} O_{ij} \;\middle|\; I \text{ Menge},\ n_i \in \mathbb{N},\ O_{ij} \in \mathcal{S} \right\}.$$

eine Topologie

[a] Weil S oder $\mathcal{S}$ macht keinen Unterschied - Die Begründung begründet etwas -

Proof. Proposition: 2.0.4:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Folgt direkt aus $\mathbb{I} = \emptyset \Rightarrow \emptyset$ und $n_i = 0 \Rightarrow X$,

(O2) Sei $V \subseteq \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

(O3) Es fehlt zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Seien also

$$\bigcup_{i\in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \in \mathcal{T}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Dann gilt

$$\bigcap_{k=1}^{m} \left[\bigcup_{i\in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \right] = \bigcup_{(i_1,\dots,i_m)\in I_1\times\cdots\times I_m} \left(\bigcap_{j=1}^{n_{i_1 1}} O_{i_1 j 1} \cap \cdots \cap \bigcap_{j=1}^{n_{i_m k}} O_{i_m jk} \right)$$

und diese Menge ist wieder eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$, gehört also zu $\mathcal{T}$.

Lemma 2.0.5 $\bigstar$ Ist die kleinste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält.

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\bigstar$ die kleinste [a] Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält

[a] Die gröbste

Proof. Lemma 2.0.5:
jede Topologie, die $\mathcal{S}$ umfasst, muss auch $\mathcal{T}$ umfassen. Also ist $\bigstar \subseteq \mathcal{T}$.

Korollar 2.0.6

Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$. Dann ist $\sup \mathbb{V}$ die von $\bigcup \mathbb{V}$ erzeugte Topologie.

Proof. Korollar 2.0.6:

$$\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} : \sup \mathbb{V} \geq \mathcal{V} \Rightarrow \sup \mathbb{V} \supseteq \bigcup \mathbb{V} \Rightarrow \sup \mathbb{V} \geq \mathcal{R}.$$

Definition 2.0.7: Stetig

Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ topologische Räume, und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig**, wenn

$$\forall O \in \mathcal{V} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}.$$

Muss man sich spezifischer ausdrücken, so sagt man auch: f ist $\mathcal{T}$–$\mathcal{V}$–stetig.[a]

[a] An diesem Punkt ist es angebracht, Panik zu bekommen, da wir hier den Begriff der Stetigkeit mit einer zweiten Definition belegen

2.0.1 Einschub: Metrik

Welche Begriffe kennen wir? - das wir \{Woracheck}- (Er kennt vermutlich auch noch viele andere Begriffe, von denen wir bis jetzt noch "verschont geblieben" sind.)

- konvergente Folge
- $A \subseteq X$. Der **Innere** von A (=: $\mathring{A}$) ist
$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A \mid \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq A\}.$$
- $A \subseteq X$ heißt **offen** $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
- $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.
- $A \subseteq X$ heißt **Abschluss** von A ($\overline{A}$) ist
$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0 : U_r(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$
- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ heißt **stetig** $\Leftrightarrow$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$
- $A \subseteq X$ heißt **kompakt** $\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d. h.
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies \exists I_0 \subseteq I \text{ endlich mit } A \subseteq \bigcup_{i \in I_0} O_i.$$
- **Satz:** f ist stetig $\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ offen.

2.0.2 Definitionen in topologischen Räumen

Definition 2.0.8: Offen und abgeschlossen

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

- $A \subseteq X$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$.
- $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

Lemma 2.0.9 Lemmachen

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologisch und $A \subseteq X$.

1. $\bigcup\{O \subseteq X \mid O \in \mathcal{T}, O \subseteq A\}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

2. $\underbrace{\bigcap\{C \subseteq X \mid X \setminus C \in \mathcal{T},\, A \subseteq C\}}_{\text{Dieser}}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.

Proof. Lemma 2.1.3:

(ii)+(iii) $\forall C$ aus **Dieser** Menge halt: Erfüllt $C \supseteq A$, so gilt auch $\bigcap\{C \dots\} \supseteq A$.
Denn: $X \setminus \bigcap\{C\} \subseteq X \setminus A$. Also ist $\bigcap C \supseteq A$.
Sei $D \subseteq X$, sodass $D \supseteq A$. $\Rightarrow D$ kann noch in $\bigcap C$ enthalten sein.

$$X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) \subseteq X \setminus A \Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \supseteq A.$$

Sei $D \subseteq X$, also $D \supseteq A$.

$$\Rightarrow D \text{ kann nur in } \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \text{ enthalten sein.}$$

Definition 2.0.10: Innere, Äußere und Rand

- Das *Innere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\mathring{B} = \bigcup\{\, O \in \mathcal{T} : O \subseteq B \,\}.$$

- Das *Äußere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\bar{B} = \bigcap\{\, C \subseteq X : X \setminus C \in \mathcal{T},\, B \subseteq C \,\}.$$

- Der *Rand* ∂B einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\partial B = \bar{B} \setminus \mathring{B}.$$

Definition 2.0.11: kompakt

Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K, also $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq K,$$

eine endliche Teilüberdeckung besitzt, es also $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ gibt mit

$$V_1 \cup \dots \cup V_n \supseteq K.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\mathrm{cl}(A) \subseteq X$ kompakt ist.
Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X, also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{C}$ die **endliche Durchschnittseigenschaft** hat, wenn für je endlich viele $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ stets

$$C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset$$

gilt.

Satz 2.0.12 Zusammenhang Zwischen Metrischen und Topologischen Räumen

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann betrachte den Topologischen Raum $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ mit. Dann sind alle Begriffe die wir in metrischen Räumen definiert haben auch in topologischen Räumen definiert.

- $\forall A \subseteq X$: A ist offen im Metrischen Sinne $\Leftrightarrow$ A ist offen im topologischen Sinne
- usw

Lecture 3

Ein großes Problem in der Mathematik ist die Benennung von Objekten. Hier wird einem diese Problem deutlich vor Augen geführt. Um eine kleine Orientierung zu bieten lege ich jetzt fest, und hoffe, dass ich mich auch daran halte, welche Schriftarten ich für welche Objekte festlegen möchte.

Note:-

Notation:

- Standart Menge: $A, B, C, \dots X$
- Umgebungen (Spezifischere Mengen): $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \dots \mathscr{X}$
- Topologie (Menge mit Offenen Mengen): $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \mathcal{X}$
- Filter (Menge mit bestimmten Eigenschaften): $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots \mathfrak{X}$
- Punkte (Elemente der Menge); $a, b, c, \dots x$

Wir haben (leider[1]) noch mehr Objekte, und mehr Schriftarten würden nicht zur besseren Übersichtlichkeit beitragen. - Ich persönlich weiß auch das ich früher oder noch früher durcheinander kommen werde wenn ich neben: mathcal, mathbf mathfrak, mathbb, mathscr noch mehr schriftarten verwende.- [2] [3]

Definition 3.0.1: Dichtheit, Häufungspunkt, Isolierter Punkt

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum und $A \subset X$.

- A ist **dicht** in X, falls $\bar{A} = X$.
- $x \in X$ ist ein **Häufungspunkt** von A, falls: $\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists y \in A : y \in U \setminus \{x\}$.
- $x \in X$ ist ein **isolierter Punkt** von A, falls: $\exists 0 \in \mathcal{T} : x \in O : O \cap A = \{x\}$.

Definition 3.0.2: Umgebung

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $\mathcal{U} \subset X$ heißt **Umgebung** von x, falls

$$\exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset \mathcal{U}$$

.

Definition 3.0.3: Filter

Für eine nichtleere Menge M heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein *Filter* auf M, wenn

[1] Die Mathematik wäre möglicherweise einfacher mit weniger

[2] Es sind so schon zu viele für meinen Geschmack.

[3] $\mathcal{S}\mathbf{S}\mathfrak{S}\mathbb{S}\mathscr{S}$

(F1) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(F2) $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$,

(F3) $F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1 \in \mathfrak{F}$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M$.

Lemma 3.0.4

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Menge aller Umgebungen

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$$

von x ein Filter auf X.

Proof. Lemma: 3.0.4
Wir überprüfen die Filtereigenschaften.:

(F1) $x \in \mathcal{U}(x)$ und $X \in \mathcal{T}, x \in X \subseteq X$ Damit haben wir

$$\emptyset \notin \mathcal{U}(x) \text{ und } \forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U$$

(F2) $U_1, U_2 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)\ \forall O_1, O_2 \in \boldsymbol{\mathcal{O}}$ mit $x \in O_1 \subseteq U_1,\ x \in O_2 \subseteq U_2$

$$\Rightarrow x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$$

(F3) $U \in \mathcal{U}(x), V \supseteq$ Wähle

$$O \in \mathcal{T} \text{ und } x \in O \subseteq \mathcal{U} \subseteq V$$

Hir ist meine Notationelle Einführung schon an seine Grenze gekommen. Wie nehmen die Menge (also U) aller Umgebungen von x und nennen sie $\mathcal{U}(x)$. aber wir zeigen, dass es ein Filter ist. Damit wäre ja $\mathfrak{U}(x)$ die Richtige Notation. - Ich will konsistent bleiben aber habe es schon aufgegeben. -

Proposition 3.0.5

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Top-Raum und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Top-Raum Dann gilt:

1. $\forall O \in X \Leftrightarrow (\forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x))$
2. Sei $f : X \to Y$, dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X \forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \in \mathcal{U}^X(f(x)) \exists u \in \mathcal{U}^Y(f(x)) : f(u) \subseteq \mathcal{U}^Y(f(U)) \subseteq V$$

3. Sei $A \in X$, dann ist $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall u \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset\}$

Proof. Prop: 3.0.5

1. "$\Rightarrow$" Sei $x \in O \in \mathcal{T}$, dann gilt:

$$x \in O \subseteq 0$$

"$\Leftarrow$" $\forall x \in O$ wähle $\mathcal{Q}_x \subseteq O$ Dann haben wir:

$$\{x\} \subseteq O_x \subseteq O \Rightarrow \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in O} \mathcal{Q}_x}_{\text{Offen}} \subseteq \bigcup_{x \in O} O = O$$

2. "$\Rightarrow$" Sei $x \in X$, $V \in \mathcal{U}^Y(f(x))$. Wähle $Q \in \mathfrak{B}$ mit $f(x) \in Q \subseteq V$
$\Rightarrow f^{-1}(Q) \in \mathcal{T}$ Das Folgt aus unseer Charakterisierung von stetigen Funktionen.
Betrachte $x \in f^{-1}(Q) \in \mathcal{U}^X(x)$ damit haben wir:

$$f(f^{-1}(Q)) \subseteq Q \subseteq \mathfrak{B}$$

"$\Leftarrow$" Sei $O \in \mathfrak{B}$ Wir wollen zeigen dass, das Vollständige Urbild wieder offen ist. Sei $x \in f^{-1}(O)$, d.h. $(f(x) \in O \Rightarrow O \in \mathcal{U}^Y(f(x)))$
Wähle $U \in \mathcal{U}^X(x)$ mit $f(U) \subseteq O$

$$\Rightarrow U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(O)$$

und

$$U \in \mathcal{U}^X(x) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{U}^X(x) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$$

3. "$\subseteq$" Sei $x \notin \overline{A}$, d.h. $x \in X \setminus \overline{A}$ (Wobei $X \setminus \overline{A}$) ist offen $:\leftrightarrow$ Offen $\Leftrightarrow X \setminus \overline{A} \in \mathcal{U}(x)$

$$\overline{A} \supseteq A \Rightarrow X \setminus \overline{A} \Rightarrow A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$$

"$\supseteq$" Sei $x \in X$ und $\exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset$ wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$

$$\Rightarrow O \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \setminus O$$
$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq X \setminus O \Rightarrow x \in \overline{A}$$

Lemma 3.0.6

- $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer-Raum, dann ist id_X stetig.
- $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ und $\langle Z, \mathcal{W} \rangle$ Topologische-Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Proof. Lemma: 3.0.6

- $X \overset{id:X}{\to} X$ Sei $O \in \mathcal{T}$, dann gilt:
$$id_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}$$
- $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$ Sei $O \in \mathcal{W}$, dann gilt:

$$g^{-1}(O) \in \mathcal{V} \text{ und } f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$$
$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$$
$$\Rightarrow g \circ f \text{ ist stetig.}$$

Note:-

Zur Wiederholung: Aus Analysis 1 wissen wir, dass jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert hat.

Proof. Eindeutigkeit des Grenzwerts
Seien $x_n \to x$ und $x_n \to y$ mit $x \neq y (\Leftrightarrow d(x,y) > 0)$.
Wähle $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \frac{d(x,y)}{3} \forall n \geqslant N_1$, und $d(x_n, y) < \frac{d(x,y)}{3}\ \forall n \geqslant N_2$.

Dann folgt für $N := \max\{N_1, N_2\}$ der Widerspruch:

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_N) + d(x_N,y) < \frac{d(x,y)}{3} + \frac{d(x,y)}{3} = \frac{2\,d(x,y)}{3} < d(x,y).$$

Im Folgenden betrachten wir Hausdorff-Räume. Das sind Räume in denen sich Punkte trennen lassen (Die T2-Eigenschaft bzw. Hausdorff-Eigenschaft). Diese Eigenschaft ist im Grunde vergleichbar mit der Eindeutigkeit von Grenzwerten in metrischen Räumen.

Definition 3.0.7: Hausdorff-Raum

Ein topologischer Raum $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ heißt *Hausdorff-Raum* oder $(T2)$-*Raum*, wenn folgendes Trennungsaxiom erfüllt ist:

(T2) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es disjunkte, offene Mengen O_x und O_y mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$.

Bevor wir weiter mit der Hausdorff-Eigenschaft arbeiten, betrachten wir bzw definieren wir noch gerichtete Mengen.
Die nebenbei viel mehr Sinn machen um das Riemann-Integral zu definieren.

Definition 3.0.8: Gerichtete Menge

Sei I eine nicht leere Menge und $\leqslant$ eine Relation auf I. Dann heißt $(I, \leqslant)$ eine *gerichtete Menge*, wenn $\leqslant$ folgenden drei Bedingungen genügt:

- **Reflexivität:**

$$\forall i \in I: \; i \leqslant i.$$

- **Transitivität:**

$$\forall i,j,k \in I: \; (i \leqslant j \wedge j \leqslant k) \Rightarrow i \leqslant k.$$

- **Richtungseigenschaft:**

$$\forall i,j \in I \; \exists k \in I: \; i \leqslant k \wedge j \leqslant k.$$

Nach dem Wir jetzt wissen was eine gerichtete Menge ist, können wir uns auch gleich die Riemannsumme anschauen.

Beispiel 3.0.9 (Riemansumme)

Wir nennen das Paar

$$\mathcal{R} = \big((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, \, (\eta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})} \big)$$

eine *Riemann-Zerlegung* eines Intervalls $[a,b]$, falls

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{R})} = b, \qquad \eta_j \in [\xi_{j-1}, \xi_j], \quad j = 1, \ldots, n(\mathcal{R}),$$

und nennen

$$|\mathcal{R}| := \max\{\, \xi_j - \xi_{j-1} \; ; \; j = 1, \ldots, n(\mathcal{R}) \,\}$$

die *Feinheit der Zerlegung*.

Weiter sei

$$\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2 \ :\Longleftrightarrow\ |\mathcal{R}_2| \leqslant |\mathcal{R}_1|$$

Ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller solcher Zerlegungen, dann ist $(\mathfrak{R}, \preceq)$ eine gerichtete Menge. In diesem Beispiel ist $\preceq$ sicher nicht antisymmetrisch.

Dieser gerichteten Menge und Jener aus dem letzten Beispiel werden wir bei der Einführung des Integrals wieder begegnen.

Proposition 3.0.10

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ein Hausdorff-Raum.

(ii) Jedes Netz in X hat höchstens einen Grenzwert

Proof. Prop: 3.0.9

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wären x, y zwei verschiedene Grenzwerte, so könnten wir disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ wählen und infolge $i_1 \in I$ und $i_2 \in I$ derart wählen, dass

$$x_i \in U \quad \text{für alle } i \geqslant i_1 \qquad \text{und} \qquad x_i \in V \quad \text{für alle } i \geqslant i_2.$$

Da I gerichtet ist, gibt es ein $i \in I$ mit $i \geqslant i_1$ und $i \geqslant i_2$, und daher $x_i \in U \cap V$, was aber im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$ steht.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Beweis durch Kontraposition.($[\neg$(ii) $\Rightarrow \neg$(i)$]$)

- Wir definieren eine gerichtete Menge:
  Wähle $x, y \in X$ und $x \neq y$.
  Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist, existieren offene Mengen $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ mit

  $$x \in O_x, \quad y \in O_y \quad \text{und} \quad O_x \cap O_y = \varnothing.$$

  Sei nun

  $$I := \{\, (O_1, O_2) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid x \in O_1 \ \wedge\ y \in O_2 \,\}$$

  und definiere die Ordnung

  $$(O_1, O_2) \preceq (O_1', O_2') \ :\Longleftrightarrow\ O_1' \subseteq O_1 \ \wedge\ O_2' \subseteq O_2.$$

- Damit ist $(I, \preceq)$ gerichtet.

  * Reflexivität:

    $$(O_x, O_y) \in I \text{ und } (O_x, O_y) \preceq (O_x, O_y)$$

    .
  * Transitivität: Für $(O_1, O_2) \preceq (O_1', O_2')$ und $(O_1', O_2') \preceq (O_1'', O_2'')$ gilt offensichtlich auch

    $$(O_1, O_2) \preceq (O_1'', O_2'')$$

    .
  * Richtungseigenschaft: Für $(O_1, O_2), (O_1', O_2') \in I$ ist

    $$(O_1 \cap O_2,\ O_1' \cap O_2') \in I$$

    ist gröber

- Die Menge $\{O_1 \cap O_2 \mid (O_1, O_2) \in I\}$ ist nicht leer, da $(x, y) \in I$.
  Wähle nun eine $\alpha : I \to \bigcup\limits_{(O_1,O_2)\in I}$ eine Abbildung
  mit
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : \alpha(O_1, O_2) \in O_1 \cap O_2$$
  [4]
- Es fehlt noch zu zeigen, dass α ein konvergierendes Netz ist.
  $$\lim_{(O_1,O_2)} \alpha(O_1, O_2) = x.$$
  Sei $U \in \mathcal{U}(x)$, wähle $O \in \mathcal{T} \, : \, x \in O \subseteq U$
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : \exists \; O \Rightarrow (O_1, O_2) \geq (O, O_x) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \subseteq O_1 \subseteq O$$ [5]
  mit $i_0 := (O, x)$
  Auf der anderen Seite haben wir:
  $\forall (O_1, O_2) \in I : O_2 \subseteq O$ (Das selbe spiel umgekehrt)
  Sei $U \in \mathcal{U}(y)$, wähle $O \in \mathcal{T} : y \in O \subseteq U$
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : O_2 \subseteq O \Rightarrow \alpha((O_1, O_2)) \in O_1 \cap O_2 \subseteq O_2 \subseteq O \subseteq U$$

Die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) hat keinen wirklichen Mehrwert - Ausser dass wir über zwei offene Mengen indexiert haben (WOW)-. Wir haben diese Richtung also vorallem dem Beweis zu liebe gemacht.

[4] Das ist die Stelle an der das Auswahlaxiom verwendet wird. Also lobpreiset das Auswahlaxiom. (Das Auswahlaxiom ist in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht beweisbar, aber auch nicht widerlegbar.)

[5] Das geht wegen dem Auswahl axiom

Lecture 4

Um die Folgenden Sachverhalte leichter einsehen zu können macht es Sinn, sich zuerst schon bekannte Objekte/Dinge/Sachverhalte vor Augen zu führen.

Figure 4.1: https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/

In diesem Fall macht es vor allem Sinn, Folgen zu betrachten. Sei also α eine Abbildung von $\mathbb{N} \longrightarrow X$ also die Folge $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots \alpha(n), \ldots$ Weiters betrachte die Abbildung $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow X$ wobei wir β als Teilfolge von α bezeichnen. Wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ gibt, so dass $\beta(n) = \alpha(k(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\alpha"] & X \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\kappa"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$$\text{mit} \quad \beta = \alpha \circ \kappa$$

Definition 4.0.1: Teilnetz

Sind $(I, \preceq_I)$ und $(J, \preceq_J)$ zwei gerichtete Mengen, ist X eine Menge und $\alpha : I \longrightarrow X$ ein Netz in X, Und $\kappa : J \longrightarrow I$ eine Funktion, so dass

$$\bigstar \forall i_0 \in I \; \exists j_0 \in J : \; \forall j \succeq_J j_0 \Rightarrow \kappa(j) \succeq_I i.$$

Dann ist $\alpha \circ \kappa : J \longrightarrow X$ ein **Teilnetz** von α. Ist $(J, \preceq_J) = (\mathbb{N}, \leqslant)$, dann wäre $\alpha \circ \kappa : J \longrightarrow X$ Eine **Teilfolge**.

Note:-

Seien $\langle I, \preceq_I \rangle$ und $\langle J, \preceq_J \rangle$ gerichtete Mengen und $\kappa : J \longrightarrow I$ eine monotone Abbildung. wenn

- κ monoton
- $\forall i \in I \exists j_0 \in J : \kappa(j_0) \succeq_I i$

dann ist $\alpha \circ \kappa(j)$ ein Teilnetz von α.

Proof. Beweis der Implikation:
Sei $i_0 \in I$ beliebig. Dann gibt es ein $j_0 \in J$ mit $\kappa(j_0) \succeq_I i_0$. Für alle $j \succeq_J j_0$ gilt $\kappa(j) \succeq_I \kappa(j_0) \succeq_I i_0$.

Das soll *nicht* zur Verwirrung führen. Aber:
Der Implikationspfeil ist in diesem Fall nicht nur eine stilistische Entscheidung, sondern wir erfahren später, dass es sich eigentlich um eine Äquivalenz handelt. Es handelt sich also wirklich nur um eine Implikation (dh. die andere Richtung gilt nicht) In der mathematischen Literatur werden anstelle unserer Definition der Teilnetze die in der Bemerkung aufgeführten Eigenschaften als Definition verwendet.

Satz 4.0.2

ei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $(I, \preceq_I)$ gerichtete Menge, $\varphi : I \to X$, Netz in X, $x \in X$.
Dann sind äquivalent:

(i) φ konvergiert gegen x.

(ii) Jedes Teilnetz von φ konvergiert gegen x.

(iii) Jedes Teilnetz von φ hat ein Teilnetz, das gegen x konvergiert.

Proof. Satz: 4.0.2:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\langle J, \preceq_J \rangle$ und$\kappa : J \to I$ ein Teilnetz von φ also erfüllt $\bigstar$.
Sei $U \in textU(x)$ Wähle $i_0 \in I$ so dass $\forall i \succeq_I i_0 : \varphi(i) \in U$ Nach $\bigstar$ gibt es ein $j_0 \in J$ so dass $\forall j \succeq_J j_0$: $\kappa(j) \succeq_I i_0$. Also gilt für alle $j \succeq_J j_0$:

$$\varphi(\kappa(j)) \in U$$

Also konvergiert das Teilnetz gegen x.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jedes Netz ist ein Teilnetz von sich selbst. $I \xrightarrow{\text{id}} I \xrightarrow{\text{id}} X$ Sei $\varphi \circ \kappa$ Teilnetz von $\varphi \Rightarrow \varphi \circ \kappa$ konvergiert gegen $x \Rightarrow \varphi \circ \text{id}$ konvergiert gegen x.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Für diese richtung verwenden wir Kontraposition. - Weil wir das schon länger nicht gemaht haben -
$\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$:
Wähle $U \in \mathcal{U}(x)$ $\forall i_0 \in I \exists i \succeq i_0$ sodass $\varphi(i) \notin U$

$$(**) \quad J := \{i \in I \mid \varphi(i) \notin U\} \subseteq I$$

Diesmal ist es leichter, die Bemerkung zu verwenden
Definiere $j_1, j_2 \in J : j_1 \preceq_J j_2 :\Leftrightarrow j_1 \preceq_I j_2$.
- Die Einschränkung der Ordnung auf I als Ordnung auf J -
Damit ist $(J, \preceq_J)$ reflexiv und transitiv. Seien $j_1, j_2 \in J$. Wähle $i \in I : j_1 \succeq_I i, j_2 \succeq i. \Rightarrow j_1 \succeq i, j_1 \succeq_J i, j_2 \succeq_J i$.

$\Rightarrow (J, \succeq_J)$ ist gerichtete Menge.

Definiere:

$$\kappa : \begin{cases} j \mapsto j \\ i \mapsto i \end{cases}$$

Sei $i \in I$. Wegen (**) wähle $j_0 \in I$ sodass $\varphi(j_0) \notin U$. $j_0 \in J$.

Sei $(K, \preceq_K)$ eine gerichtete Menge, mit $\lambda : K \to J$ mit ($\bigstar$). Also $(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda : K \to X$.

Angenommen

$$\lim_{k \in K} [(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda](k) = x.$$

Wähle $k_0 \in K : \forall k \succeq k_0 : [(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda](k) \in U$.
Was ein Widerspruch ist, da $\varphi(\kappa(\lambda(k_0))) \notin U$ Per definition von $(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda$.

Wir sehen also: im Vergleich zu Folgen haben wir keine Indexschlacht mehr. Dafür haben wir jetzt sehr viele Abbildungen $\circ$ abbildungen.

Satz 4.0.3

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

(i) $A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $\varphi : I \longrightarrow A \subseteq X$ in A, das gegen $x \in X$ konvergiert, gilt $x \in A$.

(ii) Sei $\langle Y, \mathcal{S} \rangle$ ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $\alpha : I \longrightarrow X$ in X, das gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt,

$$\lim_{i \in I} \alpha(i) \longleftarrow \lim_{i \in I} (f \circ \alpha)(i) = f(x)$$

.

Der zweite Punkt ist so zu verstehen, dass wenn x ein Grenzwert von α ist, dann ist $f(x)$ der Grenzwert von $f \circ \alpha$. Der Grenzwert muss hier nicht eindeutig sein.

Proof. Satz: 4.0.3:

"(i)$\Rightarrow$" Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, angenommen $\alpha : I \longrightarrow A$ ist ein Netz in X, mit $x \in X$. So dass $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$. und $x \notin A$. Sei $U := X \setminus A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$. aber $\forall i \in I : \alpha(i) \in A \Longrightarrow \alpha(i) \notin U$.

"(i)$\Leftarrow$" Sei $A \subseteq X$ nicht abgeschlossen. Dann ist $X \setminus A$ nicht offen. Also gibt es ein $x \in X \setminus A$ so dass $\forall U \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$: $U \nsubseteq X \setminus A$. $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : \neg(U \subset X \setminus A)$ (dh.: $U \cap A \neq \emptyset$). Wähle $\alpha : \mathcal{U}(x) \longrightarrow X$ mit $\alpha(U) \in U_1$. Das können wir dank des Auswahlaxioms. So machen Für $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_1 \preceq U_2 :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$. Sei $\langle \mathcal{U}(x), \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Also Transitivität und Reflexivität sind klar. Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$. Wähle $U_3 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dann ist $U_3 \preceq U_1$ und $U_3 \preceq U_2$. Also ist $\langle \mathcal{U}(x), \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$.
α ist konvergent gegen x. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Setze $U_0 := U$. Sei $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \preceq U_0$. Das heißt $V \subseteq U_0$. Also gilt $\alpha(V) \in V \subseteq U_0$. Damit haben wir ein netz in A gefunden das gegen x konvergiert.

(ii)"$\Leftarrow$" Sei $\alpha : I \longrightarrow A$ ein Netz in X mit $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$. $A \subseteq \overline{\{A\}}$

"(ii)$\Rightarrow$" Sei $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall U \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

"(i)$\Rightarrow$(ii)" Sei $A \subseteq Y$ Abgeschlossen Und $alpha : I \longrightarrow f^{-1}(A)$, mit $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$, $x \in X$. $\Rightarrow \lim_{i \in I} (f \circ f_\alpha)(i) = f(x)$ Da $(f \circ f_\alpha)(i) \in A$ für alle $i \in I$, folgt $f(x) \in \overline{A} \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

Lecture 5

Satz 5.0.1 Charakterisierung der Stetigkeit

Seien $\langle X, \sqcup \rangle$ und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Topologische Räume und $f : X \to Y$

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig } &:\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{V} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T} \\ &\leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen } : f^{-1}(A) \text{ ist Abgeschlossen} \\ &\leftrightarrow \forall x \in X \forall \boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}^Y(f(x)) : \exists v \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^X(x) : f(V) \in \mathcal{U} \\ &\leftrightarrow \text{ Für jedes Netz } \phi \in X, x \in X : x \text{ ist Grenzwert von } \phi \Rightarrow f(x) \text{ ist Grenzwert von } f \circ \phi \end{aligned}$$

In der letzten Vorlesung haben wir die Hinrichtung von der driten equivalenz schon im zuge vom beweis von **4.0.5** schon gesehen es fehlt also noch die Hinrichtung in die andere Richtung
- Gängiger wäre Rückrichtung -
zu zeigen[1].

Proof. Satz 5.0.1:
Seien $\langle I, \preccurlyeq \rangle$ eine gerichtete Menge und $\varphi : I \to X$ ein Netz in X mit Grenzwert $x \in X$.
Sei $U \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^Y(f(x))$ Da f Stetig können wir per Definition ein V wählen so dass

$$\begin{aligned} & V \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^X(x) : f(V) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}} \\ \text{Weiters wähle} \quad & i_0 \in I : \forall i \succcurlyeq i_0 : \varphi(i) \in V \\ & \Rightarrow \forall i \succcurlyeq i_0 : (f \circ \varphi)(i) \in f(V) \subseteq U \end{aligned}$$

5.1 Initiale Topologie*

Seien $(Y_i, \mathcal{V}_i)$ topologische Räume, X eine Menge und $f_i : X \to Y_i$ Abbildungen. Wir nennen die größte Topologie, die alle f_i stetig macht, die **initiale Topologie** bezüglich der f_i.

$$\begin{tikzcd} & (X_i, \mathcal{V}_i) \\ & \vdots \\ Y \arrow[uur, "f_i"] \arrow[r, "f_j"] \arrow[ddr, "f_k"] & (X_j, \mathcal{V}_j) \\ & \vdots \\ & (X_k, \mathcal{V}_k) \end{tikzcd}$$

Das bedeutet (vgl.: Kaltenbäck: Aufabau Analysis)

[1] Aber Hinrichtung hört sich lustiger an und passt auch besser zum Mathematik studium

- Unter allen Topologien $\mathcal{V}'$ auf X so, dass $f_i : (X, \mathcal{V}') \to (X_i, \mathcal{V}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist, ist

$$\mathcal{V} := \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)\right),$$

also die Topologie mit $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$ als Subbasis, die größte. Man bezeichnet $\mathcal{V}$ als **initiale Topologie** bezüglich der Abbildungen f_i, $i \in I$.

- Für diese initiale Topologie $\mathcal{V}$ und einen weiteren topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ ist eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{V})$ genau dann stetig, wenn $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{V}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist.

5.2 Produkttopologie

Betrachte eine Menge X die nicht leer ist und eine Menge Y_x mit $x \in X$. Damit definieren wir:

$$\prod_{x \in X} Y_x := \left\{ f : X \to \bigcup_{x \in X} Y_x \mid \forall x \in X : f(x) \in Y_x \right\}.$$

Weiters führen wir die Notation:

$$Y_1 \times Y_2 := \{(y_1, y_2) : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}$$

Note:-

Analog zu der Eingeführten Notation schreiben wir:
Für ein Element $f \in \prod_{x\in X} Y_x$ schreiben wir auch als Tupel $(y_x)_{x\in X}$ was $(f(x))_{x\in X}$ entspricht.

Definition 5.2.1: Produkttopologie

Sei X eine nicht leere Menge, $(Y_x, x \in X)$ eine Familie von Mänen die nicht leer sind, und für jedes $x \in X$ sei $(Y_x, \mathcal{T}_x)$ ein topologischer Raum. Wir betrachten:

$$S := \{\pi_x^{-1}(O_x) \mid x \in X, O_x \in \mathcal{T}_x\}$$

Die von S erzeugte Topologie ist die **Produkttopologie** und wir schreiben auch :$\prod_{x\in X} T_x$

Note:-

Definition 5.2.2: Produkttopologie (Kaltenbäck)

Sei X eine nicht leere Menge und für jedes $x \in X$ sei $(Y_x, \mathcal{V}_x)$ ein topologischer Raum. Die **Produkttopologie** auf $\prod_{x\in X} Y_x$ ist die initiale Topologie bezüglich der Projektionen

$$\pi_x : \prod_{x \in X} Y_x \to Y_x, \quad (y_x)_{x\in X} \mapsto y_x,$$

für alle $x \in X$.

Proposition 5.2.3

Sei (I, $\preccurlyeq$) eine gerichtete Menge und $\varphi : I \to \prod_{x\in X} Y_x$ ein Netz. Weiter sein $g \in \prod_{x\in X} Y_x$. Dann gilt:

$$\lim_{i \in I} \varphi(i) = g \Leftrightarrow \forall x_0 \in X : \lim_{i \in I} (\pi_{x_0} \circ \varphi)(i) = \pi_{x_0}(g)$$

Was Punkteweise Konvergenz bedeutet.

Proof. Proposition: 5.2.3:

"⇒": Die Richtung ist klar, da die Projektionen (π_{x_0}) stetig sind. und stetigkeit erhält Konvergenz.Dh. es folgt aus der Definition von S.

"⇐": Sei $U \in \mathcal{U}^{\prod_{x\in X} Y_x}(g)$. Dann gilt:

$$\exists O \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x : g \in O \subseteq U$$

$$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in X, O_{x_1} \in \mathcal{T}_{x_1}, \dots, O_{x_n} \in \mathcal{T}_{x_n} : g \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k}) \subseteq O \subseteq U$$

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} : g \in \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k}) \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} : \pi_{x_k}(g) \in O_{x_k}(\text{Umgebung von} g(x_k))$$

$$\overset{\text{VS}}{\Rightarrow} \text{ Wähle } i_k \in I : \forall i \geq i_k : \underbrace{(\pi_{x_k} \circ \varphi)(i) \in O_{x_k}}_{\Leftrightarrow \phi(i) \in \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k})}$$

$$\text{Wähle } i_k \in I : \forall i \geq i_k : \forall k \in \{1, \dots, n\} : \varphi(i) \in \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k})$$

$$\Leftrightarrow \varphi(i) \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k}) \subseteq U$$

Proposition 5.2.4

Sei X überbzählbar, $\mid Y_k \mid \geqslant 2$ für alle $x \in X$. Dann gibt es keine Metrik d auf $\prod_{x\in X} Y_x$ so dass d die Produkttopologie induziert.

Lemma 5.2.5

$\langle Z, d\rangle$ ein Metrischer Raum. $z \in Z \Rightarrow \exists U_n, n \in \mathbb{N}$[a] Umgebungen von z mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{z\}$

[a] Abzählbar viele

Proof. Lemma: 5.2.5:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere $U_n := B_{1/2}(z)$. Sei:

$$w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/2}(z) \Rightarrow d(w, z) < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $d(w, z) = 0 \Rightarrow w = z$.

Proof: Proposition: 5.2.4:
Sei $f \in \prod_{x\in X} Y_x, \quad U_n \in \mathcal{U}^{\prod_{x\in X} Y_x}(f(x_n)) \forall n \in \mathbb{N}$.
Wähle $O_n \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x : f \in O_n \subseteq U_n$.
Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus (char. erzeugte Top.).
Wähle

$$\begin{cases} x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n} \in X \\ O_{x_{n,1}}, \dots, O_{x_{n,m_n}} \in \mathcal{T}_{x_{n,m_n}} \end{cases}$$

So dass: $f \in \bigcap_{k=1}^{m_n} \pi_{x_{n,k}}^{-1}(O_{x_{n,k}}) \subseteq O_n \subseteq U_n$.
$\Rightarrow f \in \bigcap_{n=1} \bigcap_{k=1}^{m_n} \pi_{x_{n,k}}^{-1}(O_{x_{n,k}})$.

Da X überbzählbar ist, gibt es ein $x_0 \in \{x_{n,j} \mid n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, m_n\}\} \nsubseteq X$
Das geht da X überbzählbar ist, $Y_{x_0} \setminus \{f(x_0)\} \neq \emptyset$ (da $|Y_{x_0}| \geq 2 \; \forall x \in X$)
$\rightsquigarrow$ wähle $y \in Y_{x_0} \setminus \{f(x_0)\}$
Definiere:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ y, & x = x_0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{f} \neq f$ und
$\Rightarrow \tilde{f} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m_n} \pi_{x_{n,j}}^{-1}(O_{x_{n,j}}) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Note:-

Wiederholung: $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer Raum.
$K \subseteq X$ heißt Kompakt $\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{T} : \cup C \supseteq K \Rightarrow (\exists C' \subseteq C$ endlichen $: \cup C' \supseteq K)$.

Proposition 5.2.6

$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $K \subseteq X$ ist endlichen $\Rightarrow$ ist kompakt.

(ii) $K_1, \ldots, K_n \subseteq X$ sind kompakt $\Rightarrow K_1 \cup \ldots \cup K_n$ ist kompakt.

(iii) $K \subseteq X$ ist kompakt $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow K \cap A$ ist kompakt.

(iv) Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ $K \subseteq X$ kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Proof. Proposition: 5.3.2:

(i) $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\cup C \supseteq K$.
Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ wähle $O_j \in C$ mit $x_j \in O_j$.
Dann ist $K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_j$.

(ii) Sei $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\cup C \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_n$.
$\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \cup C \supseteq K_j$.
$\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \exists C_j \subseteq C$ endlich mit $\cup C_j \supseteq K_j$.
$\Rightarrow \underbrace{\bigcup C' := \{O \mid \exists j \in \{1, \ldots, n\} : O \in C_j\}}_{\text{endlich}} \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_n$.

(iii) Sei $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\cup C \supseteq K \cap A$.
$C \cup \{X \setminus A\} \subseteq \mathcal{T} \rightsquigarrow \bigcup C \cup (X \setminus A) \supseteq K \cap A$.
Wähle $O_1, \ldots, O_m \in C$ so dass
$O_1 \cup \ldots \cup O_n \cup (X \setminus A) \supseteq K$.
Dann gilt $(O_1 \cup \ldots \cup O_n \cap (X \setminus A)) \cap A \supseteq K \cap A$.

(iv) Sei $C \subseteq \mathcal{V}$ mit $\cup C = \bigcup_{O\in C} O \supseteq f(K)$.
$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(\bigcup_{O\in C} O)}_{\bigcup_{O\in C} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\text{offen}}} \supseteq K$.
Definiere $D := \{f^{-1}(O) \mid O \in C\} \subseteq \mathcal{T}$ und $\cup D \supseteq K$.
Wähle $O_1, \ldots, O_n \in C$ so dass $\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(O_j) \supseteq K$.
$\Rightarrow f(\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(O_j)) \supseteq f(K)$.

wobei $f(\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j=1}^n f(f^{-1}(O_j)) \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_j$.

Korollar 5.2.7

(i) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Hausdorff'scher Raum: $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow K$ ist abgeschlossen.

(ii) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer Raum, X kompakt, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Hausdorff'scher Raum, $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Lemma 5.2.8

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Hausdorff'scher Raum. Und $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt, $\neq \emptyset$ und disjunkt. $\Rightarrow \exists O_1, O_2$ offen und disjunkt, so dass $K_1 \subseteq O_1$ und $K_2 \subseteq O_2$.

Proof. Lemma 5.3.4:

1. Schritt: Sei $x \in X, K \subseteq X$ kompakt, $x \notin K$.
$\forall y \in K : x \neq y \overset{X \text{ Hausdorff}}{\Rightarrow}$ wähle $O_y, \tilde{O}_y$ offen mit $O_y \cap \tilde{O}_y = \emptyset, x \in O_y, y \in \tilde{O}_y$.
$K = \bigcup_{y \in K} \{y\} \subseteq \tilde{O}_y \overset{K \text{ kompakt}}{\Rightarrow}$ wähle $y_1, \ldots, y_n \in K : K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \tilde{O}_{y_j}$.

$$\underbrace{\bigcup_{j=1}^n \tilde{O}_{y_j}}_{\text{offen, } \supseteq K} \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^n O_{y_j}}_{\text{offen, } x \in} = \bigcup_{j=1}^n [\tilde{O}_{y_j} \cap \bigcap_{k=1}^n O_{y_k}] \subseteq \bigcup_{j=1}^n [\tilde{O}_{y_j} \cap O_{y_j}] = \emptyset$$

2. Schritt: Sei $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt, disjunkt.
Für jedes $x \in K_1$ wähle $O_x, \tilde{O}_x$ disjunkt und $x \in \tilde{O}_x$, $K_2 \subseteq O_x$.
$K_1 = \bigcup_{x \in K_1} \{x\} \subseteq \tilde{O}_x \overset{K_1 \text{ kompakt}}{\Rightarrow}$ wähle $x_1, \ldots, x_m \in K_1 : K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^m \tilde{O}_{x_i}$.

$$\underbrace{\bigcup_{j=1}^n \tilde{O}_{x_j}}_{\text{offen, } \supseteq K_1} \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^n O_{x_j}}_{\text{offen, } \supseteq K_2} = \emptyset \quad \text{(wie oben)}$$

Proof. Korollar 5.3.3:

(i) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $x \in X \setminus K$.
$\overset{Lemma\ 5.3.4}{\Rightarrow} \exists O_1, O_2$ Offen und disjunkt, $x \in O_1, O_2 \supseteq K$

$\Rightarrow x \in O_1 \subseteq X \setminus K$
Also ist $X \setminus K$ offen und K abgeschlossen.

(ii) Betrachte $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen.
$\overset{\text{Proposition 5.3.2}}{\Rightarrow} A = A \cap X$ ist kompakt.
$\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ ist kompakt.
$\overset{Y \text{ Hausdorff}}{\Rightarrow} f(A)$ ist abgeschlossen.

Lecture 6

Wiederholung was ist eine Basis einer Topologie?

Definition 6.0.1: Basis einer Topologie

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathcal{T}$, wenn für jedes $O \in \mathcal{T}$ eine Teilmenge $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$ existiert, so dass

$$O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_O} B.$$

Die Frage konnte sich mein imaginärer Läser jetzt sehr schnell durch weiterlesen beantworten.
Ein andere Frage die ich mir stelle ist:
Die Vorlesungsprüfung umfasst den Stoff der Vorlesung jedoch zb, der Begriff der Basis wurde in der Übung eingeführt. Wäre die Basis nicht wiederholt worden, wäre sie dann prüfungsrelevant?

Aber naje ... Weiter mit Stoff: Zur einleitung ein äher Kreifbares Beispiel.

Beispiel 6.0.2

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein Metrischer Raum. Und $\mathcal{T}_d$ die von der Metrik induzierte Topologie. Dann ist

$$\mathcal{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$$

eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$.

Definition 6.0.3: Subbasis

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Subbasis** der Topologie

$$:\Leftrightarrow \mathcal{T} \text{ ist die kleineste Topologie, die } \mathcal{S} \text{ umfasst.}$$

Note:-

Definition 6.0.4: Kaltenbäck (12.5.2)

Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

- $\mathcal{B}$ heißt **Basis** von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ und wenn es für alle $O \in \mathcal{T}$ und $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq O$ gibt.
- $\mathcal{C}$ heißt **Subbasis** von $\mathcal{T}$, wenn $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ und wenn es für alle $O \in \mathcal{T}, O \neq X$, und $x \in O$ endlich viele $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}$ mit
$$x \in C_1 \cap \cdots \cap C_n \subseteq O$$
gibt.
- Man sagt, ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom (ABII)**, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Figure 6.1: https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/
Mensch Umfasst Lamm (Lemmachen).
Wäre der Mensch die kleinste Topologie, die das Lamm umfasst,
so wäre das Lamm eine Subbasis des Menschens.... missed chance Menschen sollten Topologien sein

Beispiel 6.0.5

Sei $X \neq \emptyset \mathcal{T}_x, x \in X$ ein topologischer Raum auf $\mathcal{T}_\S$. Die Produkttopologie auf $\prod_{x \in X} \mathcal{T}_1$ auf $\prod_{x \in X} \mathcal{T}$
$$S := \{\pi_x^{-1}(O_x) : x \in X, O_x \subseteq \mathcal{T}_x\}$$
ist eine Subbasis für $\prod_{x \in X} \mathcal{T}_x$.

Satz 6.0.6

$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist kompakt. $(\forall C \subseteq \mathcal{T}), \bigcup C = X \Rightarrow \exists \tilde{C} \subseteq C$ endlich mit $\bigcup \tilde{C} = X)$

(i*) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$. Dann gilt:

$$\forall C \subseteq \mathcal{B}, \bigcup C = X \Rightarrow \exists \tilde{C} \subseteq C \text{ endlich mit } \bigcup \tilde{C} = X.$$

(i**) Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie abgeschlossener Mengen in X, für die gilt:

$$(\forall \text{ endliches } J \subseteq I : \bigcap_{j\in J} A_j \neq \emptyset) \Rightarrow \bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset.$$

(ii) Sei $\mathcal{S}$ eine Subbasis von $\mathcal{T}$. Dann gilt:

$$\forall C \subseteq \mathcal{S}, \bigcup C = X \Rightarrow \exists \tilde{C} \subseteq C \text{ endlich mit } \bigcup \tilde{C} = X.$$

(iii) Jedes Netz in X hat ein Teilnetz, welches einen Grenzwert hat

Proof. Satz: 6.0.5 (Erster Teil):

- [(i) $\Rightarrow$ (i*)]: Klar, da jede Basis eine Teilmenge der Topologie ist.
- [(i*) $\Rightarrow$ (i)]: Sei $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup C \supseteq K$ beliebig.
  Für jedes $O \in C$ gibt es eine Teilmenge $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$ mit
  $$O = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_O} B.$$
  Also gilt:
  $$\bigcup C = \bigcup_{O\in C} O = \bigcup_{O\in C} \bigcup \mathcal{B}_O$$
  Betrachte nun die Menge
  $$D := \{U \subseteq X : \exists O \in C : U \subseteq O\} \subseteq \mathcal{B}$$
  . Dann gilt: $\cap D \supseteq K$. Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Teilmengen
  $$U_1, \ldots, U_n \in D : \bigcup_{j=1}^{n} U_j \supseteq K.$$
  Wähle $O_j \in C : U_j \in \mathcal{B}_{O_j} \Rightarrow U_j \subseteq \bigcup \mathcal{B}_{O_j} = O_j$
  Dann gilt: $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_j$
- [(i) $\Leftrightarrow$ (i**)]:
  $$\begin{bmatrix} (\forall I' \subseteq I, \text{ endlich: } X \setminus \bigcap_{i\in J} A_i \neq X) \;\Rightarrow\; X \setminus \bigcap_{i\in I} A_i \neq X, \\ (\forall J \subseteq I, \text{ endlich: } \bigcup_{i\in J}(X \setminus A_i) \neq X) \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in I}(X \setminus A_i) \neq X \end{bmatrix}$$
  Seien $A_i \subseteq X$ abgeschlossene Mengen.
  Setze $O_i := X \setminus A_i$ offen.
  Sei $\forall J \subseteq I$ endlich mit $\bigcap_{i\in J} A_i \neq \emptyset$. Das heißt $\forall J \subseteq I$ endlich mit $\bigcup_{i\in J} O_i \neq X$.
  Also $\{O_i : i \in I\}$ hat kein endliche Teilfamilie, die X überdeckt ($\nexists J :$ endlich mit $\bigcup_{i\in J} O_i = X$).
  $$\overset{(i)}{\Rightarrow} \bigcup_{i\in I} O_i \neq X \Rightarrow \bigcap_{i\in I}(X \setminus A_i) \neq X$$
- [(i**) $\Rightarrow$ (i)]: Sei $O_j, i \in I$ offen in X mit $\bigcup_{i\in I} O_i = X$ Das heißt $\bigcap_{i\in I} A_i = \emptyset$. Dan erhalten wir eine Kontraposition zu (i**) mit $\exists J \subseteq I$ endlich mit $\bigcap_{j\in J} A_j = \emptyset$. Das heißt $\bigcup_{j\in J} O_j = X$.

Die Aufmerksame Leserin wird bemerken, dass noch ein die implikationen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) und (ii) $\Leftrightarrow$ (i) fehlen.

Die eine ist klar und die andere ist ein Satz Die, die klar ist wird nicht weiter Behandelt. Die andere würde ich gerne nicht Behandeln, da sie lang ist und ich müde.

Satz 6.0.7 Die eine Implikation, die nicht klar ist

(ii)$\Rightarrow$(i)

Proof. Satz: 6.0.6:
Wir machen einen Beweis durch **Kontraposition**: Angenommen $\neq$ (ii) gilt $\Rightarrow$ (i) gilt nicht.

1. Sei
$$Q := \{C \subseteq \mathcal{T} : \bigcup C = X \forall \tilde{C} \subseteq C \text{endlich}; \bigcup \tilde{C} = X\} \neq \emptyset$$

   Sei $\tilde{Q} \subseteq Q$ Total geordnet durch Inklusion. Zu zeigen ist dann: $D \in Q$

   - $\forall \tilde{T} \in \tilde{Q} : \tilde{C} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \tilde{C} \subseteq X$.
   - Wähle $C_o \in \tilde{Q} : \bigcup C_o = X. \bigcup D = \bigcup \bigcup_{C \in \tilde{Q}} \tilde{C} \supseteq \bigcup C_o = X$.
   - Seien $O_1, \ldots, O_n \in D$
     wähle $\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_n \in \tilde{Q} : O_j \in C \in \tilde{C}_j$ mit $j = 1, \ldots, n$
     Daraus folgt: $\bigcup_{j=1}^{n} O_j \neq X$.

2. Wähle $C_o \in Q$ maximales Element.
   $\mathcal{S} := l_o \cap S$
   Zeige $\bigcup \mathcal{S}_o = X$
   Angenommen $x \notin \bigcup \mathcal{S}_o$ Wähle $O_o \in l_o . x \in O_o$
   Wähle $V_1, ..., V_n \in S : x \in \bigcap_{j=1}^{n} V_j \subseteq O_o$
   $\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \forall V_j \notin \mathcal{S}_o$
   $\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} : V_j \in \{1, \ldots, n\} : V_j \notin C_o$

$$C_o \cup \{V_j\} \supsetneq C_o \Rightarrow C_o \cup \{V_j\} \notin Q \Rightarrow W_{j,1}, \ldots, W_{j,n} \cup V_j = X$$
$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} (W_{j,1}, \ldots, W_{j,n}) \cup \bigcap_{j=1}^{n} V_j = X$$

$$\text{Sei } x \in X \quad \begin{cases} x \in \bigcap_{j=i}^{n} V_j, \\ x \in \bigcap_{j=1}^{n} V_j. \end{cases} \quad \text{Wähle } j : x :\notin V_j \Rightarrow x \in W_{j,1} \cup \ldots \cup W_{j,n} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (U_{j,1} \cup \ldots \cup U_{j,nj})$$

   Damit haben wir einen Wiederspruch da wir eine endliche Teilüberdeckung mit Mengen aus C_o

Proof. Satz: 6.0.5 (Rest):

- [(iii) $\Rightarrow$ (i)]: Diese Implikation zeigen wir wieder durch Kontraposition. Wir betrachten also $\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$. Sei also $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\bigcup C = X$,endlich,
$$\forall \tilde{C} \subseteq C \text{ endlich } : \bigcup \tilde{C} \neq X.$$

  $I := \{\tilde{C} \subseteq C \mid \tilde{C} \text{ endlich } \}, \tilde{C} \leq_I \tilde{\tilde{C}}$ Damit ist $(I, \leq_I)$ eine gerichtete Menge.

  - Reflexivität: $\tilde{C} \leq_I \tilde{C}$.

– Transitivität: Sei $\tilde{C}_1 \preceq_I \tilde{C}_2$ und $\tilde{C}_2 \preceq_I \tilde{C}_3$.
Dann ist:

$$\tilde{C}_1 \subseteq \tilde{C}_2 \text{ und } \tilde{C}_2 \subseteq \tilde{C}_3.$$
$$\text{Also ist}$$
$$\tilde{C}_1 \subseteq \tilde{C}_3 \text{ und somit } \tilde{C}_1 \preceq_I \tilde{C}_3.$$

– Gerichtetheit: Sei $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in I$. $\Rightarrow \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 \in I$ damit

$$\tilde{C}_1 \subseteq \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 \text{ und } \tilde{C}_2 \subseteq \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2$$

.

Definiere nun das Netz $\varphi : I \to X$ und

$$\forall \tilde{C} \in I : \varphi(\tilde{C}) \subseteq \underbrace{X \setminus \bigcup \tilde{C}}_{\neq \emptyset}$$

Sei J eine gerichtete Menge und $\kappa : J \to I$ ein Teilnetz von φ. [1]
Zu zeigen ist, dass $\varphi \circ \kappa$ keinen Grenzwert

$$\neg(\forall U \in \mathcal{U}(x) \exists j_0 \in J \forall j \succeq_J j_0 : \varphi \circ \kappa(j) \in U)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\exists U \in \mathcal{U}(x) \forall j_0 \in J \exists j \succeq_J j_0 : \varphi \circ \kappa(j) \notin U)$$

Wähle $O_o \in C : x \in O_o \in \mathcal{U}(x)$ Sei $i_o := \{O_o\} \in I_o$. Für jedes $\tilde{C} \in I, \tilde{C} \geqslant \{O_o\} : \phi(\tilde{C}) \notin \cup \tilde{C} \supseteq \{O_o\}$. Wähle $j_0 \in J \forall j \succeq_J j_0 : \kappa(j) \succeq_I \{O_o\} \Rightarrow \varphi \circ \kappa(j) \notin O_o \forall j \succeq_J j_0$. Damit haben wir eigentlich schon mehr als notwendig gezeigt also jetzt folgern wir aus dem mehr das weniger :-)

$$U := O_o \text{ Sei } j_0 \in J \forall j \text{ Wähle } i \in J : j \succeq_J j_0 \wedge j \geqslant_J i \Rightarrow \varphi \circ \kappa(i) \notin O_o$$

- [(i**) $\Rightarrow$ (iii)]:
  – Sei I eine gerichtete Menge und $\varphi : I \to X$ ein Netz in X.

$$\left\{ \underbrace{\{\varphi(i)_1 \mid j \geq i\}}_{\text{abgeschlossene Menge}} \mid i \in I \right\}$$

$$\{\varphi(i_1)_1 \mid j \geqslant i_1\} \cap \cdots \cap \{\varphi(i_n)_1 \mid j \geqslant i_n\} \supseteq \{\varphi(i_{n+1})_1 \mid j \geqslant i_0\} \neq \emptyset$$

  – Wähle $x \in \bigcap_{i \in I} \overline{\{\varphi(i)_1 \mid j \geqslant i\}}$
  – $J := \{(j,u) \in I \times \mathcal{U}(x) \mid \varphi(i) \in u\} (\neq \emptyset \forall j \in I : (j, X) \in J)$ $(j,u) \succeq_J (\tilde{j}, \tilde{U}) :\Leftrightarrow i \geqslant \tilde{j}$ und $u \subseteq \tilde{U}$
    * Reflexivität, und Transitivität vererben sich von I und $\mathcal{U}(x)$.
    * Gerichtetheit: Sei $(j_1, U_1), (j_2, U_2) \in J$. Wähle $j_0 \in I : j_0 \geqslant_I j_1, j_0 \geqslant_I j_2$. Wähle $U_0 \in \mathcal{U}(x) : U_0 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dann ist $(j_0, U_0) \succeq_J (j_1, U_1)$ und $(j_0, U_0) \succeq_J (j_2, U_2)$.

$$\kappa : \begin{cases} J \mapsto I \\ (j, U) \mapsto j \end{cases}$$

Wen κ monoton ist und $\forall i \in I \exists j \in J : \kappa(j) \geqslant i$.
Dann ist $\varphi \circ \kappa$ ein Teilnetz von φ.
(Also $\forall i \in I \exists (j, U) \in J : \kappa((j, U)) = j \geqslant i$)

$$(j,u) \succeq_J (\tilde{j}, \tilde{U}) \Leftrightarrow j \leqslant_I \tilde{j} \wedge U \supseteq \tilde{U}$$

$\Rightarrow j \leqslant_I \tilde{j}$
Sei $i \in I$ Wähle $j := (i, X) \in J \kappa((i,x)) = i \geqslant j$.

[1] $\forall i \in I \exists j_0 \in J \forall j \geqslant j_0 : \kappa(j) \geqslant i$

- Wähle $i_o \in I$ Wähle $l \in I$ und $l \geqslant i_o \wedge \phi(l) \in U, (l, U) \in J$
  Sei

  $$(j, \tilde{U}) \preceq_J (l, U) \Rightarrow j \leqslant_I l \wedge \tilde{U} \subseteq U$$

  .

  $$\Rightarrow \varphi \circ \kappa(j, \tilde{U}) = \varphi(j) \in \tilde{U} \subseteq U$$

  . Also konvergiert das Teilnetz gegen x.

Lecture 7

Lemma 7.0.1

Sei $\langle x, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $K \subseteq X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist kompakte Teilmenge von X.bezüglich auf $\mathcal{T}$.

(ii) K ist betrachtet als Teilmenge des Teilraums $\langle K, \mathcal{T}_K \rangle$ ein kompakter Raum.

Proof. Lemma 7.0.1:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}_K$ eine offene Überdeckung von K in $(K, \mathcal{T}_K)$. Zu $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U_V \in \mathcal{T}$ mit $U_V \cap K = V$, womit $\mathcal{U} := \{U_V : V \in \mathcal{V}\} \subseteq \mathcal{T}$ eine offene Überdeckung von K in $(X, \mathcal{T})$ ist. Voraussetzungsgemäß gibt es $U_{V_1}, \ldots, U_{V_n} \in \mathcal{U}$ derart, dass $U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n} \supseteq K$ und folglich

$$V_1 \cup \ldots \cup V_n = (U_{V_1} \cap K) \cup \ldots \cup (U_{V_n} \cap K) = (U_{V_1} \cup \ldots \cup U_{V_n}) \cap K = K.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Für eine Überdeckung $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ von K ist

$$\mathcal{V} := \{U \cap K : U \in \mathcal{U}\}$$

eine offene Überdeckung von K in $(K, \mathcal{T}_K)$. Voraussetzungsgemäß existiert eine endliche Teilüberdeckung $U_1 \cap K, \ldots, U_n \cap K$, womit auch $U_1 \cup \ldots \cup U_n \supseteq K$.

Satz 7.0.2 Satz von Tychonoff

Sei I eine Menge und seien $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$, $i \in I$, topologische Räume. mit $I \neq \emptyset$ und $X_i \neq \emptyset \forall i \in I$. Weiters sei $X := \prod_{i \in I} X_i$, und $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ist kompakt.

(ii) Für jedes $i \in I$ ist $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$ kompakt.

Proof. Satz: 7.0.2 (Tychonoff):

$(i) \Rightarrow (ii)$: Angenommen, $(X, \mathcal{T})$ ist kompakt. Für ein festes $j \in I$ betrachten wir die kanonische Projektion

$$\pi_j : X \to X_j, \quad \pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j.$$

Die Projektion π_j ist stetig und surjektiv: Stetigkeit folgt aus der Definition der Produkttopologie, Surjektivität, weil alle $X_i \neq \emptyset$ sind. Da das stetige Bild eines kompakten Raumes kompakt ist, folgt aus der Kompaktheit von X die Kompaktheit von $\pi_j(X) = X_j$. Somit ist $(X_j, \mathcal{T}_j)$ kompakt für alle $j \in I$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Angenommen, jedes $(X_i, \mathcal{T}_i)$ ist kompakt. Wir zeigen, dass $X = \prod_{i\in I} X_i$ kompakt ist.

Nach dem Netz-Kriterium für Kompaktheit genügt es zu zeigen, dass jedes Netz $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in X einen Häufungspunkt besitzt.

Für jedes $i \in I$ betrachten wir das Bildnetz $(f_\lambda(i))_{\lambda\in\Lambda}$ in X_i. Da X_i kompakt ist, besitzt dieses Netz mindestens einen Häufungspunkt $y_i \in X_i$.

Wir definieren die Menge

$$\mathcal{H} := \{g : D_g \to \bigsqcup_{i\in I} X_i \mid D_g \subseteq I,\ g(i) \in X_i \text{ und } g(i) \text{ ist Häufungspunkt von } (f_\lambda(i))_{\lambda\in\Lambda}\}.$$

Diese Menge $\mathcal{H}$ ist nichtleer, da für jedes einzelne $i \in I$ die Funktion $g_i = \{(i, y_i)\}$ darin liegt.

Wir ordnen $\mathcal{H}$ durch Inklusion: $g \leq h$ genau dann, wenn $D_g \subseteq D_h$ und $h|_{D_g} = g$ gilt.

Sei nun $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{H}$ eine totalgeordnete Teilmenge. Definiere

$$D_h := \bigcup_{g\in\mathcal{N}} D_g, \quad h(i) := g(i) \text{ für ein } g \in \mathcal{N} \text{ mit } i \in D_g.$$

Dann ist h wohldefiniert, und für jedes $i \in D_h$ ist $h(i)$ ein Häufungspunkt von $(f_\lambda(i))$. Somit liegt $h \in \mathcal{H}$. Also besitzt jede Kette in $\mathcal{H}$ eine obere Schranke.

Nach dem Lemma von Zorn existiert daher ein maximales $f \in \mathcal{H}$ mit Definitionsbereich $D_f \subseteq I$.

Angenommen, $D_f \neq I$. Dann gibt es $i_0 \in I \setminus D_f$. Da X_{i_0} kompakt ist, hat $(f_\lambda(i_0))$ einen Häufungspunkt $x_{i_0} \in X_{i_0}$. Setze

$$h := f \cup \{(i_0, x_{i_0})\}, \quad D_h = D_f \cup \{i_0\}.$$

Dann ist $h \in \mathcal{H}$, aber h erweitert f echt – Widerspruch zur Maximalität von f. Also gilt $D_f = I$.

Damit ist $f \in X = \prod_{i\in I} X_i$. Wir zeigen nun, dass f ein Häufungspunkt des Netzes (f_λ) ist.

Eine Basis der Produkttopologie besteht aus Mengen

$$W = \prod_{i\in I} U_i,$$

wobei U_i offen in X_i ist und $U_i = X_i$ für fast alle i. Für solches W mit $f \in W$ hängt nur endlich viele Koordinaten von U_i ab. Da $f(i)$ Häufungspunkt von $(f_\lambda(i))$ ist, gibt es für jede dieser endlichen Koordinaten ein λ, sodass $f_\lambda(i) \in U_i$ gilt. Für endlich viele Indizes können diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden, also existiert λ mit $f_\lambda \in W$.

Somit ist f Häufungspunkt von (f_λ). Da jedes Netz einen Häufungspunkt besitzt, ist X kompakt.

Definition 7.0.3: Durchmesser, Totalbeschränkt

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. $Y \subseteq X$ sei eine Teilmenge.

- Wir definieren $\delta(Y) := \operatorname{diam}(Y) := \sup\{d(x,y) : x, y \in Y\} \in [0,\infty]$ als den *Durchmesser* von Y.
- Der Raum (X, d) heißt *totalbeschränkt*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung von X durch Mengen mit Durchmesser kleiner als ε existiert. Also $\forall \epsilon > 0 \exists M_1, \ldots, M_n \subseteq X$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \supseteq Y \quad \forall i : \operatorname{diam}(M_i) < \epsilon$$

Lemma 7.0.4

(i) Sei Y Totalbeschränkt dann ist Y beschränkt.

(ii) Sei Y Totalbeschränkt $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists x_1, \dots, x_n \in Y$ so dass

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_\epsilon(x_i, \epsilon)$$

Proof. Lemma 7.0.3:

(i) $Y = \emptyset \quad \checkmark$

$Y \neq \emptyset$ Sei $y \in Y$ beliebig Wähle $M_{x_1}, \dots, M_{x_n} \subset X$,

$$\bigcup_{k=1}^{n} M_{x_k} \supset Y \quad \text{und} \quad \delta(M_{x_k}) < 1.$$

O.B.d.A. sei $M_l \neq \emptyset \forall l$ Wähle $y_l \in M_l$.
Wähle $l_0 : y \in M_{l_0}$ und $\tilde{l_0} : x \in M_{\tilde{l_0}}$.
Sei $x \in Y$ mit

$$d(x, y) \leq \underbrace{d(x, y_{\tilde{l_0}})}_{<1} + \underbrace{d(y_{\tilde{l_0}}, y_{l_0})}_{\leqslant \max_{i,j} d(y_i, y_j)} + \underbrace{d(y_{l_0}, y)}_{<1}.$$

[1] Definiere $R := 2 + \max_{i,j} d(y_i, y_j)$ damit ist $Y \subseteq U_R(y)$ also beschränkt.

(i~~i)~~ Um den teil zu beweisen zeigen wir das

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i \supseteq Y \forall i : \operatorname{diam}(M_i) < \epsilon \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \in Y : Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_\epsilon(x_i, \epsilon)$$

- ”$\Rightarrow$”:
- Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $M_1, \dots, M_m$ mit

$$\bigcup_{k=1}^{m} M_k \supseteq Y, \qquad \delta(M_k) < \varepsilon.$$

o.B.d.A. sei $M_k \neq \emptyset$. Wähle $y_k \in M_k \Rightarrow M_k \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(y_k) \subset U_\varepsilon(y_k)$.

Daraus folgt:

$$Y \subset \bigcup_k M_k \subset \bigcup_k U_\varepsilon(y_k).$$

- ”$\Leftarrow$”:
- Sei $\varepsilon > 0$ wähle $y \supseteq \bigcup_{k=1}^{m} U_{\varepsilon/3}(x_k)$. Dann ist $\delta(U_{\varepsilon/3}(x_k)) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$.

Satz 7.0.5

Für eine Teilmenge K eines metrischen Raumes $\langle X, d \rangle$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist kompakt in $\langle X, \mathcal{T}_d \rangle$. Wobei $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie ist.

(ii) Jede Folge in K hat eine gegen einen Punkt in K konvergente Teilfolge.

(iii) K ist total beschränkt, und $\langle K, d|_{K \times K} \rangle$ ist ein vollständig metrischer Raum.

[1] $\max_{i,j}\{d(y_i, y_j) \mid i, j \in \{1, \dots, n\}\}$

Proof. Satz 7.0.4:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Betrachte $\langle K, \mathcal{T}_d|_K \rangle$ und eine Folge $\alpha : \mathbb{N} \to K$.
Wähle eine gerichtete Menge I und die Abbildung $\kappa : I \to \mathbb{N}$, so dass $\alpha \circ \kappa : I \to K$ ein Teilnetz in K ist.
Mit $\lim_{i \in I}(\alpha \circ \kappa)(i) =: y \in K$ existiert. (dh. $\forall n \in \mathbb{N} \exists i_0 \in I \forall i \geqslant i_0 : \kappa(i) \geqslant n$)
Damit gibt es Umgebungen von y der Form $\{U_{1/n}(y) : n \in \mathbb{N}\}$
Wir definieren rekursiv die Folge

$$(n_k)_{k=1}^{\infty} \text{ mit } n_k \in \mathbb{N} : n_1 < n_2 < \ldots \forall k : \alpha(n_k) \in U_{1/k}(y).$$

k=1: Wähle $i_1 \in I : \forall i \geqslant i_1 : d((\alpha \circ \kappa)(i), y) \in U_1(y)$ Wähle $n_1 := \kappa(i_1)$

k$\to$ k+1: Angenommen wir haben $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ konstruiert.
Wähle $i_{\tilde{k}} \in I : \forall i \geqslant i_{\tilde{k}} : \kappa(i) > n_k + 1$ und $i \in I : i \geqslant i_k$ so dass $i \geqslant i_{\tilde{k}}$
$\Rightarrow n_{k+1} \geqslant n_k + 1$ und damit $\alpha(n_{k+1}) \in U_{\frac{1}{k+1}}(y)$
Sei nun $\varepsilon > 0$ wähle k_0 so, dass $\frac{1}{n_{k_0}} < \varepsilon$.
Damit gilt für alle $k \geqslant k_0$:

$$\alpha(n_k) \in U_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq U_{\frac{1}{k_0}}(y) \subseteq U_{\varepsilon}(y).$$

Also folgt:

$$\lim_{k \to \infty} \alpha(n_k) = y.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Diese Implikation zeigen wir mit dem Kontrapositiv: $\neg(iii) \Rightarrow \neg(ii)$

Sei $\langle Y, d|_{Y \times Y} \rangle$ nicht vollständig. Wähle eine Cauchyfolge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in Y die nicht konvergiert. $\overset{😊}{\Longrightarrow}$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat keine konvergente Teilfolge. int 😊 Da Y totalbeschränkt ist, gibt es für $\epsilon = 1$ eine endliche Überdeckung von Y durch Mengen mit Durchmesser kleiner als 1. Also gibt es $M_1, \ldots, M_k \subset Y$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{k} M_i \supseteq Y, \quad \forall i : \operatorname{diam}(M_i) < 1.$$

Da unendlich viele Folgenglieder in Y liegen, gibt es ein M_{i_1} das unendlich viele Folgenglieder enthält. Wähle daraus eine Teilfolge $(x_n^{(1)})_{n=1}^{\infty}$. Induktiv wählen wir nun für $m \geqslant 1$ eine Teilfolge $(x_n^{(m)})_{n=1}^{\infty}$ von $(x_n^{(m-1)})_{n=1}^{\infty}$ und eine Menge M_{i_m} so dass unendlich viele Folgenglieder von $(x_n^{(m)})_{n=1}^{\infty}$ in M_{i_m} liegen. Wähle nun $y_m := x_m^{(m)}$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$d(y_m, y_n) < 1.$$

Widerspruch zur Wahl von $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ als Cauchyfolge.

Lemma 7.0.6

Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X und (x_{n_n}) eine Teilfolge von (x_n).mit $\lim_{n \to \infty} x_{n_n} = x$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x.$$

Proof. Lemma 7.0.5:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle N_1, sodass für alle $n, m \geq N_1$ gilt:

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wähle k_0, sodass für alle $n \geq k_0$ gilt:

$$d(x_{n_1}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit $n_1 < n_2 < \dots$ Wähle k_1, sodass für alle $k \geq k_1$ gilt: $n_k \geq N_1$ Sei $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ und $n \geq N_1$. Dann folgt:

$$d(x_k, x) \leqslant d(x_n, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Lecture 8

In der letzten haben wir begonnen Satzz 7.0.4 zu beweisen. Uns fehlt noch die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i). Um die zu zeigen benötigen wir noch ein Lemma.

Lemma 8.0.1 Lemma von König

Seien $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ endliche und nicht leere Mengen in X. Und sei

$$f : \dot{\bigcup_{n\geqslant 1}} V_n \to \dot{\bigcup_{n\geqslant 0}} V_n$$

eine Abbildung. Wobei $\forall n \geqslant 1 : f(V_n) \subseteq f(V_n) \subseteq V_{n+1}$.
Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \in V_n \text{ und } \forall n \geqslant 1 : f(x_n) = x_{n+1}.$$

Proof. Lemma 8.0.1:
Sei

$$M := \{(x_0, \dots, x_n) \mid N \in \mathbb{N}, \quad (\forall n \in \{1, \dots, N\} : x_n \in V_n) \text{ und } (\forall n \in \{1, \dots, N\} : f(x_n) = x_{n+1})\}$$

Sei weiters $x_n \in V_n$ beliebig.
Dann gilt $(f^{(N)}(x_N), \dots f \circ f(x_N), f(x_N), x_N) \in M$.

$$\text{Definiere } g : \begin{cases} \dot{\bigcup}_{n\geqslant 0} V_n \to M \\ x \mapsto (f^{(N)}(x), \dots, f \circ f(x), f(x), x) \text{ Wähle N so dass für } x \in V_N \end{cases}$$

Da g injektiv ist, ist M unendlich.
Wähle $z_0 \in V_0, \dots, z_n \in V_n$ so dass $M_{z_0,\dots,z_n} := \{(x_0, \dots, x_k) \in M \mid N \geqslant n \text{ und } \forall k \in \{0, \dots, n\} : x_k = z_k\}\}$
Definiere die Rekursive Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $\forall n \in \mathbb{N} : z_n \in V_n$ und $M_{z_0,\dots,z_n}$ ist unendlich.

n=0: V_n endlich M unendlich ist. $M = \bigcup_{x\in V_0} M_{x_0} \Rightarrow \exists z_0 \in V_0 : M_{z_0}$ unendlich.

n$\longrightarrow$ n+1: Angenommen wir haben $z_0, \dots, z_n$ konstruiert.

$$\underbrace{M_{z_0,\dots,z_{n+1}}}_{\text{unendlich}} = \bigcup_{x\in V_{n+1}} M_{z_0,\dots,z_n,x}$$
$$\Rightarrow \exists z_{n+1} \in V_{n+1} : M_{z_0,\dots,z_{n+1}}$$

unendlich.
$\forall n \in \mathbb{N} \exists (x_0, \dots, x_n) \in M_{z_0,\dots,z_n}$ Damit gilt per Konstruktion: $(x_0, \dots, x_N) \in M, N \geqslant n, x_0 = z_0, \dots, x_n = z_n$ für alle $k \in \{1, \dots, N\} : f(x_k) = x_{k+1} \Rightarrow f\underbrace{(x_n)}_{z_n} = \underbrace{x_{n+1}}_{z_{n+1}}$.

Note:-

Satz 7.0.4:

(i) K ist kompakt in $\langle X, \mathcal{T}_d \rangle$. Wobei $\mathcal{T}_d$ die von d induzierte Topologie ist.

(ii) Jede Folge in K hat eine gegen einen Punkt in K konvergente Teilfolge.

(iii) K ist total beschränkt, und $\langle K, d|_{K\times K} \rangle$ ist ein vollständig metrischer Raum.

Proof. (iii)$\Rightarrow$(i) Satz 7.0.5:

Behauptung (1): Wir konstruieren rekursiv eine Folge $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ von Funktionen mit

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1; \forall A \in Q_n : \delta(A) \leqslant \frac{1}{n}$ (wobei $\delta(A)$ der Durchmesser von A ist).

(ii) $\forall n \geqslant 1 \forall A \in Q_{n+1} \exists! B \in Q_n : A \subseteq B$

Beweis Behauptung (1):

n=1: Wähle $M_1, \ldots, M_n$ so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ und $\forall i \delta(M_i) \leqslant 1$.
Wir definieren $A_m := (M_m \cap K) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1}(M_i \cap K)$.

$$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{n} A_m$$

$$= \bigcup_{m=1}^{n}(M_m \cap K) = \left(\bigcup_{m=1}^{n} M_m\right) \cap K = K$$

$\forall m \neq m' : \quad A_m \cap A_{m'} = \emptyset$
Setze $Q_1 := \{A_1, \ldots, A_n\}$.

n$\longrightarrow$ n+1: Angenommen wir haben $Q_1, \ldots, Q_n$ konstruiert.
Wähle $M_1, \ldots, M_k$ so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ und $\forall i: \ \delta(M_i) \leq \frac{1}{n+1}$. Setze

$$A_m := (M_m \cap K) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1}(M_i \cap K).$$

Dann gilt wieder:

$$\{A_1, \ldots, A_N\}$$

Sind Partitionen von K

Definiere $Q_{n+1} := \{B \cap A_i \mid B \in Q_n, \ i = 1, \ldots, N\}$.Partition von K

Note:-

Begründung: Paarweise disjunkt und Vereinigung ergibt K

– **Paarweise disjunkt:**

$$B \cap A_i, \quad B' \cap A_j$$

sind disjunkt, falls entweder $i \neq j$ (da $A_i \cap A_j = \emptyset$) oder $B \neq B'$ (da $B \cap B' = \emptyset$).

– **Vereinigung ergibt K:**

$$\bigcup_{B\in Q_n}\bigcup_{i=1}^{N}(B\cap A_i)=\bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{B\in Q_n}(B\cap A_i)$$
$$=\bigcup_{i=1}^{N}(A_i\cap\underbrace{\bigcup_{B\in Q_n}B}_{=K})=\bigcup_{i=1}^{N}A_i=K.$$

Definiere
$$f:\dot{\bigcup}_{n\geqslant 2}\to\dot{\bigcup}_{n\geqslant 1}Q_n$$
Sei $A\in Q_n$, Sei $n\geqslant 2$. So dass $A\in Q_n$ und $B\in Q_{n-1}$ mit $B\subseteq A$. Damit $f(A):=B$.

Behauptung(2): Sei $(A_n)_n^\infty$ eine Folge mit $A_n\in Q_n\forall n$ Dann ($\forall n\geqslant 2$ gilt: $f(A_n)=A_{n-1}$.) $\Rightarrow$ ($\exists x\in X\forall U\supset\mathcal{U}(x)\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\geqslant n_0:A_n\subseteq U$).

Beweis Behauptung (2):

$\forall n,m\in\mathbb{N}:n\geqslant m:A_m\subseteq A_n$ Wähle $x_n\in A_n$ und $x_m\in A_m$ so dass $d(x_m,x_n)\leqslant\delta(A_n)\leqslant\frac{1}{n}$ Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in K.

$$\Rightarrow\exists x\in K:\lim_{n\to\infty}x_n=x.$$

Sei $U\in\mathcal{U}(x)$ offen. $\exists r>0:U_r(x)\subseteq U$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n_0}<\frac{r}{2}$. Wähle weiters $n_2\in\mathbb{N}$ so dass $\forall n\geqslant n_2:d(x_n,x)<\frac{r}{2}$. Sei $n_0\geqslant\max\{n_1,n_2\}$. Betrachte nun $n\geqslant n_0$. Damit gilt für $y\in A_n\subseteq A_{n_0}$ dass

$$x_{n_0}\in A_{n_0}\Rightarrow d(y,x_{n_0})\leqslant\delta(A_{n_0})\leqslant\frac{1}{n_0}<\frac{r}{2}.$$

Dann gilt für alle $n\geqslant n_0:d(x_n,x_{n_0})<\frac{r}{2}$. $\Rightarrow d(x,y)<r$. das heißt $y\in U_r(x)\subseteq U$.

Behauptung (3): Jede offene Überdeckung von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung. Sei $C\in\mathcal{T}$ mit $\bigcup C\supseteq K$. Wir definieren die Menge:
$$\hat{Q}_n:=\{A\in Q_n\mid\forall O\in C:A\nsubseteq O\}.$$

Beweis Behauptung (3):

Fall 1: $\exists n:\hat{Q}_n=\emptyset$
$\forall A\in Q_n:\exists O\in C:A\subseteq O$. Sei $A\in Q_n$. Dann gibt es ein $O_A\in C$ mit $A\subseteq O_A$. $\Rightarrow\bigcup_{A\in Q_n}O_A\supseteq\bigcup_{A\in Q_n}A=K$. Q_n ist endlich
$\Rightarrow\{O_A\mid A\in Q_n\}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von C.

Fall 2: $\forall n:\hat{Q}_n\neq\emptyset$
Alle $\hat{Q}_n$ sind nicht leer und endlich.
Betrachte die funktion
$$\hat{f}:=f|_{\dot{\bigcup}_{n\geqslant 2}\hat{Q}_n}:\dot{\bigcup}_{n\geqslant 2}\hat{Q}_n\to\dot{\bigcup}_{n\geqslant 1}\hat{Q}_n$$
Wir wollen zeigen, dass die Zielmenge von $\hat{f}$ die Menge $\hat{Q}_{n\geqslant 1}$ ist. Sei $A\in\hat{Q}_n,f(A)\in Q_{n-1}$ mit $f(A)\supseteq A$. Angenommen $O\in C$ mit $f(A)\subseteq O$. Dann gilt auch $A\subseteq O\Rightarrow f(A)\in\hat{Q}_{n-1}$.
Also
$$\hat{f}:\dot{\bigcup}_{n\geqslant 2}\hat{Q}_n\to\dot{\bigcup}_{n\geqslant 1}\hat{Q}_n$$
. Wähle $(A_n)_{n=1}^\infty$ mit $A_n\in\hat{Q}_n$ und $\forall n\geqslant 2:f(A_n)=A_{n-1}$.

Anwendung vom Lemma 8.0.1 (Lemma von König)

Wähle $x\in X$ so dass
$$\forall U\in\mathcal{U}(x)\exists n_0\in\mathbb{N}\forall n\geqslant n_0:A_n\subseteq U.$$

Wähle $O \in C : x \in O \Rightarrow O \in \mathcal{U}(x)$ und n_0 so dass $\forall n \geqslant n_0 : A_n \subseteq O$.
Widerspruch zur Definition von $\hat{Q}_n$.

Also muss Fall 1 eintreten.

Definition 8.0.2: Relativ Kompakt

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes heißt **relativ kompakt**, wenn der Abschluss $\overline{A}$ von A kompakt ist. Wir definieren $A_m := (M_m \cap K) \setminus \bigcup_{i=1}^{m-1}(M_i \cap K)$.

Korollar 8.0.3

ei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. $A \subseteq X$ ist relativ kompakt $\Leftrightarrow$ A ist total beschränkt

Proof. Korollar 7.0.6:

("$\Rightarrow$") Sei A relativ kompakt. Das heißt $\overline{A}$ kompakt.

("$\Leftarrow$") Sei A total beschränkt. $\Rightarrow \overline{A}$ ist total beschränkt.

Note:-

$$\delta(M) = sup\{d(x,y) \mid x, y \in M\} = sup\{d(x,y) \mid x, y \in \overline{A}\} = \delta(\overline{A})$$

Sei $\epsilon > 0$. Wähle $M_1, \ldots M_n$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} M_i \supseteq A$ und $\forall i : \delta(M_i) \geqslant \epsilon$ für $i \neq j$. $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \overline{M_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} M_i} \supseteq \overline{A}$. und $\forall i : \delta(M_i) \geqslant \epsilon$. Da X vollständig und $\overline{A}$ abgeschlossen ist, ist $\overline{A}$ vollständig womit $\overline{A}$ kompakt ist.

Satz 8.0.4 Achtung Fehlerhaft!

Sei $\langle X, \|\cdot\|_\infty \rangle$ ein vollständig normierter Raum.

Proof. Satz 8.0.4:
$\boxed{\text{Klassisches Argument für Vollständigkeit von } C(X, \mathbb{R})}$:
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(1) Für jedes $x \in X$ gilt:
$$\|f_n - f_m\|_\infty \to 0 \quad \Rightarrow \quad |f_n(x) - f_m(x)| \to 0.$$
Also ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

(2) Definiere $f : X \to \mathbb{R}$ durch
$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

(3) Sei $\varepsilon > 0$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge in $C(X, \mathbb{R})$ ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass
$$\forall n, m \geqslant n_0 : \ \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$
Für alle $x \in X$ gilt dann
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$
Lässt man $m \to \infty$ gehen, folgt
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$
da der Betrag stetig ist und der Grenzübergang punktweise konvergiert.

Also gilt:
$$\forall x \in X, \ \forall n \geq n_0 : \ |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$
und somit
$$\forall n \geq n_0 : \ \sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$
Das heißt:
$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$
Damit konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f, und $f \in C(X, \mathbb{R})$, da der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen wieder stetig ist. Somit ist $(C(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig.

Satz 8.0.5 Satz von Asela Ascoli

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein kompakter Topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{G} \subseteq C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{G} \subseteq C_b(X, \mathbb{C})$ ist genau dann bezüglich der von $\|\cdot\|_\infty$ auf $C_b(X, \mathbb{R})$ bzw. $C_b(X, \mathbb{C})$ induzierten Metrik total beschränkt, wenn $\mathcal{G}$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig ist.
Das heißt, es gelten äquivalent die folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Für jedes $x \in X$ ist die Menge
$$\{f(x) \mid f \in \mathcal{G}\}$$
beschränkt.

(ii) Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(x)$, so dass
$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } y \in V \text{ und alle } f \in \mathcal{G}.$$

Proof. Satz 8.0.4 (Ascoli):
Sei $\mathcal{G}$ wie oben definiert und erfüllt (i) und (ii). Wir zeigen, dass $\mathcal{G}$ total beschränkt ist.

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. $\forall x \in X$ wähle eine Umgebung $V_x \in \mathcal{U}(x)$, so dass $\forall y \in V_x$ und $\forall f \in \mathcal{G}$ gilt:

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Da $\{V_x : x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X ist und X kompakt, existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{X}$ mit

$$\mathrm{X} = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Für $i = 1, \ldots, n$ gilt also

$$|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon \quad \text{falls } x \in V_{x_i},\ f \in \mathcal{G}.$$

Nach (i) existiert ein $c > 0$ mit

$$c := \sup\{|f(x_i)| : i = 1, \ldots, n,\ f \in \mathcal{G}\} < +\infty.$$

Betrachte die Abgeschlossene Kugel $K := \overline{B_c^{\mathbb{R}^n}(0)}$ bzw. $K := \overline{B_c^{\mathbb{C}^n}(0)}$ im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$–Norm und definieren

$$p : \mathcal{G} \to K, \quad p(f) := (f(x_1), \ldots, f(x_n))^T.$$

Da K kompakt ist, folgt dass K total beschränkt ist. Nach **Korollar 8.0.3** ist daher auch $p(\mathcal{G})$ total beschränkt. $\Rightarrow$ existieren endlich viele $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{G}$, so dass für jedes $f \in \mathcal{G}$ ein $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit

$$\|p(f) - p(f_k)\|_\infty < \varepsilon$$

existiert, d. h.

$$|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Wähle $f \in \mathcal{G}$ so das $|f(x_i) - f_k(x_i)| < \varepsilon \quad$ für $i = 1, \ldots, n$.

Für jedes $x \in \mathrm{X}$ liegt x in einem V_{x_i}, und daher folgt von Oben ($|f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$falls $x \in V_{x_i},\ f \in \mathcal{G}$.)

$$\begin{aligned} |f(x) - f_k(x)| &\leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_k(x_i)| + |f_k(x_i) - f_k(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $\|f - f_k\|_\infty \leq 3\varepsilon$, womit die offenen Kugeln $B_{4\varepsilon}(f_k)$, $k = 1, \ldots, m$, ganz $\mathcal{G}$ überdecken.

Zur Umkehrung: Sei $\mathcal{G}$ total beschränkt. Dann ist $\mathcal{G}$ beschränkt in $(C_b(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ bzw. $(C_b(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ und somit punktweise beschränkt damit haben wir getzeigt das (i) gilt.

Wegen der totalen Beschränktheit existieren für jedes $\varepsilon > 0$ endlich viele $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{G}$ mit $\forall f \in \mathcal{G}\ \exists k :$ $\|f - f_k\|_\infty < \varepsilon$.
Sei $x \in \mathrm{X}$. Durch Stetigkeit jedes f_k existieren Umgebungen $V_k \in \mathcal{U}(x)$ mit $|f_k(y) - f_k(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in V_k$. Setze $V := V_1 \cap \cdots \cap V_m \in \mathcal{U}(x)$. Für $f \in \mathcal{G}$, $y \in V$ und passendes k gilt dann:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_k(y)| + |f_k(y) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist auch (ii) erfüllt.

Lecture 9

Satz 9.0.1 Satz von Arzela-Ascoli

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Kompakt und (T2) und $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{F}$ ist totalbeschränkt

(ii) $\mathcal{F}$ ist punktweise beschränkt (dh.: $\forall x \in X : \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)| < \infty$)

(iii) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig (dh.: $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \, \exists U \in \mathcal{U}(x) \forall f \in \mathcal{F} : f(U) \subseteq \mathcal{U}_\epsilon(f(x))$)

Proof: Satz 9.0.1 ("$(i) \Rightarrow (ii)$")
Wir betrachten $\mathcal{F}$ Totalbeschränkkt dann erhalten wir die Implikationskette

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \text{ totalbeschränkt} \\ &\Rightarrow \mathcal{F} \text{ ist beschränkt} \\ &\Rightarrow sup\{\|f\|_\infty : f \in \mathcal{F}\} < \infty \forall x \in X : | f(x) | \leqslant \|f\|_\infty \\ &\Rightarrow \mathcal{F} \text{ ist punktweise beschränkt} \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ wähle $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{6}}(f_i)$ Sei $x \in X$.
Wähle für $i = 1, \ldots, n$ ein $U_i \in \mathcal{U}(x)$ so dass $| f_i(y) - f_i(x) | < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $y \in U_i$.
Betrachte $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$ sei $y \in \mathcal{U}$ und $f \in \mathcal{F}$ weiters wähle $i : f \in \mathcal{U}_{\frac{\varepsilon}{6}}(f_i)$ $| f(y) - f(x) | \leqslant | f(y) - f_i(y) | + | f_i(y) - f_i(x) | + | f_i(x) - f(x) | < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$

Für die andere Richtung müssen wir ein Lemma einschieben. Also zu dem Zeitpunkt an dem ich das hier schreibebin ich mir nicht sicher ob wir das Lemma wirklich brauchen. Da aber an diese stelle ein Lemma kommt und dannach die andere Richtung bewiesen wird gehe ich davon aus das es notwendig ist.
...
Jetzt habe ich mir das Lemma durchgelesen und es sieht sehr sinnvoll aus.

Lemma 9.0.2

Sei $\langle \Omega, d \rangle$ ein metrischer Raum und es gelte:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \langle \Omega', d' \rangle \text{ metrischer Raum } , \Phi : \Omega \to \Omega', \delta > 0 : \Phi(\Omega) \text{ ist Totalbeschränkkt}$$
$$\forall x, y \in \Omega : d'(\Phi(x), \Phi(y)) < \delta \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$$

Dann folgt $\rangle \Omega, d \langle$ ist totalbeschränkt

Proof. Lemma 9.0.2
Sei $\epsilon > 0$ wähle $\langle \Omega', d' \rangle, \Phi, \delta$ so dass die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind. Wähle $x'_1, \ldots, x'_n \in \Omega'$ mit $\Phi(\Omega) \subseteq \bigcup_{i=1}^n \underbrace{\Phi^{-1}(\mathcal{U}_\delta(x_i))}_{\subseteq \mathcal{U}_\epsilon(x-i)}$ Sei $y \in \Phi^{-1}(\mathcal{U}_\delta(x_i))$ dann gilt $d'(\Phi(y), \Phi(x_i)) < \delta$ und somit $d(y, x_i) < \epsilon$

Nachdem wir das Lemma bewiesen haben können wir die Rückrichtnung antreten.

Proof. Satz 9.0.1 ("$(ii) \Rightarrow (i)$")
Sei $\varepsilon > 0$. Für $x \in X$ wähle $U_x \in \mathcal{U}(x)$ so dass $\forall y \in U_x \forall f \in \mathcal{F} : |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei U_x offen. Da X kompakt ist gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ so dass $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ Definiere die Abbildung

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{F} \to \mathbb{R}^n \\ f \mapsto (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \end{cases}$$

- $\Phi(\mathcal{F}) := \{(f(x_1), \ldots, f(x_n)) : f \in \mathcal{F}\}$ ist beschränkt in $\mathbb{R}^n$ da $\mathcal{F}$ punktweise beschränkt ist. Somit ist $\Phi(\mathcal{F})$ totalbeschränkt in $\mathbb{R}^n$.
- Setze $\delta := \frac{\epsilon}{3}$ Sei $f, g \in \mathcal{F}$ mit $\|\Phi(f) - \Phi\| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_i) - g(x_i)| < \delta$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ Wähle $x \in X$ und i so dass für $x \in U_{x_i}$ gilt $| f(x) - g(x) | \leqslant \underbrace{| f(x) - f(x_i) |}_{<\epsilon} + \underbrace{| f(x_i) - g(x_i)}_{\delta = \frac{\epsilon}{2}} + \underbrace{| g(x) - g(x_i) |}_{<\epsilon} < \epsilon + \frac{\epsilon}{3} + \epsilon = \frac{7\epsilon}{3}$

  Also gilt $\|f - g\|_\infty < \frac{7\epsilon}{3} \overset{\text{Lemma 9.0.2}}{\Rightarrow} \mathcal{F}$ ist totalbeschränkt

Beispiel 9.0.3

Sei $\alpha \in (0, 1], L > 0, C >=$

$$\mathcal{F}_{\alpha,L,C} := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Exponent } \alpha \text{ und Lipschitzkonstante L}\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}_{\alpha,L,C}$ total beschränkt.

- $|f(x)| \leqslant |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leqslant L|x - 0|^\alpha + C \leqslant L + C \leqslant \epsilon$
- $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|^\alpha$ Sei $\varepsilon > 0$. $|x - y| < \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{1/\alpha} : |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig.
Gewisse Funktionen lassen sich als Potenzen darstellen.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}_{\text{Polynom } \mathbb{P}_N}$$

Satz 9.0.4 Weierstraßesscher Approximationssatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Folge von Polynomen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$$

$\langle C(X, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty \rangle$ wobei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ kompakter Topologischer-Raum.
$\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$

Satz 9.0.5 Stone-Weierstraß

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ kompakter Topologischer-Raum und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra die

1. die Niergends verschwindend ist, dh.: $\forall x \in X \, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0$
2. Punkte trennend dh.:$\forall x, y \in X, x \neq y \, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(X, \mathbb{R})$ (dh.: $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$).

Lemma 9.0.6

Sei X ein kompakter topologischer Raum und $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine Unteralgebra die

1. die Niergends verschwindend ist, dh.: $\forall x \in X \, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq 0$
2. Punkte trennend dh.:$\forall x, y \in X, x \neq y \, \exists f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$

Dann gilt: $1 \in \overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty}$

Proof. Lemma 9.0.3

(1.) Wir zeigen:$\exists f \in \mathcal{A} \forall x \in X; f(x) > 0$ Sei $x \in X$ wähle $f_x \in \mathcal{A}$ mit $f_x(x) \neq 0$. Wähle $O_x \in \mathcal{U}(x)$ oofen. so dass $f_x(y) \neq 0$ für alle $y \in O_x$. Da X kompakt gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ so dass $X = \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$ Definiere $f := \sum_{i=1}^n f_{x_i}^2 \Rightarrow f \in \mathcal{A}$ Sei $x \in X$ dann gibt es $i \in \{1, \ldots, n\}$ so dass $x \in O_{x_i} \Rightarrow f_{x_i}(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x) \geqslant f_{x_i}^2(x) > 0$

(2.) Wir zeigen: $1 = (1-t)\sum_{n=0}^N t^n + t^{N+1}$ d.h.: $1 = s\sum_{n=0}^N (1-s)^n + (1-s)^{N+1} \forall s \in \mathbb{R}$ Wähle $f \in \mathcal{A}$ mit $\delta > 0 \forall x \in X : \delta \geqslant f(x) \leqslant 1$.

> **Note:-**
>
> Wir können das das f so wegen (1-) wählen Seit $f(x)$ wie in (1.) Setze $\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_\infty} \underbrace{min_{x \in X}\{f(x)\}}_{>0}$ Weil X kompakt ist existiert das Minimum und ist überall größer als 0.

$$\Rightarrow 1 = \underbrace{f(x)\sum_{n=0}^N (1-f(x))^n}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{(1-f(x))^{N+1}}_{0 \leqslant -1-\delta < 1} \text{ also } |(1-f(x))^{N+1}| < (1-\delta)^{N+1} \longrightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \text{ Gelcihmäßig}$$

> **Note:-**
>
> Für den Beweis von Satz von Stone-Weierstraß kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dass $1 \in \mathcal{A}$ (wegen Lemma 9.0.6).

Proof. Sei $\mathcal{A}$ Wie in Satz von Stone-Weierstraß. Betrachte $\mathcal{B} := span(\mathcal{A} \cup \{1\})$ Dann ist $\mathcal{B}$ eine Unteralgebra das bedeutet $((\sum_{endl.} \alpha_i f_i + \alpha 1)(\sum_{endl.} \beta_i g_i + \beta 1) = [\cdots] \in \mathcal{A})$ für die gilt:

1. $\mathcal{B}$ ist Punkte trennend.
2. $1 \in \mathcal{B}$
3. $\mathcal{B}$ ist nirgends verschwindend.

$\underset{\text{Spezialf. v. Satz}}{\Longrightarrow}$ $\overline{\mathcal{B}} = C(X, \mathbb{R})$ $1 \in \overline{\mathcal{A}}$ Wegen Lemma 9.0.3.gilt: damit auch $\overline{\mathcal{A}} = C(X, \mathbb{R})$

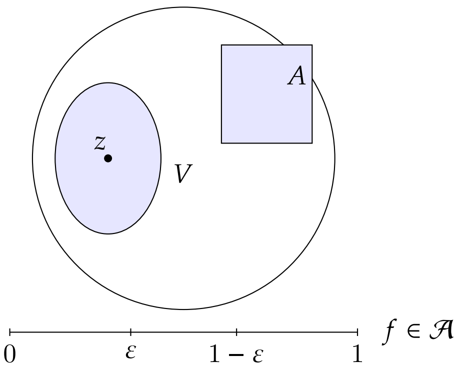
Lemma 9.0.7

Sei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine Punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A} z \in X, A \subseteq X$ Abgeschlossen mi $z \notin A$

$$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{U}(z) \text{ offen } : V \cap A \neq \emptyset$$

und $\forall \epsilon > 0 \, \exists f \in \mathcal{A}$ so dass

$$\begin{aligned} \forall x \in X &: |f(x)| \leqslant 1 \\ \forall x \in V &: |f(x)| \leqslant \epsilon \\ \forall x \in A &: |f(x)| \geqslant 1 - \epsilon \end{aligned}$$



Proof. Lemma 9.0.7

(1.) Wir zeigen: $\exists h \in \mathcal{A}$ so dass $\forall x \in X : h(x) \geqslant 0, h(z) = 0, \forall x \in A : h(x) > 0$
Konstruiere $h \in \mathcal{A}$, $\varepsilon \in (0,1)$, $V \in U(x)$ offen. $\forall x \in V : h(x) < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\forall x \in A : h(x) > \delta$ und $\forall x \in X : 0 \leq h(x) \leq 1$.

Für $y \in A$ wähle $g_y \in \mathcal{A}$: $g_y(y) \neq 0$ und $g_y(z) = 0$.

Setze
$$h_y = \frac{1}{\|g_y\|_\infty^2} g_y^2 \in \mathcal{A}.$$

Dann gilt
$$h_y \in \mathcal{A}, \quad h_y(y) > 0, \quad h_y(z) = 0, \quad \forall x \in X : 0 \leq h_y(x) \leq 1.$$

Setze $O_y := \{x \in X \mid h_y(x) > 0\}$ offen, und $y \in O_y$.

$A \subseteq \bigcup_{y \in A} O_y \Rightarrow$ Wähle $y_1, \ldots, y_n \in A$:
$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n O_{y_i}.$$

Setze $h := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{y_i}$.

$$\Rightarrow h \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in X : 0 \leq h(x) \leq 1, \quad h(z) = 0.$$

Sei $x \in A$. Wähle j mit $x \in O_{y_j}$. Dann

$$h(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_{y_i}(x) \geq \frac{1}{n} h_{y_j}(x) > 0.$$

$$\Rightarrow \delta := \min_{x \in A} h(x) > 0, \qquad V := \{x \in X \mid h(x) < \tfrac{\varepsilon}{3}\}.$$

(2.) Wir zeigen:...

Lecture 10

Korollar 10.0.1 Um das Lemma anzuwenden

ei $\mathcal{A} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ Punktetrennende Unteralgebra mit $1 \in \mathcal{A}, A, B \subseteq X$ Abgeschliossen, $A \cap B = \emptyset$.

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \exists f \in A : \forall x \in X : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \forall x \in B : f(x) \geqslant 1 - \epsilon$$

Proof. $\mathcal{A} = \emptyset$.Dann ist das ganze trivial. Sei also $A \neq \emptyset$. Für $a \in A$ Wähle $V_a \in ⫞$ offen.
Und $V_a \cap B = \emptyset$

Note:-

$x, y \in X, x \neq y$ Wähle $f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y)$ Dann:

$$f^{-1}((f(x) - \delta, f(x) + \delta)), f^{-1}((f(y) - \delta, f(y) + \delta))$$

Dann wähle $\delta := |\frac{f(x)-f(y)}{3}|$.
Dann sind die beiden Mengen disjunkt.
(Beweis $\langle X, d \rangle$ erfüllt (T2))

$A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a \Rightarrow$ Wähöe $a_1, \ldots, a_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$

10.1 Korrektur

In der Vorlesungvom 2025.11.04 gab es eine kleine große verwirrung. Also ich habe nicht nur mein Tablet vergessen, es ist noch mehr schief gegeanen (What a day). Aufjedenfall hat uns, unser Professor (The one and only Woracek) eine Korrektur zukommen lassen. Hier ist sie:

Lemma 10.1.1 Das Lemma (starke Variante)

$\forall A \subseteq X$ abgeschlossen

$$\forall z \in X \setminus A \exists V \subseteq X \forall \epsilon > 0 \exists f \in \mathcal{A}$$

sodass
V ist offene Umgebung von z

$$\wedge V \cap A = \emptyset \wedge \forall x \in X : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \wedge \forall x \in V : f(x) \leqslant \epsilon \wedge \forall x \in A : f(x) \geqslant 1 - \epsilon$$

Proof. Lemma 10.1.1 (starke Variante)
Wir gehen den beweis schritt für schritt durch

Schritt 1: hier haben wir gezeigt dass

$\forall A \subseteq X$ abgeschlossen

$$\forall z \in X \setminus A \exists V \subseteq X \exists h \in \mathcal{A} \exists \delta \in (0, 1]$$

sodass

V ist offene Umgebung von z

$$\wedge V \cap A = \emptyset \wedge \forall x \in X : 0 \leqslant h(x) \leqslant 1 \wedge \forall x \in V : h(x) \leqslant \delta/3 \wedge \forall x \in A : h(x) \geqslant \delta$$

Schritt 2: hier haben wir gezeigt dass

Sei h wie in Schritt 1 und definiere $p_n := (1 - h^n)^{k^n}$. Dann gilt "$\lim_{n\to\infty} p_n(x) = 0$ gleichmaessig für $x \in A und \lim_{n\to\infty} p_n(x) = 1$ gleichmaessig für $x \in V$".

Der Beweis des oben stehenden Lemmas (starke Variante) ist nun fertig, weil:

Seien A,z gegeben. Waehle V wie in Schritt 1 . Sei $\epsilon > 0$gegeben. Waehle n so gross, dass

$$p_n(x) \leqslant \epsilon fuer alle x \in A$$

und

$$p_n(x) \geqslant 1 - \epsilon \forall x \in V. Setze f := 1 - p_n.$$

zum Korollar:

Korollar 10.1.2

$\forall A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt

$$\forall \epsilon > 0 \exists f \in \mathcal{A}$$

sodass

$$\forall x \in X : 0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \wedge \forall x \in A : f(x) \leqslant \epsilon \wedge \forall x \in B : f(x) \geqslant 1 - \epsilon$$

Proof. Korollar: 10.1.2
Seien A, B, ϵ gegeben

- Fuer jedes $z \in A$wenden wir das Lemma an mit der Menge B und dem Punkt z. Dies gibt V_z.
- Nun reichen endlich viele V_z aus um A zu ueberdecken, waehle solche: $V_{z_1}, \ldots, V_{z_N}$.
- Aus der Eigenschaft des Lemmas waehle nun f_{z_j} für ϵ/N
- Betrachte das Produkt dieser f_{z_j}. Mit Bernoullischer Ungleichung sieht man dass das Gewuenschte gilt.

10.2 Weiter in der Vorlesung

Nach diesem einschub kommen wir nun zum Nächsten Punkt (alias Satz 10.2.4)

Satz 10.2.1

Sei X Kompakt, $C(CX, \mathbb{R})$ mit Unteralgebra, nirgends verschwindend und abgeschlossen bezüglich Komplexer konjugation. $\Rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{\infty} = C(X, \mathbb{R})$

Proof. Satz; 10.2.1
Sei $B = \{f \in \mathcal{A} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Es gelte $\forall \in \mathcal{A} : Ref, imf \in B : Ref = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$
$Imf = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$
Sei $x \in X$ Wähle $f \in \mathcal{A} : f(x) \neq f(y) \Rightarrow$ entweder $Ref(x) \neq Ref(y)$ oder $Imf(x) \neq Imf(y) \Rightarrow B$ ist punktetrennend.
Aus dem Korollar folgt nun $\overline{B}^{\infty} = C(X, \mathbb{R}) \Rightarrow \overline{\mathcal{A}}^{\infty} = C(X, \mathbb{R})$ Sei $f \in C(X, \mathbb{C})$ $Ref \in \overline{B}^{\infty} \subseteq \overline{\mathcal{A}}^{\infty} \Rightarrow f = Ref + iImf \in \overline{\mathcal{A}}^{\infty}$

Satz 10.2.2

X kompakt, T_2. $C(X,\mathbb{R}) \supseteq \mathcal{A}$ Unteralgebra $\Rightarrow \mathcal{A}$ ist:

$$\mathcal{A}^{t^*} := \{f \in C(X,\mathbb{R}) \mid, \ker f \supseteq \bigcap_{g \in \mathcal{A}} \ker g\}.$$

Proof. 10.2.2

" $\subseteq$": Sei $f \in \mathcal{A}^{t^*}$.
Wähle $(g_n)_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in \mathcal{A}$ mit $g_n \to f$.

$\forall x, y$ mit $e(x) = e(y)$ gilt:
$0 \in \ker g_n \quad \Rightarrow \quad g_n(x) = g_n(y)$ für alle n.
$\Rightarrow g_n(x) = g_n(y) \to f(x) = f(y)$.

"$\supseteq$" Betrachte

$$Y := X \Big/ \bigcap_{g \in \mathcal{A}} \ker g.$$

Sei $q : X \to Y$ stetig.
$\Rightarrow \ker q$ ist Algebra.

$e(x_1) = e(x_2) \Rightarrow q(x_1) = q(x_2)$.

Lecture 11

In der Vorlesung geht es um die Einführung der Initialen Topologien -Ich denke das es darum geht anhand von dem was mein Auge erblickt-

11.1 Kommutative Diagramme zur Veranschaulichung

Weil die Konstrucktion bei einem normalen (Auch bei nicht normalen) menschen ein paar knoten im kopf verursacht, wollen wir uns das ganze mal mit Bildern anschauen (Kommutative Diagramme).

Seien $X_i, i \in I$ Mengen "mit Topologien" und $\Phi : \begin{cases} Y \to \prod_{i \in I} X_i \\ (\alpha_i(y))_{i \in I} \mapsto X_i \end{cases}$ eine Abbildung.

Wobei $\alpha_i : \pi_i \circ \Phi, \forall i \in I$ mit π_i die Projektion auf die i-te Komponente ist und damit ist π_i stetig $\forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & Y \arrow[d, dashed, "\Phi"] \arrow[ddl, bend right, "\alpha_k"'] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_j"] & & & \\
 & & & \prod_{i \in I} X_i \arrow[dl, "\pi_k"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & & & \\
 (X_{k-1}, \mathcal{T}_{k-1}), & \cdots, & (X_k, \mathcal{T}_k), & \cdots & ,(X_j, \mathcal{T}_j), & \cdots, & ,(X_{j+1}, \mathcal{T}_{j+1})
\end{tikzcd}$$

Davon ausgehend wollen wir eine Topologie auf Y definieren, die sogenannte **initiale Topologie** bezüglich der Familie von Abbildungen $(\alpha_i)_{i \in I}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & \langle Y, \mathcal{V} \rangle \arrow[d, dashed, "\Phi"] \arrow[ddl, bend right, "\alpha_k"'] \arrow[ddr, bend left, "\alpha_j"] & & & \\
 & & & \langle \prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i \rangle \arrow[dl, "\pi_k"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & & & \\
 \langle X_{k-1}, \mathcal{T}_{k-1} \rangle, & \cdots, & \langle X_k, \mathcal{T}_k \rangle, & \cdots & ,\langle X_j, \mathcal{T}_j \rangle, & \cdots, & ,\langle X_{j+1}, \mathcal{T}_{j+1} \rangle
\end{tikzcd}$$

Note:-

$\prod_{i\in I}\mathcal{T}_i$ ist die Kleinste Topologie mit

$$\bigcup_{i\in I}\{\pi^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i\}$$

11.2 Konstrucktion ohne Zeichnen

Im folgenden wollen wir zeigen das wenn gilt: Seien $X_i, i \in I$ Mengen mit Topologien $\mathcal{T}_i$ und $\alpha_i : \pi_i \circ \Phi \forall i \in I$ und π_i stetig $\forall i \in I$ Dann ist Φ stetig

Definition 11.2.1: Seien $\rangle X_i, \mathcal{T}_i\langle, i \in I$ topologische, $i \in I$ X eine Menge und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen, $\forall i \in I$. Die initiale Topologie $\mathcal{T}_{\textbf{init}}$ auf X bezüglich der Familie von Abbildungen $(f_i)_{i\in I}$ ist die kleinste Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i stetig sind.

$$\mathcal{T}_{\textbf{init}} := \textbf{Topologie erzeugt von} \bigcup_{i\in I}\{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i\}$$

Satz 11.2.2

Seien $\langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle, i \in I$ topologische Räume, X eine Menge und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen, $\forall i \in I$. und $\mathcal{T}$ ist Topologie auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{init}}$

(ii) Für jeden topologischen Raum $\langle Y, \mathcal{V}\rangle$ und jede Abbildung $g : \langle Y, \mathcal{V}\rangle \to \langle X, \mathcal{T}\rangle$ ist stetig genau dann, wenn alle Kompositionen $f_i \circ g : \langle Y, \mathcal{V}\rangle \to \langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle$ stetig sind, $\forall i \in I$.

Proof. Satz:11.2.2

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Sei $g : \langle Y, \mathcal{V}\rangle \to \langle X, \mathcal{T}\rangle$ eine Abbildung.

"$\Rightarrow$" $\bigcup_{i\in I}\{f_1^{-1}\}$ ist Subbasis von $\mathcal{T}$. Sei also $O_i \in \mathcal{T}_i, i \in IO_i \in \mathcal{T}_i$:

$$g^{-1}(f_i^{-1}(O_i)) = (f_i \circ g)^{-1}(O_i) \in \mathcal{V}$$

"$\Leftarrow$" $f_i : \langle X, \mathcal{T}\rangle \to \langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle$ stetig $\forall i \in I$. $\Rightarrow f_i \circ g$ stetig $\forall i \in I$

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" (1)

$$\begin{tikzcd}
\langle X, \mathcal{T}_{\text{ini}}\rangle \arrow[d, "\text{id}_X"'] \arrow[dr, bend left, "f_i"] & \\
\langle X, \mathcal{T}\rangle \arrow[r, "f_i"'] & \ldots, \langle X_i, \mathcal{T}_i\rangle, \ldots
\end{tikzcd}$$

id_X stetig wegen (ii). $\quad (\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{ini})$

stetig stetig

(2)

$$\begin{tikzcd}
\langle X, \mathcal{T} \rangle \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, bend left, "f_i"] & \\
\langle X, \mathcal{T} \rangle \arrow[r, "f_i"'] & \ldots, \langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle, \ldots
\end{tikzcd}$$

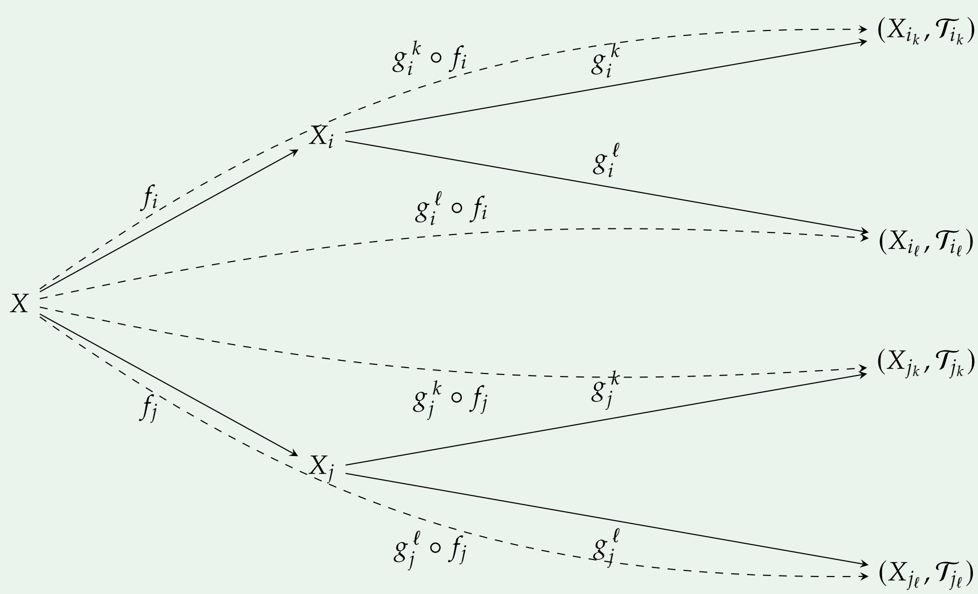
stetig stetig

$$\text{mit (ii)} \;\Rightarrow\; f_i : \langle X, \mathcal{T} \rangle \to \langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T} \supseteq \bigcup_{i \in I} \{ f_i^{-1}(U_i) \mid U_i \in \mathcal{T}_i \} \Rightarrow \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{ini}}.$$

Satz 11.2.3

Seien X und $(X_i)i \in I$ Mengen mit Abbildungen $f_i : X \to X_i$ für $i \in I$. Witers seine XX_{i_ℓ} Menten mit $\ell \in J_i$ Abbildungen $g_{i\ell} : X_i \to X_{i\ell}$ und auf den $X_{i\ell}$ seien Topologien $\mathcal{T}_{i\ell}$ gegeben.
Sei $\mathcal{T}_i$ die initiale Topologie auf X_i bezüglich $\mathcal{T}_{i\ell}, g_{i\ell}$, sei $\mathcal{T}$ die initiale Topologie auf X bezüglich $\mathcal{T}_i, f_i)$ und sei $\mathcal{W}$ die initiale Topologie auf X bezüglich $\mathcal{T}_{i\ell}, g_{i\ell} \circ f_i$.



Proof. Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Topologische Räume und $g : \langle Y, \mathcal{V} \rangle \to \langle X, \mathcal{T} \rangle$ eine Abbildung.

- Sei $\forall i \in I \forall k \in J_k : (g_{i_\ell} \circ f_i) \circ g$ stetig. sei $i \in I$. Dann ist $f_i \circ g : Y, \to \; X_i \forall \ell \in J_i : g_{i_\ell} \circ (f_i \circ g)$ stetig.
$\Rightarrow f_i \circ g : \langle Y, \mathcal{V} \rangle \to \langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$ stetig.
$g : \langle Y, \mathcal{V} \rangle \to \langle X, \mathcal{T} \rangle$ stetig. $\Rightarrow g : \langle Y, \mathcal{V} \rangle \to \langle X, \mathcal{W} \rangle$ stetig.
- Sei $g : \langle Y, \mathcal{V} \rangle \to \langle X, \mathcal{W} \rangle$ stetig. $\Rightarrow \langle Y, \mathcal{V} \rangle \to \langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle$ stetig $\forall i \in I$.

Note:-
Was da pasiert ist nix

$$\overset{\text{Satz 11.2.2 (ii)} \Rightarrow \text{(i)}}{\Longrightarrow} \mathcal{T} = \mathcal{W}$$

Spurtopologie

$$\langle X, \mathcal{T} \rangle \text{ top. Raum} Y \subseteq X$$

$\mathcal{T} \upharpoonright_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$

$$\iota : \begin{cases} Y \to X \\ y \mapsto y \end{cases}$$

$\langle Y, \mathcal{V} \rangle \xrightarrow{\iota} \langle X, \mathcal{T} \rangle \qquad$ initiale Top. v. $\mathcal{T}, \iota$
$\mathcal{V}$ ist kleinste Top. auf Y mit $\supseteq \{\, \iota^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{T} \,\} \iota^{-1}(O)$ $O \cap Y = \iota^{-1}(O) \Rightarrow \quad \mathcal{V} = \mathcal{T} \upharpoonright_Y$

- Sei $\langle Z, \mathcal{W} \rangle$ topologischer Raum, $g : Z \to Y$ Dann ist $\langle Z, \mathcal{W} \rangle \xrightarrow{g} \langle Y, \mathcal{V} \rangle$ stetig genau dann, wenn $\langle Z, \mathcal{W} \rangle \xrightarrow{\iota \circ g} \langle X, \mathcal{T} \rangle$ stetig ist.
- $Z \subseteq Y \subseteq X$ $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologischer Raum.
-

$$(\mathcal{T} \upharpoonright_Y) \upharpoonright_Z = \{\, Q \cap Z \mid Q \in \mathcal{T} \upharpoonright_Y \,\} = \left\{\, \underbrace{(O \cap Y) \cap Z}_{=O \cap (Y \cap Z) = O \cap Z} = \mid O \in \mathcal{T} \right\}$$

```tikzcd
\cdots & X_i \arrow[dr, bend right, "\iota_i"] \arrow[ddr, bend right=60, "\beta_i"'] & \cdots & X_i \arrow[dl, bend left, "\iota_j"'] \arrow[ddl, bend left=60, "\beta_j"] & \cdots \\
& & \bigcup X_i \arrow[d, "\exists!\Phi"] & & \\
& & Y & &
```

$$\dot{\bigcup} X_i = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

$$\iota_i : \begin{cases} X_i \to \dot{\bigcup} X_i, \\ x \mapsto (x, i) \end{cases}$$

$$\overline{\beta}(z) = \beta_i(x), \qquad \text{wobei } i, x \text{ so gewählt, dass } z = (x, i)$$

wohldef.

Note:-
Beispiel: Faltentopologie

$$\langle X, \mathcal{T} \rangle, \quad \sim \text{ Äquivalenzrel.}$$

$$\langle X, \mathcal{T} \rangle \xrightarrow{\pi} \langle X/\!\sim,\ \mathcal{T}/\!\sim \rangle$$

Definition 11.2.4

Seien $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $i \in I$. X Menge, $f_i : X \to X_i$ Abbildungen, $\forall i \in I$. Die **finale Topologie** $\mathcal{T}_{\text{final}}$ auf X bezüglich der Familie von Abbildungen $(f_i)_{i \in I}$ ist die größte Topologie auf X, so dass alle Abbildungen f_i stetig sind.

$$\mathcal{T}_{\text{final}} := \text{Topologie erzeugt von } \bigcup_{i \in I} \{ f_i(O_i) \mid O_i \in \mathcal{T}_i \}$$

Diese Definition ist gerechtfertigt durch da:

Lemma 11.2.5

$$\{=\in X \mid \forall i \in I : f_i^{-1}(O_i) \in \mathcal{T}_i\}$$

Ist eine Topologie auf X

Proof. Lemma 11.2.5

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{\text{final}}$ da $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $f_i^{-1}(X) = X$.
- Sei $(U_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{T}_{\text{final}}$ eine Familie. Dann ist
$$f_i^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in A} f_i^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{T}_i$$
$\Rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}_{\text{final}}$.
- Sei $U, V \in \mathcal{T}_{\text{final}}$. Dann ist
$$f_i^{-1}(U \cap V) = f_i^{-1}(U) \cap f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_i$$
$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_{\text{final}}$.

Satz 11.2.6 11.2.6

Seien $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle, i \in I$ topologische Räume, X eine Menge und $f_i : X \to X_i$ Abbildungen, $\forall i \in I$. und $\mathcal{T}$ ist Topologie auf X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{final}}$

(ii) Für jeden topologischen Raum $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ und jede Abbildung $g : \langle X, \mathcal{T} \rangle \to \langle Y, \mathcal{V} \rangle$ ist stetig genau dann, wenn alle Kompositionen $g \circ f_i : \langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle \to \langle Y, \mathcal{V} \rangle$ stetig sind, $\forall i \in I$.

Satz 11.2.7

Sei X eine Menge, $\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle, i \in I$ topologische Räume und $X_{i_k}, k \in J_i$ Mengen mit Abbildungen $f_i : X_i \to X$ für $i \in I$ und $\mathcal{T}_{i_k}$ auf X_{i_k}. Sei $\mathcal{T}_i$ die finale Topologie auf X_i bezüglich der Familie von Abbildungen $g_{i_k} : X_{i_k} \to X_i, k \in J_i$, sei $\mathcal{T}$ die finale Topologie auf X bezüglich der Familie von Abbildungen $f_i : X_i \to X, i \in I$, und sei $\mathcal{W}$ die finale Topologie auf X bezüglich der Familie von Abbildungen $f_i \circ g_{i_k} : X_{i_k} \to X, k \in J_i, i \in I$. Dann gilt $\mathcal{T} = \mathcal{W}$.

Proof. Satz 11.2.6

"$(ii) \Rightarrow$(i)"

$$\begin{tikzcd}
\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle \arrow[d, "f_i"] \arrow[dd, bend right, "f_i \text{ stet.}"'] \\
\langle X, \mathcal{T} \rangle \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\
\langle X, \mathcal{T}_{\text{fin}} \rangle
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\langle X_i, \mathcal{T}_i \rangle \arrow[d, "f_i"] \arrow[dd, bend left, "f_i \text{ stet.}"] \\
\langle X, \mathcal{T} \rangle \arrow[d, "\mathrm{id}_X"] \\
\langle X, \mathcal{T} \rangle
\end{tikzcd}
\qquad \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{\text{fin}}$$

alle Beweise analog zu $\mathcal{T}_{\text{ini}}$.

Lecture 12

Definition 12.0.1

$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ heißt (T4) wenn:

$$\forall A, B \subset X \text{ mit } A, B \text{ abgeschlossen und } A \cap B = \emptyset \text{ gibt es offene Mengen } O_A, O_B \in \mathcal{T}:$$

$$O_A \cap O_B = \emptyset. \text{ und } A \subset O_A, B \subset O_B.$$

Lemma 12.0.2

(i) Sei $\langle X, d \rangle$ ein metrischer Raum. Dann ist $\langle X, \mathcal{T}(d) \rangle$ T4.

(ii) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Kompakt und (T2). Dann ist $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ T4.

Proof. Lemma: 12.01.2

(i) Sei $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A, B \neq \emptyset A \cap B = \emptyset$.

Fall: $x \in A : x \in X \notin B$ offen $\implies \exists \epsilon_x > 0 : U_{\epsilon_x}(x) \cap B = \emptyset$.
Fall: $y \in B : y \in X \notin A$ offen $\implies \exists \delta_y > 0 : U_{\delta_y}(y) \cap A = \emptyset$.

Definiere:

$$O_A := \bigcup_{x \in A} U_{\frac{\epsilon_x}{2}}(x), \quad \text{offen}$$

$$O_B := \bigcup_{y \in B} U_{\frac{\delta_y}{2}}(y), \quad \text{offen}$$

Angenommen es gibt ein $z \in O_A \cap O_B$. Dann gibt es $x \in A, y \in B$ mit

$$d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) < \frac{\epsilon_x}{2} + \frac{\delta_y}{2} < \epsilon_x \implies \text{Widerspruch.}$$

Da $d(x,y) \geqslant \epsilon_x \Rightarrow B \ni y \notin U_{\epsilon_x}(x)$. und $d(x,y) \geqslant \delta_y \Rightarrow A \ni\in U_{\delta_y}(y)$.

(ii) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Ein Topologischer Raum, (T2) und kompakt. Betrachte $A, B \neq \emptyset \in X$, Kompakt und disjunkt. $\Rightarrow$ A,B sind abgeschlossen, $\neq \emptyset$ und disjunkt.

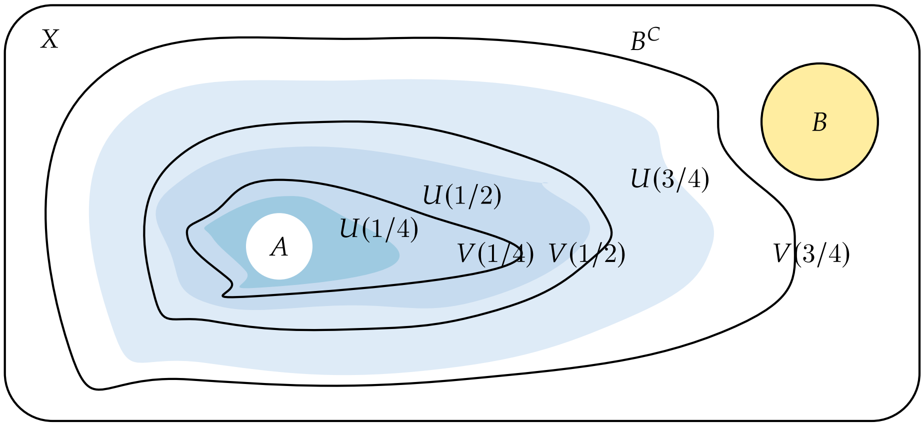
$$\Rightarrow \exists O_A, O_B \in \mathcal{T} : A \subset O_A, B \subset O_B O_A \cap O_B = \emptyset.$$

Satz 12.0.3 Lemma von Urysohn

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein T4 Raum. Dann

$$\forall A, B \subset X \text{ mit } A, B \neq \emptyset \text{ abgeschlossen und } A \cap B = \emptyset$$

$$\exists f : X \longrightarrow [0,1] \text{ stetig mit } f\mid_A = \{0\}, f\mid_B = \{1\}.$$



Lemma 12.0.4

Seie $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer, $M \subseteq [0,1]$ dicht und $\{0,1\} \subseteq M$. Definiere

$$\alpha : M \longrightarrow \mathcal{T}$$

mit

(i) $\alpha(0) = \emptyset, \alpha(1) = X$

(ii) $r, s \in M, r < s \implies \overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)$

Dann gibt es eine stetige Funktion $f : X \longrightarrow [0,1]$ mit

$$\forall r \in M : \{x \in X : f(x) < r\} = \alpha(r).$$

Proof. Lemma: 12.01.4 f ist Subbasis der Euglischen Standardtopologie auf $[0,1]$. $(\{(v,1] \mid v \in [0,1))\} \cup \{[0,v) \mid v \in (0,1]\})$.

- Sei $v \in [0,1)$.

$$\begin{aligned} f^{-1}((v,1]) &= \{x \in X \mid f(x) > v\} \\ &= \{x \in X \mid \exists r \in M : r < v, x \in \alpha(r)\} \\ &= \bigcup_{\substack{r \in M \\ r > v}} \alpha(r) \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

- Sie v in (0,1].

$$\begin{aligned} f^{-1}((0,v]) &= \{x \in X \mid f(x) > v\} \\ &= \{x \in X \mid \exists s \in M : f(x) > s > v\} \\ &\overset{\bigstar}{=} \{x \in X \mid \exists s \in M : x \notin \alpha(s), s > v\} \\ &= \bigcup_{\substack{s \in M \\ s > v}} X \setminus \alpha(s) \underbrace{\subseteq}_{(\star\star)} \bigcup_{\substack{s \in M \\ s > v}} X \setminus \overline{\alpha(s)} \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

Mit (★) ("$\subseteq$")

$$\begin{aligned} &\forall r \leqslant s : \alpha(r) \subseteq \alpha(s) \\ &\Rightarrow \forall r \leqslant s : x \notin \alpha(s) \\ &\Rightarrow f(x) \leqslant r < s \end{aligned}$$

Wähle also $s' \in M$ mit $s > s' > v$.
Sei $s > v$ und $s \in M, \quad x \in X \setminus \alpha(s)$
(★★) Es gilt sogar Gleichheit, da Wähle $s' \in M$ mit $s > s' > v \Rightarrow \overline{\alpha(s')} \subseteq \alpha(r) \Rightarrow x \notin \overline{\alpha(s')}$.

Lemma 12.0.5

Sei X ein T4 Raum, $A, B \subset X$ abgeschlossen, $A \cap B = \emptyset$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \exists M \subseteq [0,1] \text{ dicht mit } \{0,1\} \subseteq M \\ &\exists \alpha : M \to \mathcal{T} \text{ mit } \alpha(0) = \emptyset, \alpha(1) = X, \\ \forall r, s \in M, r < s \implies &\overline{\alpha(r)} \subseteq \alpha(s)(\star), \end{aligned}$$

so dass $\forall r \in M \setminus \{0,1\} : A \subseteq \alpha(r)$und $B \subseteq X \setminus \overline{\alpha(r)} \quad (\star\star)$.

Proof. Lemma: 12.01.5

$$M := \{\frac{k}{2j} \mid j = 0, k = \{0, \ldots 2j\} \subseteq [0,1], \ni 0, 1\}$$

Dicht. Konstruiere rekursiv

$$\begin{array}{lll} & 0 & \quad 1 \\ j = 0 : & & \\ j = 1 : & \quad \frac{1}{2} & \\ j = 2 : & & \\ \vdots & & \end{array}$$

j=0: Setze $\alpha(0) = \emptyset, \alpha(1) = X$

j = 1: Wähle $\mathcal{O}_A, \mathcal{O}_B$ offen, disjunkt;

$$A \subseteq \mathcal{O}_A, B \subseteq \mathcal{O}_B$$

Setze $\alpha(\frac{1}{2}) = \mathcal{O}_A$ Dann gilt.

$$(\star) \quad A \subseteq \alpha(\tfrac{1}{2}), B \cup \overline{\alpha(\tfrac{1}{2})} \subseteq B \cup (X \setminus \mathcal{O}_B) \neq \emptyset \alpha(\tfrac{1}{2}) = \mathcal{O}_A \subseteq X \setminus \mathcal{O}_B$$

$$(\star\star) \quad \overline{\alpha(\tfrac{1}{2})} \subseteq \alpha(1) = 1, \underbrace{\overline{\alpha(0)}}_{\emptyset} \subseteq \alpha(\tfrac{1}{2})$$

j = $\mapsto$ j+1 IV: Wir haben schon ein α deiniert für $\frac{k}{2^i}, i \in j$ und gekürztmit $(\star), (\star\star)$ zu konstruieren ist $\alpha(\frac{2l+1}{2^{j+1}})$ für $l = \{0, \ldots, 2^{j-1}\}$ so das $(\star), (\star\star)$ immer noch gelten.

Fall: $l = 2^{j-1}$: Wähle $\mathcal{O}, \mathcal{O}_B$ Offen, disjunkt, $B \subseteq \mathcal{O}_B$ Offen. Setze $\alpha(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}) = \mathcal{O}$

$$\forall r = \frac{k}{2^i} : \quad \overline{\alpha(r)} \subseteq \overline{\alpha(\frac{2^i - 1}{2^i})} \subseteq \overline{\mathcal{O}}.$$

und ($\star$) gilt auch für $\frac{2\ell+1}{2^j}$ $A \subseteq \alpha(\frac{2^{j-1}}{2^j}) \subseteq O$

$$\begin{aligned} O \cup O_B = \emptyset &\Rightarrow O \subseteq \underset{\text{Abg.}}{X \setminus O_B} \\ &\Rightarrow \overline{O} \subseteq X \setminus O_B \subseteq X \setminus B \\ &\Rightarrow \overline{O} \cup X \setminus B = \emptyset \quad (\star\star) \text{ gilt auch für} \frac{2\ell+1}{2^j} \end{aligned}$$

Fall: $l = 0$ Wähle O_A, O offen, disjunkt mit $A \subseteq O_A$. Setze

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\tfrac{1}{2^{j+1}}\right) := O_A, \\ &\Rightarrow A \subseteq \alpha\left(\tfrac{1}{2^{j+1}}\right) = O_A \subseteq \underbrace{X \setminus O}_{\text{abg.}}, \\ &\overline{\alpha\left(\tfrac{1}{2^{j+1}}\right)} \cap O = \emptyset \Leftarrow \overline{\alpha\left(\tfrac{1}{2^{j+1}}\right)} = \overline{O_A} \subseteq X \setminus O, \\ &\overline{\alpha\left(\tfrac{1}{2^{j+1}}\right)} \cap (X \setminus \alpha\left(\tfrac{1}{2^j}\right)) = \emptyset \Rightarrow \overline{\alpha\left(\tfrac{1}{2^{j+1}}\right)} \subseteq \alpha\left(\tfrac{1}{2^j}\right). \\ &\overline{\alpha(\frac{1}{2^{j+1}})} \cap B \subseteq \overline{\alpha(\frac{1}{2^j})} \cap B = \emptyset \end{aligned}$$

Fall: $l \in \{1, \ldots, 2^{l-2}\}$

$$\frac{1}{2^i} < \frac{2\ell+1}{2^{i+1}} < \frac{\ell+1}{2^i}.$$

Daraus folgt $\overline{\alpha\left(\frac{1}{2^i}\right)} \subseteq \alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right)$.

$\alpha\left(\frac{1}{2^i}\right),\ X \setminus \alpha\left(\frac{\ell+1}{2^i}\right)$ sind abgeschlossen und disjunkt.

Wähle nun offene, disjunkte Mengen O, O' mit

$\alpha\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq O,\ X \setminus \alpha\left(\frac{\ell+1}{2^i}\right) \subseteq O'$.

Setze $\alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right) := O$.

$\Rightarrow \alpha\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq O = \alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right)$.

$\alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right) = O \subseteq X \setminus O' \quad \Longrightarrow \quad \overline{\alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right)} \subseteq X \setminus O'$.

$A \subseteq \alpha\left(\frac{1}{2^i}\right) \subseteq \alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right)$.

$O' = B \cap \overline{\alpha\left(\frac{\ell+1}{2^i}\right)} \supseteq B \cap \alpha\left(\frac{2\ell+1}{2^{i+1}}\right)$.

Proof. Satz: 12.01.3 Seien A, B abgeschlossen $\neq \emptyset$ und disjunkt. Wähle M, α aus dem Lemma $\Rightarrow$ stetig $x \in A \Rightarrow x \in \alpha(r) \forall r > 0 \Rightarrow f(x) = 0$ $x \in B \Rightarrow x \notin \alpha(r) \forall r < 1h \Rightarrow f(x) = 1$

Note:-

Der Satz ist sogra ein "$\Leftrightarrow$" mit $O_A = f^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ $\quad O_B = f^{-1}((\frac{\pi}{2}, 1])$ z.B

Note:-

Es gilt so lange $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ (T2) so dass

$$\exists x, y \in X, x \neq y \nexists f : x \to [0,1]$$

Stetig und $f(x) = 0, f(y) = 1$

$$\int_X (f \circ T) \mid detdT \mid d\lambda = \int_Y f d\lambda \lambda^{T-1} << \lambda \text{ und } \frac{d\lambda^{T-1}}{d\lambda} =\mid detdT \mid$$

Transformationssformel

$$\lambda^{T^{-1}} \leftsquigarrow \lambda$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f\circ T"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Lemma 12.0.6

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ linear, bijektiv } \Rightarrow \lambda_n^{T-1} << \lambda_n \text{ und } \frac{d\lambda}{d\lambda} =\mid detT \mid$$

mit λ_n n-dimensionales Lebesgue Maß