Lecture 1

1.1 Organisatorisches

Alle Infomationen sind Online zu finden aber für die Form von der Mitschrift sollte hier etwas stehen: Die LVa ist eine UE + VO.

1.1.1 Übung

Für das Positive absolvieren der Übung benötigt man ca. 60% der Kreuze und zwei positive Tafeleistungen. Man darf einmal fehlen + nachbringen aber nicht ohne guten Grund. Für weiteres fehlen braucht man einen guten Grund ("meine Oma ist gestorben" ist ab dem zweiten Mal kein guter Grund mehr [1]).

1.1.2 Vorlesung

Die Vorlesung ist ein Tafelvortag. Die Prüfung teilt sich auf in schriftlich und mündlich. Die schriftliche Prüfung ist als Ticket für die Mündliche zu verstehen. Der Stoff der Schriftlichen Prüfung sind die Übungsbeispiele. Der Stoff der Mündlichen Prüfung ist der Inhalt der Vorlesung (Wichtig hierbei: "der Vorlesung" heißt hier nicht irgendeine Vorlesung, sondern jene, die zum Zeitpunkt der Entstehung des Skriptes gehalten wurde).

1.2 Topologische Grundbegriffe

Da wir für viele Themen die in Analysis 3 behandelt werden, Resultate aus der Maßtheorie benötigen, fangen wir mit einigen Grundlagen der Topologie an. Da man für Topologie nix braucht (man muss nur ein bisschen mit Mengen spielen).

Im Folgenden geht es darum, den Konvergenzbegriff zu verallgemeinern. Dazu betrachten wir Räume, welche gerade noch soviel Struktur tragen, dass man von stetigen Funktionen, Grenzwerten, Kompaktheit und so weiter sprechen kann.

Zur Wiederholung betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel 1.2.1 (Offene ϵ-Kugel)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X, wobei $O \subsetneqq X$ ist offen, wenn $\forall x \in O \exists \varepsilon > 0$ so dass die ε-Kugel

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

ganz in O enthalten ist. Die Menge $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die Eigenschaften:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$,
2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \implies O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{O}$,
3. $O_i \in \mathcal{O}, i \in I$ Indexmenge beliebig $\implies \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$.

[1] Im nachhinein muss ich sagen, es ist schon möglich mehr als zwei Omas zu habe. Ich denke es ist ein guter Grund wen man es nachweisen kann.

Wörtlich bedeutet (1), dass sowohl die leere Menge als auch der ganze Raum offen sind. (2), dass der Schnitt zweier offener Mengen wieder offen ist. Und (3) dass die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist.

Diese Eigenschaften bilden den Ausgangspunkt unserer Verallgemeinerung. Und wir erhalten die folgende Definition:

Definition 1.2.2: Topologie

Sei X eine nichtleere Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X, wenn $\mathcal{T}$ folgende Eigenschaften hat.

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T},\ X \in \mathcal{T}$.

(O2) $\forall n \in \mathbb{N}$ und $O_1, \dots O_n \in \mathcal{T} : \bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$.

(O3) Aus $O_i \in \mathcal{T},\ i \in I$, mit einer beliebigen Indexmenge I folgt $\bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$.

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen *offene Mengen*. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ bezeichnet man als *topologischen Raum*.

Note:-

Die Bedinnung (O2) kann auch abgespeckter formuliert werden. Es reicht zu fordern, dass

$$\forall O_1, O_2 \in \mathcal{T} : O_1 \bigcap O_2 \in \mathcal{T}$$

gilt. Dann folt die allgemeine Formulierung durch Vollständige Induktion.

Beispiel 1.2.3 (Topologien)

(i) **Diskrete Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

(ii) **Indiscrete (Klumpen) Topologie:** $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$.

(iii) **cofinite Topologie:** Sei $X \neq \emptyset$ und $\mathcal{T}, \mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ definiert durch

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X : A = \emptyset \text{ oder } X \setminus A \text{ endlich}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{O} := \{A \subseteq X : A = X \text{ oder } A \text{ endlich}\}.$$

Proof. Die Beispiele sind so schon sehr schön, aber noch schöner sind sie, wenn wir nicht nur glauben müssen das es Topologien sind, sondern es auch überprüfen können.

(i) Diskrete Topologie: Überprüfung durch hinsehen.

(ii) Indiscrete Topologie: Überprüfung durch hinsehen.

(iii) cofinite Topologie: überprüfen durch genauer hinschauen

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

1. Fall $Y = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$
2. Fall $V = \emptyset : \bigcup V = \emptyset$ Wähle $O \in V$ dann gilt $X \setminus \bigcap V \subset X \setminus O$ endlich. [a]

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

(O3) Sei $V + \emptyset$, dann gilt $X \setminus \bigcup V = \bigcap_{\text{endlich}}$ ist endlich.

Damit haben Wir (Das "Wir" impliziert das es eine Art Gruppenarbeit ist. Diese Implikation ist grundlegend falsch was jedem Beusucher einer Vorlesung klar sein sollte.) gezeigt das die kofinite Topologie Tatsächlich eine Topologie ist.

😊

[a] $\bigcup V := \{x \mid \forall v \in \mathcal{V} : x \in V\}$

Wir widmen uns nun noch weiteren Beispielen für Topologien.

Beispiel 1.2.4 (Eine durch eine Metrik induzierte Topologie)

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. mit $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ Dann ist $U_r(x) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ eine offene Menge für alle $x \in X$ und $r > 0$. Wir definieren darauf die Topologie

$$\mathcal{T}_d = \{O \subseteq X \mid \forall x \in O \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq O\}.$$

Auch hier wollen wir noch zeigen, dass es sich tatsächlich um eine Topologie handelt.

Proof. Um einzusehen, dass $\mathcal{T}_d$ eine Topologie ist, müssen wir wieder die drei Eigenschaften überprüfen bzw. schon zwei mal hinschauen....oder dreimal:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}_d$. Wobei

$$X \subseteq X, \quad \forall x \in X,\ r > 0 : \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \subseteq X$$

Hierbei ist interessant zu bemerken, dass die leere Menge eine Teilmenge jeder Menge ist, also insbesondere auch eine Teilmenge von der Umgebung $U_r(x)$. Da eine Menge der Form $U_r(x)$ nie leer sein kann, da $x \in X$ und $d(x,x) = 0 < r$, Das heist das $U_r(x)$ immer zumindest das Element x selbst enthält.

(O2) Sei $V \in \mathcal{T}_d, x \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $r > 0$ so dass $U_r(x) \subseteq V$. Dann gilt auch

$$U_r(x) \subseteq V \subset \bigcup V$$

.

(O3) Sei $\mathcal{V} \subset \mathcal{T}_d$ endlich, $x \in \bigcap V$. Dann wähle für jedes $V \in \mathcal{V}$ ein $r_V > 0$ so dass $U_{r_V}(x) \subseteq V$ Dann gilt auch

$$U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V \Rightarrow \bigcap_{V \in \mathcal{V}} U_{r_V}(x) \subseteq \bigcap V$$

Das noch etwas genauer aufgedröselt:

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} \{y \in X \mid d(x,y) < r_V\} = \{y \in X \mid \forall V \in \mathcal{V} : d(x,y) < r_V\}$$

.

☺

Beispiel 1.2.5 (Geometrische Regression)

Betrachte $\mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ und $l \geq 1$ sei $U_{k,l} := \{k + nl \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Weiters definiere $\mathcal{T} := \{k \in \mathbb{Z} \mid \forall x \in = \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq ; U_{k,l} \subset 0\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{Z}$.

(O1) $\emptyset, \mathbb{Z} \in \mathcal{T}$.

(O2) Sei $V \subset \mathcal{T}$, $y \in \bigcup V$. Dann wähle $V \in \mathcal{V}$ und $x \in \mathbb{Z}, l \geq 1$ so dass $U_{x,l} \subseteq V$. Dann gilt auch $U_{x,l} \subseteq V \subset \bigcup V$.

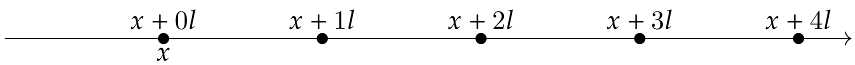
(O3) Sei $V \subset \mathcal{B} endlich x \in \bigcap V$ Ein $V \in \mathcal{V}$ wähle $l_v \in \mathbb{Z}. l_v \geq 1$ so dass $U_{x,l_v} \subseteq V$.

Lecture 2

Jetzt etwas für Bastelenthusiasten. Wenn wir eine Metrik haben, dann können wir eine Topologie basteln. Hirfür definieren wir die Menge:

$$Z : U_{x,l} := x + l\mathbb{Z} = \{x + ln \mid n \in \mathbb{Z}\}, x \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, l \geq 1$$

.



Das ganze ist sehr lustig, also unanschaulich. Also lustig für Mathematiker halt. Es kann natürlich sein das einem der Witz an dem ganzen bis dato noch nicht aufgefallen ist. Aber nach dem man darauf aufmerksam gemacht wurde, ist es sehr lustig.

Betrachten wir also die Topologie:

$$\mathcal{T} := \{O \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall x \in O \exists l \in \mathbb{Z}, l \geq 1 : U_{x,l} \subseteq O\}$$

- Sei $U_{k,l} \in \mathcal{T}, x \in U_{k,l}$.
  Dann gilt: $U_{x,l} = U_{k,l}$: endlich Denn mit $n_x \in \mathbb{Z} : x = k + n_x l$. erhalten wir:

  - Sei $y \in U_{x,l} : y = x + n_y l = U_{k,l} \ni k + (n_x + n_y)l$.
  - Sei $y \in U_{k,l} : y = k + n_y l = U_{x,l} \ni x + (n'_y - n_x)l$.

- Das folgende ist eine Mengenspielerei und zur Erinnerung: Das gefällt uns!
  Wir betrachten also die Menge

  $$\mathbb{Z} \setminus U_{k,l} \in \mathcal{T} : \mathbb{Z} \setminus U_{k,l} = \bigcup_{x=k+1}^{k+l-1} U_{x,l} \in \mathcal{T}$$

  Und weiters

  $$\mathbb{Z} \setminus \{1, -1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p} \ldots \{1, -1\}$$

  Hir ist wichtig zu bemerken, dass die Geometrische Progession unendlich ist und die Menge $\{-1, 1\}$ nicht. Das bedeutet $\{1, -1\} \notin \mathcal{T}$.
  $= \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \underbrace{\mathbb{Z} \setminus U_{0,p}}_{\in \mathcal{T}}$. $\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Prim}\} \Rightarrow \mathbb{P}$ unendlich. Damit haben wir auch gezeigt, dass die Menge der Primzahlen unendlich ist.

Definition 2.0.1: Halbordnung auf der Menge der Topologien

Sei X eine Menge. Betrachte

$$\mathbb{T}(x) := \{\mathcal{T}(X) \subset \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T} \text{ Topologie auf } X\}$$

Die Potenzmenge einer Menge ist in natürlicher Weise halbgeordnet durch die Teilmengenbeziehung $\subseteq$. Damit ist auch $\mathbb{T}(X)$ halbgeordnet durch $\subseteq$. Konkreter definieren wir $\mathbb{T}(X)$ ist eine halbgeordnet mit $\subseteq$

Seien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathbb{T}(x)$ Dann ist $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ eine Hablbordnung mit:

$$\forall O \subseteq X : O \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_2$$

Note:-

Definition 2.0.2: Feinheit

Sei X eine Menge, und $\mathcal{T}, \mathcal{V} \in \mathbb{T}(X)$. *Wir sagen* $\mathcal{T}$ *ist* feiner *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$, *und sagen* $\mathcal{T}$ *ist* gröber *als* $\mathcal{V}$, *wenn* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{V}$.

Weiters schauen wir uns noch zwei Eigenschaften von $\mathbb{T}(X)$ an .

- $\{\emptyset, X\} \in \mathbb{T}$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T} : \{\emptyset, X\} \subset \mathcal{T}$ so wie $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{T}(X)$ und $\forall \mathcal{T} \in \mathbb{T}(X) : \mathcal{T} \subset \mathbb{P}$
- $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ Dann gilt: $\mathbb{V} \neq \emptyset$[1] hat ein Infimum in $\mathbb{T}(X)$.

Die erste Eigenschaft geht aus vorherigen Beobachtungen hervor. Die zweite Eigenschaft bedarf etwas mehr Arbeit.

Proof. Wir wollen zeigen, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ ein Infimum hat.

1. Im ersten Schritt wählen wir einen Kandidaten $\mathbb{V}$ in $\mathbb{T}(X)$ Hierfür betrachten wir $\bigcap \mathbb{V} \in \mathbb{T}(X)$
   - Sei $V \in \mathbb{V}$ dann ist $\emptyset \in V$ und $X \in V \Rightarrow \emptyset \in \bigcap \mathbb{V}$ und damit auch $x \in \bigcap \mathbb{V}$
   - Betrachte weiters $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$ und $V \in \mathbb{V}$. Dann gilt:
   $$\mathcal{V} \subseteq V \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \in V \Rightarrow \bigcup \mathcal{V} \in \bigcap \mathbb{V}.$$
   - $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$ endlich und sei $V \in \mathbb{V}$. Dann gilt:
   $$\mathcal{V} \subseteq V \Rightarrow \bigcap \mathcal{V} \in V \Rightarrow \bigcap \mathcal{V} \in \bigcap \mathbb{V}.$$

   Damit sehen wir, dass unser gewählter Kandidat in der Grundmenge ist - was ihn zu einem guten Kanditaten macht -. (Hier Politik Bashing einfügen - da, da gibt es zu meist keinen guten Kandidaten etc. -)

2. Im nächsten Schritt zeigen wir, dass $\bigcap \mathbb{V}$ eine Untere Schranke ist:
   Sei $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$ dann gilt $\bigcap \mathbb{V} \in \mathbb{T}(X)$
   Mit $\mathcal{V} \in \mathbb{V}$: fehlt zu zeigen, dass $\mathcal{V} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$. Was direkt daraus folgt das $V \in \bigcap \mathbb{V}$: da $V \in \mathcal{V}$

3. Wir zeigen jetzt noch, dass $\bigcap \mathbb{V}$ nicht nur irgend eine untere Schranke ist, sondern die Größte.
   Sei $\mathcal{W} \in \mathbb{T}(X)$ eine untere Schranke von $\mathbb{V}$ - hier irgend eine untere Schranke - und fragen uns: Was bedeutet es, eine untere Schranke zu sein?
   $$\forall V \in \mathbb{V} : \mathcal{W} \subseteq V$$
   Zu zeigen ist noch: $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$. Das heißt $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} : \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Das heißt wiederum $\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V}, \forall O \in \mathcal{W} : O \in \mathcal{V}$. also $\forall O \in \mathcal{W} : O \in \bigcap \mathbb{V}$. Das heißt $\mathcal{W} \subseteq \bigcap \mathbb{V}$.

😄

Note:-

Jede Menge, die ein Infimum hat und ein größtes Element, dann hat jede Teilmenge auch ein Supremum.

An der Bemerkung angelehnt, wollen wir jetzt noch zeigen, dass jede Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ auch ein Supremum hat.

[1] um Sonderfälle zu vermeiden

Note:-

Korollar 2.1 Jede Teilmenge von $\mathbb{T}(X)$ hat ein Supremum.

ergleichen wir das mit der Eigenschaft das $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$ ein Infimum hat. Dan Wäre dsa Äquivallent das die vereinigung der Topologien das Supremum ist. Aber im Algemeinen ist die Vereinigung von Topologien keine Topologie.

Proposition 2.0.3

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{S}^{a} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist

$$\bigstar := \left\{ \bigcup_{i\in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} O_{ij} \,\middle|\, I \text{ Menge},\ n_i \in \mathbb{N},\ O_{ij} \in \mathcal{S} \right\}.$$

eine Topologie

[a] Weil S oder $\mathcal{S}$ macht keinen Unterschied - Die Begründung begründet etwas -

Proof. Proposition: 2.0.4:

(O1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$. Folgt direkt aus $\mathbb{I} = \emptyset \Rightarrow \emptyset$ und $n_i = 0 \Rightarrow X$,

(O2) Sei $V \subseteq \mathcal{T}$ endlich, dann gilt $V = \emptyset : \bigcap V = X$

(O3) Es fehlt zu zeigen, dass $\mathcal{T}$ unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist. Seien also

$$\bigcup_{i\in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \in \mathcal{T}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Dann gilt

$$\bigcap_{k=1}^{m} \left[\bigcup_{i\in I_k} \bigcap_{j=1}^{n_{ik}} O_{ijk} \right] = \bigcup_{(i_1,\dots,i_m)\in I_1\times\cdots\times I_m} \left(\bigcap_{j=1}^{n_{i_1 1}} O_{i_1 j 1} \cap \cdots \cap \bigcap_{j=1}^{n_{i_m k}} O_{i_m j k} \right)$$

und diese Menge ist wieder eine Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus $\mathcal{S}$, gehört also zu $\mathcal{T}$.

☺

Lemma 2.0.4 $\bigstar$ Ist die kleinste Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält.

Sei X eine Menge und sei $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\bigstar$ die kleinste [a] Topologie, die $\mathcal{S}$ enthält

[a] Die gröbste

Proof. Lemma 2.0.5:
jede Topologie, die $\mathcal{S}$ umfasst, muss auch $\mathcal{T}$ umfassen. Also ist $\bigstar \subseteq \mathcal{T}$. ☺

Korollar 2.2

Sei $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{T}(X)$. Dann ist $\sup \mathbb{V}$ die von $\bigcup \mathbb{V}$ erzeugte Topologie.

Proof. Korollar 2.0.6:

$$\forall \mathcal{V} \in \mathbb{V} : \sup \mathbb{V} \geq \mathcal{V} \Rightarrow \sup \mathbb{V} \supseteq \bigcup \mathbb{V} \Rightarrow \sup \mathbb{V} \geq \mathcal{R}.$$

☺

Definition 2.0.5: Stetig

Seien $(X, \mathcal{T}), (Y, \mathcal{V})$ topologische Räume, und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig**, wenn

$$\forall O \in \mathcal{V} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}.$$

Muss man sich spezifischer ausdrücken, so sagt man auch: f ist $\mathcal{T}$–$\mathcal{V}$–stetig.[a]

[a] An diesem Punkt ist es angebracht, Panik zu bekommen, da wir hier den Begriff der Stetigkeit mit einer zweiten Definition belegen

2.0.1 Einschub: Metrik

Welche Begriffe kennen wir? - das wir \{Woracheck}- (Er kennt vermutlich auch noch viele andere Begriffe, von denen wir bis jetzt noch "verschont geblieben" sind.)

- konvergente Folge
- $A \subseteq X$. Der **Innere** von A $(=: \mathring{A})$ ist
$$\operatorname{int}(A) = \{x \in A \mid \exists r > 0 : U_r(x) \subseteq A\}.$$
- $A \subseteq X$ heißt **offen** $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
- $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.
- $A \subseteq X$ heißt **Abschluss** von A $(\overline{A})$ ist
$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0 : U_r(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$
- $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.
- $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ heißt **stetig** $\Leftrightarrow$
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$
- $A \subseteq X$ heißt **kompakt** $\Leftrightarrow$ jede offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von A besitzt eine endliche Teilüberdeckung, d. h.
$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \implies \exists I_0 \subseteq I \text{ endlich mit } A \subseteq \bigcup_{i \in I_0} O_i.$$
- **Satz:** f ist stetig $\Leftrightarrow \forall A \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(A)$ offen.

2.0.2 Definitionen in topologischen Räumen

Definition 2.0.6: Offen und abgeschlossen

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

- $A \subseteq X$ heißt **offen** $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{T}$.
- $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen** $:\Leftrightarrow X \setminus A$ offen.

Lemma 2.0.7 Lemmachen

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologisch und $A \subseteq X$.

1. $\bigcup \{O \subseteq X \mid O \in \mathcal{T}, O \subseteq A\}$ ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

2. $\underbrace{\bigcap\{C \subseteq X \mid X \setminus C \in \mathcal{T},\, A \subseteq C\}}_{\text{Dieser}}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A umfasst.

Proof. Lemma 2.1.3:

(ii)+(iii) $\forall C$ aus **Dieser** Menge halt: Erfüllt $C \supseteq A$, so gilt auch $\bigcap\{C \dots\} \supseteq A$.
Denn: $X \setminus \bigcap\{C\} \subseteq X \setminus A$. Also ist $\bigcap C \supseteq A$.
Sei $D \subseteq X$, sodass $D \supseteq A$. $\Rightarrow D$ kann noch in $\bigcap C$ enthalten sein.

$$X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (X \setminus C) \subseteq X \setminus A \Rightarrow \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \supseteq A.$$

Sei $D \subseteq X$, also $D \supseteq A$.

$$\Rightarrow D \text{ kann nur in } \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C \text{ enthalten sein.}$$

😄

Definition 2.0.8: Innere, Äußere und Rand

- Das *Innere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\mathring{B} = \bigcup\{\, O \in \mathcal{T} : O \subseteq B \,\}.$$

- Das *Äußere* B° einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\bar{B} = \bigcap\{\, C \subseteq X : X \setminus C \in \mathcal{T},\, B \subseteq C \,\}.$$

- Der *Rand* ∂B einer Teilmenge B eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ ist definiert durch

$$\partial B = \bar{B} \setminus \mathring{B}.$$

Definition 2.0.9: kompakt

Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{T})$ heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von K, also $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{T}$ mit

$$\bigcup_{V \in \mathcal{V}} V \supseteq K,$$

eine endliche Teilüberdeckung besitzt, es also $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{V}$ gibt mit

$$V_1 \cup \cdots \cup V_n \supseteq K.$$

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\mathrm{cl}(A) \subseteq X$ kompakt ist.
Sei $\mathcal{C}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X, also $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Wir sagen, dass $\mathcal{C}$ die **endliche Durchschnittseigenschaft** hat, wenn für je endlich viele $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{C}$ stets

$$C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset$$

gilt.

Satz 2.0.10 Zusammenhang Zwischen Metrischen und Topologischen Räumen

Sei $\langle X, d\rangle$ ein metrischer Raum. Dann betrachte den Topologischen Raum $\langle X, \mathcal{T}_d\rangle$ mit. Dann sind alle Begriffe die wir in metrischen Räumen definiert haben auch in topologischen Räumen definiert.

- $\forall A \subseteq X$: A ist offen im Metrischen Sinne $\Leftrightarrow$ A ist offen im topologischen Sinne
- usw

Lecture 3

Ein großes Problem in der Mathematik ist die Benennung von Objekten. Hier wird einem diese Problem deutlich vor Augen geführt. Um eine kleine Orientierung zu bieten lege ich jetzt fest, und hoffe, dass ich mich auch daran halte, welche Schriftarten ich für welche Objekte festlegen möchte.

Note:-

Notation:

- Standart Menge: $A, B, C, \dots X$
- Umgebungen (Spezifischere Mengen): $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \dots \mathscr{X}$
- Topologie (Menge mit Offenen Mengen): $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots \mathcal{X}$
- Filter (Menge mit bestimmten Eigenschaften): $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots \mathfrak{X}$
- Punkte (Elemente der Menge); $a, b, c, \dots x$

Wir haben (leider[1]) noch mehr Objekte, und mehr Schriftarten würden nicht zur besseren Übersichtlichkeit beitragen. - Ich persönlich weiß auch das ich früher oder noch früher durcheinander kommen werde wenn ich neben: mathcal, mathbf mathfrak, mathbb, mathscr noch mehr schriftarten verwende.- [2] [3]

Definition 3.0.1: Dichtheit, Häufungspunkt, Isolierter Punkt

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum und $A \subset X$.

- A ist **dicht** in X, falls $\bar{A} = X$.
- $x \in X$ ist ein **Häufungspunkt** von A, falls: $\forall U \in \mathfrak{U}(x) \exists y \in A : y \in U \setminus \{x\}$.
- $x \in X$ ist ein **isolierter Punkt** von A, falls: $\exists 0 \in \mathcal{T} : x \in O : O \cap A = \{x\}$.

Definition 3.0.2: Umgebung

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum und $x \in X$. Eine Menge $\mathcal{U} \subset X$ heißt **Umgebung** von x, falls

$$\exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset \mathcal{U}$$

.

Definition 3.0.3: Filter

Für eine nichtleere Menge M heißt $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(M)$ ein *Filter* auf M, wenn

[1] Die Mathematik wäre möglicherweise einfacher mit weniger
[2] Es sind so schon zu viele für meinen Geschmack.
[3] $\mathcal{S}\mathbf{S}\mathfrak{S}\mathbb{S}\mathscr{S}$

(F1) $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(F2) $F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$,

(F3) $F_2 \in \mathfrak{F}$, falls $F_1 \in \mathfrak{F}$ und $F_1 \subseteq F_2 \subseteq M$.

Lemma 3.0.4

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Menge aller Umgebungen

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$$

von x ein Filter auf X.

Proof. Lemma: 3.0.4
Wir überprüfen die Filtereigenschaften.:

(F1) $x \in \mathcal{U}(x)$ und $X \in \mathcal{T}, x \in X \subseteq X$ Damit haben wir

$$\emptyset \notin \mathcal{U}(x) \text{ und } \forall U \in \mathcal{U}(x) : x \in U$$

(F2) $U_1, U_2 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)\ \forall O_1, O_2 \in \boldsymbol{\mathcal{O}}$ mit $x \in O_1 \subseteq U_1,\ x \in O_2 \subseteq U_2$

$$\Rightarrow x \in O_1 \cap O_2 \subseteq U_1 \cap U_2 \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$$

(F3) $U \in \mathcal{U}(x), V \supseteq$ Wähle

$$O \in \mathcal{T} \text{ und } x \in O \subseteq \mathcal{U} \subseteq V$$

😊

Hir ist meine Notationelle Einführung schon an seine Grenze gekommen. Wie nehmen die Menge (also U) aller Umgebungen von x und nennen sie $\mathcal{U}(x)$. aber wir zeigen, dass es ein Filter ist. Damit wäre ja $\mathfrak{U}(x)$ die Richtige Notation. - Ich will konsistent bleiben aber habe es schon aufgegeben. -

Proposition 3.0.5

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Top-Raum und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Top-Raum Dann gilt:

1. $\forall O \in X \Leftrightarrow (\forall x \in O : O \in \mathcal{U}(x))$
2. Sei $f : X \to Y$, dann gilt: f stetig $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in X \forall V \in \mathcal{V}(f(x)) \in \mathcal{U}^X(f(x)) \exists u \in \mathcal{U}^Y(f(x)) : f(u) \subseteq \mathcal{U}^Y(f(U)) \subseteq V$$

3. Sei $A \in X$, dann ist $\overline{A} = \{x \in X \mid \forall u \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset\}$

Proof. Prop: 3.0.5

1. "$\Rightarrow$" Sei $x \in O \in \mathcal{T}$, dann gilt:

$$x \in O \subseteq 0$$

"$\Leftarrow$" $\forall x \in O$ wähle $\mathcal{Q}_x \subseteq O$ Dann haben wir:

$$\{x\} \subseteq O_x \subseteq O \Rightarrow \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in O} \mathcal{Q}_x}_{\text{Offen}} \subseteq \bigcup_{x \in O} O = O$$

2. "$\Rightarrow$" Sei $x \in X$, $V \in \mathscr{U}^Y(f(x))$. Wähle $Q \in \mathfrak{B}$
mit $f(x) \in Q \subseteq V$
$\Rightarrow f^{-1}(Q) \in \mathcal{T}$ Das Folgt aus unseer Charakterisierung von stetigen Funktionen.
Betrachte $x \in f^{-1}(Q) \in \mathscr{U}^X(x)$ damit haben wir:

$$f(f^{-1}(Q)) \subseteq Q \subseteq \mathfrak{B}$$

"$\Leftarrow$" Sei $O \in \mathfrak{B}$ Wir wollen zeigen dass, das Vollständige Urbild wieder offen ist. Sei $x \in f^{-1}(O)$, d.h. $(f(x) \in O \Rightarrow O \in \mathscr{U}^Y(f(x)))$
Wähle $U \in \mathscr{U}^X(x)$ mit $f(U) \subseteq O$

$$\Rightarrow U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(O)$$

und

$$U \in \mathscr{U}^X(x) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathscr{U}^X(x) \Rightarrow f^{-1}(O) \in \mathcal{T}$$

3. "$\subseteq$" Sei $x \notin \overline{A}$, d.h. $x \in X \setminus \overline{A}$ (Wobei $X \setminus \overline{A}$) ist offen $:\leftrightarrow$ Offen $\Leftrightarrow X \setminus \overline{A} \in \mathscr{U}(x)$

$$\overline{A} \supseteq A \Rightarrow X \setminus \overline{A} \Rightarrow A \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$$

"$\supseteq$" Sei $x \in X$ und $\exists U \in \mathscr{U}(x) : U \cap A = \emptyset$ wähle $O \in \mathcal{T}$ mit $x \in O \subseteq U$

$$\Rightarrow O \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq X \setminus O$$
$$\Rightarrow \overline{A} \subseteq X \setminus O \Rightarrow x \in \overline{A}$$

😄

Lemma 3.0.6

- $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer-Raum, dann ist id_X stetig.
- $\langle X, \mathcal{T} \rangle$, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ und $\langle Z, \mathcal{W} \rangle$ Topologische-Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

Proof. Lemma: 3.0.6

- $X \overset{id:X}{\to} X$ Sei $O \in \mathcal{T}$, dann gilt:
$$id_X^{-1}(O) = O \in \mathcal{T}$$
- $X \overset{f}{\to} Y \overset{g}{\to} Z$ Sei $O \in \mathcal{W}$, dann gilt:
$$g^{-1}(O) \in \mathcal{V} \text{ und } f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$$
$$\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(O) = f^{-1}(g^{-1}(O)) \in \mathcal{T}$$
$$\Rightarrow g \circ f \text{ ist stetig.}$$

😄

Note:-

Zur Wiederholung: Aus Analysis 1 wissen wir, dass jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert hat.

Proof. Eindeutigkeit des Grenzwerts
Seien $x_n \to x$ und $x_n \to y$ mit $x \neq y (\Leftrightarrow d(x,y) > 0)$.
Wähle $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, sodass $d(x_n, x) < \frac{d(x,y)}{3} \forall n \geqslant N_1$, und $d(x_n, y) < \frac{d(x,y)}{3}\ \forall n \geqslant N_2$.

Dann folgt für $N := \max\{N_1, N_2\}$ der Widerspruch:

$$d(x,y) \leqslant d(x,x_N) + d(x_N,y) < \frac{d(x,y)}{3} + \frac{d(x,y)}{3} = \frac{2\,d(x,y)}{3} < d(x,y).$$

😄

Im Folgenden betrachten wir Hausdorff-Räume. Das sind Räume in denen sich Punkte trennen lassen (Die T2-Eigenschaft bzw. Hausdorff-Eigenschaft). Diese Eigenschaft ist im Grunde vergleichbar mit der Eindeutigkeit von Grenzwerten in metrischen Räumen.

Definition 3.0.7: Hausdorff-Raum

Ein topologischer Raum $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ heißt *Hausdorff-Raum* oder $(T2)$-*Raum*, wenn folgendes Trennungsaxiom erfüllt ist:

(T2) Zu je zwei Punkten $x, y \in X$, $x \neq y$, gibt es disjunkte, offene Mengen O_x und O_y mit $x \in O_x$ und $y \in O_y$.

Bevor wir weiter mit der Hausdorff-Eigenschaft arbeiten, betrachten wir bzw definieren wir noch gerichtete Mengen.
Die nebenbei viel mehr Sinn machen um das Riemann-Integral zu definieren.

Definition 3.0.8: Gerichtete Menge

Sei I eine nicht leere Menge und $\leqslant$ eine Relation auf I. Dann heißt $(I, \leqslant)$ eine *gerichtete Menge*, wenn $\leqslant$ folgenden drei Bedingungen genügt:

- **Reflexivität:**
$$\forall i \in I:\ i \leqslant i.$$
- **Transitivität:**
$$\forall i,j,k \in I:\ (i \leqslant j \land j \leqslant k) \Rightarrow i \leqslant k.$$
- **Richtungseigenschaft:**
$$\forall i,j \in I\ \exists k \in I:\ i \leqslant k \land j \leqslant k.$$

Nach dem Wir jetzt wissen was eine gerichtete Menge ist, können wir uns auch gleich die Riemannsumme anschauen.

Beispiel 3.0.9 (Riemansumme)

Wir nennen das Paar
$$\mathcal{R} = \left((\xi_j)_{j=0}^{n(\mathcal{R})}, (\eta_j)_{j=1}^{n(\mathcal{R})}\right)$$
eine *Riemann-Zerlegung* eines Intervalls $[a,b]$, falls
$$a = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{n(\mathcal{R})} = b, \qquad \eta_j \in [\xi_{j-1}, \xi_j], \quad j = 1, \ldots, n(\mathcal{R}),$$
und nennen
$$|\mathcal{R}| := \max\{\, \xi_j - \xi_{j-1}\ ;\ j = 1, \ldots, n(\mathcal{R})\,\}$$
die *Feinheit der Zerlegung*.
Weiter sei
$$\mathcal{R}_1 \preceq \mathcal{R}_2\ :\Longleftrightarrow\ |\mathcal{R}_2| \leqslant |\mathcal{R}_1|$$

Ist $\mathfrak{R}$ die Menge aller solcher Zerlegungen, dann ist $(\mathfrak{R}, \preceq)$ eine gerichtete Menge. In diesem Beispiel ist $\preceq$ sicher nicht antisymmetrisch.

Dieser gerichteten Menge und Jener aus dem letzten Beispiel werden wir bei der Einführung des Integrals wieder begegnen.

Proposition 3.0.10

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist ein Hausdorff-Raum.

(ii) Jede Folge in X hat höchstens einen Grenzwert

Proof. Prop: 3.0.9

(i) $\Rightarrow$ (ii) Wären x, y zwei verschiedene Grenzwerte, so könnten wir disjunkte Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ wählen und infolge $i_1 \in I$ und $i_2 \in I$ derart wählen, dass

$$x_i \in U \quad \text{für alle } i \geqslant i_1 \qquad \text{und} \qquad x_i \in V \quad \text{für alle } i \geqslant i_2.$$

Da I gerichtet ist, gibt es ein $i \in I$ mit $i \geqslant i_1$ und $i \geqslant i_2$, und daher $x_i \in U \cap V$, was aber im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$ steht.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Beweis durch Kontraposition.([$\neg$(ii) $\Rightarrow$ $\neg$(i)])

- Wir definieren eine gerichtete Menge:
  Wähle $x, y \in \mathrm{X}$ und $x \neq y$.
  Da $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist, existieren offene Mengen $O_x, O_y \in \mathcal{T}$ mit

$$x \in O_x, \quad y \in O_y \quad \text{und} \quad O_x \cap O_y = \varnothing.$$

  Sei nun

$$I := \{ (O_1, O_2) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T} \mid x \in O_1 \ \wedge \ y \in O_2 \}$$

  und definiere die Ordnung

$$(O_1, O_2) \preceq (O_1', O_2') \ :\Longleftrightarrow \ O_1' \subseteq O_1 \ \wedge \ O_2' \subseteq O_2.$$

- Damit ist $(I, \preceq)$ gerichtet.

  * Reflexivität:

$$(O_x, O_y) \in I \text{ und } (O_x, O_y) \preceq (O_x, O_y)$$

  .

  * Transitivität: Für $(O_1, O_2) \preceq (O_1', O_2')$ und $(O_1', O_2') \preceq (O_1'', O_2'')$ gilt offensichtlich auch

$$(O_1, O_2) \preceq (O_1'', O_2'')$$

  .

  * Richtungseigenschaft: Für $(O_1, O_2), (O_1', O_2') \in I$ ist

$$(O_1 \cap O_2, \ O_1' \cap O_2') \in I$$

  ist gröber

- Die Menge $\{O_1 \cap O_2 \mid (O_1, O_2) \in I\}$ ist nicht leer, da $(x, y) \in I$.
  Wähle nun eine $\alpha : I \to \bigcup_{(O_1,O_2)\in I}$ eine Abbildung
  mit
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : \alpha(O_1, O_2) \in O_1 \cap O_2$$
  [4]
- Es fehlt noch zu zeigen, dass α ein konvergierendes Netz ist.
  $$\lim_{(O_1,O_2)} \alpha(O_1, O_2) = x.$$
  Sei $U \in \mathcal{U}(x)$, wähle $O \in \mathcal{T} \,:\, x \in O \subseteq U$
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : \exists\ O \Rightarrow (O_1, O_2) \geq (O, O_x) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \subseteq O_1 \subseteq O$$[5]
  mit $i_0 := (O, x)$
  Auf der anderen Seite haben wir:
  $\forall (O_1, O_2) \in I : O_2 \subseteq O \quad$ (Das selbe spiel umgekehrt)
  Sei $U \in \mathcal{U}(y)$, wähle $O \in \mathcal{T} : y \in O \subseteq U$
  $$\forall (O_1, O_2) \in I : O_2 \subseteq O \Rightarrow \alpha((O_1, O_2)) \in O_1 \cap O_2 \subseteq O_2 \subseteq O \subseteq U$$

☺

Die Richtung (ii) $\Rightarrow$ (i) hat keinen wirklichen Mehrwert - Ausser dass wir über zwei offene Mengen indexiert haben (WOW)-. Wir haben diese Richtung also vorallem dem Beweis zu liebe gemacht.

[4]Das ist die Stelle an der das Auswahlaxiom verwendet wird. Also lobpreiset das Auswahlaxiom. (Das Auswahlaxiom ist in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre nicht beweisbar, aber auch nicht widerlegbar.)

[5]Das geht wegen dem Auswahl axiom

Lecture 4

Um die Folgenden Sachverhalte leichter einsehen zu können macht es Sinn, sich zuerst schon bekannte Objekte/Dinge/Sachverhalte vor Augen zu führen.

Figure 4.1: https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/

In diesem Fall macht es vor allem Sinn, Folgen zu betrachten. Sei also α eine Abbildung von $\mathbb{N} \to X$ also die Folge $\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots \alpha(n), \ldots$ Weiters betrachte die Abbildung $\beta : \mathbb{N} \to X$ wobei wir β als Teilfolge von α bezeichnen. Wenn es eine streng monoton wachsende Abbildung $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, so dass $\beta(n) = \alpha(k(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\alpha"] & X \\ \mathbb{N} \arrow[u, "\kappa"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

$$\text{mit} \quad \beta = \alpha \circ \kappa$$

Definition 4.0.1: Teilnetz

Sind $(I, \preceq_I)$ und $(J, \preceq_J)$ zwei gerichtete Mengen, ist X eine Menge und $\alpha : I \to X$ ein Netz in X, Und $\kappa : J \to I$ eine Funktion, so dass

$$\bigstar \forall i_0 \in I\ \exists j_0 \in J :\ \forall j \succeq_J j_0 \Rightarrow \kappa(j) \succeq_I i.$$

Dann ist $\alpha \circ \kappa : J \to X$ ein **Teilnetz** von α. Ist $(J, \preceq_J) = (\mathbb{N}, \leqslant)$, dann wäre $\alpha \circ \kappa : J \to X$ Eine **Teilfolge**.

Note:-

Seien $\langle I, \preceq_I \rangle$ und $\langle J, \preceq_J \rangle$ gerichtete Mengen und $\kappa : J \to I$ eine monotone Abbildung. wenn

- κ monoton
- $\forall i \in I \exists j_0 \in J : \kappa(j_0) \succeq_I i$

dann ist $\alpha \circ \kappa(j)$ ein Teilnetz von α.

Proof. Beweis der Implikation:
Sei $i_0 \in I$ beliebig. Dann gibt es ein $j_0 \in J$ mit $\kappa(j_0) \geq_I i_0$. Für alle $j \geq_J j_0$ gilt $\kappa(j) \geq_I \kappa(j_0) \geq_I i_0$. ☺

Das soll *nicht* zur Verwirrung führen. Aber:
Der Implikationspfeil ist in diesem Fall nicht nur eine stilistische Entscheidung, sondern wir erfahren später, dass es sich eigentlich um eine Äquivalenz handelt. Es handelt sich also wirklich nur um eine Implikation (dh. die andere Richtung gilt nicht) In der mathematischen Literatur werden anstelle unserer Definition der Teilnetze die in der Bemerkung aufgeführten Eigenschaften als Definition verwendet.

Satz 4.0.2

ei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum, $(I, \preceq_I)$ gerichtete Menge, $\varphi : I \to X$, Netz in X, $x \in X$.
Dann sind äquivalent:

(i) φ konvergiert gegen x.

(ii) Jedes Teilnetz von φ konvergiert gegen x.

(iii) Jedes Teilnetz von φ hat ein Teilnetz, das gegen x konvergiert.

Proof. Satz: 4.0.2:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\langle J, \preceq_J \rangle$ und$\kappa : J \to I$ ein Teilnetz von φ also erfüllt $\bigstar$.
Sei $U \in textU(x)$ Wähle $i_0 \in I$ so dass $\forall i \geq_I i_0 : \varphi(i) \in U$ Nach $\bigstar$ gibt es ein $j_0 \in J$ so dass $\forall j \geq_J j_0 :$ $\kappa(j) \geq_I i_0$. Also gilt für alle $j \geq_J j_0$:

$$\varphi(\kappa(j)) \in U$$

Also konvergiert das Teilnetz gegen x.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Jedes Netz ist ein Teilnetz von sich selbst. $I \xrightarrow{\text{id}} I \xrightarrow{\text{id}} X$ Sei $\varphi \circ \kappa$ Teilnetz von $\varphi \Rightarrow \varphi \circ \kappa$ konvergiert gegen $x \Rightarrow \varphi \circ \mathrm{id}$ konvergiert gegen x.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Für diese richtung verwenden wir Kontraposition. - Weil wir das schon länger nicht gemaht haben -
$\neg(i) \Rightarrow \neg(iii)$:
Wähle $U \in \mathscr{U}(x)$ $\forall i_0 \in I \exists i \geq i_0$ sodass $\varphi(i) \notin U$

$$(**) \quad J := \{i \in I \mid \varphi(i) \notin U\} \subseteq I$$

Diesmal ist es leichter, die Bemerkung zu verwenden
Definiere $j_1, j_2 \in J : j_1 \preceq_J j_2 :\Leftrightarrow j_1 \preceq_I j_2$.
- Die Einschränkung der Ordnung auf I als Ordnung auf J -
Damit ist $(J, \preceq_J)$ reflexiv und transitiv. Seien $j_1, j_2 \in J$. Wähle $i \in I : j_1 \geq_I i, j_2 \geq i. \Rightarrow j_1 \geq i, j_1 \geq_J i, j_2 \geq_J i.$

$\Rightarrow (J, \geq_J)$ ist gerichtete Menge.

Definiere:

$$\kappa : \begin{cases} j \mapsto j \\ i \mapsto i \end{cases}$$

Sei $i \in I$. Wegen (**) wähle $j_0 \in I$ sodass $\varphi(j_0) \notin U$. $j_0 \in J$.

Sei $(K, \preceq_K)$ eine gerichtete Menge, mit $\lambda : K \to J$ mit ($\bigstar$). Also $(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda : K \to X$.

Angenommen

$$\lim_{k \in K} [(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda](k) = x.$$

Wähle $k_0 \in K : \forall k \geq k_0 : [(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda](k) \in U$.
Was ein Widerspruch ist, da $\varphi(\kappa(\lambda(k_0))) \notin U$ Per definition von $(\varphi \circ \kappa) \circ \lambda$.

😃

Wir sehen also: im Vergleich zu Folgen haben wir keine Indexschlacht mehr. Dafür haben wir jetzt sehr viele Abbildungen ∘ abbildungen.

Satz 4.0.3

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein topologischer Raum.

(i) $A \subseteq X$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $\varphi : I \to A \subseteq X$ in A, das gegen $x \in X$ konvergiert, gilt $x \in A$.

(ii) Sei $\langle Y, \mathcal{S} \rangle$ ein weiterer topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig $\Leftrightarrow$ für jedes Netz $\alpha : I \to X$ in X, das gegen ein $x \in X$ konvergiert, gilt,

$$\lim_{i \in I} \alpha(i) \leftarrow \lim_{i \in I} (f \circ \alpha)(i) = f(x)$$

.

Der zweite Punkt ist so zu verstehen, dass wenn x ein Grenzwert von α ist, dann ist $f(x)$ der Grenzwert von $f \circ \alpha$. Der Grenzwert muss hier nicht eindeutig sein.

Proof. Satz: 4.03:

"(i)⇒" Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, angenommen $\alpha : I \to A$ ist ein Netz in X, mit $x \in$ X. So dass $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$. und $x \notin A$. Sei $U := X \setminus A \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$. aber $\forall i \in I : \alpha(i) \in A \Rightarrow \alpha(i) \notin U$.

"(i)⇐" Sei $A \subseteq X$ nicht abgeschlossen. Dann ist $X \setminus A$ nicht offen. Also gibt es ein $x \in X \setminus A$ so dass $\forall U \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x)$: $U \nsubseteq X \setminus A$. $\Rightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : \neg(U \subset X \setminus A)$ (dh.: $U \cap A \neq \emptyset$). Wähle $\alpha : \mathcal{U}(x) \to X$ mit $\alpha(U) \in U_1$. Das können wir dank des Auswahlaxioms. So machen Für $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_1 \preceq U_2 :\Leftrightarrow U_1 \supseteq U_2$. Sei $\langle \mathcal{U}(x), \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Also Transitivität und Reflexivität sind klar. Seien $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x)$. Wähle $U_3 \in \mathcal{U}(x)$ mit $U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$. Dann ist $U_3 \preceq U_1$ und $U_3 \preceq U_2$. Also ist $\langle \mathcal{U}(x), \preceq \rangle$ eine gerichtete Menge. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$.
α ist konvergent gegen x. Sei $U \in \mathcal{U}(x)$. Setze $U_0 := U$. Sei $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $V \preceq U_0$. Das heißt $V \subseteq U_0$. Also gilt $\alpha(V) \in V \subseteq U_0$. Damit haben wir ein netz in A gefunden das gegen x konvergiert.

(ii)"⇐" Sei $\alpha : I \to A$ ein Netz in X mit $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$. $A \subseteq \bar{\{A\}}$

"(ii)⇒" Sei $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall U \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

"(i)⇒(ii)" Sei $A \subseteq Y$ Abgeschlossen Und $alpha : I \to f^{-1}(A)$, mit $\lim_{i \in I} \alpha(i) = x$, $x \in$ X. $\Rightarrow \lim_{i \in I} (f \circ f_\alpha)(i) = f(x)$ Da $(f \circ f_\alpha)(i) \in A$ für alle $i \in I$, folgt $f(x) \in \overline{A} \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$

😃

Lecture 5

Satz 5.0.1 Charakterisierung der Stetigkeit

Seien $\langle X, \sqcup \rangle$ und $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Topologische Räume und $f : X \to Y$

$$\begin{aligned} f \text{ ist stetig } &:\Leftrightarrow \forall O \in \mathcal{V} : f^{-1}(O) \in \mathcal{T} \\ &\leftrightarrow \forall A \subseteq Y \text{ abgeschlossen } : f^{-1}(A) \text{ ist Abgeschlossen} \\ &\leftrightarrow \forall x \in X \forall \boldsymbol{\mathcal{U}} \in \mathscr{U}^{Y}(f(x)) : \exists v \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^{X}(x) : f(V) \in \mathscr{U} \\ &\leftrightarrow \text{ Für jedes Netz } \phi \in X, x \in X : x \text{ ist Grenzwert von } \phi \Rightarrow f(x) \text{ ist Grenzwert von } f \circ \phi \end{aligned}$$

In der letzten Vorlesung haben wir die Hinrichtung von der driten equivalenz schon im zuge vom beweis von **4.0.5** schon gesehen es fehlt also noch die Hinrichtung in die andere Richtung
- Gängiger wäre Rückrichtung -
zu zeigen[1].

Proof. Satz 5.0.1:
Seien $\langle I, \preccurlyeq \rangle$ eine gerichtete Menge und $\varphi : I \to X$ ein Netz in X mit Grenzwert $x \in X$.
Sei $U \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^{Y}(f(x))$ Da f Stetig können wir per Definition ein V wählen so dass

$$\begin{aligned} & V \in \boldsymbol{\mathcal{U}}^{X}(x) : f(V) \subseteq \boldsymbol{\mathcal{U}} \\ \text{Weiters wähle} \quad & i_0 \in I : \forall i \succcurlyeq i_0 : \varphi(i) \in V \\ & \Rightarrow \forall i \succcurlyeq i_0 : (f \circ \varphi)(i) \in f(V) \subseteq U \end{aligned}$$

😄

5.1 Initiale Topologie*

Seien $(Y_i, \mathcal{V}_i)$ topologische Räume, X eine Menge und $f_i : X \to Y_i$ Abbildungen. Wir nennen die größte Topologie, die alle f_i stetig macht, die **initiale Topologie** bezüglich der f_i.

$$\begin{tikzcd} & (X_i, \mathcal{V}_i) \\ & \vdots \\ Y \arrow[ruu, "f_i"] \arrow[r, "f_j"] \arrow[rdd, "f_k"] & (X_j, \mathcal{V}_j) \\ & \vdots \\ & (X_k, \mathcal{V}_k) \end{tikzcd}$$

Das bedeutet (vgl.: Kaltenbäck: Aufabau Analysis)

[1] Aber Hinrichtung hört sich lustiger an und passt auch besser zum Mathematik studium

- Unter allen Topologien $\mathcal{V}'$ auf X so, dass $f_i : (X, \mathcal{V}') \to (X_i, \mathcal{V}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist, ist

$$\mathcal{V} := \mathcal{V}\left(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)\right),$$

  also die Topologie mit $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{V}_i)$ als Subbasis, die größte. Man bezeichnet $\mathcal{V}$ als **initiale Topologie** bezüglich der Abbildungen f_i, $i \in I$.

- Für diese initiale Topologie $\mathcal{V}$ und einen weiteren topologischen Raum $(Y, \mathcal{O})$ ist eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{V})$ genau dann stetig, wenn $f_i \circ f : (Y, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{V}_i)$ für alle $i \in I$ stetig ist.

5.2 Produkttopologie

Betrachte eine Menge X die nicht leer ist und eine Menge Y_x mit $x \in X$. Damit definieren wir:

$$\prod_{x \in X} Y_x := \left\{ f : X \to \bigcup_{x \in X} Y_x \mid \forall x \in X : f(x) \in Y_x \right\}.$$

Weiters führen wir die Notation:

$$Y_1 \times Y_2 := \{(y_1, y_2) : y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}$$

Note:-

Analog zu der Eingeführten Notation schreiben wir:
Für ein Element $f \in \prod_{x \in X} Y_x$ schreiben wir auch als Tupel $(y_x)_{x \in X}$ was $(f(x))_{x \in X}$ entspricht.

Definition 5.2.1: Produkttopologie

Sei X eine nicht leere Menge, $(Y_x, x \in X)$ eine Familie von Mänen die nicht leer sind, und für jedes $x \in X$ sei $(Y_x, \mathcal{T}_x)$ ein topologischer Raum. Wir betrachten:

$$S := \{\pi_x^{-1}(O_x) \mid x \in X, O_x \in \mathcal{T}_x\}$$

Die von S erzeugte Topologie ist die **Produkttopologie** und wir schreiben auch :$\prod_{x \in X} T_x$

Note:-

Definition 5.2.2: Produkttopologie (Kaltenbäck)

Sei X eine nicht leere Menge und für jedes $x \in X$ sei $(Y_x, \mathcal{V}_x)$ ein topologischer Raum. Die **Produkttopologie** auf $\prod_{x \in X} Y_x$ ist die initiale Topologie bezüglich der Projektionen

$$\pi_x : \prod_{x \in X} Y_x \to Y_x, \quad (y_x)_{x \in X} \mapsto y_x,$$

für alle $x \in X$.

Proposition 5.2.3

Sei (I, $\preccurlyeq$) eine gerichtete Menge und $\varphi : I \to \prod_{x \in X} Y_x$ ein Netz. Weiter sein $g \in \prod_{x \in X} Y_x$. Dann gilt:

$$\lim_{i \in I} \varphi(i) = g \Leftrightarrow \forall x_0 \in X : \lim_{i \in I} (\pi_{x_0} \circ \varphi)(i) = \pi_{x_0}(g)$$

Was Punkteweise Konvergenz bedeutet.

Proof. Proposition: 5.2.3:

"⇒": Die Richtung ist klar, da die Projektionen (π_{x_0}) stetig sind. und stetigkeit erhält Konvergenz.Dh. es folgt aus der Definition von S.

"⇐": Sei $U \in \mathcal{U}^{\prod_{x\in X} Y_x}(g)$. Dann gilt:

$$\exists O \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x : g \in O \subseteq U$$

$$\Rightarrow \exists x_1, \ldots, x_n \in X, O_{x_1} \in \mathcal{T}_{x_1}, \ldots, O_{x_n} \in \mathcal{T}_{x_n} : g \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k}) \subseteq O \subseteq U$$

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} : g \in \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k}) \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x$$

$$\Rightarrow \forall k \in \{1, \ldots, n\} : \pi_{x_k}(g) \in O_{x_k} (\text{Umgebung von} g(x_k))$$

$$\overset{\text{VS}}{\Rightarrow} \text{ Wähle } i_k \in I : \forall i \geq i_k : \underbrace{(\pi_{x_k} \circ \varphi)(i) \in O_{x_k}}_{\Leftrightarrow \phi(i) \in \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k})}$$

$$\text{Wähle } i_k \in I : \forall i \geq i_k : \forall k \in \{1, \ldots, n\} : \varphi(i) \in \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k})$$

$$\Leftrightarrow \varphi(i) \in \bigcap_{k=1}^{n} \pi_{x_k}^{-1}(O_{x_k}) \subseteq U$$

😄

Proposition 5.2.4

Sei X überbzählbar, $\mid Y_k \mid \geqslant 2$ für alle $x \in X$. Dann gibt es keine Metrik d auf $\prod_{x\in X} Y_x$ so dass d die Produkttopologie induziert.

Lemma 5.2.5

$\langle Z, d \rangle$ ein Metrischer Raum. $z \in Z \Rightarrow \exists U_n, n \in \mathbb{N}$[a] Umgebungen von z mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{z\}$

[a] Abzählbar viele

Proof. Lemma: 5.2.5:
Sei $n \in \mathbb{N}$. Definiere $U_n := B_{1/2}(z)$. Sei:

$$w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1/2}(z) \Rightarrow d(w, z) < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dann gilt $d(w, z) = 0 \Rightarrow w = z$. 😄

Proof: Proposition: 5.2.4:
Sei $f \in \prod_{x\in X} Y_x, \quad U_n \in \mathcal{U}^{\prod_{x\in X} Y_x}(f(x_n)) \forall n \in \mathbb{N}$.

Wähle $O_n \in \prod_{x\in X} \mathcal{T}_x : f \in O_n \subseteq U_n$.

Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Mengen aus (char. erzeugte Top.).
Wähle

$$\begin{cases} x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n} \in X \\ O_{x_{n,1}}, \ldots, O_{x_{n,m_n}} \in \mathcal{T}_{x_{n,m_n}} \end{cases}$$

So dass: $f \in \bigcap_{k=1}^{m_n} \pi_{x_{n,k}}^{-1}(O_{x_{n,k}}) \subseteq O_n \subseteq U_n$.
$\Rightarrow f \in \bigcap_{n=1} \bigcap_{k=1}^{m_n} \pi_{x_{n,k}}^{-1}(O_{x_{n,k}})$.

Da X überbzählbar ist, gibt es ein $x_0 \in \{x_{n,j} \mid n \in \mathbb{N}, j \in \{1, \ldots, m_n\}\} \nsubseteq X$
Das geht da X überbzählbar ist, $Y_{x_0} \setminus \{f(x_0)\} \neq \emptyset$ (da $|Y_{x_0}| \geq 2 \ \forall x \in X$)
$\rightsquigarrow$ wähle $y \in Y_{x_0} \setminus \{f(x_0)\}$
Definiere:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ y, & x = x_0. \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{f} \neq f$ und
$\Rightarrow \tilde{f} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j=1}^{m_n} \pi_{x_{n,j}}^{-1}(O_{x_{n,j}}) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

😄

Note:-

Wiederholung: $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer Raum.
$K \subseteq X$ heißt Kompakt $\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{T} : \cup C \supseteq K \Rightarrow (\exists C^{'} \subseteq C$ endlichen $: \cup C^{'} \supseteq K)$.

Proposition 5.2.6

$\langle X, \mathcal{T} \rangle$ topologischer Raum. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $K \subseteq X$ ist endlichen $\Rightarrow$ ist kompakt.

(ii) $K_1, \ldots, K_n \subseteq X$ sind kompakt $\Rightarrow K_1 \cup \ldots \cup K_n$ ist kompakt.

(iii) $K \subseteq X$ ist kompakt $A \subseteq X$ abgeschlossen $\Rightarrow K \cap A$ ist kompakt.

(iv) Sei $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ $K \subseteq X$ kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $f(K)$ kompakt.

Proof. Proposition: 5.3.2:

(i) $K = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\cup C \supseteq K$.
Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ wähle $O_j \in C$ mit $x_j \in O_j$.
Dann ist $K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_j$.

(ii) Sei $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\cup C \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_n$.
$\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \cup C \supseteq K_j$.
$\Rightarrow \forall j \in \{1, \ldots, n\} : \exists C_j \subseteq C$ endlich mit $\cup C_j \supseteq K_j$.
$\Rightarrow \bigcup \underbrace{C^{'} := \{O \mid \exists j \in \{1, \ldots, n\} : O \in C_j\}}_{\text{endlich}} \supseteq K_1 \cup \ldots \cup K_n$.

(iii) Sei $C \subseteq \mathcal{T}$ mit $\cup C \supseteq K \cap A$.
$C \cup \{X \setminus A\} \subseteq \mathcal{T} \rightsquigarrow \bigcup C \cup (X \setminus A) \supseteq K \cap A$.
Wähle $O_1, \ldots, O_m \in C$ so dass
$O_1 \cup \ldots \cup O_n \cup (X \setminus A) \supseteq K$.
Dann gilt $(O_1 \cup \ldots \cup O_n \cap (X \setminus A)) \cap A \supseteq K \cap A$.

(iv) Sei $C \subseteq \mathcal{V}$ mit $\cup C = \bigcup_{O \in C} O \supseteq f(K)$.
$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(\bigcup_{O \in C} O)}_{\bigcup_{O \in C} \underbrace{f^{-1}(O)}_{\text{offen}}} \supseteq K$.
Definiere $D := \{f^{-1}(O) \mid O \in C\} \subseteq \mathcal{T}$ und $\cup D \supseteq K$.
Wähle $O_1, \ldots, O_n \in C$ so dass $\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(O_j) \supseteq K$.
$\Rightarrow f(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(O_j)) \supseteq f(K)$.

wobei $f(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(O_j)) = \bigcup_{j=1}^{n} f(f^{-1}(O_j)) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} O_j$.

😊

Korollar 5.1

(i) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Hausdorff'scher Raum: $K \subseteq X$ kompakt $\Rightarrow K$ ist abgeschlossen.

(ii) Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ Topologischer Raum, X kompakt, $\langle Y, \mathcal{V} \rangle$ Hausdorff'scher Raum, $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Lemma 5.2.7

Sei $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ ein Hausdorff'scher Raum. Und $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt, $\neq \emptyset$ und disjunkt. $\Rightarrow \exists O_1, O_2$ offen und disjunkt, so dass $K_1 \subseteq O_1$ und $K_2 \subseteq O_2$.

Proof. Lemma 5.3.4:

1. Schritt: Sei $x \in X, K \subseteq X$ kompakt, $x \notin K$.
   $\forall y \in K : x \neq y \overset{X \text{ Hausdorff}}{\Longrightarrow}$ wähle $O_y, \tilde{O}_y$ offen mit $O_y \cap \tilde{O}_y = \emptyset, x \in O_y, y \in \tilde{O}_y$.
   $K = \bigcup_{y \in K} \{y\} \subseteq \tilde{O}_y \overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ wähle $y_1, \ldots, y_n \in K : K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \tilde{O}_{y_j}$.
   $$\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{O}_{y_j}}_{\text{offen, } \supseteq K} \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} O_{y_j}}_{\text{offen, } x \in} = \bigcup_{j=1}^{n} [\tilde{O}_{y_j} \cap \bigcap_{k=1}^{n} O_{y_k}] \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} [\tilde{O}_{y_j} \cap O_{y_j}] = \emptyset$$
2. Schritt: Sei $K_1, K_2 \subseteq X$ kompakt, disjunkt.
   Für jedes $x \in K_1$ wähle $O_x, \tilde{O}_x$ disjunkt und $x \in \tilde{O}_x$, $K_2 \subseteq O_x$.
   $K_1 = \bigcup_{x \in K_1} \{x\} \subseteq \tilde{O}_x \overset{K_1 \text{ kompakt}}{\Longrightarrow}$ wähle $x_1, \ldots, x_m \in K_1 : K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \tilde{O}_{x_i}$.
   $$\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} \tilde{O}_{x_j}}_{\text{offen, } \supseteq K_1} \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^{n} O_{x_j}}_{\text{offen, } \supseteq K_2} = \emptyset \quad \text{(wie oben)}$$

😊

Proof. Korollar 5.3.3:

(i) Sei $K \subseteq X$ kompakt und $x \in X \setminus K$.
$\overset{\textit{Lemma } 5.3.4}{\Longrightarrow} \exists O_1, O_2$ Offen und disjunkt, $x \in O_1, O_2 \supseteq K$

$\Rightarrow x \in O_1 \subseteq X \setminus K$
Also ist $X \setminus K$ offen und K abgeschlossen.

(ii) Betrachte $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$ Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen.
$\overset{\text{Proposition } 5.3.2}{\Longrightarrow} A = A \cap X$ ist kompakt.
$\Rightarrow f(A) \subseteq Y$ ist kompakt.
$\overset{Y \text{ Hausdorff}}{\Longrightarrow} f(A)$ ist abgeschlossen.

😊