

附录 A

定理 3.1 如果机器人 i 进入死锁状态, 那么机器人 i 在某一时刻应满足如下条件:

$$Q_K(\mathbf{p}_{target}^i - \mathbf{p}_K^i) + \sum_{j \in \mathcal{N}^i} \rho^{ij} \delta^{ij} \mathbf{a}_K^{ij} + \sum_{o \in \mathcal{W}^i} \rho_o^i \delta_o^i \mathbf{a}_K^{io} = \mathbf{0}, \quad (A1)$$

其中, $\delta^{ij} = \frac{\varepsilon_a - w^{ij}}{\varepsilon_a w^{ij}}$, $\delta_o^i = \frac{\varepsilon_w - w_o^i}{\varepsilon_w w_o^i}$, 而 $\mathcal{N}^i = \{j | w^{ij} < \varepsilon_a\}$, $\mathcal{W}^i = \{o | w_o^i < \varepsilon_w\}$ 。对于 $j \in \mathcal{N}^i$, 有 $w^{ij} = w^{ji}$ 。

证明 首先, 对于要求解的优化问题 3.1 的约束条件进行进一步分析。对于优化问题的约束 (2) 式, 可以对 $\forall k \in \mathcal{K}$ 展开成如下形式:

$$\mathbf{x}_k^i = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0^i + \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0^i + \dots + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}^i, \quad (A2)$$

其中, $\mathbf{x}_0^i = \mathbf{x}^i(t)$, 即当前时刻机器人 i 的状态。此外, 从 C_a^i 和 C_w^i 的表达式 (15) 和 (16) 可知 w^{ij} 和 w_o^i 的取值必须为正实数, 且有

$$\lim_{w^{ij} \rightarrow 0^+} C_a^i = +\infty, \quad \lim_{w_o^i \rightarrow 0^+} C_w^i = +\infty,$$

由于优化目标是 minimized 目标函数 C^i , 故在优化问题的求解中, 可忽略 $w^{ij} > 0$ 和 $w_o^i > 0$ 这两个条件约束。

对于优化问题 3.1, 可写出其 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^i = & C^i + \sum_{k=1}^K {}^u \lambda_k^i (\|\mathbf{u}_k^i\|_2 - a_{max}) + \sum_{k=1}^K {}^v \lambda_k^i (\|\mathbf{v}_k^i\|_2 - v_{max}) \\ & + \sum_{j \neq i} \lambda_K^{ij} (b_K^{ij} + w^{ij} - \mathbf{a}_K^{ij \top} \mathbf{p}_K^i) + \sum_{j \neq i} {}^a \lambda^{ij} (w^{ij} - \varepsilon_a) \\ & + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{j \neq i} \lambda_k^{ij} (b_k^{ij} - \mathbf{a}_k^{ij \top} \mathbf{p}_k^i) + \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{o \in \mathcal{W}} \lambda_k^{io} (b_k^{io} - \mathbf{a}_k^{io \top} \mathbf{p}_k^i) \\ & + \sum_{o \in \mathcal{W}} \lambda_K^{io} (b_K^{io} + w_o^i - \mathbf{a}_K^{io \top} \mathbf{p}_K^i) + \sum_{o \in \mathcal{W}} {}^w \lambda^{io} (w_o^i - \varepsilon_w) \\ & + {}^v \mathbf{v}^i \top \mathbf{v}_K^i + \sum_{k=1}^K \mathbf{v}_k^i \top (\mathbf{x}_k^i - \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0^i - \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}_0^i - \dots - \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1}^i), \end{aligned}$$

其中, ${}^v \mathbf{v}^i$ 和 \mathbf{v}_k^i 为向量形式, 前者的维度与 \mathbf{v}^i 相同, 后者的维度与 \mathbf{x}^i 相同。为了便于后续证明, 我们将 \mathbf{v}_k^i 表示为 $\mathbf{v}_k^i = [\mathbf{p}_k^i \top, \mathbf{v}_k^i \top]^\top$, \mathbf{p}_k^i 和 \mathbf{v}_k^i 部分分别对应位置向量部分和速度向量部分。

当死锁发生时, 根据定义 2.1, 此时机器人 i 应该保持静止并不再改变其位置, 即对于 $\forall k \in \mathcal{K}$, 有 $\mathbf{v}_k^i = \mathbf{0}$ 和 $\mathbf{u}_{k-1}^i = \mathbf{0}$, 这自然蕴涵了机器人位置不再改变的内容。由此可得, $\|\mathbf{v}_k^i\|_2 < v_{max}$ 和 $\|\mathbf{u}_{k-1}^i\|_2 < a_{max}$ 严格成立。根据 KKT 条件中的互补松弛条件, 可知在死锁发生时, 有 ${}^u \lambda_k^i = 0$ 和 ${}^v \lambda_k^i = 0$ 成立。再由 KKT 条件的稳定性条件, 我们可得

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \mathbf{p}_k^i} = \frac{\partial C^i}{\partial \mathbf{p}_k^i} - \sum_{j \neq i} \lambda_k^{ij} \mathbf{a}_k^{ij} + {}^v \mathbf{v}_k^i - \sum_{o \in \mathcal{W}} \lambda_k^{io} \mathbf{a}_k^{io} = \mathbf{0}; \quad (A3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \mathbf{v}_k^i} = \begin{cases} {}^v \mathbf{v}^i + {}^v \mathbf{v}_K^i, & k = K \\ {}^v \mathbf{v}_k^i, & k \neq K \end{cases} = \mathbf{0}; \quad (A4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \mathbf{u}_{k-1}^i} = -\mathbf{v}_k^i \top \mathbf{B} - \mathbf{v}_{k+1}^i \top \mathbf{A} \mathbf{B} - \dots - \mathbf{v}_K^i \top \mathbf{A}^{K-k} \mathbf{B} = \mathbf{0}; \quad (A5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial w^{ij}} = \frac{\partial C^i}{\partial w^{ij}} + {}^a \lambda^{ij} + \lambda_K^{ij} = 0; \quad (A6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial w_o^i} = \frac{\partial C^i}{\partial w_o^i} + {}^w \lambda^{io} + \lambda_K^{io} = 0; \quad (A7)$$

由式 (3) 中对于机器人动力学模型系统矩阵和输入矩阵的定义, 我们可以尝试转换式 (A5)。对于式 (A5), 我们首先观察到, 当 $k = K$ 时, 有 $\mathbf{v}_K^i \top \mathbf{B} = \mathbf{0}$, 即 ${}^v \mathbf{v}_K^i = \mathbf{0}$ 。结合 (A4), 我们可以得到 ${}^v \mathbf{v}_k^i = \mathbf{0}$ ($\forall k \in \mathcal{K}$)。再根据 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 的表达式 (3), 我们可以进一步将式 (A5) 转换成如下形式:

$$h^2 \cdot {}^p \mathbf{v}_{k+1}^i + 2h^2 \cdot {}^p \mathbf{v}_{k+2}^i + \dots + (K-k)h^2 \cdot {}^p \mathbf{v}_K^i = \mathbf{0}, \quad (A8)$$

如果我们令 $k = K-1$, 则可以得到 ${}^p \mathbf{v}_K^i = \mathbf{0}$ 。由此, 我们可以讨论当 $k = K$ 时, 式 (A3) 的表达形

式。此时，我们可以将关于 $p_{\mathbf{v}_K^i}$ 的部分去掉，得到如下等式：

$$\frac{\partial \mathcal{L}^i}{\partial \mathbf{p}_K^i} = \frac{\partial C^i}{\partial \mathbf{p}_K^i} - \sum_{j \neq i} \lambda_K^{ij} \mathbf{a}_K^{ij} - \sum_{o \in \mathcal{W}} \lambda_K^{io} \mathbf{a}_K^{io} = \mathbf{0}. \quad (\text{A9})$$

下面，我们再来考察式 (A6)，将 C^i 的表达式代入，其中与 w^{ij} 相关的是 C_a^i ，如式 (15) 所示，我们可以得到

$$\rho^{ij} \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{w^{ij}} \right) + {}^a \lambda_K^{ij} + \lambda_K^{ij} = 0. \quad (\text{A10})$$

可以证明式 (A10) 中的 ${}^a \lambda_K^{ij} = 0$ ，我们假设存在 ${}^a \lambda_K^{ij} > 0$ ，那么由互补松弛条件，可得此时有 $w^{ij} = \varepsilon_a$ 。于是，式 (A10) 就化为

$${}^a \lambda_K^{ij} + \lambda_K^{ij} = 0. \quad (\text{A11})$$

由前提假设 ${}^a \lambda_K^{ij} > 0$ ，可得 $\lambda_K^{ij} < 0$ ，而这与 KKT 条件所说的 $\lambda_K^{ij} \geq 0$ 矛盾，故可知前提假设错误，即有 ${}^a \lambda_K^{ij} = 0$ 。有了这一结论后，我们可以从式 (A10) 中得到 λ_K^{ij} 的表达式：

$$\lambda_K^{ij} = -\rho^{ij} \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - \frac{1}{w^{ij}} \right) = \rho^{ij} \frac{\varepsilon_a - w^{ij}}{\varepsilon_a w^{ij}}. \quad (\text{A12})$$

同样地，由于与 w_o^i 有关的目标函数项 C_w^i 的形式与 C_a^i 相似，且式 (A7) 与式 (A6) 形式上也相似，所以也可以用相似的论证，推出 λ_K^{io} 的表达式为

$$\lambda_K^{io} = \rho_o^i \frac{\varepsilon_w - w_o^i}{\varepsilon_w w_o^i}, \quad (\text{A13})$$

具体的推导细节不在此重复。

将 C^i 的表达式、 λ_K^{ij} 的表达式 (A12) 和 λ_K^{io} 的表达式 (A13) 代入式 (A9) 中，我们可以推导出如下等式：

$$Q_K(\mathbf{p}_{\text{target}}^i - \mathbf{p}_K^i) + \sum_{j \neq i} \rho^{ij} \frac{\varepsilon_a - w^{ij}}{\varepsilon_a w^{ij}} \mathbf{a}_K^{ij} + \sum_{o \in \mathcal{W}^i} \rho_o^i \frac{\varepsilon_w - w_o^i}{\varepsilon_w w_o^i} \mathbf{a}_K^{io} = \mathbf{0}. \quad (\text{A14})$$

如果 $j \notin \mathcal{N}^i = \{j | w^{ij} < \varepsilon_a\}$ ，那么有 $w^{ij} = \varepsilon_a$ ，则 $\frac{\varepsilon_a - w^{ij}}{\varepsilon_a w^{ij}} = 0$ ；如果 $o \notin \mathcal{W}^i = \{o | w_o^i < \varepsilon_w\}$ ，那么有 $w_o^i = \varepsilon_w$ ，则 $\frac{\varepsilon_w - w_o^i}{\varepsilon_w w_o^i} = 0$ 。经过整理，令 $\delta^{ij} = \frac{\varepsilon_a - w^{ij}}{\varepsilon_a w^{ij}}$ ， $\delta_o^i = \frac{\varepsilon_w - w_o^i}{\varepsilon_w w_o^i}$ ，则可知式 (A1) 得证。

最后，我们来证明对于 $j \in \mathcal{N}^i$ ，有 $w^{ij} = w^{ji}$ 。若机器人 i 处于死锁状态，那么机器人 j 也处于死锁状态，如若不然，则 \mathbf{a}_K^{ij} 将会发生改变，从而破坏死锁的力平衡条件，机器人 i 所处的死锁状态也将无法保持。对于 $j \in \mathcal{N}^i$ ，由 \mathcal{N}^i 定义可知， $w^{ij} < \varepsilon_a$ ，由 KKT 条件的互补松弛条件可知 ${}^a \lambda_K^{ij} = 0$ ，同时根据式 (A12) 可知 $\lambda_K^{ij} > 0$ 。再应用互补松弛条件，知 $\mathbf{a}_K^{ij \top} \mathbf{p}_K^i = b_K^{ij} + w^{ij}$ ，其中

$$\mathbf{a}_K^{ij} = \frac{\bar{\mathbf{p}}_K^{ij}}{\|\bar{\mathbf{p}}_K^{ij}\|_2}, b_K^{ij} = \mathbf{a}_K^{ij \top} \frac{\bar{\mathbf{p}}_K^i + \bar{\mathbf{p}}_K^j}{2} + \frac{d'_{\min}}{2}.$$

由于死锁状态，所以有 $\bar{\mathbf{p}}_K^i = \mathbf{p}_K^i(t-h) = \mathbf{p}_K^i(t)$ ， $\bar{\mathbf{p}}_K^j = \mathbf{p}_K^j(t-h) = \mathbf{p}_K^j(t)$ 。因而有

$$\mathbf{a}_K^{ij} = \frac{\mathbf{p}_K^{ij}}{\|\mathbf{p}_K^{ij}\|_2}, b_K^{ij} = \mathbf{a}_K^{ij \top} \frac{\mathbf{p}_K^i + \mathbf{p}_K^j}{2} + \frac{d'_{\min}}{2}. \quad (\text{A15})$$

同理，可得 $\mathbf{a}_K^{ji \top} \mathbf{p}_K^j = b_K^{ji} + w^{ji}$ ，与 $\mathbf{a}_K^{ij \top} \mathbf{p}_K^i = b_K^{ij} + w^{ij}$ 合并，并考虑式 (A15)，可得 $w^{ij} = w^{ji}$ 。至此，定理 3.1 得证。

附录 B

算法 2: 完整算法.

Input: $\mathbf{p}^i(t_0)$, \mathbf{p}_{target}^i , \mathcal{O} .

```

1 初始化  $\bar{\mathbf{p}}^i(t_0) = [\mathbf{p}^i(t_0), \dots, \mathbf{p}^i(t_0)]$ ;
2 初始化障碍物约束信息;
3 while 仍有机器人没有到达目标位置 do
4   for  $i \in \mathcal{N}$  (同步进行) do
5     不同机器人间互相交换信息  $\bar{\mathbf{p}}^j (j \neq i)$ ;
6     构建与障碍物间的避障约束;
7     更新  $\rho_o^i$ ;
8     构建 MBVC-WB;
9     根据算法 1 更新  $\rho^{ij}$ ;
10    求解优化问题;
11    执行轨迹;
12    不同机器人间互相交换信息并更新  $b_{OP}^i$  和  $b_{OHP}^i$ ;
13  end
14   $t \leftarrow t + h$ ;
15 end
```

定理 4.1 在对障碍物斥力进行如第 4 节中所述设计的基础上应用算法 2 时, 如果满足以下三个前提:

1. $\forall i \neq j$, 有 $\|\mathbf{p}_{target}^i - \mathbf{p}_{target}^j\|_2 > d'_{min} + 2\varepsilon_a$;
2. $\forall i \in \mathcal{N}, \forall o \in \mathcal{W}$,

$$\frac{|\mathbf{a}_k^{io\top} \mathbf{p}_{target}^i - b_k^{io}|}{\|\mathbf{a}_k^{io}\|_2} > \varepsilon_w;$$

3. 三个及以上的机器人的位置点和它们彼此的目标点不会出现在同一条直线上;

则稳定的死锁现象不会发生。

证明 由死锁的定义 2.1 可知, 死锁一旦发生, 处于死锁中的机器人位置、速度均不再改变。我们不妨假设, 在应用本算法时死锁可以一直被保持下去, 那么我们取一个足够长的时间。我们记该时刻为 $t - h$, 由前提假设知, 死锁会被保持到 t 时刻。

对于陷入此死锁之中的机器人 i 而言, 由定理 3.1 可知, t 时刻存在以下力平衡表达式

$$\mathbf{F}_A^i + \sum_{o \in \mathcal{W}^i} \mathbf{F}^{io} + \sum_{j \in \mathcal{Q}^i} \mathbf{F}^{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^i \\ j \notin \mathcal{Q}^i}} \mathbf{F}^{ij} = \mathbf{0}. \quad (B1)$$

其中, \mathbf{F}_A^i 、 \mathbf{F}^{io} 和 \mathbf{F}^{ij} 分别表示来自目标的吸引力项、来自各个障碍物的斥力项和来自其它智能体的斥力项; 而这里 \mathcal{Q}^i 是那些 \mathcal{N}^i 中满足算法 1 相应条件而被重新设计 ρ^{ij} 的那些对应的机器人组成的集合。

虽然在本节设计的方案中 \mathbf{n}_a 的定义随机器人的所处位置不同而不同, 但是容易证明, 按照 \mathbf{n}_a 方向作为 x 轴建立的坐标系, 在 y 方向的来自障碍物的斥力项合力均为 0。根据前提假设, 在 t 时刻仍然保持死锁, 则根据定理 3.1, 在 y 轴方向上有

$$F_y^i = F_{A,y}^i + \sum_{j \in \mathcal{Q}^i} (-\sin \theta^{ij}) F^{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^i \\ j \notin \mathcal{Q}^i}} (-\sin \theta^{ij}) \rho_o e^{\eta^i(t) \sin \theta^{ij}} \delta^{ij} = 0. \quad (B2)$$

由于死锁从 $t - h$ 时刻保持到 t 时刻, 由死锁定义知, 处于死锁中的各机器人的位置关系应保持不变, 根据我们先前对于时刻 $t - h$ 的选取知此时其它不在死锁中的机器人应该均已到达终点。因此, 满足 $b_{OP} = \text{True}$ 或者满足 $b_{OHP} = \text{True}$ 的机器人只可能存在于死锁之中, 且每个机器人的 b_{OP} 和 b_{OHP} 在 $t - h$ 时刻到 t 时刻不发生转变。根据算法 1 的规则, 对于 $j \in \mathcal{Q}^i$, 它们对应的 \mathbf{F}^{ij} 也在 $t - h$ 时刻到 t 时刻不发生改变。

对于 $t - h$ 时刻, 同样因为死锁, 我们可以在 y 方向上列出如下等式

$$F_{A,y}^i + \sum_{j \in Q^i} (-\sin \theta^{ij}) F^{ij} + \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^i \\ j \notin Q^i}} (-\sin \theta^{ij}) \rho_0 e^{\eta^i(t-h) \sin \theta^{ij}} \delta^{ij} = 0. \quad (B3)$$

合并式(B2)和式(B3)，我们可以得到

$$F_y^i = \sum_{\substack{j \in \mathcal{N}^i \\ j \notin Q^i}} \sin \theta^{ij} \rho_0 e^{\eta^i(t-h) \sin \theta^{ij}} \delta^{ij} (1 - e^{\Delta \eta \sin \theta^{ij}}). \quad (B4)$$

若求和仅针 $j \in \mathcal{N}^i$ ，此时若对于 $\forall j \in \mathcal{N}^i$ ，有 $\theta^{ij} = 0$ 或 $\theta^{ij} = \pi$ 成立，则 $F_y^i = 0$ ，则我们称其为 A 类特殊情况。而此处当 $Q^i = \mathcal{N}^i$ 时，亦有 $F_y^i = 0$ ，我们不妨称这种特殊情况为 B 类特殊情况。由于式(B4)的形式与 A 类特殊情况并不完全一样，因为当 $\forall j \in \mathcal{N}^i$ ， $j \in Q^i$ ，满足 $\theta^{ij} = 0$ 或 $\theta^{ij} = \pi$ 成立时，仍有可能存在 $j \in Q^i$ ，满足 $\theta^{ij} \neq 0$ 或 $\theta^{ij} \neq \pi$ ，但是因为优先级设计的原因它们不出现在式(B4)中，不妨我们记作 C 类特殊情况。如果式(B4)并非特殊情况，则自然死锁力平衡条件不成立，下面我们将主要讨论这些特殊情况。

下面我们证明 B 类特殊情况下不会出现稳定的死锁现象。我们对机器人 i 所处的不同情况进行分类讨论：

情形一： $w_o^i = \varepsilon_w$ ， $\forall o \in \mathcal{W}$ 。根据算法 1，我们可以知，仅有 $b_{op}^i = False$ 时，才有可能会出现 $Q^i = \mathcal{N}^i$ 的情形。对于机器人 j 而言， $i \in \mathcal{N}^j$ ，对机器人 j 应用同样的分析，可得

$$F_y^j = \sum_{\substack{k \in \mathcal{N}^j \\ k \notin Q^j}} \sin \theta^{jk} \rho_0 e^{\eta^j(t-h) \sin \theta^{jk}} \delta^{jk} (1 - e^{\Delta \eta \sin \theta^{jk}}). \quad (B5)$$

由于 $i \in \mathcal{N}^j$ 且 $b_{op}^j = False$ ，因此对于机器人 j 而言，其 F_y^j 的表达式不具有 B 类特殊情况，仅有 A 类或 C 类特殊情况。再根据附录 C 的引理 1，我们知道包含机器人 j 的这一死锁体系中所有机器人均不与障碍物约束面的预警带相接触。根据算法 1，我们知道对于机器人 j 而言，由于有 $b_{op}^j = True$ ，因此这种特殊情况就是 A 类特殊情况。由此，我们再应用附录 C 的引理 2，我们可以知道机器人 j 不会发生稳定的死锁现象，从而机器人 i 不可能发生稳定的死锁现象。与反证法假设矛盾。

情形二： $w_o^i < \varepsilon_w$ ， $\exists o \in \mathcal{W}$ 。这时我们选择讨论机器人 i 所受合力沿 x 轴的分量，由前面的论证过程，我们知道来自障碍物的斥力项合力沿 x 轴方向，因此我们可以列出

$$F_x^i = F_{A,x}^i + \left(\sum_{o \in \mathcal{W}^i} \frac{\tilde{\rho}_0 e^{\eta_w^i(t)} \varepsilon_w - w_o^i(t)}{\bar{d}_K^{io}(\bar{\mathbf{p}}_K^i(t)) \varepsilon_w w_o^i(t)} \mathbf{a}_K^{io} \right) \cdot \mathbf{n}_x + \sum_{j \in Q^i} (-\cos \theta^{ij}) F^{ij} = 0. \quad (B6)$$

其中， \mathbf{n}_x 是 x 轴上的单位向量。在 $t-h$ 时刻，由于死锁，同样应有 x 轴方向的平衡

$$F_{A,x}^i + \left(\sum_{o \in \mathcal{W}^i} \frac{\tilde{\rho}_0 e^{\eta_w^i(t-h)} \varepsilon_w - w_o^i(t-h)}{\bar{d}_K^{io}(\bar{\mathbf{p}}_K^i(t-h)) \varepsilon_w w_o^i(t-h)} \mathbf{a}_K^{io} \right) \cdot \mathbf{n}_x + \sum_{j \in Q^i} (-\cos \theta^{ij}) F^{ij} = 0. \quad (B7)$$

因为死锁从 $t-h$ 时刻保持到了 t 时刻，因此有 $w_o^i(t) = w_o^i(t-h)$ ， $\bar{\mathbf{p}}_K^i(t) = \bar{\mathbf{p}}_K^i(t-h)$ ， $\eta_w^i(t) = \eta_w^i(t-h) + \Delta \eta_w$ ，由之前论述分析， F^{ij} 亦不变。合并式(B6)和式(B7)有

$$F_x^i = (e^{\Delta \eta_w} - 1) \sum_{o \in \mathcal{W}^i} \frac{\tilde{\rho}_0}{\bar{d}_K^{io}(\bar{\mathbf{p}}_K^i(t))} \frac{\varepsilon_w - w_o^i(t)}{\varepsilon_w w_o^i(t)} \mathbf{a}_K^{io} \cdot \mathbf{n}_x \quad (B8)$$

由于 $\Delta \eta_w > 0$ ，故上式严格大于 0，因此对于机器人 i 而言，此时不可能出现死锁力平衡条件，即死锁不可能得到保持。

综合以上两种情形的讨论，我们可以总结得出，对于 B 类特殊情况，稳定的死锁不会发生，因此我们只用讨论 C 类特殊情况即可。讨论的思路类似于上方关于情形一的讨论，可知机器人 i 不可能存在于稳定的死锁之中。而对于不稳定的死锁情况，文献[12]中已经做出了相应的论证，在此就不加以赘述。

附录 C

引理 1. 如果以下四个前提满足：

1. $\forall i \neq j$, 有 $\|\mathbf{p}_{target}^i - \mathbf{p}_{target}^j\|_2 > d'_{min} + 2\varepsilon_a$;
2. $\forall i \in \mathcal{N}, \forall o \in \mathcal{W}$,

$$\frac{|\mathbf{a}_k^{io\top} \mathbf{p}_{target}^i - b_k^{io}|}{\|\mathbf{a}_k^{io}\|_2} > \varepsilon_w;$$

3. 三个及以上的机器人的位置点和它们彼此的目标点不会出现在同一条直线上;
4. 发生死锁的体系内出现 A 类特殊情况或 C 类特殊情况;

那么我们可以推断, 这个发生死锁的体系内所有机器人 i 均满足, $\forall o \in \mathcal{W}, w_o^i = \varepsilon_w$, 即这个发生死锁的体系中没有机器人与障碍物约束面的预警带相接触。

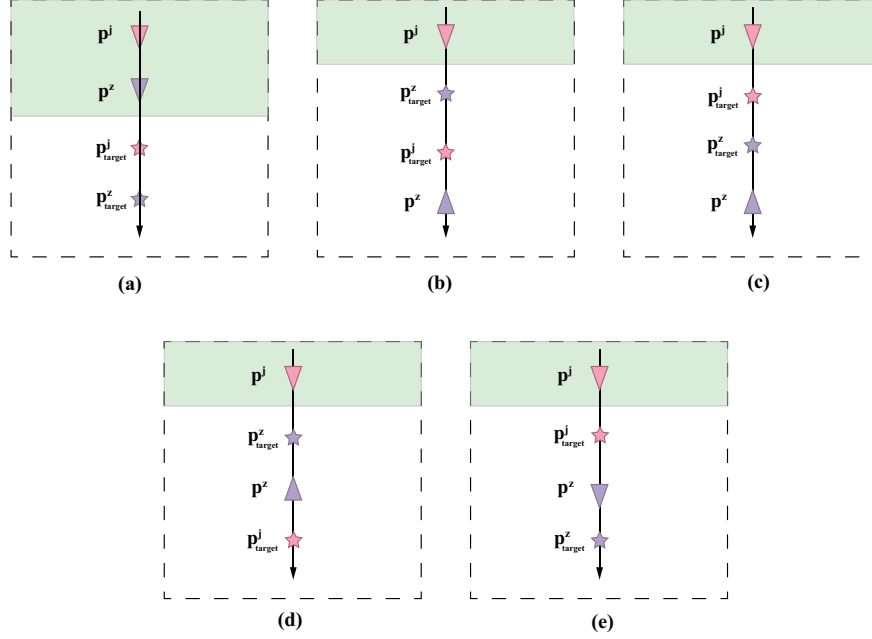


图 C.1 五种可能情形的讨论。

证明 记机器人 i 所在的死锁体系为 $\mathbb{D}^i = \{j | j = i \text{ 或 } j \in \mathcal{N}^i \text{ 或 } \exists k \in \mathcal{N}^j, k \in \mathbb{D}^i\}$ 。容易得到, 不管是对 A 类特殊情况还是 C 类特殊情况, 都有如下命题成立: \mathbb{D}^i 中的所有机器人和它们各自的目标点均位于同一条直线上。对于 \mathbb{D}^i 中所有机器人都不与障碍物约束面的预警带接触的情况在文献[12]中已经得到证明, 下面仅证明 \mathbb{D}^i 中存在机器人与障碍物约束面的预警带接触的情形下, 该命题仍然成立。假设 $\exists j \in \mathbb{D}^i, \exists o \in \mathcal{W}, w_o^j < \varepsilon_w$ 。如果发生 A 类特殊情况, 那么其它 \mathbb{D}^i 中的机器人(记为 k)一定和机器人 j 在位置上共线。而这些在 \mathbb{D}^i 中的其它机器人分两种情况:

1. 第一种是该机器人不与障碍物约束面预警带相接触的情形。此时它的 θ^{kj} 按照图 2 中的(b)所示, 即以指向目标位置的向量作为 θ^{kj} 的起始方向。如果机器人 k 的目标不在所有机器人所处的直线上, 那么显然对于机器人 k 而言, 必有 θ^{kj} 不为 0 或 π , 则机器人 k 相应的式(B4)必然恒小于 0, 说明机器人 k 不处于死锁状态, 与 $k \in \mathbb{D}^i$ 矛盾。因此, 对于这种机器人而言, 其目标位置必落在这条直线上。
2. 第二种是该机器人与障碍物约束面预警带相接触的情形。此时它的 θ^{kj} 按照图 2 中的(a)所示, 即以障碍物约束面指向机器人可行域方向的法向量作为 θ^{kj} 的起始方向。该方向必定与 j 的 θ 起始方向共线, 否则仍然会推出机器人 k 不会处于死锁状态的矛盾。假设其目标不在这条直线上, 由于所有机器人均位于同一直线上, 可知来自机器人的斥力均沿该直线, 而来自障碍物约束面的斥力也位于这条直线上, 那么仅有来自目标的吸引力不在这条直线上, 显然这不能构成受力平衡, 不满足定理 3.1, 即机器人 k 此时不在死锁状态, 矛盾。由此可知即使

\mathbb{D}^i 中的机器人不在自由空间，其目标位置仍落在这条直线上。

对于机器人 j 而言，它的目标位置也落在这条直线上，分析方式与上述第二种情况同理。由此，我们证明了对于 A 类特殊情况前述命题成立。如果是 C 类特殊情况的话，只需要额外在前述的讨论基础上考虑死锁体系里有机器人被赋予弱优先级的情况，其余讨论同上。由于体系已经发生死锁，根据算法 1，对于机器人 j 一定有 $b_{OP}^j = True$ ，因此机器人 j 只能受到满足 $b_{OHP}^l = True$ 的机器人 l 的影响。但由算法 1 的设计，我们知道即使机器人 l 满足 $b_{OHP}^l = True$ ，它在设计 ρ 的时候仍然采用一般设计方法，这正是弱优先级的体现。我们对此仍分两种情形讨论：

1. 机器人 l 不与障碍物预警带相接触。因为是 C 类特殊情况，因此死锁体系中除了机器人 j 和 l 外还应至少存在一个机器人，那么对于机器人 l 而言，它必须在与其它机器人共线的位置，且其目标位置也在这条直线上，否则它不处于死锁状态，论证思路与 A 类特殊情况讨论中第一种情形相似。
2. 机器人 l 与障碍物预警带相接触。如果机器人 l 此时不与其它机器人共线，那么至少有一个机器人 k 对 l 而言有 $\theta^{lk} \neq 0$ ，由此可以推出 l 不在死锁状态下。如果 l 与其它机器人共线，那么对其目标位置的推定也可以参考讨论 A 类特殊情况的第二种情形加以讨论。

综上，我们可以得到 C 类特殊情况下，命题成立。

在有了前述的分析后，我们先讨论 A 类特殊情况，由于 \mathbb{D}^i 中出现了 A 类特殊情况，故可推知 $\forall j \in \mathbb{D}^i, \forall k \in \mathcal{N}^j$ ，有 $\theta^{jk} = 0$ 或 $\theta^{jk} = \pi$ 成立。根据 θ^{jk} 的定义，易知死锁体系 \mathbb{D}^i 中的机器人以及其对应的目标点均在同一直线上。又因为有前提 3，所以我们只需要考虑两个机器人和它们的目标点出现在同一条直线上的情况。

假设 $\exists j \in \mathbb{D}^i, \exists o \in \mathcal{W}, w_o^j < \varepsilon_w$ 。则根据 \mathbf{n} 的定义式 (23)，此时应有

$$\mathbf{n} = \sum_{o \in \mathcal{W}^j} \rho_o^j \delta_o^j \mathbf{a}_K^{jo}, \quad (C1)$$

其中的 ρ_o^j 则需要根据主动设计或被动设计来具体确定。我们不妨记死锁体系中另一个机器人为 z 。两个机器人的位置向量分别为 \mathbf{p}^j 和 \mathbf{p}^z 。

因为有前提 2，所以两个机器人间可能出现的位置情况有以下几种，在此处我们以机器人 j 与单个障碍物约束面预警带接触为例作示意图 C.1，其它情形同理。

1. 情形一：这类情况如图 C.1(a) 所示，它描述了一类情形，即机器人 j 和机器人 z 均在预警带中的情形，由于这个死锁体系中仅有这两个机器人，因此简单分析可知二者必至少有一个不满足死锁的力平衡条件，图 C.1(a) 中机器人 z 受到的来自机器人 j 的斥力、来自障碍物约束的斥力以及来自目标的吸引力同向。由此便与死锁的前提矛盾。同理，情形一的其它情况的排布依然可以推出同样的矛盾。
2. 情形二：这种情形如图 C.1(b) 所示，我们以 \mathbf{p}_{target}^j 为原点，以 \mathbf{n} 为正方向作一个一维坐标轴。在这种情况下，有 $\mathbf{p}^z - \mathbf{p}^j \geq \mathbf{p}_{target}^j - \mathbf{p}_{target}^z > d'_{min} + 2\varepsilon_a$ 。又因为 $w^{zj} \leq \varepsilon_a, w^{jz} \leq \varepsilon_a$ ，由此可以推知 $\mathbf{a}_K^{jz^\top} \mathbf{p}^j > b_K^{jz} + w^{jz}$ 和 $\mathbf{a}_K^{zj^\top} \mathbf{p}^z > b_K^{zj} + w^{zj}$ ，由互补松弛条件可知，有 $\lambda_K^{jz} = 0, \lambda_K^{zj} = 0$ 。这说明二者间斥力为 0，因此不可能同时存在于一个死锁体系中，故与死锁前提矛盾。
3. 情形三：这种情形如图 C.1(c) 所示，它与情形二类似，可用相同的方法推出矛盾。
4. 情形四：这种情形如图 C.1(d) 所示，我们以 \mathbf{p}_{target}^j 为原点，以 \mathbf{n} 为正方向作一个一维坐标轴。

对于死锁体系，由定理 3.1 可知，对于机器人 j ，有

$$Q_K(\mathbf{p}_{target}^j - \mathbf{p}^j) + \rho_o^j \delta_o^j - \rho^{jz} \delta^{jz} = 0. \quad (C2)$$

对于机器人 z ，有

$$Q_K(\mathbf{p}_{target}^z - \mathbf{p}^z) + \rho^{zj} \delta^{zj} = 0. \quad (C3)$$

因为两个机器人与它们各自的目标点在同一条直线上，因此有 θ^{jz} 和 θ^{zj} 等于 0 或 π ，所以 $\rho^{jz} = \rho^{zj} = \rho_0$ 。又由定理 3.1 知， $w^{jz} = w^{zj}$ ，所以 $\delta^{jz} = \delta^{zj}$ 。我们将式 (C2) 和 (C3) 合并，可得

$$|p_{target}^z - p^z| = |p_{target}^j - p^j| + \frac{\rho_o^j \delta_o^j}{Q_K}.$$

根据定义, $\rho_o^j > 0$, $\delta_o^j > 0$, $Q_K > 0$, 因此有 $|p_{target}^z - p^z| > |p_{target}^j - p^j|$, 显然图 C.1(d) 所示的这种情形不符合上述条件, 故不可能产生死锁。

5. 情形五: 这种情形如图 C.1(e)所示。但是, 这种情况显然不成立, 因为对于机器人 z 而言, 其来自目标的吸引力和来自机器人 j 的斥力同向, 不可能满足死锁的力平衡条件。

在 C 类特殊情况发生时, 体系中必然存在具有优先级的机器人。因为机器人 j 满足 $\exists o \in \mathcal{W}$, $w_o^j < \varepsilon_w$, 又因为体系发生死锁, 因此机器人 j 必有 $b_{op}^j = True$ 。根据算法 1 的设计, 此时最多只有一个机器人可以对当前机器人 j 施加恒定不变的优先级作用力, 不妨记此机器人为 \tilde{z} , 满足 $\rho^{j\tilde{z}} = \rho_{max} e^{\sin \theta^{j\tilde{z}}}$, 也就是说这个死锁体系最多有 3 个机器人。根据前提 3, 这三个机器人的位置点与它们彼此的目标点不在同一直线上, 因此只能是机器人 \tilde{z} 不在直线上, 那么此时对于机器人 j 而言, 它受到的吸引力、来自障碍物的斥力、来自机器人 z 的斥力均在 \mathbf{n} 方向上, 唯独来自机器人 \tilde{z} 的斥力不在这一直线上, 因此死锁的力平衡条件不满足, 故体系不在死锁状态下, 与前提矛盾。

综上, 可知在假设下, 均能推出与死锁矛盾的结果, 故可知在满足引理的四个条件下, 发生死锁的体系中没有机器人与障碍物约束面的预警带相接触。

引理 2. 在应用算法时, 如果由若干机器人组成的体系满足如下前提:

1. 任意时刻, 其中任意机器人 i 都满足 $\forall o \in \mathcal{W}$, $w_o^i = \varepsilon_w$, 即这个体系中没有机器人与障碍物约束面的预警带相接触;
 2. $\forall i \neq j$, 有 $\|p_{target}^i - p_{target}^j\|_2 > d'_{min} + 2\varepsilon_a$;
 3. 三个及以上的机器人的位置点和它们彼此的目标点不会出现在同一条直线上;
- 那么这个体系不会发生稳定的死锁现象。

注 1. 引理 2 来自文献[12]的定理 2, 但在表述形式上做了一些等价转换, 现做出说明。文献[12]考虑的是无障碍物空间下的死锁破解问题, 在此处我们加入了额外的前提条件 1, 它的含义就是若干机器人构成的体系在任意时刻都不与障碍物发生交互作用, 因此不触发本文中关于障碍物约束项的设计, 在这种情况下与无障碍物的自由空间相同。另一个重要的问题在于在本文讨论的有障碍物情景下何时可以应用这一引自文献[12]的定理。在应用本文提出的算法时, 在引理 2 的额外前提条件 1 下, 算法和文献[12]的算法一致, 再加上满足前提条件 2 和 3, 便构成了这一引理的使用条件, 便可以使用这一引理。但是, 一般而言在有障碍物环境下讨论时, 前提条件 1 很难严格满足, 但是我们应用引理 2 主要是为了论证在假设死锁会发生的前提下, A 类特殊情况会导出矛盾, 这样的话根据引理 1 我们知道发生死锁的体系必然满足前提条件 1, 这便构成了我们推导的前提, 可以应用本引理。由于篇幅所限, 此处不展开本引理的证明, 具体证明过程可以参考文献[12]的引理 2 和引理 3 的证明。

附录 D

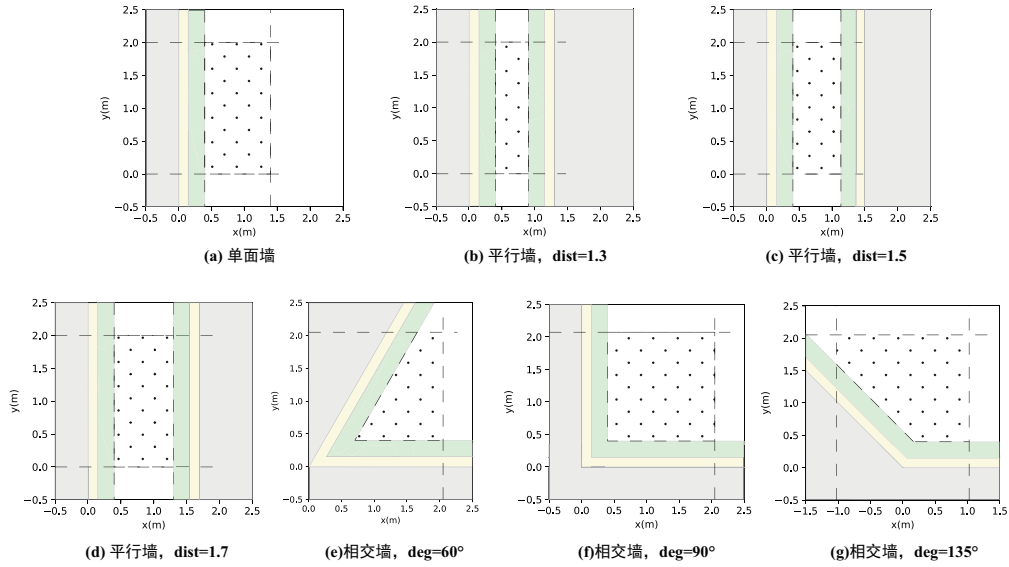


图 5. 随机试验范围示意图。绘有散点的区域为试验中随机设置起始点和随机设置目标点的范围。

在 2.2 节中曾提到本文所研究的对象是机器人可行域为若干半空间围成的凸区域的情形，但是符合这种要求的测试情形数不胜数，无法一次性穷举完全。在本节中，我们将主要聚焦于讨论一些基本场景的测试，而选取的这些基本场景又都是前述凸区域的基本组成单元。我们将主要考虑三种情形的测试，分别是单面墙、平行墙和相交墙，之所以选择这三种情况，是因为当由若干半空间围成的凸区域足够大时，任何一个障碍物附近的局部都可以近似视为以上三种情形之一，这就是使得我们的测试场景既有特殊性又有普遍性。其中平行墙场景测试中，我们选取墙面距离 $dist = 1.3m$ 、 $dist = 1.5m$ 和 $dist = 1.7m$ 三种情况，而相交墙场景测试中，我们选取墙夹角为 $deg = 60^\circ$ 、 $deg = 90^\circ$ 和 $deg = 135^\circ$ 三种情况。在随机试验测试中，我们在指定范围内随机设定若干机器人的起始位置和目标位置，然后进行数值仿真，如果在 100 秒采样时间上限内机器人均到达各自目标位置，则算作成功。对于每一个场景案例，我们进行 100 次测试。图 5 展示了不同数值仿真场景案例下随机生成起始位置和目标位置的区域：单面墙测试场景下是在靠近预警带的一个 $1m \times 2m$ 的区域中；平行墙场景下是在一个 y 方向为 $2m$ ，x 方向覆盖住两个预警带之间空间的区域中；相交墙场景下则是在一个 $2.05m \times 2.05m$ 的区域与预警带外的自由区域的交集中。

表 1. 实验数据										
		机器人数量								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
成功数量	单面墙	100	100	100	100	100	100	100	—	—
	平行墙 (dist=1.3)	100	100	100	100	—	—	—	—	—
	平行墙 (dist=1.5)	100	100	100	100	100	100	—	—	—
	平行墙 (dist=1.7)	100	100	100	100	100	100	100	—	—
	相交墙 (deg=60°)	100	100	100	100	100	100	—	—	—
	相交墙 (deg=90°)	100	100	100	100	100	100	100	100	100
	相交墙 (deg=135°)	100	100	100	100	100	100	100	100	100
平均完成 时间(s)	单面墙	1.74	2.05	2.33	2.66	3.59	4.61	6.15	—	—
	平行墙 (dist=1.3)	1.70	2.17	3.49	5.74	—	—	—	—	—

	平行墙 (dist=1.5)	1.74	2.06	2.51	3.51	5.69	7.99	—	—	—
	平行墙 (dist=1.7)	1.66	2.00	2.69	3.04	4.60	5.03	6.85	—	—
	相交墙 (deg=60°)	1.60	1.84	2.40	2.90	4.28	6.49	—	—	—
	相交墙 (deg=90°)	1.69	2.01	2.18	2.75	3.12	3.78	4.84	5.99	7.56
	相交墙 (deg=135°)	1.78	2.02	2.39	2.62	3.25	3.72	5.22	6.11	7.48

表 1 总结了本文算法在 7 种不同测试场景下按不同机器人数目进行 100 次随机试验的成功数量以及平均完成时间。注意到每种不同的测试场景都有一个最大的机器人数量，这一数值的选取是根据不同测试场景的随机试验范围大小再加上需要符合定理 4.1 的条件 1 的限制而定的，也就是说在对应场景下这一数值是所能容纳的最大机器人数量，也就是最密集的情况。从表中的结果可以看到，算法在数值仿真中均可成功完成轨迹规划，从而验证了本文所提算法的正确性。