序

近年来，数学模型在经济学领域应用十分广泛。为防范金融风险，金融工具不断创新，金融数学模型已成为风险管理必不可少的工具。

我国的金融市场起步较晚，金融工具少，金融模型的实践与应用相对滞后，但是，随着我国经济、金融体制的改革，金融市场不断发展，新的金融工具不断出现，金融数学模型必然得到广泛应用。

《金融数学模型》一书能抓住防范风险的敏感课题，用数学模型的定量分析方法研究风险决策，具有较强的理论意义和现实意义。

作者在二次规划的最优化理论方面有一定的研究。《金融数学模型》一书从内容到结构都有很多独到之处，从复利公式、银行按揭模型到期权定价理论，内容由浅入深，条理清楚，结构严谨，并广泛参考相关论文与论著，资料翔实。在组合投资比例选择及风险管理等方面作者结合自己的研究成果，并对我国证券市场的实践进行探讨，使得书中内容更贴近现实。

《金融数学模型》一书的出版，对于我国金融工程研究工作将作出贡献。该书对于政府部门、金融系统的决策者与实际工作者有较强的参考价值，具有可读性，并可作为大专院校相关专业的教材或教学参考书，我乐意向社会各界人士予以推荐。

长沙铁道学院副院长、博士导师

侯振挺

1999年4月于广州

前　言

金融数学模型是一门新学科，在写书之前，国内尚未有同名的著作。虽然近年来国外已有大量相关著作，但要找一本从体系到内容都比较适合中国读者，同时又可充当教科书的著作，却非易事。在我国，学金融的朋友即使学了一点高等数学，也不知道用在何处；学数学的很少想到与金融实践相结合。1998 年 10 月，在郑州召开的全国金融学会上，已有学者首次呼吁在“金融计量学”上加强研究。

金融是现代经济的核心。金融业是一个特殊的风险行业。进入 90 年代，世界似乎进入一个金融危机频繁的多事之秋：巴林银行倒闭；日本大和银行亏损 10 亿美元；阿尔巴尼亚金融危机；始于 1997 年 7 月的亚洲金融危机，其“多米诺效应”波及亚洲几乎所有国家，至今让人心有余悸！

现代经济问题的中心是要建立健康、有序、能够抵御金融风险的现代金融体系。从“不要把鸡蛋放在同一篮子里”的谚语式的呼喊到 Markowitz 模型的建立与完善，投资者的投资理念日趋成熟。防范风险、化解风险已是金融领域的重要课题。人们研究风险问题已从定性分析逐步转化为定量分析及二者兼而有之。

1990 年，Markowitz 和 Sharp 因为他们的资产选择模型而获得诺贝尔经济奖；1997 年，Merton 和 Scholes 因为他们在期权定价模型的突出贡献而摘取诺贝尔经济奖桂冠。两次诺贝尔奖有着共同的特点：数学模型为现代金融理论建立了新的里程碑。

数学模型，即数学公式。她能把现实中许多现象和结论浓缩在简洁的符号之中。利用数学方法解决实际问题，首先要把实际事物之间的联系抽象为数学形式，这就是建立数学模型。

金融数学模型，就是用数学方法研究金融问题。在现代金融

理论中，数学方法越来越发挥其重要作用。

本书利用数学模型分析各种金融产品(证券、期货、期权)的价格，探讨投资最优化理论，从理论上引导市场化解、防范金融风险。

全书共十章，分为三篇。

基础篇(第一章～第三章)。本篇主要介绍利率、收益与风险等基本概念；作为全书基础，在第三章中简单介绍数学规划的计算方法，其中包含本人最近的一篇论文。

组合理论篇(第四章～第六章)。证券组合问题在许多决策领域都有应用。本篇主要介绍 Markowitz 模型，资本定价(CAPM)及套利定价模型(ATP)。这些模型模拟市场作出一些合理假设，逐步建立和完善，并得到实践检验(实证分析)。

衍生工具篇(第七章～第十章)。本篇主要介绍金融期货和金融期权，它们是最常用的金融衍生工具。期权是金融衍生工具的核心。期权行业是收入无限，风险有限的行业。马尔可夫模型及二叉树模型在期权定价等方面有着广泛应用。Black-Scholes 期权定价模型更是现代金融理论的精华。作为全书的结尾，介绍与探讨了金融工程与风险管理。

笔者在多年《证券投资学》及《市场调研》的教学中积累了一些材料，在广泛参阅国内外最新相关著作、掌握大量第一手资料的基础上，编著这本教材。在编著的过程中，笔者作了如下几个方面的尝试：

力求做到循序渐进、由浅入深、结构严谨；尽量做到新、趣、易。

新：内容新。主要介绍现代金融理论，特别是组合模型、期权定价模型。另外参考许多最新的论文，如近年来上海证券市场的实证分析；本人最近的研究成果，如二次规划求解的新方法及在风险管理中的应用。

趣：书中穿插一些优美的谚语，读者冥思之余稍感轻松。数学知识应用于现代金融理论，描述经济现象准确又富于启发性。

易：书中的数学模型尽量解释清楚，举例说明，通俗易懂。当然，为兼顾不同层次读者的要求，适当加入了一些专业性较强、程度较深的内容。在每章小结中对有关研究成果作了简单介绍。

本书注重实证分析，尽量利用中国证券市场的历史数据对模型进行检验和分析。

本书适合于有一定高等数学基础又对金融知识感兴趣的所有朋友；可作为应用数学、投资经济及金融专业的大专院校的教材，也可作为证券理论研究人员的参考书。

虽经多方努力，写成本书，由于作者水平和学识有限，缺点与错误在所难免。恳请有关专家和读者惠予批评指正！

本书初稿得到著名数学家、湖南省科协主席、长沙铁道学院副院长、博士导师侯振挺教授热情指导，侯教授在百忙之中抽空指点本书的写作并欣然写序，在此深表谢意。

本书得以出版，应感谢许多领导、同事及朋友的大力支持和热忱帮助。在此，特别感谢南华工商学院院长、经济行为与模式研究博士易江教授；感谢中国数量经济学会常务理事、金融工程研究部副主任、广东商学院万作新教授。两位教授主审本书并提出不少宝贵意见。梁智军、谢新道、肖伟林等同学的文字录入为本书初稿定型作了不少有益的工作。

作　者

1999.3 于广州

目　录

第一篇　基础理论篇

第二篇　组合理论篇

第三篇　衍生工具篇

曼哈顿岛＝24美元？

1626年，荷兰东印度公司从曼哈顿的土著居民手中购买该岛主权，所用金额为24美元。24美元买一座海岛，现在看来，简直不可想像——太便宜了！

果真如此吗？当年的24美元现在价值是多少？

第一章　现值理论及应用

第一节　资金的时间价值

一、资金的时间价值

在投资应用中，人们常说："钱能生钱。"现在的1元钱在将来不止1元钱，即指资金具有时间价值。

资金的时间价值是指资金随时间推移而发生的增值。

在投资决策中，考察资金的时间价值，正是考察使用该资金进行投资所须放弃的利益，即机会成本。机会成本是所放弃诸方案中盈利最大方案的利润值。例如某资金若投资于某工程，就放弃了将其存入银行或贷给他人的机会。若现有资金100万元，银行年利率为10%，贷给他人年利率为12%，则从机会成本的角度计算，这笔资金的时间价值应为12%（或者说12万元）。

一笔资金如果不用于投资则不会有资金增值，如资金不存入银行，不购买股票，而只是锁在自己的抽屉里，随着时间的推移，不仅不会增值，或许还要贬值。资金拥有者应当把资金投入到创造增值的活动中去，并有权获得资金时间价值带来的回报。

资金的价值随时间的变化而变化，其原因有如下几种：

①通货膨胀：在通货膨胀情况下，用商品和劳务购买力所表示的货币价值不断下降。

②风险：现在手头的 100 元是确定的，而明天是否仍是 100 元是不确定的，这种不确定性就是风险。风险对于投资者而言，是非常重要的。

③个人消费偏好：不同的人有不同消费习惯(或不同的消费偏好)，许多人偏好眼前的消费，而不是将来的消费。

④投资的机会：货币(或资金)正如其他商品一样，也具有价值，如现在得到的 1 万元现金与一年后得到的 1 万元相比，人们都会选择前者，因为现在的 1 万元存在投资的机会，如存入银行，假若年利率为 6%，则一年后将得到 10600 元。

二、资金的增值过程

西方经济学者分析货币的时间价值提出流动偏好说和时间偏好说两种理论，所谓流动偏好说是认为支付利息(代表货币的时间价值)是使用资金的报酬，而时间偏好说则认为利息是补偿时间的损失。

马克思的资金循环理论认为：资金不仅在时间上是连续的，而且在价值上是不断增值的。资金经过一段时间后，由 G 变为 G'，

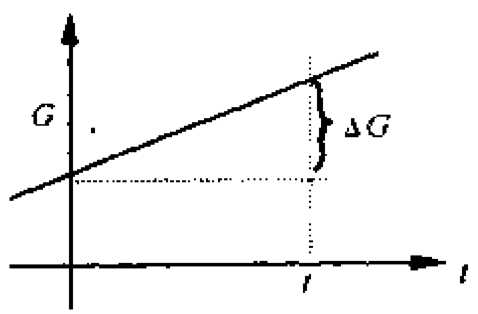


图 1-1 资金的时间价值

两者之间的差值 $G'-G=\Delta G$ 即为货币资金的时间价值。货币资金的时间价值具有三个特点：

(1)增量 ΔG 的大小是时间的函数，即：$\Delta G=f(t)$，如图 1-1。其中 t 为时间，ΔG 表示资金的增量(货币的时间价值)。

(2)ΔG 可能是正值也可能是负值。正值表示经营有效，负值表示发生亏损。

(3)ΔG 的大小反映出效率的高低。

效率就是单位时间的利用价值($\frac{\Delta G}{\Delta t}$)，效率高表示单位时间内的资金利用价值增大。

第二节　复利与现值理论

一、单利与复利

利息是资金的时间价值的一种表现形式，是使用资金应付出的代价。利率是利息所占本金的百分比，即：

$$利率=\frac{利息}{本金}\times 100\%$$

商业银行的利率分存款利率与贷款利率。存款利率高，对投资者有利，但是银行因为负债成本高，为了获利，它必须以更高的贷款利率贷出。而企业可能因为利息太高借不起钱，银行获利机会相应减少。因此，过高的银行利率不利于经济的发展。利率是宏观控制信贷的重要手段，中央银行的放款利率若增加(或减少)一个百分点，都会对社会发展产生重大影响。

计算利息的方式有两种：单利与复利。

(1)单利：仅按本金计算利息，利息本身不再支付利息的计息方式。假定一笔存款本金为 1 000 元，年利率为 10%，期限为 3 年，求 3 年后的本利和为多少。

分析：

3 年后的利息(单利)：$1000 \times 10\% \times 3 = 300$

本金：1000

本利和为：$1000 + 300 = 1300$(元)

即 $1000 \times (1 + 3 \times 10\%) = 1300$。

一般地，设本金为 P，年利率为 r，n 年后的本利和 A 为：$p(1+nr)$。即**单利模型**：

$$A = P \cdot (1 + n \cdot r)$$

单利计算方便，但不能反映资金周转的规律与扩大再生产的现实。在国外单利很少使用，一般仅用来与复利进行对比。

(2) 复利：即本金要逐年计息，利息也要逐年生息。它具有重复计利的效应，因此俗称"利滚利"。复利是现值理论中一个非常重要的概念。

二、复利计算

复利的计算方式有许多，下面介绍几种常见情形：

1. 基本公式

一次投资，一次回收，即一次支付复利公式。假定本金为 P，利率为 r，计算 n 年后的本利和 F。

分析：

第一期本利和：$P + Pr = P(1 + r)$

第二期本利和：$P(1 + r) + P(1 + r)r = P(1 + r)^2$

…………

第 n 期本利和：$P(1 + r)^{n-1} + P(1 + r)^{n-1}r = P(1 + r)^n$

复利公式：$F = P(1 + r)^n$

例 1-1 某企业进行技术改造向银行借款 10 万元，年利率 5%，第 2 年年末还清。按复利计算，第 2 年年末需向银行偿还本利共多少？

解：由复利公式　$F = P(1+r)^n$

$$F = 10(1+5\%)^2 = 11.025(\text{万元})$$

即第 2 年年末向银行偿还的本利和共 11.025 万元。

例 1-2　曼哈顿问题：

1626 年 24 美元，按 6% 的复利计算，本利和如下表：

表 1-1　　　　单位：美元

年份	价值
1626	24.00
1676	442.08
1726	3143.25
1776	14999.92
1826	2763021.69
1876	50893285.76
1926	937499015.11
1976	17268876484.38

说明：当年 24 美元，350 年后价值近 172.68 亿美元。由此可见，当年的投资，物有所值。

2. 连续复利公式

假定本金为 P，年利率为 r，每满 $1/m$ 年计息一次，按复利计算，求 n 年后的本利和。

分析：一年计 m 次利息，n 年共计息 mn 次，年息为 r，则每次计息为 r/m，按基本复利公式，n 年后的本利和为：

$$P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}$$

又假定 m 无限增大，即在越来越短的时间内将利息计入本金，其极限情况意味着随时将利息计入本金里。则满 n 年后的本利和为：

$$P_n = \lim_{m\to\infty} P(1+\frac{r}{m})^{mn} = Pe^{nr}$$

以上计算利用了极限基本公式： $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$，其中 e 为自然底数。

连续复利公式： $P_n = Pe^{nr}$

公式含义：本金为 P，年利率为 r，利息及时计入本金，n 年后的本利和为 Pe^{nr}。

3.复利计算的查表法

由于按复利公式计算比较麻烦，为方便计，将公式的系数值编成复利表（见附录1）。当利率为 r，期数为 n 时，由 P 求 F 的复利系数记为 $(F/P, r, n)$。查复利表可直接计算复利。

例 1-3 某方案投资 100 万元，投产后的资金收益率为 6%，计算第 5 年年末的本利和。

解：查表法步骤如下：

(1) 列出查表公式：$F = P(F/P, r, n) = 100(F/P, 6\%, 5)$

该式表示为："本金 100 万元，年利率为 6%，5 年复利，求本利和。"

(2) 从普通复利表中查到 6% 利率的页上，再查 (F/P) 栏与 $n = 5$ 的交叉格内的数值，得 1.3382。

(3) 代入计算：$F = 100 \times 1.3382 = 133.82$（万元）

三、名义利率与实际利率

贷款不仅可以具有固定的年利率，也可以在一年中具有月利率，按月进行复利计算，这样一年就要进行几次复利计算，这种投资过程称为具有复利频率的投资。

特别指出，对于具有复利频率的贷款活动或投资活动，有两种年利率，即名义年利率和实际年利率（有效年利率）。

例 1-4 一张 100 元的信用卡，标明利率为月息 1.5%，由于

利息结算总在年末，所以用 12 乘以 1.5% = 18%，称为名义年利率 r，这并不是实际结算的利率，因为在这 1 年中 12 个月是按复利计算的。

假如这张信用卡在 1 年内没有花过，那么在年末结算时，按复利计算应当支付：

$$F = 100 \times (1 + 0.015)^{12} = 119.56(\text{元})$$

总利息为 19.56 元，即年利率为 19.56%，高于 18% 的名义利率。

一般来说，若求复利的频率 m（上例为 12）以及名义年利率 r 为已知，则实际年利率 i 由下式决定：

$$(1 + \frac{r}{m})^m = 1 + i$$

故

$$i = (1 + \frac{r}{m})^m - 1$$

上式说明名义利率与实际利率之间的关系。

如名义年利率为 8%，每半年复利一次（$m = 2$），则实际年利率为：$i = (1 + 0.04)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\%$。

一般实际年利率均大于名义年利率。

四、现值理论

现值理论讨论资金的现在价值、终值及折现，它是价格理论的基础。

现值 —— 未来的货币收入的现在价值，或未来的某一时刻的货币资金按某种利率折算到现在的值。

终值 —— 将来值，或称期望值。在现在时刻看，发生在未来某时刻一次支付（或收入）的货币资金。

现值公式 —— 将终值按一定利率折算成现值的表达式。

设 P 表示本金（现值），利率为 r，n 年后的本利和（终值）记为

F。由复利公式 $F = P(1+r)^n$ 可得：

$$P = \frac{F}{(1+r)^n}$$

上述公式称为现值公式(或折现计算)。

其中 F 表终值，$\frac{1}{(1+r)^n}$ 称为折现系数，记为 $(P/F, r, n)$。现值公式可记为 $P = F(P/F, r, n)$。

例 1-5 某企业拥有两张未到期的期票，第一张期票面值为 10000 元，2 年后到期，另一张期票面值 15000 元，3 年后到期。现企业急需用钱，所以拿这两张未到期期票进行贴现(即换取现金)。若接受此期票者期望得到 7% 的资金年利率，那么他最多付多少钱能收购此期票？

解：对这两种期票分别计算现值，然后求和。

所求折现值为：

$$\begin{aligned} P &= \frac{10000}{(1+0.07)^2} + \frac{15000}{(1+0.07)^3} \\ &= 10000(P/F, 0.07, 2) + 15000(P/F, 0.07, 3) \\ &= 10000 \times 0.8734 + 15000 \times 0.8163 \\ &= 20978.5(\text{元}) \end{aligned}$$

第三节　银行按揭的数学模型

市场经济时代，银行为了搞活业务，企业为了促进产品推销，纷纷推出各种各样的银行按揭。如商品房银行按揭，购车银行按揭等，它们的共同特点是：以客户的信誉作担保，或以一定的资产作抵押，先在银行贷款，然后再分期等额偿还。银行为了方便客户查询，一般制成一张按揭表，客户可查表计算，选择按揭期限与方式。

按揭表如何得来，其数学模型是什么？

银行按揭可归结为数学问题：贷款 P 元，年利率为 r，分 n 期

等额偿还，每期应偿还多少？

分析：考虑资金的时间价值，不能简单地平均处理。应考虑偿还数值的折现。一般以一个月为一期，月末偿还，年息为 r，月息 $i = r/12$，设每期偿还 A 元，则 n 期还款折现为现在价值的总和应等于贷款总额（不考虑手续费及中间交易税等项）。

由现值公式可知：

第一期还款 A 的折现值为　$\dfrac{A}{1+i}$

第二期还款 A 的折现值为　$\dfrac{A}{(1+i)^2}$

$\vdots$

第 n 期还款 A 的折现值为　$\dfrac{A}{(1+i)^n}$

所以
$$P = \frac{A}{1+i} + \frac{A}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{A}{(1+i)^n}$$
$$= \frac{A}{i}\left[1 - \left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right]$$

故
$$A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

上述公式即银行按揭的数学模型，又称资金还原公式（已知 P 求 A）。$\dfrac{i}{1-(1+i)^{-n}}$ 称为资金还原系数，常用 $(A/P, i, n)$ 表示，可查复利表计算。

例 1-6　某人贷款金额为 20 万元，年利息为 6%，计划办理 5 年银行按揭，每个月月末应向银行存款多少钱？

解：已知 $P = 200000$ 元，$i = 6\%/12 = 0.5\%$，$n = 5 \times 12 = 60$（月）。

由银行按揭数学模型可知，每月偿还数额 A 为：

$$A = P \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$
$$= P(A/P, i, n)$$

$$= 200000(A/P, 0.5\%, 60)$$
$$= 200000 \times 0.01934 = 3868(元)$$

按5年银行按揭方式，每月月末应还贷款3868元。

上例中：

① 客户5年实际还款总数为$3868 \times 60 = 232080$(元)。差额即所付利息总额：$232080 - 200000 = 32080$(元)，即5年累计付息32080元。

② 按揭时间越长，每个月偿还数量越少，减轻客户的偿还压力，但按揭时间越长，付出的利息越高。

③ 上述模型中，没有考虑年息的变化，即假定年利率是不变的。实际生活中，银行的利率随着经济情况经常变化(降息或加息)，相应的每月偿还资金随利率作一些调整。

④ 大型商品的分期付款方式，类似于银行按揭。

第四节　证券价格的评估模型

“天下熙熙，皆为利来；天下攘攘，皆为利往。”

——司马迁《史记·货殖列传》

投资可以获利。人们之所以愿意购买证券，是因为它能够带来预期收入(差价与利息)。证券一般常指股票、债券等有价证券。证券的价格受多种因素的影响，如政治、经济、心理等，但决定性因素是股息(债息)及银行利率。而证券的价格也有许多形式，大体可分为：理论价格与市场价格。理论价格，又称内在价值。在理性市场中，市场价格总是围绕内在价值上下波动。

人们持有股票，是为了从中获取收益。从理论上说，股票的价格可以看作是股票投资者对未来各期每股预期收益的现值之和，是一种适当利率的贴现。

设第 t 期每股预期股息收入为 D_t，贴现率为 r（或股东要求的实际收益率），n 期后股票的理论价格记为 W，则：

$$W=\frac{D_1}{1+r}+\frac{D_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{D_n}{(1+r)^n}$$

设 $t-1$ 时刻的股利为 D_{t-1}，t 时刻的股利为 D_t，从 $t-1$ 到 t 时间内，股利增长 $\Delta D=D_t-D_{t-1}$，股利增长率 g_t 为：

$$g_t=\frac{D_t-D_{t-1}}{D_{t-1}}$$

一、零成长模型

假定未来各期预期股息不增长（或增长率为 0），即各期股息固定为 D，或 $D_1=D_2=\cdots=D_n=D$，则：

$$W=\frac{D}{1+r}+\frac{D}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{D}{(1+r)^n}+\cdots$$

前 n 项的和为：

$$W_n=\frac{D}{r}\left[1-\left(\frac{1}{1+r}\right)^n\right]$$

当投资者持有期很长时，即 $n\to\infty$，有

$$W=\frac{D}{r}$$

上述公式即零成长模型。

当贴现率 r 为银行利率时，上述公式变为：

$$\text{股票价格}=\frac{\text{股息}}{\text{银行利率}}$$

上述公式具有非常重要的意义：它表明股价与股息成正比，与银行利息成反比。它反映降息促使股价上扬这种股市现象。

假如 A 公司每年派发现金股利 2 元，贴现率为 10%，用零成长模型公式可计算出该公司股票价格（内在价值）为 2/0.10 = 20 元。若该股票市场价格是 18 元，则该股票被估价过低，仍有投资价

值。

二、固定成长模型

假设股利以恒定的增长率 g 增长，设第一年股利为 D，则第二年股利为 $D(1+g)$，第三年股利为 $D(1+g)^2$……

股票的价格 W 则为各期股利的折现之和，即：

$$W = \frac{D}{1+r} + \frac{D(1+g)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{D(1+g)^{n-1}}{(1+r)^n} + \cdots$$
$$= \frac{D}{r-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right] + \cdots$$

(若 $g > r$，当 $n \to \infty$，$W \to \infty$。这不大可能。)

在永久持有股票且 $g < r$ 时，上式可简化为

$$W \underset{\substack{g<r \\ n\to\infty}}{=} \frac{D}{r-g}$$

将上式与零成长模型比较：

$$\Delta W = \frac{D}{r-g} - \frac{D}{r} = \frac{gD}{r(r-g)} > 0$$

这就是前景看好、增长潜力较大的公司股票市价较高的理论依据。ΔW 被称为增长机会现值(Present Valule of Growth Oportunities, PVGO)，根据 PVGO 的值可将股票分为三种：

$$\text{PVGO}\begin{cases} > 0 & \text{增长型股票}, g > 0 \\ = 0 & \text{稳定型股票}, g = 0 \\ < 0 & \text{负增长型股票}, g < 0 \end{cases}$$

可见，股利恒定增长评估模型也适用股利恒定减少的情况，此时 $g < 0$。

零成长模型实际上是固定成长模型的一个特例。当固定成长率为零时，固定成长模型变为零成长模型。

三、三阶段模型

股利长期不变，或永久以固定增长率增长模型都是不现实的。任何公司的发展都是阶段性的，很多公司在起步阶段发展快，经过一段时间调整，才进入稳定的发展阶段。为此，我们设想股利变化经过三个阶段。这种模型也许更接近现实。

第一阶段：股利以固定比率 g_0 增长，持续 k 年；

第二阶段：从 $k+1$ 到 n 年，经历一个转换时期，在这一时期，股利增长率以直线形状变化；

第三阶段：进入持续稳定状态，股利以新的比率 g_n 恒定增长。如图 1-2。

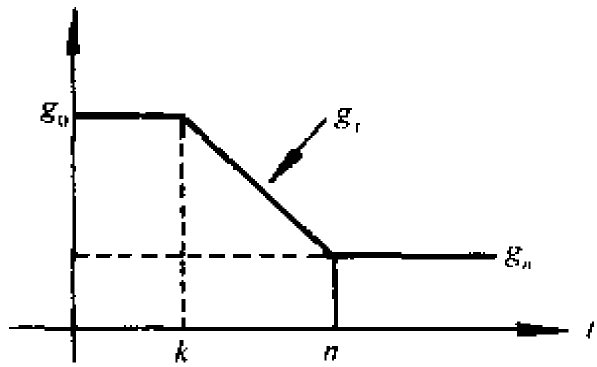


图 1-2　三阶段模型

第二阶段中增长率由直线方程决定：

$$g_t = g_0 - (g_0 - g_n)\frac{t-k}{n-k}$$

当 $t = n$ 时，正是过渡期的末尾。由直线方程可知，给定 g_0，k，n 及 g_n 和最近一年的股利 D_0，就可以计算出任何将来时间的股利，然后再给定一个合适的折现率，可以计算出预期股利的现在价值。

其股票价格可由下式估计得到：

$$W = D_0\sum_{t=1}^{k}\left(\frac{1+g_0}{1+r}\right)^t + \sum_{t=k+1}^{n}\left(\frac{D_{t-1}(1+g_t)}{(1+r)^t}\right) + \frac{D_{n+1}}{(1+r)^n(r-g_n)}$$

其中 D_0 为最近一年的股利，$D_{n+1} = D_n(1+g_n)$ 为第 $n+1$ 年的股利。

例 1-7　某种股票股利在最近两年内将以 6% 的比率增长，而在之后的 3 年中增长率以每年递减 1% 的速度减至 3%，并保持不变。经估计，适当的折现率为 8%。假定股票前一年的股利为 1 元，计算每一年的增长率与股利估计，并求出预期股利的现在价值。

解：对于每一年的增长率与股利估计，结果如表 1-2 所示。

表 1-2　股利增长变动资料

年份		增长率(%)	股利
一阶段	1	6	$1\times1.06 = 1.06$
	2	6	$1.06\times1.06 = 1.124$
二阶段	3	5	$1.124\times1.05 = 1.18$
	4	4	$1.18\times1.04 = 1.227$
	5	3	$1.227\times1.03 = 1.264$
三阶段	6	3	$1.264\times1.03 = 1.302$

预期股利的现在价值(即股价)为：

$$W = \frac{1.06}{1.08} + \cdots + \frac{1.264}{(1.08)^5} + \frac{1.302}{(1.08)^5(0.08-0.03)} = 22.36$$

三阶段股利折扣模型的最后一部分，实际上是固定成长模型，即前两阶段退化(不存在，或 $n = 0$)时，三阶段模型变为固定成长模型。

三阶段模型计算比较麻烦，且无法利用模型直接求折现率，为此，有人已提出了改进模型如 H 模型，P/E 模型等，限于篇幅，其他情况略。

四、债券价格的评估模型

债券价格的评估与股票相似，也以其收益的现值作为该种债券的评估价。债券价格的评估根据付息方式不同有两种情况。

1. 每年支付利息到期还本的债券

记 PV 为债券的价格，C 为年利息收入，D 为债券面值，n 为债券尚存的偿还期，r_i 为各年的贴现率。则：

$$PV = \frac{C}{(1+r_1)} + \frac{C}{(1+r_2)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r_n)^n} + \frac{D}{(1+r_n)^n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r_i)^i} + \frac{D}{(1+r_n)^n}$$

若将各年的贴现率近似地用一个平均的贴现率 r 代替，则上式可简化为：

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{D}{(1+r)^n} = C\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} + \frac{D}{(1+r)^n}$$

2. 到期一次还本付息的债券

这类债券的评估模型比较简单，如下式所示：

$$PV = \frac{nC + D}{(1+r)^n}$$

由于债券的面值、期限、发行利率在发行时已经确定，债券价格的高低完全由贴现率决定。如果银行利率上调，贴现率增大，债券的价格就会下跌，甚至跌破面值；相反，贴现率下降，债券价格上升。

本章小结

本章的基础是复利公式和现值公式。它们是金融领域中最基本的数学模型，由此可推出许多有意义的金融数学模型。

复利计算常用复利系数表查表计算。关于复利计算，重点介绍两种情况：简单复利与连续复利。复利公式还有许多其他形式，如定差序列和几何序列的复利计算等，但它们均可转化为基本复利公式进行计算。（参见：贾春霖的《技术经济学》[2]）

银行按揭的数学模型的实质是一个贴现公式，又称资金还原公式，它在市场经济社会中应用很广。

关于证券价格的评估模型，重点介绍股票价格的几种常见模型：零成长模型、固定成长模型及三阶段模型。其他一些模型如留利固定模型、P/E 模型等都非常有意义。限于篇幅，只得舍去。（参见：刘婵的《投资学》[27]）

二叉树模型是确定金融产品价格的一种典型模型，将在以后的章节（第七章、第九章）中介绍。

第二章　收益与风险

“世界上没有免费的午餐。”
——华尔街名言

金融市场的基本职能不仅在于分配资金，而且也分散风险。收益和风险是投资学中的中心问题，其他问题都围绕这个中心而展开。本章主要介绍投资收益与风险的概念及测定方法。

第一节　收益与收益率

一、收益与收益率

投资者进行投资的目的是获取一定的收益。

收益(报酬，return)，即收入或资本的增益。

收益率(报酬率)：收益总额占投资总额的百分比。

$$收益率=\frac{总收益}{投资总额}\times 100\%$$

收益率的计算方法因投资期间的不同而不同。投入的本金在现在，而将得到的收益发生在未来，这便涉及到货币的时间价值及现值理论。下面以股票为例，说明证券投资的收益率。

1.单期收益率

单期收益率是指某一期间股票价值变动额加上当期股利收入与买入价格的比率。它可以衡量投资者财富增加或减少的速度。

证券投资的收益有两种：买卖差价与息(现金股利或债息)。

设 P_t 为 t 期末的市场价格(或卖出价), P_{t-1} 表示期初市场价格(或买入价), C_t 表示 t 期间取得现金收入(股息或债息), R_t 表示第 t 期的收益率,则:

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}}$$

例如,年初以 100 元买进一份股票,年末以 108 元卖出,年内收到股息 2 元,则股票收益率为:

$$\frac{(108 - 100) + 2}{100} = 10\%$$

2. 多期收益率

假设某投资者在某一季初买入某股票,在下一季末卖出,连续进行四季交易,其交易价格及投资收益率见表 2-1。

表 2-1 单位:元

每季末	每季股利	每季末股票价格	每季收益率
0	0	20	
1	0	20.80	0.04
2	0	21.63	0.04
3	0	22.50	0.04
4	0	23.40	0.04

分析:投资者的每季投资收益率为 4%,年报酬率为 16%,但如果该投资者年初以每股 20 元买进,年末以每股 23.40 元价格卖出,则其年收益率为 17%。两者的计算方法不同使得投资收益率不同,这主要是由于收益率定义期限不同所致。

表 2-1 收益不考虑分红派息因素,完全由买卖差价决定。

投资对于多期间股票收益率的测定,必须考虑各一期间的各时间收益率,然后求平均数。

二、平均收益

常见的平均收益率计算方法有如下两种：

1. 算术平均数

如果设 R_i 表示第 i 期的投资收益率，n 表示持有期数，平均收益率计为 $\bar{R}$，则：

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \cdots + R_n}{n}$$

例如，每季报酬率分别为 10%、12%、−2% 和 8%，那么一年的平均收益率为：

$$\bar{R} = \frac{10\% + 12\% + (-2\%) + 8\%}{4} = 7\%$$

持有期间平均收益率为 7%。

计算平均收益率有时采用时间加权平均数计算(略)。

2. 几何平均数

设 R_t 为 t 期收益率，P_t 为 t 期末的每股市场价格，C_t 为 t 期股利收入，则任意 t 期收益率为：

$$R_t = \frac{(P_t - P_{t-1}) + C_t}{P_{t-1}} = \frac{C_{t-1} + P_t}{P_{t-1}} - 1$$

记 $\bar{R}$ 为收益率的几何平均数，则：

$$1 + \bar{R} = \sqrt[n]{(1 + R_1)(1 + R_2)\cdots(1 + R_n)}$$

几何平均数计算复杂，有待改进。

在投资过程中，由于股票红利及股权出售等情况的剧烈变化，本期红利加上股票的价格变化并不能总是准确地表示股东总收益，所以收益率的几何公式在实际应用中常需要调整。设 V_t 为第 t 期的投资收益，V_{t-1} 为 $t-1$ 期的投资收益，R_t^* 表示第 t 年末投资收益率，则：

$$R_t^* = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1$$

按几何平均数计算，平均收益率 R^* 满足：

$$1 + R^* = \left[\frac{V_1}{V_0} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdots \frac{V_n}{V_{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{V_n}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}}$$

或
$$V_n = V_0(1 + R^*)^n$$

这正是连续复利公式。

算术平均数是以保持一定投资规模来计算收益；而几何平均数则是利用再投资，即股东把所获股利及增值用于再投资，因而可利用复利公式计算收益率。

上述公式同样适用于其他一些金融资产的收益率计算。

第二节　风险与风险测定

"等候环境对他的事业完全有利才动手的人，将永远不会成功。"

——马丁·路德

一、风险(risk)

投资者进行投资是为了获取一定收益，但是投资发生在现在，收益是未来的收入。受时间等因素的影响，未来的收益可大可小，甚至遭受损失，这种收益的不确定性即是风险。

投资风险主要有市场风险、利率风险、购买力风险、违约风险及财务风险等。

市场风险是指整个投资市场的价格水平发生波动而引起的投资风险。证券市场的价格整体水平可以用股票价格指数来表示。

利率风险是指市场利率变动引起的投资收益变动的可能性。根据证券价值的基本模型，市场利率升高时，证券的价值会下降，投资者便抛售证券，把资金投向利率升高后的银行储蓄，致使证券

价格下跌;反之,当市场利率下跌时,证券的价值会上升。结果使得证券的收益率向变动后的市场利率靠拢,达到新的均衡。

购买力风险是指由于通货膨胀的影响,投资者的实际收益下降的风险,故而又称为通货膨胀风险。

通货膨胀引起物价上涨,货币实际购买力下降,使得投资者的货币收入(又称为名义收益)扣除了物价上涨因素以后的实际收益率下降。用 R_r 表示名义收益率,R_f 表示实际收益率,I 表示通货膨胀率,则:$R_f = R_r - I$。

例2-1　某投资者以950元购买面值为1000元、一年后到期、票面利率为10%的国债,通货膨胀率5%,问该投资者一年后实际收益率是多少?

解:该投资者的名义收益率为:

$$\frac{1000-950}{950}=15.79\%$$

则实际收益率为:$15.79\% - 5\% = 10.79\%$

违约风险是指公司的财务状况恶化,不能按期支付到期的债券而造成证券价格下跌的风险。

经营风险是指由于经营不善或经营环境变化引起的风险。从经营生产不同阶段看,经营风险又可再分成投资风险、生产风险、销售风险,但这三种风险紧密联系,尤其是投资,往往受生产风险和销售风险的影响和制约。

随着市场经济投资体制的建立,过去由国家承担的投资风险与贷款风险转由企业和贷款银行承担。因此,加强投资风险分析,提高预测风险,承受风险和运用各种手段减低风险的能力,成为关系企业生存和发展的重大问题,也是投资管理的重要内容。

证券投资风险可以分成系统风险与非系统风险。

系统风险是指因某种全局性因素的影响而引起的证券市场上所有投资收益的变动的风险。这些全局性因素包括政治、经济、社

会等方面的因素。它们来自企业的外部，对所有企业的影响相同，即使采用投资多元化方法也不可分散。如市场风险、利率风险、购买力风险等。

非系统风险是指由于一些特定因素的影响，引起某些证券投资收益的变动的风险。这些特定因素往往来自某个企业的内部，对其他企业没有影响。用投资多元化方法可以使不同证券的非系统风险相互抵消。因此，非系统风险又称为可分散的风险。

二、风险的测定

风险一般指遭受损失的可能性，或收益的不确定性，这种不确定性常有两种方法确定：方差及 Beta 法。

1.方差与标准差

方差表示一组变量与其平均值的偏差平方和的平均数，是测定离散程度的一种常见统计量，记为 σ^2。投资学上，方差表示收益的各种可能值与其期望值的偏离程度。

基本公式为：

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n}(R_i - E)^2 P_i \\ &= P_1(R_1 - E)^2 + P_2(R_2 - E)^2 + \cdots + P_n(R_n - E)^2\end{aligned}$$

其中 R_i 为第 i 期收益(率)，E 为各期收益的期望值，P_i 为第 i 期获得收益(率) R_i 的可能性大小，即概率。

方差大，表明收益与其期望值的偏离程度大，即收益的不确定程度大，因而风险大；反之，方差小，风险也小。

标准差即方差的平方根，用 σ 表示：

$$\sigma = \sqrt{\sum P_i(R_i - E)^2}$$

例 2-2 有两个投资方案，其年平均利润可能值及其发生概率如下表，试分析其风险大小。

表 2-2　年平均利润率　（万元）

i	市场需求	发生概率 P_i	年利润 X_i	
			方案 1	方案 2
1	大	0.25	70	30
2	中	0.50	8	7
3	小	0.25	-50	-10

解：先求出两投资方案的利润期望值：

$$E(1) = 70 \times 0.25 + 8 \times 0.50 + (-50) \times 0.25 = 9(\text{万元})$$

$$E(2) = 30 \times 0.25 + 7 \times 0.50 + (-10) \times 0.25 = 8.5(\text{万元})$$

因为 $E(1) > E(2)$，照理应选方案 1，进一步分析两个方案利润值的分布情况，可发现选择方案 1 并非上策。方案 1 利润分布范围为 $-50 \sim 70$，而方案 2 利润分布范围为 $-20 \sim 30$。显然方案 2 的利润概率分布比方案 1 密集。为此，计算两个方案利润的标准差：

$$\sigma_1^2 = 0.25 \times (70-9)^2 + 0.50 \times (8-9)^2 + 0.25 \times (-50-9)^2 = 1801$$

$$\sigma_2^2 = 0.25 \times (30-8.5)^2 + 0.5 \times (7-8.5)^2 + 0.25 \times (-10-8.5)^2 = 202.25$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\sigma_1^2} = \sqrt{1801} = 42.44(\text{万元})$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\sigma_2^2} = \sqrt{202.25} = 14.22(\text{万元})$$

显然 σ_1 比 σ_2 大得多，也即方案 1 的风险比方案 2 大得多。而两方案的利润期望值又接近，故应选择方案 2。

用标准差可以比较两个投资方案的风险大小。当两个方案的评价指标期望值相同或相近时，一般的投资者均会选择风险小的方案。当两个方案期望值不同时，方案选择依赖于投资者对风险的忍受程度（即风险偏好）。参见下一节。

2. Beta(β) 分析

用 Beta 估量风险叫做 Beta 分析。在国外，有许多证券咨询服务公司把所有股票的 β 值计算出来供投资者参考。由于研究人员众多，服务对象广泛，形成所谓 β 行业，由此可见其重要性。

Beta 分析，起源于统计上的回归分析。由于世界上的事物是相互联系，相互制约的，因而，一种事物的变动，常受其他事物变动的影响。例如，子女身高受父母身材影响，即子女的身材高或矮，随父母高矮而定，但父母的高矮不受子女的影响。因此，衡量一个人的高矮要追溯(回归)到父母身上去。根据这种联系，利用回归分析法来观察二种(或更多)互有联系的事物之间相互变动的关系，以便进行估计推算。

齐涨共跌现象：在市场兴旺时，大多数股票跟着上涨，在市场萎缩时，大多数股票也随之下跌；有时会因有关政治或经济上一条重要新闻的传播，导致群起抢购狂抛，使股票价格齐涨共跌。

如何用定量的方法描述这种“齐涨共跌”现象？

换句话说，如何衡量一种证券的收益对市场平均收益的敏感性或反应程度？

Beta分析法就是以 Beta 系数来代表某种证券受市场影响而产生的价格波动性的大小，以测定这种证券的风险程度。

Beta 可用下述基本回归方程式求得：

$$y = \alpha + \beta x + \varepsilon$$

其中，y 为证券收益率；α 为直线与 y 轴的截距；ε 为剩余收益，由于错误或随机因素产生，理论上等于 0。

β 就是这条直线的斜率，即 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$，表示相对于市场的总平均收益率而言，某种证券收益的平均收益率。

β 的数值分析：

$\beta = 1$，即市场收益率上涨 1%，这种证券的收益率也提高

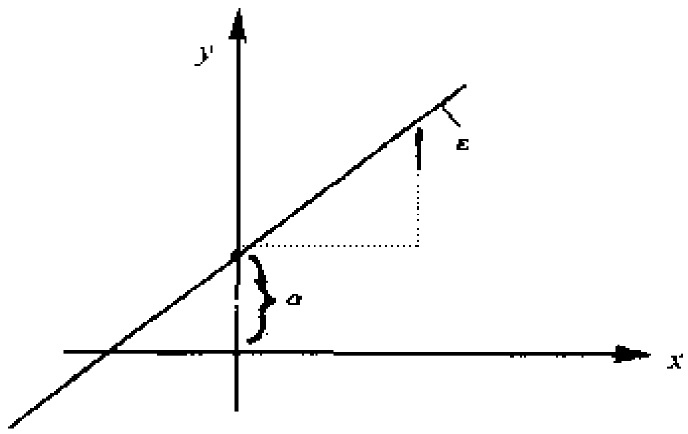


图 2-1　回归方程与 $\alpha, \beta, \varepsilon$ 的关系

1%，其波动性与市场一样；

$\beta = 1.5\%$，即市场收益率上涨 1%，证券收益提高 1.5%，反之，市场收益率下降1% 时，证券收益率将降低 1.5%，其波动性比市场大 0.5%；

$\beta = 0.5\%$，即市场收益率上涨或下跌 1%，证券收益率只提高或跌低 0.5%。

由此可知，β 的大小表示证券收益率的波动值大小，从而说明其风险程度。β 大的证券风险大，β 小的证券风险小。

由回归方程可以看出，β 不是全部风险，而只是与市场有关的一部分，另外一部分风险为 $\alpha + \varepsilon$，是与市场无关的，也就是说不受市场价格变动的影响，而只受企业本身盈利能力的变动的影响。

标准差是度量证券本身在各个不同时期收益变动的程度，其比较的基础是证券本身在不同时期的平均收益；Beta 是度量某种证券(或一组证券）的收益相对于市场的平均波动程度，其比较的标准是市场的波动程度。

α 与 β 都是利用统计资料计算的，说明过去的情况。预期收益是预计未来的收益，不一定与过去的完全一样，这只是提供一种预

测的依据而已。

第三节　风险偏好与效用函数

一、风险偏好

设有一投资者欲将其 100 万元资金用于证券投资，三种证券的预期收益如表 2-3，为方便起见，把未来经济活动的发展变化只分为景气和不景气两种状况，每一种情况发生的可能性为 50%，即概率为 1/2。

表 2-3　预期收益的概率分布

经济状况	不景气	景气
证券 1	10	10
证券 2	6	14
证券 3	9	13
发生概率	0.5	0.5

证券 1 的预期收益 $= 100 \times 0.5 + 10 \times 0.5 = 10$

证券 2 的预期收益 $= 6 \times 0.5 + 14 \times 0.5 = 10$

证券 3 的预期收益 $= 9 \times 0.5 + 13 \times 0.5 = 11$

投资者应如何选择投资方案呢(即选择哪种证券)?

不同的投资者可有不同的选择方法。

分析：证券 1 在景气或不景气状态下，预期收益都是 10 元，虽不承担风险，但也失去了获得巨大收益的机会，选择结果具有安全性。这种不论将来发生何种情况，其收益都确定的投资对象称为“**安全资产**”；证券 2 和证券 3，在好的情况下，其收益会高于平均值，但在不景气时，收益低于平均值，收益有一定的波动，即风险。这种将来的收益不确定的投资对象称为“**风险资产**”。

有些投资者因偏好安全性而选择证券1；有些投资者即使知道承担一定程度的风险，但为了取得较高的预期收益而选择证券3；更有甚者，有人偏好风险，愿意承担高风险，把赌注下在获取巨大收益的可能上而选择证券2。

此时，人们的投资抉择完全决定于投资者对风险的容忍程度。根据对风险的容忍程度，我们把投资者分成三种：

1.风险回避者

尽可能地回避风险，在期望收益相同的条件下选择风险小的投资方案的投资者。对于风险回避者来说，如果没有与风险相称的风险报酬，是绝对不会选择风险资产的。大多数投资者都是风险回避者（又称风险厌恶者）。

2.风险偏好者

不考虑风险的大小，而仅以期望收益的大小为标准来选择投资对象，有的甚至偏好高风险。选择高风险就是冒遭受高损失的风险而争取获得高收益的机会，他们相信收益是风险的补偿，高风险伴随高收益。

3.风险中立者

依据无差别期望收益的大小来决定其投资行为的投资者。对于风险中立者，证券1与证券2是无差别的投资对象。

二、效用函数

在不确定条件下，投资者在进行投资选择时，不仅需要考虑将来收益的期望值，而且也要考虑损失的可能性即风险。

下面引入一个典型的例子：**圣·佩特斯伯格反论。**

假定有一投币游戏，以投出无偏度的硬币正面为胜。如果正面在第一次投掷中出现一次赢利2分，在第二次投掷中出现一次赢利4分，在第三次投掷中出现一次赢利8分，当在n次出现时，所支付的奖金就是2^n分。由于硬币无偏度，正面与反面出现的概率各

为 1/2，故参与这个游戏的期望收益可以用下式计算：

$$E(R)=\frac{1}{2}\times 2+(\frac{1}{2})^2\times 2^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n\times 2^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n\times 2^n=\infty$$

即这个游戏的数学期望值无穷大。

理论上赌金如此之高，投资者该参与这个游戏。但实际上却没有这样的投资者。因为在将来收益不确定的情况下，个人所希望的不仅仅是收益期望值的最大化，而且还有伴随收益的"期望效用"，即期望的满足程度的最大化。

期望效用：即一种投资给投资者带来期望收益的满足程度。由于投资者对收益风险的不同偏好，其期望效用也各不相同。

常用 $U(R)$ 表示收益的效用函数。

例 2-3 设两种股票 A，B 的价格及概率如下表：

表 2－4

A		B	
股价 P_A	概率	股价 P_B	概率
20	0.5	30	0.5
30	0.5	20	0.25
		40	0.25

且投资者的效用函数为 $U(R)=20+\sqrt{R}$，投资者应如何选择？

解：

① 计算期望收益：

$E(R_A)=0.5\times 20+0.5\times 30=25$

$E(R_B)=0.5\times 30+0.25\times 20+0.25\times 40=30$

② 计算方差：

$$\sigma_1^2=0.5\times(20-25)^2+0.5\times(30-25)^2=25$$

$$\sigma_2^2 = 0.5 \times (30-30)^2 + 0.25 \times (20-30)^2 + 0.25 \times (40-30)^2 = 50$$

③ 比较效用函数期望值：

$$E[U(R_A)] = 0.5 \times 24.472 + 0.5 \times 25.477 = 24.975$$

$$E[U(R_B)] = 0.5 \times 25.477 + 0.25 \times 24.472 + 0.25 \times 26.325 = 25.437$$

由于期望值不同，不能只用方差大小进行选择，需用期望效用来选择，而 $E[U(R_A)] < E[U(R_B)]$，故投资者应选择股票 B。

图 2-2 给出不同风险偏好投资者的效用函数图。其中横轴表示投资收益，纵轴表示效用水平。

风险回避者，其收益的效用函数呈上凸型，如图 2-2a，即收益每追加一个单位，期望效用即边际效用也提高，但其程度呈递减趋势。即收益边际效用呈递减趋势。如：$U(R) = \sqrt{R}$，或 $U(R) = \ln R$ 等，其一阶导数 $U'(R) > 0$，二阶导数 $U''(R) < 0$。

风险偏好者，其期望收益的效用函数呈下凸型，如图 2-2b。收益的边际效用呈递增状态。即：

$$U'(R) > 0,\ U''(R) > 0$$

风险中立者，其收益边际效用是一定的，如图 2-2c。其收益相应效用水平为直线型，即：

$$U'(R) > 0,\ U''(R) = 0$$

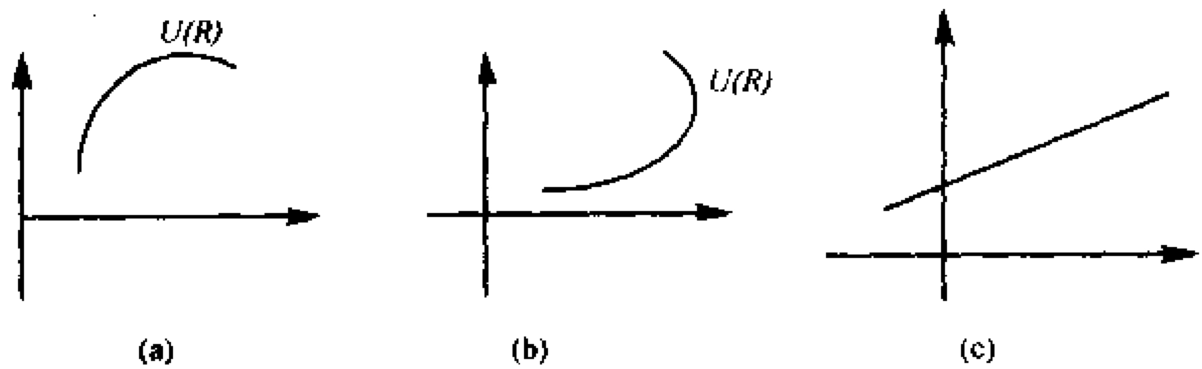


图 2-2

第四节　风险决策分析

前面，已介绍了用预期收益的偏差来测定风险的大小的方法。不同的风险偏好者对风险有不同的选择方式。

一般情况下，在收益相同（或相近）的情况下，尽可能选择风险小的方案；在风险相近的情况下，尽可能选择收益大的方案；在收益与方差都不相近的情况下，不仅要考虑预期收益最大化，而且还须考虑预期效用最大化，即收益所带来的效用最大化。效用最大化为现代投资组合分析提供了一套有益的分析工具。

前面讨论的各种情况，是以确定的概率作为条件的，但是如果其概率不能确定，我们就难以直接估算它的期望收益与风险。为此，我们引入以下决策准则。

一、不确定情况下的投资决策

不确定情况下的投资决策主要研究在概率无法预测的情况下的决策方法。这种决策方法适用于以下情况：有几项可行性方案待选择，每个选择方案都存在几种不同的自然状态（如有不同的收益值）；每种方案，在各种状态下的收益值虽然已知，但每一种收益可能实现的概率并不知道。

例 2-4　有 5 个方案，各有 3 种自然状态，每个状态的收益如下表：

表 2-5　收益情况表　　单位：万元

方案	甲	乙	丙
1	－4000	1000	2000
2	1200	1000	4000
3	－2000	1500	6000
4	0	2000	5000
5	1000	3000	2000

按照不同的法则对其决策。

1.拉普拉斯法则

现在假定决策者不能或不愿预测各种自然状态出现的概率。在这种情况下就应该认为各种自然状态出现的机会均等,即有相等概率,这条原则称为拉普拉斯法则。

上述原则用于上例,每种自然状况出现的概率均为1/3,各种平均收益如下:

方案1的平均收益:$(-4000+1000+2000)/3<0$

方案2的平均收益:$(1200+1000+4000)/3=2066$

方案3的平均收益:$(-2000+1500+6000)/3=1833$

方案4的平均收益:$(0+2000+5000)/3=2333$

方案5的平均收益:$(1000+3000+2000)/3=2000$

由计算可知,方案4应作为最优方案。

2.悲观原则(又称最大最小原则)

决策者分析某一可行方案的可能性收益时取一最小值,然后再从各可行方案中的最小值中选取最大者为最优方案。

即:
$$\max_i(\min_j R_{ij})$$

R_{ij} 表示方案 i 在自然状况 j 下的收益。

上例5个方案中,收益最小值分别为 -4000,1000,-2000,0,1000,最小收益中选取最大者,按最大最小原则,应选方案2或方案5,收益均为1000万元。

最大最小原则应用于成本时,决策应先选各方案的成本最大值,然后,再选出其中成本最小者为最优方案。最大最小原则属保守和悲观原则,因此决策只注意到最坏的一面,然后再企图使最坏程度得以减小。

3.乐观原则(又称最大最大原则)

选取每一方案中收益最大值然后再从中选最大者为最优方案,即:

$$\max_i(\max_j R_{ij})$$

上例中，5个方案的收益最大值分别是2000，4000，6000，5000，3000，其中 6000 最大，按最大最大原则，方案 3 最优。

这一原则属于乐观原则，是从最乐观的估计出发，作出今后出现的最有利的状态。

缺点：在取得最大收益的同时，可能承受较大的风险。

4. **胡尔维兹原则(折衷原则)**

胡尔维兹原则是企业在最悲观的估计和最乐观的估计两者之间作出一个折衷的方法。它要求决策人根据自己判断，选择一个乐观指数 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$：

当 $\alpha = 0$ 时，决策人对出现的状况持完全悲观的态度；

当 $\alpha = 1$ 时，决策人对未来的状态持完全乐观的看法。

选定 α 以后，法则如下：

$$\max(\alpha \max_i R_{ij} + (1-\alpha)\min_j R_{ij})$$

当 $\alpha = 0.2$ 时，数值计算如下表，结果可见，应选方案 2。

表 2-6　胡尔维兹原则决策　　单位：万元

方案 1	$\alpha(\max R_{ij}) + (1-\alpha)(\min R_{ij}) = -2800$
方案 2	$0.2 \times 4000 + 0.8 \times 1000 = 1600$
方案 3	$0.2 \times 6000 + 0.8 \times (-2000) = -400$
方案 4	$0.2 \times 5000 + 0.8 \times 0 = 1000$
方案 5	$0.2 \times 3000 + 0.8 \times 1000 = 1400$

注：(1) 上述最优方案与 α 的数值有关。

(2) 当 $\alpha = 0$ 时，即为最大最小原则；$\alpha = 1$ 时，即为最大最大原则。

即最大最小原则和最大最大原则是胡尔维兹原则的两种特殊情况。

5. **最小后悔值法**

如果决策人选择了某一方案，而当以后出现的某种自然状况

说明他本应选择另一方案时，他必然感到后悔。若他对今后出现的那种自然状态情况已经完全知道，这时他必然选择收益值为最大的方案，这个收益值与原来采取方案的收益值之差叫做后悔值。当然决策人尽量避免产生后悔，最低限度是要使最大后悔值为最小，这就是最小后悔法的原理。

以 R_{ij} 代表方案 i 在状态 j 下的后悔值，最小后悔法即：

$$\min_i \max_j R_{ij}$$

利用这个法则，考虑上例。

首先从甲、乙、丙三种自然状态找出各自的最大收益值，分别为 1200，3000，6000 万元，计算后悔值（从各个最大收益值减去相应收益值），列后悔值表如下：

表 2-7　后悔值表

	甲	乙	丙
方案 1	5200	2000	4000
方案 2	0	2000	2000
方案 3	3200	1500	0
方案 4	1200	1000	1000
方案 5	2000	0	4000

5 种方案的最大后悔值分别为 5200，2000，3200，1200，4000，按最小后悔值法，方案 4 最优。

按最小后悔值法选择方案，可以保证决策人今后可能遭受的损失最小。这种决策方法可能导致比较可靠的结果，但其倾向是保守的。

上述 5 种方法所得的结果各有优点，决策人采用哪种方法，一方面看他对未来情况的估计是乐观的还是悲观的，另一方面也取决于他个人的特点是倾向于冒险还是保守。因此，在某种情况下选用哪种方法要依靠决策人的主观判断。

二、风险决策中的决策树模型

风险决策常借助决策树进行分析。用于多方案风险决策分析的决策树图如图 2-3。

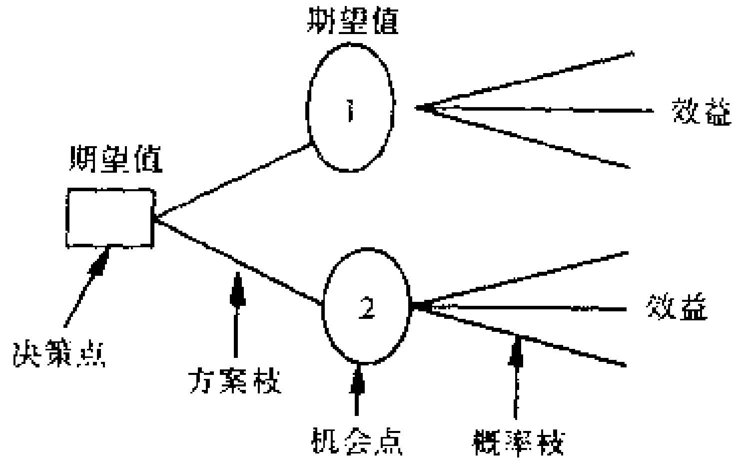


图 2-3 风险决策的决策树模型

首先画一方框作为出发点叫决策点。从决策点引出若干条线段，每条线代表一个方案叫方案枝。方案枝的末端是一圆圈，叫做机会点。由机会点引出若干条线段，代表每个方案实施后可能发生的几种状态（随机事件）和其概率，叫概率枝。各方案在其各个可能发生状态发生时的效益（或费用）记在概率枝末端。在决策分析过程中计算得到的期望值记在机会点上方，最后把选取的最优方案的期望值记在决策点的上方。

多方案风险决策要求各种状态不仅是互斥的，而且是完备的。换言之，各种状态一旦确定下来，就要求它们的概率和为 1，即 $\sum P_{ij} = 1$。概率有时可根据历史资料分析计算，客观地决定，称为客观概率。

例 2-5 某商店欲购进一批水果出售，进货价为 2 元 / 千克，售价为 4 元 / 千克，预计半月销售量有 3 种情况：

(1) 能销售 40000 千克，其概率为 0.3；

(2) 能销售 30000 千克，其概率为 0.4；

(3) 能销售 20000 千克，其概率为 0.3。

这批水果的保存时间为半个月，销售不完则会烂掉而造成损失。现有 2 种进货方案：

方案 1　进货 40000 千克

方案 2　进货 30000 千克

要求从中选一个最优方案。

这是一个两方案的决策问题，采纳任一方案都排斥对另一个方案的采纳。如采取进货 40000 千克的方案，销路好时可获利 8 万元，但销路不好时只能保本。如采取进货 30000 千克的方案，销路不好时也可获利 2 万元，但销路好时只能获利 6 万元，失去了 2 万元利润。

(1) 要对这个问题进行风险决策分析，我们可列出决策矩阵，见表 2-8。

表 2-8　水果经销决策矩阵

方案 1				方案 2			
进货(千克)	40000			进货(千克)	30000		
概率	0.3	0.4	0.5	概率	0.3	0.4	0.5
销量(千克)	40000	30000	20000	销量(千克)	40000	30000	20000
利润(万元)	8	4	0	利润(万元)	6	6	2

(2) 作出决策树如图 2-4。

(3) 计算各方案的利润期望值：

$$E(1) = 8 \times 0.3 + 4 \times 0.3 + 0 \times 0.3 = 4$$

$$E(2) = 6 \times 0.3 + 6 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 4.8$$

把两方案利润期望值写在机会点上方，如图 2-4。

(4) 计算各方案的标准差以比较风险大小：

$$\sigma_1 = \sqrt{(8-4)^2 \times 0.3 + (4-4)^2 \times 0.4 + (0-4)^2 \times 0.3} = 3.10(\text{万元})$$

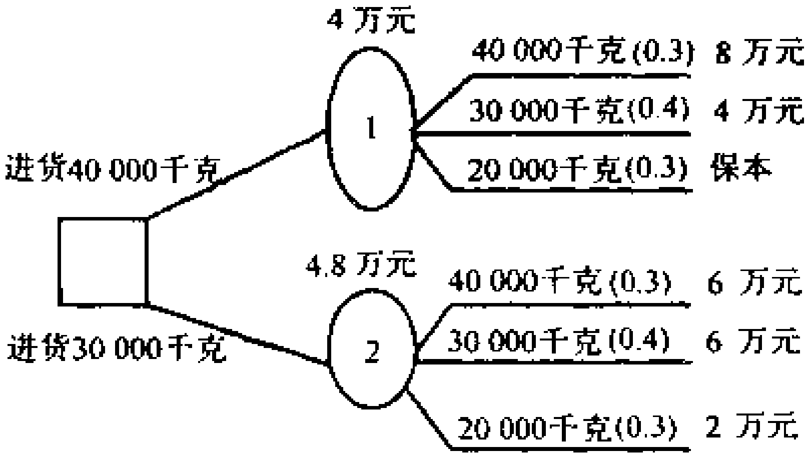


图 2-4 决策树

$$\sigma_2 = \sqrt{(6-4.8)^2 \times 0.3 + (6-4.8)^2 \times 0.4 + (2-4.8)^2 \times 0.3} = 1.83(\text{万元})$$

显然方案 2 的风险较小。

(5) 选择最优方案：

因为 $E(2) > E(1)$，且方案 2 的风险比方案 1 小，应选择进货 30000 千克的方案。在图 2-4 中，用符号"//"进行"剪枝"，然后把最优方案利润期望值(4.8 万元)写在决策点上方。

决策树的计算方法是从后开始，逐次确定各机会点及决策点的数值，直到最前面的决策点，其数据则应从各方案分枝中选择最佳者列入。

在实际工作中，情况要比例题复杂得多，所画出的决策树图形也比较复杂。正是在这样复杂的情况下，决策树方法的优点才能够充分地显示出来。

本章小结

收益与风险是投资领域中两个中心问题。收益的预期即期望值是投资者非常关注的指标，在取得尽可能大的收益的同时，应尽可能避免风险，或说使风险降低到最低程度。

对于风险，不同的投资者有不同的态度，即风险偏好，对于不同的风险，可利用效用函数衡量投资决策的好坏。

风险测定常用方法有：标准差、方差及 β 分析法。β 分析法在现代证券投资组合理论中是一个强有力的工具。

除此之外，测度风险的统计量还有 $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|R_{it}-E(R_i)|$ 和半方差 $\frac{1}{n}\sum_{R_{it}<E(R_i)}[R_{it}-E(R_i)]^2$ 等，见刘志强的《现代资产组合理论与资本市场均衡模型》[10]。

第三章　数学规划模型

案例:(投资选择模型)

长城汽车有限公司决定将自己拥有的100万元用于对外投资,以便在明年底获得较多的资金。公司经理部门经过调查分析后,决定将这笔款项投资于电力工业、化学工业和购买国库券,他们已了解到有两家电力公司、两家化学公司欢迎他们投资,数量不限。会计部门已得知向这些公司投资的年利润率,有关数据见表3-1。

表3-1

序号	投资项目	年利润率(%)
1	振兴电力公司	6.2
2	中南电力公司	7.1
3	光明化工公司	9.8
4	华夏化工公司	7.2
5	购买国库券	4.7

长城公司对这笔投资规定了下列方案:

(1) 电力工业的投资至少要等于化学工业投资的两倍,但每种工业投资不得超过投资总额的50%;

(2) 购买国库券至少应占整个工业投资的10%;

(3) 利润较高但风险也较大的光明化工公司的投资最多只能占化学工业投资的65%。

现问长城公司明年应给每个投资项目分配多少资金,才能使

年获利最大?

分析:设给第 i 个项目投资 x_i 万元($i=1, 2, 3, 4, 5$)。所求问题是确定 x_i 的值,使获利最大!

目标:$\max Z=0.062x_1+0.071x_2+0.098x_3+0.072x_4+0.047x_5$

同时,满足一些投资规定(限制条件或约束条件)。

限制条件:(1) $x_1+x_2\geqslant 2(x_3+x_4)$

(2) $x_1+x_2\leqslant 100\times 50\%=50$

(3) $x_3+x_4\leqslant 100\times 50\%=50$

(4) $x_5\geqslant 0.1(x_1+x_2+x_3+x_4)$

(5) $x_3\leqslant 0.65(x_3+x_4)$,即:$0.35x_3-0.65x_4\leqslant 0$

(6) 非负条件:$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geqslant 0$

数学模型:

$$\max Z=0.062x_1+0.071x_2+0.098x_3+0.072x_4+0.047x_5$$

$$\text{S.T}\begin{cases}x_1+x_2-2x_3-2x_4\geqslant 0\\ x_1+x_2\leqslant 50\\ x_3+x_4\leqslant 50\\ -0.1x_1-0.1x_2-0.1x_3-0.1x_4+x_5\geqslant 0\\ 0.35x_3-0.65x_4\leqslant 0\\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geqslant 0\end{cases}$$

注:①上述满足限制条件的最大值问题称为数学规则;

②方程或不等式中未知量的次数均为一次(即线性的),因此上述规划又称线性规划。

问题:对于上述线性规划,如何求解?

第一节　线性规划及单纯形解法

一、线性规划的标准型

不同的问题，可能有不同的模型。线性规划在具体的求解过程中有不同的形式。为讨论方便，我们先考虑一种基本形式，称为标准型，其他形式可转化为标准形式：

1. **线性规划的标准型(LP)**

$$\min Z = c_1x_1 + c_1x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{S.T}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}$$

2. **线性规划模型由三个部分组成**

决策变量：x_1, x_2, $\cdots$, x_n，通常要求它们是非负的。

目标函数：所给问题的最优化问题(最大值或最小值)，且为线性函数。

约束条件：线性等式或线性不等式，它们确定决策变量的取值范围。

3. **可行解、最优解与无解**

可行解：满足约束条件的点(x_1, x_2, $\cdots$, x_n)的集合。

最优解：使目标函数 Z 达到最优值的可行解。

无解：若线性规划不存在最优解，称为无解。

4. **一般线性规划问题转化为标准形式**

(1) $\max Z(x) \to \min - Z(x)$

(2) 约束条件中有"≤"的不等式，在左边加入一个非负变量，可化为等式。含"≥"的不等式，在左边减去一个非负变量，加入的

非负变量称为松弛变量。

例 3-1　将下列线性规划化为标准型:

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2$$

$$\text{S.T}\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解:写出对应的标准型为:

$$\min -Z = -5x_1 - 4x_2$$

$$\text{S.T}\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geqslant 0\ (\text{其中 } x_3,\ x_4 \text{ 为松弛变量}) \end{cases}$$

注:加入松弛变量后,不等式变成了等式。这种做法只改变约束条件的形式,而没有改变其实质,且目标函数没有改变。故解的性质没有改变。

如 $3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$, 即 $3x_1 + 5x_2 = 15 - x_3$, 又 $x_3 \geqslant 0$, 则 $3x_1 + 5x_2 \leqslant 15$。

二、线性规则的最优解的求法

1. 单纯形表及求解方法

基本情形:线性规则的约束条件均是"≤"的情形,即:

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{S.T}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_1,\ x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

单纯形法的基本思想：

(1) 化为标准形

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{S.T}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{m+n} = b_m \\ x_1, \cdots, x_n,\ x_{n+1}, \cdots x_{n+m} \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) 列出初始单纯形表

x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	$\cdots$	x_{n+m}	b
x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots$	0	b_1
x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots$	0	b_2
					$\vdots$				$\cdots$
x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots$	1	b_m
σ	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	0	0		0	

显然：$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, $x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \cdots, x_{n+m} = b_m$ 是标准型的可行解，$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 为可行基(基变量)，上述可行解为初始基可行解。

问题：在什么条件下，基可行解为最优解？

单纯形表中最后一行各个分量记为 σ_j，σ 对于判别一个解的最优性具有重要作用，故称为检验数。

(3) 最优性检验

定理 3.1 若所有检验数 $\sigma_j \leqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$，则可行解 x 是最优解，其中 $x = (0, 0, \cdots, 0, b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ 为基可行解。

定理 3.2 若存在某个检验数 $\sigma_s > 0$，它所对应列向量的全部分量均小于或等于 0，则无最优解。

除上述两种情况外，剩下最后一种情况是：每个正检验数对应

列向量都有正分量，此时须进行下一步。

(4) 换基

① 确定换入基变量：只要有检验数 $\sigma_j>0$，对应的变量 x_j 就可作为入基变量，当有一个以上检验数大于零时，一般从中找出最大的一个 σ_j：

$$\sigma_s=\max\{\sigma_j \mid \sigma_j>0\},\ (以\ x_s\ 为入基变量)$$

② 确定换出基变量，在 x_s 的正分量中求最小比：

$$\theta=\min\{\frac{b_i}{a_{is}} \mid a_{is}>0\}=\frac{b_r}{a_{rs}}$$

则 x_r 为换出基变量(离基变量)；

③以 a_{rs}为主元，以圆圈表示，作主元变换：把 x_s 所在列化为 $(0,\ 0,\cdots,1,\ 0,\cdots,0)^T$ 形式，即把 a_{rs}所在行同除以 a_{rs}；把 x_s 中其他元素用行初等变换化为 0，由此得到新的单纯形表，重复上述步骤。

例 3-2　利用单纯形表，求例 3-1 的最优解。

	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	b
初始单纯形表	x_3	3	5	1	0	15
	x_4	2	1	0	1	5
	σ	5	4	0	0	
迭代表 1	x_3	0	7/2	1	-3/2	15/2
	x_1	1	1/2	0	1/2	5/2
	σ	0	3/2	0	-5/2	
迭代表 2	x_2	0	1	2/7	-3/7	15/7
	x_1	1	0	-1/7	5/7	10/7
	σ	0	0	-3/7	-29/14	

步骤如下：

① 在初始单纯形表中：

$\sigma=\max\{5,4\}=5$，x_1 进基；$\theta=\min\{15/3,5/2\}=5/2$，$x_4$ 离基；作主元迭代：表中第 2 行元素同除以 2，然后第 1 行元素减去第 2 行元素的 3 倍；把 σ 行的元素减去第 2 行元素的 5 倍，得到迭代表 1；

② 在迭代表 1 中：

$\sigma=3/2$，$\theta=\min\{15/7,10/7\}=15/7$，$x_2$进基，$x_3$离基；以 7/2 为主元，作主元迭代，可行初等变换把 7/2 所在列化为 $(1,0,0)^T$单位向量，得到迭代表 2；

③ 在迭代表 2 中：

所有 $\sigma\leqslant0$，因此，有最优解 $x_1=10/7$，$x_2=15/7$，$x_3=0$，$x_4=0$。故，所求线性规则的最优解为 $x_1=10/7$，$x_2=15/7$，即 $(10/7,15/7)$。

注：以上步骤及分析过程在熟悉以后可以省去，只列表即可。故上述列表求解的方法称为单纯形表解法。

问题：在基本情形中，很容易找出初始可行基(或基变量)，如上例中 x_3，x_4。一般情形中，该如何寻找初始可行基?

一般方法：大 M 法，两阶段法，参见《运筹学教程》[5]。大 M 法计算机计算容易出错；两阶段法需引入人工变量，增加变量个数，还须把原来的线性规则转化为两个线性规则问题求解，计算量大大增加。能否不引入人工变量，在同一形式的表格下完成求解?

以下给出一种方法，巧妙解决了上述问题。

2．单纯形法的一种推广——旋转迭代算法

对于线性规则的标准型(LP)，可直接进行旋转迭代寻找初始可行基。

(1) 旋转迭代算法基本思想

构造初始迭代表，由上至下逐行检验，利用最小比方法确定主元；作旋转迭代变换，即用行初等变换把主元化为 1，主元所在列的其他元素化为 0；反复以上过程，即可找到初始可行基，然后按

单纯形法计算。

(2) 旋转迭代算法步骤

第一步：建立如下初始旋转迭代表格。

表 3-2

c_j		$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	
C_B	x_B	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b
		a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
		a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
				$\vdots$		$\cdots$
		a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m

第二步：若表 3-2 中存在一行，比如第 1 行，对所有 $1\leqslant j\leqslant n$，$a_{1j}\leqslant 0$，且 $b_1>0$，此时原问题无可行解，停止计算；

若 $a_{1j}\leqslant 0$，$(1\leqslant j\leqslant n)$，且 $b_1\leqslant 0$，此时将第 1 行乘 (-1) 后继续进行；否则转入下一步；

第三步：从第 1 行开始，逐行检验；

若检验第 i 行，考虑该行中所有正数项 a_{ij}，确定最小比：

$$\theta=\min\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\ \middle|\ a_{ij}>0\right)=\frac{b_i}{a_{ik}}$$

以 a_{ik} 为主元，并作旋转迭代运算如表 3-3，并在表 3-3 的 x_B 和 C_B 下方分别填上 x_k，$-c_k$。

重复第二、三步，一般重复 m 次可以得到一个明显的可行基 I_B 及对应的基可行解。

第四步，按单纯形表的检验数方法计算检验数：

$$\sigma_j=C_j-C_BP_j=C_j-(C_{B1}\cdot a_{1j}+\cdots+C_{Bm}\cdot a_{mj})$$

此后完全与单纯形法一样。

表 3-3

c_j		$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_k$	$\cdots$	$-c_n$	
C_B	x_B	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	B
		a_{11}	a_{12}	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{1n}	b_1
		a_{21}	a_{22}	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{2n}	b_2
				$\vdots$				$\cdots$
$-c_k$	x_k	a_{i1}	a_{i2}	$\cdots$	1	$\cdots$	a_{in}	b_k
				$\vdots$				$\cdots$
		a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	0	$\cdots$	a_{mn}	b_m

例 3-3 求线性规划的最优解。

$$\max S = -3x_1 + x_3$$

$$\text{S.T}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \geqslant 1 \\ 3x_1 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解:原问题化为标准形式:

$$\min(-S) = 3x_1 - x_3$$

$$\text{S.T}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 9 \\ x_1, x_2, \cdots, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

然后用旋转迭代算法计算如下:

C_j		-3	0	1	0	0	
C_B	x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
		1	1	1	1	0	4
		-2	1	-1	0	-1	1
		0	3	1	0	0	9
-3	x_1	1	1	1	1	0	4
		0	3	1	2	-1	9
		0	3	1	0	0	9
-3	x_1	1	0	2/3	1/3	1/3	1
0	x_2	0	1	1/3	2/3	$-1/3$	3
		0	0	0	2	-1	0
-3	x_1	1	0	2/3	0	1/2	1
0	x_2	0	1	1/3	0	1/3	3
0	x_4	0	0	0	1	$-1/2$	0
σ		0	0	3	0	3/2	
x_3		3/2	0	1	0	3/4	3/2
x_2		$-1/2$	1	0	0	$-1/4$	5/2
x_4		0	0	0	1	$-1/2$	0
σ		$-9/2$	0	0	0	0	

上述表中，所有检验数 $\sigma_j \leqslant 0$，最优解 $x_1 = 0$，$x_2 = 5/2$，$x_3 = 3/2$，最优值 $S = 3/2$。

一般情况，旋转迭代变换找出初始基可行解，再按单纯形法计算。对于大型的线性规则（即变量个数很多），可用专用计算机软件进行处理。

旋转迭代算法具有计算的统一性和标准性，为应用计算机求解线性规划问题提供了一种有力的算法。

第二节 非线性规划的数学模型

线性规划的目标函数和约束条件均是线性函数，如果目标函数或约束条件中包含有非线性函数，这样的数学规则称为非线性规划。

一、非线性规则的数学模型

非线性规则的一般形式(NP)：

$$\min f(x)$$

$$\text{S.T}: g_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, m,\ x \in R^n$$

其中 $x = (x_1, x_2 \cdots x_n)^T$，即 x 为 n 维欧氏空间中的点，目标函数与约束函数均是 x 的实值函数。

定理 3.3 Kuhn-Tucker 必要条件

设 $f(x), g_i(x), i = 1, 2, \cdots, m$ 具有一阶连续偏导数，且 x^* 是(NP)的局部极小值点(局部最优点)，且 x^* 的各起作用的约束梯度线性无关，则存在一组数 $y_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 使得下列 Kuhn-Tucker 条件成立。

$$(\text{K.T})\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} y_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ y_i \nabla g_i(x^*) = 0 \\ y_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{cases}$$

满足上述条件的点 x^* 称 K-T 点。

注：K-T 条件是非线性规划中非常重要的条件，利用它可以找到非线性规划的最优解的必要条件。其证明见《运筹学教程》。[5]

二、二次规划的数学模型

例 3-4

$$\min -2x_1-6x_2+x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$$

$$\text{S.T}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 2\\ -x_1+2x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

其特点是：目标函数是二次函数，约束条件为线性函数（线性不等式）。这样的规划称为二次规划。二次规划是一种最简单、最常用的非线性规划。

上述二次规划用矩阵形式表示，即：

$$\min \frac{1}{2}(x_1,x_2)\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+(-2,-6)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\text{S.T}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\leqslant\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

$$x_1,x_2\geqslant 0$$

进一步写成：

$$\min \frac{1}{2}X^THX+C^TX$$

$$\text{S.T}\begin{cases}AX\leqslant b\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

其中 $H=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}$，

$X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$

二次规划的一般形式：

$$(\mathrm{NP}')\begin{cases}\min & \frac{1}{2}X^{T}HX+C^{T}X\\ \mathrm{S.T} & \begin{vmatrix}AX\leqslant b\\ X\geqslant 0\end{vmatrix}\end{cases}$$

其中 C 为 n 元向量，b 为 m 元非负向量，A 为 $m\times n$ 维矩阵，H 为 $n\times n$ 维的对称正定矩阵。

用 U，V 分别表示约束条件 $AX\leqslant b$，$X\geqslant 0$ 的 Lagrange 乘子向量，用 X_s 表示松弛变量组成的向量，由定理 3.3，K-T 条件可写成线性方程组。

$$\begin{cases}HX+A^{T}U-IV=-C\\ AX+I_SX_S=b\\ X^{T}V=0,\ U^{T}X_S=0\\ X,X_S,U,V\geqslant 0\end{cases}$$

其中 X 与 V，U 与 X_S 均为互补向量。

定理 3.4　当 H 为半正定矩阵时(任意阶主子式非负)，二次规划的 K-T 点为最优解[4~5]。

即利用 K-T 条件把求非线性规划的最优解转化为求线性方程组的非负解，上述方程组写成矩阵形式为：

$$\begin{bmatrix}H & 0 & -I & A^{T}\\ A & I_S & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ X_S\\ V\\ U\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-C\\ b\end{bmatrix}$$

写成对应的增广矩阵为：

$$\left[\begin{array}{cccc|c}H & 0 & -I & A^{T} & -C\\ A & I_S & 0 & 0 & b\end{array}\right]$$

其中 s 为松弛变量的个数(或约束条件中不等式的个数)，t 为原约束条件中非负变量的个数。

注：(1)当约束条件为 $AX\geqslant b$，化为标准形式 $-AX\leqslant -b$，增

广矩阵变为：

$$\left[\begin{array}{cccc|c} H & 0 & -I & -A^T & -C \\ -A & I_S & 0 & 0 & -b \end{array}\right]$$

(2) 常数列(右边项)含负元素时，该元素所在行同乘 -1，使常数列保持非负。

三、二次规划的求解方法

传统教材使用凸单纯形法，或 Lemke[1968]主元算法，需引入人工变量，计算量大。计算机计算过程中占用较大的存储空间。

这里介绍一种新方法——旋转迭代算法。[12]

旋转迭代算法：

初始步：先化为一般形式(NP′)，由增广矩阵建立初始表。

表 3-4

B	$\overbrace{x_1 x_2 \cdots x_n}^{X}$	$\overbrace{x_{n+1} \cdots x_{n+s}}^{X}$	$\overbrace{y_1 \cdots y_n}^{Y}$	$\overbrace{y_{n+1} \cdots y_{n+m}}^{Y}$	b
	H	0	$-I$	A^T	$-C$
	A	I	0	0	b

主步：表 3-4 中，若存在一行所有元素均小于或等于 0，且常数列为正数，则无解，停止计算。否则，转入步 1：

步 1：若某一行常数项为负数，且该行中至少有一元素为负数，该行各元素同乘(-1)。

步 2：先从左至右依次选择列进行检验，若 $x_1, \cdots, x_{n+s}$ 所在列均检验完毕，则从 y_{n+m} 列开始从右向左依次选择进行检验。

步 3：若当前列为第 k 列，即检验 x_k 的对应分量，对应分量为 $a_{ik}(1 \leqslant i \leqslant n+m)$，若 $a_{ik} \leqslant 0$，$(1 \leqslant i \leqslant n+m)$则转步 4，否则，计算最小比：

$$\theta = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0, \text{且 } x_i, y_i \text{ 均不在基变量中} \right\} = \frac{b_r}{a_{rk}}$$

当从左至右方向进行时，x_k 进基；当从右至左方向进行时，y_k 进基。同时以 a_{rk} 为主元，作主元变换，将该元素所在列化为 $(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)^T$ 得到新表 3-4。

步 4：检验下一列，若各列均已检验，停止；

否则，返回步 1。

例 3-5 求二次规划的最优解。

$$\min \quad -2x_1-6x_2+x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2$$

$$\text{S.T}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 2\\ -x_1+2x_2\leqslant 2\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

解：$H=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ 对称正定矩阵，$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}-2\\ -6\end{bmatrix}$

松弛变量个数 $s=2$，非负变量个数 $t=2$。

利用旋转迭代算法计算如下：

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	b
	2	−2	0	0	−1	0	1	−1	2
	−2	4	0	0	0	−1	1	2	6
	1	1	1	0	0	0	0	0	2
	−1	2	0	1	0	0	0	0	2
x_1	1	−1	0	0	−1/2	0	1/2	−1/2	1
	0	2	0	0	−1	−1	2	1	8
	0	2	1	0	1/2	0	−1/2	−1/2	1
	0	1	0	1	−1/2	0	1/2	−1/2	3
x_1	1	0	1/2	0	−1/4	0	1/4	−1/4	3/2
	0	0	−1	0	−3/2	−1	5/2	1/2	7
x_2	0	1	1/2	0	1/4	0	−1/4	1/4	1/2
x_4	0	0	−1/2	1	−3/4	0	3/4	−3/4	5/2

续表

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	y_3	y_4	b
x_1	1	0	3/4	0	1/8	1/20	0	-3/8	4/5
y_3	0	0	-2/5	0	-3/5	-2/5	1	1/5	14/5
x_2	0	1	2/5	0	1/10	-1/10	0	1	6/5
x_4	0	0	*	1	*	*	0	*	2/5

所求最优解：$x_1=4/5$，$x_2=6/5$，即$(4/5,6/5)$。

二次规划是一种常见的非线性规划，它在最优化理论中应用很广。在组合投资理论中常用来决定最优投资比例。

下一章将介绍二次规划模型在投资决策方面的应用。

第四章　资产组合模型

“不要把鸡蛋放在同一篮子里。”

——投资名言

资本市场上存在许多种资产，投资者把他拥有的资金投向何处？不同的资产投入资金比例为多少？怎样才能使投资风险最小、收益最大？这就是现代资产组合理论应解决的核心问题。

1952 年，Harry M Markowitz 在《金融杂志》上发表题为《资产选择》的论文，建立了现代证券组合理论的框架。经过许多学者的发展与完善，现已扩展到所有实际资产和金融资产领域，从而形成资产组合理论。现代资产组合理论主要解释投资者如何衡量不同的投资风险、组合投资的风险与收益之间的关系，如何合理组合证券以取得最大的收益等。Markowitz 由于这方面的突出贡献而成为 1990 年诺贝尔经济学奖的得主。

第一节　投资多元化与资产组合

一、投资多元化

投资多元化就是将资金分散到不同的领域，以达到减少投资风险的一种投资策略。过去，在考虑投资收益与风险问题时，主要讨论个别证券资产。但是，投资决策并不仅仅局限于个别证券。事实上，人们所持有的资产有多种形式，如银行存款、股票、债券等各种不同的资产。西方投资界将投资多元化形象地比喻为“不把

所有的鸡蛋放在同一篮子里"。

为什么投资多元化能减少投资风险呢?

按照多元化原则,投资者可以将资金分散投资于若干种不同的证券,由于某种证券价格下跌造成的损失可能因其他证券价格的上扬而得到弥补,从而减轻了个别证券的风险对投资者的影响。

20世纪60年代,有人计算了纽约证券交易所470种普通股的风险。通过随机分组,计算每组组合的收益率的平均标准差,得到图4-1:

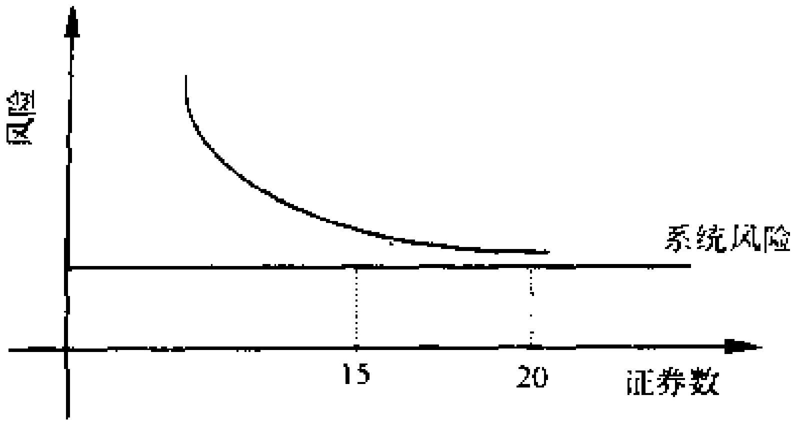


图4-1　简单多元化的效果

图4-1说明当组合中证券的数目由1种逐渐增加到15种时,组合的风险逐步下降,接近市场系统风险水平,组合的非系统风险逐渐趋于零。非系统风险是指与市场无关的风险,是每个证券特有的风险。因为非系统风险是互不相关的随机变量,能通过组合相互抵消,但整个市场波动的系统风险,并不能相互抵消。

另外一些研究结果表明:用随机选取的证券组成的简单多元化组合,其收益率不受证券数目多少的影响,而组合的风险则与证券数目有密切关系。美国经济学家 W H Wagner 和 W P Law 的研究结果如表4-1:

表 4-1 多元化组合对投资收益率和标准差的影响

组合中证券数	组合的月收益率	组合的月收益率的标准差	组合收益率与市场收益率
N	r_p(%)	σ (%)	ρ
1	1.10	0.70	0.54
2	0.84	0.50	0.63
4	0.96	0.46	0.77
5	1.01	0.46	0.79
10	0.96	0.42	0.85
15	1.07	0.40	0.88
20	1.09	0.39	0.90

从表中可见，证券数目不同的组合收益之间差异很小，而组合的标准差则随证券数的增加从 0.70 降低到 0.39，下降幅度达到 44%。同时，组合与整个市场的相关性显著提高。这种现象表明投资多元化降低投资风险的效果。

二、组合资产

作为投资对象的各类证券的组合就称为组合资产。

下面讨论组合资产的风险与单个资产风险间的关系。

假设选定 n 种资产进行组合投资，若用 R_i 表示第 i 种资产的期望收益率，σ_i 是它的风险(收益率的标准差)，χ_i 是资产组合中第 i 种资产的投资比例系数($i = 1, 2, \cdots, n$)，ρ_{ij} 为资产 i 与资产 j 收益的相关系数，σ_{ij} 是第 i 种和第 j 种资产收益率的协方差，即

$$\sigma_{ij} = E[(R_{it} - r_i)(R_{jt} - r_j)] \quad \text{(收益偏差乘积的数学期望)}$$

组合资产的总收益的期望值记为 R，总方差记为 σ^2，则

$$R = \sum_{i=1}^{N} \chi_i R_i, \tag{4-1}$$

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \chi_i \chi_j \sigma_{ij} = \sum_{i,j=1}^{N} \chi_i \chi_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \tag{4-2}$$

特例：若 n 种资产的收益是毫不相关的，即 $\rho_{ij}=0, i\neq j,\quad i,j=1,2,\cdots,n$，则(4-2)式转化为：

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{N}\chi_i^2\sigma_i^2$$

若进一步假设等比例投资于这 n 种资产，即 $\chi_1=\cdots=\chi_n=\frac{1}{n}$，则：

$$\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sigma_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sigma_i^2}{n}=\frac{1}{n}\bar{\sigma}_i^2$$

这里$\bar{\sigma}_i^2$ 表示组合中所含资产的方差的平均值，一般$\bar{\sigma}_i^2$ 有界。故

$$\lim_{n\to\infty}\sigma^2=\lim_{n\to\infty}\frac{\bar{\sigma}_i^2}{n}=0$$

上式说明：若市场上存在充分多的收益不相关的资产时，则等比例投资于这些资产所构成的组合风险趋于零。

三、资产组合相关性分析

由公式(4-2)可知：

① 当 $\rho_{ij}>0$ 或 $\sigma_{ij}>0$ 时，说明两种资产的收益率的变化方向趋向一致。此时称第 i 种与第 j 种资产正相关；

② $\rho_{ij}<0$（或 $\sigma_{ij}<0$），说明它们收益率变化方向相反，即负相关；

③ $\rho_{ij}=0$（或 $\sigma_{ij}=0$），说明资产 i 的收益与资产 j 的收益无关，称为不相关资产。

由公式(4-2)可知，要使资产组合投资风险 σ 显著降低，应该尽可能选择一些负相关或不相关的资产进行组合。但负相关（$\sigma_{ij}<0$）资产的实际收益常常是异向变动的，不利于得到实际收益较高的资产组合。若选择不相关的资产进行组合投资，既能保证降低风险，又不影响实际收益。在实际中尽可能地选择不同行业、不同

种类的资产进行组合,这些资产收益之间的相关性很小,可认为是不相关资产。因此,在实际问题中,常常考虑不相关资产的组合投资。下面举例说明,组合风险小于单个风险。

例 4-1 若有一个投资计划,投资对象为资产 A 和资产 B,资金给定,投资金额可在这两种资产间任意比例分配。资产 A 与资产 B 的期望收益率和它的标准差如表 4-2 所示:

表 4-2 收益率与标准差

	收益率 r_i	标准差 σ_i
A	5%	4%
B	8%	10%

在收益率的相关系数分别为 1, 0, -1 的状态下,计算 $X_A = 1.00$, $X_A = 0.65$, $X_A = 0.50$, $X_A = 0.25$, $X_A = 0$ 时组合资产的收益及其标准差。

解:由公式(4-1),(4-2) 计算可知,组合资产的收益率与标准差 σ 如表 4-3。

表 4-3

资产 A 所占比重	资产 B 所占比重	$\rho_{ab}=1$		$\rho_{ab}=0$		$\rho_{ab}=-1$	
		R	σ	R	σ	R	σ
1.00	0.00	5.00	4.00	5.00	4.00	5.00	4.00
0.65	0.35	5.75	5.50	5.75	3.90	5.75	0.50
0.50	0.50	6.50	7.00	6.50	5.40	6.50	3.00
0.25	0.75	7.25	8.50	7.25	7.60	7.25	6.50
0.00	1.00	8.00	10.0	8.20	10.0	8.00	10.0

由表 4-3,可以得出以下结论:

(1) 各种比例(任意比例)的组合资产风险不超过单个资产风险的最大值。即组合资产的风险小于单个资产的风险。

(2) 在收益相同的情况下,负相关或不相关的资产组合,能使

组合资产的风险很快降低，特别是负相关的资产组合。换句话说，资产收益间的相关系数越低，越能通过组合分散风险。资产相关性是确定风险大小的重要因素。

(3) 投资比例的不同，影响组合资产的收益率与风险的大小。

理论和实践均表明：通过组合确实可以减小证券投资的风险。因此，有必要研究和建立组合投资的最优化模型，选择恰当的投资比例，从而达到投资收益与风险的最优化。

第二节　Markowitz 模型

现代证券组合投资理论的框架是由著名的美国经济学家、诺贝尔经济奖得主 Hany Markowitz 创建的，他提出的 Markowitz 组合投资最优化模型(简称 Markowitz 模型)，被视为现代资产组合理论的基石。Markowitz 模型是在一定的假设条件下的组合投资优化模型。

一、基本假设

Markowitz 为其组合理论提出以下假设：

(1) 证券市场是有效的，证券的价格反映了证券的内在价值，每个投资者都掌握充分的信息，了解每种证券的期望收益率及标准差；

(2) 投资者追求较高的收益、较低的风险，即投资者都是风险厌恶者(风险回避者)；

(3) 投资者以期望收益率及收益率的标准差为选择投资方案的依据；如果要选择风险较高的方案，必须有额外收益作为补偿；

(4) 各种证券的收益率之间有一定的相关性，它们之间的相关程度可以用相关系数或协方差来表示。

Markowitz 从上述假设出发，经过数学推导，得到了这样的结

论：只要组合中的资产不是正相关的，就可在不牺牲投资收益率的前提下，减小投资风险。这是 Markowitz 组合理论的精髓。根据 Markowitz 理论，为了提高组合的效果，应当尽可能选择负相关至少相关程度很低的证券组成证券组合，人们有时把这种组合称为 Markowitz 证券组合。

二、Markowitz 模型

收益最大、风险最小，这是投资者追求的两个目标。投资者总是希望两个指标都达到最优，但事实上是不可能的。投资者必须在两者之中作出选择。

Markowitz 认为：投资者大多是风险厌恶者，他们总是在一定预期收益及风险水平上选择组合证券。理性的投资者总是希望在已知风险的条件下，获得最大期望收益；或者在已知期望收益的条件下，使投资风险达到最小。

资产组合的总收益可用各个资产预期收益的加权平均值计算，组合资产的风险即收益的不确定性可用方差或标准差描述。Markowitz 利用二次规划建立了一套数学方法，解决了如何通过多元化的组合降低组合资产中的风险问题。

设有 n 种不同的风险资产，第 i 种风险资产第 t 年的实际收益率为 R_{it}，n 年实际平均收益率记为 R_i，$R_i = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_{it}$，第 i 种风险资产在组合中的投资比例为 χ_i，且 $\sum_{i=1}^{n} \chi_i = 1$，$\chi_i \geqslant 0$。

那么，组合资产的期望收益率 $R_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i R_i$；假定通过组合，收益率预定达到目标为 r，即满足条件 $\sum_{i=1}^{n} \chi_i R_i = r$。

组合资产的风险用收益率的标准差表示，方差为标准的平方，

即
$$\sigma^2=\sum_{ij=1}^{n}\chi_i\chi_j\sigma_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\chi_i^2+\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\sigma_{ij}\chi_i\chi_j$$

组合的目标应使风险最小，即方差最小。此时，标准差亦最小，

即
$$\min\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\chi_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\sigma_{ij}\chi_i\chi_j$$

综上所述，Markowitz 优化模型为：

$$\min\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\chi_i^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N}\sigma_{ij}\chi_i\chi_j$$

$$\text{S.T}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\chi_i r_i=r\\ \sum_{i=1}^{n}\chi_i=1\\ \chi_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

上述模型是以投资比例为变量的二次规划。通过求解二次规划，可以确定最优投资比例。Markowitz 模型用定量的方法研究投资组合问题，在理论与实践上都具有很强的指导意义。

Markowitz 模型可进一步推广为以下情形：

(1) 不相关风险资产投资优化模型

假设投资者只对不相关风险资产进行组合投资，上述模型中 $\sigma_{ij}=0(i\neq j)$，Markowitz 模型简化为：

$$\min\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\chi_i^2$$

$$\text{S.T}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\chi_i r_i=r\\ \sum_{i=1}^{n}\chi_i=1\\ \chi_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

(2) 存在安全资产时风险资产组合优化模型

在实际中存在着风险很小的资产，如短期国债、短期融资券、短期银行储蓄及短期财产抵押贷款等。由于受通货膨胀的影响较小，它们的投资收益相对稳定，风险很小，因而可看作安全资产。

现在选择 1 种安全资产和 n 种不相关风险资产进行投资组合。设安全资产的收益率为 R_f，$\chi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为风险资产的投资比例，$\chi_0=1-\sum_{i=1}^{n}\chi_i$ 为安全资产的投资比例。

则组合投资的期望收益率为：$r=(1-\sum_{i=1}^{n}\chi_i)R_f+\sum_{i=1}^{n}R_i\chi_i$，风险为标准差 σ。

存在无风险资产投资时，不相关资产组合优化模型为：

$$\min\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}\chi_i^2\sigma_i^2$$

$$\text{S.T}\begin{cases}(1-\sum_{i=1}^{n}\chi_i)R_f+\sum_{i=1}^{n}\chi_iR_i=r\\ \sum_{i=0}^{n}\chi_i=1,\ \chi_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

说明：

① 上述模型均为二次规划模型。理论上可用二次规划的旋转迭代算法求解。

② 上述模型均假定资金比例大于等于零，即 $\chi_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$，其实际意义为不允许卖空。我国现阶段的证券投资就不允许卖空。原因在于我国证券市场还处于初步阶段，法制尚不健全，不便规范卖空行为。随着证券市场的发展，我国迟早会允许投资者卖空。

三、实证分析

例 4-2 现选取上海证券交易所 3 种股票(真空电子、飞乐音

响、浦东金桥）进行分析，它们分别属于工业类、商业类和房地产类几大行业，相关性较小，可认为是不相关的风险资产。原始数据选自 1993 年 4 月至 1994 年 1 月各种股票的每日收盘价，表 4-4 为根据原始数据计算所得的期望收益率与方差[12]。

表 4-4

股票名称	真空电子	飞乐音响	浦东金桥
r_i	4.11%	45.9%	74.43%
σ_i^2	2.12%	9.93%	11.12%

现总收益率定为 40%，试确定投资比例系数。

解：Markowitz 模型为：

$$\min\sigma^2 = 0.0212\chi_1^2 + 0.0993\chi_2^2 + 0.1112\chi_3^2$$

$$\text{S.T}\begin{cases} 0.0411\chi_1 + 0.4590\chi_2 + 0.7443\chi_3 = 0.4 \\ \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = 1 \\ \chi_1, \chi_2, \chi_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

利用第三章及旋转迭代算法求解：

$$H = \begin{bmatrix} 0.0424 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1986 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2224 \end{bmatrix} \text{为正定矩阵。}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.0411 & 0.459 & 0.7443 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

松弛变量个数为 0，非负变量个数为 3，即 $s = 0, t = 3$，用旋转迭代算法求最优解如下：

$$\chi_1 = 48.02\%, \chi_2 = 0.3\%, \chi_3 = 50.94\%$$

（计算过程略）

分析：浦东金桥的房地产业风险高，但有较高的收益作为补

偿，投资者为获得较高收益愿承担一定的风险，所以投资比例大；其次是真空电子，虽然收益不高，但风险也很低，安全性大，故投资比例也较大。

一般投资者都是风险厌恶者，为回避风险，投资者可用一部分资金购买国库券等安全资产，另外的资金再投资于风险资产。其模型检验与本例类似。

第三节　有效组合与有效边界

在组合投资条件下，给定预期收益，有无穷多种组合可以实现该预期收益；同样，给定预期风险，有无穷多种组合可以实现该预期风险，哪种组合最有效？

一、有效组合与有效边界

如果以预期收益 R_0 为纵坐标，预期风险 σ^2 为横坐标，则任一可行的组合惟一确定了 $\sigma^2 - R_0$ 平面上一个点，而所有可行的组合则确定 $\sigma^2 - R_0$ 上的一个区域，称为可行集，记为 D。

Markowitz 假定：投资者大多是风险厌恶者，他们总是在一定预期收益或风险水平上选择组合证券。理性的投资者总是希望在已知风险条件下，获得最大期望收益，或在已知期望收益条件下，使投资风险达到最小。具有上述性质的组合称为**有效组合**；所有有效组合形成的集合称为**有效集**；有效集在风险与收益的空间上的轨迹称为**有效边界**，它是理性投资者决策的机会集。

有效边界因不同的投资假定而异，我们来分别讨论。

1. 不允许卖空时有效边界

若以 C 代表所有可行组合中方差最小的有效组合，称之为最小方差组合；B 表示所有组合中期望收益最大的有效组合。则在不允许卖空时有效边界由连接 C 和 B 的向上凸出的曲线组成。

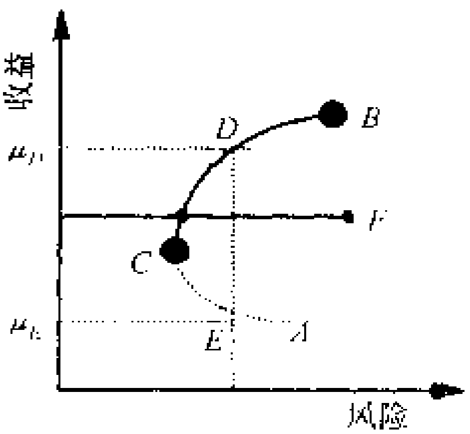


图 4-2

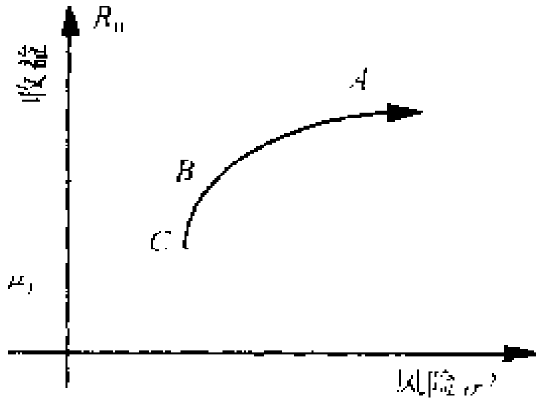


图 4-3

如图 4-2，CB 曲线之外的点均不在有效边界上。如 E 点收益为 μ_E，而与之方差相同的点 D，其收益 $\mu_D > \mu_E$，根据有效组合原则，投资应选择 D 点。

又如 F 点若是可行点，但与之收益相同的 G 点，其方差 $\sigma_G^2 < \sigma_F^2$，故应选择 G 而不选择 F 点。

2. 允许卖空的有效边界

卖空是投资者的投资策略之一。它是投资者预计未来证券价格下跌时的买卖行为；与通常的交易相反，是先卖出证券然后再将其买进，以获得买卖差价收益的方法。具体来说，投资者现在时点上从证券持有者手中借入证券（即负量持有），再将其卖出，在将来时点买进，再予以归还。在卖空条件下，其投资比例为负值。

允许卖空的有效边界如图 4-3，其中 C、B 的含义与不允许卖空含义相同，有效边界是从最小方差组合 C 开始，经过 B 向上延伸的向上凸出的曲线。

从图 4-3 可看出：通过卖空低收益的资产，并用所得收入购买高收益的资产，投资者可达到任何收益水平；同时，他的投资风险也增加了。在现实中由于卖空通常都有一定的限制，所以，B 点延伸的有效边界受现实制度的约束而处于一定的范围内。

3. 安全资产与风险资产的组合

首先考虑由一种风险资产和一种安全资产的组合。设安全资产的期望收益为 R_f(是定值，其收益方差为 0)，另外，设风险资产的期望收益为 μ，标准差为 σ，安全资产的持有量为 χ，投资于风险资产的比例是 $1-\chi$，所构成的组合资产的期望收益与标准差是：

$$\mu_p = \chi R_f + (1-\chi)\mu \tag{4-3}$$

$$\sigma_p = (1-\chi)\sigma \tag{4-4}$$

由两式整理得组合资产的收益与风险(标准差)的关系为：

$$\mu_p = R_f + \frac{\mu - R_f}{\sigma}\sigma_p \tag{4-5}$$

显然，是一条过$(0, R_f)$，(σ, μ)两点的直线，如图 4-4(a)所示：

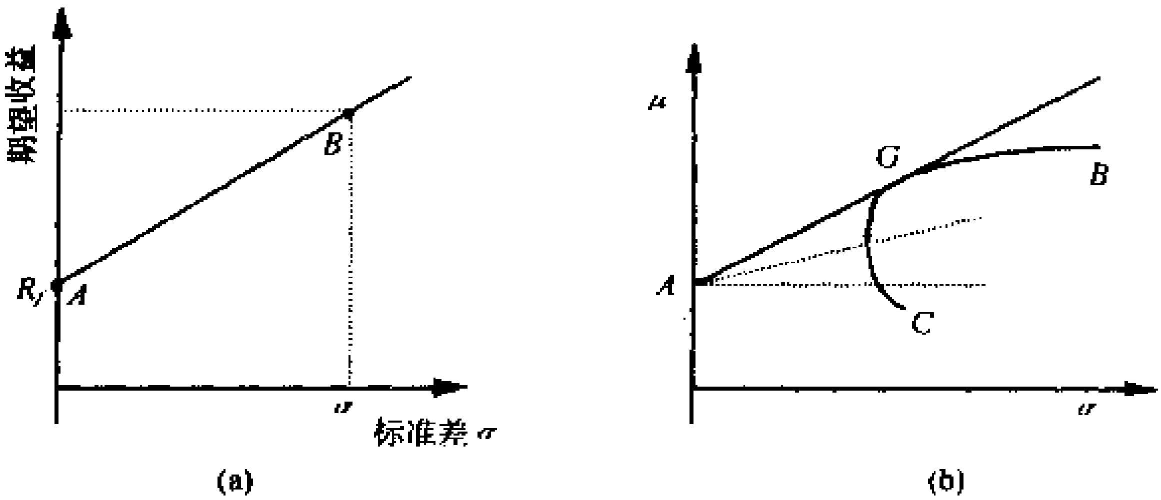


图 4-4 安全资产与风险资产的组合

线段 AB 是安全资产和风险资产可能组合的领域，其期望收益和风险都是两资产比例的加权和，因为都是在一次线性组合范围内，所以都是有效边界。

人们的投资机会，不仅在于安全资产与风险资产的轮番购入，而可能是通过借入资金，进行风险资产的投资。借入实际上就是负的贷出，而安全资产的卖空就等同于资金的筹集。假定贷出利率与借入利率相等，投资机会就从图 4-4a 的 B 点向右上方延伸，

也就是说，投资者可能选择的领域和有效边界是一条由 A 经 B 点延伸的直线。B 点的左方表示贷出一部分资金到安全资产，右边的射线表示借入一部分安全资产来购买组合。

以上分析同样可以推广到多个风险资产的情况。当市场上存在多个风险资产时，其风险资产组合的有效边界就是图 4-4b 所示的凸形集合。在此曲线上，无论对于哪一种风险组合，既没有风险水平相同而收益期望更高的组合，也没有期望收益相同而风险更低的组合。

若用曲线 CB 表示风险资产组合的有效边界，过 $A(0, R_f)$ 点作 BC 曲线的切线，切点为 G，则射线 AG 是安全资产与风险资产的组合。

二、有效边界的确定方法

有效边界的研究，近年来非常活跃。确定有效边界的方法有两种：图解法与规划法。

1. 图解法

允许卖空的条件下，安全资产与风险资产组合的有效边界是曲线 BC，如图 4-5。

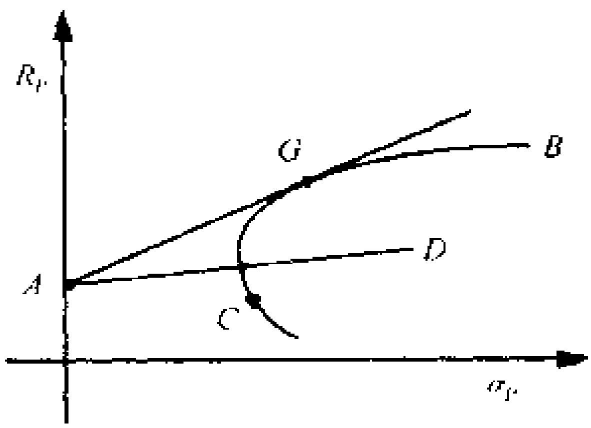


图 4-5

安全资产与风险资产组合的有效边界是过 $A(0,R_f)$ 并与曲线 BC 相切的直线，设切点为 G，这条切线是连接 A 与 BC 上的风险资产组合构成的射线中的斜率(记为 θ) 最大者；因此，在安全资产与风险资产组合下，可通过求解下述模型得到 G，射线 AG 即为有效边界，故此法称为图解法。

设安全资产的利率为 R_f，n 种风险资产组合的收益率为 R_p，组合资产风险为 σ_p，第 i 种风险资产的预期收益为 R_i，χ_i 为投资比例系数，$i = 1,2,\cdots,n$ 。

有效边界模型：
$$\begin{cases} \max\theta = \dfrac{R_p - R_f}{\sigma_p} \\ \text{S.T}: \sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i = 1 \end{cases} \tag{4-6}$$

$$\because R_f = 1 \cdot R_f = (\sum_{i=1}^{n}\chi_i)R_f = \sum_{i=1}^{n}\chi_i R_f$$

$$\therefore R_p - R_f = \sum_{i=1}^{n}\chi_i R_i - \sum_{i=1}^{n}\chi_i R_f = \sum_{i=1}^{n}\chi_i(R_i - R_f)$$

$$\therefore \theta = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\chi_i(R_i - R_f)}{\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}\chi_i\chi_j\sigma_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{4-7}$$

故可把求解模型(4-6) 化为用(4-7) 表示的 θ 最大化，即把有约束条件下的最大化问题转化为无约束的最大化问题。由多元函数极值求法，可求出最优解 $\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_n$。

2. **规划法**

即利用二次规划的方法来确定有效边界。它不需要借助存在安全资产这个假定。

设有 n 种资产，第 i 种资产的收益率为 R_i，投资比例系数为 $\chi_i(i = 1,2,\cdots,n$，χ_i 可正、可负，即允许卖空)，第 i 种资产与第 j

种资产的协方差为σ_{ij}，R_0为组合资产既定的收益水平，则在既定收益水平下，方差最小的资产组合模型为：

$$\min\sigma_P^2 = \sum_{i,j}^{n}\chi_i\chi_j\sigma_{ij}$$

$$\text{S.T}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\chi_i R_i = R_0\\ \sum_{i=1}^{n}\chi_i = 1\end{cases}$$

令 $X = (\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n)^T$，$E = (\sigma_{ij})_{n\times n}$ 为协方差矩阵。

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} R_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上述资产组合模型可简化为：

$$\min\sigma_P^2 = X^T E X$$

$$\text{S.T}: AX = B \tag{4-8}$$

上述模型为线性约束下的二次规划。利用拉格朗日乘法，可求出最优投资比例系数与方差：

$$X = E^{-1}A^T(AE^{-1}A^T)^{-1}B \tag{4-9}$$

$$\sigma_P^2 = X^T E X = B^T(AE^{-1}A^T)^{-1}B \tag{4-10}$$

证明过程略[10]。

定理 4.1：记$(AE^{-1}A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11}, m_{12} \\ m_{12}, m_{22} \end{bmatrix}$，设$(R_0, \sigma_P^2)$是有效边界上的点，则$\sigma_P^2$与$R_0$的关系为：

$$\sigma_P^2 = m_{11}R_0^2 + 2m_{12}R_0 + m_{22} \tag{4-11}$$

R_0的取值范围为 $R_0^* \leqslant R_0$，其中

$$R_0^* = -\frac{m_{12}}{m_{11}}$$

证明：根据(4-10) 式可得：

$$\sigma_p^2 = B^T(AE^{-1}A^T)^{-1}B$$

$$= [R_0 \quad 1]\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 \\ 1 \end{bmatrix} = m_{11}R_0^2 + 2m_{12}R_0 + m_{22}$$

因 E 为协方差矩阵,则 E 必可逆。从而 $AE^{-1}A^T$ 为对称正定阵,对称正定矩阵的逆矩阵仍为正定矩阵。

故 $(AE^{-1}A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$ 为正定矩阵,则 $m_{11} > 0$, $m_{22} > 0$,且

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix} = m_{11}m_{22} - m_{12}^2 > 0$$

由于 $m_{11} > 0$,故 $\sigma_p^2 = m_{11}R_0^2 + 2m_{12}R_0 + m_{22}$ 所代表的曲线为一条开口向右的抛物线(如图 4-6 所示)。

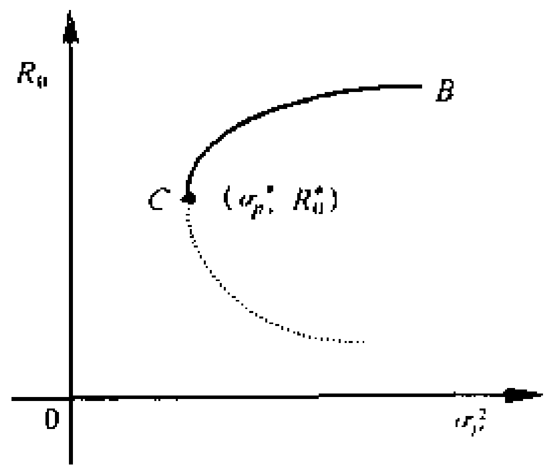


图 4-6

σ_p^2 是 R_0 的二次函数,其极小值发生在:

$$R_0^* = \frac{-2m_{12}}{2m_{11}} = -\frac{m_{12}}{m_{11}}$$

相应极小值为:

$$(\sigma_p^*)^2 = m_{11}(-\frac{m_{12}}{m_{11}})^2 + 2m_{12}(\frac{-m_{12}}{m_{11}}) + m_{22}$$

$$= \frac{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}{m_{11}} > 0$$

即最小方差组合 C 的方差大于 0，有效边界是 CB，它是一条凸出的曲线（抛物线的一部分），由图形可知，有效边界上的任意点，必有 $R_0^* \leqslant R_0$。

当 $R_0 \leqslant R_0^*$ 时，尽管公式(4-10)可求出投资风险最小组合证券，但不是有效投资组合。

定理 4.2：在不允许卖空的条件下（即 $\chi_i \geqslant 0$），设 (R_0, σ_p^2) 是有效边界上的点，则 R_0, σ_p^2 满足关系式(4-11)，且 $R_0^* \leqslant R_0 \leqslant \max\{R_i\}$。

证明：同上，下证 $R_0 \leqslant \max\{R_i\}$。

在不允许卖空的条件下，期望投资收益 R_0 不可能取任意大的值。此时 $\chi_i \geqslant 0, (i = 1, 2, \cdots, n)$，从而有：

$$\begin{aligned} R_0 &= \chi_1 R_1 + \chi_2 R_2 + \cdots + \chi_n R_n \\ &\leqslant \chi_1 \max\{R_i\} + \chi_2 \max\{R_i\} + \cdots + \chi_n \max\{R_i\} \\ &= (\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_n)\max\{R_i\} \\ &= \max\{R_i\} \end{aligned}$$

结合上面证明，有 $R_0^* \leqslant R_0 \leqslant \max\{R_i\}$。

例 4-3　已知三种证券的协方差矩阵为：

$$E = \begin{bmatrix} 140 & -120 & -150 \\ -120 & 240 & 100 \\ -150 & 100 & 300 \end{bmatrix}$$

各证券投资收益率的期望值分别为 $R_1 = 16\%$，$R_2 = 18\%$，$R_3 = 20\%$。试确定预期投资收益率 R_0 的变动范围和 R_0 与投资风险 σ^2 之间的关系。

解:由 E 矩阵的性质可知,$\sigma_{11}=140,\sigma_{22}=240,\sigma_{33}=300$。

$$A=\begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.16 & 0.18 & 0.20 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix} R_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(AE^{-1}A^T)^{-1}=\begin{bmatrix} 420974.5763 & -73241.52542 \\ -73241.52542 & 12755.50848 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{12} & m_{22} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_p^2=[R_0\quad 1]\begin{bmatrix} 420974.5763 & -73241.52542 \\ -73241.52542 & 12755.50848 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=420974.5763R_0^2-146483.0508R_0+12755.50848 \quad (4\text{-}12)$$

$$R_0^*=\frac{-m_{12}}{m_{11}}=\frac{-73241.52542}{420974.5763}=17.4\%$$

$\max\{R_i\}=\max\{0.16,0.18,0.20\}=0.20$。故 R_0 的变动范围为:$17.4\%\leqslant R_0\leqslant 20\%$。在区间[17.4%,20%]以内,给定一个 R_0,由(4-12)式即可算得相应的投资风险 σ^2,表 4-5 给出一组 R_0 与 σ^2 的值。

表 4-5

R_0	17.4%	17.5%	18%	18.5%	19%	19.5%	20%
σ^2	12.88	13.32	28.14	63.70	120.9	198.8	297.8

从上述表中看出两点:

(1) 随着 R_0 的增加,σ^2(风险)迅速增加,从 12.88 很快增加到 297.8。

(2) 组合证券能有效地降低风险。例如单项证券中第二种证券的收益率均值为 18%,风险值为 240,而采用组合投资实现同样的收益率为 18%,风险值均为 28.14,风险大大降低。

第四节 无差异曲线

Markowitz 假定大多数投资者都是风险厌恶者或理性投资者。

即在收益一定的条件下，选择风险最小的资产；在风险相同的条件下，选择收益最大的资产。在上述假定下，得到投资者决策的机会集——有效边界。本节讨论投资者如何在机会集上作出投资决策。

一、无差异曲线

当两个不同的投资方案产生的结果不易直接比较时，如一个投资方案的期望收益大，但风险也大，另一个投资方案的期望收益小，但风险也小时，可用效用函数来选择方案。某投资方案的效用是该方案的结果给予投资者的满足程度的度量。因此，它是一种主观评价。

对于同一投资方案，投资人对风险的不同偏好，决定其满足程度不同，因而效用函数不同。（参见第二章）

在风险与收益空间上对应的一种曲线称为无差异曲线，在该曲线上的任意两点，投资者所获得的效用相同（无差异）。见图 4-7。

图 4-7 中，当方案 A 由方向 a 所指的任一方案代替后，投资者的效用就会增加，因为 a 线上任一点，在期望收益增加同时，方差并不增加；相反，朝 b 方向的任何改变都将会减少投资者的效用，因为这时方差增加而收益不变；但我们可以在两者间找到一点（如 B），所得投资者的效用既不增加也不减少。比如用 B 代替 A，期望收益和方差都有增加，但其效用却没变，这说明增加的收益恰好被增加的风险所冲销，所以，这两种投资对投资者而言是无差别的。重复上述程序，我们可以找到无差异曲线 I_1；如果从 C 点出发，按照以上程序，又可以找到另一无差异曲线 I_2 等等。

从上述图例中，我们可发现无差异曲线的几个特征：

(1) 所有落在一条给定的无差异曲线的组合对投资者均有相同的满意程度。

(2) 无差异曲线越是在上方表示效用水平越高。如上图，A 与 B 具有相同的满足程度，但 C 比组合 A 和 B 更受欢迎。因为组合 C

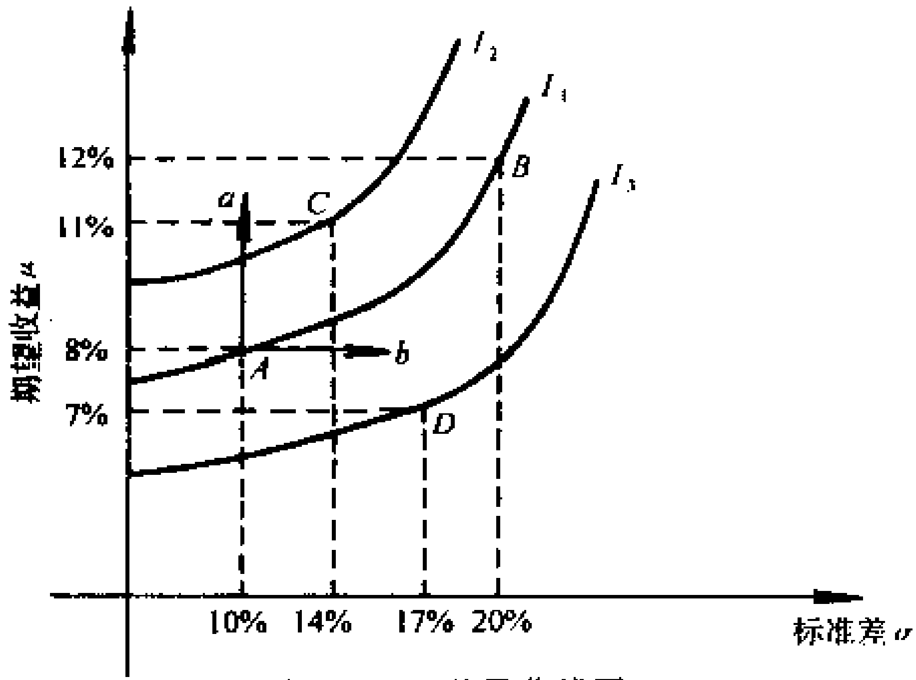


图 4-7　无差异曲线图

具有 11% 的收益率和 14% 的标准差。因 C 相对于 A 有一足够大的收益率补偿它较高的标准差。结果 C 比 A 更令人满意，同样，C 比 B 有一足够小的标准差，多于补偿它所需的效益，结果，C 比 B 更令人满意。

(3) 每个投资者都有无数条无差异曲线。简单地说，在无差异曲线 I_1 与 I_2 之间，还可以有第三条或者更多的无差异曲线。

二、风险偏好与无差异曲线

图 4-8 所描绘的曲线就是表示投资者偏好状态的效用无差异曲线族。同一曲线上的点期望收益与方差可以不同，对于投资者来说，其效用是无差别的，且效用无差异曲线越是在上方，其满足水平越高。

(1) 对于风险回避者，由于对同一曲线上的两种投资对象的偏好是无差别，方差较大的投资对象，与之对应的期望收益也一定大，所以，风险回避者的无差异曲线如图中 a 所示，向右上方倾斜，

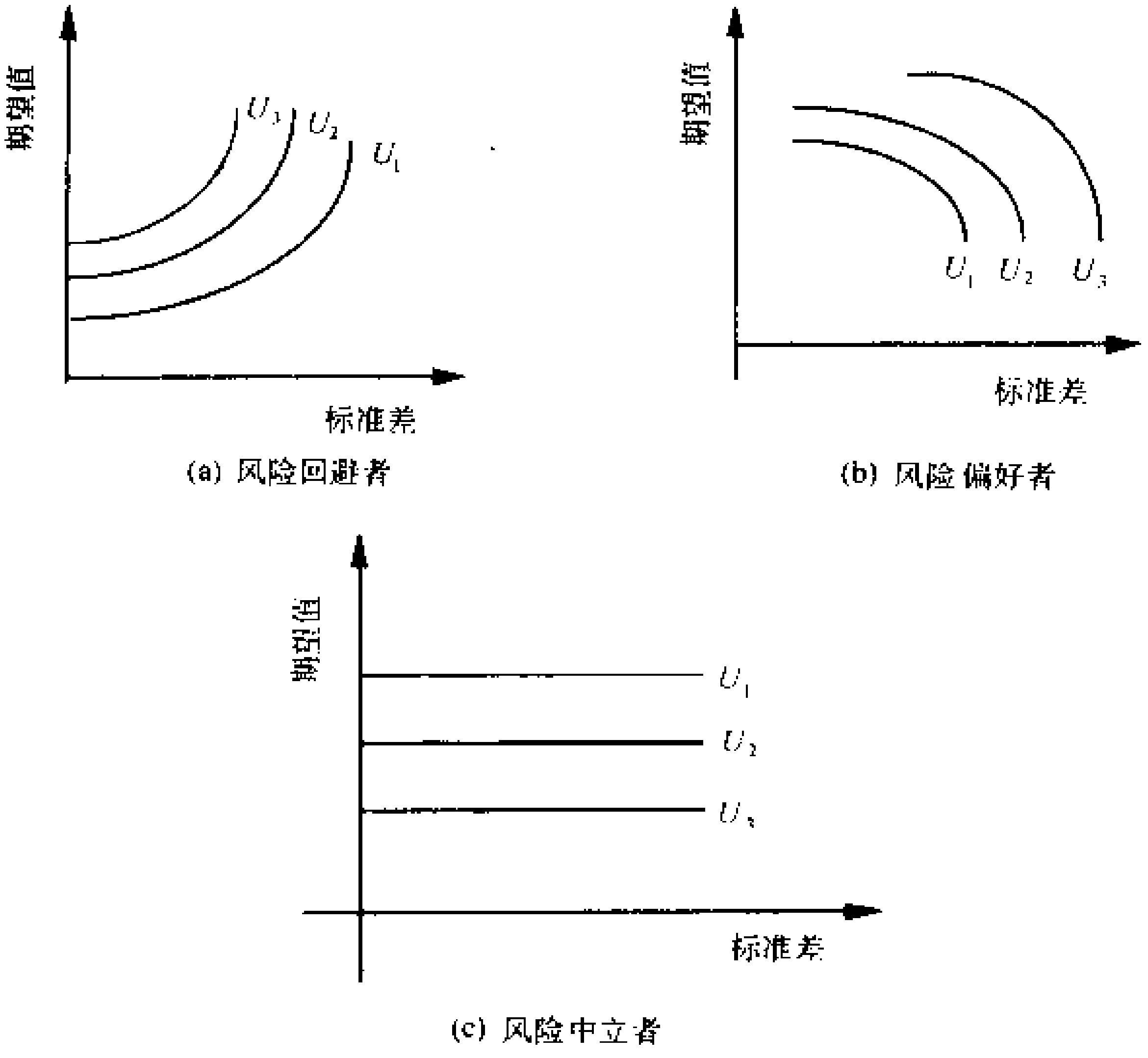


图 4-8

它表示当方差增加时,必须有相应更高的收益来补偿。期望收益相同,方差越小的投资对象,满足程度越高;同样,方差相同期望收益越大的投资对象,满足程度高,所以,无差异曲线越是上方,表示效用水平越高。

若 W 表示投资的结果,$U(W)$表示 W 的一个函数(效用函数),可以证明效用的二阶导数,$U''(W)<0$,换句话说,对于风险回避者,边际效用是递减的。

(2) 风险偏好者,无差异曲线如图 b 所示,向右下方倾斜。由

于在同样的满足程度下，期望收益越小的投资对象，其方差必定大。即使是期望收益相同，方差越大满足程度越高。对于风险偏好者，$U''(W)>0$，即边际效用是递增的。

(3) 风险中立者，无差异曲线呈水平状态，如图 c 所示。由于期望收益越大，满足程度越高，而与方差无关系，其二阶导数 $U''(W)=0$。

由于投资者的最终选择取决于对风险的偏好，根据期望效用最大化原则，他所选择的将是使其达到最高无差异曲线的方案。

假定某投资组合的有效边界为如图 4-9 的曲线 AB，根据一定效用假设，得到无差异曲线族 U_1，U_2，U_3 等。

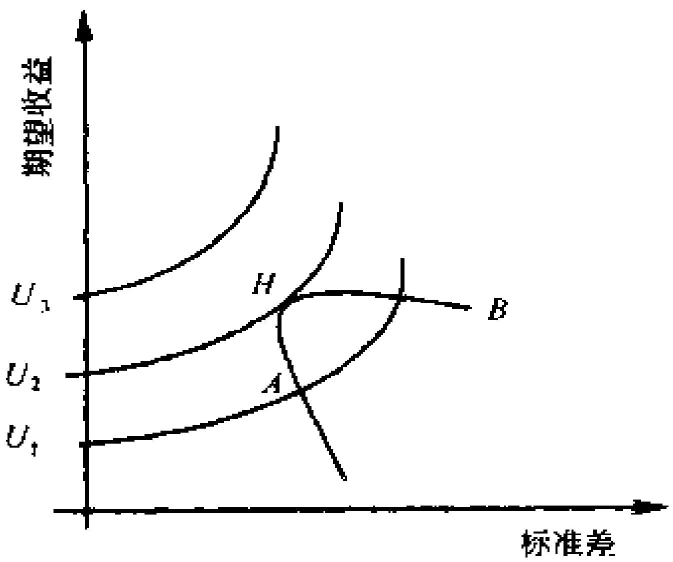


图 4-9

无差异曲线族中有一条与有效边界相切。设切点为 H，则 H 对应投资者在机会集中效用到达最大的组合，故对应于他的最优投资方案。

第五节　对 Markowitz 模型的评价

Markowitz 投资组合理论的产生，推动了金融市场理论的创

新，被誉为金融理论的一场革命。夏普和泰勒对发展和完善 Markowitz 理论作出了重大贡献，他们共同摘取了 1990 年诺贝尔经济学奖的桂冠。

一、Markowitz 理论的主要贡献

（1）从理论上否定了关于持有越多证券越有利于分散风险的观点。Markowitz 认为持有一定数量的证券有助于分散风险。因为不同的证券在风险和收益上具有互补性的优点。如果组合中包含过多的证券，不仅管理费用增加，研究成本也增大，效果可能适得其反。研究结果表明 20～30 种证券的资产组合最大限度地分散了非系统风险。

（2）Markowitz 揭示了分散风险的关键在于选择相关程度低的证券构成资产组合。传统的观点认为要降低风险，在组合中就要将低风险、低收益的股票、债券纳入到资产组合中，这种组合的代价使风险降低的同时，收益也降低。Markowitz 组合理论的意义是在不牺牲收益的前提下最大限度地分散风险。他运用计算协方差的数学方法，建立了经济数学模型；无差异曲线和有效边界切点上构成的有效组合，使投资者在同样的风险水平下选择最大的收益率，或在同样的收益率下选择最小的风险。

（3）Markowitz 运用图解法科学地确定了最优投资比例关系。传统的投资分析对于各种资产应占多少比例，要不就等比例持有，要不就按好、中、坏三种情况划分比例。Markowitz 认为这种方法缺乏科学性，也不能构成最优组合。他认为，在预期收益率、方差和协方差一定的条件下，可以通过二次规划的方法解出最优的比例。

以上就是 Markowitz 模型超越前人的科学成就。但也有人对此模型提出怀疑。

经验结果表明，若以 Markowitz 模型为基础来运作投资基金，

在扣除咨询费用后的业绩与随机投镖方式选中的股票组合的业绩没有显著差异。这种令人惊讶的结果使人们在实际运作时，只用到现代资产组合理论的思想，并不真正用其模型。究竟是什么原因使 Markowitz 的模型在实际运用中表现不佳呢？解决的办法何在？

二、Markowitz 模型存在的一些问题

模型本身及所得到的解是严谨的。该理论模型在实际应用中成绩不佳的原因只能在于投入数据的不准确。

(1) 模型中资产收益率与风险的度量需进一步明确。目前在财务管理中，仅用回归分析技术来预测公司的期望收益率，由于回归分析只适用于因变量按某一幅度稳定增长或降低的情形，这与公司期望收益率的决定机制不相吻合；用该技术来预测公司的期望收益率，是导致模型在实际运作中成绩不佳的重要原因。

关于风险的度量，一般地，用资产收益率对期望收益率的偏离程度来测度风险，即用资产收益率的标准差作为风险的度量。对风险的定义，首先就存在概念上的差异，即使证券研究者或分析者都同意用资产收益率的标准差作为风险的度量，但通常只考虑一个风险因子——市场因子。实证研究表明，存在多个风险因子(如市场因子、利率因子和行业因子等)。

另有一些研究表明，可用半方差、收益率偏差绝对值之和作为风险的度量指标[24]。

(2) Markowitz 理论是单期性的，即他设计的投资组合模型只有在一期期末才加以修正。但在现实中，证券的价格、风险和收益都在不断地发生变化；证券之间的相互关系也是随时在改变，在瞬息万变的金融环境中，Markowitz 的资产组合不能及时地对变化情况进行调整。从这个角度看，Markowitz 的投资组合方法很可能不是最佳的，甚至是无效的。

(3) Markowitz 模型以数学、统计学作为基础，其繁复的计算使该理论方法缺乏可操作性。例如协方差的计算问题，如果一项组合中含有 20 项资产的组合，得计算 20 项方差和 190 项协方差 (20×190/2)，这样的工作量即使是专家也不胜其烦。当然，这种重复的计算过程可由计算机处理。

三、解决方法

如何解决现代资产组合理论应用中存在的问题？通过上述分析可以发现，要使该理论成功地运用于实际工作，需要大大提高资产收益率和它的风险预测的准确度，为此，需要做到以下几点：

(1) 进一步加强风险研究，对资产收益率的风险含义和它的决定机制有更深刻的认识；对风险的各种因子进行分析；直接利用有关权威部门的预测结果，结合对宏观经济形势和行业前景的预测对资产收益率及风险作出更准确的预测。

(2) 改进资产收益率的预测方法，以提高其预测准确度。考虑到公司的每件产品都有一个从研制→投产→大规模销售→滞销→淘汰的生命周期，以及还有许多随机因素影响许多产品的销售，利用 Ligstic 模型、马尔可夫(Markov)状态转移矩阵，研制预测产品收益率的模型，以预测每件产品在将来某个时期的收益率，再把每件产品的预期收益率加权平均(权重为各产品的利润额百分比)，则可得出公司的预期收益率。另外，考虑新的利润增长点，对公司的预期收益率进行及时修正。

关于数学方法的通俗化及单期性问题有待进一步探讨。我国的证券市场目前尚不成熟，投资基金的运作远没有达到成熟市场的水平。在投资基金的运作上，当然不能简单地套用资产组合理论模型。

本章小结

本章讨论投资多元化的作用，并在此基础上定量分析了组合的收益与风险，研究相关性不同的证券组合的效果，探讨了提高投资组合效果的途径。

重点讨论 Markowitz 模型及其推广。Markowitz 模型首次用定量研究的方法揭示了风险资产的投资比例关系；通过引入有效边界和无差异曲线的概念，从几何上解释寻找最优组合的方法。投资者的无差异效用曲线与有效边界的切点即是最优组合。Markowitz 的组合理论为现代资产组合理论奠定了坚实基础。

关于投资者风险偏好与效用函数的评定见杨廷干文[20]。

关于无差异曲线的测定，可参见刘志强的博士论文[10]。

本章第二节，引用作者最近的一篇论文结果，对上海证券市场进行实证分析，介绍利用 Markowitz 模型确定投资比例系数的方法[12]。

第五章　资本资产定价模型

Markowitz 的组合理论解决了理性投资者的最优投资决策问题——如何确定投资比例。进一步要问:在资本市场达到均衡(供给=需求)时,或所有投资者的投资行为均与现代资产组合理论描述的一致时,资产的收益如何决定、资产收益的风险如何测度,以及任意一种资产的期望收益与风险之间的函数关系是什么?

Markowitz 模型选择证券组合需要大量而复杂的计算,这不仅使一般的投资者难以胜任,即使对有相当数学基础的投资者也不胜其烦。投资者需要寻找一种更简单实用的方法。

斯坦斯大学教授威廉·夏普(William F Sharp)在 1963 年发表了《证券组合分析的简化模型》一文,提出了一种证券组合选择的新方法,称为资本资产定价模型(Capital Assets Pricing Model , CAPM)。CAPM 不仅具有理论上的意义,而且已被广泛用于组合决策中的资产选择和财务管理中的计算留存收益成本。夏普因此也获得 1990 年的诺贝尔经济学奖。

第一节　基本假定与市场组合

一、基本假定

现实的资本市场是复杂的,用模型来研究时,需对它作某些简化才能抓住主要矛盾,得到反应资本市场实质的模型。当然,某些假定与现实不甚吻合。对此问题,米尔顿·弗里德曼认为:“关于理论的有关假定问题不是在于它们能否描述真实,它们永远也做不

到这一点，而在于它们能否充分符合我们的目标，这一问题的惟一答案是看理论是否成立，即它能否产生充分精确的预测。"（米尔顿·弗里德曼《实证经济学论文集》1982）

为了讨论方便，资本市场理论作了以下八大假设：

① 投资者是风险回避者；

② 投资者可以在无风险利率下无限制借入或贷出，在资本市场上无风险证券确实存在；

③ 所有投资者对各证券的未来期望收益率与标准差的预测将会一致，因此，市场上有效边界只有一条；

④ 投资者的投资期限相同；

⑤ 证券的交易单位可以无限制地分割；

⑥ 市场上不存在交易成本和税金；

⑦ 资本市场是一个竞争的市场。有关证券的信息对所有投资者是均衡地传播；

⑧ 资本市场处于均衡状态（需求＝供给）。

上述假设需以金融市场的有效性假设为前提。市场有效性假设是指价格已经反映了所有可能得到的消息。

以上的简化条件将复杂的资本市场抽象为一个完全竞争的市场，并将问题的焦点从如何投资转化为如果每个人以理性方式投资，证券价格会有什么结果。从而揭示市场均衡状态下每一种证券的收益与风险的关系，为建立资本资产价格理论奠定了基础。

二、市场组合（Market Portfolio）

由第四章第三节内容可知，存在无风险资产的投资机会时，所有的投资者面对的是相同的直线 RM 表示的有效集（如图 5-1）。每个人根据自己的无差异效用曲线与 RM 的切点选择不同的组合。例如投资者甲的无差异效用曲线簇为 $I_1, I_2, I_3, \cdots$，若没有安全资产的话，则他将选择组合 C，效用值为 I_1，现在他选取的组合

为 A，效用值提高为 I_2。虽然 I_3 效用值更高，但这条曲线与有效集（RM）不相交，就是说现有的组合都达不到 I_3 的效用值。同样，投资者乙的无差异效用曲线簇为 $J_1, J_2, J_3, \cdots$，所以他选取组合 B。有效组合边界 RM 上对应的所有的组合都是由安全资产与风险证券的有效组合 M 组成的。它们之间的区别仅在于组合中这两种成分的相对比例不同。譬如说组合 A 中的两者的比例为 0.30 : 0.70，组合 B 中两者的比例为 $-0.45 : 1.45$，换句话说，不管投资者对收益和风险的偏好如何，他们都选择组合 M 和安全资产来构造自己的最佳的投资方案。其中，组合 M 是由资本市场上可供选择的风险证券按一定比例组成的，称为风险证券的有效组合。

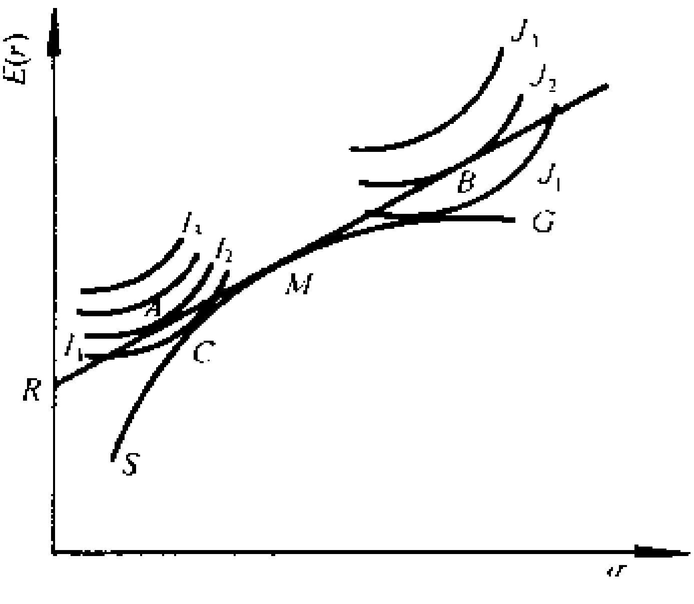


图 5-1

于是，我们得到以下的结论：

风险证券的有效组合 M 的构成以及其成分证券所占的比例，与投资者的偏好无关。

组合 M 中究竟包括哪些风险证券呢？根据均衡市场的原理，在市场达到均衡状态时，每种风险证券的价格将调整到使其供求

达到均衡，即市场上每一种证券的流通量正好等于该证券的需求量。就是说，每种风险证券既不稀缺，也没有剩余。由于每个投资者除了安全资产以外，只持有风险证券组成的组合 M，所以组合 M 中必须包括市场上所有的风险证券。倘若有一种证券不包括在组合 M 之中，又没有人愿意以当前的价格购进这种证券，那么持有这种证券的投资者的投资组合必然不是最佳的组合，因为，对所有的投资者最佳的风险证券的组合只有惟一的组合 M。于是，该投资者势必要抛掉这种证券，优化自己的组合。其结果，该种证券的价格便会下跌，它的期望收益率将会上升，直到其他的投资者愿意购买为止。达到市场均衡时，这种证券就会被接收到组合 M 中去，为全体投资者所持有，既不稀缺，也不剩余。这时，每种证券在组合 M 中所占的份额正好等于其市场价值占市场上全部证券的市场价值的权重。

因此，组合 M 又称为市场组合。所谓市场组合就是由全部风险证券组成的证券组合，每种证券的投资比例正好是市场价值与全部风险证券的市场价值之比。市场组合是资本市场均衡理论中一个重要的概念。根据假设条件，投资者理性的、有效的投资中只包含安全资产的借贷和市场组合。

第二节　资本市场线

一、资本市场线的数学模型(CML)

在资本资产价格理论的框架中，只要知道无风险资产的收益率、市场组合的期望收益及标准差，理性投资者就很容易确定有效组合边界(见图 5-2)。

假定 R_f 为完全市场上的无风险利率，ER_p 和 σ_p 代替投资组合的期望收益率和风险，M 点代表市场投资组合。从图 5-2 可以看

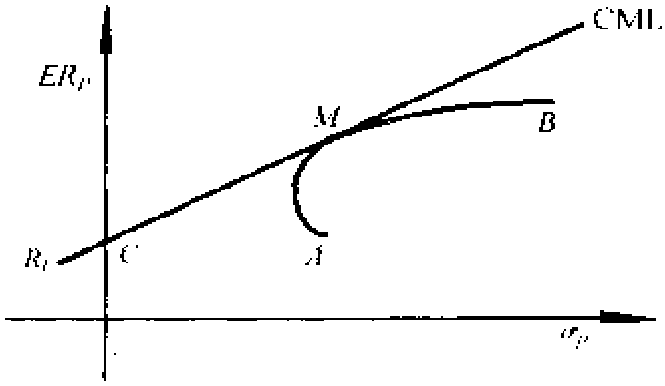


图 5-2

出 CML 线上的投资组合均优于 *AMB* 弧上的其他组合(根据收益方差准则可知)。因此,CML 线为新的有效边界。

根据资本市场理论的第二条及第三条,市场有效边界只有一条,就是从 R_f 发出的与 *AMB* 相切的直线,此线称为资本市场线(CML),资本市场线表示在以无风险利率借入或贷出资金情况下的有效边界。

资本市场线反映了组合资产的风险与收益之间的线性关系,所在直线过$(0, R_f)$及$M(\sigma_M, ER_M)$两点,由直线的点斜式方程可得资本市场线的数学模型为:

$$ER_P = R_f + \left(\frac{ER_M - R_f}{\sigma_M}\right) \times \sigma_p \qquad (5\text{-}1)$$

式中,ER_p 和 σ_p 分别代表投资组合期望收益率与标准差,R_f 表示无风险利率,ER_M 和σ_M 代表市场组合 M 的期望收益率与标准差。

由公式(5-1)可看出,R_f 为截距,是完全市场借贷的利率水平或无风险证券(如国库券等)的报酬。$(ER_M - R_f)/\sigma_M$ 为直线 CML 的斜率,其斜率为正值,表示风险每增加一个单位,期望报酬相应增加的数量。直线斜率可称为风险价格(Price of Risk)。从 CML 模型可知,有效组合的总报酬(或收益)等于无风险利率加上风险贴水(Risk Premium),而风险贴水又等于风险价格乘以投资组合的风险。

总收益 = 无风险收益 + 风险收益

例5-1 设市场上的无风险利率为8%，市场组合的期望收益率为15%，标准差为10%，若投资者期望得到12%的收益率，根据资本市场线，他的组合的标准差应为多少？他的组合的构成如何？

解：由公式(5-1)，可知他的组合的收益和风险关系为：

$$12\% = 8\% + \frac{15\% - 8\%}{10\%}\sigma_p$$

解得：$\sigma_p = 5.71\%$

设他投资于市场组合的比例为 X_M，投资于无风险资产的比例为 $1 - X_M$。由于无风险资产收益是稳定的，标准差为0(即无风险)，故：$\sigma_p = X_M \cdot \sigma_M = X_M \cdot 10\% = 5.71\%$

$$X_M = 0.6$$

$$1 - X_M = 0.4$$

即该投资者投资于无风险资产的比例为0.4，投资于市场组合的比例为0.6，这个组合的期望收益率为12%，标准差为10%。

二、资本市场线的几点结论

(1) M 点将资本市场线分成两部分。其中，RM 线段表示无风险资产贷款与市场组合结合的方案，即投资者将资金按比例分别投资于无风险资产和市场组合。RM 的延长线表示无风险资产的借款与市场组合结合的方案，即投资者以无风险收益率借得资金与本身持有的资金一起投资于市场组合。

(2) 资本市场线反映了有效组合的收益与风险的线性关系。任何一个风险证券对应的点都位于这条资本市场线的下方，因而任何个别的方案都不是有效的投资方案。资本市场线反映的是整个资本市场的特征，并非个别证券的收益与风险的关系。

(3) 资本市场线是条直线。这表明，资本市场线上的有效组

合都是线性正相关的。换句话说，这些方案的总风险中只有系统风险，不存在非系统风险。这是因为市场组合中，非系统风险已经相互抵消的结果。

(4) 根据上面的讨论，资本市场线解释了有效组合的系统风险与收益的关系。也就是说，资本市场将为承担系统风险的投资方案提供相应的风险收益。而非有效组合承担的非系统风险则不能获得相应的补偿。

第三节　资本资产定价模型

资本市场线说明了有效投资组合的期望收益与风险之间的关系，这种关系只适用于有效投资组合，至于无效性的投资组合与其他个别证券则不存在这种关系。

股市现象：在市场作用力的影响下，当整体市场上升时，大多数股票价格都上升；而当整体市场下降时，大多数股票都会出现负收益。所以，单个证券的价格随着整体市场中资产估价的变化而变化。如何描述某种证券收益与市场收益间的关系？

一、证券市场线

1. 证券市场线的数学模型(SML)

由第四章可知，当允许卖空及以无风险利率无限地借入贷出某资产时，投资者的最优决策模型为：

$$\max\theta = \frac{ER_M - R_f}{\sigma_M}$$

$$\text{S.T:}\quad \sum_{i=1}^{n}\chi_i = 1$$

其中，R_f 为无风险利率，M 点为市场组合，ER_i 表示第 i 个风险资产的期望收益，ER_M 为组合资产的期望收益，χ_i 为第 i 种资产的投

资比例系数，$i = 1, 2, \cdots, n$。

记 σ_{iM} 为第 i 种资产与市场组合 M 收益之间的协方差，或：

$$\sigma_{iM} = COV(R_i, R_M)$$

可以证明：证券的收益与风险关系如下式所示：

$$ER_i = R_f + \frac{ER_M - R_f}{\sigma_M^2} \times \sigma_{iM} \qquad (5\text{-}2)$$

公式表明：在均衡的状态下，风险证券或组合的期望收益率是它与市场组合收益的协方差的线性函数。在协方差——期望收益率坐标图上，可以用直线 SML 表示。这条直线称为证券市场线(Security Market Line，简称 SML)，如图 5-3 所示。

协方差反映了该风险证券的收益率随市场变化的程度，即该证券的风险中的系统风险。公式(5-2)说明，证券的系统风险越大，期望收益率越高。

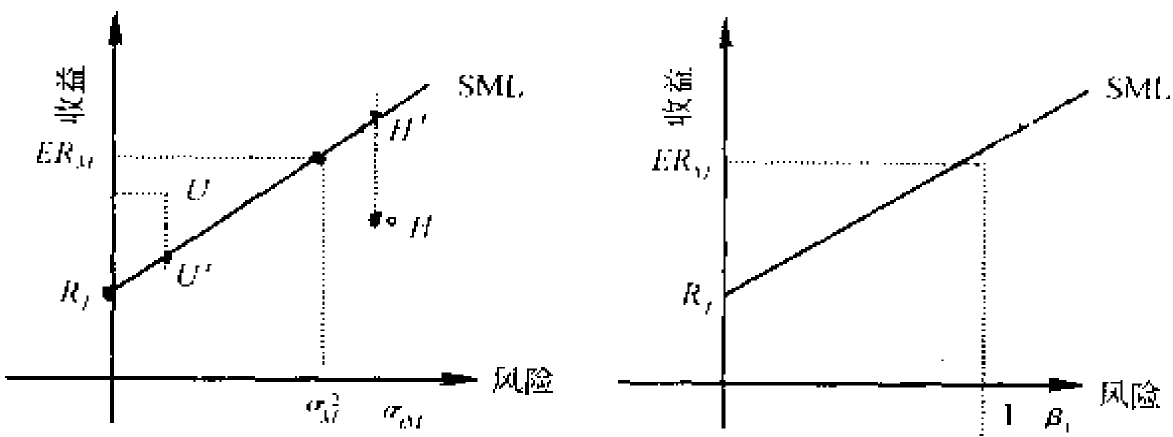


图 5-3 证券市场线

公式(5-2)中，R_f 为截距，$\frac{ER_M - R_f}{\sigma_M^2}$ 为直线的斜率。

特别地，当 $\sigma_{iM} = 0$ 时，风险证券的收益率，等于无风险利率 R_f；当 $\sigma_{iM} = \sigma_M^2$ 时，证券的期望收益率恰好等于市场组合的收益

率 ER_M。

由于 SML 是一条直线，由图 5-3 可知，证券市场线是经过无风险资产及市场组合所对应的点$(0, R_f)$，(σ_M^2, ER_M) 两点的一条直线。

2. 证券市场线的意义

证券市场线揭示了在市场均衡状态下，证券的期望收益率与其风险的关系。如果某种证券的期望收益率和协方差对应的点位于证券市场线上方 U 点处（见图 5-3），表示该证券的期望收益率高于在均衡条件下它的系统风险应得到的期望收益率，其实际价格低于其均衡价格。投资者增加持有该证券的比例，从而刺激对该证券的需求，对其价格产生向上的推动力。随着价格上升，增加该证券持有比例的边际收益逐渐下降，直到其对应的点落在证券市场线上的 U'点，这个过程才告中止。同理，如果证券或组合 H 对应的点落在证券市场的下方（见图 5-3），它的系统风险大于市场组合的风险而期望收益率小于市场组合的收益，说明它的价格高于相对于其系统风险的均衡价格。换言之，该证券或组合没有提供足够的收益率来吸引投资者。由于需求不足，供给增加，将压迫其价格下跌，边际收益上升，直到上升到 H'点，供求才达到均衡状态，价格才不再变动。证券市场线揭示了市场均衡状态下证券的期望收益率与其系统风险的关系。

二、资本资产定价模型

1. 资本资产定价模型（CAMP）

SML 是用协方差描述证券的系统风险的。人们习惯于以市场组合作为衡量风险的标准，即用证券（或组合）的协方差相对市场组合方差的倍数来说明证券（或组合）相对于市场组合的风险。

一般地，令：

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_M^2} \tag{5-3}$$

其中，β_i 表示证券 i 相对于市场组合的风险，称为贝塔系数；σ_{iM} 表示证券 i 的收益率与市场组合收益率的协方差；σ_M^2 表示市场组合收益率的方差，简称市场组合的方差。则 SML 表达式简化为：

$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f)\beta_i \tag{5-4}$$

其中，ER_i 为第 i 种证券的预期收益率，R_f 为无风险利率，ER_M 为市场组合预期收益率(如上证指数股票的收益率等)，β_i 为第 i 项证券的贝塔系数。β 系数是度量证券相对风险(或系统风险)的指标。

上述公式也适合于证券组合。

设 n 种风险资产组合的投资比例分别是 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$，投资组合的预期收益率记为 ER_P，市场组合的预期收益率记为 ER_M，考虑组合资产的贝塔系数 β 与各证券的贝塔系数之间的关系。

由公式(5-4) 知：

$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f)\beta_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

两边同乘 χ_i，得 $\chi_i \cdot ER_i = \chi_i \cdot R_f + \chi_i \cdot (ER_M - R_f) \cdot \beta_i$

组合资产收益率：

$$\begin{aligned} ER_p &= \sum_{i=1}^{n} \chi_i \cdot ER_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\chi_i R_f + \chi_i \beta_i (ER_M - R_f)] \\ &= R_f \sum_{i=1}^{n} \chi_i + (ER_M - R_f) \sum_{i=1}^{n} \chi_i \beta_i \\ &= R_f + (ER_M - R_f) \sum_{i=1}^{n} \chi_i \beta_i \end{aligned}$$

记
$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \beta_i \tag{5-5}$$

故　$$ER_p = R_f + (ER_M - R_f)\beta_p \tag{5-4*}$$

即组合资产的贝塔系数是构成组合证券贝塔的加权平均数。公式(5-4)及(5-4*)揭示了在市场均衡状态下，证券或证券组合的期望收益率是 β 的线性函数，解决了证券的定价问题。这就是著名的**资本资产定价模型**，即 CAMP **模型**。

资本资产定价模型把风险证券在均衡状态下的投资收益分成两部分：第一部分是 R_f，即无风险资产的收益率，它是由于资金被占用、消费被推迟而获得的时间报酬，其大小等于证券市场线的截距。第二部分是 $(ER_M - R_f)\beta_i$，表示证券的风险溢价。证券的系统风险越大，这部分收益越高。因而，这部分收益是承担系统风险而获得的风险报酬。

由公式(5-4)可以看出：当 $\beta = 0$ 时，$ER_i = R_f$；当 $\beta = 1$ 时，$ER_i = ER_M$。由这两点，便确定了图中 SML 直线。在均衡条件下，所有证券与组合，不管有效与无效，都位于该直线上。

从上述公式可知：每一贝塔水平可以看作是代表一个风险组，所有落入该风险组的证券都预期得到与该组相适应的收益，所以，已知证券收益的贝塔值，就可以利用 CAPM 模型直接求解期望收益。

例 5-2　现以一些虚拟的股票作例子，通过 β 系数来确定这些证券收益。

表 5-1

股票	A	B	C	D
β	0.7	1.0	1.3	-0.2

假定现在的无风险收益率为 6%，市场期望收益率 ER_M = 14%，则

$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f)\beta_i$$
$$= 0.06 + (0.14 - 0.06)\beta_i$$

$$= 0.06 + 0.08\beta$$

那么,这些股票的期望收益率分别为:

$$ER_A = 0.06 + 0.08 \times 0.7 = 0.116 = 11.6\%$$

$$ER_B = 0.06 + 0.08 \times 1.0 = 0.14 = 14\%$$

$$ER_C = 0.06 + 0.08 \times 1.3 = 0.164 = 16.4\%$$

$$ER_D = 0.06 + 0.08 \times (-0.2) = 0.044 = 4.4\%$$

分析:

市场平均风险一般记为 $\beta = 1$。股票 A 的风险比市场平均风险低($\beta = 0.7 < 1$),因此,投资者不可能获得与市场同样高的期望收益率,而只能得到 11.6% 的收益率;股票 B 的风险等于市场风险($\beta = 1.0$),因此,它能获得与市场同样的期望收益率 14%;股票 C 的风险大于市场风险,因此,可以获得与其风险一致的收益率 16.4%;而股票 D 的风险不仅低于市场风险,而且 β 值还是负数,(此情形实属罕见),因此,这个股票的期望收益率低于无风险利率,见图 5-4 所示。

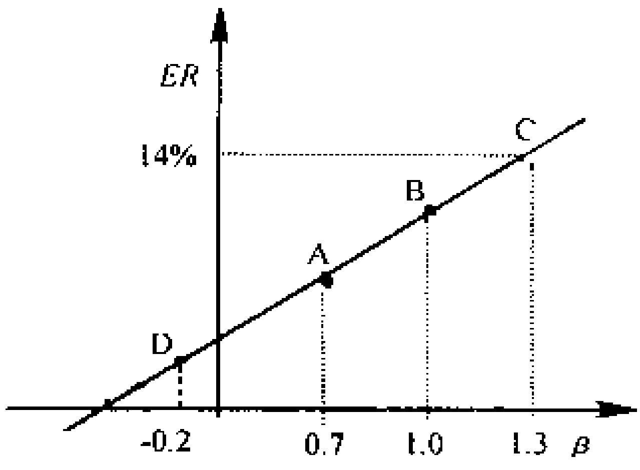


图 5-4 证券市场线

2. **证券特征线**(SCL)

夏普当初是利用线性回归模型,建立资本资产模型,基本思想

如下：

对于单一证券来说，证券的收益 R_i 可来自两个部分：一般的经济形势，个别证券的特性。一般的经济形势表现在市场平均收益率 R_M。因此，证券 i 的收益率减去市场利率 R_f 之后的超额收益 $R_i - R_f$ 由下式决定：

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_M - R_f) + \epsilon_i \tag{5-6}$$

这种表示某种证券的超额收益与市场组合的超额收益的对比关系称为证券特征线(Security Characteristie Line, SCL)。

以 $R_i - R_f$ 为纵轴，$R_M - R_f$ 为横轴作图，即得到证券特征线，如图 5-5 所示。

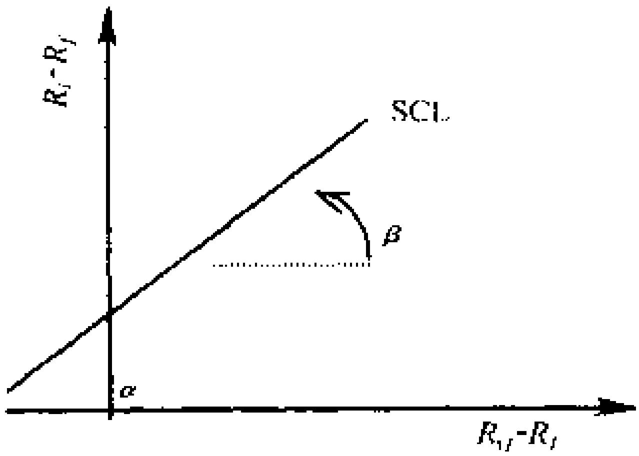


图 5-5 证券特征线

3. CAPM 模型的参数

CAPM 模型含有三项基本要素，即：无风险收益率、市场风险补偿及 β 系数。

(1) 无风险收益率

预期收益率的起点是无风险收益率，实际上并不存在无风险的资产。以国库券作为无风险资产，主要是因为国库券不会有拖欠不还的风险；但是，投资于长期国库券，在利率上升时，也会遭受资本损失。由于在实践中不能找到一种真正的无风险收益率作为

CAPM 的依据，所以，国外主张采用长期国库券的利率。

(2) 市场风险补偿

即预期市场收益率减去国库券利率，就是市场风险补偿的估计数。

(3) β 系数

β 系数是一个标准化的系统风险的衡量指标。它是资本资产定价理论中的一个重要概念，有必要详细讨论。

三、β 系数的确定

1. β 系数

在美国等成熟市场，有许多机构从事 β 系数研究，提供各种上市公司历年的 β 系数，形成日渐兴旺的处理 β 的行业。

β 系数是度量证券相对风险的指标，它反映了证券的系统风险与市场总体风险之间的关系。我们将证券收益率写成随机变量的关系式：

$$R_i = R_f + \beta_i(R_M - R_f) + \varepsilon_i$$

由方差的性质可得，证券 i 的收益率的方差与市场组合收益率的方差关系为：

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2$$

即证券的风险 σ_i^2 由两部分组成：第一部分是 $\beta_i^2 \cdot \sigma_M^2$，它表示与市场整体风险($\sigma_M^2$)有关的风险，称为证券的市场风险或系统风险；第二部分 $\sigma_{\varepsilon i}^2$，它是剩余误差的方差，表示与市场无关的风险，称为证券的非系统风险。即：

总风险 = 系统风险 + 非系统风险

市场组合 β 系数一般被定为 1。

① $\beta_i > 1$，说明某股票的价格变动大于整个股市价格变动，即股票 i 的风险大于市场风险，称为进攻型股票；

② $\beta_i < 1$，说明股票 i 的风险小于市场风险，称为防守型股票；

③ $\beta_i = 1$，说明股票 i 的风险等于市场风险，属于中性股票。

2. β 的估计

估计 β 的方法通常有三种。

(1) 历史的 β

即根据历史数据估计 β，利用协方差公式，即：

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

进行计算，计算量大。

历史 β 系数计算以承认未来的风险等同于过去的风险为前提。这极不可靠的前提致使各种 β 系数预测能力不强。

(2) 基础的 β

历史的 β 测度了股票收益的风险中由股市引起的那部分风险，但公司的某些特征（如公司规模、流动性等），也影响公司股票的风险，若考虑这些因素，可能能更好地预测 β。常用的组合方程是：

$$\beta_i = a_0 + a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \cdots + a_r\chi_r + \epsilon_i \qquad (5\text{-}7)$$

这里，$a_0, a_1, \cdots, a_r$ 是常数，$\chi_j (j = 1, 2, \cdots, r)$ 是影响 β 的变量，它可以是市场变量，也可以是反映公司基本特征的变量如股利支付率（股利 / 每股盈利）、资产增长率、流动性（流动资产 / 流动负值）、公司规模（总资产）和市盈率的标准差等。

若假定(5-7)式中的参数对各公司是一样的，则可根据历史的 β 数据、利用统计、回归分析的方法，估计参数 $a_0, a_1, \cdots, a_r$。估计出参数后，若预测出某公司将来某个时期的 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_r$，再代入(5-7)式，即可得该公司发行股票将来的 β 的预测值，这样测出的 β 称为基础 β。

(3) 调整的 β

测定将来的 β 系数，首先要测定证券的历史 β 值，然后再根据一些因素的分析对其加以调整。最常用的调整方法是对个别证券的 β 值的趋势进行修正，以使它向平均水平回归。因为有人经研究发现，如果在某一时期有特别高的 β 值，那么在下一时期将会有减低的趋势(接近 1.0)；而如果在某一时期有特别低的 β 值，则在下一个时期将会有增长的趋势(向 1.0 靠拢)。许多投资分析服务机构都以此为根据，对历史的 β 值很低的证券进行上调，而对于历史 β 值所得的证券进行下调。

在实际应用中，个人投资者常用一些简化方法进行计算。

例 5-3 假设有关数据如表 5-2，根据风险证券的收益变动幅度与市场组合证券收益变动幅度，计算证券的 β 值。

表 5-2

年份	证券收益(%)			
	R_H (高风险)	R_A (一般风险)	R_L (低风险)	R_M (市场风险)
1996	10	10	10	10
1997	30	20	15	20
1998	-30	-10	0	-10

解：由上表，计算三年中各类风险证券收益的变动幅度。

	最大值 - 最小值	幅度	与市场幅度之比	β
R_M	20% - (-10%)	30%		
R_H	30% - (-30%)	60%	2:1	2.0
R_A	20% - (-10%)	30%	1:1	1.0
R_L	15% - 0	15%	0.5:1	0.5

从三种证券收益率的变动幅度相对于市场收益的变动幅度的比值，即看出证券相对于市场的 β 值。

在涉及股利分配的情况下，作为一种简约计算，β 值也可按下

式计算：

$$\beta = \frac{\text{某股票的价格变化的百分数}}{\text{股价指数变化的百分数}}$$

中国股市股价指数常用上证指数或深圳指数。

$\beta = 1$，表明某股票价格的变动与股价指数是一致的；

$\beta > 1$，表明某股票价格的变动大于股价指数；

$\beta < 1$，表明某股票价格的变动小于股价指数。

β 值越大，风险越大，这说明某股票价格比整个股市价格上升或下跌得快。

另外，在实际计算中，可将一些机构公布的相应 β 系数加以平均来作为该公司 β 系数的预测值。

四、证券市场线与资本市场线的比较

由 CAPM 模型，或证券市场线 SML 公式(5-2) 可知，

$$ER_i = R_f + \frac{ER_M - R_f}{\sigma_M^2} \times \sigma_{iM}$$

SML 公式指出在市场均衡时，证券 i 的期望收益率等于无风险利率加上风险贴水，而风险贴水为 $\frac{ER_M - R_f}{\sigma_M^2} \times \sigma_{iM}$。引入相关系数：

$$\rho_{iM} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_i \sigma_M}$$

则
$$ER_i = R_f + \frac{ER_M - R_f}{\sigma_M^2} \times \rho_{iM}\sigma_i\sigma_M \tag{5-8}$$

上述公式是针对单一证券的资本资产定价模型，如果扩展到多种证券的投资组合，而且投资组合总是有效的，即 $\rho = 1$，这时的投资组合的 SML 变成：

$$ER_p = R_f + \frac{ER_M - R_f}{\sigma_M} \times \sigma_p \tag{5-9}$$

公式(5-9)正是资本市场线(CML)的模型,因此证券市场线SML与资本市场线(CML)的关系可归纳为:

SML与CML都反映了均衡状态下期望收益率与风险的关系,但它们解释的对象并不相同。

(1) CML只有在有效组合的情况下才存在,而SML只要市场均衡,任何证券或投资组合都存在。

(2) SML所表示的任一证券或投资组合的风险来自它与市场投资组合的协方差,而不是其本身的方差。

证券市场线与资本市场线的数学模型告诉我们:投资的期望收益率由系统风险决定,市场并不对个别证券的非系统风险提供报酬。因而,贯彻投资多元化的策略,抵消非系统风险就十分必要了。

第四节　CAPM模型应用

一、CAPM在证券价格预测中的应用

在均衡的状态下,所有证券的价格都应落在证券市场线上。因此,运用CAPM模型不仅可以衡量证券投资的风险,也可以预测证券的价格。

例5-4　假设股票X在原均衡条件下每股价格为27.27元,如果收益与风险发生了变化,在新的均衡状态下股票X的价格应为多少?有关变量的数据如表5-3所示。

利用CAPM模型:$ER_X = R_f + (ER_M - R_f) \cdot \beta_X$

代入上述数据,计算如下:

原预期收益率:$ER_X = 8\% + 4\% \times 2 = 16\%$

新预期收益率:$ER_X' = 7\% + 3\% \times 1.5 = 11.5\%$

表 5-3

	原变量	新变量
无风险收益率 R_f	8%	7%
市场风险补偿 $ER_M - R_f$	4%	3%
股票 X 的 β 系数 β_X	2.0	1.5
预期股利增长率 g_X	5%	6%
股票 X 的上期股利:	2.857 元	2.857 元
股票 X 的价格:	27.27 元	?

利用上述数值与有关变量(股利增长率和股利),可以计算 X 股票的价格如下:

$$股票价格 = \frac{上期股利(1+预期增长率)}{预期收益率 - 预期增长率}$$

$$原价格 = \frac{2.857 \times (1+0.05)}{0.16-0.05} = 27.27\ (元)$$

$$新价格 = \frac{2.857 \times (1+0.06)}{0.115-0.06} = 55.06\ (元)$$

说明:由于收益与风险完全处于均衡状态是相对的,实际取得的收益率不一定等于预期的收益率等原因,上述计算结果只能作为一种参考。

二、应用 CAPM 模型计算留存收益成本

普通股本通过两种方式获得,一是留存收益,二是发行新的普通股票(如配股)。留存收益的成本即股东投资于企业的普通股所要求的收益率。

例 5-5　若政府长期公债收益率为 9.8%,某机构估算的期望平均收益率为 15.8%,若公司 A 的历史 β 系数和调整后的 β 系数分别是 1.20 和 1.05,计算公司 A 的留存收益成本。

解:由:$ER_A = R_f + (ER_M - R_f) \times \beta_i$

得:$ER_A = 9.8\% + (15.8\% - 9.8\%) \times \beta_i$

$$= 9.8\% + 6\%\beta_i$$

代入 β 系数值的公司 i 的留存收益成本分别是：

调整前：$ER_A = 9.8\% + 6\% \times 1.2 = 17\%$

调整后：$ER_A = 9.8\% + 6\% \times 1.05 = 16.1\%$

第五节　CAPM 模型的扩展

CAPM 模型描述了资本市场行为，但是 CAPM 的许多假定与现实不符，如存在无风险资产的假定；对于同一证券所有投资者都有相同的预期；所有投资者都持有市场组合等。事实上都是不可能的，由于投资者偏好不同，预期收益大小不可能一样；个人资产有限，不可能持有市场中的所有证券。为此，本节以更现实的假定，研究 CAPM 的函数形式及经济含义 。

一、不允许卖空的 CAPM

CAPM 模型推导过程中，假定允许卖空。事实上，在资本市场达到均衡时，在不允许卖空的条件下，CAPM 模型也成立。

在不允许卖空，但 CAPM 的其他假定成立的条件下，设每个投资者持有的风险资产组合相同，各资产在其中所占的比例 χ_1，χ_2，…，χ_n，最优组合模型为：

$$\max\theta = (ER_P - R_f)/\sigma$$

$$\text{S.T}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\chi_i = 1\\ \chi_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n\end{cases}$$

利用 Langrange 函数及 Kuhn-Tucker 条件，可得证券收益与风险的关系：

$$ER_i = R_f + \frac{(ER_M - R_f) \times \sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

或：$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f) \times \beta_i$$

（证明过程可参见刘志强的《现代资产理论与资本市场均衡模型》[10]。）

即在不允许卖空的条件下，CAPM 模型亦成立。

上述结论表明，这并不妨碍 CAPM 的应用，故我们也可以用 CAPM 来选择证券和计算留存收益成本。

二、零贝塔模式：无安全资产的情形

在 CAPM 模型的推导中，假定投资者能以无风险利率借入或贷出，这个假定与现实不符。在现实中，对将来价格水平的随机变动，即使是政府债券也存在收益风险，特别是在通货膨胀条件下，无风险的借入与贷出利率也变成了风险收益率。

假定不存在安全资产，但 CAPM 其他假设成立时，市场组合是有效组合，所有投资者的有效边界是相同的，对各种资产的预期一致，设市场组合中各资产所占比例为 $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_n$。

则最优模型为：

$$\min \sigma_p^2 = X^T E X$$

$$\text{S.T:} \sum_{i=1}^{n} \chi_i R_i = r$$

$$\sum_{i=1}^{n} \chi_i = 1$$

其中 E 为协方差距阵，令

$$A = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \cdots & R_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix}$$

上述模型可简化为二次规划模型：

$$\min \sigma_p^2 = X^T E X$$

$$\text{S.T:} AX = B$$

利用二次规划解理论及协方差的关系式：

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}X_j = COV(R_i, R_M)$$

可以得出：$ER_i = d^* + (ER_M - d^*)\cdot\beta_i$

其中 $$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} \tag{5-10}$$

由(5-10)可知，$ER_i = d^*$，当且仅当 $\beta_i = 0$。

β 为零且方差最小的组合记为 Z，以 R_Z 表示 Z 组合的期望收益，则有：

$$ER_i = R_Z + (ER_M - R_Z)\cdot\beta_i \tag{5-11}$$

下证 Z 组合是无效组合：

设投资在 Z 上的资金比例为 χ_Z，投资在市场组合 M 上的资金比例为 $1-\chi_Z$，则构成组合 P 的方差为：

$$\sigma_P^2 = \chi_Z^2\sigma_Z^2 + (1-\chi_Z)^2\cdot\sigma_M^2$$

上述公式是关于 χ_Z 的二次函数，将它对 χ_Z 求偏导，并令其结果为零，得：

$$\chi_Z^* = \sigma_M^2/(\sigma_M^2 + \sigma_Z^2)$$

由二阶导数得：

$$\frac{d^2\sigma_P^2}{d\chi_Z^2} = 2(\sigma_Z^2 + \sigma_M^2) > 0$$

故 σ_P^2 在 χ_Z^* 处有最小值。

又因 $\chi_Z^* > 0$，$ER_Z < ER_M$，故 χ_Z^* 对应的组合 S 的期望收益大于 ER_Z，方差却小于 σ_P^2，故组合 Z 不是有效组合(即无效组合)，见图 5-6。

公式(5-11)是无安全资产情形下的资本资产定价模型，又称零贝塔模型。它们的惟一区别在于：用无效组合 Z 的期望收益 R_Z 代替了 CAMP 模型中的无风险利率。组合 Z 称为零贝塔组合。

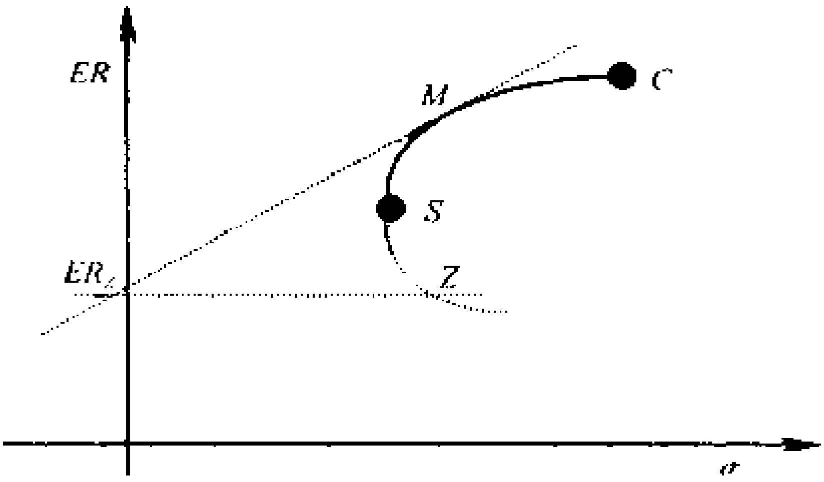


图 5-6

三、投资者预期不一致时的 CAPM

到目前为止，我们都是假定所有投资者对于均值、方差及各种证券间的协方差有相同的预期，所以，他们有相同的有效边界。然而，在现实中，对于证券将来的价格变动，不同的投资者有不同的看法，因此每个投资者面临着不同的主观效用边界。假定市场上有两种可以选择的证券 A 和 B，所有投资者都认为有同样的无风险利率 R_f，同样的 σ_A^2、σ_B^2，并认为两者之间的协方差相同，且对证券 B 的期望收益也相同，惟一不同的在于其中一位投资者认为证券 A 的期望收益为 10%，如图 5-7 中 A_1 所示，另一位投资者则认为它们的收益要更高，如图 5-7 中 A_2 所示，其中一个的最优组合为图中的 M_1，另一个的最优组合为图中的 M_2，通常 M_1 与 M_2 的组合要素是相同的。

以上的例子足以说明投资者对于 CAPM 结果预期不同，而在这种不同预期的情况下，投资者并不将所有风险资产都纳入其投资组合，或同时将某些资产卖空。例如，某一投资者将证券 A 卖空，因他认为其价格在将来会下跌，但这不意味着所有的投资者都

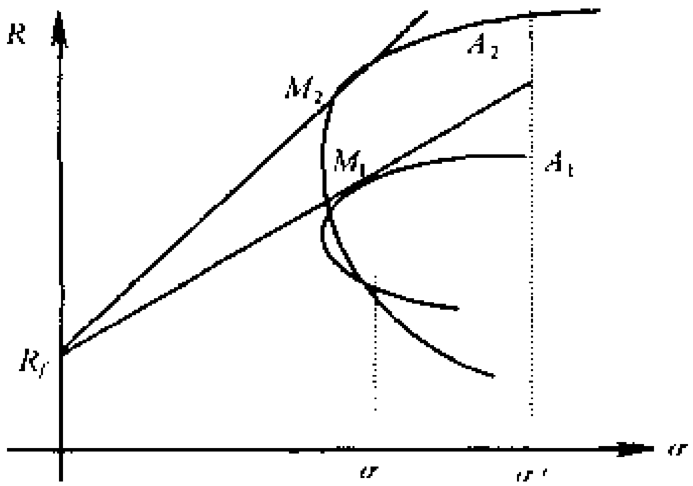


图 5-7 预期不同时的组合

会将证券 A 卖空，因为他们可能认为 A 的将来价格不仅不会下降，反而会上升，为了保证市场的可清算性，惟一的要求是，对于某一种证券，投资者所持有的总数等于抛出的总数，即在市场上每一笔"卖出"，都有相应的"买进"。

四、其他情况

CAPM 模型的假设中，值得改进或可以探讨的还有很多，以下仅考虑税收、通货膨胀、交易成本几种简单情形。

1. 个人税

CAPM 模型中的另一个假定是不存在个人税，然而，在一个较完善的市场上，当投资者获得现金红利时必须交税，当资本收益实现时，也要支付较低比率的税金。

有人推导出这种情形下的风险收益关系如下：

$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f) \cdot \beta_i + f(\delta_i, \delta_m, T)$$

该式在结构上与 CAPM 基本相同。但右边的最后一项中 δ_i 为第 i 种证券的红利或利息收入，δ_M 为市场组合 M 的红利或利息收入，T 则为不同投资者的财富及税率状况因素，它们综合反映不同公司红利分配策略以及现金红利与资本收益的不同税收状况。

2．通货膨胀

一般地，只有在没有通货膨胀的前提下才存在无风险资产。然而在现实中，面对将来价格水平的随机变动，即使是政府债券也存在收益风险，特别是在通货膨胀条件下，无风险的借入与贷出利率也变成了风险收益率。

资本市场上的无风险利率(R_f)称为名义利率。名义利率由两个基本要素组成：一是无通货膨胀的利率，或称实利；另一是通货膨胀贴水。随着通货膨胀的增长，投资者除了获得实利外，还要取得通胀贴水，以补偿通货膨胀而使货币购买力下降所带来的损失。

在通货膨胀贴水为正值的情况下，SML 就会向上移动，表示在相同的 β 值下，预期名义利率会提高，图 5-8 的 SML_1 为原先的证券市场线，平行地移动到 SML_2，两条证券市场线之间的距离，恰好为通货膨胀的贴水。无风险利率 R_f 的提高也可以使所有风险性资产收益率同等地增加，因为加进通货膨胀贴水。

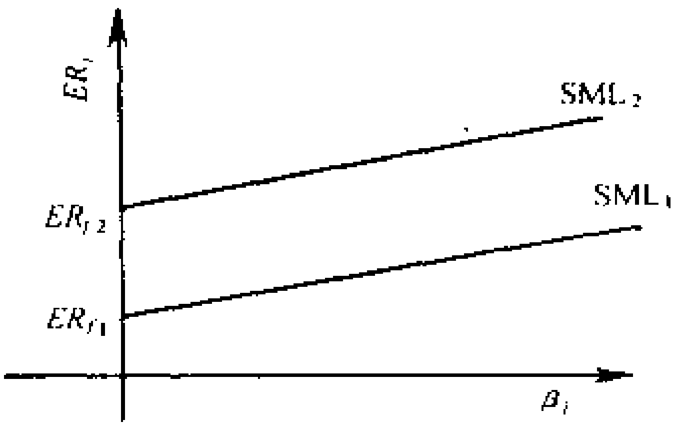


图 5-8 通货膨胀下的 SML

在通货膨胀不确定的情况下，CAMP 可以表示为：

$$ER_i = R_f + \sigma_{i\pi} + \frac{ER_M - R_f - \sigma_{M\pi}}{\sigma_M^2 - \sigma_{M\pi}/\alpha}(\sigma_{iM} - \sigma_{i\pi}/\alpha)$$

式中，$\sigma_{i\pi}$ 为第 i 种证券收益率 R_i 与通货膨胀率 π 之间的协方差，

$\sigma_{M\pi}$ 为市场组合收益率与通货膨胀率 π 之间的协方差，α 为名义风险资产与市场上所有名义资产总值的比率。

如果价格水平不发生变化，$\sigma_{i\pi} = \sigma_{M\pi} = 0$，上式就变成标准的 CAMP 模型。

3. **交易成本**

通常情况下，投资者选择的资产组合中平均只包括 3 到 4 种风险资产。这显然与 CAPM 的假定相违背，CAPM 作出的假定之一就是投资者的资产组合中包括所有风险资产。

因为 CAPM 假定证券交易时不需要支付任何费用，在没有交易成本的情况下，投资者才有可能在其资产组合中包括大量品种的风险资产。当考虑交易成本后，投资者发现最优决策是组合中只应包括少数几种证券。由于不同的投资者持有不同数量的风险资产，第 i 种资产的期望收益率 ER_i 可以写成：

$$ER_i = R_f + \frac{\sum_k T_k(ER_k - R_f)}{\sum_k T_k} \cdot \beta_{ki}$$

其中，R_f 为无风险利率，ER_k 为第 k 个投资者组合的平均收益率，T_k 为第 k 个投资者投资的资产，β_{ki} 为资产 i 与第 k 个投资者拥有组合的 β。

所以，该证券的期望收益率 ER_i 等于无风险利率加上所有投资者所需求的风险收益的加权平均数。如果所有的投资者都持有市场组合，其风险收益关系可简化为传统的 CAPM 形式。这时 $ER_k = ER_M$，$\beta_{ki} = \beta_i$，即：

$$\frac{\sum_k T_k(ER_k - R_f)}{\sum_k T_k} \cdot \beta_{ki} = (ER_M - R_f) \cdot \beta_i$$

此时，上述关系可写成：

$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f) \cdot \beta_i$$

第六节　CAPM 模型实证检验

只有对现实的经济现象作某些简化(假定),才能建立经济理论模型。在 CAPM 模型中,我们运用了一些假设,而其中有些假设与实际情况是不相符的,那么在这样的假定条件下所推导出的模型是否具有较好的解释能力?能否反映证券价格的变化?所以有必要作出检验。

一、风险-收益模型的检验

根据 CAPM 模型,有下式成立:

$$ER_i = R_f + (ER_M - R_f) \cdot \beta_i$$

其中,ER_i,ER_M 分别是第 i 项资产及市场组合的预期收益率(期望值)。

由于
$$R_M = \sum_{j=1}^{N} X_j R_j$$

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_M)}{\sigma_m^2} = \frac{COV(R_i, \sum_{j=1}^{N} X_j R_j)}{\sigma_m^2}$$

$$= \frac{(X_i\sigma_i^2 + \sum_{i \neq j, j=1}^{N} X_j \sigma_{ij})}{\sigma_m^2}$$

CAMP 模型变为:

$$ER_i = R_f + \frac{(ER_M - R_f)}{\sigma_m^2} \times (X_i\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} X_j \sigma_{ij})$$

由于市场组合方差 σ_m^2 对于所有证券均为常数,显然:

$X_i\sigma_i^2 + \sum_{i \neq j, j=1}^{N} X_j \sigma_{ij}$ 为证券交易的风险指数,它表明证券 i 的风

险及它与所有其他证券协方差所构成，对于一个十分庞大的组合，证券数量很大，自身方差所起的作用很快会减弱，其风险指数主要由协方差组成。

二、上海证券市场 CAPM 的实证分析

杨朝军等人利用上海证券市场的统计数据对 CAPM 进行了实证分析。（杨朝军，邢靖等：《上海证券市场资本资产定价模型与有效市场理论的实证研究》，载《上海证券报》1996 年 4 月 7 日）

他们所用的历史数据截至 1995 年末。现将其检验方法与结果概述如下。

先用下述模型估计个股 i 的 β 系数：

$$R_{it} = \alpha_{it} + \beta_i(R_{mt} - R_{ft}) + \epsilon_{it}$$

然后，按个股的 β 系数的大小排序分组构造 n 个组合，再将组合的收益率对组合的 β 系数进行截面回归：

$$R_{pj} = V_0 + \gamma_1\beta_{pj} + \varepsilon_j \qquad (j = 1,2,\cdots,n)$$

其中 P_j 表示第 j 个组合。

检验 CAPM 是否成立：

(1) $\gamma_1 > 0$；

(2) R_{pj} 与 β_{pj} 之间呈线性关系；

(3) $\gamma_0 = R_f$；

(4) $\gamma_1 = R_m - R_f$。

他们对组合分别按日、月、数据计算收益率与 β 系数，然后检验上述关系，得出如下结论：

(1) 在上海股市中，系统风险 β 与收益率存在一定正相关关系，这与 CAPM 的预期相同；

(2) 股票的平均收益率与 β 系数并非 CAPM 所预期的线性关系。无论用收益风险关系检验还是截面检验，回归方程的拟合系数都较小。这表明尚有其他的风险因素在股票的定价中起着不可忽

视的作用，这说明 CAPM 对上海股市的指导作用不强。

(3) 回归方程的节 $\gamma_0 < 0$。这可如此解释：个人的货币需求取决于流动性偏好和投机需求。流动性偏好体现了货币的时间价值，若投资者放弃流动性而将货币用于投资，则必须支付投资者一定的无风险报酬作为对放弃流动性的补偿。投机需求反映投资者对风险的态度。在投资者侧重于投机，追求高风险所带来的高收益时，无风险率的估计值可能为负值。$\gamma_0 < 0$ 表明上海股市中，投资者的行为带有明显的投机性，他们关注的是高风险带来的高收益而非货币的时间价值。

(4) 在样本期，间隔以日、周、月为单位，估计方程的斜率 $\gamma_1 > R_m - R_f$。这表明上海股市的投机需求旺盛，追求高风险带来高回报。

随着我国证券市场的进一步发展，上市股票增加，可观察的时间变长，利用本节所述方法检验 CAPM 模型会有更强的说服力。

本章小结

F Sharp[1963]在较强的假设下，提出资本资产定价模型，揭示了证券收益与风险之间的关系，从理论上证明了通过资产组合可使非系统风险降为0，为现代资产组合理论奠定了基础。

由于CAPM模型许多假定与现实资本市场不符，许多学者纷纷讨论在较弱的条件下，CAPM模型能否成立？Eugene，Fama[1976]严格证明了投资者预期一致及持有期相同的单一持有期时，市场组合位于不存在无风险资产时的有效边界上；Edwin和Martin[1984]虚拟市场组合对某个无风险资产利率，得到CAPM的零贝塔模型；刘志强[1994]从二次规划模型出发，不借助虚拟无风险资产利率也得到CAPM的零贝塔模型。

Michael Brinnan[1971]讨论了能以不等的无风险利率借入贷出时的CAPM；Ney C Brito.[1977～1978]研究了同时存在非适销资产和不允许卖空时组合选择问题。

关于CAPM模型的检验，出现了不少可喜成果。Sharp和Cooper[1972]利用回归分析方法对纽约证券交易所挂牌股票作了实证分析。F Black，Jesen和Scholes[1972]对CAPM进行了检验，发现组合的β值与收益率之间存在相当满意的线性相关关系；Roll Richard[1977]对上述检验作了很有价值的评价，他认为对资本资产定价模型的检验关键在于检验市场组合的有效性；杨朝军，邢靖[1996]利用上海证券市场的数据对CAPM进行了检验。

第六章　套利定价模型

资本资产定价模型(CAPM)刻画了在资本市场达到均衡时，资产收益的决定机制，但它基于众多的假定，其中的一些假定常与现实不符；在检验 CAPM 时，难以得到真正的市场组合，更重要的是，一些经验结果与 CAPM 相悖。

如“小公司现象”：当以公司规模为基础形成资产组合时，小公司每年的平均收益率还比大公司的平均收益率高出 20%。这种现象很难用 CAPM 来解释，它激励人们去建立新的资本市场均衡理论。

1976 年，Stephen A Ross 提出了一种新的资本资产均衡模型——套利定价模型(Arbitrage Pricing Test，简称 APT)。该模型认为风险可由多个因素产生，不仅仅是一个市场因素。尤其是它对风险态度的假设比 CAPM 更为宽松，因此也更加接近现实。

第一节　基本假定与因素模型

一、APT 模型的基本假定

1. APT 模型的主要假定

(1)投资组合包含大量的资产，但不一定是市场组合；

(2)允许卖空，且投资者可以取得卖空收益；

(3)投资者不一定是风险厌恶者；

(4)证券或组合的收益是多种因素共同影响的结果。

2. **证券收益的相关因素**

研究证券收益的模型，首先要识别与证券收益有关的各类影响因素，然后分析这些因素的变动对证券收益的影响程度，最后确定证券收益与这些因素之间的函数关系。

根据 CAPM 模型，资本资产的收益只与市场组合收益有关，是 β 的线性函数，从而建立了证券期望收益与风险的关系。其实，证券收益的上下波动，还与其他的因素密切相关。例如，石油价格上涨时，采油业的股票价格会上涨，收益增加；而以石油为能源的企业的股票价格会下跌，收益减少。再如，当政府紧缩银根，控制投资规模、防止经济过热时，资本市场总体价格水平下降，其中房地产以及基础工业类股票受到较大的影响，而食品、商业、水电类股票价格受影响较小。由此可见，股票价格及收益的变动，部分是出于偶然性，即个别股票的特殊性，部分则是对共同的因素变动的一致的反应。

3. **因素模型**

在经济活动中，确实存在对大多数企业都有影响的共同因素。这些因素变化时，每个股票的价格会根据各自对这些因素的敏感程度相应地波动。描述这些共同的因素变化与证券收益波动关系的模型叫做因素模型。

APT 认为证券的收益率是由某个因素模型确定的。然而，APT 没有规定这个因素模型的具体形态，也没有指出这个模型应包含多少因素，包含什么样的因素。APT 的这个假设是非常弱的条件，因而为投资者留下了较宽的空间。

我们从单因素模型开始讨论。

二、单因素模型

1. **证券的单因素模型**

股市现象：某种股票的收益与市场的行情有密切的关系。当

市场行情上涨或者下挫时，该股票的价格也会有不同程度的上涨或者下滑，则可以认为市场组合的收益率是与该股票收益率有关的因素。

影响股票收益率的因素还可能是国民生产总值、市场利率或其他的经济指标。如果某证券的收益率只与一个因素有关，其数学模型就是单因素模型：

$$R_i = a_i + b_i F + \varepsilon_i \tag{6-1}$$

式中，R_i 表示证券 i 的收益率；a_i 表示当因素 F 期望值为零时，证券 i 的期望收益率；F 表示共同因素的值，如国民生产总值 GNP 的增长率等；b_i 表示证券 i 对因素 F 的变动的敏感度；ε_i 表示证券收益率与期望收益率的偏差。

公式表示，证券 i 的收益率中有一部分可用因素 F 的变动来解释。另有一部分收益率与因素 F 无关；常数项 a_i 和偏差 ε_i 都是与 F 因素无关的收益。偏差（ε_i）又称为证券 i 的非因素风险，或称证券 i 的特异风险。

设影响证券收益率的因素（F）是市场组合的收益率。将证券 i 的收益率与市场组合的收益率的一组观察值（R_M，R_i）画在坐标图上（见图 6-1），用线性回归的方法，可以得到证券 i 的收益率（R_i）与市场组合的收益率（R_M）的相互关系。这种关系也可用回归方程表示：

$$R_i = a_i + b_i R_M$$

式中，R_i表示证券i 的收益率，R_M 为市场组合的收益率，a_i表示证券 i 的回归直线与纵轴的截距，b_i 表示证券 i 的回归直线的斜率。斜率越大，说明证券的收益率对市场组合的收益率的变动越敏感。参数 a_i，b_i 决定了回归线的形状和位置。

由于各点偏差 ε_i 的总和有互相抵消的趋势，即偏差的期望值 $E(\varepsilon_i) = 0$，则证券 i 的收益率期望收益率为：

$$E(R_i) = E(a_i + b_i R_M + \varepsilon_i)$$

$$= E(a_i) + E(b_iR_M) + E(\varepsilon_i)$$
$$= a_i + b_iE(R_M)$$

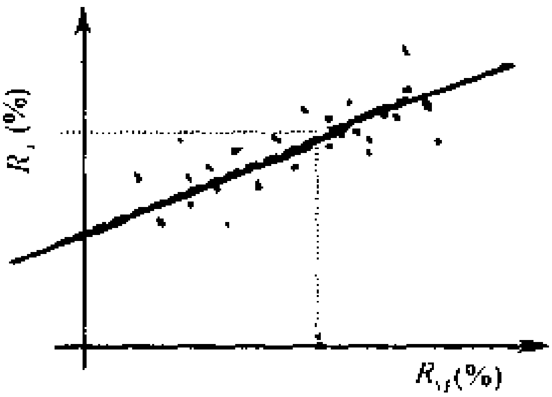


图 6-1 证券与市场组合的收益率的相互关系

一般地，用符号 F 代表影响证券收益率的因素，则证券 i 的期望收益率为：

$$E(R_i) = a_i + b_iE(F) \tag{6-2}$$

证券 i 的收益率的方差为：

$$\sigma_i^2 = \sigma^2(ai + biF + \varepsilon_i) = b_i^2 \cdot \sigma_F^2 + \sigma_\varepsilon^2 \tag{6-3}$$

其中：σ_i^2 表示证券 i 的收益率的方差；σ_F^2 表示因素 F 的方差；σ_ε^2 表示证券 i 与 F 无关的那部分收益的方差，即非因素风险。

综上所述，根据证券收益率与因素 F 的观察值，可以估计出线性回归方程的参数 a 与 b，从而揭示证券收益率与因素的变动之间的相关关系。根据单因素 F 的期望值和方差，可求出证券 i 的期望收益率和方差。

2. 证券组合的单因素模型

在证券的单因素模型的基础上，我们可导出投资组合的单因素模型。假设有 n 种证券的组合，组合中的每个证券的收益都与同一因素的变动有关，组合中投资于证券 i 的比例为 χ_i，则组合的收益率为：

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \cdot R_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \chi_i (a_i + b_i F + \varepsilon_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \chi_i a_i + \left(\sum_{i=1}^{n} \chi_i b_i\right) F + \sum_{i=1}^{n} \chi_i \varepsilon_i$$

令

$$a_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \cdot a_i$$

$$b_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \cdot b_i,$$

$$c_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \cdot \varepsilon_i$$

故

$$R_p = a_p + b_p F + \varepsilon_p \tag{6-4}$$

公式(6-4)便是组合 P 的单因素模型。

同理可以推出组合收益的期望值和方差为：

$$E(R_p) = a_p + b_p E(F) \tag{6-5}$$

$$\sigma_p^2 = b_p^2 \sigma_F^2 + \sigma_{\varepsilon p}^2 \tag{6-6}$$

上述公式表明，任何组合的风险均由两部分组成：因素风险和非因素风险。

假定投资在每一证券的数量相等，即 $\chi_i = 1/n$，则组合的非因素风险为：

$$\sigma_{\varepsilon p}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{\varepsilon i}^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sigma_{\varepsilon i}^2}{n}$$

由此可见，当 n 越大时，投资组合的非因素风险越小。即多元化的组合减少了组合的非因素风险。当证券分散到一定程度之后，组合的非因素风险几乎可以忽略，这时，投资组合的风险只剩下因素风险了。

三、多因素模型

经济形势的好坏影响大多数公司，从而影响到证券期望收益率的变化。经济形势是一个复杂的系统，它是多种因素共同影响的结果，如：①实际利率；②通货膨胀；③未来油价；④国民经济实际增长等。

多因素模型考虑多种因素的共同影响，因而更贴近现实，更加准确地反映经济现象。

为了分析方便，我们先考虑双因素模型：

1. **双因素模型**

若影响证券收益率的共同因素只有两个，那么它的数学模型就是双因素模型，其公式如下：

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \varepsilon_i \tag{6-7}$$

其中，F_1 和 F_2 分别是影响证券收益的两个因素（如 F_1 为 GNP 的增长率，F_2 为通货膨胀率），而 b_{i1}和 b_{i2}分别为证券 i 对这两个因素的敏感度；ε_i 是随机误差项，其期望值 $E(\varepsilon_i)=0$；a_i 是当每一个因素都为零时证券 i 的期望收益率。

双因素模型有 4 个参数：a_i，b_{i1}，b_{i2}和 ε_i，对每一因素还需评估两个参数：期望值、标准差。

由数学期望和方差的性质可知，任何证券 i 的期望收益率都可用下式确定：

$$E(R_i) = a_i + b_{i1}E(F_1) + b_{i2}E(F_2) \tag{6-8}$$

如果两因素是不相关的，证券 i 方差和任何两证券 i 和 j 的协方差的公式为：

$$\sigma_{ij}^2 = b_{i1}^2\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{F_2}^2 + \sigma_{\varepsilon_i}^2 \tag{6-9}$$

$$\sigma_{ij} = b_{i1}b_{j1}\sigma_{F_1}^2 + b_{i2}b_{j2}\sigma_{F_2}^2 \tag{6-10}$$

如果两因素是相关的，公式更复杂，不作讨论。

在多因素模型中，投资组合的收益为：

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i R_i$$

用公式(6-7)代入上式得：

$$\begin{aligned} R_p &= \sum_{i=1}^{n} \chi_i (a_i + b_{i1} F_1 + b_{i2} F_2 + \varepsilon_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \chi_i a_i + \sum_{i=1}^{n} \chi_i b_{i1} F_1 + \sum_{i=1}^{n} \chi_i b_{i2} F_2 + \sum_{i=1}^{n} \chi_i \varepsilon_i \\ &= a_p + b_{p1} F_1 + b_{p2} F_2 + \varepsilon_p \end{aligned} \tag{6-11}$$

其中　$a_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i a_i \qquad b_{p1} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i b_{i1}$

$$\varepsilon_p = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \varepsilon_i \qquad b_{p2} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i b_{i2}$$

从上述公式可知，投资组合对某一因素的敏感度为这些证券的敏感度的加权平均数，其权数是投资在每一证券中的比例。

例 6-1　设有两个公司的股票收益率受共同的因素 F_1，F_2 影响。它们的双因素模型分别为：

$$R_1 = 0.04 + 0.5F_1 + 1.20F_2 + \varepsilon_1$$

$$R_2 = 0.08 + 1.50F_1 + 0.4F_2 + \varepsilon_2$$

且 $\sigma^2_{\varepsilon_1} = 0.0015$，$\sigma^2_{\varepsilon_1} = 0.0020$，$\sigma^2_{F_1} = 0.0009$，$\sigma^2_{F_1} = 0.0016$，$E(F_1) = 0.10$，$E(F_2) = 0.12$，$COV(F_1, F_2) = 0$。试求：按投资比例各占 50% 组成的投资组合的期望收益率、方差以及组合的双因素模型。

解：由已知条件可以计算出各参数

$$\begin{aligned} b_{p1} &= 0.5b_{11} + 0.5b_{21} \\ &= 0.5 \times 0.5 + 0.5 \times 1.50 = 1.0 \end{aligned}$$

$$b_{p2} = 0.5b_{12} + 0.5b_{22} = 0.5 \times 1.2 + 0.5 \times 0.4 = 0.8$$

$$a_p = 0.5a_1 + 0.5a_2 = 0.5 \times 0.04 + 0.5 \times 0.08 = 0.06$$

因此，组合的双因素模型为：

$$R_p = 0.06 + 1.0F_1 + 0.8F_2 + \varepsilon_p$$

组合的期望收益率为：

$$\begin{aligned}E(R_p) &= a_p + b_{p1}E(F_1) + b_{p2}E(F_2)\\ &= 0.06 + 1.0 \times 0.1 + 0.8 \times 0.12 = 0.256\end{aligned}$$

组合的方差为：

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= b_{p_1}^2\sigma_{F_1}^2 + b_{p_2}^2\sigma_{F_2}^2 + \sigma_{\varepsilon_p}^2\\ &= 1^2 \times 0.0009 + 0.8^2 \times 0.0016 + (0.5^2 \times 0.0015 + 0.5^2 \times 0.002)\\ &= 0.0028\end{aligned}$$

2. 多因素模型的一般表达式

证券投资研究人员发现，至少有4个到5个因素会影响股票价格的共同波动。多因素模型的一般形式为：

$$R_i = a_i + b_{i1}F_1 + b_{i2}F_2 + \cdots + b_{im}F_m + \varepsilon_i \tag{6-12}$$

式中，b_{ij}为第i证券对第j个因素的敏感度；ε_i为随机剩余误差。

证券的期望收益率为：

$$E(R_i) = a_i + b_{i1}E(F_1) + b_{i2}E(F_{12}) + \cdots + b_{im}E(F_m) \tag{6-13}$$

若各因素不相关时，证券的方差为：

$$\sigma_i^2 = b_{i1}^2\sigma_{F1}^2 + b_{i2}^2\sigma_{F2}^2 + \cdots + b_{im}^2\sigma_{Fm}^2 + \sigma_{\varepsilon i}^2 \tag{6-14}$$

四、关于因素模型的说明

(1)建立因素模型是分析影响证券收益的因素的过程。每种因素的变动都对证券的收益率作出一定程度的贡献，可以用系数b来表示。

(2)证券收益率对因素的敏感程度(b)是一个随机变量。例如石油危机时期，石油价格对各种证券的价格有很大的影响。证券的收益率与证券价格有直接关系，因而证券收益率对石油价格的变动也十分敏感。石油危机结束以后，石油价格对证券收益率的影响就大大减小了。

(3)证券的风险包括因素风险和非系统风险。前者是指各种证券共同的风险又称为系统风险，后者是指个别证券特有的与其他证券无关的风险。

$$总风险 = 系统风险 + 非系统风险$$

(4)证券组合可以使非因素风险相互抵消而使组合的风险降低。但是组合中成分证券的非因素剩余收益(ϵ_i)有时并不是完全独立的随机变量，因此组合并不能完全消除非因素风险。

第二节　套利定价模型

套利定价模型认为通过套利行为，市场将达到均衡，从因素模型出发，导出均衡状态下的资产定价模型。

一、套利与市场均衡

1. 套利

套利是一种常见的，以获利为目的的交易行为。

套利是在不同的市场和不同证券之间进行同时买卖以获取无风险利润的交易行为。套利者是金融市场中的一类重要参与者。只要市场上出现可利用的价格偏差，套利者就同时进行两个或两个以上的交易，保证赚取一笔无风险的利润。

例 6-2　某公司股票可同时在纽约和伦敦股票交易所交易。假定在纽约市场上股票的价格为 16.5 美元，而在伦敦市场上该股票的价格为 10 英镑，当时的汇率为 1 英镑兑 1.6 美元。套利者可在伦敦市场上购买 1 000 股该种股票的同时在纽约市场上将它们卖出，在不考虑交易成本时，就可获得无风险收益，收益额为：

$$1\ 000 \times (16.5 - 1.6 \times 10) = 500\ (美元)$$

交易成本可能会减少投资者的收益。但是，大的投资公司在股票市场和外汇市场的交易成本都很低。他们发现以上套利机会

极具吸引力，并会尽可能地利用这种机会。

2．套利机会与套利组合

套利机会是指需要的投资成本为零、在投资周期结束前没有任何资金流入或流出，但在投资周期结束时，肯定有一个正的收益的套利行为。

套利这种强大的经济力量使得整个资本市场能有效地反映新的信息。

套利组合(Aribitrage Portfolio)是指不用投资，没有风险而稳获收益的一种组合策略。

APT 模型的基本观点是，投资者可以构造一个零贝塔组合，使其投资净值为 0，如果所构造的零贝塔组合的投资净值为 0，而收益不为 0，则套利就会得到肯定的收益。具体地说就是以比例 $\chi_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构造一个组合，使：

$$\chi_1\beta_1+\chi_2\beta_2+\cdots+\chi_n\beta_n=0$$

$$\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n=0$$

第一个条件表示零贝塔，第二个条件表示组合的投资净值为 0，显然这样的组合只有当有些证券卖空($\chi_i<0$)，有些证券买空($\chi_i>0$)时，才可能成立。

假定有三种风险资产，其参数如下：

$$E(R_1)=0.1,\qquad E(R_2)=0.6,\qquad E(R_3)=0.7,$$

$$\beta_1=1,\qquad \beta_2=2,\qquad \beta_3=3$$

现在需构造一零贝塔组合，使其投资为 0，风险为 0。其展开式分别为：

$$\chi_1+\chi_2+\chi_3=0$$

$$\chi_1\beta_1+\chi_2\beta_2+\chi_3\beta_3=0$$

将 β 值代入上式，解得：$\chi_1=-0.5\chi_2$，若取 $\chi_2=1$，得 $\chi_1=-0.5$，$\chi_3=-0.5$，即按比例：$\chi_1:\chi_2:\chi_3=-0.5:1:-0.5=1:(-$

2)：1，上述三种资产可形成零贝塔组合。但组合收益大于0($-0.5\times0.1+1\times0.6-0.5\times0.7=0.2>0$)。

3. **套利结果**

在实际的市场中这种明显可供套利的情况并不多见，而且不正常的价格(价差)一经被套利者发现，套利活动就会使价格偏低的交易物需求增加，对价格偏高的交易物供给超过需求，这样通过供求作用使价格差减小，直到两者的套利的机会不复存在，市场达到均衡状态，这个过程才告中止。因而，套利定价理论认为证券市场在均衡状态时，应服从单一价格法则，即同样风险的证券的收益率应该是相同的。

总之，套利定价模型认为因素模型是决定证券价格的基础，而套利行为则是使证券价格达到均衡的推动力。

二、因素组合(Factor Portfolio)

1. 因素组合与单位因素组合

不同的证券对因素的敏感度不一样。因此，将多种证券按不同比例进行组合，可以构造出对某个因素具有各种敏感度的投资组合。其中，有一些投资组合，只对一种因素敏感，而对其他因素的敏感度为零，且非因素风险可忽略不计，这种特殊的投资组合叫做因素组合，又称纯因素组合。这种组合的收益率只受该因素的波动影响。

第 i 个因素组合的模型如下：

$$\begin{aligned}R_{pi} &= a_{pi} + 0\times F_1 + \cdots + b_i\times F_i + \cdots + 0\times F_m + 0\times\varepsilon_p\\ &= a_{pi} + b_i\times F \qquad (6\text{-}14)\end{aligned}$$

当 $b_i=1$ 时，这个因素组合就称为单位因素组合。单位因素组合是指只对一种因素的敏感度为1，对其他因素的敏感度为0，且不存在非因素风险的投资组合。其数学模型为：

$$R_{pi} = a_{pi} + F_i \qquad (6\text{-}15)$$

例 6-3　设 A, B, C 三种证券的共同因素只有两种，其敏感度如表 6-1 所示，试将三种证券组合成因素 1 的单位因素组合。

表 6-1　因素模型敏感度

证　券	b_{i1}	b_{i2}
A	-0.5	1.8
B	2	-1.2
C	0.75	-0.2

解：设组合投资于 A, B, C 证券的比例分别为 χ_1, χ_2, χ_3，根据定义，因素 1 的单位组合的 $b_{i1}=1$, $b_{i2}=0$，则有：

$$-0.5\chi_1+2\chi_2+0.75\chi_3=1$$

$$1.8\chi_1-1.2\chi_2-0.2\chi_3=0$$

$$\chi_1+\chi_2+\chi_3=1$$

解上述方程组可得：$\chi_1=0.4$, $\chi_2=0.6$, $\chi_3=0$，即三种证券的投资比例为 0.4:0.6:0，可构成因素 1 的单位组合。

同理也可求出因素 2 的单位组合的投资比例为 0.6:0:0.4。

从理论上讲，可利用众多的证券构造出"纯因素"组合，这种模型反映了投资者通过卖空方式，将其他因素对冲掉，从而只剩下一个影响到组合的投资收益率；实际上只能构造近似于"纯因素"组合，即对某种因素的敏感度显著地超过其他因素的敏感度，而且，非因素风险相当小的近似的单位因素组合。

2. 因素组合的收益

因素投资组合的预期收益取决于关键因素的期望值。它由两部分构成，一部分为无风险利率，另一部分为预期收益率与无风险利率之差额，称之为每单位期望收益对因素的敏感度，用希腊字母 λ 表示。这样，因素 1 的投资组合的期望收益率为：

$$R_{p1}=R_f+\lambda_1$$

因素 2 的投资组合的期望收益率为：

$$R_{p2} = R_f + \lambda_2$$

当市场完全有效性时，因素组合的关键内容有所不同，但其预期收益率应该是相同的。否则，投资者将采取短线买卖方式以增加投资组合的收益率。因此，理性的投资者将会调整投资比例来提高投资组合的期望收益。在均衡条件下，套利行为将使所有因素 i 的投资组合获得相同的期望收益。否则，套利行为将会继续下去，直到所有的因素投资组合的期望收益都相等为止。

例 6-4　投资者自有资本 1 元加上外借无风险资金 1.8 元，投资于证券 i。投资者将这 2.8 元投资 1.3 元于因素 1 投资组合，而将其余的 1.5 元投资于因素 2 投资组合。结果，投资组合将有因素 1 的 1.3 的敏感度与因素 2 的 1.5 敏感度。

于是预期收益率有了 3 种来源：

无风险证券：$-1.8 \times R_f = -1.8R_f$

因素 1 投资组合：$1.3 \times (R_f + \lambda_1) = 1.3R_f + 1.3\lambda_1$

因素 2 投资组合：$1.5 \times (R_f + \lambda_2) = 1.5R_f + 1.5\lambda_2$

若市场均衡，证券 i 双因素期望收益率 $E(R_i)$ 为总收益，上述三式相加，得：

$$E(R_i) = R_f + 1.3\lambda_1 + 1.5\lambda_2$$

故，证券 i 的收益率是一个双因素模型。

三、套利定价模型(APT)

1. 套利定价模型的一般形式

由上例可推广：假定证券 i 的收益受 n 个因素 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 的影响，则证券 i 的期望收益率的通用公式为：

$$E(R_i) = R_f + b_{i1}\lambda_1 + b_{i2}\lambda_2 + \cdots + b_{in}\lambda_n \qquad (6\text{-}16)$$

公式(6-16)就是套利定价模型。

式中，R_f 表示无风险资产的收益率，b_{ij}表示证券 i 对因素 F_j 的敏感度（$j=1,2,\cdots,n$）。

λ_j 表示 第j 个风险因素 F_j 的边际贡献——每单位期望收益对该因素的敏感度。

公式表明：在均衡市场下，证券或投资组合的预期收益率与其对因素的敏感度成线性关系，且以无风险资产的收益率为截距。

2. 建立套利定价模型的步骤

套利定价模型没有规定某种证券或组合的收益模型中包括几种因素，也没有规定这些因素是什么。建立套利定价模型要依靠投资者的经验和判断力，选择识别风险因素，并估计相应的 λ，其步骤如下：

(1)识别风险因素。可以运用因素分析的统计技术，从证券价格变动的时间序列中确定影响证券价格的因素。在构造 APT 模型时，通常考虑的风险因素有：违约破产风险、利率风险、国际贸易不平衡的风险、购买力（通货膨胀）风险、管理风险、经济周期风险、行业风险、政治（政策）风险、失业率风险等。

(2)估计风险因素的期望值以及方差。

(3)列出每种证券对各种因素的敏感度（b_{ij}），可以通过证券的价格与风险因素的回归曲线的斜率来计算其敏感度。投资组合对风险因素的敏感度就是其成分证券对该风险因素的敏感度的加权平均数。

(4)列出套利定价模型，根据模型估计出证券或组合的收益率及方差。

例 6-5 设有三种证券，其收益率受两种共同的因素的影响，它们的期望收益率以及风险敏感度如表 6-2，试建立套利定价模型：

表 6-2

证　券	期望收益率	b_{i1}	b_{i2}
A	15%	1.0	0.8
B	12%	0.6	1.0
C	10%	0.5	0.5

解：由双因素模型公式可得方程组：

$$0.15 = R + 1.0\lambda_1 + 0.8\lambda_2$$

$$0.12 = R + 0.6\lambda_1 + 1.0\lambda_2$$

$$0.10 = R + 0.5\lambda_1 + 0.5\lambda_2$$

解上述方程组得：$R = 4.6\%$，$\lambda_1 = 8.6\%$，$\lambda_2 = 2.3\%$

因此，套利定价模型为：

$$E(R_i) = 0.046 + 0.086b_{i1} + 0.023b_{i2}$$

例6-5中，若有证券D对因素1和因素2的敏感度分别为1.2与0.8，因素1与因素2的方差分别为0.004与0.001，剩余误差为0.0002，则证券D的期望收益率及方差分别为：

$$E(R_D) = 0.046 + 0.086 \times 1.2 + 0.023 \times 0.8 = 16.76\%$$

$$\sigma^2 = 1.2^2 \times 0.004 + 0.8^2 \times 0.001 + 0.0002$$

$$= 0.0066$$

假设按证券D现行价格估计其期望收益率将为18%，则说明其现行价格低于其均衡价格。投资者就可以购进这个证券，同时卖出与D证券风险相当的因素组合（做空），构造一个套利组合。

总之，套利价格模型为投资者提供了衡量资产现行价格与均衡价格关系和构造套利组合的策略。

第三节 APT 模型的检验

一、APT 与 CAMP 的比较

APT 与 CAMP 从不同的角度，讨论了在均衡条件下，金融资产的价格模型。尽管两者假设前提、采用的方法以及最终的表达形式不尽相同。但是，两者并不完全相互排斥。

1. APT 与 CAMP 的相容性

根据套利价格理论，单因素的套利定价模型为：

$$E(R_i)=R+b_i\lambda$$

当这个因素就是市场组合的收益率时，λ 就是市场组合收益率的边际贡献，即$[E(R_M)-R]$。套利价模型可以改写为：

$$E(R_i)=R+[E(R_M)-R]b_i$$

APT 的单因素模型就简成为 CAPM 模型。在这种情况下，两种模型是一致的。

2. β 系数与因素敏感性

假定证券收益产生于两因素模型，那么证券 i 与市场收益的协方差将是：

$$\sigma_{iM}=\sigma_{F_{1M}}b_{i1}+\sigma_{F_{2M}}b_{i2}+\sigma_{\varepsilon iM} \tag{6-17}$$

由于 β 系数是通过协方差除以市场组合方差而得：

$$\beta_i=\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

现将公式(6-17)两边同除 σ_M^2，得：

$$\beta_i=\frac{\sigma_{F_{1M}}}{\sigma_M^2}b_{i1}+\frac{\sigma_{F_{2M}}}{\sigma_M^2}b_{i2}$$

在实际情况下，$\frac{\sigma_{\varepsilon iM}}{\sigma_M^2}$ 相对于其他各项小得多，以致可以忽略。

记

$$\beta_{F1}=\frac{\sigma_{F_{1M}}}{\sigma_M^2}\qquad \beta_{F2}=\frac{\sigma_{F_{2M}}}{\sigma_M^2}$$

则

$$\beta_i=\beta_{F_1}b_{i1}+\beta_{F_2}b_{i2} \tag{6-18}$$

公式表明，证券 i 的 β 值等于关键因素的 β 值的加权平均数，其权数就是证券对关键因素的敏感度。证券有不同的 β 值就是因为他们有不同的敏感度。

回顾 CAPM 模型，证券 i 的期望收益率和它的 β 系数有如下关系：

$$E(R_i)=R_f+[E(R_m)-R_f]\beta_i$$

如果证券 i 的收益产生于两因素模型，由公式(6-18)代入上述 CAPM 公式，得：

$$\begin{aligned}E(R_i)&=R_f+[E(R_m)-R_f](\beta_{F_1}b_{i1}+\beta_{F_2}b_{i2})\\&=R_f+b_{i1}[E(R_m)-R_f]\beta_{F_1}+b_{i2}[E(R_m)-R_f]\beta_{F_2}\end{aligned}$$

令

$$\lambda_1=[E(R_m)-R_f]\beta_{F_1}$$

$$\lambda_2=[E(R_m)-R_f]\beta_{F_2}$$

则

$$E(R_i)=R_f+b_{i1}\lambda_1+b_{i2}\lambda_2 \tag{6-19}$$

由公式(6-19)可知，此时 CAPM 与 APT 是一致的。即当 λ 值等于市场风险贴水($E(R_m)-R_f$)乘上相关因素对市场组合的 β 值，则 APT 和 CAPM 有相同的经济意义。

但是，APT 模型的投资组合只需包含大量的资产种类，不必是市场组合，因而 APT 比 CAPM 具有更强的适应性。

3. **APT 的优点**

两种理论都假定资本市场是完全竞争的市场，资产的均衡价格由市场的供求关系所决定，排斥了价格受操纵的可能性。两种理论都假设投资者期望的一致性，即投资者都能获得充分的信息，并对证券的收益和风险作出理性的判断。

套利定价模型与资本定价模型相比,具有以下优点(参见表6-3)。

(1)APT 并不要求证券的价格波动必须服从正态分布;

(2)不把投资者的效用函数局限于风险-收益关系上;

(3)市场组合不一定是投资者最合适的投资选择;

(4)不将无风险的借贷作为建立模型的基本条件。

APT 比 CAPM 的假设条件更宽松,模型中容纳更多的经济变量,因而更加贴近实际情形,更具有现实意义。

表 6-3 APT 与 CAPM 的比较

性质 \ 类别	CAPM	APT
1 市场竞争性	完全竞争	完全竞争
2 价格决定	供求关系	供求关系
3 投资者期望	一致性	一致性
4 收益率变动因素	一个	多个
5 价格波动规律性	正态分布	无限制
6 效用函数的限制	风险厌恶者	无限制
7 市场组合	必须是	不一定
8 无风险借贷限制	有	无

二、关于 APT 的验证

1. Ross 与 Roll 的验证

1980 年两位学者对 APT 模型进行验证。他们的验证研究分为两步:

第一步,先估计各证券的因素敏感度,根据样本中证券的收益率之间的协方差矩阵,确定影响证券收益率的共同因素的数目,以及对这些因素的敏感度(b)进行分析,并使这些 b 值(或 β)能满意地解释证券收益率随这些因素变动的系统风险,使剩余误差尽可

能的小。

第二步，通过回归分析，从 b 值与期望收益率的关系，估计各种因素的边际贡献 λ。由于计算工作的复杂性，限制了样本中证券的数目。

他们发现，4 个因素已经能充分解释证券的收益，而且发现剩余误差与期望收益率之间几乎无相关性。研究的结果对 APT 理论提供了有力的支持。

然而，理论界有些学者对这种检验方法也提出了一些异议。首先，样本误差可能影响研究的结果；其次，统计的因素分析并没有对因素作定性说明。此外，样本的规模也会影响研究结果。1984 年，由德瑞密斯(P Dhrymes)、佛瑞德(I Friend)和哥特金(N B gntekin)等人的研究发现，每组的证券从 15 种增加到 60 种时，风险因素的数目将从 3 个增加到 7 个。

上述质疑，只是对 APT 模型的检验的可行性提出疑问，并非对 APT 模型本身的可信度的质询。这些讨论表明用统计分析方法对 APT 模型进行验证是相当困难的。

2. 深圳证券市场的 APT 实证分析

1997 年，刘志强对深圳证券市场的某些股票的收益数据进行实证分析。基本方法是：选择金融、房地产和电力三个行业，每个行业选择两个股本较大的行业代表；选定 1996.1.8～1996.12.30 的交易日中每周一的收盘价作为原始数据，利用公式：

$$R_{it}=(P_{it}-P_{it-1})/P_{it-1}$$

把股票价格数据换成收益率数据，用多元统计分析软件包及因子载荷对收益率数据作因素分析。

所得结果是：1996 年深圳股市中，只能分离出一个共同因子——市场因素。这可能是因为我国的证券市场尚处于起步阶段，主要是供求关系和政策因素在起作用，人们买卖某种股票并不是因为该公司的经营业绩如何，而是盲目跟风，随大流。这反映出市

场因素对资产收益有重要的影响。但某些行业的行业因素不明显，分离不出行业因素。另外，由于我国企业对银行利率调整也不灵敏，因此也分离不出利率因素。

由于利用 1996 年的股票收益率数据只分离出一个共同因子——市场因素，故在此基础上进一步检验 APT 没有意义，只有待我国股市逐渐成熟，可分离出较多的影响股票价格变动的因子后，才能进一步检验 APT，以判别 APT 是否适用于我国证券市场。

总之，APT 是个新的资产均衡价格模型。它克服了 CAPM 模型中某些主观的假定，特别是假设证券或组合的收益惟一受市场组合这个共同因素的系统的影响。APT 认为证券或组合的收益受一个或多个风险因素的影响，并且资产的期望收益与风险因素呈现近似线性关系。然而，至今为止，对 APT 的验证仍然是一个没有解决的难题。

本章小结

套利定价模型(即 APT)是一种新的资产均衡模型。该理论主要观点是:收益或风险由多个因素引起,而不只是决定于市场一种因素;众多的投资者通过套利可使市场趋于均衡。

APT 的假设条件比 CAPM 更为宽松,因而更接近于现实。

Ross 与 Roll 等人对 APT 模型进行了验证,但影响证券收益和风险的关键因素究竟有哪些,各起多大的作用和影响,至今没有一个统一的说法。

关于多因素模型,1997 年茆诗松等人在《中国证券市场实证分析》中提出较理想的模型:

$$Y = R_0 + \chi_1\beta_1 + \chi_2\beta_2 + \cdots + \chi_7\beta_7 + \varepsilon$$

其中,Y 代表股票价格指数(或价格),χ_1,χ_2,χ_3,…,χ_7 分别表示上市公司的数量,资本总值,交易量,GNP,通货膨胀率,汇率及利率,并对 16 个国家和地区的股票市场近十年的数据进行了验证。

第七章 股票价格的随机模型

证券市场上有种理论认为:股票价格变化有如醉汉走路,事先无法知道未来的情况,即是一种不确定性的变动。这种不确定性的变动称为随机过程。

任何经济变量,如果在考察期内其价值变化以某种不确定形式变动,则称该变量遵循某种随机过程。随机过程可以根据变量的性质分成两类:连续变量随机过程,或离散变量随机过程。在连续变量随机过程中,基础变量可以在确定的范围内取任意值;而在离散变量随机过程中,只能取某些确定的离散变量值。

在本章中,我们要推导出股票价格的随机过程。

第一节 马尔可夫过程

一、马尔可夫过程(Markov Process)

我们知道,事物的发展状态总是随着时间推移而不断变化。对于有些事物的发展,我们需要综合考察过去与现在的状态,才能预测未来。

如图 7-1,中国象棋"马"的走法可说明这个问题。设一只中国象棋中的"马"原先位于"1"处,现它沿着 1→2→3→4 的路线运动到"4"处。为了预测这只马的未来位置,我们只要知道它现在位于"4"处就行了。至于它以前位于何处,对我们的预测并不需要。事实上,从"马"现在位于"4"处这一事实,我们已经可以预测出其下一个位置将是"3"或"5",而不需要知道马以前处于什么位置。

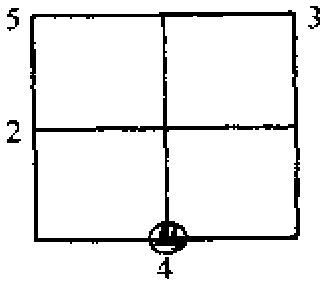


图 7-1　中国象棋“马”的走法及位置

像这种未来状态只与现在有关而与过去无关的事物发展过程，称为马尔可夫过程(即立足现在，展望未来)。

马尔可夫(Markov)是俄国著名的数学家(1856～1922 年)。

马尔可夫过程是一种特殊类型的随机过程。这个过程说明只有变量的当前值与未来的预测有关，变量过去的历史及变量从过去到现在的演变方式则与未来的预测不相关。

股票价格的变化通常被假定遵循马尔可夫过程。

假设某公司股票价格为 50 元。如果股价遵循马尔可夫过程，那么一个星期以前、一个月以前或一年以前的股价并不会影响我们对将来的预测，惟一相关的信息就是股票的现价 50 元。股价未来值的预测是不确定的，必须以随机概率分布的方式表达。马尔可夫性质隐含了在将来任一特定时刻股价的概率分布仅仅取决于股票当前的价格。股票的现在价格已经包含了所有信息，当然也包括了过去的记录。

二、维纳过程(Wiener processes)

描述股价变化的模型通常用著名的维纳过程来表达。维纳过程是马尔可夫随机过程的一种特殊形式。物理学中维纳过程被用于描绘粒子遭受到大量微粒碰撞之后的运动形态，有时称为布朗运动。

一个变量 z 的变化，如果遵循维纳过程，我们就可以考虑在

小时间区间上变量 z 值的变化。设一个小的时间区间长度为 Δt，Δz 表示在 Δt 时间内 z 的变化。如果变量 z 遵循维纳过程，Δz 必须满足两个基本性质：

性质 1：Δz 与 Δt 的关系满足条件：

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \tag{7-1}$$

其中，ε 为从标准正态分布中取得的一个随机值。标准正态分布的均值为 0、标准差为 1.0。

性质 2：任何两个不同时间间隔的 Δz 的值相互独立。

由性质 1 我们可知 Δz 是具有以下特征的正态分布：

Δz 的平均值为 0；

Δz 的标准差为$\sqrt{\Delta t}$；

Δz 的方差为 Δt。

性质 2 意味着变量 z 遵循马尔可夫过程。

在普通微积分中，通常在微小变化接近为 0 时，将这个变化当作极限来处理。这样 $\Delta y/\Delta x$ 取极限就成为 dy/dx 等等。当 $\Delta t \to 0$ 时，以上描述的 z 过程的极限就是维纳过程。与普通微积分相似，我们将方程(7-1)的极限情况表示为：

$$dz = \varepsilon\sqrt{dt} \tag{7-2}$$

三、维纳过程的推广

到现在为止我们讨论的基本维纳过程偏差率为 0，方差率为 1.0。偏差率为 0 意味着在未来任意时刻 Z 的期望值等于它的当前值；方差率为 1.0 意味着在长度为 T 的一段时间段后 Z 变化的方差为 $1.0\times T = T$。将维纳过程推广到任一变量 x，则它的定义可用 dz 表达如下：

$$dx = a\,dt + b\,dz \tag{7-3}$$

其中 a 和 b 为常数。

要理解公式(7-3)，首先要解释等式右边的两项内容。其中

$a\mathrm{d}t$ 项表示每单位时间里变量 x 的期望偏差率为 a。如果不考虑第二项 $b\mathrm{d}t$，则(7-3)式成为：

$$\mathrm{d}x = a\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a$$

因此

$$x = x_0 + at$$

其中，x_0 表示时间为零时，x 变量的值。在时间长度为 T 的时间区间里，变量 x 的增加值为 aT。

公式(7-3)右边第二项 $b\mathrm{d}z$ 可以被看作变量 x 变化的轨迹上增加的波动性。这种波动性程度大小可以由 b 乘以维纳过程来表示。当时间间隔 Δt 为很小时，由公式(7-1)和(7-3)，x 变量的变动值即 Δx 可由下式给出：

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

式中，ε 与前面的含义一样，它表示从标准正态分布中的随机抽样。所以 Δx 是一种具有如下特征的正态分布：

Δx 的平均值为 $a\Delta t$；

Δx 的标准偏差为 $b\sqrt{\Delta t}$；

Δx 的方差为 $b^2\Delta t$。

同理，根据前面的分析，我们可以得出，在时间间隔 T 中，变量 x 值的变化是具有以下特征的正态分布：

x 变化的平均值为 aT；

x 变化的标准偏差为 $b\sqrt{T}$；

x 变化的方差为 b^2T。

因此，公式(7-3)给出了维纳过程的推广，其中 a 表示偏差率的期望值(即单位时间平均偏差)，b^2表示方差率的期望值(即单位时间的方差)。

四、伊托过程(ITO process)

任何一种金融衍生产品的价格都是以标的资产价格及时间的

函数。因此，要理解衍生产品的价格如何确定，就必须对随机变量的函数特征有所了解。在这方面，有一个重要的结论就是由数学家K·伊托(ITO)在1951年所提出的，被称之为伊托过程。伊托过程是一种推广的维纳过程，其数学表达式为：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{7-4}$$

ITO过程的期望偏差率和方差率都随时间变化而变化，都是基础变量 x 和时间 t 的函数。

第二节 股票价格变化的随机模型

在本节中，我们以不分红利股票为例，讨论股票价格的随机过程的特征。

一、建立模型

假定股票价格遵循推广的维纳过程，即具有常数期望偏差率和常数方差率。但是，根据这样的假设而构造随机过程模型会忽略股票价格的根本性特征。因为投资者要求来自股票的期望收益百分比与股票价格无关。如果投资者在股价为10元时要求预期收益为每年14%，那么他在股价为50元时仍然要求每年14%的预期收益。

显然，期望偏差率为常数的假设是不恰当的，需要修正。

如果以股票价格的一定比例表示预期偏差，并假设这种预期偏差为常数。换句话说，如果股价为 S，当以股价变化的百分比 μ 为常数时，S 的期望偏差就是 μS。因此，在短时间间隔 Δt 后，S 的增长期望值为 $\mu S\Delta t$。参数 μ 是股票的期望收益率，以小数的形式表示。

若股票价格的方差率恒为0，这个模型即为：

$$dS = \mu S dt$$

或
$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu\mathrm{d}t$$
两边积分得
$$S=S_0\mathrm{e}^{\mu t} \tag{7-5}$$

其中 S_0 为零时刻的股票价格。公式(7-5)说明当方差率为 0 时，股票价格以每单位时间 μ 的连续复利率增长。

上述股票价格变化模型是假定价格不存在波动性，即方差率为 0。实际上股票价格确实存在着波动率。一个合理假设是无论股票价格如何，短时间 Δt 后的百分比收益率的方差保持不变。换句话说，不管股票价格为 50 元还是 10 元，投资者认为收益率的不确定性是相同的。若 σ^2 为股票价格按比例变化的方差率，则 $\sigma^2\Delta t$ 是 Δt 时间后股票价格比例变化的方差，$\sigma^2S^2\Delta t$ 是经过 Δt 后股票价格的实际变化的方差。因此，S 的瞬时方差率为 σ^2S^2。

以上分析说明，股票价格 S 可以用瞬时期望偏差率为 μS 和瞬时方差率为 σ^2S^2 的伊托随机过程来表达，即：
$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}z \tag{7-6}$$
或
$$\frac{\mathrm{d}S}{S}=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}z \tag{7-7}$$

公式(7-6)是描述股票价格变化的最常用的一种模型。变量 σ 通常被称为股票价格波动率，变量 μ 为股票价格的预期收益率。

例 7-1　考虑一种不付红利的股票，波动率为每年 30%，预期收益率以连续复利计每年 15%。即 $\mu=0.15$，$\sigma=0.30$，股票价格的随机特征可由下式描述：
$$\mathrm{d}S/S=0.15\mathrm{d}t+0.3\mathrm{d}z$$

若 S 为某一特定时刻的股票价格，ΔS 为在经过短时间间隔后增长的股票价格，则：
$$\frac{\Delta S}{S}=0.15\Delta t+0.3\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

其中 ϵ 是从标准正态分布的随机抽样值。

设时间间隔长度为一星期或 0.0192 年，股票价格的初始值为 100 元。即

$$\Delta t = 0.0192,\ S = 100$$

$$\Delta S = 100(0.00288 + 0.0416\epsilon)$$

上式表示价格的增加是均值为 0.288 元，标准差为 4.16 元的正态分布的随机抽样值。

公式(7-6)表明 $\Delta S/S$ 服从正态分布，其均值为 $\mu\Delta t$，标准差为 $\sigma\Delta t$，即：

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t}) \tag{7-9}$$

其中 $\varphi(m,\ s)$ 表示均值为 m，标准差为 s 的正态分布。

第三节　蒙特卡罗模拟

股票价格变化的随机模型可用实践检验，蒙特卡罗模拟是一种典型的检验方法。

一、蒙特卡罗模拟

假设股票的预期收益为每年 14%，收益的标准差(即波动率)为每年 20%。如果以年计时，可表示为：

$$\mu = 0.14 \qquad \sigma = 0.20$$

设 $\Delta t = 0.01$，我们考虑股票价格在长度为 0.01 年(或 3.65 天)的时间段后的股价变化。

根据所设条件可知股价变化 $\Delta S/S$ 服从正态分布，其均值为 0.0014($=0.14\times0.01$)，标准差为 0.02($=0.2\times\sqrt{0.01}$)，即：

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \varphi(\mu\Delta t,\ \sigma\sqrt{\Delta t})$$

我们可以通过不断从 $\varphi(0.0014,\ 0.02)$ 中反复取样，模拟股

票价格的变化路径。反复取样，进行模型的一种做法是先从标准正态分布中取样值 v_1，然后将其转换为 $\varphi(0.0014,\ 0.02)$中样本点 v_2，使用公式：

$$v_2 = 0.0014 + 0.02 v_1 \tag{7-10}$$

表 7-1 显示了股票价格运动的一组特殊模拟。设股票价格的初始值为 20 元。第一阶段中，取的随机数 v_1 为 0.52，利用上述公式(7-10)得到随机样值为 $v_2 = 0.0118$。则 $\Delta S = 20 \times 0.0118 = 0.236$。因此，在下一阶段的开始股票价格为 20.236 元，如此类推下去，注意样本值必须相互独立，否则马尔可夫过程就不适用。

表 7-1　当 $\mu = 0.14$，$\sigma = 0.20$，时间长度为 0.01 年时股价模拟值

每个周期开始时的股票价格	从 $\varphi(0,1)$中抽样的随机样本 v_1	从 $\varphi(0.0014, 0.02)$抽取对应随机样本 v_2	在该周期中股价变化
20.000	0.52	0.0118	0.236
20.236	1.44	0.0302	0.611
20.847	−0.86	−0.0158	−0.329
20.518	1.46	0.0306	0.628
21.146	−0.69	−0.0124	−0.262
20.883	−0.74	−0.0134	−0.280
20.603	0.21	0.0056	0.115
20.719	−1.10	−0.0206	−0.427
20.292	0.73	0.0160	0.325
20.617	1.16	0.0246	0.507
21.124	2.56	0.0526	1.111

表 7-1 只表示了股价运动的一种可能方式。不同的随机取样将会导致不同的价格运动。在模拟中可使用任意小的时间段 Δt。然而，只有当极限 $\Delta t \to 0$ 时才能得到几何布朗运动的真实描述。表 7-1 的最后股票价格 21.124 元可以被看作在 10 个时间段或十分之一年末股票价格分布的随机抽样值。通过如表 7-1 中所示的

反复模拟运动，就可以在一年的十分之一时间结束时，求出完整的股票价格的随机分布。

二、参数说明

本章讨论的股票价格变化的随机模型涉及两个参数：μ 和 σ。这两个参数的大小取决于时间计量单位。我们假设时间以年为单位计量。

参数 μ 是投资者在短时间中获得的预期收益率，以年计量，用比率的形式表示。投资者认为，如果让他们承担更大的风险，他们将要求获得更高的预期收益率。所以 μ 值应当取决于股票收益的风险。μ 值还要受到利率水平高低的影响。利率水平越高，投资者要求的预期收益率就越高。一般来说，μ 比国库券这样的无风险投资收益高出 8 个百分点。因此，当国库券收益为每年 8% 时，即股票预期收益率为每年 16% 。

不过，由于以股票为基础资产的金融衍生产品的价值一般是独立于 μ 的，因此，我们不需要对参数 μ 的决定因素进行非常仔细的研究。

另一个参数 σ 则完全不同。它表示股票价格波动率，这一参数在决定许多金融衍生产品的价值具有至关重要的意义。σ 的典型值处于 0.20 到 0.40 的范围之间，即 20% 到 40% 。

短时间 Δt 后股票价格比例变化的标准差为 $\sigma\sqrt{\Delta t}$，作一粗略的近似，在相对较长的一段时间 T 后，股票价格比例变化的标准差为 $\sigma\sqrt{T}$，即作为近似，波动率可被解释为一年内股票价格变化的标准差。

注意：在一段较长时间 T 后，股票价格按比例变化的标准差并不恰好等于 $\sigma\sqrt{T}$，这是因为股票价格按比例变化并不具有可加性。（股票价格先增长 10% ，再增长 20% ，结果总增长可能是 32% ，而不是 30% 。）

在后面的章节中，可以看出，在相对较长的时间区间中，股票价格变动呈对数正态分布才比较符合实际情形。股票价格的波动性也恰好等于股票一年中连续复利收益的标准偏差。

第四节　伊托引理及在股票价格中的应用

一、伊托引理

假若变量 x 的价值遵循伊托过程：

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

式中，dz 是一种维纳过程，a 和 b 都是变量 x 和时间 t 的函数。变量 x 的偏差率就是 a，方差率为 b^2。伊托引理就是要证明，变量 x 和时间 t 的函数 G 遵循过程：

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b\,dz \tag{7-11}$$

其中 dz 是一种维纳过程。因此，函数 G 遵循伊托过程，其偏差率由

$$\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2$$

表示。而方差率则由

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

表示。证明过程略[8]。

在第二节中，我们已经证明了以下关系式，即：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

当变量 μ 和 σ 分别是常数时，上式可看作股票价格变动的理想模型。设 G 是变量 S 和时间 t 的函数，由伊托引理，则 G 遵循过程为：

$$dG=\left(\frac{\partial G}{\partial S}\mu S+\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt+\frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz \tag{7-12}$$

其中，变量 S 和函数 G 都同样受到不确定因素 dz 的影响。

二、伊托引理在股票价格对数变化中的应用

假若 $G=\ln S$，由于

$$\frac{\partial G}{\partial S}=\frac{1}{S}\qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=-\frac{1}{S^2}\qquad \frac{\partial G}{\partial t}=0$$

按公式(7-12)可知，函数 G 所遵循的过程为：

$$dG=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma dz$$

由于 μ 和 σ 是常数，所以上式就表示 G 遵循的是推广的维纳过程。它具有常数偏差率 $\mu-\frac{\sigma^2}{2}$ 和常数方差率 σ^2。由前面的结果，G 的变化在现时 t 与未来某时 T 之间的时间区间内呈正态分布，其平均值为：

$$\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

方差为：

$$\sigma^2(T-t)$$

在时间 t 时，G 的值就是 $\ln S$。在时间为 T 时，G 的值就是 $\ln S_T$，S_T 表示 T 时的股价。因此，G 在时间间隔 $T-t$ 中股票价格的变化就是：

$$\ln S_T-\ln S$$

所以：

$$\ln S_T-\ln S\sim\varphi\left[\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right] \tag{7-13}$$

其中，S_T 为未来时刻 T 的股票价格，S 为当前时刻的股票价格。

由(7-13)可得：

$$\ln S_T \sim \varphi\left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right] \tag{7-14}$$

公式(7-14)表明股价 S_T 具有对数正态分布。具有对数正态分布的变量可以在 0 和无穷大之间任意取值。由公式(7-14)及对数正态分布的特性，可知 S_T 的期望值 $E(S_T)$ 为：

$$E(S_T) = Se^{\mu(T-t)} \tag{7-15}$$

这与 μ 作为预期收益率的定义相符。S_T 的方差可表示为：

$$\sigma^2_{S_T} = S^2 e^{2\mu(T-t)}(e^{\sigma^2(T-t)} - 1) \tag{7-16}$$

第五节　收益率与波动率

一、收益率

利用股票价格的对数正态特性，可以获得时间 t 到 T 之间股票连续复利收益率概率分布的有关信息。将时间间隔 t 到 T 之间股票的连续复利收益率定义为 η，由上一节可知：

$$S_T = Se^{\eta(T-t)}$$

因而：

$$\eta = \frac{1}{T-t}\ln\frac{S_T}{S} \tag{7-17}$$

由于：

$$\ln S_T - \ln S = \ln\frac{S_T}{S}$$

由公式(7-13)可得：

$$\ln\frac{S_T}{S} \sim \varphi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t),\ \sigma\sqrt{T-t}\right]$$

根据正态分布的特征，由上述公式可知

$$\eta \sim \varphi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2},\ \frac{\sigma}{\sqrt{T-t}}\right) \tag{7-18}$$

所以，连续复利收益率也是服从正态分布，其平均值为 $\mu-\frac{\sigma^2}{2}$，标准差为 $\sigma/\sqrt{T-t}$。

例 7-2 假设某种股票每年的预期收益率为 17%，每年的波动性为 20%，那么，在三年时间里，所获得的实际收益率(连续复利率)是正态分布，平均值为：

$$0.17-0.04/2=0.15$$

也就是 15%(每年)。标准差为

$$\frac{0.2}{\sqrt{3}}=0.1155$$

也即每年 11.55%。

下面我们来分析一下期望收益率。

从公式(7-18)的结果来看，在较长时间(T－t)内，预期的连续复利收益率为 $\mu-\sigma^2/2$。而在任何短暂时间区间内的预期收益率为 μ。两者显然不同！为什么会有明显的差异？我们举例说明。

例 7-3 假定以下数据表示连续五年内，股票所产生的年实际收益率，每年均以复利方法计算求得：

20%，15%，30%，－20%，25%

收益率的算术平均值为 14%。如果投资者投资于股票，他在五年投资期内的收益将少于 14%。

价值 100 美元的投资，在五年期末时的价值为：

$$100\times1.15\times1.20\times1.30\times0.80\times1.25=179.40$$

相反，如果按 14% 的年复利计算方法计算出来的收益就是：

$$100\times1.14^5=192.54$$

这个例子说明一个具有普遍意义的结论：不同年份的收益率平均值并不等于以年复利计算的每年的平均收益率。可以证明，前者总是比后者的数值大。(实际上，一组数字的算术平均值总要比几何平均值大，除非这组数字都相同。)

本例中,用年复利表示的投资实际的平均收益为:

$$1.7940^{1/5}-1=0.1240$$

即每年为12.4%,显然14%>12.4%。

如果假定计算收益率的时间区间越来越趋于短暂,观察值的数目或观察次数也越来越多,我们就可以计算出以下两个估计值:

(1)很短时间内的预期收益率(可以通过计算许多很短时间间隔的收益的算术平均值得到)。

(2)较长时间内的预期连续复利收益率(连续复利计算)。

根据上例可知,在无穷小的短暂时间区内预期收益率是 μ,而预期的连续复利收益率是 $\mu-\sigma^2/2$。所以,前者总是大于后者。

二、从历史数据估计的波动率

对股票价格的波动性进行经验研究,首先要将股票价格的变化划分成固定的时间区间,如每天、每周,或每月等等。

将下列符号分别定义为:

$n+1$ 为观察次数;

S_i 为第 i 个时间区间末的股票价格;

τ 为以年表示的时间区间长度。

令:

$$\mu_i=\ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right) \qquad 其中, i=1,2,\cdots,n$$

因为 $S_i=S_{i-1}e^{\mu_i}$,μ_i 为第 i 个时间间隔内的连续复利收益率(不是以年为单位)。μ_i 的标准偏差 S,一般可由下式来求得:

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i-\bar{\mu})^2}$$

或者:

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2-\frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i\right)^2}$$

其中 $\bar{\mu}_i$ 是 μ_i 的平均值。μ_i 的标准偏差是 $\sigma\sqrt{\tau}$，因此、变量 S 是 $\sigma\sqrt{\tau}$ 的估计值。σ 本身的值又可以以下式来表示：

$$\sigma = S^* = \frac{S}{\sqrt{\tau}}$$

可以证明，这一估计值的标准误差大约是 $S^*/\sqrt{2n}$。

一般情况下，要选定一个合适的 n 值并不是一件容易的事。在其他条件不变的情况下，数据越多，则求出的结果也就越精确。但是，σ 并不随着时间的变化而变化，太过长远的历史数据对于预测未来值可能不起作用。一种较好的折衷办法是从最临近的 90～180 个交易日中，选取每天的收盘价作为数据资料。

例 7-4 表 7-2 列示出某种股票价格在 20 个交易日内可能出现的收盘价格。由于：

$$\sum \mu_i = 0.09531 \quad \sum \mu_i^2 = 0.00333$$

$$\sqrt{\frac{0.00333}{19} - \frac{0.09531^2}{380}} = 0.0123$$

即每天的收益标准差的估计值为 0.031。

假定时间以交易日为计算基础，每年有 252 个交易日，所以 $\tau = 1/250$。根据这些数据资料，可求出每年的波动性估计值为 $0.0123\sqrt{250} = 0.194$，即年波动率为 19.4%。这些估计值的标准误差是：

$$\frac{0.194}{\sqrt{2 \times 20}} = 0.031$$

即每年为 3.1%。

上述分析方法虽然假定股票是不付红利的，但这种分析方法也适合于支付红利的股票。在包括除权日在内的时间区间的收益 μ_i 由下式给定：

$$\mu_i = \ln\frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

其中 D 表示红利股息数额。在其他时间区间隔的收益依然是：

$$\mu_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

表 7-2　波动性估计

天数	股票收盘 (以美元计算)	价格相关系数 S_i/S_{i-1}	每日收益 $\mu_i = \ln(S_i/S_{i-1})$
0	20		
1	20.125	1.00625	0.00623
2	19.875	0.98758	−0.01250
3	20	1.00629	0.00627
4	20.50	1.02500	0.02469
5	20.25	0.98781	−0.01227
6	20.875	1.03086	0.03040
7	20.875	1.0000	0.00000
8	20.875	1.0000	0.00000
9	20.75	0.99401	−0.00601
10	20.75	1.0000	0.00000
11	21	1.01205	0.01198
12	21.125	1.00595	0.00593
13	20.875	0.98817	−0.01190
14	20.875	1.0000	0.00000
15	21.25	1.01796	0.01780
16	21.375	1.00588	0.00587
17	21.375	1.0000	0.00000
18	21.25	0.99415	−0.00587
19	21.75	1.02353	0.02326
20	22	1.01149	0.01143

第六节 股票价格的二叉树模型

本节将用二叉树模型讨论股票价格随机模型的离散形式。

假设股票价格初始值为 S，经过一段时间 Δt 后，股票价格只出现两种情况：以概率 P 上升到 Su，以概率 $1-P$ 下降到 Sd。股价变化过程如图 7-2 所示。因股价变化只有两种可能值，故称为二叉树。

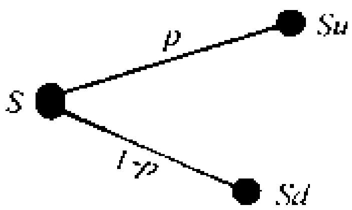


图 7-2 二叉树模型

显然这个模型不太现实。一个更现实的假设是股票价格的变动在很短的时间间隔 Δt 内是二值的，在稍长的时间内，我们可以得到期末价格为多种可能性的情况。

使用二叉树模型时股票价格的完整树图如图 7-3 所示，时间为 0 时，已知股票价格为 S，时间为 Δt 时，股票价格有两种情况 Su 和 Sd；时间为 $2\Delta t$ 时，股票价格有三种情况 Su^2，Sud 和 Sud^2；以此类推，一般情况下 $i\Delta t$ 时，股票价格有 $i+1$ 种情况，它们是：$Su^j d^{i-j}$，$j=0, 1, 2, \cdots, i$。

要使在很短时间 Δt 内股票的预期收益为 $r\Delta t$，在 Δt 内收益的方差为 $\sigma^2\Delta t$，必须适当选择 u、d 和 p。一种选择方法如下：

$$a=e^{r\Delta t} \quad d=\frac{1}{u} \quad u=e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad p=\frac{a-d}{u-d}$$

可以看出，在极限情况下，即 $\Delta t \to 0$ 时，这种股票价格运动的二叉树模型成为本章已经讨论过的几何布朗运动模型。

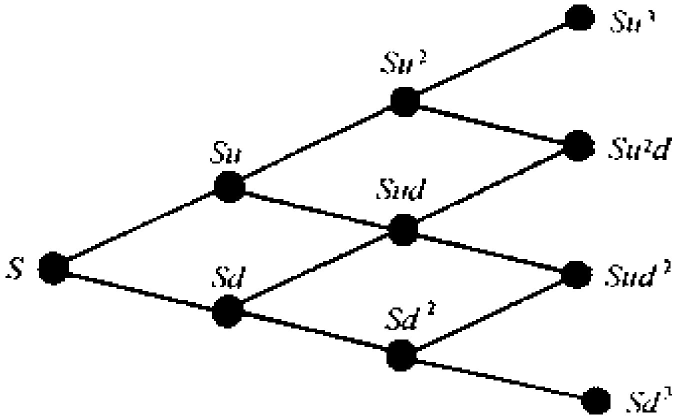


图 7-3　三周期二叉树模型的股票价格运动

例 7-5　考虑一种股票价格，预期收益率为每年 12%，波动率为 30%。使用二叉树模型表示 0.04 年(近似为两周)内股价运动情况。本例中 $r=0.12$, $\sigma=0.30$、$\Delta t=0.04$，由前面的等式可得：

$$u=e^{0.30\times\sqrt{0.04}}=1.0618$$

$$d=\frac{1}{u}=0.9418$$

$$p=\frac{e^{0.12\times0.04}-0.9418}{1.0618-0.9418}=0.525$$

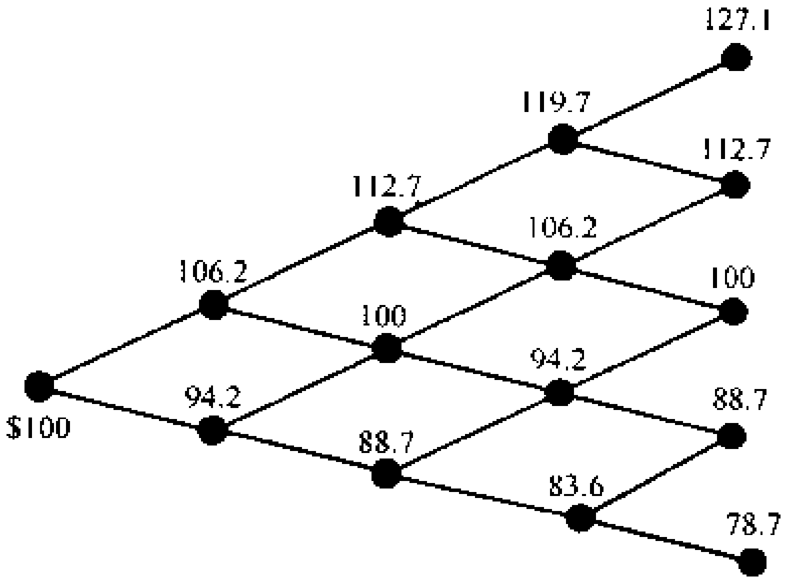


图 7-4　股票价格运动

如果股票价格初始值为100美元，经过4个长度为Δt的时间段后的可能运动情况，如图7-4所示。上升运动的概率总是为0.525，下降运动的概率总是0.475。对于在第4段时间末产生的股价为112.7美元，必定包含有三次上升运动和一次下降运动，有4条途径可以达到这个价格，它们是*DUUU*，*UDUU*，*UUDU*和*UUUD*，其中*U*代表上升运动，*D*代表下降运动。因此，在第4段时间末的股价为112.7美元的概率为：

$$4\times 0.525^3\times 0.475=0.275$$

相应的股票价格为127.1美元，100.0美元，88.7美元和78.7美元的概率同样可计算出，分别为0.076，0.373，0.225和0.051。

本章小结

随机过程描述某种变量的值随着时间的变化而可能出现的变化。马尔可夫过程是指在预测某种变量的未来值时，只有变量的现值与预期有关。变量的历史值，以及从变量历史值推导出现值的方法与预期均无关。

维纳过程，dz 描述的是正态分布变量的变化特征。

一般的维纳过程描述的是一个正态分布变量的变动特征，其单位时间内的偏差率为 a，单位时间的方差率为 b，而且 a 和 b 都是常数。这就是说，如果在时间为零时，变量值是 x，则在时间为 T 时，变量呈正态分布，而且平均值是 $x+aT$，标准偏差是 $b\sqrt{T}$。

伊托过程则揭示了变量值 x 的偏差和方差可以是 x 本身的函数，或是时间的函数。在非常短的时间区间内，x 的变动呈正态分布；但在较长的时间区间内，x 的变化可能是非正态分布。

在本章中，我们已经建立了股票价格随时间变化而变化的马尔可夫随机过程，应该说这一模型是比较令人满意的。在对金融衍生产品的估价中，这一模型得到了广泛的应用。根据马尔可夫过程，在任一极小的时间区间内，股票持有者的比例收益率是正态分布的，并且在任意两个不同的极小时间区间内，其收益都是互相独立的。

要直观地理解一个变量的随机过程，其方法是模拟该变量的变化特征。这种方法包括将时间区间分成许多极小的时间步骤，并对变量进行随机取样，然后就可以计算出该变量未来的随机分布。这种方法就是蒙特卡罗模拟。

伊托引理在衍生产品的定价过程中具有非常重要的意义。

股票价格变化具有对数正态分布的特征。

要对股票价格的波动性 σ 进行经验估计，就需要对固定时间

间隔内的股票价格变化进行观察(如每天、每周或每月)。在每一时间区间里,计算出期末股票价格与期初股票价格两者之比的自然对数值,将求出来的这些数字的标准偏差除以以年表示的时间区间长度的平方根就可以估算出波动性。通常,在计算波动性时,将交易所不进行交易的非营业日天数剔除在外,即以交易日数为时间计算的依据。

本章所考虑的是不计红利的股票价格运动,对于分红利的股票价格仍可有二叉树模型计算,但需作一些调整;另外,二叉树模型也可用于期权价格计算。

利用波动率、无风险利率及时间长度可以计算股价上升或下降的概率;同时应当避免波动太小,概率出现负值。

第八章　金融期货

“四两拨千斤”——期货杠杆效应

“一手交钱，一手交货。”这是商品经济社会中一种常见的交易方式，称为现货交易。随着商品经济的进一步发展，交易方式不断创新，交易双方签订一份合同或以成交记录为准，一定时期后按预定的价格交货，这种交易方式称为期货交易。

期货买进卖出的目的一是锁定价格，锁定成本，使自己需要的或拥有的商品的价格不会随市场因素变动而变动，使生产经营活动具有计划性和稳定性；二是为了投机，通过买进卖出吃价差。期货交易只需缴纳很低比例的保证金，所以，双方均可以以小博大。投机成功，利润丰厚；相反，会“偷鸡不成反蚀一把米”。

第一节　金融期货

早期的期货合约规定的交易对象都是大豆、玉米、铜、木材等实物商品，因此称为商品期货。随着期货交易的发展，货币、股票、债券等金融工具成为期货交易的对象。这些以各种金融工具为期货商品的标准化合约交易，称为金融期货。

自20世纪70年代以来，金融期货发展迅速。现在金融期货的交易量已经超过商品期货的交易量，成为金融市场上最重要的金融产品。它对金融市场的构成和运作产生了巨大的冲击，很多经济学家把金融期货的诞生称为一场金融革新。

1995年，“巴林银行事件”引起了全世界的震惊，有两百多年

历史的英国巴林银行由于金融期货交易失误而破产，也引发了人们对金融期货的新的探讨。

金融期货有利率期货、外汇期货和证券指数期货三类。下面，我们将分别介绍三种金融期货。

一、外汇期货

外汇是“对外汇兑”，或“国际汇兑”的简称。外汇包括外国货币的各种请求权或债券（如外国政府公债、国库券、外国公司的债券、股票、息票及各种外币表示的支付凭证）。

两国货币之间的兑换比率或折算比率称为汇率。汇率的实质是一国货币用另一国货币表示价格。

外汇市场的汇率的不确定性变动而使人们遭受损失的可能性称为外汇风险，又称汇率风险。

为了减少和避免外汇风险，人们必须做好外汇风险的防范工作，把外汇风险转移出去。目前，人们已积累的管理外汇风险的办法多达数十种，其中外汇期货与外汇期权是人们最乐于使用的办法，这两种新工具在人们管理外汇风险的过程中被运用得最为普遍。

20 世纪 70 年代，美国经济地位的下降，最终导致布雷顿森林体系的解体。以美元为中心的固定汇率制被各国货币的浮动汇率制度所代替。由于世界经济格局的变化和市场的投机因素，浮动汇率处于不稳定的状态。从事进出口的生产企业和外贸机构面临着巨大的汇率风险，产生了强烈的转移汇率风险的要求。同时国际贸易与国际投资活动与日俱增，外汇现货交易规模不断扩大，为外汇期货的发育提供了坚实的基础。

1972 年，国际货币市场（*IMM*）成立，它是芝加哥商业交易所的一个分部，推出了第一份外汇期货合约。

外汇期货又称汇率期货，是在期货交易所里买卖标准化外汇

期货合约的交易。外汇期货合约是双方约定在将来某个时刻，以规定的条件买卖一定数量的外汇的标准化合约。外汇期货可以提供规避汇率风险和汇率发现的功能。

外汇期货实际上是两种货币之间的期货交易，即可以是本国货币与外国货币的期货交易，也可以是两种外国货币之间的交易。因此，外汇期货又称“货币期货”。

二、利率期货

利率期货是继外汇期货之后产生的又一个金融期货类别。

利率期货产生于20世纪70年代的美国。60年代末期开始，美国和西方各国，放松了对利率的管制，利率波动开始加剧。利率频繁地波动，造成了巨大的金融风险。市场利率的不确定性变动而遭受损失的可能性称为利率风险。在渴望回避利率风险的呼声中，新的金融期货品种——利率期货应运而生。

1975年10月，国际货币市场推出了以美国住宅抵押协会发行的住宅抵押证券为标的的标准化期货合约，这是第一张利率期货合约。

利率期货是指交易双方在集中性的市场以公开竞价方式所进行的利率期货合约交易。

利率期货合约通常以固定利率的国债作为市场利率风险的载体。因此利率期货又称国债期货。根据标的物的期限，利率期货可以分成短期利率期货和长期利率期货。

1．短期利率期货

短期利率期货是合约的标的期限不满一年的利率期货。

芝加哥商品交易所的国际货币市场(IMM)于1976年推出91天(13周)的国库券期货是第一张国债期货合约，至今仍然是最活跃的短期利率期货品种。

下面简单介绍短期利率期货的特点：

(1)报价：美国的短期国库券通常用贴现方式发行。为了使不同发行日期、不同期限的国库券在报价上具有可比性，国债现货市场上习惯用年收益率作为国库券报价。其计算公式如下：

$$R = \frac{F - P}{F} \times \frac{360}{T} \tag{8-1}$$

其中，R 表示国库券的年收益率，F 表示国库券的面值，P 表示国库券的市场价格，T 表示距到期日的天数。

实际上，公式(8-1)得到的是国库券的贴现率，习惯上将其视为年收益率。

短期国库券期货报价常用“IMM 指数”方式。

$$\text{IMM 指数} = 100 - R \times 100 \tag{8-2}$$

例 8-1 面值为 100 美元的 90 天的国库券，发行价格为 98 美元，则：

短期国债现价报价为：

$$R = \frac{100 - 98}{100} \times \frac{360}{90} = 8\%$$

短期国库券期货报价为：

$$\text{IMM 指数} = 100 - 0.08 \times 100 = 92$$

期货市场之所以用指数方式报价，主要原因有三个：一是使国库券期货的买入价低于卖出价，以符合交易者低价买进、高价卖出的习惯；二是使这一指数的变动方向与国库券期货价格的变动方向一致，以便投资者或投机者在预期指数上升时买入，在预期指数下跌时卖出；三是指数报价方式增加合约的通用性，使期货合约与具体的国库券脱钩，即使限期为 6 个月的国库券，只要还剩下 91 天到期，也能用于该合约的实物交割。

(2)价格最小变动单位：国际货币市场规定价位最小变动单位为 1 个基本点。1 个基本点就是一个百分点的百分之一，即万分之一。国库券期货的最小变动单位为 1 个基本点，即表示其年贴现

率变动的最小幅度为 0.01%，通常用指数表示就是 0.01。在美国，国库券面值一般为 100 万美元，90 天期限的短期国债，每点的价值为 25 美元(即 $1000000 \times 0.01\% \times 90/360 = 25$)。

尚余 90 天的 6 个月和 1 年期的国库券也可用于交割。如果交割的国库券所剩的天数不足 90 天，则可按年收益率折算交割证券的价格。

由公式(8-2) 可以推出合约的市场价格的计算公式：

$$P = \left(1.0 - \frac{R \times T}{360}\right) \times F \tag{8-3}$$

其中，P 为期货合约的市场价格，R 为国库券的年收益率，F 为期货合约的国库券面值，T 为国库券的期限。

例 8-2　国库券年收益率为 3.24%。面值 100 万美元 90 天期的国库券的市场价值为：

$$P = \left(1 - \frac{0.0324 \times 90}{360}\right) \times 1000000 = 991900(\text{美元})$$

换句话说，卖方同意以 991900 美元的市场价格向买方提供面额 100 万美元的 90 天期的国库券。

如果交割日新发行的 90 天期的国库券收益率为 3.50%，则 100 万美元的国库券的市场价格为：

$$P = \left(1.0 - \frac{0.035 \times 90}{360}\right) \times 1000000 = 991250(\text{美元})$$

卖方可以用 991250 美元买进 100 万美元的国库券，以 991900 美元转让给买方，净赚 650 美元。当然，双方也可以采用现金交割。由买方向卖方支付 650 美元的差价即可。

在实际计算时，可用"点"数计算。年收益率增加了 0.26%（即 3.50% − 3.24% = 0.26%），IMM 下降 0.26%，即 26 个基本点，每点价值 25 美元。因此卖方盈利 $26 \times 25 = 625$ 美元。

如果交割的证券所剩的天数为 91 天，100 万美元面额的交割券种的结算价格为：

$$P = \left(1.0 - \frac{0.035 \times 91}{360}\right) \times 1000000 = 991152.80(\text{美元})$$

由于交割券种需多等1天到期，因而价格便宜了97.2美元。这正好是100万美元、年利率为3.50%的国债1天的利息。

通常，合约双方并不将合约一直持有到期满为止。当期货合约下跌(上涨)时，卖方(买方)就会平仓了结，以获取差价利润。

2. 长期利率期货

长期利率期货是指合约的标的期限超过1年的利率期货。1977年8月IMM率先推出长期国债期货合约。目前最活跃的品种有美国的长期国债期货和10年期限的国债期货。

(1)报价方式：用标的国债面额的百分数报价。报价分成两部分，前面两位数为百分数，后面两位数为基本点数，每个基本点为1个百分点的1/32，中间用短线"-"连接。例如96-20的价格，表示面额10万美元的国债期货的价格为：

$$100000 \times 96\frac{20}{32}\% = 96625(\text{美元})$$

(2)价格变动最小单位：1/32。合约的价格变动最小单位为$100000 \times 1/32\% = 31.25$美元。

(3)名义债券与转换系数。

美国财政部每次发行长期债券时，息票利率要视当时的市场利率和发行条件而定。而长期国债期货合约规定的国债是距到期日的时间不少于15年，息票利率为8%，这种合约规定的国债是现实生活中并不存在的，称为"名义债券"。

在实际交割时，应把实际国债的面额折算成名义债券。

例8-3 实际交割的长期国债的面额为100美元，还剩16年到期息票年利率为10%，每半年付息一次。现在要求折算成年收益率为8%，每半年付息一次的名义国债。

解：

$$P = \sum_{t=1}^{32} \frac{100 \times 10\% \times 0.5}{(1+4\%)^t} + \frac{100}{(1+4\%)^{32}} = 117.88(\text{美元})$$

即面值为 100 美元的这种国债，相当于名义国债 117.88 美元。转换系数 117.88 ÷ 100 = 1.1788，反过来面额 10 万美元名义国债的现券金额为：100000 × 1/1.1788 = 84.832 美元。

转换系数的一般公式为：

$$CF = \sum_{t=1}^{m \times n} \frac{r/m}{(1+8\%/m)^t} + \frac{1}{(1+8\%/m)^{m \times n}} \qquad (8\text{-}4)$$

其中，CF 为现券转换或名义国债的比例——转换系数，r 为现券的票面利率，m 为按每年计息计数，n 为现券距到期日的时间(年)。

采用名义国债的办法后，合约的标的物不再依附于任何一个实际的券种，从而使合约可以为所有的长期国债提供规避风险的功能，实现了合约的标准化，提高了合约的适用性。

现券到期的月份与合约到期月份不一致时，不能用上述方法直接计算出交割现券的金额，还需考虑利息与贴现。

采用转换系数将不同期限、不同息票利率的现券折算成等值的(即收益率相同)的名义债券，是长期国债期货的主要特点，这种标准化合约更加突出了“利率期货”的特征。

长期利率期货为金融机构提供了回避长期利率风险的手段。

三、股票指数期货

股票指数期货买卖是现代投资者为减少股票风险而采用的一种“新的套期保值”方式，1982 年在美国问世。股票价格指数期货是以股票价格指数作为合约标的的一种期货交易，它是回避股价指数涨落风险的投资工具。

股票价格指数是反映市场上股票价格平均水平的一种统计指

标。股票指数的涨落反映的并非某一家或某几家公司的股票价格的变化，而是股票市场整体价格水平的波动。因而，股票价格指数波动代表股票市场的系统风险。

股票指数期货合约的价值，大都以所依据的指数增加500倍计算，但是不同的交易所所根据的指数不同，因此，各个交易所的每个具体合约的价值是不一样的。例如，堪萨斯商品交易所的期货合约，是根据“价值线指数”进行交易的，这是一个平均数，包括在纽约股票交易所上市的1700种股票，用简单几何平均数的方法计算，如果合约根据“价值线指数”上的指数为125.14，则该股票指数期货合约的价值为 $125.14 \times 500 = 62570$ 美元。

在香港股票期货交易所买卖的是恒生指数，或买卖恒指的点。股票指数的每一个整点相当于50港元，如果恒生指数为2000点，你买一笔恒生指数期货，这笔交易的价值就等于 $50 \times 2000 = 100000$，即10万港元。

股票指数期货，人们买卖不是股票，而是指数，因此，股票指数期货市场交易又被称作没有股票的股票交易。

第二节　金融期货的套期保值

一、外汇期货的套期保值

外汇期货的套期保值，是指通过外汇期货交易将汇率锁定于某一既定水平，从而将汇率变动所造成的风险转移出去的行为。具体地说，为防范外汇汇率的升降所造成的损失，在外汇期货市场建立一种与外汇现货市场相反的部位，并于外汇期货合约到期前将此部位冲销。如此，若汇率发生变动，交易者即可以其中一个市场的盈利抵补另一个市场的损失，从而达到保值之目的。

外汇期货的套期保值可分为多头套期保值与空头套期保值两

种。"多头套期保值",又称买入套期保值,是指先买进一定数量的某种外汇期货合约,再于合约到期前卖出该合约;"空头套期保值",又称卖出套期保值,是指先卖出一定数量的某种外汇期货合约,而于合约到期前再买进该合约。

例 8-4　假设在 1998 年 1 月,一位美国旅游者计划于同年 6 月起程,去瑞士作为期 6 个月的旅行。他预计在这次旅行中将花费 250000 瑞士法郎。为了防止届时瑞士法郎升值而多支付美元的风险,他便在 IMM 购买了 2 份 6 月份交割的瑞士法郎期货合约,汇率为 0.5134。到了 6 月 6 日,他准备起程。于是,他在外汇市场以美元买进所需的 250000 瑞士法郎,可那时瑞士法郎的即期汇率已升至 0.5211。因此,他为买进 250000 瑞士法郎支付了 130275 美元,比他在 1 月份时预计的 128350 美元多支付了 1925 美元,这就是因瑞士法郎升值而使他在现汇市场蒙受的损失。不过,由于他在 1 月份时已买了 2 份瑞士法郎期货合约,所以,他现在可卖出这 2 份合约从中获取 1925 美元的收益。在期货市场所得的收益正好抵补了他在现货市场所受的损失。因而他避免了这一汇率变动的损失。

操作过程及盈亏情况如下:

表 8-1　出国旅行者的多头外汇期货套期保值

日期	现货市场	期货市场
1 月 12 日	预计花费 250000 瑞士法郎,按目前汇率 0.5134 计算,需支付 128350 美元	买进 2 份 6 月份交割的瑞士法郎期货合约,汇率为 0.5134,合约总成本为 128350 美元
6 月 6 日	瑞士法郎即期汇率升至 0.5211,买进 250000 瑞士法郎,支付了 130275 美元	卖出 2 份瑞士法郎期货合约,汇率为 0.5211,合约总值 130275 美元
盈亏	128350 − 130275 = −1925(美元)	130275 − 128350 = 1925(美元)

注:(1) 在外汇期货的套期保值中,无论是多头套期保值,还

是空头套期保值，其实质是一样的，都是通过外汇期货交易而使一个市场的盈利弥补另一市场的亏损，从而避免或减少由汇率变动所引起的损失。

(2) 上例中，现货市场的损失恰好为期货市场的盈利所抵消，即所谓的“完全套期保值”，在现实中，很难实现这种完全套期保值。

二、利率期货的套期保值

目前，在各种金融期货的套期保值中，最重要而又最复杂的是利率期货的套期保值。以长期利率期货的套期保值为例说明其特点。

假定某基金经理持有价值100万美元的长期国库券，该债券9月份的现货市场价格为99000美元。该经理担心今后利率会上升，使债券价格可能下跌。于是他决定出售利率期货合约，以84000美元的价格卖出10张12月份债券期货合约。事情正如他所料，由于利率上升，11月份该批债券价格跌至91000美元，由于他做了套期保值，他得以76000美元的价格对冲在手空盘，并用期货获利来弥补现货市场的亏损。

表8-2 套期保值过程

现货市场	期货市场
9月份持有100万美元长期国库券市场价值99000美元	以84000美元卖出10张长期国库券12月份期货合约
11月份跌至91000美元	以76000美元买进10张长期国库券12月份期货合约
亏损:8000美元	获利:8000美元

套期保值的比率是指套期保值者在对现货部位实行套期保值

时，用以计算所需买进或卖出的某种期货合约的数量的比率。这一数量在一定程度上决定了套期保值的效率。

长期利率期货的套期保值的模型主要有以下三种：转换系数模型、回归模型、存续期模型。

1. 转换系数模型

转换系数模型是一个最常用的模型。该模型以最便宜可交割债券的转换系数作为套期保值比率，以此来计算套期保值所需的合约数，其模型为：

$$M = \frac{S_m}{D} \times CF \tag{8-5}$$

其中，M 表示套期保值所需的合约数，S_m 表示现货部位的面值总额，D 表示期货合约的交易单位，CF 表示转换系数。

例如，某投资者持有面值总额为 500 万美元的美国长期国债券，准备用 1998 年 9 月份到期的美国长期国债期货合约来套期保值。假设该投资者所持有的现货债券对 1998 年 9 月份交割的合约而言恰为最便宜可交割债券，交易单位是 100000 美元，其转换系数为 1.5，则在套期保值时，该投资者所需卖出的合约数应为 75 张（5000000/100000 × 1.5）。

对最便宜可交割债券，转换系数模型是确定套期保值比率的一个比较理想的模型。但转换系数模型存在明显的局限性。

2. 回归模型

回归模型是由资本资产定价模型（CAPM）发展而来。由此模型所得出的套期保值比率，类似于资本资产定价模型中的贝塔系数（常用 β 表示）。该模型假设在套期保值期间，此二部位的价值变动关系是不变的。这种不变的价值变动关系，我们可用贝塔系数来表示。在套期保值中，投资者可根据历史资料，利用回归方法求得这一贝塔系数。

在长期利率期货的套期保值中。回归模型是一个不常用的确

定套期保值比率的模型。但是，它通常被套期保值者用作其他模型的补充，以修正其套期保值比率，从而提高其套期保值的效率。

3. **存续期模型**

存续期：一般以年来表示，它是指债券的到期收益率变动一定幅度时，债券价格因此而变动的比例。例如，某债券的到期收益率若变动一个基本点 0.01%，则该债券的价格将变动 0.095%，这样，该债券的存续期即为 9.5 年。用公式表示，即：

$$D = \frac{\frac{-\Delta P}{P}}{\Delta r} \tag{8-6}$$

或：

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \cdot \Delta r \tag{8-7}$$

其中，D 为存续期；P 为债券价格；r 为债券的到期收益率。在这里，负号通常被省略。

可见，存续期与债券的期限不同，它反映债券价格的利率敏感性。我们知道，一种有效的套期保值，应使现货部位的价格变动恰为期货部位的价格变动所抵消。如果我们以 ΔP_c 表示每一美元面值的现货部位的价格变动额；以 ΔP_f 表示每一美元面值的期货合约的价格变动额；以 HR 表示套期保值比率（它是计算套期保值所需的期货合约数的一个乘数），则

$$\Delta P_c = \Delta P_f \times HR \tag{8-8}$$

根据公式(8-7)，我们可得现货部位的价格变动额为：

$$\Delta P_c = D_c \times P_c \times \Delta r \tag{8-9}$$

其中，D_c 为现货债券（即套期保值对象）的存续期，P_c 为现货债券的价格。

同样，我们也可得期货合约的价格变动额为：

$$\Delta P_f = D_f \times P_f \times \Delta r \tag{8-10}$$

其中，D_f 为期货合约的存续期，P_f 为期货价格。"期货合约的存续期"，实际是指最便宜可交割债券从交割日至到期日的存续期。

从上述公式可得：

$$D_c \times P_c \times \Delta r = D_f \times P_f \times \Delta r \times HR$$

假设现货利率与期货利率同时、同向且同幅度变动，则上式两边同除以 Δr 得

$$D_c \times P_c = D_f \times P_f \times HR$$

因此：

$$HR = \frac{D_c \times P_c}{D_f \times P_f} \tag{8-11}$$

现在，我们用一简单的例子来说明存续期模型的应用。

假设某投资者持有面值总额为 10000000 美元、2016 年到期、息票利率为 9.25% 的美国长期国债，准备用美国长期国债期货来套期保值。根据计算，该投资者所持有的现货债券有 9.5 年的存续期，其价格为 116。与此同时，期货的存续期为 10.45 年，期货价格为 91-12。根据式(8-11)，我们可算得

$$HR = \frac{9.5 \times 116}{10.45 \times 91.375} \approx 1.15$$

套期保值比率为 1.15，说明套期保值工具(期货合约)的面值应为套期保值对象的 1.15 倍。在上例中，因现货债券的面值总额为 10000000，而美国长期国债期货合约的交易单位为 100000 美元，因此，该投资者必须卖出 115 张美国长期国债合约，方可实现比较有效的套期保值。

通过以上分析，我们不难看到，与转换系数模型相比，存续期模型的适用范围比较广泛。它既适用于最便宜可交割债券的套期保值，也适用于非最便宜可交割债券的套期保值，甚至还适用于那些不可交割的债券的套期保值。但是，存续期模型也存在着一个严重的弱点，它假设各种债务凭证在收益率的变动上，不仅有着相同的方向，而且有着相同的幅度，这样，套期保值对象的收益率与套期保值工具的收益率是按照完全平行的形式变动的。很显然，除直

接套期保值以外，这种假设通常与现实不符。

三、股价指数期货套期保值

股票指数期货采用保证金制度，美国期指交易保证金通常为总价值的10%，交易者以较小的成本就可以获得指数波动带来的巨额收益，并承担相应的风险，较之股票交易，这种指数期货更加灵活、方便。持有大量股票的投资基金的管理者，为了防止股票下跌的风险，可以卖出股票价格指数期货，在两个市场上同时采取不同的交易部位，达到套期保值的目的。

例8-5 利用股价指数期货套期保值。

如表8-3，假若某证券自营商持有1000万美元的股票组合，为了防止价格下跌的风险。他于12月13日，以467.50的价格卖出43份标准——普尔500股票指数次年3月份的期货合约。到次年1月10日，S&P500指数下跌到437.76，其持有的股票组合的价值只剩下952万美元，损失48万美元。期货市场3月份的S&P500指数也下跌到438.50，该自营商以这个价格买进43份合约平仓了结，在期货市场，该自营商获利为：

表8-3 套期保值交易过程

现货市场	期货市场
12月13日，持有1000万美元股票组合	12月13日，以467.50点卖出43份S&P500股指次年3月份的期货合约
1月10日股票组合价值952万美元	股指下跌为437.76，以438.50点，平仓了结买进3月份股指期货43份
结果：亏损48万美元	获利：(467.50－438.50)×500×43＝623500美元
最终结果净赚：623500－480000＝143500美元	

$$(467.50 - 438.50) \times 500 \times 43 = 623\,500(\text{美元})$$

两者相抵，该自营商并没有因股票价格下跌而亏损，还盈利143 500美元（不计手续费），实现了套期保值。

第三节　金融期货的价格模型

在金融期货交易中，各种金融期货的价格都是通过交易的双方公开竞价形成的。所以，实际成交价格总是起伏不定，变幻无穷。然而，在某一特定时间和特定条件下，各种金融期货都有一个相对稳定的、无套利机会的价格，这一价格就是金融期货的“理论价格”或“公平价格”。

一般情况下，实际市场价格总是围绕理论价格上下波动的。当实际价格与理论价格偏离到一定程度时，套利者就会从事套利活动，以获取无风险的利润。这种套利活动的客观结果是将偏离的实际价格拉回到理论价格的水平。

一、金融期货价格与金融现货价格的关系

金融期货价格，是指交易双方事先约定的，在未来某个日期交割时的执行价格。这一价格与金融现货价格既有区别，又有联系。金融期货价格与金融现货价格之间的差额可用“基差”表示。即：

基差 = 金融现货价格 − 金融期货价格

设 S 为金融现货价格，F 为金融期货价格，B 为基差，则基差的数学模型为：

$$B = S - F \tag{8-12}$$

在计算金融期货的基差时，由于债券的到期日与息票利率往往与期货合约所规定的不同，需要用转换系数与期货价格相乘，得到与期货价格的折现值，再以现货价格减去该折现值，其差值为基差。

例8-6 在某年5月底，6月份到期的美国长期国债期货的价格为90-16，某可交割债券的到期日为2015年2月15日，息票利率为11.25%。根据计算，该可交割债券的转换系数为1.3554，该债券现货价格为124-07，计算该国债的基差。

解：期货价格的现值为：$90.50 \times 1.3554 = 122.6637$

$$\text{基差} = \text{现货价格} - \text{期货价格}$$

$$= 124\frac{07}{32} - 122.6637 = 1.555$$

由于期货价格往往是投资者对未来现货价格的预期，基差的变化不但受交易成本的影响，更重要的是受市场种种预期因素的影响。从理论上，基差主要由长期利率（或债券利息收入）、短期利率（或存款利息收入）及距到期日的长短等因素决定。

一般地，随着期货合约到期日的逐渐临近，期货价格与现货价格将逐渐靠拢。即基差逐渐缩小。在期货合约到期日，期货价格与现货价格合二为一，从而基差为0。这种随着期货合约到期日的逐渐临近，基差逐渐缩小的现象，叫做"基差收敛"。

在金融期货交易中，特别是在金融期货的套期保值交易中，期货价格与现货价格并非平行变动，即基差并非固定不变。因而套期保值者将面临着一定的基差风险。但是，在一般情况下，由于期货价格总是与现货价格呈同方向的变动关系，因而基差的变动的幅度小于期货价格或现货价格的变动幅度，于是，基差风险小于人们未作套期保值时所面临的价格风险。同时，由于基差总是随着期货合约到期日的临近而渐趋缩小甚至消失。所以，人们利用金融期货进行套期保值，其实质只是将自己所面临的价格风险转化为基差风险，从而通过对基差风险的控制来达到保值目的。

二、持有成本价格理论

一般来说，人们持有现货金融工具，可取得相应的收益（如持

有股票可取得股息，持有债券可取得利息等）。但为了购买并持有现货金融工具，人们又必须付相应的融资成本。

持有成本，是指持有现货金融工具取得的收益扣除购买现货金融工具而付出的融资成本后的差额。

以 C 表示持有成本，S 表示现货金融工具的价格，以 Y 表示持有现货金融工具而取得的收益率（以年率表示），以 R 表示买进现货金融工具而支付的融资利率（以年率表示），T 表示持有现货金融工具的天数，则持有成本模型为：

$$C = S(Y - R)T/360 \qquad (8\text{-}13)$$

$C > 0$，说明持有现货的收益多于支付的融资成本；

$C < 0$，说明持有现货的收益不足以抵偿其支付的融资成本。因此，正值的持有成本实际上是一种"持有收益"，负值的持有成本才是一种真正的持有成本。

在市场均衡的条件下，金融期货与金融现货之间无任何套利机会，基差正好等于持有成本，即：

$$B = C \qquad (8\text{-}14)$$

由公式(8-12)及(8-14)可得 $S - F = C$，即：

$$F = S - C \qquad (8\text{-}15)$$

再由公式(8-13)得：

$$F = S - S(Y - R)T/360 \qquad (8\text{-}16)$$

公式(8-15)或(8-16)即为金融期货的理论价格模型。该模型说明金融期货的价格等于金融现货价格扣除持有成本。

由(8-15)可知，持有成本为正值时，金融期货的理论价格必低于金融现货的现货价格；当持有成本为负值时，金融期货的理论价格，必高于现货价格。如图 8-1 所示。

三、期货价格的理性预期理论

持有成本理论的特点是以商品持有为中心，分析了期货市场

的机制，论证了期货交易对于供求关系产生的积极影响。其主要缺陷是没有充分考虑影响期货商品价格的其他持有成本因素，从而使理论与现实相差较远。

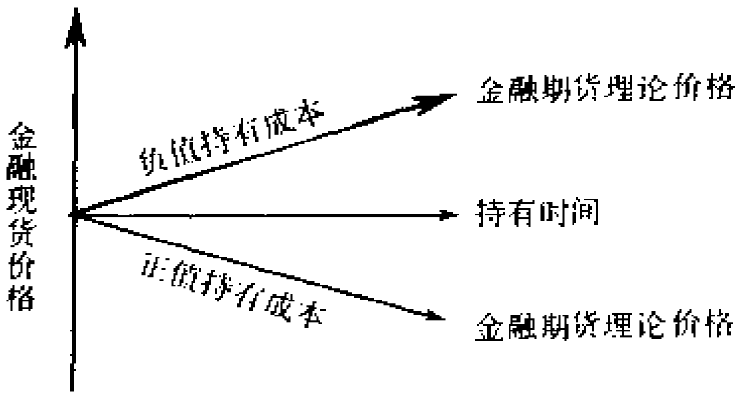


图 8-1 金融期货理论价格

理性预期是期货价格理论的一种发展。在理性预期理论中，信息被视为一种可以用来参与配置获取最大利益的资源，追求效用最大化的个人应该在进行预期时利用一切可能获得的信息。

为了阐述期货价格形成的理性预期理论，不妨考察该理论的建模过程。

交易者根据自己当时所能获得的信息来进行概率估计，用 I_{t-1} 表示在时间 $t-1$ 所能得到的所有信息，$E[X_t | I_{t-1}]$ 表示条件数学期望。条件数学期望是对预测变量预测，因而必然会存在误差，如以 ε_t 表示误差，则有：$\varepsilon_t = X_t - E[X_t | I_{t-1}]$。

误差 ε_t 有两个重要性质：

(1) 预测误差的条件期望值为零。

即：$E[\varepsilon_t | I_{t-1}] = E[X_t | I_{t-1}] - E[X_t | I_{t-1}] = 0$

(2) 正交性：即预测误差不仅期望值为零，而且应当与任何交易者可得到的信息不相关，否则就可以通过把这种相关信息结合进预测中来改善观测的准确程度。用数学公式表示。即为：

$$E[\epsilon_t I_{t-1} \mid I_{t-1}] = 0$$

现将供需关系模型引入期货价格形成的理性预期理论。假设供给函数与需求函数是线性的，即：

$$\begin{cases} q^D = a - bp \\ q^s = -c + dp \end{cases} \tag{8-17}$$

考虑到供求均衡条件 $q^D = q^s$，则有实际均衡价格：

$$p = \frac{a + c}{b + d}$$

在进行理性预期分析时，由于要假定预期价格与实际价格的相互作用，需引入时间变量，故式(8-17)可改写为：

$$\begin{cases} q_t^D = a - bp_t + v_t \\ q_t^s = -c + dp_t^* + u_t \end{cases} \tag{8-18}$$

上述模型中 a、b、c、d 都是大于零的常数，属于外生变量，即模型成立的外部条件。p_t 表示实际均衡价格，p_t^* 表示根据信息 I_{t-1} 所作的理性预期价格。商品的实际需求量取决于实际价格，而供给量取决于交易者对于未来价格走势的理性预期。整个模型所要解释的变量 p_t 和 p_t^* 是内生变量。两个方程的外加随机项 v_t 和 μ_t，反映了随机的需求和供给的突然变化对模型的影响，在理论上这种突然变动分布的期望值是零。令：$q_t^D = q_t^s$，可求得：

$$p_t = \frac{a + c}{b} - \frac{d}{b}p_t^* - \frac{1}{b}(\mu_t - v_t)$$

该公式表明任何时期的实际价格取决于价格预期、外生变量和随机项。运用预期价格 p_t^* 的表达式 $p_t^* = E[p_t \mid I_{t-1}]$ 可得出：

$$p_t^* = E[p_t \mid I_{t-1}] = E\left\{\left[\frac{a + c}{b} - \frac{d}{b}p_t^* - \frac{1}{b}(\mu_t - v_t)\right] \middle| I_{t-1}\right\}$$

$$= \frac{a + c}{b} - \frac{d}{b}E[p_t^* \mid I_{t-1}] - \frac{1}{b}E[(\mu_t - v_t) \mid I_{t-1}]$$

因为 μ_t 和 v_t 都是随机项，其各自的期望值在理论上应为零，即：$E[u_t \mid I_{t-1}] = 0$，$E[v_t \mid I_{t-1}] = 0$，$E[p_t^* \mid I_{t-1}] = p_t^*$，故

有：

$$p_t^* = \frac{a + c}{b + d} \tag{8-19}$$

显然，期货价格形成的理性预期理论，使实际上两个截然不同的事物达到一致，即交易者对商品价格主观心理的预期值平均等于商品价格的实际数值（$p_t^* = p_t$）。

第四节　实证分析

近年来，由于期货交易涉足太深，内控不严，金融业内频频发生巨额亏损事件。如英国巴林银行、日本大和银行、中国光大国际信托投资公司、上海万国证券公司等。本节介绍我国的金融期货事件——上海“2 .23”国债期货事件。

1992年，上海证券交易所推出我国第一个，也是惟一的一个金融期货品种——国债期货。经过近三年的实践，发现交易条件不成熟，1995年5月17日，国家作出暂停交易的决定。

1995年2月，上海证券交易所国债期货“327”品种（1992年发行的三年国库券，票面利率9.5%，到期本息128.50元，享受2年保值贴补），因为期货交收与现券的兑付几乎同期，其价值受保值贴补率的影响，2月20日至23日，价格出现异常波动。上海万国证券公司总部的经理人员违规操作，大量卖出合约，持仓量超过最高限额2倍多，在价格不断上扬的压力下，公司试图平仓撤退，但由于持仓量过大，23日上午平仓未能成功，为扭转公司巨额亏损，作出大量抛出空单打压价格的错误决策，尾市8分钟内，将“327”品种从151.30元强行打压到147.50元，市场一片混乱。

如果不取消尾市8分钟蓄意违规的交易，空方损失150亿元（其中万国证券公司约100亿元），上交所和上海万国证券公司等一批证券商、企业将破产，并引发股民大规模挤兑，产生金融危机，

影响社会稳定。后来，有关部门采取一系列紧急措施，宣布尾市8分钟内成交无效，关闭了国债期货市场，将万国证券公司合并到上海申银证券公司。

尽管中央和有关部门及时采取措施，使问题没有激化，但“2.23”事件的影响和后果还是相当严重的：一是扰乱了国债期货市场的正常秩序，损害了投资者的合法权益，影响了市场的前途；二是虽然没有发生大规模挤兑风潮，但在事发后一个多月内，机构和股民从万国证券公司提款超过10亿元，引起一定的恐慌；三是不计尾市8分钟交易的损失，万国证券公司还有巨额亏损，被迫于1996年4月合并到上海申银证券公司；四是引起了国际、国内对事件的关注，造成了很坏的影响。

“2.23”事件教训极为深刻：我国开展国债期货交易时间短，管理不规范，市场监管漏洞多，没有坚持涨跌停牌制度和建立风险基金制度；缺乏强有力的监控手段和对违规者进行严厉处罚的措施；券商内部控制不严，风险意识差。

国债期货是利率期货的一种，利率波动是这类期货交易的前提和关键。期货交易的正常功能，是为了“发现价格”和“规避风险”。在我国炒国债期货就是炒人民银行公布的保值贴补率，由于保值贴补率是根据物价涨跌幅度计算出来的，因此，在期货市场发现国债价格之前，中国人民银行和财政部等有关部门就已经确定了国债价格。期货市场发现价格的功能微乎其微。再说“规避风险”，当时，全国可流通国债面值才400多亿元，而国债期货合约成交量日最高额达几千亿元，投资者没有或很少拥有现货，因此谈不上套期保值，规避风险。

从金融期货一般原理和发展历程分析，我国发展金融期货的条件还不具备、时机还不成熟。首先，利率市场化是一切利率期货存在的前提。我国利率是受管制的，利率市场化进度取决于现代企业制度的建立、商业银行体制的完善以及宏观调控机制等多方面

因素，需要一个相当长的时期才能逐渐实现。其次，国内的外汇买卖是有条件的，黄金产供销实行指令性计划管理，外汇期货和黄金期货交易都无法开展；我国股票市场还不成熟，投机色彩较为浓厚，各种内幕交易，尤其是大户操纵股票市场现象还相当严重，开办指数期货交易只会加剧市场的投机，造成市场更加不公平。总之，金融期货市场必须建立在高度发达、全国统一、资金价格完全放开的金融现货市场基础上。所以，目前我国开办金融期货市场的条件还不成熟。

本章小结

金融期货是20世纪70年代迅速发展起来的新的金融衍生工具。金融期货大致可分为三大类别:外汇期货、利率期货、股价指数期货。

由于杠杆效应,期货交易包含着巨大风险。金融期货交易的主要功能是"发现价格"和"规避风险"。

基差和持有成本是研究金融期货价格理论中两个重要概念。基差与包含交易成本的持有成本之间存在相当大的差距时,套利才会发生。加巴德和西尔伯(1983)的模型给出套利交易的弹性一个关键含义;布伦南和施瓦兹(1988)进一步发展最优套利策略;荷登(1990)发展了流动性交易模型,其中套利交易与价差均被作为内生变量。

俞卫(1994)在留美期间的博士论文中,总结出前人各项研究成果及不足,探讨了存在指数套利情况下S&P500股票指数期货价格与现货价之间动态关系的非线性问题。

宋华(1996)在其博士论文中,对有关期货价格的形成理论进行了适当的评价,首次提出了期货效率函数,从动态的角度研究了期货制度的创新、发展和成熟过程。

第九章　金融期权

“收益可以无限而风险有限的行业”。

——期权启示

金融期权是金融创新中发展起来的又一种新的金融交易形式。自从产生以来，发展非常迅速，应用非常广泛。尤其是在金融风险管理中，它更是一种颇受投资者欢迎的套期保值的新工具。期权的品种从股票期权扩展到商品期权、金融期权。现在期权已经成为金融市场上一种最活跃的金融产品。

第一节　金融期权的概念

一、期权(Options)

期权是期货合约选择权的简称。期权的购买者在支付一定数额的权利金后，即可拥有在一定时间内以一定价格买卖一定数量的相关商品合约的权利。这种权利是有选择的，既可以根据规定实际买卖，也可以放弃这种权利。

期权交易的实质是特定权利的转让。

期权购买者又称期权持有者，在支付一笔较小的费用(期权费)后，就获得了期权合约所赋予的权利。期权出售者又称期权签发者，在收到期权购买者所支付的期权费之后，就承担着在规定的时间内履行该期权合约的义务。换句话说，在期权合约所规定的时间内，只要期权购买者要求行使权利，则期权出售者就必须无条件

地履行期权合约所规定的义务。

期权有两种基本类型：看涨期权与看跌期权。

看涨期权又称买入期权，看涨期权的持有者（购买者）有权在某一确定时间以某一确定价格购买某种商品或证券。看涨期权的购买者预计商品或金融资产的价格会上涨并超过合约规定的价格，他们买进期权后，可在市场价格上涨后仍以较低的协定价格买入商品或期货合约，获取差价利润。因此，这种可以买入商品或证券的期权称为"看涨期权"。

看跌期权又称卖出期权。看跌期权的持有者（购买者）有权在某一给定时间以某一给定的价格出售某种商品或证券。看跌期权的购买者预计商品或证券的价格会下跌，并低于合约规定的价格，他们期望在价格下跌后行使期权而获利。因此，这种可以卖出商品或者证券的期权称为"看跌期权"。

期权合约中规定的价格被称为执行价格或协议价格。

美式期权可在期权有效期内任何时候执行；欧式期权只能在到期日（合约有效的最后日期）执行。在交易所中交易的大多数期权为美式期权。

例 9-1　分析股票看涨期权的损益状态。

如图 9-1，某投资者购买 A 公司股票的美式看涨期权。股票现价为 21 美元，执行价格为 20 美元，每股定金 2 美元，为期 2 个月。投资者预计价格上涨，所以买进看涨期权合约。一个月后，该公司股票的价格升到 26 美元，同时期权费（定金）也上升到 6.5 美元。这时，他可以行使期权。以 20 美元的执行价格买进股票，再在股票市场上以 26 美元价格抛出。每股赚 6 美元，扣除 2 美元的定金，每股净赚 4 美元。他也可以以每股 6.5 美元的价格转让期权。扣除定金 2 美元，每股净赚 4.5 美元。

如果该股票的价格跌到 15 美元，他自然放弃权利。每股只损失 2 美元。如果这个投资者在股票市场上、以每股 21 美元的价格

买进该公司的股票，当股价下跌到 15 美元时，投资者每股亏损 6 美元，比购买期权多损失 4 美元。

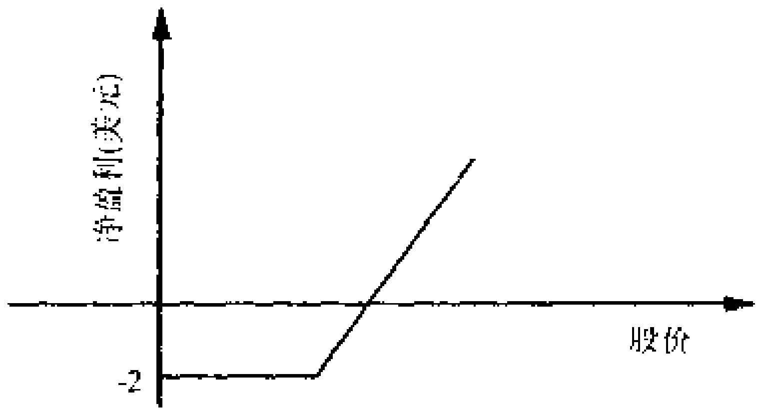


图 9-1 美式看涨期权损益状态

可见，看涨期权的买方可用不高的定金来换取价格可能上涨带来的收益，并锁定价格可能下跌的风险。

例 9-2 欧式看跌期权的损益状态。

投资者购买了 100 个 IBM 股票的欧式看跌期权，执行价格为 90 美元，假定股票的现价为 86 美元，距到期日有 3 个月。期权的价格(定金)为 7 美元。由于期权是欧式期权，投资者仅能于到期日在股票价格低于 90 美元时执行该期权。

① 假定在到期日股票价格为 65 美元，投资者可以在股票市场上以每股 65 美元的价格购买 100 股股票，并按看跌期权合约规定，以每股 90 美元的价格卖出相同的股票，实现每股盈利 25 美元，扣除期权定金，每股净盈利 $25-7=18$ 美元，总净利为 $1800(=18\times100)$ 美元。

② 如果股票的价格高于 90 美元，投资者放弃期权，看跌期权到期日价值为 0，投资者每一期权损失为 7 美元，即总损失为 700 美元。如图 9-2 所示。

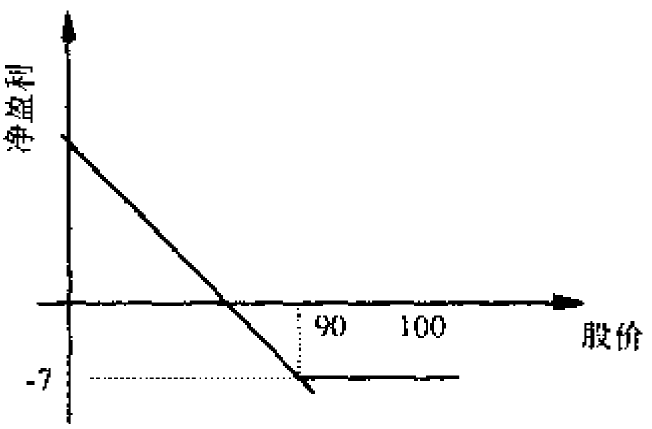


图 9-2　欧式看跌期权的损益状态

二、金融期权

期权一开始就很依赖于金融产品(股票),然后才推广到一般的商品和其他金融产品。

金融期权是指在未来某特定的日期或在该日期之前,以固定的价格买进或卖出一定金融商品权利的契约。期权交易中给予买方的是一种权利而非义务。预先所固定的价格称作执行价格,期权最后可执行的时间称为到期日。

期权具有非常灵活的特点。在现实生活中,期权常常与其他的一些金融资产结合在一起,形成新的投资工具。

1. 股票认购权

股票认购权是股票看涨期权的衍生物。它准许其持有者按约定的价格,在一定的时间内认购一定数量的新发行的普通股票的权利。与普通股票的看涨期权相比,有许多不同的特点:

①认购权的期限比较长,一般在 5 年以上;

②认购权的发行者只能是上市的股份公司,而普通的股票期权的最初出售者没有任何限制;

③认购权的持有者认购的是股份公司新发行的股票,而普通的股票期权买卖的是已流通的股票;

④认购权通常是股份公司发行债券或者优先股时，为了吸引投资者购买而附加的优惠条件。

2. 优先配售权

优先配售权也是股票看涨期权的衍生金融产品，它是股份公司给予股东可以以约定的价格在规定的时间内优先购买本公司新发行的普通股票的权利。

3. 可转换证券

可转换证券具有与其他期权形式相同的性质外，另外多一种“可转换特性”。

可转换证券是指公司发行债券或优先股票时，规定这种证券不是通常正规的债券和优先股票，而是具有转换特性，可以凭持有者自己的选择按规定把它换成为本公司的普通股票。可转换证券又分为两种：可转换债券与可转换的优先股。

三、金融期权的分类

金融期权的分类有很多方法，按期权合约赋予购买者不同权利可分为买入期权和卖出期权；按履约时间的不同可分为欧式期权和美式期权。在实际操作中，常以各种具体标的物的不同性质分为外汇期权、利率期权、股票期权及股价指数期权。

外汇期权产生于1982年12月，它是由美国的费城证券交易所率先推出。外汇期权是指以某种外币或外汇期货合约作为标的物的期权交易形式。

利率期权是80年代以来交易最活跃的金融期权之一。利率期权是指以各种利率相关商品或利率期货合约作为标的物的期权交易形式。

在金融期权交易中，发展得最成功的期权是股价指数期权。

股价指数期权是指以某一股票市场的价格指数或某种股价指数期货合约作为标的物的期权交易形式。

第二节　金融期权的价值分析

期权购买者为获得期权合约所赋予的权利，就必须向期权出售者支付一定的费用。这一费用就是期权费或期权价格。在金融期权交易中，期权价格的决定与变动是一个非常重要的问题，学术界已经作了长期深入的研究。自 1973 年以来，许多学者和专家纷纷提出各自的期权定价模型，以说明期权价格的决定与变动。Black-Scholes 模型是最典型的金融期权模型，它在金融期权理论研究中占有非常重要的位置。在介绍模型之前，有必要分析期权价格的构成以及影响期权价格的一些主要因素。

一、金融期权价格的确定

期权的价格叫期权费，期权费由两部分构成：内在价值与时间价值。

内在价值是指期权合约本身所具有的价值，也就是期权购买者如果立即执行该期权所能获得的收益。

以股票期权为例：看涨期权的内在价值等于股票价格减去期权的执行价格；看跌期权的内在价值等于期权的执行价格减去股票价格。

看涨期权：内在价值 = 股票价格 − 执行价格　　(9-1)

看跌期权：内在价值 = 执行价格 − 股票价格　　(9-2)

根据执行价格与市场价格的关系，期权分为三种：实值期权、虚值期权和平价期权。

看涨期权在其执行价格低于期权商品市价时，具有内在价值或称实值；当期权执行价高于商品当前市价，称为虚值；当期权的执行价等于相关商品的现市价称为等值；而看跌期权正好相反。

例如：当看涨期权合约中某股票执行价为 7 元，而该股票的现

市价为10元，该期权具有实值，其实值为3元；若执行价为7元，股票现市价为5元，则该期权具有虚值。若执行价 = 市价 = 7元，该期权为平价。

表9-1 期权实值的计算方法

	看涨期权	看跌期权
实值	市场价格 > 期权执行价	市场价格 < 期权执行价
等值	市场价格 = 期权执行价	市场价格 = 期权执行价
虚值	市场价格 < 期权执行价	市场价格 > 期权执行价

期权的内在价值不能小于零。记期权商品的市场价为 S，期权执行价为 E，则

看涨期权的内在价值为：

$$\max\{S - E, 0\} \tag{9-3}$$

看跌期权的内在价值为：

$$\max\{E - S, 0\} \tag{9-4}$$

一般来说，期权剩余有效日越长，其转向实值的机会越大。期权具有时间价值。期权的时间价值就是期权的实际价值超过内在价值的部分，即时间价值等于期权费减去内在价值。或：

$$\text{期权费(期权价值)} = \text{时间价值} + \text{内在价值} \tag{9-5}$$

二、影响期权价值的因素

期权价值是由内在价值和时间价值共同构成，因此，凡是影响内在价值和时间价值的因素都是影响期权价值的因素。影响期权价值的主要因素有如下5种：

1. 执行价格与市场价格

执行价格与市场价格是影响期权价格的最重要因素。这两种

价格及相互关系不仅决定着内在价值，而且影响着时间价值。其作用如图 9-3 和图 9-4 所示。

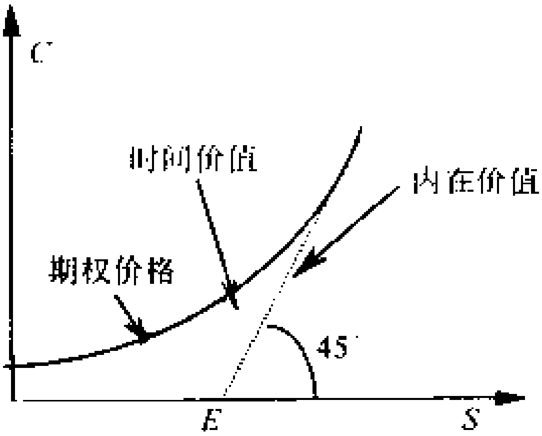


图 9-3 看涨期权的价格

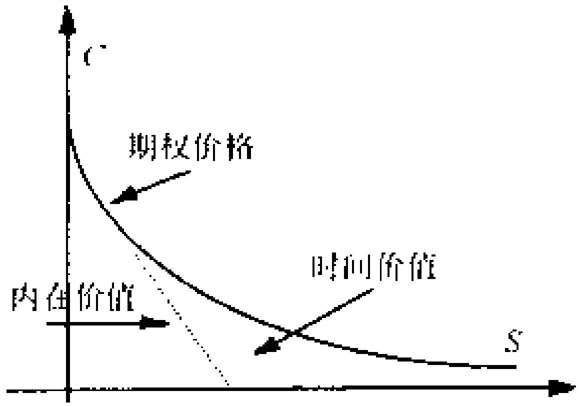


图 9-4 看跌期权的价格

上述图中，实线表示期权价格，虚线表示内在价值，实线与虚线之间的间隔则表示时间价值。

2. 剩余时间（权利期间）

剩余时间是指期权买卖日至期权到期日的时间。

在其他条件不变的情况下，剩余时间越长，期权价格越高；剩余时间越短，期权价格越低。无论是看涨期权，还是看跌期权，只要执行价格相同，则越是远期的期权，其期权费也越高。随着剩余时间的缩短，时间价格将越来越快地消失，尤其是在期权到期日的前几天更是如此。

3. 利率

影响期权价格的又一个重要因素是利率，尤其是短期利率。如果买进股票本身，投资者需支付股票的全部价款，如果买进看涨期权，则投资者只需支付期权费。这样，在利率提高时，投资者将倾向于买进看涨期权，而把余下的资金用于投资，以赚取利息。于是，看涨期权的价格将随之上涨。同理，看跌期权的价格将随之下降。但是，从另一方面来看，利率的变动也将引起股票价格的变动，一般来说，当利率上升时，股票价格将下跌。这样，以股票为标的物的看

涨期权的内在价值将减少，而以股票为标的物的看跌期权的内在价值将增加。因此，看涨期权的价格将下降，而看跌期权的价格将上升。这是两种相反的变化趋势。

利率的变动究竟对期权价格有何种影响，应根据具体情况作全面的、深入的分析。

4. 价格的波动性

商品价格的波动越剧烈，期权的持有者盈利的机会越大，而风险只限于损失定金，并不相应扩大。因而，期权的价值将升高。

5. 标的资产的收益

标的资产的收益将影响标的资产的价格。在执行价格一定时，标的资产的价格又必然影响金融期权的内在价值、从而影响金融期权的价格。一般地，标的资产的收益率越高，看涨期权的价格越低，而看跌期权的价格越高。

总之，决定和影响期权价格的因素很多且复杂。某些因素在不同时间和不同条件下，对期权价格的影响不同；在同时影响期权价格的各个因素中，既有相互补充又有相互抵消的关系。因此，人们对期权价格的分析也十分复杂。

三、看涨期权与看跌期权的利润分布

1. 看涨期权的利润分布

设看涨期权的执行价为 E，股权定金为 C、股权商品（以股票为例）市场价格为 S，其利润分布如表 9-2。

如果 $S < E$，即到期日股票的市场价小于执行价，此时看涨期权的持有者不会执行期权，其全部损失为期权费 C（即定金）。

如果 $S > E$，则期权持有者执行期权，以执行价 E 购买股票，然后在股票现货市场以市场价 S 卖出，其收益为 $S - E$，扣除期权费 C 之后的损益值记为 R，则：

表 9-2　看涨期权的利润分布

条件	看涨期权持有者	看涨期权卖出者
①$S < E$	$R = -C$	$R = C$
②$S > E$	$R = (S - E) - C$	$R = C - (S - E)$

$$R = (S - E) - C \tag{9-6}$$

或

$$R = -(C + E) + S \tag{9-6'}$$

上式表示，看涨期权的损益值(利润)是股票价格 S 的线性函数，直线的斜率为1，直线倾角为45°；截距为 $-(C + E)$，它表示在该股票上的总“投资”。

对于看涨期权的卖方，情况正好相反。

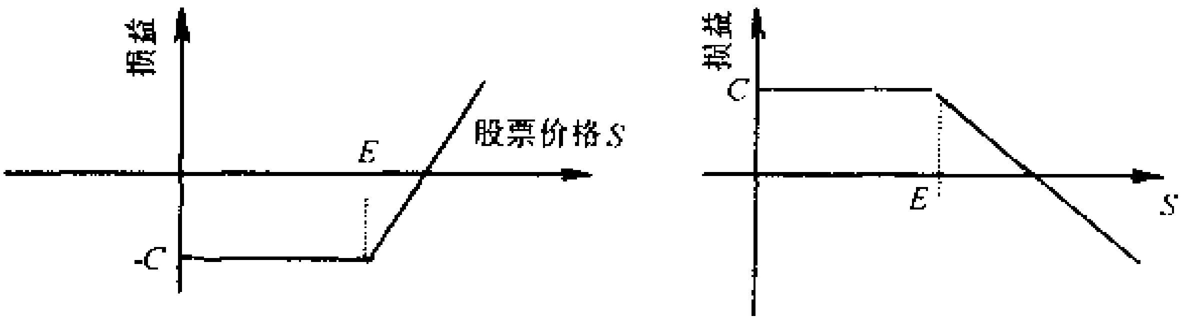
如果 $S < E$，看涨期权的卖方，不会执行期权，所得利润等于卖出看涨期权的期权费收入 C；如果 $S > E$，便会执行期权，此时，该卖方有义务以价格 E 呈交价值为 S 的相关股票，卖方的损益：

$$R = C - (S - E) \tag{9-7}$$

或

$$R = (C + E) - S \tag{9-7'}$$

该式同样也是 S 的线性函数，但其斜率为 -1，截距 $(C + E) > 0$，代表该交易中的总“收入”。利润分布如图 9-5 所示。



(a) 买进期权　　(b) 卖出期权

图 9-5　看涨期权持有人与其卖方的利润分布

2. 看跌期权的利润分布(以股票为例)

设看跌期权的执行价为 E，股权定金(或期权费)为 P，股权商

品的市场价为 S，则其利润分布如表 9-3。

表 9-3

条件	看跌期权持有者	看跌期权卖方
① $S > E$	$R = -P$	$R = P$
② $S < E$	$R = (E - S) - P$	$R = P - (E - S)$

若 $S > E$，看跌期权持有者放弃期权，其损失为期权费 P。

如果 $S < E$，看跌期权的持有者执行期权(在股票市场上以 S 买进，然后又在股权市场以 E 卖出)，获取利润为：

$$R = (E - S) - P \tag{9-8}$$

或

$$R = (E - P) - S \tag{9-8'}$$

此式表明，看跌期权持有人的损益 R 为股价 S 的线性函数。直线的斜率为 -1，截距 $(E - P)$ 为正数。

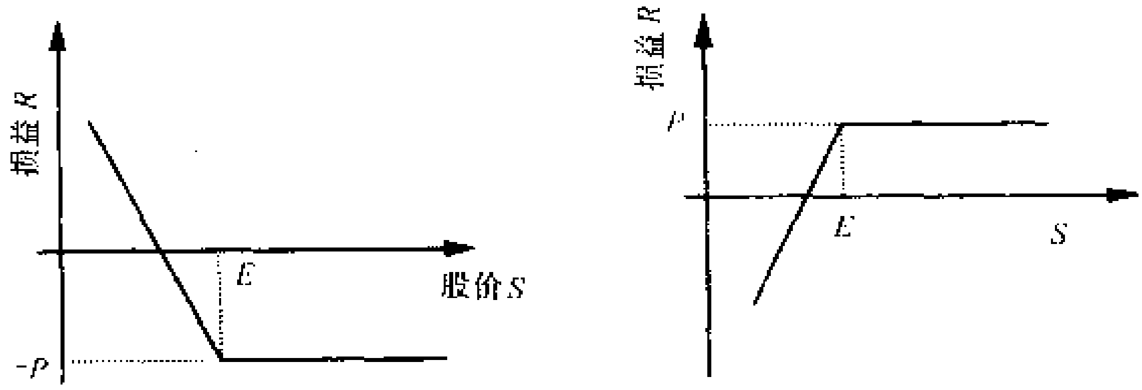
但从看跌期权卖方来看，当 $S > E$ 时，看跌期权不会执行，他获得期权费收入 P；当 $S < E$ 时，他的损失为 $E - S$。其全部损益：

$$R = P - (E - S) \tag{9-9}$$

即

$$R = -(E - P) + S \tag{9-10}$$

显然，R 为 S 的线性函数，斜率为 $+1$，截距为 $-(E - P)$。看跌期权的利润如图 9-6 所示：



(a) 看跌期权持有人　　(b) 看跌期权卖方

图 9-6　看跌期权持有人与其卖者的利润分布

第三节　Black-Scholes 期权价值模型

1973 年，布莱克(F Black) 和斯科尔斯(M Scholes) 教授发表了题为《期权价格与公司负债》一文，提出了有史以来第一个期权定价模型，在学术界和实务界引起了强烈反响。在那篇突破性论文中，他们成功求解微分方程，利用市场的套利条件，导出到期日以前的期权价格的精确公式。期权价值模型在理论与实践中运行十分广泛。

1997 年 10 月，斯科尔斯等人因此而获得诺贝尔经济奖。

一、Black-Scholes 模型假设

Black-Scholes 模型有如下 7 条假设条件：

(1) 期权的标的物为一有风险的资产，其现行价格为 S，这种资产可被自由地买进或卖出；

(2) 交易成本和税金为 0；

(3) 期权为欧式期权，其执行价格为 E，权利期间为 T(以年表示)；

(4) 安全利率一定，即无风险利率为常数；

(5) 在期权到期日前，标的资产无任何收益(如股息、利息等)的支付，期权商品价格变化呈随机分布，且是连续的；

(6) 标的物价格的波动性为常数；

(7) 标的物价格的变动符合几何布朗宁运动，即：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \tag{9-11}$$

其中，dS 表示标的物价格无穷小的变化值；dt 表示时间无穷小的变化值；μ 表示标的资产在每一无穷小期间内的平均收益率；σ 表示标的资产价格的波动性，或收益率的标准差；dz 表示均值为 0，方差为 $1dt$ 无穷小的随机变量。

实际上，美式看涨期权的持有人没有理由在到期日前行使权利，因为提前行使选择权无疑放弃了价格可能继续上涨而进一步获利的机会，也就是放弃了期权的时间价值。在正常情况下美式期权的持有人往往在将近到期日才作出是否行使权利的决定。因此，这个模型也能用来计算美式期权的价值。

二、Black-Scholes 期权价值模型

Black-Scholes 模型推导过程比较复杂，本节主要介绍基本原理及其应用。

根据上述假设，标的资产价格遵循随机过程(9-11)，再设 f 为看涨期权的价格，或是随着 S 的变化而变化的其他衍生产品的价格。变量 f 必然是 S 和时间 t 的函数，由第七章伊托引理可得 Black-Scholes 微分方程式：

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S}\mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt + \frac{\partial f}{\partial S}\sigma S dz \tag{9-12}$$

由边界条件及正态分布，可推导出 Black-Scholes 模型。

1. 看涨期权价值模型

$$C = SN(d_1) - E \cdot e^{-rt} \cdot N(d_2) \tag{9-13}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + 0.5\sigma^2) \cdot t}{\sigma\sqrt{t}} \tag{9-14}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{9-15}$$

其中，C 为期权的现在价值；S 为期权商品的现在价格；E 为执行价格；e 为自然对数底(e = 2.7182)；r 为无风险利率(连续复利计息，年利率)；t 为距期权到期日的时间，以一年的一定比例表示；$N(d_1)$，$N(d_2)$ 是 d_1，d_2 标准正态分布函数的值；σ 表示期权商品价格的波动性，即标准差。

Black-Scholes 模型表明：期权的价格是期权商品市场价格、商品市场价格的变动、期权执行价格、距到期日时间的长短以及安全

利息率的函数。

上述模型需要5个参数，其中4个容易取得，S、E、t为相关商品与期权的参数，由金融媒介公布发表，利率r可以采用与期权到期时的政府债券的利率，只有一个参数σ需要估计，可以采用历史股价数据计算历史方差。

这些变量与期权价格的关系概括起来如下：

(1) 期权商品市价越高期权价格越高；

(2) 期权商品市价变动越大期权价格越高；

(3) 期权执行价格越高期权价格越低；

(4) 距期满日的期限越长期权价格越高；

(5) 无风险利率越高期权价格越高。

2. 看跌期权价值模型

上述Black-Scholes模型只适用于看涨期权，而不适用于看跌期权。但是，通过看跌期权与看涨期权的平价关系，我们可用看涨期权的价格，推算出相同标的物、相同剩余时间和相同执行价格的看跌期权的价格。

所谓"看跌期权与看涨期权的平价关系"，是指看跌期权的价格与看涨期权的价格，必须维持在无套利机会的均衡水平的价格关系。如果这一价格关系被打破，则在这两种价格之间，就存在着无风险的套利机会，于是，套利者必将通过套利行为而把那种不正常的价格关系拉回到正常水平。

设看涨期权的价格为C，看跌期权的价格为P，期权商品的执行价为E，标的物资产的市场价格为S，则看跌期权与看涨期权的平价关系为：

$$S = E + C - P \tag{9-16}$$

或

$$P = C - S + E \tag{9-17}$$

考虑货币的时间价值，上式应变为：

$$P = C - S + Ee^{-rt} \tag{9-18}$$

将看涨期权价格模型代入上式，得：

$$\begin{aligned} P &= C - S + Ee^{-rt} \\ &= SN(d_1) - Ee^{-rt}N(d_2) - S + Ee^{-rt} \\ &= S[N(d_1) - 1] + Ee^{-rt}[1 - N(d_2)] \\ &= Ee^{-rt} \cdot N(-d_2) - S \cdot N(-d_1) \end{aligned} \quad (9\text{-}19)$$

（注：$N(-d) = 1 - N(d)$ 是正态分布函数性质。）

公式(9-19) 即是看跌期权的 Black-Scholes 价值模型。

三、Black-Scholes 模型的应用

1. 期权价值的计算

例 9-3 假定某股票看涨期权合约还剩 120 天，期权的执行价为 20 美元，股票现行的市场价格为 18 美元，该股票收益率的标准差为 40%，无风险资产的年利率为 5.83%（名义利率），试求该股票的看涨期权的价值是多少?

解： $t = 120/365 = 0.329$ 年，$r = 5.83\%$

$E = 20,\quad S = 18,\quad \sigma = 0.4$

$$d_1 = \frac{\ln(18/20) + (0.0583 + 0.5 \times 0.4^2) \times 0.329}{0.4 \times \sqrt{0.329}}$$

$$\approx -0.2648 \approx -0.27$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} = -0.2648 - 0.4\sqrt{0.329} = -0.49$$

查标准正态分布表（见附录），可以得到：

$$N(-0.27) = 0.3936 \quad N(-0.49) = 0.3121$$

则

$$\begin{aligned} C &= S \times N(d_1) - E \times e^{-rt} \times N(d_2) \\ &= 18 \times 0.3936 - 20 \times e^{-0.0583 \times 0.329} \times 0.3121 \\ &\approx 0.96(\text{美元}) \end{aligned}$$

即该股票的看涨期权的价值为 0.96 美元。

2. 波动性的估计（标准差）

Black-Scholes公式在实际运用中，其最大难题就是标准差的

计算。当然，我们可以利用历史资料（股价）计算年收益率的标准差，这种工作计算量往往很大，且容易产生误差。如果期权市场价格已知，则可以利用 B－S 公式反过来估计标准差。

例 9-4　假定 $S = 100, E = 125, r = 0.12, t = 0.25$（3个月）并且已知 $C = 2$，计算对应的年收益率的标准差 σ。

解：先假定若干个标准差的取值，算出看涨期权价格，确定与 $C = 2$ 接近的 σ 值。

$$d_1 = \frac{\ln(100/125) + (0.12 + 0.5\sigma^2) \times 0.25}{\sigma\sqrt{0.25}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{0.25}$$

对于以 0.1 至 0.6 的不同的 σ 值，运用公式计算 d_1, d_2。

从正态分布表中查出 $N(d_1), N(d_2)$，然后利用 Black-Scholes 模型可计算出 C，由此得到表 9-4。

表 9-4　期权现在价值的计算

σ	d_1	d_2	$N(d_1)$	$N(d_2)$	C
0.1	－3.84	－3.89	0.0001	0.0001	0
0.2	－1.88	－1.98	0.0301	0.0239	0.11
0.3	－1.21	－1.36	0.1131	0.0869	0.77
0.4	－0.87	－1.07	0.1922	0.1423	1.96
0.5	－0.65	－0.90	0.2578	0.1841	3.45
0.6	－0.49	－0.79	0.3121	0.2148	5.15

从表 9-4 中最后一栏可以看出，Black-Scholes 公式结果表明股票年度收益的标准差约高于 $\sigma = 0.40$ 或 40%。

对于非常小的标准差（0.1 或 0.2），看涨期权价格接近于 0。这正好表明，对于这样小的年度收益率的标准差，在 3 个月之内，股价从 $S = 100$ 升至 125（执行价格）以上的可能性是极小的，所

以，当年收益率标准差低于20%时，该期权几乎是无价值的。

综上所述，Black-Scholes 模型是确定期权定价的一个开创性的研究成果。但是，由于该模型涉及到比较复杂的数学运算，对大多数人而言既难理解又难操作，在实际运用中受到限制。因此有必要探讨新的更加简化的模型。罗斯等人的研究成果应运而生。

第四节　期权价值的二叉树模型

1979年，罗斯(S Ross)、瑞德门恩(R Rendeman)及巴特(B Bartter)等人发表《期权定价：一种简化的方法》一文，他们用一种比较浅显的方法导出了期权定价模型。该模型先假设：期权合约距到期日只剩下一个周期；在期末只有两种可能的情况；持有人员只能在期末行使选择权；在期权有效期内，没有分红派息的情况发生。即研究期末只有两种结果的欧式期权的价值模型，以此为基础，可以进一步扩展到多期间的期权价值模型。这一模型称为二叉树模型，又称"二项式模型"。

一、看涨期权价值的二叉树模型

1. 简化情形(一期间模型)

以某标的期货看涨期权为例：

假定标的物现行价格为 S，投资者购买一年期的欧氏看涨期权，到期日，标的物价格可能上涨到原来的 u 倍，也可能下跌到原来的 d 倍，标的物的价格变化如图 9-7 所示，是二叉树模型。现在要考虑标的物的看涨期权的价值。

在此一期间模型中，如果目前的看涨期权价值为 C，执行价格为 E，股价上涨后和下跌后看涨期权价值分别为 C_u 和 C_d，则：

$$C_u = \max[(u \cdot S - E), 0] \qquad (9\text{-}20)$$

$$C_d = \max[(-d \cdot S + E), 0] \qquad (9\text{-}21)$$

看涨期权价值的变动如图 9-8 所示。目前的看涨期权价值 C 尚是一个未知数，二叉树模型正是要确定 C 的表达式。

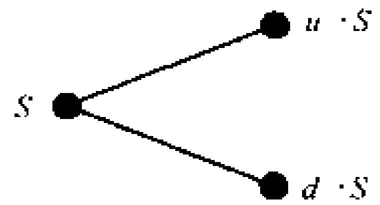


图 9-7 标的物价格变动

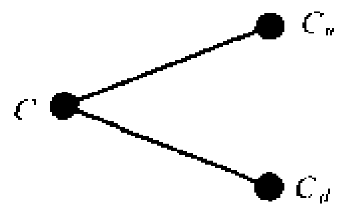


图 9-8 看涨期权价值的变动

假定投资者在卖出一个看涨期权的同时，买进 h 单位标的物组成投资组合（套期保值）。其中 h 为套期保值比率。

标的期货价格上涨时的投资组合的损益分两部分：投资者所买进标的物的损益为 $h(uS-S)$；卖出看涨期权收取期权费并将它投资于无风险资产而获得的收益为 $(1+r)C-C_u$，总的损益值为 $h(uS-S)+(1+r)C-C_u$。

标的期货价格下跌时的投资组合的损益也分两部分：标的期货价格变动的损益为 $h(dS-S)$；期权价格变动的损益为 $(1+r)C-C_d$，总的损益值为 $h(dS-S)+(1+r)C-C_d$。

根据套期保值组合，无论股价上涨还是下跌，其损益均保持相等，即：

$$h(uS-S)+(1+r)C-C_u=h(dS-S)+(1+r)C-C_d \qquad (9\text{-}22)$$

由上式可解出 h，即：

$$h=\frac{C_u-C_d}{uS-dS} \qquad (9\text{-}23)$$

要消除套利机会，公式(9-22) 两边必须同时为 0。这样可由公式(9-22) 的任一边解得其中的 C，具体过程如下：

$$\because \quad h(uS-S)+(1+r)C-C_u=0$$

$$\therefore \quad (1+r)C=C_u-h(uS-S)$$

$$C=\frac{C_u-h(uS-S)}{1+r}=\frac{C_u-h\cdot u\cdot S+h\cdot S}{1+r} \tag{9-24}$$

将公式(9-23) 代入上式，整理得：

$$C=\frac{\dfrac{C_u(1-d)}{u-d}+\dfrac{C_d(u-1)}{u-d}}{1+r}$$

令：$P=(1-d)/(u-d)$，$1-P=(u-1)/(u-d)$，则：

$$C=\frac{PC_u+(1-P)C_d}{1+r} \tag{9-25}$$

公式(9-25) 表明：目前的看涨期权价值，是期权到期日的看涨期权价值的加权平均数的现值。其中，权数为预期标的期货价格涨跌的概率[即 P 和$(1-P)$]，贴现率是此期间的无风险利率 r。

二、多期间模型

一期间模型虽然简单、朴素，但它已包含着二叉树定价模型的基本原理和基本方法。因此，为使二叉树模型所得的结果尽可能符合或接近实际，把一期间模型推广到"二期间模型"或"多期间模型"。即把既定的剩余期间分割成越来越多的小期间。在剩余期间一定时，这种被分割成的小期间越多，则每个小期间的时间就越短。

现在，分析一种离期权到期日尚有两个期间的情况。

假定在目前，期权的标的物价格为已知，每一期间均可能上涨到原来的 u 倍，或下跌到原来的 d 倍，其上涨和下跌的概率也分别为 P 和$(1-P)$。这样，在整个有效期间，标的物价格的变动情况将如图 9-9 所示，而与此相应的看涨期权的价值及其变动情况如图 9-10 所示。

由图 9-9 和图 9-10 可见，在期权到期日，标的物的价格将有三种可能，与这三种可能的价位相对应，看涨期权将有三种可能的价值。

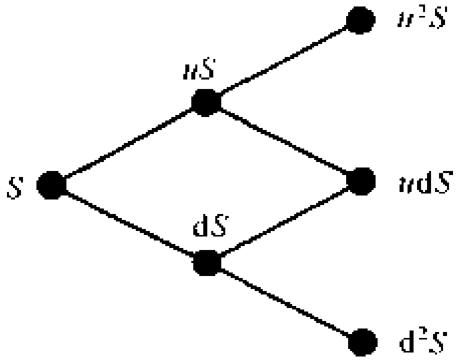


图 9-9　二期间的标的期货价格变动

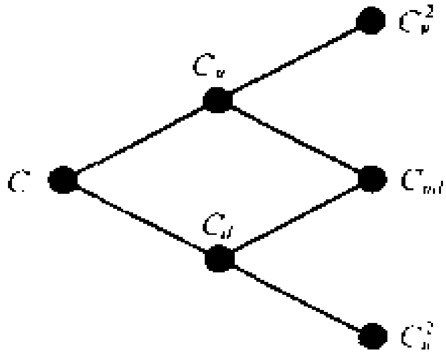


图 9-10　二期间的期权价格变动

根据一期间模型的分析，要求出 C，首先要求出 C_u 和 C_d，而要求出 C_u 和 C_d，必须先算出 C_{uu}、C_{ud} 及 C_{dd}。如将现在称为“期间0”，将第一期间结束时称为“期间 1”，将第二期间结束时（即期权到期日）称为“期间2”，则 C_u 是C_{uu}和C_{ud}的加权平均数在期间1的现值；C_d 是C_{ud} 和 C_{dd} 的加权平均数在期间2的现值。因此，我们可得到如下二式：

$$C_u = [PC_{uu} + (1 - P)C_{ud}]/(1 + r) \tag{9-26}$$

$$C_d = [PC_{ud} + (1 - P)C_{dd}]/(1 + r) \tag{9-27}$$

将上述两式代入公式(9-25)，得：

$$C = \frac{P^2C_{uu} + 2P(1 - P)C_{ud} + (1 - P)^2C_{dd}}{(1 + r)^2} \tag{9-28}$$

此公式(9-28) 的分子恰好是二项式的展开式。所以有人称之为“二项式模型”。推而广之，如果我们把期间数扩大至 n，并设 k 为标的物价格上涨的次数，而($n - k$)是标的物价格下跌的次数，则：

$$C = \frac{1}{(1 + r)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n - k)!}P^k(1 - P)^{n-k}\max(0, u^kd^{n-k}S - E)$$

根据中心极限定理，当 n 趋向于无穷大时，二项式分布将逼近正态分布。于是，二叉树模型的结果也将逼近 Black-Scholes 模型的结果。因此，只要 u、d、P 等参数选择得当，则二叉树模型可转化为

Black-Scholes 模型。

下面举例说明二叉树定价模型的应用：

例9-5 设某标的期货现行价格为100，看涨期权的执行价格也为100，该期权离到期日尚有两期，$u=1.10$，$d=0.95$，$r=8\%$，计算看涨期权价值。

方法1：根据这些假设条件，我们可算得：

$$P=(1-0.95)/(1.10-0.95)=1/3$$

$$1-P=2/3$$

标的期货价格的变化过程如图9-11所示。

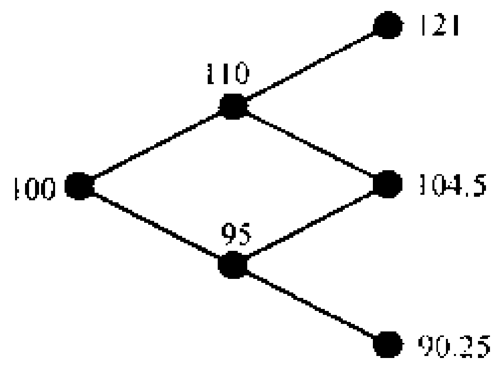


图9-11

由上述图形，可知：$C_{uu}=21$，$C_{ud}=4.5$，$C_{dd}=0$，代入公式(9-28)得：

$$C=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 21+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 4.5+0}{(1+0.08)^2}=3.71$$

方法2：

事实上，不用直接代入公式(9-28)来计算，可先根据 C_{uu}，C_{ud}，C_{dd}，P，$(1-P)$ 及 r，算出 C_u 和 C_d，再进一步算出 C：

$$C_u=\left(\frac{1}{3}\times 21+\frac{2}{3}\times 4.5\right)/(1+0.08)=9.259$$

$$C_d = \left(\frac{1}{3} \times 4.5 + \frac{2}{3} \times 0\right)/(1 + 0.08) = 1.389$$

$$C = \left(\frac{1}{3} \times 9.259 + \frac{2}{3} \times 1.389\right)/(1 + 0.08) = 3.71$$

标的期货看涨期权价格的变化过程如图 9-12。

结果与方法 1 完全相同。这就说明，利用二叉树模型，我们只要根据标的物价格的变动过程，算出期权到期日的期权价值，然后，利用加权平均值的贴现，通过逐期的反向推算而算出目前的期权价值。方法 2 显然简单，适合多期间模型。

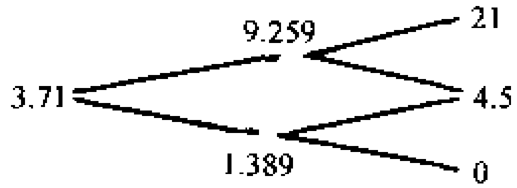


图 9-12

说明：

(1) 利用二叉树定价模型，我们同样可算出看跌期权的价值，且其计算过程也与看涨期权基本相同；

(2) 上述二叉树模型只适用于金融期货期权，而不适用于金融现货期权。因短期利率对金融现货价格的影响较大，而对金融期货价格的影响较小。此时，$P = (1 + r - d)/(u - d)$，$1 - P = [u - (1 + r)]/(u - d)$，且 $d < (1 + r) < u$。故在利用二叉树模型对金融现货期权定价时，除了计算标的物价格涨跌的概率略有不同外，其他方面都与以上所述的基本相同。

本章小结

期权是一种买卖权利的合约。期权的收益可以是无限的而风险是有限的。因为购买期权的损失至多是全部权利金。期权是一种典型的"四两拨千金"的金融衍生工具，是防范金融风险的一种极好的工具。

美式期权在到期日之前的任何有效期内均可执行，欧式期权只能在到期日执行。看涨期权与看跌期权是最常见的两种期权类型。

确定期权的价值是期权理论中最核心的内容。

Black-Scholes 期权定价模型从根本上揭示期权价值与期权商品市场价、执行价、无风险资产利率、合约到期时间等因素之间的关系。*Scholes* 因此获得 1997 年的诺贝尔经济奖。

期权价值的二叉树模型是一种简化模型。本章第四节介绍一种求期权价值的简单方法。

约翰·赫尔在专著《期权、期货和衍生证券》中利用年收益率的波动率(标准差)，确定期权商品市场价上升或下降的概率，利用期权的加权平均数的折现计算期权的价值。

金融期权产品有股票期权、股价指数期权、外汇期权(利率期权)、债券期权等。20 世纪 90 年代，金融衍生工具不断创新，打包期权、非标准美式期权、复合期权、任选期权等概念极大地丰富了期权的内容，与此同时，期权的价值模型也是层出不穷。

Rendleman Batter 模型是在一种简化条件下的二叉树模型；*Ho* 和 *Lee* 在 1986 年发表的论文中首先提出期限结构非套利模型；*Hull* 和 *White* 在 1990 年发表的论文中，探讨了 *Vasick*，*Cox*，*Lngersoll* 和 *Ross* 模型的扩展情况。总之，期权在现代金融学，或者金融工程中是极富挑战性的全新领域。

第十章　金融工程与风险管理

金融工程学是近几年流行起来的一个新概念，风险管理与金融工程紧密相联。在本章，我们着重探讨风险管理的若干问题，并以此作为全书的结尾。

第一节　金融工程学与风险管理

一、金融工程学

20 世纪 70 年代，世界金融业经历了布雷顿森林体系的瓦解，汇率、利率、证券市场等陷入长时期、大幅度的频繁波动之中，公众需求偏好的变化和对利率敏感性的增强，传统的银行金融服务和金融工具已远远不能满足社会经济发展的要求，甚至有人断言，“银行金融业已是没落的行业”。

“山重水复疑无路，柳暗花明又一村。”世界经济一体化的形成，信息处理技术的飞速发展，银行业内在机制作用的积极推动，带来了银行业乃至整个金融业的一场重大革命。金融业经营管理理念、技术和工具的不断演进，推动了金融国际化的进程。80 年代金融创新风起云涌，从而形成了一门尖端的新兴学科——金融工程学。

金融工程学研究如何利用各类金融工具，尤其是各类富有创新意义的衍生工具，来改变一个企业的风险状况，或构造新的金融产品。金融工程学自问世以来，对全球金融体系产生了深远的影响。金融工程大量地运用了运筹学技术、仿真模拟技术、自动化技

术等先进手段对市场风险进行预测和评估，使得金融产品的定价更复杂，更符合市场要求，从而不仅使金融机构内部运行机制更趋完善，而且创造了显著的经济效益。

二、金融风险与风险管理

金融业是一个特殊的高风险行业。90 年代金融行业更是进入多事之秋：具有 233 年历史的巴林银行倒闭；1995 年 7 月日本大和银行亏损 10 亿美元；1997 年阿尔巴尼亚金融危机；始于 1997 年 7 月的亚洲金融危机，其"多米诺效应"波及亚洲几乎所有国家，至今让人心有余悸！

一般来说，金融风险是金融机构在经营过程中，由于决策失误、客观情况变化或其他原因使资金、财产、信誉遭受损失的可能性。金融风险往往会引起个别机构的经营困难，由于连锁反应，很可能导致局部乃至整个金融体系的动荡，从而引发金融危机。金融风险大致可以分为几类：信用风险、市场风险、流动性风险、操作风险等。

金融风险种类繁多，成因复杂，危害深重，因此，备受各国金融机构、监管当局和社会各界的关注。实践证明：防范、化解金融风险，维护金融秩序，需要多方面共同协调努力，而中央银行的有效监管和金融机构完善的内部控制更是至关重要。

现代公司经营管理的最终目标是股东利益，亦即公司价值的最大化。公司的风险管理行为的目的也是一样。如果一个公司采取积极有效的措施管理其风险，公司价值的波动性将因此而下降，如图 10-1 所示。

风险管理可以增加公司价值，原因可能有以下 4 个方面：

(1) 风险管理措施可以降低公司的税负（这里的假设是公司所得税率为累进制的）；

(2) 风险管理可以降低交易费用；

(3)风险管理可以帮助公司管理层避免错误的投资决定；

(4)风险管理在一定程度上可以降低公司的风险系数，从而降低对公司未来现金流的折现率。

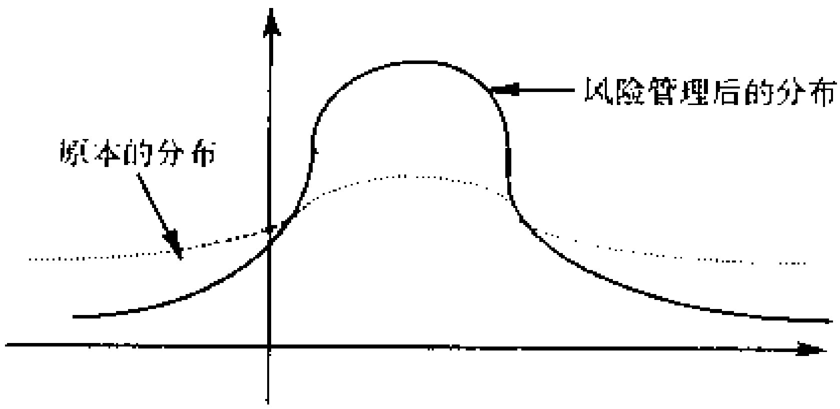


图 10-1　风险管理对公司价值的影响

对以上几点本书不作详细讨论。本节的结论是公司的风险管理行为有利于公司价值的最大化，因此，公司企业应该采取积极的态度开展风险管理活动。

总之，公司要达到利润最大化及自身价值增加的目标，必须为自己营造一个相对稳定安全的商业环境。其中的一个关键是如何消除或减少市场内由于需求、供给波动而造成的价格不稳定，即价格风险。如前所述，衍生工具市场的产生及发展都和风险管理的需要息息相关，而衍生工具市场的这种风险管理功能就体现在其对冲保值的活动中。

衍生工具市场可以帮助企业进行风险管理，但这并不是说衍生工具交易没有风险。相反，衍生工具市场的风险管理功能的发挥正是通过其自身带有的风险同现货市场中的风险相对冲而实现的。

第二节 期权与风险管理

期权价格相对于股价，距到期日时间及股价波动性等主要变量的敏感性是我们所要讨论的主要风险指标。

一、主要风险指标

1. Delta (Δ)和 Delta 保值

Delta 是期权价格对于股票价格变化的敏感程度。即：

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \tag{10-1}$$

计算 Delta 时，一般假设其他影响期权价格的因素保持不变，期权价格对股票价格的偏导数即 Delta 值，根据 B-S 模型，有：

$$\text{对于看涨期权：}\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \tag{10-2}$$

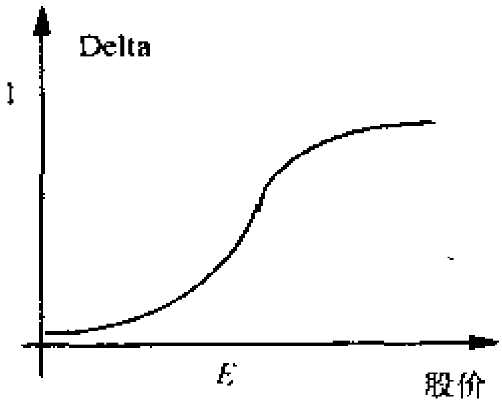
$$\text{对于看跌期权：}\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1 \tag{10-3}$$

Delta 值表明了期权价格相对于基础资产价格的变化关系。例如，一份看涨期权的 Delta 值为 1.50 美元，就意味着如果股票价格上涨 1.00 美元，看涨期权费就要相应提高 1.50 美元；同理，如果看跌期权的 Delta 值为 − 1.50 美元，就意味着如果股票价格上涨 1 美元，看跌期权的价值即期权费会下降 1.50 美元。

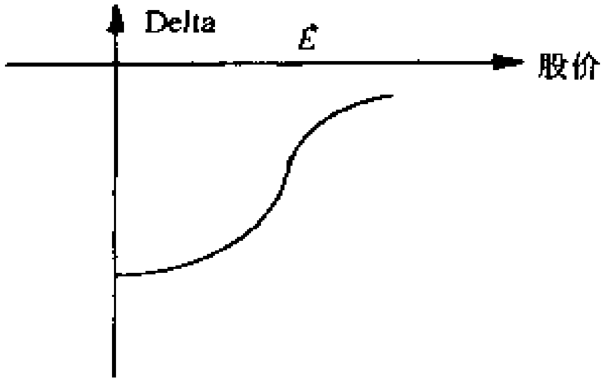
对于看涨期权，当股价远大于执行价格时，Delta 值接近 1；当股价远小于执行价格时，Delta 值接近零；平价看涨期权的 Delta 值略大于 0.5 。

图 10-2 中显示了 Delta 值同股价的关系。

例 10-1 某股票现在价格为 75 美元，一个平价欧式看跌期权三个月后到期，该股票价格波动性为每年 30%，无风险利率为 8%(年率，连续复利)。试求关于该期权的 Delta 值。



(a) 看涨期权



(b) 看跌期权

图 10-2　Delta 值与股价关系

解:根据 B-S 模型:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{75}{75}\right) + (0.08 + 0.5 \times 0.30^2) \times 0.25}{0.30\sqrt{0.25}} = 0.2084$$

有 $N(d_1) = 0.6104$,所以 Delta 值为:

$$\Delta_P = N(d_1) - 1 = 0.6104 - 1 = -0.3896$$

它说明股价上涨 1 美元,看跌期权的价值将下跌 0.39 美元。

从 Delta 的概念可引出 Delta 保值的概念。Delta 保值即通过构造投资组合,使组合的各组成部分的 Delta 相互冲销,从而使整个组合的 Delta 为零,达到对冲保值的效果。一个资产组合的 Delta 为零的情况称作 Delta 中性。构成资产组合的各类资产 Delta 加总起来就是头寸 Delta。(头寸是指投资者买卖数量不一而出现净值的差距。)

考虑一个由股票头寸和期权构成的简单的 Delta 保值头寸。假定某欧式看涨期权 Delta 值为 0.8,为了对此期权的买方进行 Delta 保值,应该相应卖空 0.8 股股票。在实际当中,由于 Delta 值会因股

价及距到期日时间变化而变化，因而Delta保值头寸的构成也需要及时连续地调整才能够保持保值的效果。

Delta保值策略的实际效果取决于股价变动的路径和进行调整的频率。随着调整频率的提高，Delta保值的效果也会越好。如果这种调整可以连续性地进行，则整个保值头寸的收益应该为零。

2. Gamma (γ)

Gamma是相应的Delta值变化的速率，即Delta值相对于股价变动的敏感程度，用公式表示，即：

$$\gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \tag{10-4}$$

如果一个期权有一个比较小的Gamma值，则其Delta值会相对稳定，因而其Delta保值效果会好一些。一个看涨期权的Gamma值实际上是期权价格对于股价的二阶偏导数，即Gamma值的具体计算公式如下：

$$\gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

对于欧式看涨期权，有：

$$\gamma = \frac{e^{-0.5d_1^2}}{S\sigma\sqrt{2\pi t}} \tag{10-5}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + 0.5\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

式中 S, E, d_1 的定义与B-S公式中的定义相同。

欧式看跌期权的Gamma值与欧式看涨期权相同。

例10-2 某股票现价为50美元。股价波动性为30%，无风险利率为5%（年率，连续复利），关于此股票的一个三个月后到期的平价欧式看涨期权价格为3.27美元，仿例10-1计算可知Delta值为0.5625，由公式(10-5)计算得Gamma值为0.0529。

如果股价变动0.01美元，期权价格变动应该是0.5625 ×

0.01 = 0.005625 美元，而新 Delta 的值将是 0.5625 + 0.01 × 0.0529 = 0.563029。

Gamma 值会随股价及至到期日时间变化而变化。

Gamma值大于零来源于多头期权头寸。Gamma值大于零的期权资产，表示当基础资产价格上涨，即Delta值增大时，期权资产变得更有牛市倾向。反之，当价格下降时即Delta值下降，期权资产会趋于熊市。空头期权头寸的 Gamma 值一般为负即小于零。

Gamma 的用处之一在于当股票价格发生变动时，或随着时间的推移，期权资产组合需要进行调整，Gamma 常用来对期权资产组合调整幅度进行估算。如果某种期权的 Gamma 值接近于零。那么这种期权的 Delta 值对股票价格的变动就不会特别敏感。

3. Theta(θ)

Theta 是指期权价值随时间变化而变化的敏感程度。期权越是临近到期日，期权的时间价值就越小。由于期权距到期时间只会越来越短，因此 Theta 一般取偏导数的负值。就看涨期权而言，可表达为：

$$\theta = -\frac{\partial C}{\partial t} \tag{10-6}$$

具体计算 Theta 值时可按下列公式进行：

看涨期权：

$$\theta = -\frac{S\sigma e^{d_1^2}}{2\sqrt{2\pi t}} + Er^{-t}(\ln r)N(d_2) \tag{10-7}$$

看跌期权：

$$\theta = -\frac{S\sigma e^{d_1^2}}{2\sqrt{2\pi t}} + Er^{-t}(\ln r)N(-d_2) \tag{10-8}$$

式中所有变量含义都与 B-S 定价模型中的变量含义相同。

随着时间的流逝，对多头期权头寸的持有者将日益不利，期权的时间价值在下降，所以多头看涨期权或多头看跌期权的 Theta 值为负数值。相反，随着时间的推移，期权的时间价值将变得越来越不值钱，所以，对期权的出售方将越来越有利，因此，空头看涨期权和空头看跌期权的 Theta 值是正数值。

其他一些风险指标如 Vega，Rho 等，它们对风险管理决策的影响较小。

Vega 衡量的是期权价格相对于股价波动性的敏感程度；Rho 衡量的是期权价格相对于利率的敏感程度。具体内容略。

二、风险指标间的关系及风险管理

1. 资产组合的风险指标

前面，讨论了单个期权的风险指标。在实际中，投资者往往利用几种期权合同或者联同其他投资工具构造投资组合以达到特定的效果。如果分别控制单个期权的风险指标，并不是最有效的方法。比如说看涨期权的 Delta 是正值，但看跌期权的 Delta 是负值，它们之间可以部分地相互抵消。因而最有效的方法是从投资组合的整体去考虑各风险指标。

下面所介绍的是同一基础交易物的不同期权的投资组合。在这里，我们简单地把不同资产的期权当成一个组合来考虑。

假定某投资者以 n_1 个某种看涨期权，n_2 个另一种看涨期权，以及 m_1 和 m_2 个两种不同的看跌期权构造组合头寸，则此头寸的价值为：

$$V = n_1 C_1 + n_2 C_2 + m_1 P_1 + m_2 P_2 \tag{10-9}$$

其中 C_1，C_2 和 P_1，P_2 分别为各个期权合同的价格。则对应此头寸，其各个风险指标分别为：

$$\Delta = n_1 \Delta_{C_1} + n_2 \Delta_{C_2} + m_1 \Delta_{P_1} + m_2 \Delta_{P_2} \tag{10-10}$$

$$\gamma = n_1 \gamma_{C_1} + n_2 \gamma_{C_2} + m_1 \gamma_{P_1} + m_2 \gamma_{P_2} \tag{10-11}$$

$$\theta = n_1\theta_{C_1} + n_2\theta_{C_2} + m_1\theta_{P_1} + m_2\theta_{P_2} \tag{10-12}$$

$$\nu = n_1\nu_{C_1} + n_2\nu_{C_2} + m_1\nu_{P_1} + m_2\nu_{P_2} \tag{10-13}$$

$$\rho = n_1\rho_{C_1} + n_2\rho_{C_2} + m_1\rho_{P_1} + m_2\rho_{P_2} \tag{10-14}$$

投资者在构造组合头寸时，可以按照自己对风险及收益的偏好，建立风险指标为特定值的组合。例如，如果投资者认为股价会上扬，他就可以选择一个高 Delta 值的头寸，而如果投资者想完全抵消价格波动风险，他可以选择一个 Delta 中性及 Gamma 中性的投资组合。只要投资者对以上的风险指标有清楚的了解，在信息充分的情况下，他就可以选择建立最适合自己的投资组合。

2. Delta，Gamma 和 Theta 间的关系

根据 B-S 模型，对于一个特定组合头寸，有下式成立：

$$\theta + rS\Delta + 0.5\sigma^2S^2\gamma - rf = 0 \tag{10-15}$$

其中，f 为该头寸的价值，而其他符号的意义与前面相同。这个方程式显示了 Delta，Gamma 和 Theta 之间的关系。如此头寸为 Delta 中性，则有：

$$\theta + 0.5\sigma^2S^2\gamma = rf \tag{10-16}$$

这个方程表示：如果投资组合的 θ 值为正，且较大，则相应地其 Gamma 值为负，绝对值亦较大，反之亦然。而 Delta 值为 0，Gamma 值接近于 0 的投资组合的 Theta 值也将近于 rf。

3. 期权头寸的对冲

以上我们讨论了主要的风险指标。根据这些风险指标的启示，我们可以寻求建立最理想的保值头寸。理论上，通过连续地修正保值头寸构成比例，可以达到非常完善的保值效果。但在实际中，交易费用的存在和信息的不充分，经常使修正保值头寸成本很高，效果也未必理想；完全消除风险是不现实的。交易者往往利用 Delta，Gamma 等风险指标来量化其期权头寸中的内在风险的各个侧面，如果认定这种风险是可以接受的话，交易者就会选择放弃调整。

例 10-3　某股票现价 40 美元，股价波动性为每年 55%，利率

为6%。某投资者卖出了一个关于该股票的三个月后到期的看涨期权，执行价格为30美元。该投资者决定对此头寸进行保值，买进一个执行价格为40美元的同期限的看涨期权。则其保值头寸的风险指标及现金流量可表示如表10-1：

表10-1

	卖出执行价格为30的看涨期权	买进执行价格为40的看涨期权	总头寸
现金流量	11.09	-4.65	6.44
Delta	-0.8922	0.5761	-0.3161
Gamma	-0.0169	0.0356	0.0187
Theta	5.55	-9.72	-4.17

从上表中看，这个头寸在股价不变或上升的情况下依然有遭受损失的风险。为改善这个保值头寸的保值效果，我们可以再买进执行价格为40的看涨期权，以达到Delta中性的效果。对于一个执行价格为30的看涨期权空头，应买进的执行价格为40的看涨期权数量为0.8922/0.5761 = 1.548。在这样的保值策略下，如果股价大幅上升，所面临的风险就会大大低于以股票建立保值头寸的情况。

4.期权的杠杆效应

看涨期权的弹性e的定义是期权价值变化相对于股价变化的敏感程度，即：

$$e = \frac{\mathrm{d}C/C}{\mathrm{d}S/S} \tag{10-17}$$

因为$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}S} = \Delta$(Delta)，所以有：

$$e = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}S} \cdot \frac{S}{C} = \Delta \frac{S}{C} \tag{10-18}$$

根据B-S模型，在一时点上一个看涨期权头寸相当于一个包含一部分以借款买进的该股股票的投资组合，通过动态的调整，这

个投资组合损益的情况同该看涨期权一样，因而我们称其为该期权的复制头寸。我们对该看涨期权的风险收益情况的分析可通过分析该复制头寸的风险收益情况进行。

如果复制头寸是部分通过借入款构造的，我们称此为杠杆作用。如果以 Q 代表借入的资金量，W 为自有资金量，杠杆率以 λ 表示，则：

$$\lambda = \frac{Q + W}{Q} \tag{10-19}$$

如果某投资者自有资金 W，以无风险利率 r 借入Q，全部投入收益率为 R_P 的有风险组合中，则其收益率 R_Q 为：

$$R_Q = \lambda R_P + (1 - \lambda) r \tag{10-20}$$

此组合的预期收益率及其方差分别为：

$$ER_Q = \lambda ER_P + (1 - \lambda) r \tag{10-21}$$

$$\sigma^2(R_Q) = \sigma^2(\lambda R_P + (1 - \lambda) r) = \lambda^2 \sigma^2 R_P \tag{10-22}$$

相应地
$$\Delta = \beta_Q = \lambda \beta_P \tag{10-23}$$

考虑到看涨期权与其复制头寸的关系，一个看涨期权的杠杆率为：

$$\lambda = \frac{N(d_1)S}{C} = \Delta \frac{S}{C} \tag{10-24}$$

比较式(10-18)与式(10-24)，我们看到 $e = \lambda$，即期权弹性等于其复制头寸的杠杆率。期权弹性越大、杠杆率越高，期权风险也就越大。期权的这种杠杆效应方便了它的避险功能，但又使它成为一种高风险的投资工具。

由式(10-23)及式(10-24)可知：期权弹性等于 Delta 乘以基础资产价格和期权费之比。期权 β 则是期权弹性乘以基础资产的 β 系数。

第三节 公司风险管理

风险管理是期货和期权市场之所以存在的主要原因。以前各章的讨论都或多或少涉及风险管理的某一方面,利用金融衍生产品,可以改变资产组合的风险和预期收益。本节及下一节主要分析衍生工具作为金融风险管理手段的其他方面。

一、Delta 管理

构成资产组合的各类资产 Delta 加总起来就是头寸 Delta。Delta 管理是指对头寸 Delta 进行经常性的调控,使 Delta 值的波动保持在一定的范围之内。Delta 概念之所以非常有用,一个特别重要的原因就在于:Delta 是特定资产组合头寸牛市强弱程度的一个直接衡量指标。

由上一节可知,Delta 是期权价值对基础资产价格变动的一阶导数。Delta 的数值范围在 -1.0～1.0 之间。如果某种看涨期权的 Delta 值为 0.65,则基础资产价格变动 1 美元,期权的价值将会变动 0.65。看涨期权严重溢价时,其 Delta 值接近于 1;反之,看涨期权严重损价时,其 Delta 值就趋向于 0。同理,看跌期权严重溢价时,其 Delta 值接近于 -1;而看跌期权如果严重损价时,其 Delta 值接近于 0。当期权的执行价格接近于基础资产价格时,其 Delta 值大约为 0.5(看涨期权)或 -0.5(看跌期权)。

如果某人持有 10 000 股 TOY 股票,那么,他的头寸 Delta 为 $10\,000 \times 1.0 = 10\,000$,即每一股股票表示一个 Delta 点。计算 TOY 的头寸 Delta,可以将 TOY 股票中的 Delta 值与有关的期权头寸中含有的 Delta 值相加即可。

假定由于近期经济形势的变化,该资产管理人对 TOY 股票的走势看法略有改变,不再像原先那么乐观。由于原先 10 000 股

股票具有100%的牛市头寸，则有几种方法可以降低市场风险。

一种比较简单的做法是出售持有的股票，即兑现。例如，出售5000股股票，可以使头寸Delta降低到5000(是原先的50%)。与初始状态相比，资产管理者现在是50%的牛市倾向。

这种方法有一点不利于资产调整者：当经济形势重新出现好转时，资产持有方会重新购回股票，因而可能损失交易佣金。

对于愿意支付佣金的投资者来说，他可以出售空头资产组合。具体做法为：先从经纪商手中借入与持有的股票同样数量的该种股票，再出售借入的股票，最终以手中持有的股票归还借入的股票。采用这种方法的主要动机是出于税收因素的考虑。

此外，还有其他三种方法：买入TOY看跌期权，这种策略会产生支付期权费现金流出；出售TOY看涨期权；或者将上述两者进行某种程度的综合。

无论采用哪一种方法，都可以暂时地改变资产组合面临的风险程度。究竟采用何种方法要视环境条件而定，下面我们通过一个案例来说明这一问题。

二、案例分析

IBM公司股票

该案例试图说明资产组合管理者怎样利用期权来暂时改变资产面临的风险程度，增加资产组合的收入，以及使资产组合恢复到初始状态。

假定，在1月26日，某资产组合管理者持有10000股IBM公司的股票，现行股价为每股33美元。市场条件的变化使该资产管理者决定将手中持有的股票风险降低至原先风险水平的90%。

首先，IBM股票的头寸Delta是10000，每一股股票代表一个Delta点。现在的目标是要将头寸Delta值降低至90%，即9000，可供选择的方法有三种：

①出售1000股IBM股票即兑现；

②买入看跌期权；

③出售看涨期权。

出售股票是一种可以采用的手段，但交易所包含的佣金成本较高，特别是当出售股票之后不久，当资产管理者需要再购入股票时，就更是如此。买入看跌期权的不利之处在于需要支付一笔期权费。因此，资产管理者采取的决策常常是出售看涨期权。

如果IBM股票的三月期看涨期权执行价格为35美元，期权费每股2美元，Delta值为0.441。资产管理者就会决定出售23份这种看涨期权合约，头寸Delta大约减少1000。

$$10000-(N\times 0.441\times 100)=9000$$

合约份数的计算如下：

$$1000=44.1N,\quad N=22.68\approx 23$$

出售看涨期权获得的期权费收入为4600美元。现在的头寸Delta是8986(即$10000\times 1-2300\times 0.441=8986$)，与初始头寸Delta值10000相比，现在的资产组合具有89.86%的牛市倾向。

一周时间之后，IBM股票的市场价格为32.5美元，执行价格为35美元的三月期看涨期权的Delta值为0.404，头寸Delta也从8986变动为9071，即：$10000\times 1-(2300\times 0.404)=9071$。

公司资产管理人打算进一步降低持有IBM股票的风险，目标是要降低到原先风险水平的50%。要达到这种目标，依然有三种办法可供利用：①出售4071股IBM股票；②买入看跌期权；③出售更多的看涨期权。该资产管理者决定采用第三种方法。

执行价格为35美元的三月期看涨期权现在的出售价格为1.625美元(每股股票)。出售77份这种看涨期权合约，可以获得期权费收入约为12513美元，头寸Delta现在是5960：

$$(10000\times 1)-(10000\times 0.404)=5960$$

与初始状态相比，现在的资产头寸具有59.60%的牛市倾向。持

有的 IBM 股票还显得牛市倾向过度，但如果继续出售看涨期权，可能风险更大，因为这些看涨期权属于无抵补看涨期权，资产管理者当然不希望再出售看涨期权。在这种情况下，除非抛售股票，否则，就只有采取买入看跌期权的方法。

执行价格为 30 的四月份到期看跌期权，期权费为每股 1.95 美元，Delta 值是 -0.310。该资产管理者经过计算，求出买入 31 份看跌期权合约可以使头寸 Delta 值达到所要求的水平，具体计算见表 10-2 所示。

表 10-2　IBM 股票的头寸 Delta

股票	10000×1.0=10000
看涨期权	10000(100 份合约)×(-0.404)=-4040
看跌期权	3100(31 份合约)×(-0.310)=-961
结果	10000-4040-961=4999
	与初始状态相比，现在为 49.99% 牛市倾向

在三月份期权到期日，IBM 股票的价格为 33 美元。持有 IBM 股票的资产管理者出于种种考虑，决定使资产头寸恢复到原先的 100% 牛市倾向，即头寸 Delta 为 10000。

执行价格为 35 美元的三月期看涨期权到期时无价值。执行价格为 30 的四月期看跌期权可以出售，根据 B-S 定价公式，这种看跌期权的价值为 0.96 美元。表 10-3 归纳了风险管理案例分析中有关的期权费收支计算。

表 10-3　期权费收入计算

1 月 26 日出售 23 份看涨期权	+4600 美元
1 周以后出售 77 份看涨期权	+12513 美元
买入 31 份看跌期权(1.95 美元)	-6045 美元
出售 31 份看跌期权(0.96 美元)	+2976 美元
期权交易净收入	+14044 美元

资产组合的管理者要经常利用期权工具来改变既定资产组合所面临的风险。以股票为例，如果不改变股票持有量，那么，对风险的调整，就只有通过改变持有的期权头寸来维持正确的 Delta 目标值。

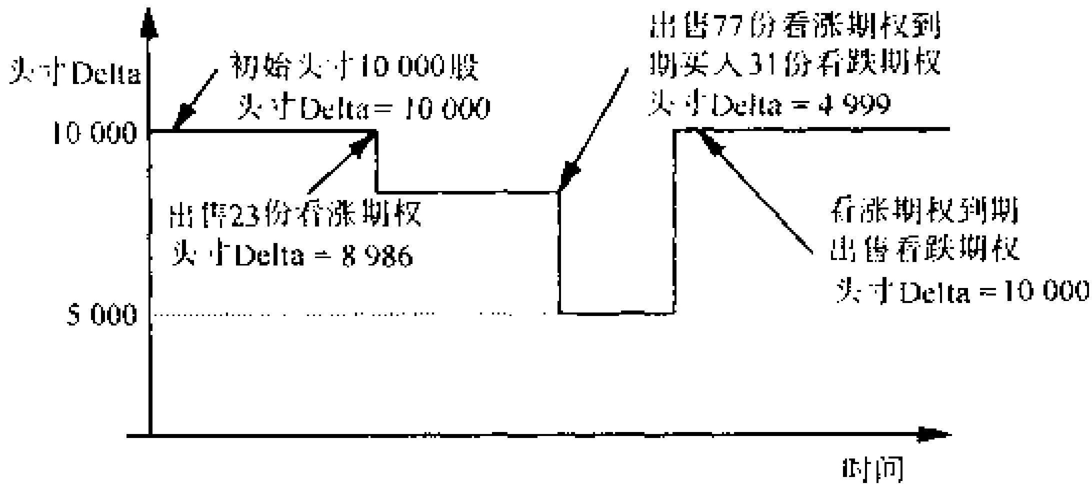


图 10-3 调整公司头寸 Delta

第四节 市场风险管理

上一节侧重于介绍如何利用期权来调整特定的公司风险。实际上，衍生工具在风险管理中更重要的作用在于改变整个市场的风险。

一、传统的衍生产品方法

1. 利用期货管理市场风险

利用期货管理市场风险，其应用相当广泛。股票指数（如 S&P500 指数）期货合约被广泛地应用于股票资产的风险管理。

在实际业务中，绝大多数的股票指数期货被用于减少风险而不是消除风险。因为风险与期望收益直接相联系，如果完全消除

了风险，那么，在一个组织完善，富有效率的市场上，收益将会令人非常失望。换言之，资产管理者如果对资产组合进行完全保值，这种策略并不一定是富有成效的策略。作为风险管理工具，期货与期权一样，应该明智地加以利用。

2. 利用指数期权管理市场风险

在过度出售策略中，股票指数期权应用得最为普遍，其目的是为了增加收入。但是，出售看涨期权是一种熊市倾向的策略，因为空头看涨期权具有负数值 Delta。负数值 Delta 可以降低资产组合所面临的市场风险。当然，如果资产组合的头寸 Delta 已经小于零，继续出售看涨期权将增加市场风险。

此外，指数期权还可以被用来改变市场风险。如果要略微降低市场风险，那么合理的策略是出售看涨期权；如果要大幅度降低市场风险，则应该采用买入看跌期权的策略。富有经验的资产管理者会出售足够多的看涨期权，将获得的期权费收入用于购买看跌期权的支出。这种做法，一方面达到了头寸 Delta 的目标；另一方面又可以少支出期权费，甚至不支出期权费。

二、期货期权方法

期货和期权工具的一个主要优点就在于这类金融衍生产品既可以改变市场风险（头寸 Delta），又不会从整体上影响基础资产组合的构成。如果将期货和期权两者以某种适当的比例组合起来，资产管理者就可以控制所面临的市场风险。

同股票期权和指数期权一样，期货期权也有两种类型：看涨期权和看跌期权。期货看涨期权的持有者有权以事先确定的价格买入预定数额的期货合约；期货看跌期权的持有者则有权以事先确定的价格出售预定的期货数额。

出售期货期权的一方在期权持有者执行期权时，有义务履行期权合约，持有看涨期权的一方有权购买，出售看涨期权的一方则

在期权执行时有义务出售。同理，看跌期权的出售方在持有方执行期权时，就有义务买入期货。

利用期货期权管理市场风险，应注意以下两方面的问题。

1. 信托机构问题

几乎没有哪家信托机构可以完全自由地按其愿望来应用期货工具或期权工具。出售完全无保护的期权，由于存在潜在的风险，可能违反投资原则。期货的应用也存在类似的问题。

如果某资产管理者出售看跌期权，当看跌期权被执行的时候，他就有义务买入期货。只要他出售的看跌期权不超过他的空头期货合约数，这种看跌期权就是有保护的。一旦看跌期权被执行，失去的无非就是对期货的保值作用。

另一方面，出售看涨期权的一方，在期权被执行时，就有义务出售。所以，如果出售的看涨期权超过"等值"的期货合约，这种做法就是不可取的。换句话说，如果看涨期权被执行，看涨期权的出售方必须通过出售期货合约来加以保值，而一般信托机构不希望持有这么多空头头寸，以免头寸 Delta 变为负数值。

例 10-4 假定某人管理的一笔股票资产价值 1.15 亿美元，β 为 0.98，S&P500 指数期货合约的指数值是 365.00。一份期货合约的价值为 $365.00\times500=182\,500$ 美元，所以，1.15 亿美元的股票资产等值于 630 份期货合约：115000000 美元 ÷ 182500 美元 = 630。由于 β 值略小于 1，对股票资产完全保值所需要的期货合约份数应略低于 630 份：$98\%\times630=617$（份）。

作为这笔股票资产管理者，你出售的期货看涨期权份数不得超过 617 份。否则的话，这些期权被执行时，股票和空头期货的头寸 Delta 之和将小于零。

2. 求出最优组合

最优组合是指能获得正确的头寸 Delta 值，以及产生最大收入的金融工具组合。利用期权交易往往是出于保值目的。在上述

例子中，我们可以选择两种类型损价 S&P500 期货期权(距到期日还有 100 天)：355 份看跌期权和 275 份看涨期权，组合成 630 份期权合约。假定波动性为 15%，现行期货价格为 365，则根据 B-S 期货期权定价模式，估算出看涨期权的 Delta 值是 0.372，看涨期权的期权费为 7.11，看跌期权的 Delta 值是 -0.340，期权费为 6.83 美元。

当 1.15 亿美元股票资产的市场风险发生变化时，用以保值的 S&P500 期货，以及期货看跌期权，期货看涨期权的最优组合构成也会相应变动。

三、价值风险与风险管理

上一节，我们讨论了期权的风险指标：Delta，Gamma，Theta 这些指标所涉及的都只是单一性质的风险头寸，或者是单一头寸，或者是基础交易物相同的头寸所构成的投资组合。而在实际中，这样的衡量指标显然并不足够。尤其在巴林银行等事件发生之后，国际金融界对风险管理的重视提升到了一个新的高度。价值风险被认为是一种最为主要的风险管理概念。到现在，它已经成为最受欢迎的市场风险综合性衡量指标。

1. 价值风险的概念

价值风险是指在一定时间内及一定概率下由于市场不利变动所造成的企业价值的最大潜在损失量。

价值风险涉及两个主要的量化指标：时间与概率，即时段长度与置信水平。下面，我们简要分析价值风险的原理。

一个企业可以看成是一个有特定构成的投资组合，对于企业的风险管理人员，主要任务就是衡量该投资组合的价值相对于市场价格波动的敏感性并采取措施来冲销不利波动可能导致的损失。为计算价值风险，首先要来计算投资组合在现时组合的市场价值 V_0，然后，再以另外的一系列市场价格代入计算式，得到组合

的另外一个总值 V_1，并计算其与现时总值 V_0 的差 ΔV_1，重复这样的运算，我们就可以得到关于该投资组合价值变动的一个概率分布，如图 10-4 所示。

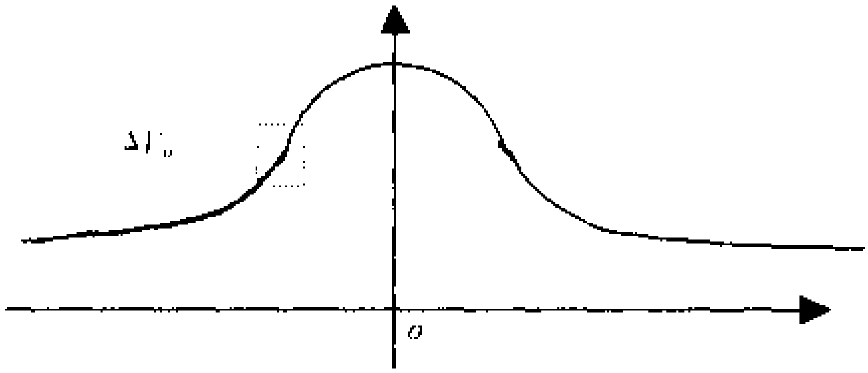


图 10-4

在了解投资组合价值变动的概率分布之后，需要确定价值风险的置信水平。这样，虽然无法明确掌握可能损失量的最大值，但我们可以在一定概率下知道可能的最大损失量。例如，我们可以说，ΔV_1 在 99% 的概率下为公司可能遭受的最大损失，也就是说，损失量超过 ΔV_1 的可能性只为 1%。对置信水平的选择很大程度上是主观的。不同的机构可能采用不同的置信水平。例如，美国大通银行采用 97.5% 的置信水平，而花旗银行的置信水平为 95.4%，美洲银行则采用 95% 的置信水平。

不同的公司企业计算价值风险的时段长度也不同。而这种选择在一定程度上也是主观的。有些公司管理层可能希望了解每天的价值风险，另外一些则有可能满足于掌握每月的价值风险水平，如果所涉及的投资组合的调整时间与价值风险的时段长度可以相配合，情况就比较理想。

价值风险概念为最高管理层提供下一个简便而且全面的衡量市场风险的工具，它也为公司总体水平上的风险管理工作建立了一个标准。

2. 价值风险模型的建立

实际上，具体建立价值风险模型、计算价值风险的方法有几种，对此只作简单说明。

总的来说，具体建立价值风险模型、计算价值风险的方法可以划为两类：一类是基于局部估值；另一类是基于全面估值。这两类方法的根本区别在于对投资组合中各项资产收益率之间的相关性及资产收益率的非线性关系的处理的不同。一般来讲，局部估值方法对相关性的处理能力较好，而全面估值方法可更好地处理非线性关系。在第一类方法中，主要是 Delta-正态方法；在第二类方法中包括有历史数据模拟法、强度检验法以及结构型蒙特卡罗模拟法。这些方法各有其优缺点，可参考其他教科书，此略。

本章小结

本章作为全书的结尾，主要介绍金融工程与风险管理。风险管理是全书的中心，前面各章均以估计风险大小、化解风险为主要内容。期货与期权及各种衍生工具都是在金融实践中应运而生的。Delta，Gamma，Theta 等都是衡量风险管理的主要风险指标。

Delta 用以衡量基础资产价格变化对期权价值的影响。许多期权战略是以 Delta 中性为基础的，即使组合中的各种 Delta 的加权平均值为零。为保持 Delta 中性，就需要进行经常的调整。

构成资产组合的各类资产 Delta 加总起来就是头寸 Delta。

Gamma 值用以度量基础资产价格变化对 Delta 值的影响。

Theta 反映时间变化对期权价值的影响。

金融衍生产品对改变资产组合面临的风险特别有用。其特殊优势在于既可以防范风险，又可以不改变原有资产组合，还可以创造出期权费收入，这是风险调整的副产品。

当基础资产价格变化幅度不大时，可以用 Delta 值有效地估算期权价格的变化；如果基础资产价格变化幅度较大时，Delta 估算就会出现偏差。为了达到某种理想的头寸 Delta，可供资产管理者选择的方法有多种。改变头寸 Delta 也就改变了总的资产组合 β 系数。β 系数是市场系统风险的一个主要衡量指标，其计算主要通过简单的比例关系式来进行。

附录 1 复利系数表

附表 1-1 1.00% 复利系数

	单次支付		均一数列支付				
n	复利终值 F/P	复利现值 P/F	偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	n
1	1.0100	0.9901	1.00007	0.9999	1.01007	0.9900	1
2	1.0201	0.9803	0.49757	2.0098	0.50757	1.9702	2
3	1.0303	0.9706	0.33005	3.0298	0.34005	2.9407	3
4	1.0406	0.9610	0.24630	4.0601	0.25630	3.9017	4
5	1.0510	0.9515	0.19606	5.1005	0.20606	4.8530	5
6	1.0615	0.9420	0.16256	6.1515	0.17256	5.7950	6
7	1.0721	0.9327	0.13864	7.2129	0.14864	6.7277	7
8	1.0829	0.9235	0.12070	8.2851	0.13070	7.6512	8
9	1.0937	0.9143	0.10675	9.3678	0.11675	8.5654	9
10	1.1046	0.9053	0.09559	10.4613	0.10559	9.4706	10
11	1.1157	0.8963	0.08646	11.5659	0.09646	10.3663	11
12	1.1268	0.8875	0.07886	12.6815	0.08886	11.2543	12
13	1.1381	0.8787	0.07242	13.8083	0.08242	12.1329	13
14	1.1495	0.8700	0.06691	14.9462	0.07691	13.0028	14
15	1.1610	0.8614	0.06213	16.0956	0.07213	13.8641	15
16	1.1726	0.8528	0.05795	17.2565	0.06795	14.7169	16
17	1.1843	0.8444	0.05426	18.4290	0.06426	15.5612	17
18	1.1961	0.8360	0.05099	19.6132	0.06099	16.3972	18
19	1.2081	0.8278	0.04806	20.8092	0.05806	17.2248	19
20	1.2202	0.8196	0.04542	22.0172	0.05542	18.0443	20
22	1.2447	0.8034	0.04087	24.4692	0.05087	19.6591	22
24	1.2697	0.7876	0.03708	26.9713	0.04708	21.2420	24
25	1.2824	0.7798	0.03541	28.2409	0.04541	22.0217	25
26	1.2552	0.7721	0.03387	29.5232	0.04387	22.7937	26
28	1.3213	0.7569	0.03113	32.1264	0.04113	24.3149	28
30	1.3478	0.7419	0.02875	34.7820	0.03875	25.8061	30
32	1.3749	0.7273	0.02667	37.4905	0.03667	27.2679	32
34	1.4025	0.7130	0.02484	40.2542	0.03484	28.7009	34
35	1.4166	0.7059	0.02401	41.6567	0.03401	29.4068	35
36	1.4307	0.6989	0.02322	43.0732	0.03322	30.1057	36
38	1.4595	0.6852	0.02176	45.9487	0.03176	31.4828	38
40	1.4888	0.6717	0.02046	48.8820	0.03046	32.8327	40
45	1.5648	0.6391	0.01771	56.4761	0.02771	36.0925	45
50	1.6446	0.6081	0.01551	64.4573	0.02551	39.1939	50
55	1.7285	0.5786	0.01373	72.8456	0.02373	42.1449	55
60	1.8166	0.5505	0.01225	81.6619	0.02225	44.9527	60
65	1.9093	0.5238	0.01100	90.9277	0.02100	47.6242	65
70	2.0067	0.4983	0.00993	100.6663	0.01993	50.1660	70
75	2.1090	0.4742	0.00902	110.9015	0.01902	52.5845	75
80	2.2166	0.4511	0.00822	121.6588	0.01822	54.8855	80
85	2.3296	0.4292	0.00752	132.9648	0.01752	57.0751	85
90	2.4485	0.4084	0.00690	144.8475	0.01690	59.1583	90
95	2.5734	0.3886	0.00636	157.3362	0.01636	61.1404	95
100	2.7046	0.3697	0.00587	170.4620	0.01587	63.0263	100

附表 1-2 1.50%复利系数

n	单次支付 复利终值 F/P	单次支付 复利现值 P/F	均一数列支付 偿债基金 A/F	均一数列支付 年金终值 F/A	均一数列支付 资本回收 A/P	均一数列支付 年金现值 P/A	n
1	1.0150	0.9852	1.00004	1.0000	1.01504	0.9852	1
2	1.0302	0.9707	0.49631	2.0149	0.51131	1.5553	2
3	1.0457	0.9563	0.32840	3.0451	0.34340	2.9121	3
4	1.0614	0.9422	0.24446	4.0907	0.25946	3.8542	4
5	1.0773	0.9283	0.19410	5.1520	0.20910	4.7824	5
6	1.0934	0.9145	0.16053	6.2293	0.17553	5.6970	6
7	1.1098	0.9010	0.13656	7.3226	0.15156	6.5979	7
8	1.1265	0.8877	0.11859	8.4325	0.13359	7.4856	8
9	1.1434	0.8746	0.10461	9.5589	0.11961	8.3502	9
10	1.1605	0.8617	0.09344	10.7022	0.10844	9.2218	10
11	1.1779	0.8489	0.08430	11.8627	0.09930	10.0707	11
12	1.1956	0.8364	0.07668	13.0406	0.09168	10.9071	12
13	1.2135	0.8240	0.07024	14.2362	0.08524	11.7311	13
14	1.2317	0.8119	0.06473	15.4497	0.07973	13.5429	14
15	1.2502	0.7999	0.05995	16.6814	0.07495	13.3428	15
16	1.2690	0.7880	0.05577	17.9315	0.07077	14.1307	16
17	1.2880	0.7764	0.05208	19.2005	0.06708	14.9071	17
18	1.3073	0.7649	0.04881	20.4884	0.06381	15.6720	18
19	1.3269	0.7536	0.04588	21.7957	0.06088	16.4256	19
20	1.3468	0.7425	0.04325	23.1225	0.05825	17.1680	20
22	1.3875	0.7207	0.03871	25.8363	0.05371	18.6202	22
24	1.4295	0.6996	0.03493	28.6321	0.04993	20.0297	24
25	1.4509	0.6892	0.03327	30.0615	0.04827	20.7189	25
26	1.4727	0.6790	0.03173	31.5124	0.04673	21.3979	26
28	1.5172	0.6591	0.02900	34.4757	0.04400	22.7260	28
30	1.5631	0.6398	0.02664	37.5368	0.04164	24.0151	30
32	1.6103	0.6210	0.02458	40.6862	0.03958	25.2663	32
34	1.6590	0.6028	0.02276	43.9308	0.03776	26.4809	34
35	1.6838	0.5930	0.02193	45.5897	0.03693	27.0748	35
36	1.7091	0.5851	0.02115	47.2735	0.03615	27.6598	36
38	1.7608	0.5679	0.01972	50.7172	0.03472	28.8042	38
40	1.8140	0.5513	0.01843	54.2650	0.03343	29.9150	40
45	1.9542	0.5117	0.01572	63.6107	0.03072	32.5514	45
50	2.1052	0.4750	0.01357	73.6786	0.02857	34.9987	50
55	2.2679	0.4409	0.01183	84.5246	0.02683	37.2705	55
60	2.4431	0.4093	0.01039	96.2088	0.02539	39.3793	60
65	2.6319	0.3799	0.00919	108.7960	0.02419	41.3368	65
70	2.8353	0.3527	0.00817	122.3559	0.02317	43.1539	70
75	3.0545	0.3274	0.00730	136.9637	0.02230	44.8406	75
80	3.2905	0.3039	0.00655	152.7004	0.02155	46.4064	80
85	3.5448	0.2821	0.00589	169.6533	0.02089	47.8598	85
90	3.8187	0.2619	0.00532	187.9163	0.02032	49.2089	90
95	4.1139	0.2431	0.00482	207.5906	0.01982	50.4613	95
100	4.4318	0.2256	0.00437	228.7855	0.01937	51.6239	100

附表 1-3 2.00%复利系数

	单次支付		均一数列支付				
n	复利终值 F/P	复利现值 P/F	偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	n
1	1.0200	0.9804	1.00002	1.0000	1.02002	0.9804	1
2	1.0404	0.9612	0.49507	2.0199	0.51507	1.9415	2
3	1.0612	0.9423	0.32677	3.0603	0.34677	2.8838	3
4	1.0824	0.9238	0.24263	4.1215	0.26263	3.8076	4
5	1.1041	0.9057	0.19216	5.2039	0.21216	4.7133	5
6	1.1262	0.8880	0.15853	6.3079	0.17853	5.6013	6
7	1.1487	0.8706	0.13452	7.4341	0.15452	6.4718	7
8	1.1717	0.8535	0.11651	8.5827	0.13651	7.3253	8
9	1.1951	0.8368	0.10252	9.7543	0.12252	8.1620	9
10	1.2190	0.8204	0.09133	10.9494	0.11133	8.9824	10
11	1.2434	0.8043	0.08218	12.1684	0.10218	9.7866	11
12	1.2682	0.7885	0.07456	13.4117	0.09456	10.5751	12
13	1.2936	0.7730	0.06812	14.6799	0.08812	11.3481	13
14	1.3195	0.7579	0.06260	15.9735	0.08260	12.1060	14
15	1.3459	0.7430	0.05783	17.2929	0.07783	12.8490	15
16	1.3728	0.7285	0.05365	18.6387	0.07365	13.5774	16
17	1.4002	0.7142	0.04997	20.0115	0.06997	14.2916	17
18	1.4282	0.7002	0.04670	21.4117	0.06670	14.9917	18
19	1.4563	0.6864	0.04378	22.8399	0.06378	15.6782	19
20	1.4859	0.6730	0.04116	24.2966	0.06116	16.3511	20
22	1.5460	0.6468	0.03663	27.2981	0.05663	17.6577	22
24	1.6084	0.6217	0.03287	30.4209	0.05287	18.9136	24
25	1.6406	0.6095	0.03122	32.0293	0.05122	19.5231	25
26	1.6734	0.5976	0.02970	33.6698	0.04970	20.1207	26
28	1.7410	0.5744	0.02699	37.0500	0.04699	21.2809	28
30	1.8113	0.5521	0.02465	40.5668	0.04465	22.3961	30
32	1.8845	0.5306	0.02261	44.2256	0.04261	23.4679	32
34	1.9606	0.5100	0.02082	48.0322	0.04082	24.4982	34
35	1.9999	0.5000	0.02000	49.9928	0.04000	24.9982	35
36	2.0399	0.4902	0.01923	51.9926	0.03923	25.4884	36
38	2.1223	0.4712	0.01782	56.1130	0.03782	26.4402	38
40	2.2080	0.4529	0.01656	60.3990	0.03656	27.3551	40
45	2.4378	0.4102	0.01391	71.8901	0.03391	29.4897	45
50	2.6915	0.3715	0.01182	84.5762	0.03182	31.4232	50
55	2.9717	0.3365	0.01014	98.5827	0.03014	33.1744	55
60	3.2809	0.3048	0.00877	114.0468	0.02877	34.7605	60
65	3.6224	0.2761	0.00763	131.1205	0.02763	36.1971	65
70	3.9994	0.2500	0.00667	149.9712	0.02667	37.4982	70
75	4.4157	0.2265	0.00586	170.7839	0.02586	38.6767	75
80	4.8752	0.2051	0.00516	193.7626	0.02516	39.7442	80
85	5.3827	0.1858	0.00456	219.1331	0.02456	40.7109	85
90	5.9429	0.1683	0.00405	247.1440	0.02405	41.5866	90
95	6.5614	0.1524	0.00360	278.0698	0.02360	42.3797	95
100	7.2443	0.1380	0.00320	312.2148	0.02320	43.0981	100

附表 1-4 3.00% 复利系数

	单次支付		均一数列支付				
n	复利终值 F/P	复利现值 P/F	偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	n
1	1.0300	0.9709	1.00001	1.0000	1.03001	0.9709	1
2	1.0609	0.9426	0.49262	2.0300	0.52262	1.9134	2
3	1.0927	0.9151	0.32353	3.0909	0.35353	2.8286	3
4	1.1255	0.8885	0.23903	4.1836	0.26903	3.7171	4
5	1.1593	0.8626	0.18836	5.3091	0.21836	4.5797	5
6	1.1940	0.8375	0.15460	6.4683	0.18460	5.4171	6
7	1.2299	0.8131	0.13051	7.6624	0.16051	6.2302	7
8	1.2668	0.7894	0.11246	8.8922	0.14246	7.0196	8
9	1.3048	0.7664	0.09843	10.1590	0.12842	7.7860	9
10	1.3439	0.7441	0.08723	11.4637	0.11723	8.5301	10
11	1.3842	0.7224	0.07808	12.8077	0.10808	9.2526	11
12	1.4258	0.7014	0.07046	14.1919	0.10046	9.9539	12
13	1.4685	0.6810	0.06403	15.6176	0.09403	10.6349	13
14	1.5126	0.6611	0.05853	17.0861	0.08853	11.2960	14
15	1.5580	0.6419	0.05377	18.5987	0.08377	11.9378	15
16	1.6047	0.6232	0.04961	20.1566	0.07961	12.5610	16
17	1.6528	0.6050	0.04595	21.7613	0.07595	13.1660	17
18	1.7024	0.5874	0.04271	23.4142	0.07271	13.7534	18
19	1.7535	0.5703	0.03981	25.1166	0.06981	14.3237	19
20	1.8061	0.5537	0.03722	26.8701	0.06722	14.8774	20
22	1.9161	0.5219	0.03275	30.5364	0.06275	15.9368	22
24	2.0328	0.4919	0.02905	34.4260	0.05905	16.9354	24
25	2.0938	0.4776	0.02743	36.4588	0.05743	17.4131	25
26	2.1566	0.4637	0.02594	38.5526	0.05594	17.8768	26
28	2.2879	0.4371	0.02329	42.9304	0.05329	18.7640	28
30	2.4272	0.4120	0.02102	47.5748	0.05102	19.6004	30
32	2.5751	0.3883	0.01905	52.5020	0.04905	20.3887	32
34	2.7319	0.3660	0.01732	57.7294	0.04732	21.1317	34
35	2.8138	0.3554	0.01654	60.4612	0.04654	21.4871	35
36	2.8983	0.3450	0.01580	63.2751	0.04580	21.8322	36
38	3.0748	0.3252	0.01446	69.1584	0.04446	22.4924	38
40	3.2620	0.3066	0.01326	75.4002	0.04326	23.1147	40
45	3.7816	0.2644	0.01079	92.7184	0.04079	24.5186	45
50	4.3838	0.2281	0.00887	112.7951	0.03887	25.7297	50
55	5.0821	0.1968	0.00735	136.0693	0.03735	26.7743	55
60	5.8915	0.1697	0.00613	163.0505	0.03613	27.6755	60
65	6.8299	0.1464	0.00515	194.3290	0.03515	28.4526	65
70	7.9177	0.1263	0.00434	230.5895	0.03434	29.1234	70
75	9.1787	0.1089	0.00367	272.6250	0.03367	29.7018	75
80	10.6407	0.0940	0.00311	321.3557	0.03311	36.2007	80
85	12.3354	0.0811	0.00265	377.8479	0.03265	30.6311	85
90	14.3001	0.0699	0.00226	443.3379	0.03226	31.0024	90
95	16.5777	0.0603	0.00193	519.2583	0.03193	31.3226	95
100	19.2181	0.0520	0.00165	607.2710	0.03165	31.5989	100

附表1-5 4.00%复利系数

n	单次支付 复利终值 F/P	单次支付 复利现值 P/F	均一数列支付 偿债基金 A/F	均一数列支付 年金终值 F/A	均一数列支付 资本回收 A/P	均一数列支付 年金现值 P/A	n
1	1.0400	0.9615	1.00000	1.000	1.04000	0.9615	1
2	1.0816	0.9246	0.49020	2.040	0.53020	1.8861	2
3	1.1249	0.8890	0.32035	3.122	0.36035	2.7751	3
4	1.1699	0.8548	0.23549	4.246	0.27549	3.6299	4
5	1.2167	0.8219	0.18463	5.416	0.22463	4.4518	5
6	1.2653	0.7903	0.15076	6.633	0.19076	5.2421	6
7	1.3159	0.7599	0.12661	7.898	0.16661	6.0021	7
8	1.3686	0.7307	0.10853	9.214	0.14853	6.7327	8
9	1.4233	0.7026	0.09449	10.583	0.13449	7.4353	9
10	1.4802	0.6756	0.08329	12.006	0.12329	8.1109	10
11	1.5395	0.6496	0.07415	13.486	0.11415	8.7605	11
12	1.6010	0.6246	0.06655	15.026	0.10655	9.3581	12
13	1.6651	0.6006	0.06014	16.627	0.10014	9.9857	13
14	1.7317	0.5775	0.05467	18.292	0.09467	10.5631	14
15	1.8009	0.5553	0.04994	20.024	0.08994	11.1184	15
16	1.8730	0.5339	0.04582	21.825	0.08582	11.6523	16
17	1.9479	0.5134	0.04220	23.697	0.08220	12.1657	17
18	2.0258	0.4936	0.03899	25.645	0.07899	12.6593	18
19	2.1068	0.4746	0.03614	27.671	0.07614	13.1339	19
20	2.1911	0.4564	0.03358	29.778	0.07368	13.5903	20
22	2.3699	0.4220	0.02920	34.248	0.06920	14.4511	22
24	2.5633	0.3901	0.02559	39.083	0.06559	15.2470	24
25	2.6658	0.3751	0.02401	41.646	0.06401	15.6221	25
26	2.7725	0.3607	0.02257	44.312	0.06257	15.9828	26
28	2.9987	0.3335	0.02001	49.968	0.06001	16.6631	28
30	3.2434	0.3083	0.01783	56.085	0.05783	17.2920	30
32	3.5081	0.2851	0.01595	62.701	0.05595	17.8735	32
34	3.7943	0.2636	0.01431	69.858	0.05431	18.4112	34
35	3.9461	0.2534	0.01358	73.652	0.05358	18.6646	35
36	4.1039	0.2437	0.01289	77.598	0.05289	18.9083	36
38	4.4388	0.2253	0.01163	85.970	0.05163	19.3679	38
40	4.8010	0.2083	0.01052	95.025	0.05052	19.7928	40
45	5.8412	0.1712	0.00826	121.029	0.04826	20.7200	45
50	7.1067	0.1407	0.00655	152.667	0.04655	21.4822	50
55	8.6463	0.1157	0.00523	191.159	0.04523	22.1086	55
60	10.5196	0.0951	0.00420	237.990	0.04420	22.6235	60
65	12.7987	0.0781	0.00339	294.968	0.04339	23.0467	65
70	15.5716	0.0642	0.00275	364.290	0.04275	23.3945	70
75	18.9452	0.0528	0.00223	448.630	0.04223	23.6804	75
80	23.0497	0.0434	0.00181	551.243	0.04181	23.9154	80
85	28.0435	0.0357	0.00148	676.088	0.04148	24.1085	85
90	34.1192	0.0293	0.00121	827.981	0.04121	24.2673	90
95	41.5112	0.0241	0.00099	1012.781	0.04099	24.3978	95
100	50.5048	0.0198	0.00081	1237.620	0.04081	24.5050	100

附表 1-6　5.00% 复利系数

	单次支付		均一数列支付				
n	复利终值 F/P	复利现值 P/F	偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	n
1	1.0500	0.9524	1.00001	1.000	1.05001	0.9524	1
2	1.1025	0.9070	0.48781	2.050	0.53781	1.8594	2
3	1.1576	0.8638	0.31721	3.152	0.36721	2.7232	3
4	1.2155	0.8227	0.23202	4.310	0.28202	3.5459	4
5	1.2763	0.7835	0.18098	5.526	0.23098	4.3294	5
6	1.3401	0.7462	0.14702	6.802	0.19702	5.0756	6
7	1.4071	0.7107	0.12282	8.142	0.17282	5.7863	7
8	1.4774	0.6768	0.10472	9.549	0.15472	6.4631	8
9	1.5513	0.6446	0.09069	11.026	0.14069	7.1077	9
10	1.6289	0.6139	0.07951	12.578	0.12951	7.7216	10
11	1.7103	0.5847	0.07039	14.207	0.12039	8.3063	11
12	1.7958	0.5568	0.06283	15.917	0.11283	8.8632	12
13	1.8856	0.5303	0.05646	17.713	0.10646	9.3935	13
14	1.9799	0.5051	0.05103	19.598	0.10102	9.8935	14
15	2.0789	0.4810	0.04634	21.578	0.09634	10.3796	15
16	2.1828	0.4581	0.04227	23.657	0.09227	10.8377	16
17	2.2920	0.4363	0.03870	25.840	0.08870	11.2740	17
18	2.4066	0.4155	0.03555	28.132	0.08555	11.6895	18
19	2.5269	0.3957	0.03275	30.538	0.08275	12.0852	19
20	2.6533	0.3769	0.03024	33.065	0.08024	12.4621	20
22	2.9252	0.3419	0.02597	38.504	0.07597	13.1629	22
24	3.2250	0.3101	0.02247	44.501	0.07247	13.7985	24
25	3.3863	0.2953	0.02095	47.726	0.07095	14.0938	25
26	3.5556	0.2812	0.01956	51.112	0.06956	14.3751	26
28	3.9200	0.2551	0.01712	58.401	0.06712	14.8980	28
30	4.3218	0.2314	0.01505	66.437	0.06505	15.3724	30
32	4.7648	0.2099	0.01328	75.297	0.06328	15.8026	32
34	5.2532	0.1904	0.01176	85.064	0.06176	16.1928	34
35	5.5159	0.1813	0.01107	90.318	0.06107	16.3741	35
36	5.7917	0.1727	0.01043	95.833	0.06043	16.5468	36
38	6.3853	0.1566	0.00928	107.706	0.05928	16.8678	38
40	7.0398	0.1420	0.00828	120.796	0.05828	17.1590	40
45	8.9847	0.1113	0.00626	159.694	0.05626	17.7740	45
50	11.4670	0.0872	0.00478	209.340	0.05478	18.2559	50
55	14.6350	0.0683	0.00367	272.701	0.05367	18.6334	55
60	18.6784	0.0535	0.00283	353.567	0.05283	18.9292	60
65	23.8388	0.0419	0.00219	456.775	0.05219	19.1610	65
70	30.4249	0.0329	0.00170	588.497	0.05170	19.3427	70
75	38.8306	0.0258	0.00132	756.611	0.05132	19.4849	75
80	49.5585	0.0202	0.00103	971.171	0.05103	19.5964	80
85	63.2504	0.0158	0.00080	1245.009	0.05080	19.6838	85
90	80.7251	0.0124	0.00063	1594.502	0.05063	19.7522	90
95	103.028	0.0097	0.00049	2040.552	0.05049	19.8059	95
100	131.492	0.0076	0.00038	2609.835	0.05038	19.8479	100

附表 1-7 6.00% 复利系数

n	单次支付 复利终值 F/P	单次支付 复利现值 P/F	均一数列支付 偿债基金 A/F	均一数列支付 年金终值 F/A	均一数列支付 资本回收 A/P	均一数列支付 年金现值 P/A	n
1	1.0600	0.9434	1.00001	1.000	1.06001	0.9434	1
2	1.1236	0.8900	0.48544	2.060	0.54544	1.8334	2
3	1.1910	0.8396	0.31411	3.184	0.37411	2.6730	3
4	1.2625	0.7921	0.22859	4.375	0.28859	3.4651	4
5	1.3382	0.7473	0.17740	5.637	0.23740	4.2123	5
6	1.4185	0.7050	0.14336	6.975	0.20336	4.9173	6
7	1.5036	0.6651	0.11914	8.394	0.17914	5.5823	7
8	1.5938	0.6274	0.10104	9.897	0.16104	6.2098	8
9	1.6895	0.5919	0.08702	11.491	0.14702	6.8017	9
10	1.7908	0.5584	0.07587	13.181	0.13587	7.3600	10
11	1.8983	0.5268	0.06679	14.971	0.12679	7.8868	11
12	2.0122	0.4970	0.05928	16.870	0.11928	8.3838	12
13	2.1329	0.4688	0.05296	18.882	0.11296	8.8526	13
14	2.2609	0.4423	0.04759	21.015	0.10759	9.2949	14
15	2.3965	0.4173	0.04296	23.276	0.10296	9.7122	15
16	2.5403	0.3936	0.03895	25.672	0.09895	10.1058	16
17	2.6927	0.3714	0.03545	28.212	0.09545	10.4772	17
18	2.8543	0.3503	0.03236	30.905	0.09236	10.8276	18
19	3.0256	0.3305	0.02962	33.759	0.08962	11.1581	19
20	3.2071	0.3118	0.02718	36.785	0.08718	11.4699	20
22	3.6035	0.2775	0.02305	43.392	0.08305	12.0415	22
24	4.0489	0.2470	0.01968	50.815	0.07968	12.5503	24
25	4.2918	0.2330	0.01823	54.864	0.07823	12.7833	25
26	4.5493	0.2198	0.01690	59.155	0.07690	13.0031	26
28	5.1116	0.1956	0.01459	68.527	0.07459	13.4061	28
30	5.7434	0.1741	0.01265	79.057	0.07265	13.7648	30
32	6.4533	0.1550	0.01100	90.888	0.07100	14.0840	32
34	7.2509	0.1379	0.00960	104.182	0.06960	14.3681	34
35	7.6860	0.1301	0.00897	111.433	0.06897	14.4982	35
36	8.1471	0.1227	0.00840	119.118	0.06839	14.6210	36
38	9.1541	0.1092	0.00736	135.901	0.06736	14.8460	38
40	10.2855	0.0972	0.00646	154.759	0.06646	15.0463	40
45	13.7643	0.0727	0.00470	212.738	0.06470	15.4558	45
50	18.4197	0.0543	0.00344	290.328	0.06344	15.7619	50
55	24.6496	0.0406	0.00254	394.160	0.06254	15.9905	55
60	32.9867	0.0303	0.00188	533.111	0.06188	16.1614	60
65	44.1435	0.0227	0.00139	719.059	0.06139	16.2891	65
70	59.738	0.0169	0.00103	967.897	0.06103	16.3845	70
75	79.0539	0.0126	0.00077	1300.899	0.06077	16.4558	75
80	105.792	0.0095	0.00057	1746.529	0.06057	16.5091	80
85	141.573	0.0071	0.00043	2342.881	0.06043	16.5489	85
90	189.456	0.0053	0.00032	3140.934	0.06032	16.5787	90
95	253.534	0.0039	0.00024	4208.902	0.06024	16.6009	95
100	339.285	0.0029	0.00018	5638.082	0.06018	16.6175	100

附表 1-8　7.00％复利系数

n	单次支付 复利终值 F/P	复利现值 P/F	均一数列支付 偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	n
1	1.0700	0.9346	1.00000	1.000	1.07000	0.9346	1
2	1.1449	0.8734	0.48310	2.070	0.55310	1.8080	2
3	1.2250	0.8163	0.31105	3.215	0.38105	2.6243	3
4	1.3108	0.7629	0.22523	4.440	0.29523	3.3872	4
5	1.4025	0.7130	0.17389	5.751	0.24389	4.1002	5
6	1.5007	0.6663	0.13980	7.153	0.20980	4.7665	6
7	1.6058	0.6228	0.11555	8.654	0.18555	5.3893	7
8	1.7182	0.5820	0.09747	10.260	0.16747	5.9713	8
9	1.8385	0.5439	0.08349	11.978	0.15349	6.5152	9
10	1.9671	0.5084	0.07238	13.816	0.14238	7.0236	10
11	2.1048	0.4751	0.06636	15.784	0.11336	7.4987	11
12	2.2522	0.4440	0.05590	17.888	0.12590	7.9427	12
13	2.4098	0.4150	0.04965	20.141	0.11965	8.3576	13
14	2.5785	0.3878	0.04435	22.550	0.11435	8.7454	14
15	2.7590	0.3624	0.03979	25.129	0.10979	9.1079	15
16	2.9521	0.3387	0.03586	27.888	0.10586	9.4466	16
17	3.1588	0.3166	0.03243	30.840	0.10243	9.7632	17
18	3.3799	0.2959	0.02911	33.999	0.09941	10.0591	18
19	3.6165	0.2765	0.02675	37.379	0.09675	10.3356	19
20	3.8697	0.2584	0.02439	40.995	0.09439	10.5940	20
22	4.4304	0.2257	0.02041	49.005	0.09041	11.0612	22
24	5.0723	0.1971	0.01719	58.176	0.08719	11.4693	24
25	5.4274	0.1843	0.01581	63.248	0.08581	11.6536	25
26	5.8073	0.1722	0.01456	68.676	0.08456	11.8258	26
28	6.6488	0.1504	0.01239	80.697	0.08239	12.1371	28
30	7.6122	0.1314	0.01059	94.460	0.08059	12.4090	30
32	8.7152	0.1147	0.00907	110.217	0.07907	12.6465	32
34	9.9780	0.1002	0.00780	128.257	0.07780	12.8540	34
35	10.6765	0.0937	0.00723	138.235	0.07723	12.9477	35
36	11.4238	0.0875	0.00672	148.912	0.07672	13.0352	36
38	13.0791	0.0765	0.00580	172.559	0.07580	13.1935	38
40	14.9743	0.0668	0.00501	199.633	0.07501	13.3317	40
45	21.0022	0.0476	0.00350	285.745	0.07350	13.6055	45
50	29.4566	0.0339	0.00246	406.523	0.07246	13.8008	50
55	41.3143	0.0242	0.00174	575.919	0.07174	13.9399	55
60	57.9454	0.0173	0.00123	813.506	0.07123	14.0392	60
65	81.2713	0.0123	0.00087	1146.734	0.07087	14.1099	65
70	113.987	0.0088	0.00062	1614.102	0.07062	14.1604	70
75	159.873	0.0063	0.00044	2269.609	0.07044	14.1964	75
80	224.229	0.0045	0.00031	3188.990	0.07031	14.2220	80
85	314.493	0.0032	0.00032	4478.465	0.07022	14.2403	85
90	441.092	0.0023	0.00016	6287.020	0.07016	14.2533	90
95	618.653	0.0016	0.00011	8823.613	0.07011	14.2626	95
100	867.691	0.0012	0.00008	12381.300	0.07008	14.2693	100

附表 1-9　8.00%复利系数

n	单次支付 复利终值 F/P	单次支付 复利现值 P/F	均一数列支付 偿债基金 A/F	均一数列支付 年金终值 F/A	均一数列支付 资本回收 A/P	均一数列支付 年金现值 P/A	n
1	1.08000	0.9259	1.00000	1.000	1.0800	0.9259	1
2	1.1664	0.8573	0.48077	2.080	0.56077	1.7833	2
3	1.2597	0.7938	0.30803	3.246	0.38803	2.5771	3
4	1.3605	0.7350	0.22192	4.506	0.30192	3.3121	4
5	1.4693	0.6806	0.17046	5.867	0.25046	3.9927	5
6	1.5869	0.6302	0.13632	7.336	0.21632	4.6229	6
7	1.7138	0.5835	0.11207	8.923	0.19207	5.2064	7
8	1.8509	0.5403	0.09401	10.637	0.17401	5.7466	8
9	1.9990	0.5002	0.08008	12.488	0.16008	6.2469	9
10	2.1589	0.4632	0.06903	14.487	0.14903	6.7101	10
11	2.3316	0.4289	0.06008	16.645	0.14008	7.1390	11
12	2.5182	0.3971	0.05270	18.977	0.13270	7.5361	12
13	2.7196	0.3677	0.04652	21.495	0.12652	7.9038	13
14	2.9372	0.3405	0.04130	24.215	0.12130	8.2442	14
15	3.1722	0.3152	0.03683	27.152	0.11683	8.5595	15
16	3.4259	0.2919	0.03298	30.324	0.11298	8.8514	16
17	3.7000	0.2703	0.02963	33.750	0.10963	9.1216	17
18	3.9960	0.2502	0.02670	37.450	0.10670	9.3719	18
19	4.3157	0.2317	0.02413	41.446	0.10413	9.6036	19
20	4.6609	0.2145	0.02185	45.762	0.10185	9.8181	20
22	5.4365	0.1839	0.01803	55.457	0.09803	10.2007	22
24	6.3412	0.1577	0.01498	66.765	0.09498	10.5288	24
25	6.8485	0.1460	0.01368	73.106	0.09368	10.6748	25
26	7.3963	0.1352	0.01251	79.954	0.09251	10.8100	26
28	8.6271	0.1159	0.01049	95.339	0.09049	11.0511	28
30	10.0626	0.0994	0.00883	113.283	0.08883	11.2578	30
32	11.7371	0.0852	0.00745	134.213	0.08745	11.4350	32
34	13.6901	0.0730	0.00630	158.626	0.08630	11.5869	34
35	14.7853	0.0676	0.00580	172.316	0.08580	11.6546	35
36	15.9681	0.0626	0.00534	187.102	0.08534	11.7172	36
38	18.6252	0.0537	0.00454	220.315	0.08454	11.8289	38
40	21.7245	0.0460	0.00386	259.056	0.08386	11.9246	40
45	31.9203	0.0313	0.00259	386.504	0.08259	12.1084	45
50	46.9104	0.0213	0.00174	573.768	0.08174	12.2335	50
55	68.9136	0.0145	0.00118	848.920	0.08118	12.3186	55
60	101.257	0.0099	0.00080	1253.208	0.08080	12.3766	60
65	148.779	0.0067	0.00054	1847.240	0.08054	12.4160	65
70	218.605	0.0046	0.00037	2720.067	0.08037	12.4428	70
75	321.203	0.0031	0.00025	4002.534	0.08025	12.4611	75
80	471.952	0.0021	0.00017	5886.902	0.08017	12.4735	80
85	693.452	0.0014	0.00012	8655.652	0.08012	12.4820	85
90	1018.908	0.0010	0.00018	12723.850	0.08008	12.4877	90
95	1497.110	0.0007	0.00005	18701.380	0.08005	12.4917	95
100	2199.746	0.0005	0.00004	27484.320	0.08004	12.4943	100

附表 1-10　9.00％复利系数

n	单次支付		均一数列支付				n
	复利终值 F/P	复利现值 P/F	偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	
1	1.0900	0.9174	1.00001	1.000	1.09001	0.9174	1
2	1.1881	0.8417	0.47847	2.090	0.56847	1.7591	2
3	1.2950	0.7722	0.30506	3.278	0.39506	2.5313	3
4	1.4116	0.7084	0.21867	4.573	0.30867	3.2397	4
5	1.5386	0.6499	0.16709	5.985	0.25709	3.8896	5
6	1.6771	0.5963	0.13292	7.523	0.22292	4.4859	6
7	1.8280	0.5470	0.10869	9.200	0.19869	5.0329	7
8	1.9926	0.5019	0.09068	11.028	0.18068	5.5348	8
9	2.1719	0.4604	0.07680	13.021	0.16680	5.9952	9
10	2.3673	0.4224	0.06582	15.193	0.15582	6.4176	10
11	2.5804	0.3875	0.05695	17.560	0.14695	6.8052	11
12	2.8126	0.3555	0.04965	20.140	0.13965	7.1607	12
13	3.0658	0.3262	0.04357	22.953	0.13357	7.4869	13
14	3.3417	0.2992	0.03843	26.019	0.12843	7.7861	14
15	3.6424	0.2745	0.03406	29.360	0.12406	8.0607	15
16	3.9703	0.2519	0.03030	33.003	0.12030	8.3125	16
17	4.3276	0.2311	0.02705	36.973	0.11705	8.5436	17
18	4.7171	0.2120	0.02421	41.301	0.11421	8.7556	18
19	5.1416	0.1945	0.02173	46.018	0.11173	8.9501	19
20	5.6943	0.1784	0.01955	51.159	0.10955	9.1285	20
22	6.6585	0.1502	0.01591	62.872	0.10591	9.4424	22
24	7.9109	0.1264	0.01302	76.788	0.10302	9.7066	24
25	8.6229	0.1160	0.01181	84.699	0.10121	9.8226	25
26	9.3990	0.1064	0.01072	93.322	0.10072	9.9290	26
28	11.1669	0.0896	0.00885	112.966	0.09885	10.1161	28
30	13.2674	0.0754	0.00734	136.304	0.09734	10.2736	30
32	15.7630	0.0634	0.00610	164.033	0.09610	10.4062	32
34	18.7279	0.0534	0.00508	196.977	0.09508	10.5178	34
35	20.4134	0.0490	0.00464	215.705	0.09464	10.5668	35
36	22.2506	0.0449	0.00424	236.118	0.09424	10.6118	36
38	26.4359	0.0378	0.00354	282.621	0.09354	10.6908	38
40	31.4085	0.0318	0.00296	337.872	0.09296	10.7574	40
45	48.3257	0.0207	0.00190	525.841	0.09190	10.8812	45
50	73.3548	0.0134	0.00123	815.053	0.09123	10.9617	50
55	114.404	0.0087	0.00079	1260.041	0.09079	11.0140	55
60	176.024	0.0057	0.00051	1944.707	0.09051	11.0480	60
65	270.833	0.0037	0.00033	2998.146	0.09033	11.0701	65
70	416.708	0.0024	0.00022	4618.984	0.09022	11.0845	70
75	641.156	0.0016	0.00014	7112.840	0.09014	11.0938	75
80	986.494	0.0010	0.00009	10949.930	0.09009	11.0999	80
85	1517.837	0.0007	0.00006	16853.750	0.09006	11.1038	85
90	2335.372	0.0004	0.00004	25937.470	0.09004	11.1064	90
95	3593.246	0.0003	0.00003	39913.870	0.09002	11.1080	95
100	5528.633	0.0002	0.00002	61418.200	0.09002	11.1091	100

附表 1-11 10.00%复利系数

	单次支付		均一数列支付				
n	复利终值 F/P	复利现值 P/F	偿债基金 A/F	年金终值 F/A	资本回收 A/P	年金现值 P/A	n
1	1.1000	0.9091	1.00000	1.0001	0.9091	1	
2	1.2100	0.8264	0.47619	2.100	0.57619	1.7355	2
3	I.3310	0.7513	0.30212	3.310	0.40212	2.4868	3
4	1.4641	0.6830	0.21547	4.641	0.31547	3.1698	4
5	1.6105	0.6209	0.16380	6.105	0.26380	3.7908	5
6	1.7716	0.5645	0.12961	7.716	0.22961	4.3552	6
7	1.9487	0.5132	0.10541	9.487	0.20541	4.8684	7
8	2.1436	0.4665	0.08744	11.436	0.18744	5.3349	8
9	2.3579	0.4241	0.07364	13.579	0.17364	5.7590	9
10	2.5937	0.3855	0.06275	15.937	0.16275	6.1445	10
11	2.8531	0.3505	0.05396	18.531	0.15396	6.4950	11
12	3.1384	0.3186	0.04676	21.384	0.14676	6.8137	12
13	3.4522	0.2897	0.04078	24.522	0.14078	7.1033	13
14	3.7975	0.2633	0.03575	27.975	0.13575	7.3667	14
15	4.1772	0.2394	0.03147	31.772	0.13147	7.6061	15
16	4.5949	0.2176	0.02782	35.949	0.12782	7.8237	16
17	5.0544	0.1978	0.02466	40.544	0.12466	8.0215	17
18	5.5599	0.1799	0.02193	45.599	0.12193	8.2014	18
19	6.1158	0.1635	0.01955	51.159	0.11955	8.3649	19
20	6.7274	0.1486	0.01746	57.274	0.11746	8.5136	20
22	8.1402	0.1228	0.01401	71.402	0.11401	8.7715	22
24	9.8496	0.1015	0.01130	88.496	0.11130	8.9847	24
25	10.8346	0.0923	0.01017	98.346	0.11017	9.0770	25
26	11.9180	0.0839	0.00916	109.180	0.10916	9.1609	26
28	14.4208	0.0693	0.00745	134.208	0.10745	9.3066	28
30	17.4491	0.0573	0.00608	164.491	0.10608	9.4269	30
32	21.1134	0.0474	0.00497	201.134	0.10497	9.5264	32
34	25.5472	0.0391	0.00407	245.472	0.10407	9.6086	34
35	28.1019	0.0356	0.00369	271.019	0.10369	9.6442	35
36	30.9121	0.0323	0.00334	299.121	0.10334	9.6765	36
38	37.4036	0.0267	0.00275	364.036	0.10275	9.7327	38
40	45.2583	0.0221	0.00226	442.583	0.10226	9.7791	40
45	72.8688	0.0137	0.00139	718.888	0.10139	9.8628	45
50	117.388	0.0085	0.00086	1163.878	0.10086	9.9148	50
55	189.054	0.0053	0.00053	1880.538	0.10053	9.9471	55
60	304.472	0.0033	0.00033	3034.720	0.10033	9.9672	60
65	490.354	0.0020	0.00020	4893.539	0.10020	9.9796	65
70	789.718	0.0013	0.00013	7887.180	0.10013	9.9873	70
75	1271.846	0.0008	0.00008	12708.460	0.10008	9.9921	75
80	2048.315	0.0005	0.00005	20473.160	0.10005	9.9951	80
85	3298.823	0.0003	0.00003	32978.240	0.10003	9.9970	85
90	5312.773	0.0002	0.00002	53117.770	0.10002	9.9981	90
95	8556.250	0.0001	0.00001	85552.500	0.10001	9.9988	95

附表 I-12 12.00%复利系数

n	单次支付 复利终值 F/P	单次支付 复利现值 P/F	均一数列支付 偿债基金 A/F	均一数列支付 年金终值 F/A	均一数列支付 资本回收 A/P	均一数列支付 年金现值 P/A	n
1	1.1200	0.8929	1.00000	1.000	1.12000	0.8929	1
2	1.2544	0.7972	0.47170	2.120	0.59170	1.6900	2
3	1.4049	0.7118	0.29635	3.374	0.41635	2.4018	3
4	1.5735	0.6355	0.20923	4.779	0.32923	3.0373	4
5	1.7623	0.5674	0.15741	6.353	0.27741	3.6048	5
6	1.9738	0.5066	0.12323	8.115	0.24323	4.1114	6
7	2.2107	0.4523	0.09912	10.089	0.21912	4.5638	7
8	2.4760	0.4039	0.08130	12.300	0.20130	4.9676	8
9	2.7731	0.3606	0.06768	14.776	0.18768	5.3283	9
10	3.1058	0.3220	0.05698	17.549	0.17698	5.6502	10
11	3.4785	0.2875	0.04842	20.655	0.16842	5.9377	11
12	3.8960	0.2567	0.04144	24.133	0.16144	6.1944	12
13	4.3635	0.2292	0.03568	28.029	0.15568	6.4236	13
14	4.8871	0.2046	0.03087	32.393	0.15087	6.6282	14
15	5.4736	0.1827	0.02682	37.280	0.14682	6.8109	15
16	6.1304	0.1631	0.02339	42.753	0.14339	6.9740	16
17	6.8660	0.1456	0.02046	48.884	0.14046	7.1196	17
18	7.6900	0.1300	0.01794	55.750	0.13794	7.2497	18
19	8.6127	0.1161	0.01576	63.440	0.13576	7.3658	19
20	9.6463	0.1037	0.01388	72.052	0.13388	7.4695	20
22	12.1003	0.0826	0.01081	92.502	0.13081	7.6446	22
24	15.1786	0.0659	0.00846	118.155	0.12846	7.7843	24
25	17.0000	0.0588	0.00750	133.334	0.12750	7.8431	25
26	19.0400	0.0525	0.00665	150.333	0.12665	7.8957	26
28	23.8838	0.0419	0.00524	190.693	0.12524	7.9844	28
30	29.9598	0.0334	0.00414	241.332	0.12414	8.0552	30
32	37.5816	0.0266	0.00328	304.847	0.12328	8.1116	32
34	47.1423	0.0212	0.00260	384.520	0.12260	8.1566	34
35	52.7994	0.0189	0.00232	431.662	0.12232	8.1755	35
36	59.1353	0.0169	0.00206	484.461	0.12206	8.1924	36
38	74.1794	0.0135	0.00164	609.828	0.12164	8.2210	38
40	93.0506	0.0107	0.00130	767.088	0.12130	8.2438	40
45	163.987	0.0061	0.00074	1358.225	0.12074	8.2825	45
50	289.000	0.0035	0.00042	2400.006	0.12042	8.3045	50

附录 2

附表 2-1：当 $x\leqslant 0$ 时 $N(x)$ 表

这个表表示了当 $x\leqslant 0$ 时 $N(x)$的值。使用这张表时可与内插法结合起来使用。例如：

$$
\begin{aligned}
N(-0.1234) &= N(-0.12) - 0.34[N(-0.12) - N(-0.13)] \\
&= 0.4522 - 0.34 \times (0.4522 - 0.4483) \\
&= 0.4509
\end{aligned}
$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−3.0	0.0014	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
−3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
−3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
−3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
−3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
−4.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

附表 2-1：当 $x \geqslant 0$ 时 $N(x)$ 表

这个表表示了当 $x \geqslant 0$ 时 $N(x)$的值。使用这张表时可与内插法结合起来使用。例如：

$$N(0.6278) = N(0.62) + 0.78[N(0.63) - N(0.62)]$$
$$= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324)$$
$$= 0.7350$$

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	*0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

参考书目

1　洪毅等.经济数学模型.广州:华南理工大学出版社,1998.6
2　贺存森.技术经济学.长沙:中南工业大学出版社,1994.6
3　张德之.统计学原理与金融统计.北京:中国金融出版社,1993.2
4　[美]巴扎拉等.非线性规划.贵阳:贵州人民出版社,1986.6
5　胡运权.运筹学教程.北京:清华大学出版社,1998.6
6　姚长辉.商业银行信贷与投资.北京:经济日报出版社,1997.3
7　朱元.证券投资学原理.上海:立信会计出版社,1995.10
8　[美]约翰·赫尔.期权、期货与衍生证券.张陶伟译.北京:华夏出版社,1997.6
9　戴晓凤等.证券投资分析与组合管理.北京:中国金融出版社,1997.6
10　刘志强.现代资产组合理论与资本市场均衡模型.北京:经济科学出版社,1998.3
11　刘金宝.金融工程核心工具——期权.上海:文汇出版社,1997.10
12　宋威.二次规划的旋转迭代算法及其在风险管理中的应用.运筹与管理,1999(2)
13　宋威.弱 Lipschiz 函数的广义次梯度的性质及在最优化理论中的应用.长沙电力学院学报,1999(3)
14　张金水.数理经济学.北京:清华大学出版社,1996.8
15　汪国强.数学建模优秀案例选编.广州:华南理工大学出版社,1998.8
16　朱求长.运筹学及其应用.武汉:武汉大学出版社,1997.12
17　刘波.中国证券市场分析.上海:学林出版社,1998.3
18　俞卫.股票的现货市场与期货市场的动态关系.北京:财政经济出版社,1998.2
19　宋华.现代期货制度及其效率.北京:冶金工业出版社,1997.3
20　杨廷干.投资决策量化方法研究.北京:中国财政经出版社,1998.8
21　郑骏.组合证券投资最优化模型的研究.预测,1996(1)
22　唐小我,曹长修.组合证券投资有效边界的研究.预测,1993(1)

23 雷福民.含无风险证券的组合投资的有效边界.预测,1997(4)
24 徐大江.研究证券均衡定价与风险分析的多目标线性规划模型.系统工程理论与实践,1997(2)
25 张卫中.不相关资产组合投资优化模型及实证分析.系统工程理论与实践,1998(4)
26 李楚霖.分离定理和对上海股市的CAPM实证分析.数理统计与管理,1994(2)
27 刘娉.投资学.广州:中山大学出版社,
28 葛开明.现代证券投资学.上海:世界图书出版公司,1998.1