Задача 1.

$$|R_1 - R_2| << R_{1,2}$$

$\hat{H}(r,\varphi) = \hat{H}_s(\varphi) + \hat{H}_f(r,\varphi)$ - адиабат разделение переменных.

$$\hat{H}_s(\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2mR_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2, \quad \hat{H}_f(r,\varphi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2$$

Зафикс полож медл. подсист и решим для быстрой:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \psi(r,\varphi) = \varepsilon^{(f)}(\varphi)\,\psi(r,\varphi); \quad k(\varphi) = \frac{2m\,\varepsilon^{s}(\varphi)}{\hbar^2} \Rightarrow$$

реш: с гран усл.

$$\Rightarrow \quad \psi(r,\varphi) = A(\varphi)\sin\big(k(\varphi)(r-R_2)\big).$$

$h(\varphi) = (R_1 - R_2)(1+\cos\varphi)$ - длина отрезка в полости между цилиндрами идущего под углом φ.

$$\Delta = R_1 - R_2.$$

$$\psi(R_2 + h(\varphi), \varphi) = 0 \Rightarrow k_N(\varphi) = \frac{\pi N}{(1+\cos\varphi)\Delta} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ После нормирования $\psi_N^{(f)} = \sqrt{\dfrac{2}{\Delta(1+\cos\varphi)}}\sin\left(\dfrac{\pi N(r-R_2)}{(1+\cos\varphi)\Delta}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_N(\varphi) = \left(\frac{\pi N}{(1+\cos\varphi)\Delta}\right)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2mR_2^2}\frac{d^2\psi_N(\varphi)}{d\varphi^2} + \frac{\hbar^2\pi^2N^2}{2m\Delta^2(1+\cos\varphi)^2}\psi_N(\varphi) = E_N^{(s)}\psi_N(\varphi)$$

Раскладывая по малому φ получаем гарм осциллятор

В итоге: $$E_{N,n} = \frac{\hbar^2 \pi^2 N^2}{8m(R_1-R_2)^2} + \frac{\hbar^2 \pi N}{2\sqrt{2}\, m R_1 (R_1-R_2)}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Задача 3

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 - \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 - \frac{1}{2M}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^2 + \underbrace{U(x_1, x_2, X)}_{U(x_1,X)+U(x_2,X)}.$$

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{2M}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^2; \quad \hat{H}_f = \hat{H} - \hat{H}_s.$$

В ф для $\hat{H}_f$:

$$\psi_{1,N_1} = \sqrt{\frac{2}{X}}\sin\left(\frac{\pi N_1}{X}x_1\right);$$

$$\psi_{2,N_2} = \sqrt{\frac{2}{L-X}}\sin\left(\frac{\pi N_2}{L-X}(L-x_2)\right);$$

$$\psi_{N_1,N_2}(x_1,x_2,y) = \frac{2}{\sqrt{y(N-y)}}\sin\left(\frac{\pi N_1}{y}x_1\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi N_2}{L-y}(L-x_2)\right)$$

$$\mathcal{E}^f_{N_1,N_2} = \frac{\pi^2}{2m}\left(\frac{N_1^2}{x^2} + \frac{N_2^2}{(L-x)^2}\right).$$

Эфф-ная пот. эн для медленной подсистемы.

$$\hat{H}_s^{eff}(X) = \frac{\hat{p}_x^2}{2M} + \frac{\pi^2}{2m}\left(\frac{N_1^2}{x^2} + \frac{N_2^2}{(L-x)^2}\right).$$ – минимум в т. $$x_0 = \frac{L}{1+(N_2/N_1)^{2/3}}.$$

$$u''_{eff}(x_0) = \frac{3\pi^2}{mL^4}\left(N_1^2\left(1+\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{2/3}\right)^4 + N_2^2\left(1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{2/3}\right)^4\right). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{N_1,N_2,n} = \sqrt{u''_{eff}(x_0)}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi^2}{2mL^2}\left(N_1^2\left(1+\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{2/3}\right)^2 + N_2^2\left(1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^{2/3}\right)^2\right)$$

Задача 4.

$$\hat{H} = -\frac{1}{2mR^2}\partial_\varphi^2 - \mu_B B\left(\cos\varphi\,\hat{\sigma}_x + \sin\varphi\,\hat{\sigma}_y\right).$$

$$\mu_B B \gg \frac{1}{mR^2}$$

$$\hat{H} = \overbrace{-\frac{1}{2mR^2}\left(\frac{d}{d\varphi}\right)^2}^{=\hat{H}_s} \overbrace{-\mu_0 B\begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}}^{=\hat{H}_f}.$$

$$\hat{H}_s\,|\psi^{(s)}\rangle = \varepsilon^{(s)}\,|\psi^{(s)}\rangle$$

$$\varepsilon_-^{(s)} = -\mu_0 B_0, \quad \varepsilon_+^{(s)} = \mu_0 B_0$$

$$|\psi_-^{(s)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\psi_+^{(s)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$|\psi(\varphi)\rangle = f_+(\varphi)\,|\psi_+^{(s)}\rangle + f_-(\varphi)\,|\psi_-^{(s)}\rangle$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}|\psi(\varphi)\rangle = f_+''(\varphi)|\psi_+^{(s)}\rangle + 2f_+'\,|\psi_+^{(s)}\rangle' + f_+\,|\psi_+\rangle'' +$$

$$+ f_-''\,|\psi_-\rangle + 2f_-'\,|\psi_-\rangle' + f_-\,|\psi_-\rangle''.$$

Подставим в гамильтониан

$$\begin{cases} f_+'' + i f' - \frac{1}{2} f_+ - i f'_- e^{-2i\varphi} - \frac{f_-}{2} e^{-2i\varphi} + 2mR^2 \mu_0 B f_+ = -2mR^2 E f_+ \\ f_-'' - i f'_- - \frac{1}{2} f_- + i f'_- e^{2i\varphi} - \frac{f_+}{2} e^{2i\varphi} - 2mR^2 \mu_0 B f_- = -2mR^2 E f_- \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f_\pm(\varphi) = \alpha_\pm \, e^{i\omega_\pm \varphi}$$

гран усл:

$$\begin{cases} |\psi(0)\rangle = |\psi(2\pi)\rangle \\ |\psi(0)\rangle' = |\psi(2\pi)\rangle' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_\pm(0) = f_\pm(2\pi) \\ f'_\pm(0) = f'_\pm(2\pi) \end{cases} \rightarrow \omega_\pm = n_\pm \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} \alpha_+ \left(n_+^2 - n_+ - \frac{1}{2} + 2mR^2 \mu_0 B + 2mR^2 E\right) + \alpha_- \left(n_- - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ \alpha_- \left(n_-^2 + n_- - \frac{1}{2} - 2mR^2 \mu_0 B + 2mR^2 E\right) - \alpha_+ \left(n_+ + \frac{1}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left((n+2)^2 - n - \frac{5}{2} + 2mR^2 \mu_0 B + 2mR^2 E\right)\left(n^2 + n - \frac{1}{2} - 2mR^2 \mu_0 B + 2mR^2 E\right) =$$

$$= -\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad // \text{ приб-е } \quad \begin{matrix} 2mR^2 \mu_0 B \gg 1 \\ n \ll \sqrt{2mR^2 \mu_0 B} \end{matrix} \quad // \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \pm \mu_0 B \mp \frac{\left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{5}{2}\right)}{4 m^2 R^4 \mu_0 B}.$$