Упражнение 1.

$$U(x) = -\frac{\varkappa}{m}\left[\delta\left(x + \frac{L(t)}{2}\right) + \delta\left(x - \frac{L(t)}{2}\right)\right] \xrightarrow{t\to\infty} U(x) = -\frac{2\varkappa}{m}\delta(x)$$

Из задачи №3 3-го дз при $L \to \infty$ реализуется тунельный режим =>

=> $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_{\text{чёт}} + \psi_{\text{нечёт}}\right)$

Нечётное сост $\exists$ только при $\varkappa L \geq 1$ => при $L \to 0$ останется только чётное решение

По адиабат теореме: $\psi_{\text{чёт}}(t) \propto \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{\text{чёт}}(0)$ =>

=> $p = \frac{1}{2}$.

Упражнение 2.

$a(t) = a(1 - \alpha\sin^2\omega t)$, $\alpha < 1$

Уровни энергии в беск. глубокой яме:

$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2ma^2}$; $\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(2n+1) \geq \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ =>

=> критерий адиабатичности — $\Delta E \gg \omega$ => $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \gg \omega$

Задача 1.

$$\hat{H} = -\mu \vec{B}\cdot\vec{\sigma}, \quad \vec{B}(t) = B\left(0, \frac{1}{\cosh t\omega}, -\tanh \omega t\right), \quad \omega \ll \mu B$$

$$\hat{H} = -\mu \vec{B}\cdot\vec{\sigma} = \mu B \begin{pmatrix} \tanh \omega t & \frac{i}{\cosh(\omega t)} \\ -\frac{i}{\cosh(\omega t)} & -\tanh \omega t \end{pmatrix}. \quad \text{С.З. этой}$$

матрицы — $E_\pm = \pm \mu B$.

$$\text{С.В.: } |\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{\pm 2\omega t}}} \begin{pmatrix} \pm i e^{\pm\omega t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

при $t \to -\infty$ $C_- = 1$, $C_+ = 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_-(T \to \infty) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(i \int_0^t \omega_{+-}(\tau)\, d\tau\right) \frac{\langle \psi_+ | \partial_t \hat{H} | \psi_- \rangle}{\omega_{+-}(t)} dt$$

$$\omega_{+-} = E_+ - E_- = 2\mu B$$

$$\partial_t(\hat{H}) = \frac{\mu B \omega}{\cosh^2 \omega t} \begin{pmatrix} 1 & -i \sinh \omega t \\ i \sinh \omega t & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \psi_+ | \partial_t \hat{H} | \psi_- \rangle =$$

$$= -\frac{\mu B \omega}{\cosh \omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_-(T \to \infty) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\exp(2 i \mu B t)}{2\cosh(\omega t)} \omega\, dt = -\int_{\mathbb{R}} dx \frac{\exp\left(i \frac{2\mu B x}{\omega}\right)}{2\cosh(x)}$$

Нули знаменателя — $z_k = \pi i \left(\frac{1}{2} + k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Возьмем только первый полюс: $z = \frac{\pi i}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad C_-(T\to\infty) = -2\pi i \operatorname*{res}_{x=\frac{\pi i}{2}} \frac{\exp\left(i\frac{2\mu B x}{\omega}\right)}{2\cosh(x)} = -\pi \exp\left(-\frac{\pi\mu B}{\omega}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P = \pi^2 \exp\left(-\frac{2\pi\mu B}{\omega}\right)$$

Задача 3.

В.ф. внутри ящика:

$$\psi_{nm} = \frac{2}{L} \sin\left(k_n\left(x+\frac{L}{2}\right)\right) \sin\left(k_m\left(y+\frac{L}{2}\right)\right).$$

$$|1,0\rangle = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}y\right), \quad |0,1\rangle = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}y\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right).$$

$$\begin{cases} x_\theta = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_\theta = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} |1,0\rangle = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x\cos\theta - y\sin\theta)\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}(x\sin\theta + y\cos\theta)\right) \\ |0,1\rangle = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi}{L}(x\sin\theta + y\cos\theta)\right)\cos\left(\frac{\pi}{L}(x\cos\theta - y\sin\theta)\right). \end{array}$$

Уравнение для дин. фазы.

$$i\partial_\theta C_n(\theta) = -i\sum_m \exp\left(i\int \omega_{nm}(\tilde{\tau})d\tilde{\tau}\right)\langle n(\theta)|\partial_\theta|m(\theta)\rangle C_m(\theta), \quad \omega_{nm} = E_n - E_m = 0$$

$$\partial_\theta C_n(\theta) = -\sum_m \langle n(\theta)|\partial_\theta|m(\theta)\rangle C_m(\theta).$$

$$\begin{cases} \partial_\theta C_1(\theta) = -\langle 1,0|\partial_\theta|1,0\rangle C_1(\theta) - \langle 1,0|\partial_\theta|0,1\rangle C_2(\theta), \\ \partial_\theta C_2(\theta) = -\langle 0,1|\partial_\theta|1,0\rangle C_1(\theta) - \langle 0,1|\partial_\theta|0,1\rangle C_2(\theta). \end{cases}$$

$\langle 1,0|\partial_\theta|1,0\rangle = \langle 0,1|\partial_\theta|0,1\rangle =$ // в силу интегрирования чётной и нечётной ф-ций // $= 0$.

$$\langle 1,0 | \partial_\theta | 0,1 \rangle = -\langle 0,1 | \partial_\theta | 1,0 \rangle = \frac{256}{27\pi^2} = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_\theta\, C_1(\theta) = \frac{256}{27\pi^2}\, C_2(\theta) & , \ C_1(0) = \psi_1 \\ \partial_\theta\, C_2(\theta) = \frac{256}{27\pi^2}\, C_1(\theta) & , \ C_2(0) = \psi_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1(\theta) = \psi_1 \cos(\alpha\theta) - \psi_2 \sin(\alpha\theta) \\ C_2(\theta) = \psi_2 \cos(\alpha\theta) + \psi_1 \sin(\alpha\theta) \end{cases} \Rightarrow |\psi(\pi)\rangle = C_1(2\pi)\,|1,0\rangle +$$

$$+ C_2(2\pi)\,|0,1\rangle.$$