Разбор теоретической части

(1) $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

а) $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2) =$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\overline{X} + \overline{X}^2 = \overline{X^2} - 2(\overline{X})^2 + (\overline{X})^2 =$

$= \overline{X^2} - \overline{X}^2$

Покажем, что это состоятельная оценка σ^2

$\overline{X} \xrightarrow{P_\theta} E_\theta X_1$ (по [illegible] 3Б4) т.е. $\overline{X}$ – СО $E_\theta X_1$.

$\overline{X^2} \xrightarrow{P_\theta} E_\theta X_1^2$ (по [illegible] 3Б4. Рассматриваем выборку $X_1^2, \ldots, X_n^2$

$\overline{X^2} = \frac{X_1^2 + \ldots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P_\theta} E_\theta X_1^2$)

т.е. $\overline{X^2}$ – СО $E_\theta X_1^2$

Функция $f(x) = x^2$ непрерывна (на всем $\mathbb{R}$)

$\Downarrow$

по теореме о наследовании сходимостей (свойств)

$f(\overline{X})$ – СО $f(E_\theta X_1)$, т.е. $(\overline{X})^2$ – СО $(E_\theta X_1)^2$.

Опять же, по теореме о наследовании (функция $\varphi(x,y) = x - y$ непрерывна)

$\overline{X^2} - (\overline{X})^2$ – состоятельная оценка

$E_\theta X_1^2 - (E_\theta X_1)^2 = D_\theta X_1 = \sigma^2$ ч.т.д.

b) $$E_\theta \overline{X^2} = E_\theta \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \underset{\text{линейность мат. ож.}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E_\theta X_i^2 \underset{\text{все } X_i \text{ одинаково распределены}}{=} \frac{n E_\theta X_1^2}{n} = E_\theta X_1^2$$

$$E_\theta \overline{X}^2 = E_\theta\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)^2 = E_\theta \frac{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n X_i X_j}{n^2} \underset{\text{линейность}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n E_\theta X_i X_j}{n^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n E_\theta X_i^2}{n^2} + \frac{\sum_{i\neq j} E_\theta X_i X_j}{n^2} \underset{\text{од. расп.}}{=} \frac{n E_\theta X_1^2}{n^2} + \frac{(n-1)n(E_\theta X_1)^2}{n^2} =$$

$$X_i \perp\!\!\!\perp X_j \Rightarrow E_\theta X_i X_j = E_\theta X_i \cdot E_\theta X_j = (E_\theta X_1)^2$$

$$= \frac{E_\theta X_1^2}{n} + \frac{n-1}{n}(E_\theta X_1)^2$$

Значит, $$E_\theta S^2 \underset{\text{линей.}}{=} E_\theta \overline{X^2} - E_\theta(\overline{X})^2 = E_\theta X_1^2 - \frac{E_\theta X_1^2}{n} - \frac{n-1}{n}(E_\theta X_1)^2 =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(E_\theta X_1^2 - (E_\theta X_1)^2\right) = \frac{n-1}{n} D_\theta X_1 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$$

Оценка смещенная.

c*) Рассмотрим выборку случайных векторов $\xi_1, \dots, \xi_n$, где $\xi_i = \begin{pmatrix} X_i^2 \\ X_i \end{pmatrix}$

Пусть $a_1 = E_\theta X_1$, $a_2 = E_\theta X_1^2 \Rightarrow a = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = E_\theta \xi_i$

Согласно многомерной ЦПТ если $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$

$$\frac{S_n - na}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d_\theta} \eta \sim \mathcal{N}(\vec{0}, \Sigma(\theta)),$$ где $\Sigma(\theta)$ - матрица ковариаций

или, эквивалентно (перейти к среднему)

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \overline{X^2} \\ \overline{X} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{N}(0, \Sigma(\theta))$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{pmatrix} D_\theta X_1^2 & cov_\theta(X_1^2, X_1) \\ cov_\theta(X_1^2, X_1) & D_\theta X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 - a_2^2 & a_3 - a_1 a_2 \\ a_3 - a_1 a_2 & a_2 - a_1^2 \end{pmatrix}$$

где $a_3 = E_\theta X_1^3$, $a_4 = E_\theta X_1^4$

Комментарий: $D_\theta X_1 = E_\theta X_1^2 - (E_\theta X_1)^2 = a_2 - a_1^2$

$$D_\theta X_1^2 = E_\theta (X_1^2)^2 - (E_\theta X_1^2)^2 = a_4 - a_2^2$$

$$\mathrm{cov}_\theta (X_1^2, X_1) = \mathrm{cov}_\theta (X_1, X_1^2) = E_\theta (X_1 X_1^2) - E_\theta X_1 E_\theta X_1^2 = a_3 - a_1 a_2$$

Теперь применим дельта-метод

$\tau(x, y) = x - y^2$ — непрерывно дифф. на $\mathbb{R}^2$

Тогда $s^2 = \tau(\overline{X^2}, \overline{X})$ является АНО $\tau(a_2, a_1) =$

$= a_2 - a_1^2 = D_\theta X_1 = \sigma^2$ с асимптотической дисперсией

$$\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta} \Sigma(\theta) \left(\frac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta}\right)^T =$$

// $\dfrac{\partial \tau(\theta)}{\partial \theta} = (1 \quad -2y)$

$$= (1, -2a_1) \begin{pmatrix} a_4 - a_2^2 & a_3 - a_1 a_2 \\ a_3 - a_1 a_2 & a_2 - a_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2a_1 \end{pmatrix}$$

Ответ можно оставить в таком виде. □

(2) $X_1, \dots X_n \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ ОМП $\theta(a, \sigma^2)$ — ?

▷ $$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i - a)^2} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}$$

$$\ell_X(\theta) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - n\log\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

Запишем необходимые условия экстремума:

$$\frac{\partial \ell_X(\theta)}{\partial a} = \cancel{\ldots} \; \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n (X_i - a)$$

Приравнивая к нулю, получаем $\hat{a} = \overline{X}$

$$0 \overset{?}{=} \frac{\partial \ell_X(\theta)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2$$

$(\hat{\sigma})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{a})^2$ — в оптимальной точке

можно сослаться на теорему или проверить его max

Т.к. между σ и σ^2 есть биекция, то

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{a})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = S^2$$

Ответ: $\boxed{\begin{pmatrix} \overline{X} \\ S^2 \end{pmatrix} - \text{ОМП} \begin{pmatrix} a \\ \sigma^2 \end{pmatrix}}$

// Зам. Не доказываем, что max ибо по теореме о св-вах ОМП решение ур-я правдоп. будет ОМП в этой за

③ a) $X_1 \dots X_n \sim Pois(\theta)$ Найти ОМП и ас. дисп.

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}, \quad x \in \mathbb{Z}_+$$

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{X_i}}{X_i!} e^{-\theta}$$

$$\ell_X(\theta) = -\ln \prod_{i=1}^{n} X_i! + \sum_{i=1}^{n} X_i \log\theta - \theta n$$

$$0 \overset{?}{=} \frac{\partial \ell_X(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\theta} - n \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \overline{X}}$$ (приравняли к нулю)

$$\frac{\partial \ell_{X_1}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{X_1}{\theta} - 1$$

$$i(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial \ell_{X_1}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = E_\theta \left(\frac{X_1}{\theta} - 1 \right)^2 =$$

$$= E_\theta \frac{X_1^2}{\theta^2} - 2\frac{X_1}{\theta} + 1 = \frac{\theta^2 + \theta}{\theta^2} - 2\frac{\theta}{\theta} + 1 =$$

$D_\theta X_1 = \theta$
$E_\theta X_1 = \theta$
$\Downarrow$
$E_\theta X_1^2 = \theta + \theta^2$

$$= 1 + \frac{\theta}{\theta^2} - 2 + 1 = \frac{1}{\theta}$$

$$\boxed{\sigma^2(\theta) = i^{-1}(\theta) = \theta}$$ — асимптотическая дисперсия

b) $X_1, \dots X_n \sim Gamma(\theta, \beta)$ ОМП, $\sigma^2(\theta)$ — ?

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\theta x}, \quad x > 0$$

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^\beta X_i^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\theta X_i}$$

$$\ell_X(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\beta \log\theta + (\beta - 1)\log X_i - \log\Gamma(\beta) - \theta X_i \right] =$$

$$= n\beta \log\theta - n \log\Gamma(\beta) + (\beta - 1) \log \prod_{i=1}^{n} X_i - \theta \sum X_i$$

$$\frac{\partial l_X(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n\beta}{\theta} - \sum X_i \stackrel{?}{=} 0$$

Приравняв к 0, получаем $\boxed{\hat{\theta} = \beta / \overline{X}}$

$$\frac{\partial l_{X_1}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\beta}{\theta} - X_1$$

$$E_\theta\left(\frac{\beta}{\theta} - X_1\right)^2 = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2 + E_\theta X_1^2 - 2\frac{\beta}{\theta} E_\theta X_1 = \frac{\beta^2}{\theta^2} + \frac{\beta^2}{\theta^2} + \frac{\beta}{\theta^2} - 2\frac{\beta^2}{\theta^2} =$$

$$= \frac{\beta}{\theta^2}$$

$E_\theta X_1 = \frac{\beta}{\theta}$

$D_\theta X_1 = \frac{\beta}{\theta^2}$

$E_\theta X_1^2 = \frac{\beta^2}{\theta^2} + \frac{\beta}{\theta^2}$

$\boxed{\sigma^2(\theta) = \theta^2/\beta}$ – асимпт. дисп. $\square$

(для тех, кто интересуется теорией)

Замечание При выполнении некоторых условий регулярности $i(\theta) := E\left(\frac{\partial l_{X_1}(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = -E_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l_{X_1}(\theta)$

Можно было доказать этот факт и пользоваться.

Докажем этот факт.

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l_{X_1}(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln p_\theta(X_1) \underset{\text{произв. логарифма}}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)}\right) \underset{\text{производ. частного}}{=}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)} - \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(X_1) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)} - \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)}\right)^2 =$$

$$\underset{\text{произв. логар. опять}}{=} \frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)} - \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_1)\right)^2$$

~~Тогда~~ Заметим, что $E_\theta\left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(X_1)}{p_\theta(X_1)}\right) = \int\limits_{\mathcal{X}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(x) \cdot \frac{p_\theta(x)}{p_\theta(x)}\, dx =$

$\mathcal{X}$ – мн-во значений X_1

$$= \int\limits_{\mathcal{X}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} p_\theta(x)\, dx \underset{\text{усл. регуляр.}}{=} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \int\limits_{\mathcal{X}} p_\theta(x)\, dx = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} 1 = 0$$

Значит, $E_\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l_{X_1}(\theta) = 0 - E_\theta\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p_\theta(X_1)\right)^2 = -i(\theta)$ чтд