№1

* гамма распределение в ...

а). Т.к. $Exp(\theta) \equiv \Gamma(1, 1/\theta)$, а сумма н.о.р. с.в из $\Gamma(1, 1/\theta)$ также ~~является~~ имеет гамма распределение:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1/\theta).$$

Т.к. для Г-распределения также верно, что $X \sim \Gamma(k, \theta) \Rightarrow \forall a > 0 \hookrightarrow aX \sim \Gamma(k, \theta a)$, то

центральная ф-ция – $G(X, \theta) = \theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1)$. $\Rightarrow P\left(x_{\frac{1-\alpha}{2}} < \theta \sum_{i=1}^{n} X_i < x_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) =$

$$= P\left(\frac{x_{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} < \theta < \frac{x_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = \alpha,$$ где $x_{\frac{1-\alpha}{2}}$, $x_{\frac{1+\alpha}{2}}$ – квантили распределения $\Gamma(n, 1)$. Реализация – $(0{,}0056, 0.0160)$.

б). Очевидно, что $X_i - \theta \sim exp(1) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (X_i - \theta) \sim \Gamma(n, 1) \Rightarrow P\left(x_{\frac{1-\alpha}{2}} < \sum_{i=1}^{n} X_i - n\theta < x_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) =$

$$= P\left(-\frac{x_{\frac{1+\alpha}{2}}}{n} < -\bar{X} + \theta < -\frac{x_{\frac{1-\alpha}{2}}}{n}\right) = P\left(\bar{X} - \frac{x_{\frac{1+\alpha}{2}}}{n} < \theta < \bar{X} - \frac{x_{\frac{1-\alpha}{2}}}{n}\right) = \alpha.$$

№2

а). Из лекции известно, что $\hat{\mu}$ медиана АНО θ с ас. дисперсией $\frac{1}{4 f^2(\theta)} = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\hat{\mu} - \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \pi}{2\sqrt{n}}, \hat{\mu} + \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}} \cdot \pi}{2\sqrt{n}}\right)$$ – асимпт. доверительный интервал.

б). Из прошлого ДЗ известно, что $\hat{\theta} = \frac{\beta}{\bar{X}}$ – АНО θ в усл. регулярности с ас. дисперсией $\sigma^2(\hat{\theta}) = \frac{\hat{\theta}^2}{\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ асимпт. довер. интервал – $$\left(\frac{\beta}{\bar{X}} - \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\beta}}{\sqrt{n}\,(\bar{X})}, \frac{\beta}{\bar{X}} + \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\beta}}{\sqrt{n}\,\bar{X}}\right).$$

№3

№ 5

а) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right)$, $X_1, \dots, X_n$ — выборка из $N(\theta, 1)$

$$\Lambda(X) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\theta_2)^2}{2}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(X_i-\theta_1)^2}{2}\right)} = \exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n \left((X_i-\theta_2)^2-(X_i-\theta_1)^2\right)}{2}\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{i=1}^n (2X_i - \theta_2 - \theta_1)\frac{(\theta_1-\theta_2)}{2}\right) = \exp\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i - \frac{n}{2}(\theta_2+\theta_1)\right)(\theta_1-\theta_2)\right)$$

т.к. $\theta_1 > \theta_2$, то $\Lambda(X)$ возрастает по $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.

Ищем РНМК в виде $S = \{\sum_{i=1}^n X_i \le c_\alpha\}$, $\sum_{i=1}^n X_i$ имеет распределение $N(n\theta, n^2)$ $\Rightarrow$ $S = \{\sum_{i=1}^n X_i \le c_\alpha\} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \le c'_\alpha\right\}$, где

c'_α — α-квантиль распределения $N(\theta, 1)$.

* Знак в критерии изменился, т.к. в нашем случае $H_1: \theta < \theta_0$, а не $H_1: \theta > \theta_0$.

б) Полностью аналогично предыдущему случаю, но теперь

$S = \{\overline{X} \ge c'_\alpha\}$ по условию теоремы о монотонном отношении правдоподобия.

Вычисления в Питоне

квантиль: c'_α = sps.norm$(\theta, 1)$.ppf(α)

Мощность критерия
а) $\beta_S(\theta)$ = sps.~~norm~~ binom$(\theta, 1)$.cdf(c'_α) $\theta < \theta_0$
б) $\beta_S(\theta)$ = 1 − sps.~~norm~~ binom.$(\theta, 1)$.cdf(c'_α) $\theta > \theta_0$.

№3.

а). X_i не попадёт в бутстрепную выборку на каждом шаге с вероятностью $1-\frac{1}{n}$ =>

=> $P(X_i \in X^*) = \underbrace{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right] = 1-\exp(-1) \approx 0{,}6321$.

б) $\exists$ в каждой ячейке бутстрепной выборки лежит индикатор равный 1, если в этой ячейке лежит уникальный и нулю иначе. => Среднее кол-во уникальных — $E(nI) = n\,EI$, I — тот самый индикатор. $EI = p$ — вероятность, что в этой ячейке лежит уникальный =>

=> $p = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$ => Среднее число уникальных — $\underbrace{n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}$

№5.

а) $H_0: \Gamma(6/7, 2)$; $H_1: \Gamma(5/44, 3)$.

По лемме Неймана–Пирсона. p_1 — плотность $\Gamma(5/44, 3)$, p_0 —//— $\Gamma(6/7, 2)$.

$$\Lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \frac{(5/44)^3}{2\,(6/7)^2} \times e^{(6/7-5/44)x}$$ => $\Lambda(x) > C_\alpha \iff X > C'_\alpha$ ибо $\Lambda(x)$ монотонно возр. по x =>

=> по лемме Неймана–Пирсона $S = \{X > x_{1-\alpha}\}$, где $x_{1-\alpha}$ — $1-\alpha$ квантиль $\Gamma(6/7, 2)$,

т.к. должно быть $P_{\Gamma(6/7,2)}(X > C'_\alpha) = \alpha$ => $C_\alpha = x_{1-\alpha}$.

$x_{1-\alpha}$ = sps.gamma(6/7, 2).ppf$(1-\alpha) = \{\alpha = 0{,}95\} = 4{,}7$ => ~~Отверга~~ $x = 6.66 > x_{1-\alpha}$ => Отвергаем H_0 =>

=> на картинке единорог

б). Аналогично. $H_0: \Gamma(5/44, 3)$, $H_1: \Gamma(6/7, 2)$

$S = \{X > x_{1-\alpha}\}$ $x_{1-\alpha}$ — $1-\alpha$ квантиль $\Gamma(5/44, 3)$

$x_{1-\alpha} = 3{,}65$ => отвергаем H_0 => на картинке пёсик.

Посчитать в ноутбуке!