Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll M3

Elastizität

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

h.hawighorst@uni-muenster.de

j_siev11@uni-muenster.de

betreut von

Christian Thiede

6. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung

Im ersten Teil des Experimentes wurde die Durchbiegung von verschiedenen Stäben in Abhängigkeit von dem angehängten Gewicht bestimmt. Mithilfe dieses Zusammenhanges kann man das Elastizitätsmodul E bestimmen. Da es sich hierbei um eine Materialkonstante handelt dient der Elastizitätsmodul E nicht nur dazu die Elastizität eines Stoffes wiederzugeben sondern er gibt auch die Möglichkeit Rückschlüsse über das vorliegende Material zu ziehen. Auf diese Weise wurde herausgefunden das es sich bei den untersuchten Stoffen um Kupfer, Aluminium, Stahl, Messing und Aluminium handelte.

In dem zweiten Teil des Experimentes wurde das Torsionspendel untersucht. Bei bekanntem Trägheitsmoment der Masse eignet es sich dazu das Schubmodul G des Drahtes zu bestimmen und Informationen über das verwendete Material zu erhalten. So lies der gemessen Wert von $G = (7{,}87 \pm 0{,}09) \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/s^2m}$ eine Stahllegierung vermuten.Bei bekanntem Aufbau und Schubmodul lässt sich alternativ das Trägheitsmoment eines Körpers um die, durch den Draht vorgegebene, Rotationsachse bestimmen. Durch unterschiedliche Aufhängungen der Hantelscheiben wurde der Einfluss des Abstandes zwischen Schwerpunkt und Rotationsachse untersucht und mithilfe des Steinerschen Satzes ausgewertet.

2. Stäbe

In dieser Versuchsreihe wurde das Elastizitätsmodul von vier verschiedenen Stäben bestimmt.

2.1. Methoden

Die Durchführung dieses Experimentes erfolgte in zwei Abschnitten. Im ersten Abschnitt wurde die Länge und die Dicke von vier verschiedenen Stäben bestimmt. Die Dicke der Stäbe wurde mit einer Mikrometerschraube, die Länge mit einem Maßband gemessen. Als Länge wird der Abstand zwischen Anfang der Einspannvorrichtung und dem Aufhängepunkt des Gewichtes bezeichnet. Da die Dicke der Stäbe mit der vierten Potenz in das Elastizitätsmodul eingeht, wurde sie an fünf Stellen dreifach gemessen. Nach Abschluss dieser Messungen wurde im zweiten Abschnitt die Durchbiegung der

Materialien in Abhängigkeit der angehängten Gewichte bestimmt. Zu diesem Zweck wurden die Stäbe auf der einen Seite eingespannt und auf der anderen Seite wurde ein Behälter eingehängt in den die Gewichte später hineingelegt wurden. Nach jeder Messung wurde wieder die Ruhelage des Stabes bestimmt damit bei Auftreten einer inelastischen Verbiegung diese erkannt werden konnte. Dies war bei keiner Messung der Fall. Zum Ablesen der Durchbiegung der Stäbe diente einer hinter den Stäben angebrachte Skala. Der Spiegel hinter der Skala ermöglichte ein weitgehend paralaxenfreies Ablesen. Bei den Stäben handelte es sich um drei runde und einen rechteckigen Stab. Die Materialien wurden anhand der Farbe und dem Gewicht zunächst geschätzt. Nach dieser Schätzung erhielt man einen runden Aluminium-, einen runden Stahl-, einen runden Messing- und einen eckigen Messingstab . Der rechteckige Stab wurde einmal Flachkant und einmal Hochkant eingespannt um den Einfluss der Form eines Stabes auf die Durchbiegung und das Elastizitätsmodul zu untersuchen.

2.2. Daten und Analyse und Diskussion

Während des Experimentes wurde beobachtet, dass sich die Stäbe unterschiedlich gut elastisch verbiegen ließen (Stahl am besten und Aluminium am schlechtesten) und das die Dicke eines Materials einen Einfluss auf die Biegsamkeit hat.

Bei den 15 Messungen der Dicke der Stäbe wurden Schwankungen um ca. $\pm 0{,}1\,\mathrm{mm}$ gemessen. Dies ist darauf zurückzuführen das die Mikrometerschraube von Hand festgezogen wurde und dem entsprechend nicht immer mit der gleichen Kraft angezogen wurde. Die genauen Messungen sind in dem Laborbuch zu finden. Die Unsicherheiten der Dicke ergab sich nach den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von $\pm 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Die Länge der Stäbe wurde mit einer Genauigkeit von $\pm 1\,\mathrm{mm}$ womit sich dann auch nach Gleichung A.2 die Unsicherheit für die Länge ergibt. Diese Abschätzung wurde auch bei der Durchbiegung verwendet.

Durchbiegung

In diesem Abschnitt wurde die Durchbiegung in Abhängigkeit vom Gewicht untersucht. Zu diesem Zweck wurde dieser Zusammenhang in den Abbildungen 1 bzw. 2 für die runden Stäbe bzw. für den eckigen Stab dargestellt. Da ein proportionaler Zusammenhang besteht wurde eine Anpassung[1] mit $f(x) = a \cdot x$ erstellt. Die Unsicherheit dieser Anpassung wurde aus Gnuplot übernommen und ist in der Tabelle 1 angegeben. Man erkennt das die Elastizität von Aluminium am schwächsten und die von Stahl am höchsten ist. Dies entspricht auch der alltäglichen Beobachtung das Stahl biegsamer ist als Aluminium. Betrachtet man den Einfluss der Form bzw. der Dicke auf die Elastizität so erkennt man in 2 das die Hochkant eingespannte Stange sich weniger stark biegt als die Flachkant eingespannte Stange. Auch dies spiegelt alltägliche Beobachtungen wider, nämlich die, dass sich dickere Materialien weniger biegsam sind als dünnere Materialien.

2.3. Elastizitätsmodul

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls nach Gleichung A.5 werden die Gleichungen A.6 bzw. A.7 und A.8 eingesetzt. Unter einsetzen der in Tabelle 1 angegebenen Werte erhält man die ebenfalls in der Tabelle zu sehenden Werte für das Elastizitätsmodul. Vergleicht man diese Werte für das Elastizitätsmodul mit Literaturwerten[2] in Tabelle 2 so erkennt man, dass es sich bei der runden Messingstange vermutlich eher um Kupfer handelt und nicht um Messing. Korrigiert man diese Annahme so weichen die Werte für das Elastizitätsmodul um 1 % bis 7 % von den Literaturwerten ab. Betrachtet man dann noch die Unsicherheiten die nach Gleichung A.9 bzw. A.10 berechnet wurde so erkennt man, dass die Werte bis auf Aluminium in einer 2Σ Umgebung um die Literaturwerte liegen. Jedoch kommt hinzu, dass diese Werte ebenfalls experimentell bestimmt wurden und von Quelle zu Quelle (Siehe zweite Quelle: Gerthsen Physik, Vogel 1977) schwanken. Weitere Faktoren die hinzukommen, sind mögliche andere Legierungenen (Messing) sowie verschiedene Herstellungsprozesse die Einfluss auf den Elastizitätsmodul haben.

[1] Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

[2] Entnommen aus „Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure“ von Paul A. Tipler und Gene Mosca in der 7. Ausgabe von 2014.

[3] Entnommen aus „Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure“ von Paul A. Tipler und Gene Mosca in der 7. Ausgabe von 2014.

Tabelle 1: Elastizitätsmodul E berechnet nach A.5 mit allen dazu nötigen Werten

	Aluminium Rund	Messing Hochkant	Messing Flachkant	'Messing' Rund	Stahl Rund
a $\left[\frac{m}{g}\right]$	$0{,}305 \pm 0{,}006$	$0{,}041 \pm 0{,}001$	$0{,}264 \pm 0{,}007$	$0{,}202 \pm 0{,}006$	$0{,}114 \pm 0{,}004$
b[m]		$(20{,}00 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$	$(50{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-4}$		
c[m]		$(50{,}0 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-4}$	$(20{,}00 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$		
d[m]	$(29{,}70 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$			$(29{,}60 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$	$(29{,}70 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-4}$
L[m]	$0{,}2980 \pm 0{,}0004$	$0{,}2870 \pm 0{,}0004$	$0{,}2870 \pm 0{,}0004$	$0{,}2950 \pm 0{,}0004$	$0{,}2900 \pm 0{,}0004$
E $\left[\frac{N}{m^2}\right]$	$(7{,}492 \pm 0{,}144) \cdot 10^{10}$	$(9{,}429 \pm 0{,}180) \cdot 10^{10}$	$(9{,}313 \pm 0{,}249) \cdot 10^{10}$	$(1{,}112 \pm 0{,}034) \cdot 10^{11}$	$(1{,}815 \pm 0{,}072) \cdot 10^{11}$

Tabelle 2: Literaturwerte für das Elastizitätsmodul [3]

	Elastizitätsmodul E $\left[\frac{GN}{m^2}\right]$
Aluminium	70
Eisen	190
Kupfer	110
Messing	90

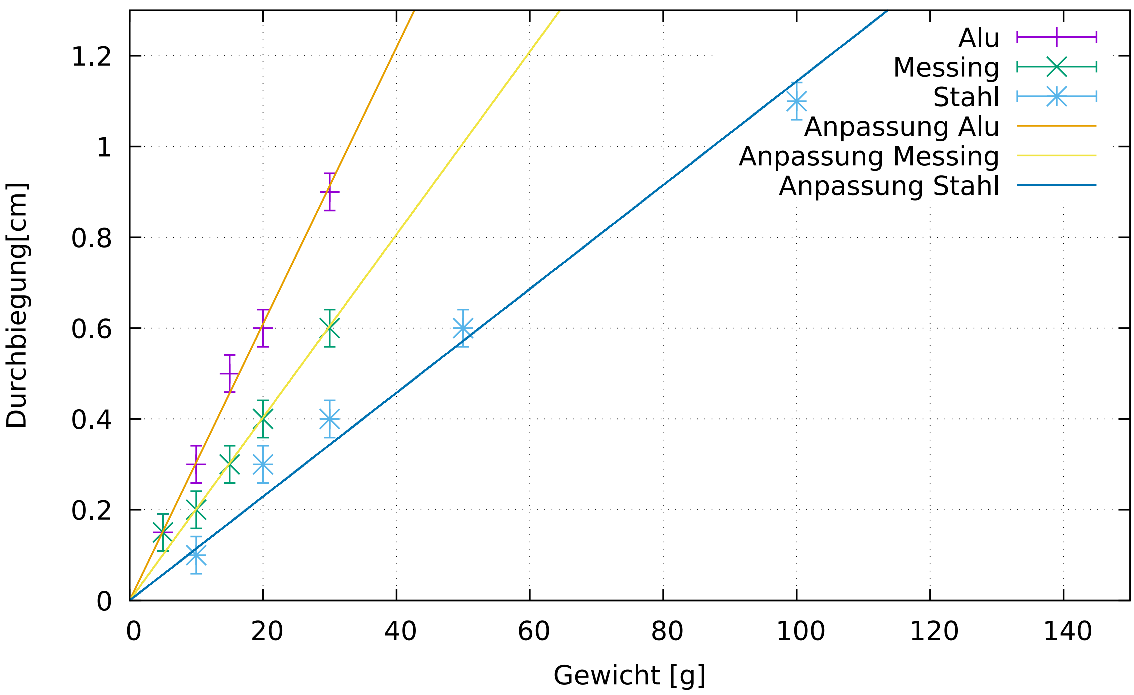

Abbildung 1: Durchbiegung der Runden Stäbe in Abhängigkeit vom Gewicht.

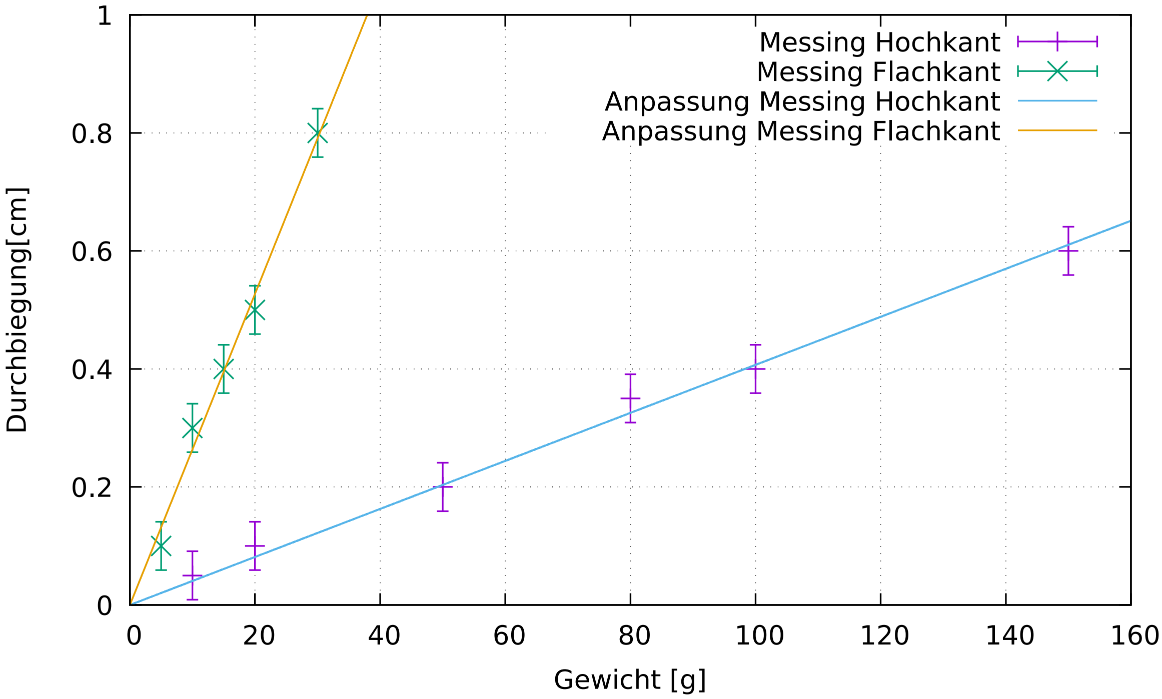

Abbildung 2: Durchbiegung des in zwei verschiedenen Ausrichtungen eingespannten Rechteckigen Stabes in Abhängigkeit vom Gewicht.

3. Torsionspendel

Betrachtet wurde ein Torsionspendel bestehend aus einem Metalldraht und einer angehängten Masse.

3.1. Methoden

Das Experiment unterteilte sich in zwei Abschnitte, im ersten wurde die Schwingungsdauer eines Torsionspendels mit Zylinder um den Schubmodul G des Drahtes zu bestimmen. Dies bildete die Grundlage um anschließend die Trägheitsmomente der Hantel mit Gewichten in verschiedenen Abständen der Rotationsachse zu bestimmen. Gemessen wurden daher alle für den Schubmodul relevanten Größen, d.h. die Schwingungsdauer, die Abmessungen des Drahtes und der Gewichte sowie die Masse letzterer. Dies wurde sowohl für den Zylinder, die Hantel ohne Scheiben und mit aufgelegten Scheiben in fünf verschiedenen Abständen durchgeführt. Der Radius des Drahtes wurde an fünf Stellen je dreimal gemessen.

3.2. Daten und Analyse

Bei der Messung des Radius des Drahtes wurde in 13 von 15 Messungen der selbe Wert festgestellt, dies war zudem der Mittelwert. Daher ist davon auszugehen das der Draht eine im Vergleich zur Messgenauigkeit konstante Dicke aufweist. Die einzelnen Drahtradien sowie Schwingungsdauern sind dem Laborbuch zu entnehmen. Die Unsicherheit ergab sich aus den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von $\pm 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Alle weiteren Entfernungen wurden einmal gemessen, da sie nicht in vierter Potenz in den Schubmodul eingehen, hier wurden Dreiecksverteilungen mit $a = 1\,\mathrm{mm}$ angenommen. Die auf den Gewichten gegebene Masse wurde als gegeben und exakt im Vergleich zu den anderen Messungenauigkeiten angenommen. Bei der Schwingungsdauer des Torsionspendels mit Zylinder wurden drei Messungen je drei Schwingungen durchgeführt und gemittelt. Bei der Hantel wurden die Schwingungsdauern je einmal über drei Perioden gemessen. Die Reaktionszeit wurde mit 0,5 s dreiecksverteilt betrachtet.

Torsionspendel mit Zylinder

Mit den Messdaten aus Tabelle 3 und den Gleichungen 3.1 und 3.2 folgt für den Schubmodul des Drahtes $G \pm \Delta G = (7{,}87 \pm 0{,}09) \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/s^2m}$.

Tabelle 3: Messdaten des Torsionspendels mit Zylinder

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1{,}8150 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Masse des Zylinders m_z	$2{,}648\,\mathrm{kg}$
Radius des Zylinders R_z	$(0{,}0735 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2{,}500 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$
Gemittelte Schwingungsdauer T_z	$(32{,}58 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}$

$$G = \frac{4\pi L_D m_z R_z^2}{R_D^4 T_z^2} \tag{3.1}$$

$$\Delta G = G\sqrt{\left(\frac{\Delta L_D}{L_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R_z}{R_z}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R_D}{R_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_z}{T_z}\right)^2} \tag{3.2}$$

Torsionspendel mit Hantel

Hier wurde die Schwingungsdauer einer Hantel mit aufgelegten Scheiben beobachtet, wobei der Abstand des Scheibenschwerpunktes zur Rotationsachse a variiert wurde.

Tabelle 4: Messdaten des Torsionspendels mit Hantel und aufgelegten Scheiben

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1{,}8150 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Masse der Achse m_1	$0{,}217\,73\,\mathrm{kg}$
Radius der Achse R_1	$(0{,}0599 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Länge der Achse H_1	$(0{,}270 \pm 0{,}004)\,\mathrm{m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2{,}500 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$
Masse der aufgelegten Scheibe m_2	$0{,}297\,28\,\mathrm{kg}$
Radius der aufgelegten Scheibe R_2	$(0{,}0245 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Höhe der aufgelegten Scheibe H_2	$(0{,}020\,40 \pm 0{,}000\,04)\,\mathrm{m}$

Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt, da der letzte Messpunkt deutlich Abseits einer gedachten Grade durch die anderen Messpunkte lag, wurde hier von einem groben Fehler ausgegangen und er wurde bei der Anpassung ausgelassen.

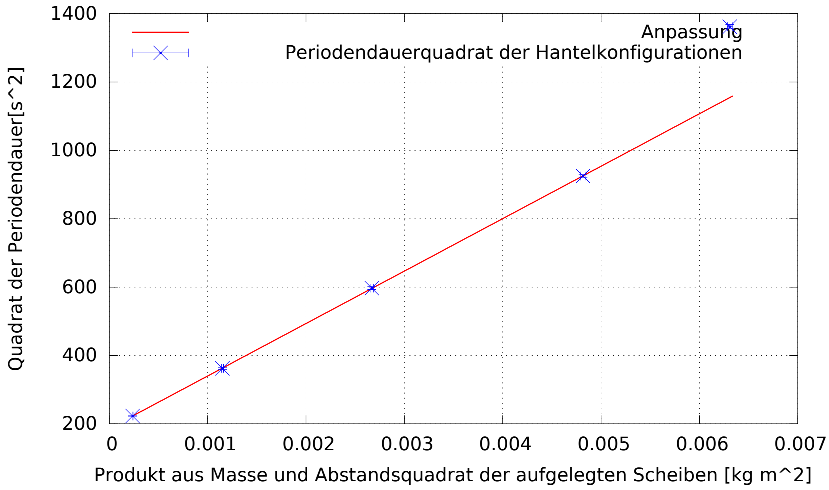

Abbildung 3: Dargestellt werden die Messung mit Anpassung der Schwingungsdauern der Hantel mit aufgelegten Scheiben in verschiedenen Abständen zur Rotationsachse. Die Einheiten der Achsen sind so gewählt, dass die Messpunkte nach dem Steinerschen Satz linear sind.

Man erhält nach der Anpassung[4] die Werte: $b = (1{,}62 \pm 0{,}13) \cdot 10^6\,{}^{\mathrm{s}^2}\!/_{\mathrm{kg\,m}^2}$ und $c = (1{,}3 \pm 0{,}5) \cdot 10^3\,\mathrm{s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 3.4 folgt durch Koeffizientenvergleich $D^* = (8{,}19 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-5}\,{}^{\mathrm{kg\,m}^2}\!/_{\mathrm{s}^2}$. Da jedoch der letzte Punkt so stark abweicht nehmen wir eine Unsicherheit von $\Delta D^* = \pm 2 \cdot 10^{-6}\,{}^{\mathrm{kg\,m}^2}\!/_{\mathrm{s}^2}$ an.

Die Schwingungsdauer der Hantel ohne Scheiben T_0 betrug $(13{,}01 \pm 0{,}03)\,\mathrm{s}$. Es folgt mit Gleichung 3.3 für das Trägheitsmoment des Hantelstabes $J_1 = (1{,}40 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m}^2$.

$$J = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \pm \frac{T^2 D^*}{4\pi^2}\sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D^*}{D^*}\right)^2} \tag{3.3}$$

Aus dem Parameter c und der Gleichung 3.4 und $a = 0$ folgt für das Trägheitsmoment der Hantelscheiben mit Schwerpunkt auf der Rotationsachse die Gleichung 3.5 und $J_2 = (5{,}1 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m}^2$.

[4]Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*}(J_1 + 2J_2 + 2m_2a^2) \tag{3.4}$$

$$J_2 = \frac{cD^*}{8\pi^2} - \frac{J_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cD^*}{8\pi}\right)^2 \left(\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D^*}{D^*}\right)^2\right) + \left(\frac{J_1}{2}\right)^2} \tag{3.5}$$

$$J_{allg.} = \int r_\perp^2 \mathrm{d}m \tag{3.6}$$

Zum Vergleich wurden die theoretisch vorhergesagten Trägheitsmomente nach Gleichung 3.6 bestimmt und in Tabelle 5 mit den experimentell bestimmten Werten zum Vergleich aufgeführt.

Tabelle 5: Vergleich der experimentellen Trägheitsmomente mit den theoretisch berechneten

Objekt	Theoretischer Wert	Experimenteller Wert
Hantelstange J_1	$(1{,}324 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-3}$	$(1{,}40 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-3}$
Scheibe J_2	$(5{,}76 \pm 0{,}07) \cdot 10^{-5}$	$(5{,}1 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-4}$

3.3. Diskussion

Im Vergleich mit den Literaturwerten erscheint eine Stahllegierung wahrscheinlich. So besitzt zum Beispiel „CrV-Federstahl“ oder „V2A-Stahl“ einen Schubmodul[5] $G = 8{,}0 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/s^2m}$.

Genauso Wahrscheinlich sind jedoch auch andere Stahllegierungen, da die Eigenschaften von den genauen Anteilen der Legierungsbestandteilen steuerbar sind und der gewünschte Schubmodul mit verschiedenen Zusätzen erreicht werden kann.

An den Werten in Tabelle 5 erkennt man, dass der theoretische Wert für das Trägheitsmoment jeweils in der 2σ-Umgebung des experimentell bestimmten Wertes liegt und somit keinen Widerspruch darstellt. Die weiteren berechneten Werte lassen sich nicht einordnen, da es sich um Materialkonstanten handelt und die Materialien nicht bekannt sind. Bei

[5] entnommen: Gerthsen Physik, Vogel 1977

einer Weiterführung der Versuchsreihe wäre die Pendeldauer der Hantel für das größte a zu wiederholen um zu überprüfen ob es sich wie angenommen um einen Fehler handelt oder ob die Abweichung reproduzierbar ist. Sollte eine höhere Genauigkeit erforderlich sein, sollte insbesondere J_1 genauer bestimmt werden, da dieser Wert für weitere Rechnungen benötigt wird. Eine höhere Genauigkeit von D^*, welches auch Grundlage weiterer Berechnungen ist, ist nur durch allgemeine Techniken wie mehr Abstände vermessen oder über viele Perioden mehrfach messen möglich und somit deutlich aufwendiger.

4. Schlussfolgerung

Mithilfe der Durchbiegung in Abhängigkeit des Gewichts wurde der Elastizitätsmodul von den vier verschiedenen Stangen bestimmt. Beim Vergleich von den Experimentell bestimmten Werten mit Literaturwerten fiel auf, dass die Vermutung, das es sich bei der Messingfarbenden runden Stange um Messing handelte vermutlich falsch ist, da der Wert für den Elastizitätsmodul fast identisch mit dem von Kupfer ist. Es gibt bei allen Werten Abweichungen dies liegt aber auch daran das es auch Abweichungen bei den Literaturwerten gibt. Des weiteren hängt der Elastizitätsmodul auch von der Art und Weise der Verarbeitung der Materialien ab und im Falle von Messing und Stahl auch von der Legierung. Die experimentell bestimmten Werte sind in der Tabelle 1 und die Literaturwerte in der Tabelle 2 zu finden.

Das Torsionspendel eignete sich um den Schubmodul($G = (7{,}87 \pm 0{,}09) \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/s^2m}$) des verwendeten Drahtes bei bekanntem Trägheitsmoment zu bestimmen und durch diese Materialeigenschaft Rückschlüsse auf das verwendete Material (Stahllegierung) zu ziehen. Da der Schubmodul jedoch von dem Fertigungsprozess und den Beimengungen abhängt, ist dies nur als Richtwert zu verstehen. Bei bekanntem Schubmodul G und den Abmessungen des Drahtes bzw. dem Direktionsmodul $D^* = (8{,}2 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2/s^2}$ lässt sich aus der Schwingungsdauer das jeweilige Trägheitsmoment berechnen. Die gemessenen Trägheitsmoment sind Tabelle 5 zu entnehmen.

A. Anhang

A.1. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung u für die Intervallbreite a:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{A.1}$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung u:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \tag{A.2}$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung u für die Messwerte x_i und den Mittelwert$\bar{x}$:

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{A.3}$$

Kominierte Standartunsicherheit der Messgröße $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}u(x_i)\right)^2} \tag{A.4}$$

Elastizitätsmodul E:

$$E = \frac{F}{h_{\max} I_q}\frac{L^3}{3} \tag{A.5}$$

Flächenträgheitsmoment Kreis:

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi d^4}{64} \tag{A.6}$$

Flächenträgheitsmodul Rechteck:

$$I_{\text{Rechteck}} = \frac{bc^3}{12} \tag{A.7}$$

mit b senkrecht zur Biegungsebene, c waagerecht zu Biegungsebene.
Kraft:

$$F = 10 \cdot a \cdot m \tag{A.8}$$

a ist die Steigung entnommen aus den Abbildungen **??**, **??**
Unsicherheit des Elastizitätsmoduls für Runde Stäbe:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot u_d}{d}\right)^2} \tag{A.9}$$

Unsicherheit des Elastizitätsmoduls für eckige Stäbe:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_c}{c}\right)^2} \tag{A.10}$$