

Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll M3

Elastizität

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Christian Thiede

6. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung	1
2. Stäbe	1
2.1. Methoden	1
2.2. Daten und Analyse und Diskussion	2
2.3. Elastizitätsmodul	2
3. Torsionsschwingung	6
3.1. Methoden	6
3.2. Daten und Analyse	6
3.3. Diskussion	10
4. Schlussfolgerung	10
A. Anhang	11
A.1. Verwendete Gleichungen	11

1. Zusammenfassung

In dem zweiten Teil des Experimentes wurde das Torsionspendel untersucht. Bei bekanntem Trägheitsmoment der Masse eignet es sich dazu das Schubmodul G des Drahtes zu bestimmen und Informationen über das verwendete Material zu erhalten. So lies der gemessen Wert von $G = (7,87 \pm 0,09) \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$ eine Stahllegierung vermuten. Bei bekanntem Aufbau und Schubmodul lässt sich alternativ das Trägheitsmoment eines Körpers um die, durch den Draht vorgegebene, Rotationsachse bestimmen. Durch unterschiedliche Aufhängungen der Hantlscheiben wurde der Einfluss des Abstandes zwischen Schwerpunkt und Rotationsachse untersucht und mithilfe des Steinerschen Satzes ausgewertet.

2. Stäbe

In dieser Versuchsreihe wurde das Elastizitätsmodul von vier verschiedenen Stäben bestimmt.

2.1. Methoden

Die Durchführung dieses Experimentes erfolgte in zwei Abschnitten. Im ersten Abschnitt wurde die Länge und die Dicke von vier verschiedenen Stäben bestimmt. Die Dicke der Stäbe wurde mit einer Mikrometerschraube gemessen und die Länge mit einem Maßband, wobei hier von einem enden des Stabes bis zu Aufhängepunkt des Gewichtes gemessen wurde. Da die Dicke der Stäbe mit einer Potenz von vier in das Elastizitätsmodul eingeht wurde sie an fünf stellen drei mal bestimmt. Nach Abschluss dieser Messungen wurde im zweiten Abschnitt die Durchbiegung der Materialien in Abhängigkeit vom angehängten Gewicht bestimmt. Zu diesem Zweck wurden die Stäbe auf der einen Seite eingespannt und auf der anderen Seite wurde ein Behälter eingehängt in das die Gewichte Später hineingelegt wurden. Nach jeder Messung wurde wieder die Ruhelage des Stabes bestimmt damit bei auftreten einer Inelastische Verbiegung diese erkannt werden konnte. Dies war aber nicht der Fall. Zum ablesen der Durchbiegung der Stäbe diente einer hinter den Stäben angebrachte Skala. Bei den Stäben handelte es sich um drei Runde und einen Rechteckigen Stab. Die Materialien wurden anhand der Farbe und dem Gewicht zunächst geschätzt. Nach dieser Schätzung erhielt man einen Runden Aluminium-, einen Runden

Stahl-, einen Runden Messing- und einen eckigen Messingstab. Der Rechteckige Stab wurde einmal Flachkant und einmal Hochkant eingespannt um den Einfluss der Form eines Stabes auf die Durchbiegung und das Elastizitätsmodul zu untersuchen.

2.2. Daten und Analyse und Diskussion

Bei den 15 Messungen der Dicke der Stäbe wurden Schwankungen um ca. $\pm 0,1$ mm gemessen. Dies ist darauf zurückzuführen dass die Mikrometerschraube von Hand festgezogen wurde und dem entsprechend nicht immer mit der Gleichen Kraft. Die genauen Messungen sind in dem Laborbuch zu finden. Die Unsicherheiten der Dicke ergab sich nach den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von $\pm 2,5 \cdot 10^{-6}$ m. Die Länge der Stäbe wurde mit einer Genauigkeit von ± 1 mm womit sich dann auch nach Gleichung A.2 die Unsicherheit für die Länge ergibt. Diese Abschätzung wurde auch bei der Durchbiegung verwendet.

Durchbiegung

In diesem Abschnitt wurde die Durchbiegung in Abhängigkeit vom Gewicht untersucht. Zu diesem Zweck wurde dieser Zusammenhang in den Abbildungen 1 und 2 einmal für die Runden und einmal für den eckigen Stab Dargestellt. Man erkennt das die Elastizität von Aluminium am schwächsten und die von Stahl am höchsten ist. Dies entspricht auch der Alltäglichen Beobachtung das Stahl biegsamer ist als Aluminium. Betrachtet man den einfluss der form bzw. der Dicke auf die Elastizität so erkennt man in 2 das die Hochkant eingespannte Stange sich weniger stark biegt als die Flachkant eingespannte Stange. Auch dies Spiegelt alltägliche Beobachtungen wider, nämlich die, dass sich dickere Materialien weniger stark biegen lassen als Dünnere Materialien.

2.3. Elastizitätsmodul

Zur Bestimmung des Elastizitätsmoduls nach Gleichung 1 werden die Gleichungen A.6 bzw. A.7 und A.8 erhält man unter einsetzen der in Tabelle 1 zu sehenden Werte die ebenfalls in der Tabelle zu sehenden Werte für das Elastizitätsmodul. Vergleicht

man diese Werte für das Elastizitätsmodul mit Literaturwerten¹ Tabelle 2 so erkennt man, dass es sich bei der Runden Messingstange vermutlich eher um Kupfer handelt und nicht um Messing. Korrigiert man diese Annahme so weichen die Werte für das Elastizitätsmodul um 1 % bis 7 % von den Literaturwerten ab. Betrachtet man dann noch die Unsicherheiten die nach Gleichung A.9 bzw. A.10 berechnet wurde so erkennt man dass die Werte sehr dicht an den Literaturwerten liegen. Hinzu kommt noch dass diese Werte ebenfalls Experimentell bestimmt wurden und von Quelle zu Quelle schwanken. Weitere Faktoren die hinzukommen sind mögliche andere Legierungen (Messing) sowie andere Herstellungsprozesse die Einfluss auf das Elastizitätsmodul haben.

Tabelle 1: Elastizitätsmodul E berechnet nach A.5 mit allen dazu nötigen Werten

	a $\left[\frac{m}{g}\right]$	b[m]	c[m]	d[m]
Aluminium Rund	$0,305 \pm 0,006$			$(29,70 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$
Messing Hochkant	$0,041 \pm 0,001$	$(20,00 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$	$(50,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$	
Messing Flachkant	$0,264 \pm 0,007$	$(50,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$	$(20,00 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$	
Messing Rund	$0,202 \pm 0,006$			$(29,60 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$
Stahl Rund	$0,114 \pm 0,004$			$(29,70 \pm 0,02) \cdot 10^{-4}$

Tabelle 2: Literaturwerte für das Elastizitätsmodul

	Elastizitätsmodul E $\left[\frac{GN}{m^2}\right]$
Aluminium	70
Eisen	190
Kupfer	110
Messing	90

¹Entnommen aus „Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure“ von Paul A. Tipler und Gene Mosca in der 7. Ausgabe von 2014.

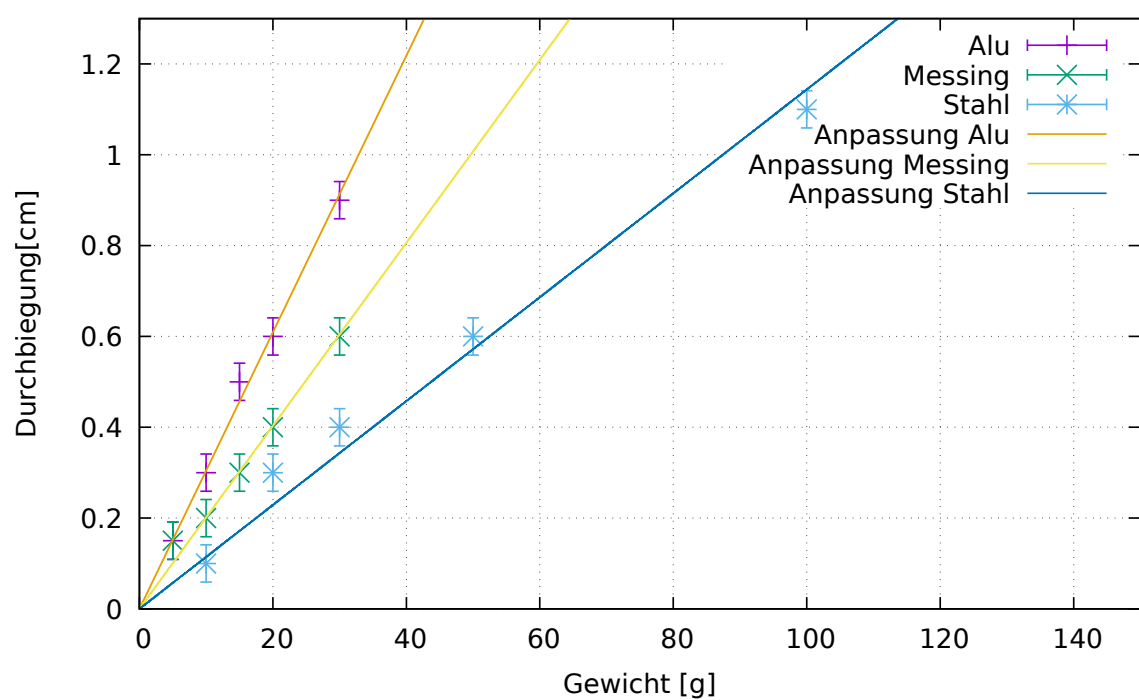


Abbildung 1: Durchbiegung der Runden Stäbe in Abhängigkeit vom Gewicht.

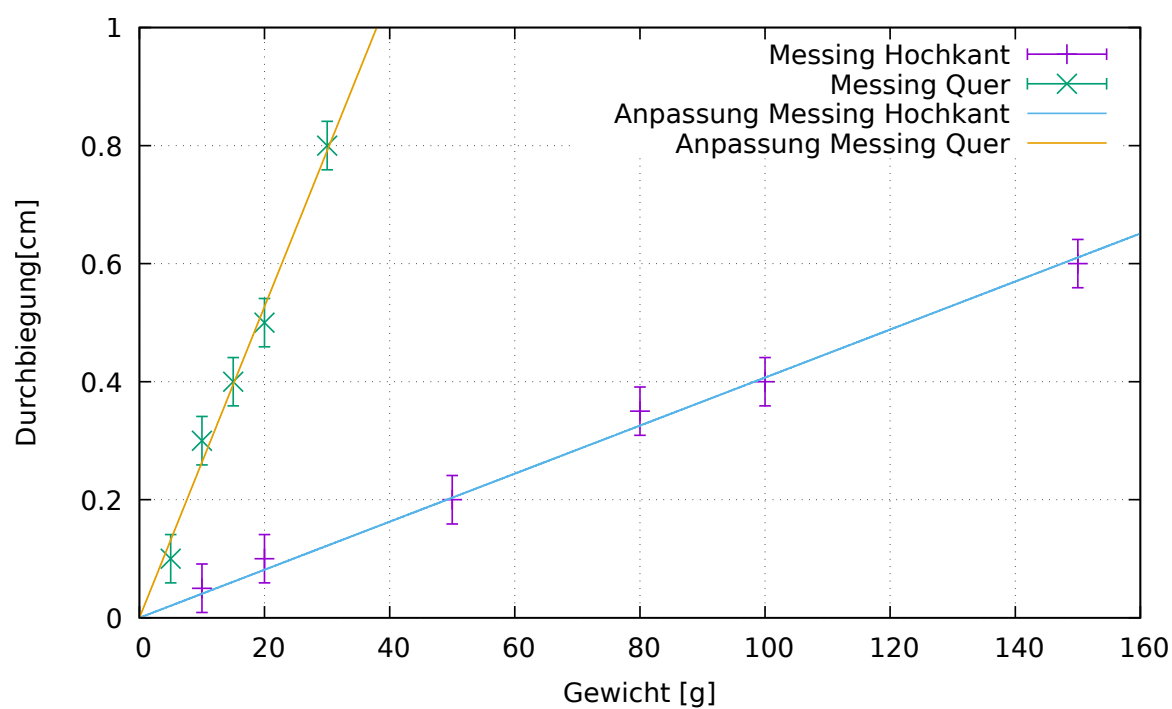


Abbildung 2: Durchbiegung des in zwei verschiedenen Ausrichtungen eingespannten Rechteckigen Stabes in Abhängigkeit vom Gewicht.

3. Torsionsschwingung

3.1. Methoden

Das Experiment unterteilte sich in zwei Abschnitte, im ersten wurde die Schwingungsdauer eines Torsionspendels mit Zylinder um das Schubmodul G des Drahtes zu bestimmen. Dies bildet die Grundlage um anschließend die Trägheitsmomente der Hantel mit Gewichten in verschiedenen Abständen der Rotationsachse zu bestimmen. Gemessen wurden daher alle für das Schubmodul relevanten Größen, d.h. die Schwingungsdauer die Abmessungen des Drahtes und der Gewichte sowie die Masse letzterer. Dies wurde sowohl für den Zylinder, die Hantel ohne Scheiben und mit aufgelegten Scheiben in fünf verschiedenen Abständen durchgeführt. Der Radius des Drahtes wurde an fünf Stellen je dreimal gemessen.

3.2. Daten und Analyse

Bei der Messung des Radius des Drahtes wurde in 13 von 15 Messungen der selbe Wert festgestellt, dies war zudem der Mittelwert. Daher ist davon auszugehen dass der Draht eine im Vergleich zur Messgenauigkeit konstante Dicke aufweist. Die einzelnen Drahtradien sowie Schwingungsdauern sind dem Laborbuch zu entnehmen. Die Unsicherheiten ergab sich nach den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von $\pm 2,5 \cdot 10^{-6}$ m. Alle weiteren Entfernungen wurden einmal gemessen, da sie nicht in vierter Potenz in das Schubmodul eingehen, hier wurden Dreiecksverteilungen mit $a = 1$ mm angenommen. Die auf den Gewichten gegebene Masse wurde als gegeben und exakt im Vergleich zu den anderen Messungenauigkeiten angenommen. Bei der Schwingungsdauer des Torsionspendels mit Zylinder wurden drei Messungen je drei Schwingungen durchgeführt und gemittelt. Bei der Hantel wurden die Schwingungsdauern je einmal über drei Perioden gemessen. Die Reaktionszeit wurde mit 0,5 s dreiecksverteilt betrachtet.

Torsionspendel mit Zylinder

Mit den Messdaten aus Tabelle 3 und Gleichungen 3.1 und 3.2 folgt für das Schubmodul des Drahtes $G \pm \Delta G = (7,87 \pm 0,09) \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$.

Tabelle 3: Messdaten des Torsionspendels mit Zylinder

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1,8150 \pm 0,0004) \text{ m}$
Masse des Zylinders m_z	$2,648 \text{ kg}$
Radius des Zylinders R_z	$(0,0735 \pm 0,0004) \text{ m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2,500 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Gemittelte Schwingungsdauer T_z	$(32,58 \pm 0,04) \text{ s}$

$$G = \frac{4\pi L_D m_z R_z^2}{R_D^4 T_z^2} \quad (3.1)$$

$$\Delta G = G \sqrt{\left(\frac{\Delta L_D}{L_D}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta R_z}{R_z}\right)^2 + \left(4 \frac{\Delta R_D}{R_D}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T_z}{T_z}\right)^2} \quad (3.2)$$

Torsionspendel mit Hantel

Hier wurde die Schwingungsdauer einer Hantel mit aufgelegten Scheiben beobachtet, wobei der Abstand a des Scheibenschwerpunktes zur Rotationsachse variiert wurde.

Tabelle 4: Messdaten des Torsionspendels mit Hantel und aufgelegten Scheiben

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1,8150 \pm 0,0004) \text{ m}$
Masse der Achse m_1	$0,21773 \text{ kg}$
Radius der Achse R_1	$(0,0599 \pm 0,0004) \text{ m}$
Länge der Achse H_1	$(0,270 \pm 0,004) \text{ m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2,500 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Masse der aufgelegten Scheibe m_2	$0,29728 \text{ kg}$
Radius der aufgelegten Scheibe R_2	$(0,0245 \pm 0,0004) \text{ m}$
Höhe der aufgelegten Scheibe H_2	$(0,02040 \pm 0,00004) \text{ m}$

Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt, da der letzte Messpunkt

deutlich Abseits einer gedachten Grade durch die anderen Messpunkte lag, wurde hier von einem groben Fehler ausgegangen und er wurde bei der Anpassung ausgelassen.

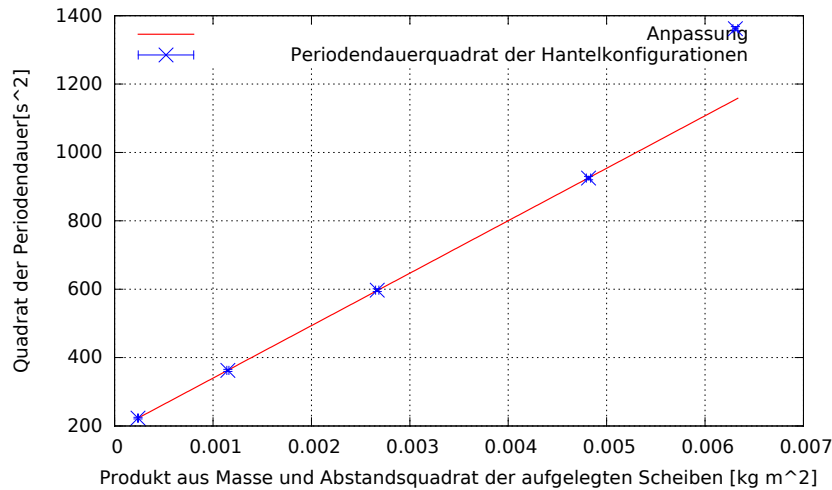


Abbildung 3: Dargestellt werden die Messung mit Anpassung der Schwingungsdauern der Hantel mit aufgelegten Scheiben in verschiedenen Abständen zur Rotationsachse. Die Einheiten der Achsen sind so gewählt, dass die Messpunkte nach dem Steinerschen Satz linear sind.

«««< HEAD Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt und man erhält nach der Anpassung² die Werte: $b = (1,62 \pm 0,13) \cdot 10^6 \text{ s}^2/\text{kg m}^2$ und $c = (1,3 \pm 0,5) \cdot 10^3 \text{ s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 3.4 folgt durch Koeffizientenvergleich $D^* = (2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

===== Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt, da der letzte Messpunkt deutlich Abseits einer gedachten Grade durch die anderen Messpunkte lag, wurde hier von einem groben Fehler ausgegangen und er wurde bei der Anpassung ausgelassen. «««< HEAD Man erhält nach der Anpassung³ und unter Berücksichtigung des geringen Freiheitsgrades (2) die Werte: $b = (1,5346 \pm 0,0040) \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{kg m}^2$ und $c = (186,587 \pm 1,100) \text{ s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 3.4 folgt durch Koeffizientenvergleich $D^* = (8,19 \pm 0,02) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ Da jedoch der letzte Punkt so stark

²Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

³Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

abweicht nehmen wir eine Unsicherheit von $\Delta D^* = \pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ an. =====
 Man erhält nach der Anpassung⁴ die Werte: $b = (1,5346 \pm 0,0030) \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{kg m}^2$ und $c = (186,587 \pm 0,800) \text{ s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 3.4 folgt durch Koeffizientenvergleich $D^* = (8,189 \pm 0,015) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ » » » > 7f87df1d78da537607abe4981a243fca98cd9d4b
 » » » > 0ca451c68b5b52fe32781abe016ca162189b079b

Die Schwingungsdauer der Hantel ohne Scheiben T_0 betrug $(13,01 \pm 0,03) \text{ s}$. Es folgt mit Gleichung 3.3 für das Trägheitsmoment des Hantelstabes $J_1 = (1,40 \pm 0,04) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$.

$$J = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \pm \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D^*}{D^*}\right)^2} \quad (3.3)$$

Aus dem Parameter c und der Gleichung 3.4 und $a = 0$ folgt für das Trägheitsmoment der Hantelscheiben mit Schwerpunkt auf der Rotationsachse die Gleichung 3.5 und $J_2 = (5,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (J_1 + 2J_2 + 2m_2 a^2) \quad (3.4)$$

$$J_2 = \frac{c D^*}{8\pi^2} - \frac{J_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c D^*}{8\pi}\right)^2 \left(\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D^*}{D^*}\right)^2\right) + \left(\frac{J_1}{2}\right)^2} \quad (3.5)$$

$$J_{allg.} = \int r_{\perp}^2 dm \quad (3.6)$$

Zum Vergleich wurden die theoretisch vorhergesagten Trägheitsmomente nach Gleichung 3.6 bestimmt und in Tabelle 5 mit den experimentell bestimmten zum Vergleich aufgeführt.

Tabelle 5: Vergleich der experimentellen Trägheitsmomente mit den theoretisch berechneten

Objekt	Theoretischer Wert	Experimenteller Wert
Hantelstange J_1	$(1,324 \pm 0,004) \cdot 10^{-3}$	$(1,40 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$
Scheibe J_2	$(5,76 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}$	$(5,1 \pm 0,5) \cdot 10^{-4}$

⁴Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

3.3. Diskussion

Im Vergleich mit den Literaturwerten erscheint eine Stahllegierung wahrscheinlich. So besitzt zum Beispiel „CrV-Federstahl“ oder „V2A-Stahl“ ein Schubmodul⁵ $G = 8,000 \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$. Genauso Wahrscheinlich sind jedoch auch andere Stahllegierungen, da die Eigenschaften von den genauen Anteilen der Legierungsbestandteilen steuerbar sind und das gewünschte Schubmodul mit verschiedenen Zusätzen erreicht werden kann. An den Werten in Tabelle 5, dass der theoretische Wert für das Trägheitsmoment liegen jeweils in der 2σ -Umgebung des experimentell bestimmten Wertes und stellen somit keinen Widerspruch dar. Die weiteren berechneten Werte lassen sich nicht einordnen, da es sich um Materialkonstanten handelt und die Materialien nicht bekannt sind. Bei einer Weiterführung der Versuchsreihe wäre die Pendeldauer der Hantel für das größte a zu wiederholen um zu überprüfen ob es sich wie angenommen um einen Fehler handelt oder ob die Abweichung reproduzierbar ist. Sollte eine höhere Genauigkeit erforderlich sein, sollte insbesondere J_1 genauer bestimmt werden, da dieser Wert für weitere Rechnungen benötigt wird. Eine höhere Genauigkeit von D^* , welches auch Grundlage weiterer Berechnungen ist, ist nur durch allgemeine Techniken wie mehr Abstände vermessen oder über viele Perioden mehrfach messen möglich und somit deutlich aufwendiger.

4. Schlussfolgerung

⁵entnommen: Gerthsen Physik, Vogel 1977

A. Anhang

A.1. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung u für die Intervallbreite a :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung u :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung u für die Messwerte x_i und den Mittelwert \bar{x} :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kominierte Standardunsicherheit der Messgröße $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Elastizitätsmodul E :

$$E = \frac{F}{h_{\max} I_q} \frac{L^3}{3} \quad (\text{A.5})$$

Flächenträgheitsmoment Kreis:

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi d^4}{64} \quad (\text{A.6})$$

Flächenträgheitsmodul Rechteck:

$$I_{\text{Rechteck}} = \frac{bc^3}{12} \quad (\text{A.7})$$

b senkrecht zur Biegungsebene, c waagrecht zu Biegungsebene.

Kraft:

$$F = 10 \cdot a \cdot m \quad (\text{A.8})$$

a ist die Steigung entnommen aus den Abbildungen ??, ??

Unsicherheit des Elastizitätsmoduls für Runde Stäbe:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot u_d}{d}\right)^2} \quad (\text{A.9})$$

Unsicherheit des Elastizitätsmoduls für eckige Stäbe:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_c}{c}\right)^2} \quad (\text{A.10})$$