

Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll M5

Jo-Jo und Kreisel

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Lukas Britt

20. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung	1
2. Maxwellsches Fallrad	1
2.1. Methoden	2
2.2. Daten und Analyse	3
2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt	3
2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung	4
2.2.3. Vergleich der Abrollradien	6
3. Kreisel	6
3.1. Methoden	6
3.2. Unsicherheiten des Kreisel	8
3.3. Daten und Analyse	9
4. Schlussfolgerung	13
A. Anhang	14
A.1. Verwendete Programme	14
A.2. Verwendete Gleichungen	14
Literatur	15

1. Zusammenfassung

Der Versuchstag bestand aus zwei Experimenten, welche die Rotation starrer Körper betrachten. Zunächst wurde das Fallverhalten des Maxwellsche Fallrad, ähnlich einem Jo-Jo, untersucht und anschließend die Präzessionsbewegung eines Kreisels.

Bei dem Maxwellschen Fallrad wurde eine gleichmäßig beschleunigte Translation und Rotation beobachtet. Aus Abmessungen und Gewicht wurde das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bestimmt, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$ bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11) \text{ m}$ geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04) \text{ m}$ verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt die vorherige Messung.

Bei dem Kreisel wurde die Präzessionszeit T_p bei annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gemessen. Bei dem untersuchten Kreisel handelte es sich um einen schweren, symmetrischen Kreisel. Es sollte das Trägheitsmoment J des Kreisels bestimmt werden. Einerseits experimentell über den Zusammenhang nach Gleichung 3.1 zwischen Präzessionszeit und angreifendem Drehmoment nach Abb. 9 (im folgendem $J_{\text{exp.}}$ genannt). Andererseits aus Masse und Radius der Kugel zuzüglich einem gegebenen Trägheitsmoment des Stabes mit dem Zusatzgewicht, im folgendem J_{theo} genannt. Da sich $J_{\text{theo.}} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ und $J_{\text{exp.}} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ deutlich voneinander unterscheiden ist zu vermuten, dass beim Experimentieren Fehler unterlaufen sind.

2. Maxwellsches Fallrad

Im ersten Teil des Experimentes wurde das Mawellsche Fallrad gemäß Abb. 1 untersucht. Hierbei wird, anders als im freien Fall, die potentielle Energie nur zum Teil in kinetische Energie umgewandelt, da das Rad zu rotieren beginnt. Dies resultiert in einer verlangsamten Fallbewegung mit Beschleunigung g^* .

Aus dem geometrischen Aufbau sowie der Masse folgt das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes, die Beschleunigung konnte direkt bestimmt werden. Der Steinersche

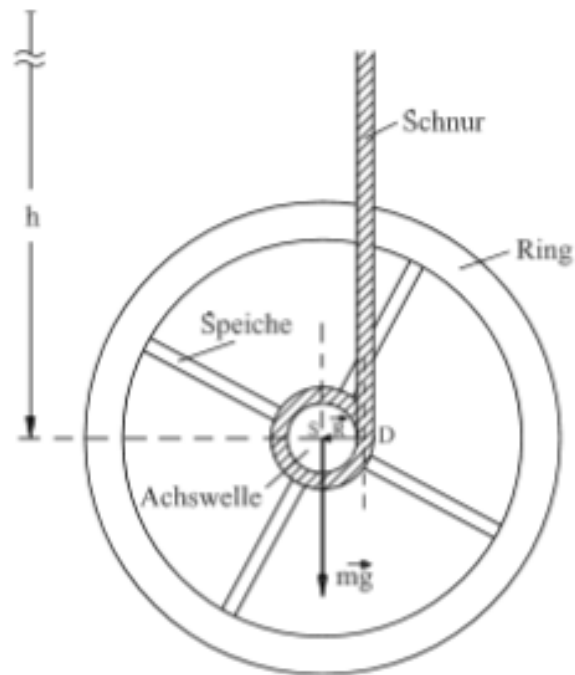


Abbildung 1: Seitenansicht des maxwellschen Fallrades.[1]

Satz erlaubt nun Rückschlüsse auf den Abrollradius. Dieser wurde mit dem gemessenen Radius verglichen.

2.1. Methoden

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wurde das Rad unter Benutzung eines Messschiebers mit Nonius vermessen. Alle Bestandteile wurden hierbei als Voll- oder Hohlzylinder betrachtet. Die Verdickung am Schnittpunkt der Achsen wurde nicht vermessen, zum Ausgleich wurde das Schnittvolumen der Speichen doppelt berücksichtigt. Da der Abstand der Verdickung zur Drehachse klein gegenüber dem Abstand des äußeren Ringes ist, ist davon auszugehen, dass der Unterschied zu vernachlässigen ist. Größen welche in vierter Potenz in das Trägheitsmoment eingingen wurden mehrfach gemessen, um den Einfluss von möglichen Unebenheiten des Rades auf die Ergebnisse zu verringern. Die Masse des Rades wurde mittels einer Waage bestimmt. Anschließend wurden die Fallzeiten t für fünf verschiedene Höhen h je fünfmal mit einer Stoppuhr manuell bestimmt.

2.2. Daten und Analyse

Im Folgenden soll nun zunächst das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes J_s bestimmt werden. Anschließend wird die effektive Beschleunigung aus den Fallzeiten für verschiedene Höhen ermittelt und abschließend werden die Abrollradien mit Hilfe des Steinerschen Satzes verglichen.

2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt

Allgemein ist das Trägheitsmoment J definiert durch:

$$J = \int_V \vec{r}_\perp^2 \varrho(\vec{r}) dV. \quad (2.1)$$

Angewandt auf die vorliegende Geometrie bei Annahme einer konstanten Massenverteilung folgt bezüglich der Symmetrieachse folgt:

$$J_s = J_K + 2J_S + J_A \quad (2.2)$$

$$= \varrho \pi \left[\frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) + 2H_S \left(\frac{H_S^2}{12} R_S^2 + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_A}{2} R_A^4 \right]. \quad (2.3)$$

Wobei H die jeweilige Höhe und R den jeweiligen Radius des Zylinders beschreiben. R_a und R_i stehen für Außen- bzw. Innenradius des äußeren Kreisrings. Die Dichte ϱ ist als Masse pro Volumen gegeben mit

$$\varrho = \frac{M}{\pi (H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2H_S R_S^2 + H_A R_A^2)}. \quad (2.4)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 2.4 in Gleichung 2.3 erhält man das Trägheitsmoment

$$J_s = \frac{M \left(2H_S \left(\frac{H_A R_A^4}{2} + \frac{H_S^2 R_S^2}{12} + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) \right)}{H_A R_A^2 + H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i}. \quad (2.5)$$

Die Abmessungen welche mehrfach gemessen wurden, wurden arithmetisch gemittelt ihre Unsicherheit wurde nach Gleichung A.4 unter Berücksichtigung der Ableseungenauigkeit (0,02 mm) und der statistischen Unsicherheit berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 1 notiert. Mit den Messwerten aus Tabelle 1 folgt aus den Gleichungen 2.5 und A.6 bezüglich der

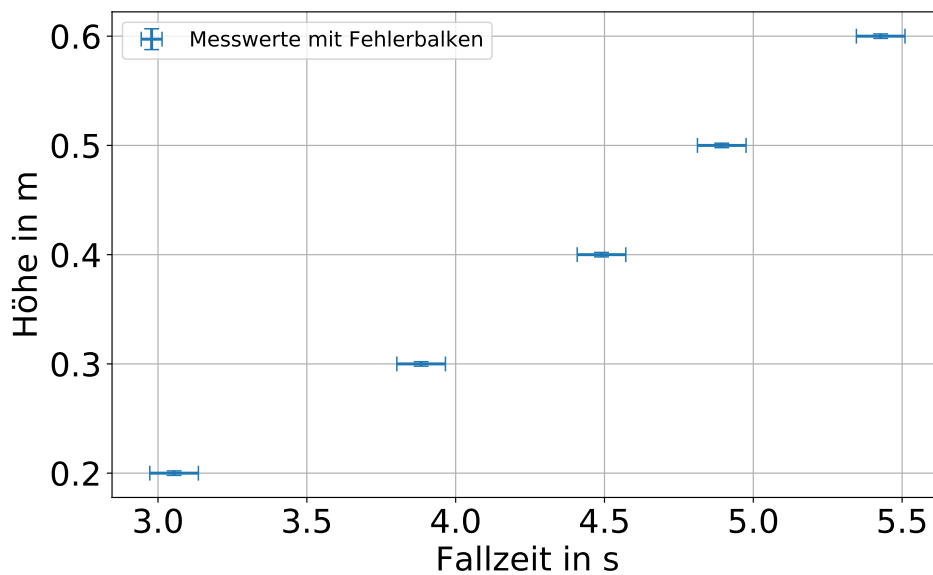
Tabelle 1: Abmessungen des Fallrades

Masse des Fallrades M	$(0,732\,040 \pm 0,000\,006) \text{ kg}$
Höhe bzw. Tiefe des Kreisrings H_k K	$(0,011\,62 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius R_a	$(0,085\,11 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Innenradius und Speichenhöhe $R_i = H_S$	$(0,072\,71 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius R_a	$(0,004\,05 \pm 0,000\,02) \text{ m}$
Speichenradius R_S	$(0,004\,03 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Achsenhöhe H_A	$(0,200\,30 \pm 0,000\,02) \text{ m}$

Symmetrieachse $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Der relative Fehler ist $\frac{\Delta J_s}{J_s} = 0.2\%$.

2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung

Um abschließend den gemessenen Abrollradius mit dem Abrollradius nach steinerschem Satz vergleichen zu können, wird neben dem Trägheitsmoment die effektive Beschleunigung g^* benötigt.

**Abbildung 2:** Die Höhe h des Fallrades in Abhängigkeit der jeweiligen Fallzeiten t .

Die Abbildung 2 stellt die Messwerte dar. Da die theoretischen Betrachtungen und der Graph eine quadratische Abhängigkeit suggerieren, werden diese Messwerte anschließend

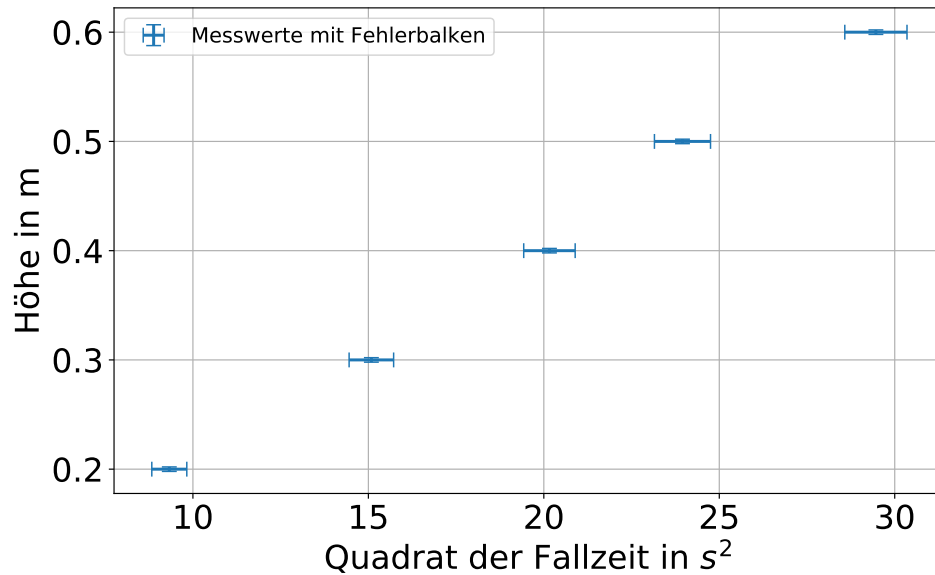


Abbildung 3: Die Messpunkte nach Abb. 2 in Einheiten von t^2 .

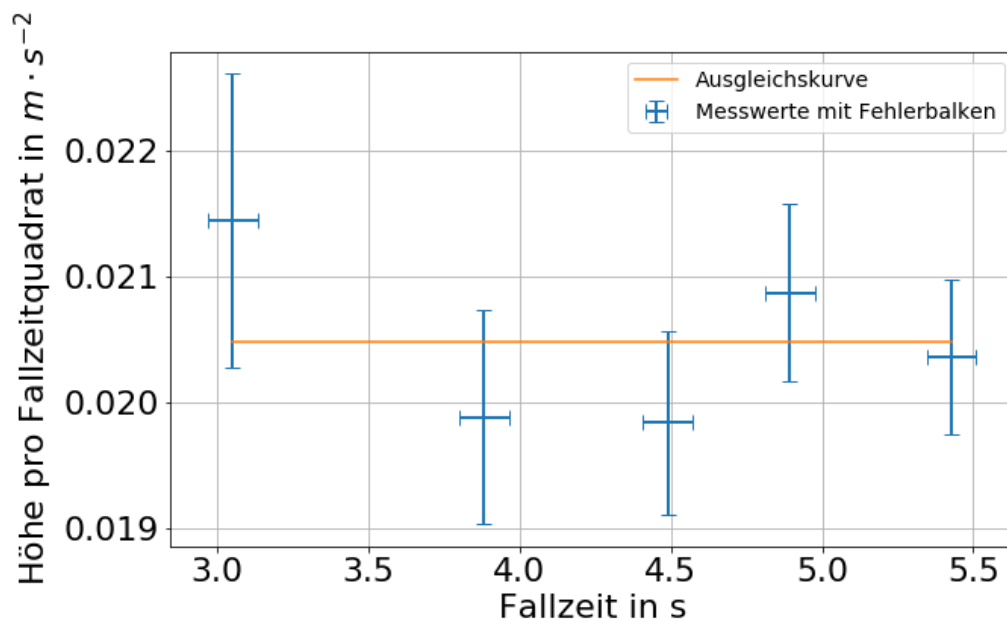


Abbildung 4: Messpunkte aus Abb. 2 in Einheiten von $\frac{h}{t^2}$

in Abbildung 3 linearisiert dargestellt. Abbildung 4 stellt die jeweiligen Steigungen einer

geraden durch Ursprung und Messpunkt der Abbildung 3 dar.

Anschließend wurde das arithmetische Mittel c der Datenpunkte aus Abbildung 4 gebildet. Aus der zugehörigen Bewegungsgleichung ist abzulesen, dass $\frac{g^*}{2} = \frac{h}{T^2} = c$. Es folgt: $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$.

2.2.3. Vergleich der Abrollradien

Aus der Zusammenhang zwischen der effektiven Beschleunigung und dem Abrollradius nach Gleichung 2.6 folgt für den Abrollradius Gleichung 2.7.

$$g^* = g \frac{mR^2}{J_s + mR^2} = 2c \quad (2.6)$$

$$R = \sqrt{\frac{2cJ_s}{M(g - 2c)}} \quad (2.7)$$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1, der effektiven Beschleunigung g^* aus Abbildung 4 sowie der Fallbeschleunigung g aufgrund des Erdschwerefeldes und der Unsicherheit nach Gleichung A.7 folgt $R = (0,00460 \pm 0,00011) \text{ m}$. Die Messung der Durchmesser von Faden und Aufhängeachse mit dem Messschieber ergab einen Radius $R_{\text{geometrisch}} = (0,00455 \pm 0,00004) \text{ m}$. Der direkt gemessene Radius bestätigt den zuvor errechneten Wert. Des weiteren liefert die direkte Messung erwartungsgemäß die kleinere Unsicherheit.

3. Kreisel

Im zweiten Teil des Experimentes wurde das Trägheitsmoment eines Kreisels bestimmt.

3.1. Methoden

Zunächst wurde der Durchmesser der Kugel, die Länge l , die Masse m und für drei verschiedene Positionen des Zusatzgewichtes die Kraft F gemessen. Jede dieser Messungen, bis auf die der Masse, wurde je 5 mal durchgeführt. Die Messergebnisse sind in Abb. 9 aufgeführt. Die Längen wurden mit einem Messschieber gemessen und die Masse mit einer Waage mit digitaler Anzeige. Mithilfe dieser Werte, dem aus der Anleitung gegebenen Trägheitsmoment

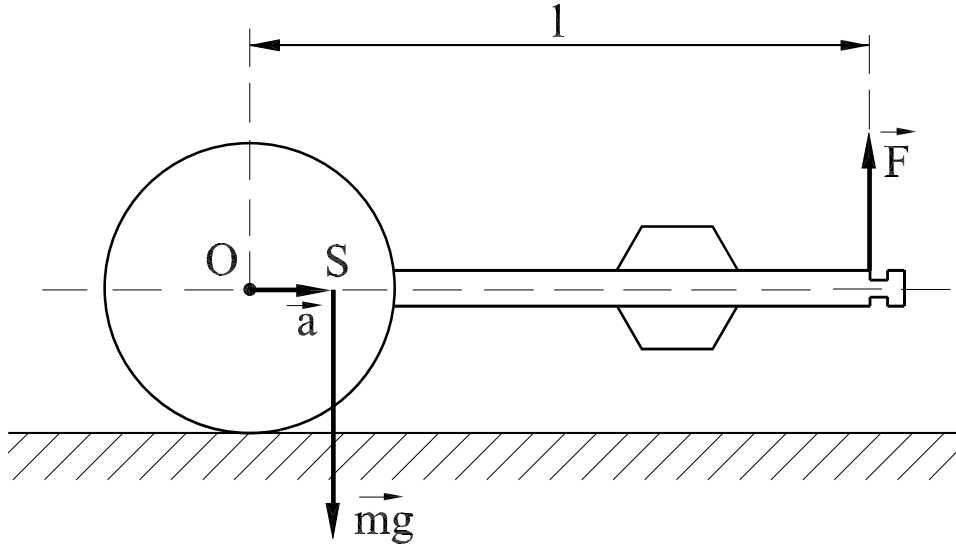


Abbildung 5: Schematische Darstellung des Kreisels bei Messung der Kraft F [1]

$J_{Stange} + J_{Zusatz} = 15 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ sowie den Formeln $J_{ges} = J_{Kugel} + J_{Stange} + J_{Zusatz}$ und $J_{Kugel} = \frac{2}{5}mr^2$ wurde der Wert für $J_{theo.} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ berechnet. Ein anderer Weg das Trägheitsmoment zu bestimmen war es, diesen über den Zusammenhang

$$2\pi J = \frac{l \cdot F}{\frac{\Delta\omega}{\Delta T_p}}. \quad (3.1)$$

zu berechnen. Um dieses Verhältnis zu erhalten wurde die Präzessionszeit T_p des Kreisels für drei unterschiedliche Positionen des Zusatzgewichtes bei fünf unterschiedlichen Frequenzen gemessen: Unten (Position 1), mittig (2) und oben (3). Zur Messung der Frequenz des Kreisels wurde der Kreisel mit einem Stroboskop beleuchtet. Die Frequenz des Stroboskops wurde als erstes eingestellt anschließend wurde der Kreisel solange beschleunigt, bis er die gleiche Frequenz hatte, wie das Stroboskop. Dass der Kreisel die gleiche Frequenz erreicht hatte, wie das Stroboskop wurde durch eine Markierung auf der Kugel des Kreisels ersichtlich. Sobald diese Markierung nahezu stillstand, war die

Stroboskopfrequenz erreicht. Es war jedoch nicht möglich zu verhindern, dass sich diese Markierung weiterbewegte. Da die Markierung sich jedoch sowohl mit der Drehbewegung bewegte, als auch in die entgegengesetzte Richtung wurde bei den Rechnungen davon ausgegangen dass sich diese entgegengesetzten Bewegungen in etwa aufheben. Die Präzessionszeit T_p wurde gemessen indem der Kreisel leicht gekippt wurde und die Zeit für mehrere Umdrehungen der Stange gemessen wurde. Um die Winkelgeschwindigkeit ω zu erhalten wurde die Frequenz mit 2π multipliziert. Die Präzessionszeit wurde dann für jede Position des Zusatzgewichtes gegen die Winkelgeschwindigkeit aufgetragen. Die Messwerte wurde mit einem linearen Fit angepasst und das Produkt $l \cdot F$ wurde gegen den Kehrwert der drei Steigungen aufgetragen. Die Steigung der linearen Anpassung mit dem diese drei Punkte angepasst wurde entspricht $J \cdot 2\pi$.

3.2. Unsicherheiten des Kreisel

Bei dem Experiment traten an einigen Stellen, sowohl bei der Durchführung als auch beim Rechnen Unsicherheiten auf, die im Folgendem näher erläutert werden. Die in den Abbildungen 6, 7 und 8 eingezeichneten Fehlerbalken ergeben sich für die Präzessionszeit T_p durch die Gleichungen A.1, A.2 und A.4. Die Rechteckverteilung (A.1) ist durch die Ableseungenauigkeit der Stoppuhr mit $a = 0,01$ s und die Dreiecksverteilung (A.2) ergibt sich durch die Reaktionszeit wobei $a = 0,4$ s angenommen wurde. Dieses Ergebnis wurde im Anschluss durch die Anzahl der Umdrehungen der Stange des Kreisel geteilt.

Für die Kreisfrequenz ergibt sich eine Unsicherheit von $2\pi\Delta f$ bedingt durch die analoge Skala des Stroboskops. Sie wurde durch eine Dreiecksverteilung abgeschätzt. Ein weiterer Fehler der in Betracht gezogen werden muss ist, dass die Markierung auf der Kugeloberfläche nie vollständig stillstand, sondern wanderte. Da diese Abweichungen jedoch in gleichem Maße in beide Richtungen Abwichen, ist davon auszugehen dass diese nicht durch größere Unsicherheiten zu berücksichtigen sind. Bei den Fehlerbalken in Abbildung 9 ergeben sich die Fehlerbalken einmal für den Kehrwert der Steigungen durch den prozentualen Fehler der Steigung multipliziert mit dem Kehrwert der Steigungen aus den Abbildungen 6, 7 und 8. Die Unsicherheiten der Steigungen wurden dem Fit Programm entnommen. Die Fehlerbalken des $l \cdot F$ Produktes ergeben sich nach Gleichung A.5 mit den Unsicherheiten für l und F nach Tabelle 2.

Des Radius R und die Länge der Stange l wurden mithilfe eines Messschiebers mit Nonius gemessen. Bei der Messung fiel auf, dass meistens jeweils zwei Messergebnisse gleich wahrscheinlich waren. Aus diesem Grund sind die Messergebnisse mit einer Unsicherheit nach Gleichung A.2 mit $a = 0,12 \text{ mm}$ versehen, wobei bei der Unsicherheit des Radius darauf zu achten war das der Durchmesser bestimmt wurde, weshalb der Fehler halbiert werden musste. Da die Kraft durch einem Kraftmesser mit analoger Anzeige bestimmt wurde, ergibt sich die Unsicherheit bezüglich F nach A.2 mit $a = 0,2 \text{ N}$. Für die Masse ergab sich die Unsicherheit durch die Messung des Gewichts mithilfe einer digitalen Waage. Also ergab sie sich nach Gleichung A.1 mit $a = 0,01 \text{ g}$. Die Unsicherheit von $J_{theo.}$ ergibt sich nach Gleichung A.5 angewandt auf die Gleichung 3.3 mit den nach den obigen Gleichungen für Unsicherheiten der Masse und des Radius. Die Unsicherheit des Trägheitsmomentes $J_{exp.}$ folgt aus der Unsicherheit der Steigung S der Geraden aus Abb. 9 mit $\Delta J_{exp.} = \frac{\Delta S}{2\pi}$.

3.3. Daten und Analyse

Die in den Abbildungen 6, 7 und 8 eingezeichneten Steigungen der linearen Anpassungen sind in 2 zusammengefasst. Man erkennt in den Abbildungen das einige Werte sehr stark von der Anpassung abweichen, dies lässt einen Fehler in der Durchführung vermuten.

Tabelle 2: Messwerte für die verschiedenen Positionen des Zusatzgewichtes

Position	$\Delta T_p / \Delta \omega$	Kraft F	Radius R	Masse m	Länge l
Unten (1)	$(5,13 \pm 0,09) \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}^2$	$(0,144 \pm 0,005) \text{ N}$	$(25,39 \pm 0,01) \text{ mm}$	$(512,240 \pm 0,003) \text{ g}$	$(84,82 \pm 0,02) \text{ mm}$
Mitte (2)	$(4,31 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}^2$	$(0,166 \pm 0,005) \text{ N}$	$(25,39 \pm 0,01) \text{ mm}$	$(512,240 \pm 0,003) \text{ g}$	$(84,82 \pm 0,02) \text{ mm}$
Oben (3)	$(3,59 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}^2$	$(0,220 \pm 0,005) \text{ N}$	$(25,39 \pm 0,01) \text{ mm}$	$(512,240 \pm 0,003) \text{ g}$	$(84,82 \pm 0,02) \text{ mm}$

Im nächsten Schritt wurde das Produkt der Länge l und der Kräfte F gegen den Kehrwert der Steigungen aus den Abbildungen 6, 7 und 8 aufgetragen. Daraus resultierte die Abbildung 9. Man erkennt das die lineare Anpassung die drei Messwerte nicht gut approximiert, da nur einer von drei Punkten im Rahmen der Standardunsicherheit auf der Ausgleichsgeraden liegt. Dies ist, wie schon vorher erwähnt, auf einen bei der Durchführung vermuteten Fehler zurückzuführen. Durch den in 3.1 beschriebenen Zusammenhang zwischen der Steigung der Geraden in Abb. 9 und dem Trägheitsmoment erhält man: $J_{exp.} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Dieser Wert wurde dann mit dem $J_{theo.}$ verglichen,

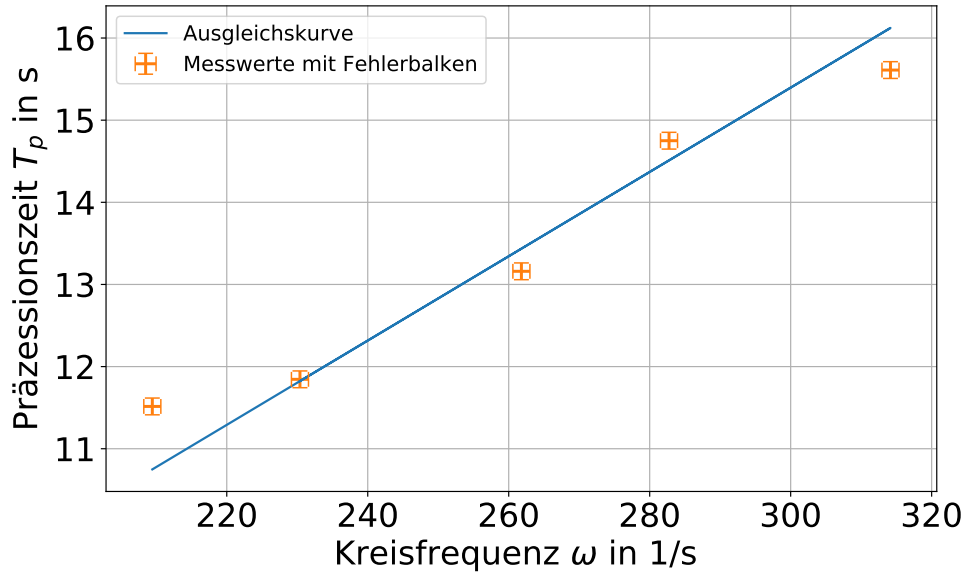


Abbildung 6: Aufgetragen ist die die Präzessionszeit T_p gegen die Kreisfrequenz ω bei Positionierung des Zusatzgewichtes bei Position 1.

der mithilfe der folgenden Gleichungen berechnet wurde:

$$J_{Kugel} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (3.2)$$

$$J_{exp} = J_{Kugel} + J_{Zusatz} \quad (3.3)$$

Masse und Radius der Kugel wurden wie in Kapitel 3.1 beschrieben gemessen und das Trägheitsmoment der Stange und des Zusatzgewichtes war mit $J_{Zusatz} = 15 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$ angegeben. Somit ergab sich dann folgender Wert: $J_{theo.} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Wie man erkennt unterscheiden die beiden Werte für das Trägheitsmoment um ca. 30 %.

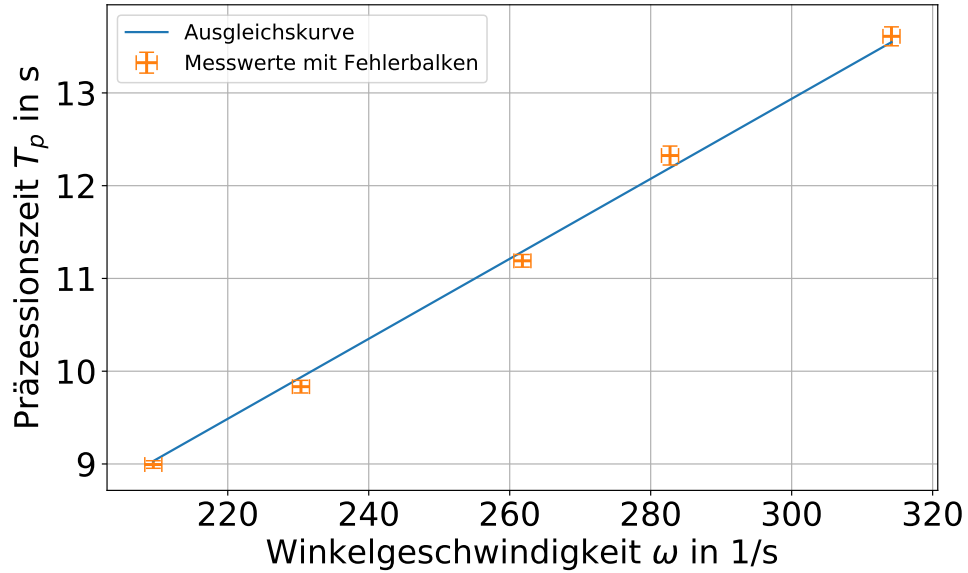


Abbildung 7: Aufgetragen ist die die Präzessionszeit T_p gegen die Kreisfrequenz ω bei Positionierung des Zusatzgewichtes bei Position 2.

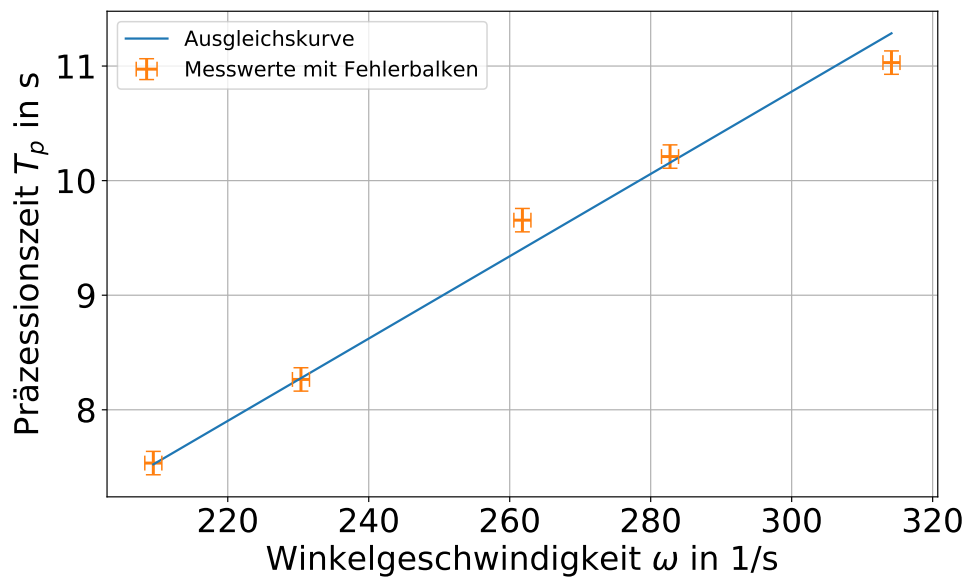


Abbildung 8: Aufgetragen ist die die Präzessionszeit T_p gegen die Kreisfrequenz ω bei Positionierung des Zusatzgewichtes bei Position 3.

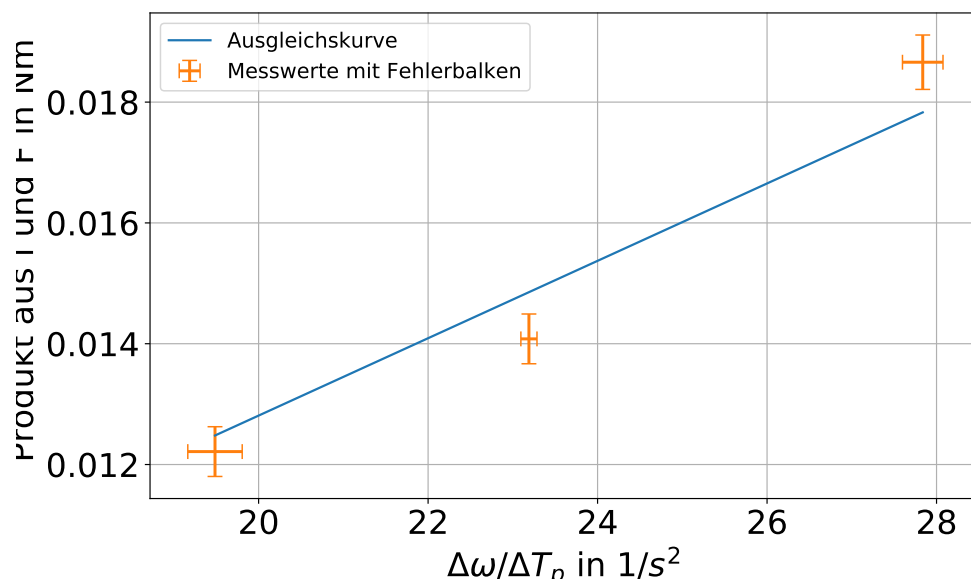


Abbildung 9: Aufgetragen ist das Produkt l mal F gegen $\frac{\Delta\omega}{\Delta T_p}$.

4. Schlussfolgerung

Bei dem Maxwellschen Fallrad wurde zunächst aus Abmessungen und Gewicht das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ errechnet, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$ bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11) \text{ m}$ geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04) \text{ m}$ verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt zum einen die vorherige Messung ist jedoch einfacher und genauer direkt zu bestimmen. Des weiteren plausibilisiert die Übereinstimmung der Abrollradien die Werte für effektive Beschleunigung und Trägheitsmoment. Somit bestätigen die Messwerte die theoretischen Annahmen.

Bei dem Kreisel wurden für das Trägheitsmoment aus den Abmessungen und der Masse $J_{\text{theo.}} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ und aus dem Kreiselverhalten $J_{\text{exp.}} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ berechnet. Die Werte unterscheiden sich um ca. 30%. Dies ist entweder auf einen groben Rechenfehler zurückzuführen oder auf Fehler bei der Durchführung des Experimentes. Da auch nach mehrfacher Durchsicht kein Fehler gefunden werden konnte, ist es jedoch wahrscheinlicher das der Fehler bei der Durchführung des Experimentes zu suchen ist. Bei der Auswertung der Messwerte fiel auf das der Kehrwert der Steigung aus Abb. 7 am nach unten am Stärksten von der linearen Anpassung abweicht und das obwohl sich die Gemessenen Werte für die Präzessionszeit hier am besten Linearisieren ließen. Dies lässt einen systematischen Fehler zum Beispiel im Aufbau oder der Durchführung vermuten. Um verwertbare Ergebnisse zu erhalten müsste dieser Teil des Experimentes wiederholt werden.

A. Anhang

A.1. Verwendete Programme

Die Plots in Python erstellt. Für Anpassungen wurde der Levenberg–Marquardt Algorithmus verwendet. Die Fehler wurden nach Empfehlung des „GUM“, insbesondere mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

A.2. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung u für die Intervallbreite a :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung u :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung u für die Messwerte x_i und den Mittelwert \bar{x} :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kombinierte Standardunsicherheit der Messgröße $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Standardunsicherheit eines Wertes die sich aus mehreren Messgrößen mit Unsicherheiten

zusammensetzt:

$$u(f(x_1, \dots, x_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} u(x_i)^2 \quad (\text{A.5})$$

Unsicherheit des Trägheitsmomentes :

$$\begin{aligned} \Delta J_S = & \frac{1}{6} [((H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^4)^{-1} (4M^2 R_S^2 \Delta R_S^2 (H_S(H_S^2 + 6R_S^2)(H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2R_i(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4)))^2 + \\ & M^2(4H_A^2 R_A^2 \Delta R_A^2 (12H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + \\ & 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + 4H_k^2 R_a^2 \Delta R_a^2 (-H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4) + \\ & 6R_a^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + R_A^4 \Delta H_A^2 (6H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - \\ & H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + \Delta H_k^2 ((R_a^2 - R_i^2)(H_S(6H_A R_A^2 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + \\ & 3H_k(R_a^4 - R_i^4)) - 3(R_a^4 - R_i^4)(H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + \Delta R_i^2 (12.0H_k R_i^3 (H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4))(H_k R_i - R_S^2))^2) + \\ & (9M^2 \Delta H_S^2 (2H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + R_S^4)^2 + \Delta M^2 (H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - \\ & R_i^4))^2) (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Unsicherheit des Abrollradius:

$$\Delta R = \left[\left(\frac{\Delta M c J}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{(cJ)/((g-2c)M) M^2}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta J c}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{\frac{Jc}{(g-2c)M} M}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c g \sqrt{Jc}}{c(g-2c) \sqrt{2gM-4Mc}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

Literatur

- [1] Markus Donath und Anke Schmidt. *Begleitkurs zu den Experientellen Übungen I*. 2017. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/course/view.php?id=28561> (besucht am 03.01.2018).