

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll E1

### Gleich-und Wechselstrom

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Katharina Ritter

10. Januar 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2. Innenwiderstand einer Batterie</b>	<b>1</b>
2.1. Methoden . . . . .	1
2.2. Daten und Analyse . . . . .	2
<b>3. Leistungsaufnahme</b>	<b>4</b>
3.1. Methoden . . . . .	4
3.2. Daten und Analyse Widerstand . . . . .	5
3.3. Daten und Analyse Spule . . . . .	8
3.4. Daten und Analyse Kondensator . . . . .	10
<b>4. Schlussfolgerung</b>	<b>12</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>14</b>
A.1. Verwendete Hilfsmittel . . . . .	14
A.2. Unsicherheiten . . . . .	14
A.3. Gleichungen aus der Einführung . . . . .	15
<b>Literatur</b>	<b>16</b>

## 1. Zusammenfassung

Im ersten Abschnitt wird der Einfluss einer Schaltung auf die Spannungsquelle untersucht, da im Allgemeinen die Klemmspannung der Quelle abhängig von der angeschlossenen Last ist. Dieser Sachverhalt wird im ersten Abschnitt mit Batterien simuliert welche, zur Verdeutlichung, mit einem Vorwiderstand versehen sind. Bei dem gegebenen Aufbau beträgt der „Innenwiderstand“  $(17,7 \pm 0,6) \Omega$  und die Leerlaufspannung  $U_E = (1,27 \pm 0,02) \text{ V}$  für einen Akkumulator. Des Weiteren werden die theoretischen Vorhersagen für ein Parallel- bzw. Reihenschaltung aus drei Akkumulatoren bestätigt.

Im zweiten Teil des Protokolls werden verschiedene Schaltungen  $[a), b), c)$  nach Abb. 3] behandelt. Zunächst wird die Leistungsaufnahme an einem Widerstand betrachtet. Die Beziehungen  $U = RI$  und  $P = UI$  werden bestätigt. Danach wurde über diese Zusammenhänge die Induktivität einer Spule berechnet. Der errechnete Wert liegt bei  $L = (0,060 \pm 0,004) \text{ H}$ . Wegen einem fehlendem Vergleichswert ist es nicht möglich dieses Ergebnis exakt zu bewerten. Da jedoch mithilfe der Induktivität die Kapazität eines zusätzlich in Reihe geschalteten Kondensators berechnet wird und dieser Wert mit  $(57 \pm 4) \mu\text{F}$  im Bereich der Unsicherheiten von dem abgelesenen Wert  $(60 \pm 3) \mu\text{F}$  liegt, ist anzunehmen, dass die Induktivität im Bereich der theoretischen Induktivität liegt.

## 2. Innenwiderstand einer Batterie

Es wird im Folgenden der Innenwiderstand einer Schaltung aus Akkumulatoren bestimmt. Zur Verdeutlichung des Effektes ist vor jeden Akkumulator ein zusätzlicher Widerstand fest eingebaut.

### 2.1. Methoden

Zur Bestimmung des Innenwiderstandes wird die Klemmspannung der Spannungsquelle für verschiedene Außenwiderstände gemessen. Aus Spannung und Widerstand wird die Spannung  $U$  in Abhängigkeit der Stromstärke  $I$  (Abb. 1) und die Leistung  $P$  in Abhängigkeit des Außenwiderstandes  $R_a$  (Abb. 2) berechnet. Aus den Ausgleichskurven folgen jeweils die Klemmspannung ohne Last  $U_0$  sowie der Innenwiderstand  $R_i$ . Betrachtet

**Tabelle 1:** Leerlaufspannung und Innenwiderstand der Spannungsquellen aus den Kennlinien

Schaltung	Leerlaufspannung $U_0$	Innenwiderstand $R_i$
Einzelne Monozelle	$(1,28 \pm 0,01) \text{ V}$	$(17,7 \pm 0,4) \Omega$
Parallelschaltung	$(1,289 \pm 0,003) \text{ V}$	$(5,99 \pm 0,06) \Omega$
Reihenschaltung	$(4,03 \pm 0,12) \text{ V}$	$(57 \pm 3) \Omega$

**Tabelle 2:** Leerlaufspannung und Innenwiderstand der Spannungsquellen aus der Leistung

Schaltung	Leerlaufspannung $U_0$	Innenwiderstand $R_i$
Einzelne Monozelle	$(1,27 \pm 0,02) \text{ V}$	$(17,6 \pm 0,6) \Omega$
Parallelschaltung	$(1,282 \pm 0,007) \text{ V}$	$(5,91 \pm 0,09) \Omega$
Reihenschaltung	$(4,26 \pm 0,21) \text{ V}$	$(63 \pm 5) \Omega$

werden als Spannungsquelle: eine einzelne Monozelle, eine Parallelschaltung sowie eine Reihenschaltung aus drei Monozellen.

Aus der Ablesungenauigkeit des Voltmeters folgt als Standardunsicherheit  $u(U)=0,2 \text{ V}$ , die relative Unsicherheit der Steckwiderstände wird mit 5% abgeschätzt.

## 2.2. Daten und Analyse

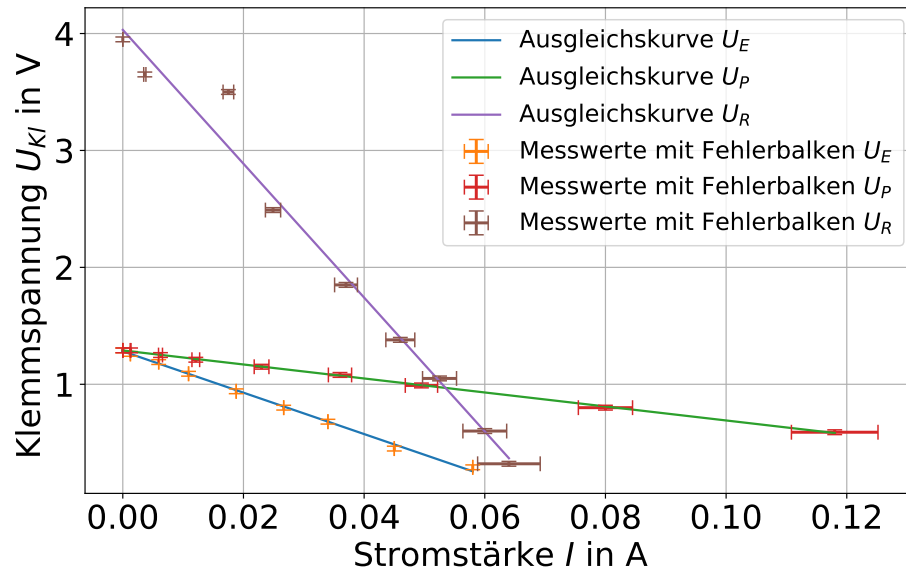
Aus den Messpunkten  $U(R_a)$  folgt mit dem Ohmschen Gesetz Abb. 1. Mit  $U_{Kl} = U_0 - R_a I$  folgt, dass die Steigung der Ausgleichsgerade dem negativen des Innenwiderstandes entspricht. Ohne Stromfluss gilt  $U_0 = U_{Kl}$ , deswegen entspricht der Y-Achsenabschnitt der Leerlaufspannung  $U_0$  der „idealen Spannungsquelle“ [2]. Die aus den Parametern der Anpassungsgerade gefundenen Werte sind in Tabelle 1 dargestellt.

Die Leistung am äußeren Widerstand ist gegeben durch:

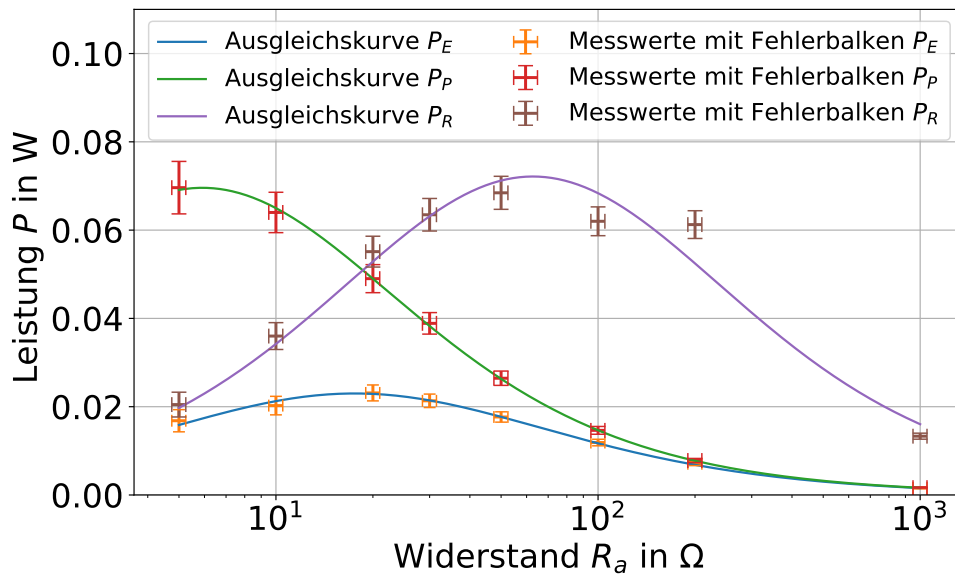
$$P = \frac{U_{Kl}^2}{R_a} \quad (2.1)$$

$$= U_0^2 \frac{R_a}{(R_a + R_i)^2}. \quad (2.2)$$

Gleichung 2.1 wurde verwendet um die Leistungen zu berechnen, die Ausgleichskurve wurde nach Gleichung 2.2 erstellt. Die Werte für  $U_0$  und  $R_i$  ergeben sich aus der Ausgleichskurve und sind in Tabelle 2 dargestellt. Die maximale Leistung ergibt sich, bedingt durch den gewählten Ansatz in Gleichung 2.2, für  $R_a = R_i$ .



**Abbildung 1:** Spannungsverläufe der Monozelle  $U_E$ , der Parallelschaltung von drei Monozellen  $U_P$  und der Reihenschaltung von drei Monozellen  $U_R$  in Abhängigkeit der Stromstärke  $I$ .



**Abbildung 2:** Leistung  $P$  am Lastwiderstand  $R_a$  in dessen Abhängigkeit

Die Werte aus den Tabellen 1 und 2 sind in sich, innerhalb der  $2\sigma$ -Umgebung konsistent. Die theoretische Vorhersage, dass die Spannungen  $U_E$  und  $U_P$  gleich sind wird ebenfalls bestätigt. Die Leerlaufspannung  $U_R$  entspricht im Rahmen der Unsicherheiten dem Erwartungswert  $3U_E$ . Jedoch weicht er stärker ab als die vorherigen. Eine mögliche Ursache könnte eine unterschiedliche Leerlaufspannungen der einzelnen Batterien, bedingt durch vorherige Verwendung sein. Aus den Regeln zur Berechnung von Ersatzwiderständen folgen:  $R_P = \frac{R_E}{3}$  und  $R_R = 3R_E$ . Die gemessenen Widerstände bestätigen, innerhalb der  $2\sigma$ -Umgebung, die theoretischen Erwartungen. Die Größenordnung der Widerstände ist plausibel, da der vorgeschaltete „Innenwiderstand“ laut Hersteller  $(18,0 \pm 1,8) \Omega$  und der tatsächliche Innenwiderstand in der Größenordnung  $40 \text{ m}\Omega$  liegt [1].

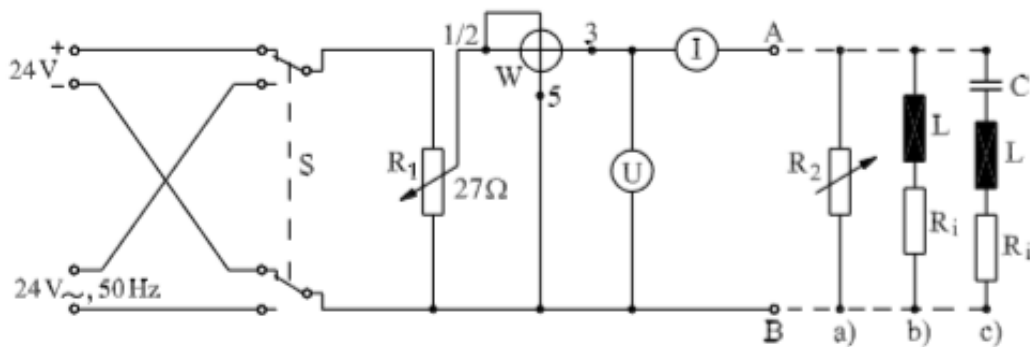
### 3. Leistungsaufnahme verschiedener elektronischer Bauteile

In diesem Kapitel werden drei verschiedene Schaltungen behandelt (vgl. Abb. 3):

- Zuerst wird für Schaltung a) der Zusammenhang zwischen Strom, Spannung und Leistung untersucht.
- Im zweiten Teil wird für Schaltung b) der Betrag des Phasenwinkels  $|\phi|$ , der Wirkwiderstand  $R_W$  sowie die Induktivität  $L$  einer Spule berechnet.
- Zuletzt wird mit den Ergebnissen aus dem zweiten Teil die Kapazität  $C$  dreier, in Reihe geschalteter Kondensatoren nach Schaltung c) bestimmt, diese werden im Folgenden als ein Kondensator betrachtet.

#### 3.1. Methoden

Es werden in einer Schaltung gemäß Position a) in Abb. 3 Leistung und Stromstärke bezüglich des Widerstandes  $R_2$  bei fünf verschiedenen Spannungen bei Gleich- und Wechselstrom gemessen. Anschließend wird der Zusammenhang zwischen der Spannung  $U$  und der Stromstärke  $I$ , welcher mithilfe des Widerstandes definiert ist, untersucht. Der



**Abbildung 3:** Schaltskizze, die die im zweiten Teil des Protokolls behandelten Schaltungen beschreibt.[2]

Zusammenhang zwischen Leistung  $P$  und dem Produkt aus Spannung und Stromstärke  $UI$  wurde in Abb. 6 graphisch dargestellt. Um die im zweiten Teil genannten Größen zu berechnen wurde die Spannung  $U$ , der Strom  $I$  und die Leistung  $P$  gemessen. Die Spannung und der Strom wurden sowohl bei Wechselstrom, als auch bei Gleichstrom bestimmt, während die Leistung nur bei Wechselstrom gemessen wurde. Zu beachten ist, dass es sich bei allen im weiteren genannten Werte für  $U$ ,  $I$ , die bei Wechselstrom gemessen wurden, um Effektivwerte handelt und  $P$  nur gemittelt angegeben werden kann. Im letzten Teil werden die Werte für die Induktivität und den Innenwiderstand aus dem zweiten Teil übernommen und zusätzlich wurde die Spannung, der Strom und die Leistung bei Wechselstrom aufgenommen. Die Messungen wurden mit einem Multimeter, einem Amperemeter und einem Wattmeter durchgeführt. All diese Messgeräte waren mit einem analogen Skala versehen. Aus diesem Grund sind alle Unsicherheiten der Messwerte, durch eine Dreiecksverteilung abzuschätzen.

### 3.2. Daten und Analyse Widerstand

In Abb. 4 ist zu erkennen, dass Spannung und Stromstärke proportional zueinander sind. Die Steigung der Ausgleichsgeraden gibt den Widerstand an. Bei Gleichstrom beträgt der Widerstand  $(27,8 \pm 0,7) \Omega$ , bei Wechselstrom  $(26,1 \pm 0,5) \Omega$ . Der Widerstand hat laut Hersteller  $27 \Omega$ . Folglich stimmen alle drei Angaben im Rahmen des  $2\sigma$ -Intervalls überein. Um die Abweichungen detaillierter betrachten zu können, sind die Widerstände  $R_a$  in Abb. 5 gegen die Spannung  $U$  aufgetragen. Zu erkennen ist, dass die ersten Messpunkte

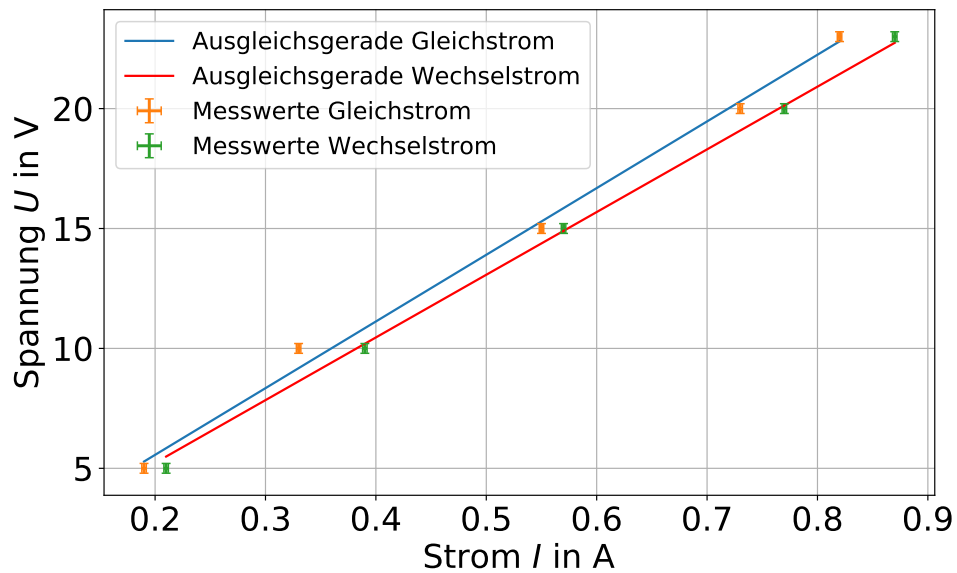


Abbildung 4: Relation von Spannung und Stromstärke an dem Verbrauchswiderstand  $R_2$ .

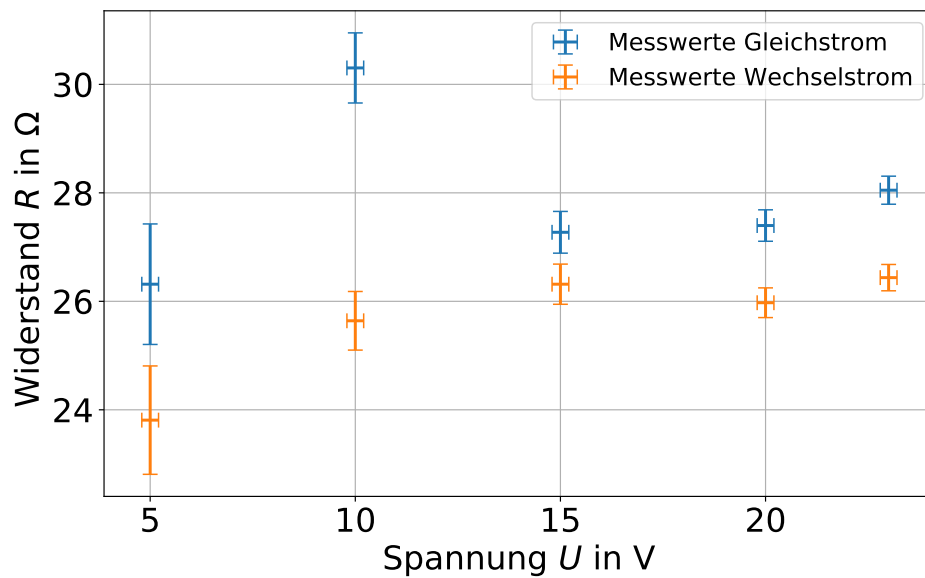
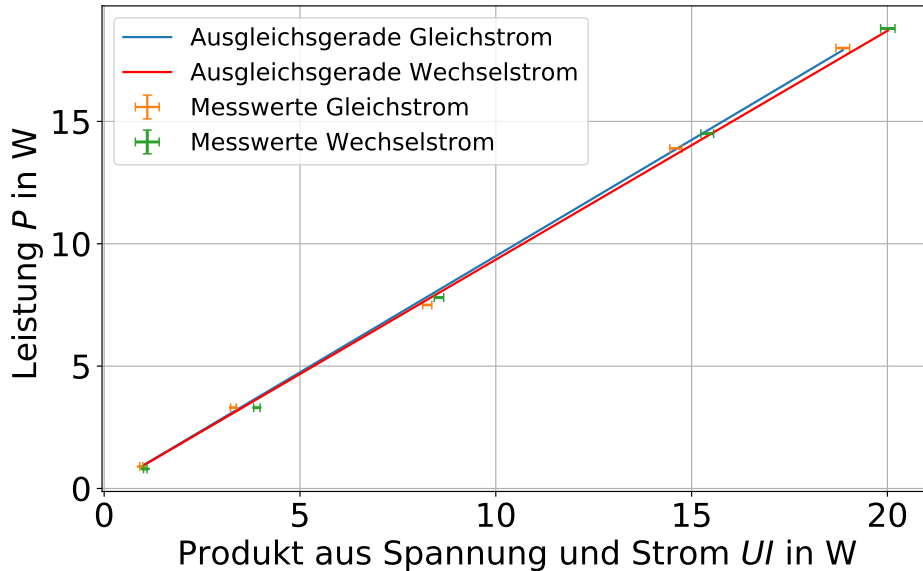


Abbildung 5: Widerstand  $R = \frac{U}{I}$  gegen Spannung  $U$  bei Gleich- bzw. Wechselstrom.



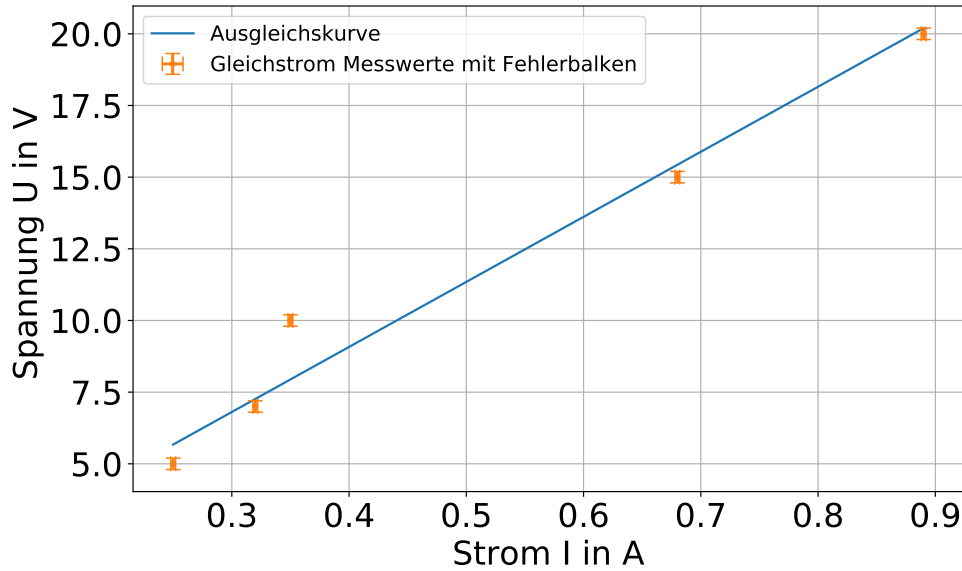


**Abbildung 6:** Zusammenhang zwischen Leistung  $P$  und dem Produkt aus Spannung und Stromstärke  $UI$  für Gleich- und Wechselstrom.

jeweils unterhalb des Mittelwertes lagen, dies lässt vermuten, dass der Widerstand bei Beginn der Messung noch kälter war. Der Messpunkt bei  $U_{eff} = 10\text{ V}$  ist auf einen groben Fehler bei der Messung oder Laborbuchführung zurückzuführen.

Die Leistung ist bei Gleichstrom definiert als  $P = UI$ , folglich sollte die Steigung der Ausgleichsgeraden eins sein. Die Anpassung beziffert die Steigung der Ausgleichsgeraden für Gleichstrom in Abb. 6 mit  $S_G = (95,0 \pm 0,8)\%$ . Analog gilt für Wechselstrom  $P_{eff} = U_{eff}I_{eff} \cos(|\phi|)$  mit  $|\phi| = 0$ , da ein Ohmscher Widerstand verwendet wurde. Die Steigung der Ausgleichsgeraden für Wechselstrom in Abb. 6 beträgt  $S_W = (93,5 \pm 0,8)\%$ . Beide Werte weichen um mehr als  $6\sigma$  von dem theoretisch vorhergesagten Wert ab. Da jedoch bei der Messung der Leerlaufleistung des Voltmeters festgestellt wurde, dass diese negativ war und mit zunehmender Spannung weiter sank, begründet es, dass die gemessenen Leistungen unterhalb der Erwartungen liegen. In sofern bestätigt die Messung die Größenordnung, zeigt jedoch Mängel in den Messgeräten und wäre ggf. mit zuverlässigeren Instrumenten zu wiederholen.

### 3.3. Daten und Analyse Spule



**Abbildung 7:** Die Spannung  $U_{eff.}$  gegen den Strom  $I_{eff.}$  für Gleichstrom.

Die gemessenen Werte wurden in den Abbildungen 7, 8 und 9 dargestellt. Die für die weitere Auswertung wichtigen Gleichungen lauten:

- Für Wechselstrom, im Experiment mit  $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz.}$ :

$$|Z| = \sqrt{R_W + \omega^2 L^2} \quad (3.1)$$

$$L = \frac{\sqrt{|Z|^2 - R^2}}{\omega} \quad (3.2)$$

$$|Z| = \frac{U_{eff.}}{I_{eff.}} \quad (3.3)$$

$$|\phi| = \arccos\left(\frac{\bar{P}}{U_{eff.} I_{eff.}}\right) \quad (3.4)$$

$$R_W = |Z| \cdot \cos(|\phi|). \quad (3.5)$$

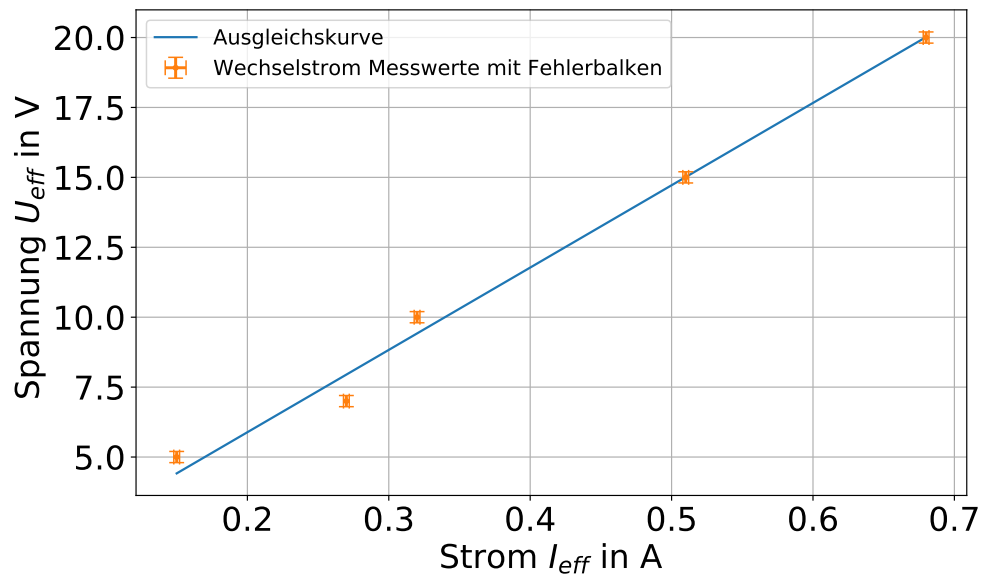


Abbildung 8: Die Spannung  $U_{eff}$  gegen den Strom  $I_{eff}$  für Wechselstrom.

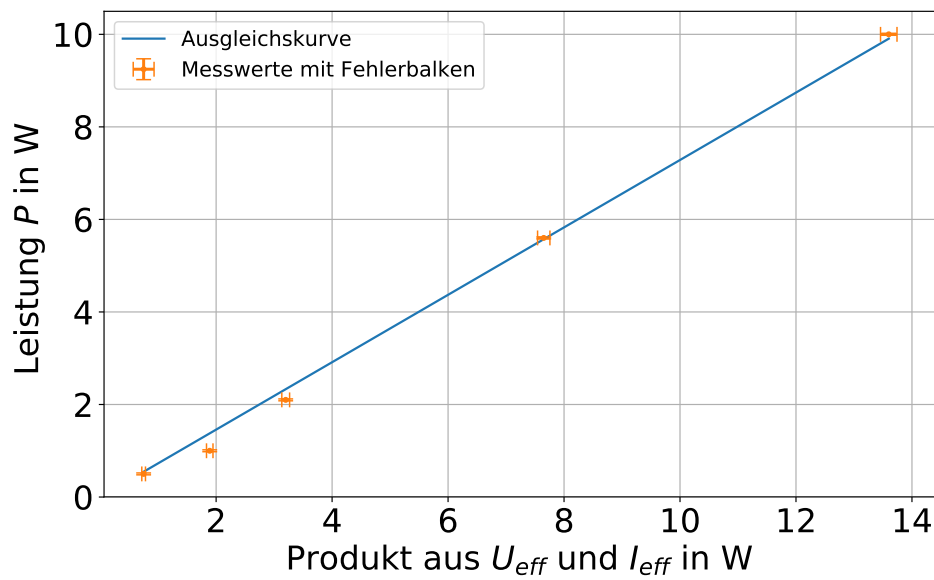


Abbildung 9: Die Leistung  $P_{eff}$  gegen  $U_{eff} \cdot I_{eff}$  für Wechselstrom.

- Für Gleichstrom:

$$R_i = \frac{U}{I} \quad (3.6)$$

Entnimmt man die Steigungen aus den Abbildungen 8, 7 und 9 und setzt sie in die oben genannten Gleichungen ein, so erhält man die unten zu sehenden Werte. Hierbei wurde jedoch in Gleichung 3.3  $R_i$  eingesetzt, da  $R_i$  direkt aus der Steigung der Abb. 7 abgelesen wurde während  $R_W$  durch Gleichung 3.5 berechnet werden musste. Vergleicht man die beiden Werte von  $R_w$  und  $R_i$  miteinander so erkennt man das  $R_W$  in der  $2\sigma$ -Umgebung von  $R_i$  liegt.

$$|Z| = (29,4 \pm 0,4) \Omega \quad (3.7)$$

$$|\phi| = (0,7548 \pm 0,0030) \text{ rad} \quad (3.8)$$

$$R_W = (21,4 \pm 0,3) \Omega \quad (3.9)$$

$$R_i = (22,7 \pm 0,8) \Omega \quad (3.10)$$

$$L = (0,060 \pm 0,004) \text{ H} \quad (3.11)$$

### 3.4. Daten und Analyse Kondensator

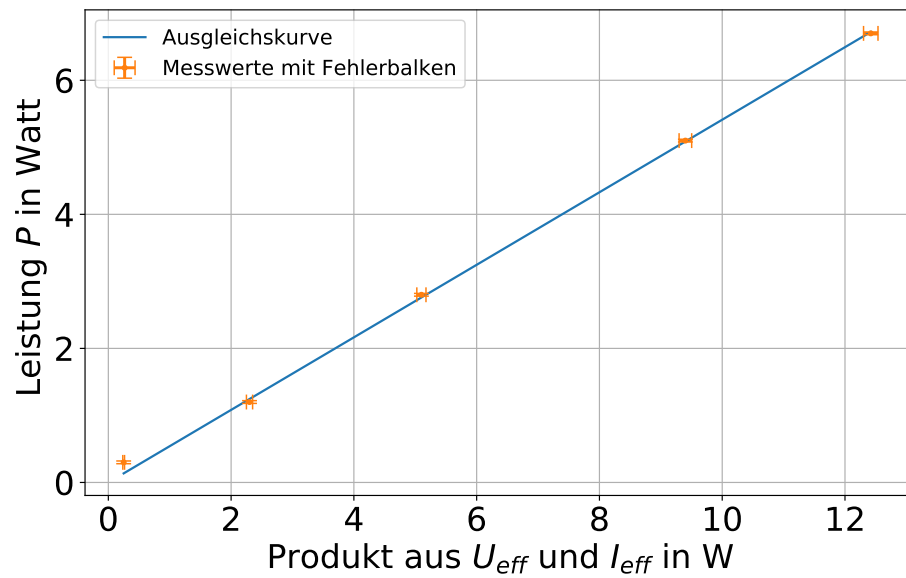
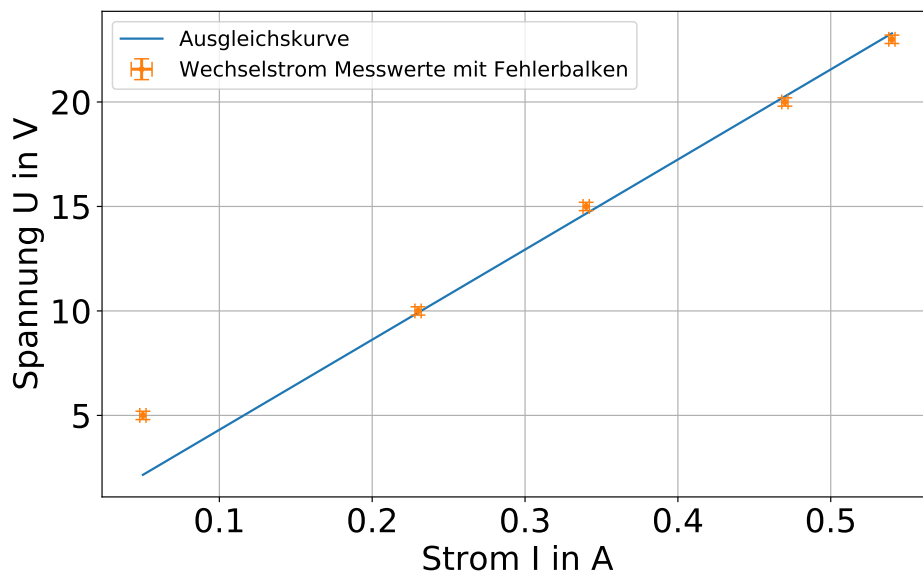
Im Folgenden wird die Kapazität  $C$ , der Scheinwiderstand  $|Z|$  und der Phasenwinkel  $|\phi|$  der schon in Kapitel 3.1 beschriebenen Schaltung c) bestimmt. Dazu wurde zum einem der Innenwiderstand  $R_i$  und die Induktivität  $L$  der Spule aus der Auswertung aus Kapitel 3.3. Im Folgenden wird mit Hilfe der Abbildungen 10 und 11 und den Gleichungen:

$$C = \frac{1}{\omega(\omega L + \sqrt{Z^2 - R^2})} \quad (3.12)$$

$$|\phi| = \arccos\left(\frac{\bar{P}}{U_{eff} \cdot I_{eff.}}\right) \quad (3.13)$$

$$|Z| = \frac{U_{eff.}}{I_{eff.}} \quad (3.14)$$

die Kapazität  $C$  des Kondensators, der Betrag des Scheinwiderstandes und der Betrag der Phase berechnet. Das Ergebnis für die Kapazität wird mit den Herstellerangaben

Abbildung 10: Produkt aus Spannung  $U$  und Strom  $I$  gegen die Leistung  $P$ .Abbildung 11: Spannung  $U$  gegen den Strom  $I$

verglichen. Die angegebene Kapazität beträgt  $(60 \pm 3) \mu\text{F}$ . Dieser Wert liegt in der  $1\sigma$ -Umgebung des errechneten Wertes:  $(57 \pm 4) \mu\text{F}$  und bestätigt die Angabe des Herstellers. Der für die obige Rechnung benötigte Scheinwiderstand beträgt hier  $|Z| = (43 \pm 3) \Omega$ . Des weiteren wird der Betrag der Phase  $|\phi| = (0,9989 \pm 0,0006) \text{ rad}$  berechnet. Die Unsicherheiten der Kapazität folgt aus der relativen Unsicherheit von 10% für jeden der drei in Reihe geschalteten Kondensatoren. Die anderen Unsicherheitsrechnungen sind im Anhang A.2 zu finden.

## 4. Schlussfolgerung

Im ersten Abschnitt wird der Einfluss einer Schaltung auf die Spannungsquelle untersucht, da im Allgemeinen die Klemmspannung der Quelle abhängig von der angeschlossenen Last ist. Dieser Sachverhalt wird im ersten Abschnitt mit Batterien simuliert welche, zur Verdeutlichung mit einem Vorwiderstand versehen sind. Bei dem gegebenen Aufbau beträgt der „Innenwiderstand“  $(17,7 \pm 0,6) \Omega$  und die Leerlaufspannung  $U_E = (1,27 \pm 0,02) \text{ V}$  für einen Akkumulator. Für die Reihenschaltung wurde für Spannung und Innenwiderstand eine Verdreifachung der Werte erwartet. Die Parallelschaltung sollte den Innenwiderstand dritteln und die Leerlaufspannung der einzelnen Monozelle aufweisen. Diese Annahmen wurden durch die Messergebnisse gemäß den Tabellen 1 und 2 bestätigt.

Im zweiten Teil des Experimentes soll zunächst die Schaltung zur Leistungsaufnahme mit einem Widerstand getestet werden. Hierbei wird festgestellt, dass das Wattmeter einen geringeren Wert misst, als Volt- und Amperemeter. Bei dem Wechselstromkreis beträgt das Verhältnis  $(93,5 \pm 0,8) \%$  und bei dem Gleichstromkreis  $(95,0 \pm 0,8) \%$ . Dies deckt sich mit der Beobachtung, dass die Leerlaufleistung des Voltmeters zu einem negativen Ausschlag bei der Leistungsmessung führt. Für weitere Messungen müssten andere Messinstrumente verwendet werden oder die gegenseitige Beeinflussung der Instrumente berücksichtigt werden. Danach wurde die Induktivität einer Spule und die Kapazität eines Kondensators bestimmt. Letzterer Wert kann dazu genutzt werden die Ergebnisse zu überprüfen da die Kapazität des Kondensators auch auf diesem angegeben war. Da sich  $(60 \pm 3) \mu\text{F}$  in der  $1\sigma$ -Umgebung von  $(57 \pm 4) \mu\text{F}$  befindet, ist davon auszugehen, dass die zuvor errechnete Induktivität ebenfalls im Bereich der theoretischen Werte liegt. Dieses Experiment diene dazu, dass man anhand einer einfachen Schaltung lernt, wie z.B. die

Kapazität oder die Induktivität berechnet werden. Des weiteren werden die Messgrößen und Messverfahren erläutert um Gleich- bzw. Wechselstromkreise zu charakterisieren.

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Hilfsmittel

Die Plots werden mit Python erstellt. Für Anpassungen wird der Levenberg–Marquardt Algorithmus verwendet. Die Fehler werden nach Empfehlung des „GUM“, insbesondere mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet. So nicht anders angegeben, werden die theoretischen Zusammenhänge und Gleichungen [2] entnommen.

### A.2. Unsicherheiten

Kapazität  $C$ :

$$u(C) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{-R^2 u(R)^2 - Z^2 u(Z)^2 + \omega^2 u(L)^2 (R^2 - Z^2)}{(R^2 - Z^2) (\omega L + \sqrt{-R^2 + Z^2})^4}}.$$

Induktivität  $L$ :

$$u(L) = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{-R^2 u(R)^2 - Z^2 u(Z)^2}{R^2 - Z^2}}.$$

Phasenwinkel  $\phi$ :

$$u(\phi) = \sqrt{\frac{-u\left(\frac{\Delta P}{\Delta UI}\right)^2}{\phi^2 - 1}}.$$

Wirkwiderstand  $R_W$ :

$$u(R_W) = \sqrt{\frac{1}{\phi^2 - 1} \cdot (-Z^2 u(\phi)^2 + u(Z)^2 \cdot (\phi^2 - 1) \cdot \arccos(\phi^2))}.$$

Werte die sich aus den Steigungen der Abbildungen entnehmen lassen, sind auch mit der Unsicherheit dieser Anpassung versehen.

Rechteckverteilung:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{A.1}$$



### A.3. Gleichungen aus der Einführung

$$A_{\text{eff}} = \frac{1}{T} \int_0^T |A(t)| dt$$

Für  $A(t) = I_0 \sin(\omega t)$ :

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \frac{1}{T} \int_0^T |I_0 \sin(\omega t)| dt \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |I_0 \sin(\omega t)| dt \\ &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0 \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} [I_0 \cos(\omega t)]_0^{\frac{\pi}{\omega}} \\ &= \frac{2I_0}{\pi} \end{aligned}$$

$$A_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) dt}$$

Für  $A(t) = I_0 \sin(\omega t)$ :

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T A^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} I_0^2 \sin^2(\omega t) dt} \\ &= I_0 \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \left[ \frac{-\sin(\omega) \cos(\omega)}{4\omega} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}} \\ &= I_0 \sqrt{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

## Literatur

- [1] *Bedienungsanleitung Energizer NH15-2300*. URL: <http://data.energizer.com/pdfs/nh15-2300.pdf> (besucht am 15.01.2018).
- [2] Markus Donath und Anke Schmidt. *Begleitkurs zu den Experimentellen Übungen I*. 2017. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/course/view.php?id=28561> (besucht am 09.01.2018).