

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll M5

### Jo-Jo und Kreisel

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Lukas Britt

20. Dezember 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2. Maxwellsches Fallrad</b>	<b>1</b>
2.1. Methoden . . . . .	2
2.2. Daten und Analyse . . . . .	3
2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt . . . . .	3
2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung . . . . .	4
2.2.3. Vergleich der Abrollradien . . . . .	5
<b>3. Kreisel</b>	<b>6</b>
3.1. Methoden . . . . .	6
3.2. Unsicherheiten Kreisel . . . . .	7
3.3. Daten und Analyse . . . . .	9
<b>4. Schlussfolgerung</b>	<b>12</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>13</b>
A.1. Verwendete Programme . . . . .	13
A.2. Verwendete Gleichungen . . . . .	13
<b>Literatur</b>	<b>14</b>

## 1. Zusammenfassung

Der Versuchstag bestand aus zwei Experimenten, welche die Rotation starrer Körper betrachten, zunächst wurde das Fallverhalten des Maxwellsche Fallrad, ähnlich einem Jo-Jo, untersucht und anschließend die Präzessionsbewegung eines Kreisels.

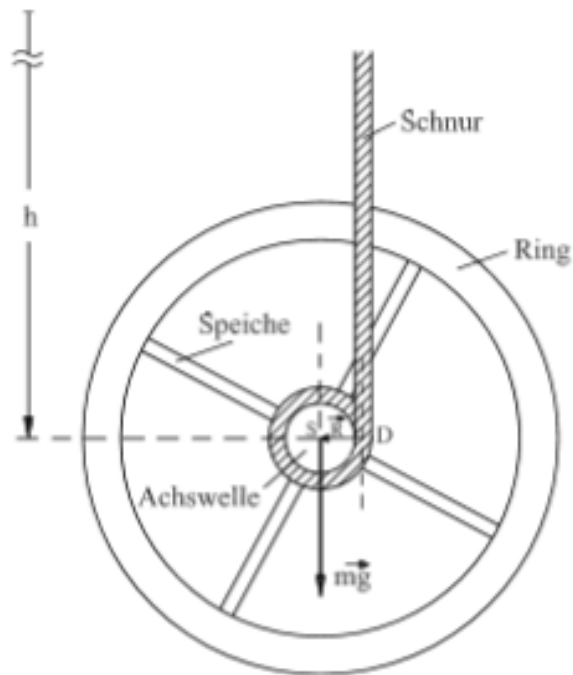
Bei dem Maxwellschen Fallrad wurde eine gleichmäßig beschleunigte Translation und Rotation beobachtet. Aus Abmessungen und Gewicht wurde das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse  $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  bestimmt, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung  $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$  bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius  $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11) \text{ m}$  geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius  $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04) \text{ m}$  verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt die vorherige Messung.

Bei dem Kreisel wurde die Präzessionszeit  $T_p$  bei annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  gemessen. Bei dem untersuchten Kreisel handelte es sich um einen schweren, symmetrischen Kreisel. Es sollte das Trägheitsmoment  $J$  des Kreisels bestimmt werden. Einerseits experimentell über den Zusammenhang zwischen  $\frac{\Delta\omega}{\Delta T_p}$  und dem Produkt aus der Kraft  $F$  und dem Abstand  $l$  zwischen dem Unterstützungspunkt und dem Angriffspunkt des Kraftmessers vgl. Abb. 9 (im folgendem  $J_{\text{exp.}}$  genannt). Sowie aus der Masse und dem Radius der Kugel zuzüglich einem gegebenen Trägheitsmoment des Stabes mit dem Zusatzgewicht im folgendem  $J_{\text{theo.}}$  genannt. Da sich  $J_{\text{theo.}} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  und  $J_{\text{exp.}} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  deutlich voneinander unterscheiden ist zu vermuten, dass beim Experimentieren Fehler unterlaufen sind.

## 2. Maxwellsches Fallrad

Im ersten Teil des Experimentes wurde das Mawellsche Fallrad gemäß Abb. 1 untersucht. Hierbei wird, anders als im freien Fall, die potentielle Energie nur zum Teil in kinetische Energie umgewandelt, da das Rad zu rotieren beginnt. Dies resultiert in einer verlangsamten Fallbewegung mit Beschleunigung  $g^*$ .

Aus dem geometrischen Aufbau sowie der Masse folgt das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes, die Beschleunigung konnte direkt bestimmt werden. Der Steinersche



**Abbildung 1:** Seitenansicht des maxwellschen Fallrades.[1]

Satz erlaubt nun Rückschlüsse auf den Abrollradius. Dieser wurde mit dem gemessenen Radius verglichen.

## 2.1. Methoden

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wurde das Rad unter Benutzung eines Messschiebers mit Nonius vermessen. Alle Bestandteile wurden hierbei als Voll- oder Hohlzylinder betrachtet. Die Verdickung am Schnittpunkt der Achsen wurde nicht vermessen, zum Ausgleich wurde das Schnittvolumen der Speichen doppelt berücksichtigt. Da der Abstand der Verdickung zur Drehachse klein gegenüber dem Abstand des äußeren Ringes ist, ist davon auszugehen, dass der Unterschied zu vernachlässigen ist. Größen, welche in vierter Potenz in das Trägheitsmoment eingehen, wurden mehrfach gemessen, um den Einfluss von möglichen Unebenheiten des Rades auf die Ergebnisse zu verringern. Die Masse des Rades wurde mittels einer Waage bestimmt. Anschließend wurden die Fallzeiten  $t$  für fünf verschiedene Höhen  $h$  je fünfmal mit einer Stoppuhr manuell bestimmt.

## 2.2. Daten und Analyse

Im Folgenden soll nun zunächst das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes  $J_s$  bestimmt werden. Anschließend wird die effektive Beschleunigung aus den Fallzeiten für verschiedene Höhen ermittelt und abschließend werden die Abrollradien mit Hilfe des Steinerschen Satzes verglichen.

### 2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt

Allgemein ist das Trägheitsmoment  $J$  definiert durch:

$$J = \int_V \vec{r}_\perp^2 \varrho(\vec{r}) dV. \quad (2.1)$$

Angewandt auf die vorliegende Geometrie bei Annahme einer konstanten Massenverteilung folgt bezüglich der Symmetrieachse folgt:

$$J_s = J_K + 2J_S + J_A \quad (2.2)$$

$$= \varrho \pi \left[ \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) + 2H_S \left( \frac{H_S^2}{12} R_S^2 + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_A}{2} R_A^4 \right]. \quad (2.3)$$

Wobei  $H$  die jeweilige Höhe und  $R$  den jeweiligen Radius des Zylinders beschreiben.  $R_a$  und  $R_i$  stehen für Außen- bzw. Innenradius des äußeren Kreisrings. Die Dichte  $\varrho$  ist als Masse pro Volumen gegeben mit

$$\varrho = \frac{M}{\pi (H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2H_S R_S^2 + H_A R_A^2)}. \quad (2.4)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 2.4 in Gleichung 2.3 erhält man das Trägheitsmoment

$$J_s = \frac{M \left( 2H_S \left( \frac{H_A R_A^4}{2} + \frac{H_S^2 R_S^2}{12} + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) \right)}{H_A R_A^2 + H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i}. \quad (2.5)$$

Die Abmessungen welche mehrfach gemessen wurden, wurden arithmetisch gemittelt ihre Unsicherheit wurde nach Gleichung A.4 unter Berücksichtigung der Ablesungenauigkeit (0,02 mm) und der statistischen Unsicherheit berechnet, die Ergebnisse sind in Tabelle 1 notiert. Mit den Messwerten aus Tabelle 1 folgt aus den Gleichungen 2.5 und A.6 bezüglich der

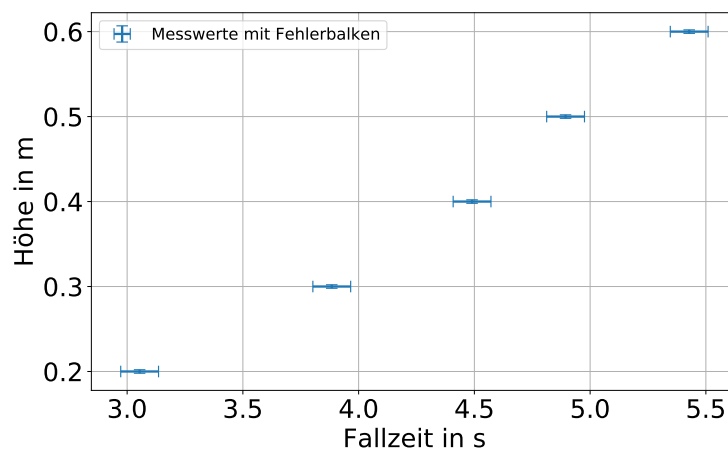
**Tabelle 1:** Abmessungen des Fallrades

Masse des Fallrades $M$	$(0,732\,040 \pm 0,000\,006) \text{ kg}$
Höhe bzw. Tiefe des Kreisrings $H_k$ K	$(0,011\,62 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius $R_a$	$(0,085\,11 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Innenradius und Speichenhöhe $R_i = H_S$	$(0,072\,71 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius $R_a$	$(0,004\,05 \pm 0,000\,02) \text{ m}$
Speichenradius $R_S$	$(0,004\,03 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Achsenhöhe $H_A$	$(0,200\,30 \pm 0,000\,02) \text{ m}$

Symmetrieachse  $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Der relative Fehler ist  $\frac{\Delta J_s}{J_s} = 0.2\%$ .

### 2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung

Um abschließend den gemessenen Abrollradius mit dem Abrollradius nach steinerschem Satz vergleichen zu können, wird neben dem Trägheitsmoment die effektive Beschleunigung  $g^*$  benötigt.

**Abbildung 2:** Die Höhe  $h$  des Fallrades in Abhängigkeit der jeweiligen Fallzeiten  $t$ .

Die Abbildung 2 stellt die Messwerte dar. Da die theoretischen Betrachtungen und der Graph eine quadratische Abhängigkeit suggerieren, werden diese Messwerte anschließend in Abbildung 3 linearisiert dargestellt. Abbildung 4 stellt die jeweiligen Steigungen einer geraden durch Ursprung und Messpunkt der Abbildung 3 dar.

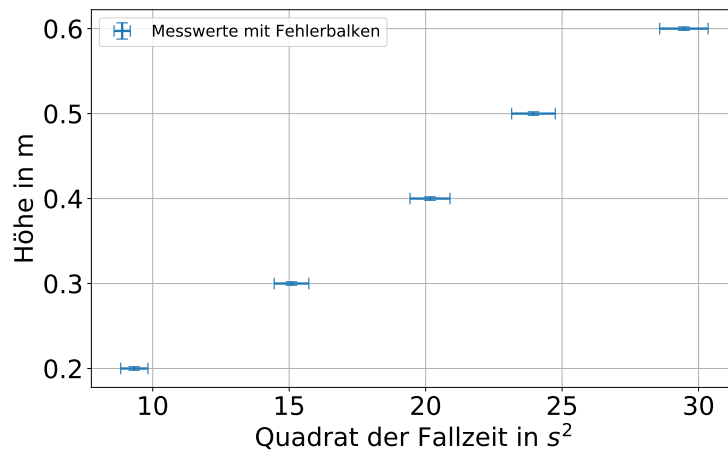


Abbildung 3: Die Messpunkte nach Abb. 2 in Einheiten von  $t^2$ .

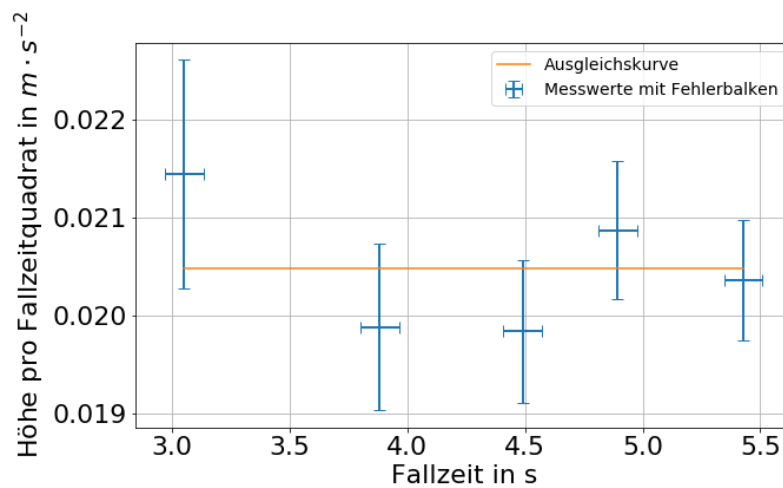


Abbildung 4: Messpunkte aus Abb. 2 in Einheiten von  $\frac{h}{t^2}$

Anschließend wurde das arithmetische Mittel  $c$  der Datenpunkte aus Abbildung 4 gebildet. Aus der zugehörigen Bewegungsgleichung ist abzulesen, dass  $\frac{g^*}{2} = \frac{h}{t^2} = c$ . Es folgt:  $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$ .

### 2.2.3. Vergleich der Abrollradien

Aus der Zusammenhang zwischen der effektiven Beschleunigung und dem Abrollradius nach Gleichung 2.6 folgt für den Abrollradius Gleichung 2.7.

$$g^* = g \frac{mR^2}{J_s + mR^2} = 2c \quad (2.6)$$

$$R = \sqrt{\frac{2cJ_s}{M(g - 2c)}} \quad (2.7)$$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1, der effektiven Beschleunigung  $g^*$  aus Abbildung 4 sowie der Fallbeschleunigung  $g$  aufgrund des Erdschwerefeldes und der Unsicherheit nach Gleichung A.7 folgt  $R = (0,00460 \pm 0,00011)$  m. Die Messung der Durchmesser von Faden und Aufhängeachse mit dem Messschieber ergab einen Radius  $R_{\text{geometrisch}} = (0,00455 \pm 0,00004)$  m. Der direkt gemessene Radius bestätigt den zuvor errechneten Wert. Des weiteren liefert die direkte Messung erwartungsgemäß die kleinere Unsicherheit.

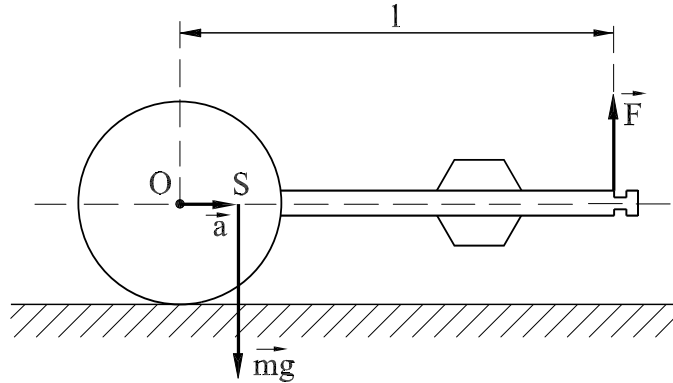
### 3. Kreisel

Im zweiten Teil des Experimentes wurde das Trägheitsmoment eines Kreisels bestimmt.

#### 3.1. Methoden

Zunächst wurde der Durchmesser der Kugel, die Länge  $l$ , die Masse  $m$  und für drei verschiedene Positionen des Zusatzgewichtes die Kraft  $F$  gemessen. Jede dieser Messungen (bis auf die der Masse) wurde je 5 mal durchgeführt (gemessene Größen vgl. Abb. 9) Die Längen wurden mit einem Messschieber gemessen und die Masse mit einer Waage mit digitaler Anzeige. Mithilfe dieser Werte, dem aus der Anleitung gegebenen Trägheitsmoment  $J_{\text{Stange}} + J_{\text{Zusatz}} = 15 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$  sowie den Formeln  $J_{\text{ges}} = J_{\text{Kugel}} + J_{\text{Stange}} + J_{\text{Zusatz}}$  und  $J_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}mr^2$  wurde der Wert für  $J_{\text{theo.}} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  berechnet. Ein anderer Weg das Trägheitsmoment zu bestimmen war es, diesen über den Zusammenhang zwischen  $l \cdot F$  und  $\frac{\Delta\omega}{\Delta T_p}$  sowie dem Trägheitsmoment  $J$ . Um diesen Zusammenhang zu erhalten wurde die Präzessionszeit  $T_p$  des Kreisels für drei Unterschiedliche Positionen des Zusatzgewichtes bei fünf unterschiedlichen Frequenzen gemessen. Einmal unten, einmal Mittig und einmal oben (Position 1, 2 und 3). Zur Messung der Frequenz des Kreisels wurde der Kreisel mit einem Stroboskop beleuchtet. Die Frequenz des Stroboskops wurde als erstes eingestellt und der Kreisel wurde solange beschleunigt bis er die gleiche





**Abbildung 5:** Schematische Darstellung des Kreisels bei Messung der Kraft  $F$ [1]

Frequenz hatte wie das Stroboskop. Das der Kreisel die gleiche Frequenz erreicht hatte wie das Stroboskop wurde durch eine Markierung auf der Kugel des Kreisels ersichtlich. Sobald diese Markierung nahezu stillstand war die Frequenz erreicht. Es war jedoch nicht möglich zu verhindern das sich diese Markierung weiterbewegte. Da die Markierung sich jedoch sowohl mit der Drehbewegung bewegte als auch in die entgegengesetzte Richtung wurde bei den Rechnungen davon ausgegangen das sich diese entgegengesetzten Bewegungen in etwa aufheben. Die Präzessionszeit  $T_p$  wurde gemessen indem der Kreisel leicht gekippt wurde und die Zeit für mehrere Umdrehungen der Stange gemessen wurde. Um die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  zu erhalten wurde die Frequenz mit  $2\pi$  Multipliziert. Die Präzessionszeit wurde dann für jede Position des Zusatzgewichtes gegen die Winkelgeschwindigkeit aufgetragen. Die Messwerte wurde mit einem linearen Fit genähert und das Produkt  $l \cdot F$  wurde gegen den Kehrwert der drei Steigungen aufgetragen. Die Steigung der Linearen Anpassung mit dem diese drei Punkte genähert wurde entspricht  $J \cdot 2\pi$ .

### 3.2. Unsicherheiten Kreisel

Bei der Durchführung des Experimentes traten an einigen Stellen sowohl bei der Durchführung als auch beim Rechnen Unsicherheiten auf die im folgendem näher erläutert

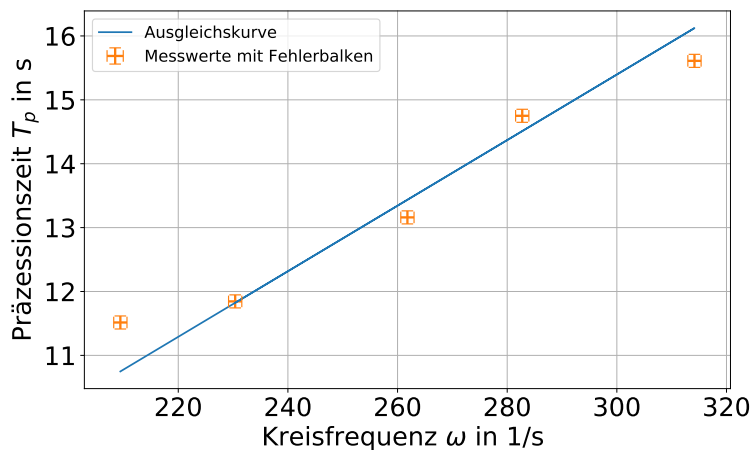
werden. Die in den Abbildungen 6,7 und 8 zu sehenden Fehlerbalken ergeben sich einmal für die Präzessionszeit  $T_p$  durch die Gleichungen A.1,A.2 und A.4. Die Rechteckverteilung ist durch die Ableseungenauigkeit der Stoppuhr mit  $a=0,01$  s und die Dreiecksverteilung ergibt sich durch die Reaktionszeit wobei  $a=0,4$  s angenommen wurde. Dieses Ergebnis wurde dann durch die Anzahl an Umdrehungen der Stange des Kreisel Geteilt. Für die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich der Fehler aus dem Fehler der Frequenz  $f$  multipliziert mit  $2\pi$ . Mithilfe einer Dreiecksverteilung konnte die Unsicherheit der Frequenz abgeschätzt werden, da die Werte der Frequenz von einer analogen Skala abgelesen wurden. Ein weiterer Fehler der in Betracht gezogen werden muss ist, dass die Markierung auf der Kugeloberfläche nie vollständig Stillstand sondern wanderte. Da die Markierung jedoch immer wieder an die gleiche stelle zurück wanderte und nie nur in eine Richtung wurde im folgendem davon ausgegangen das sich die Effekte gegenseitig ausgeglichen haben. Bei den Fehlerbalken in Abbildung 9 ergeben sich die Fehlerbalken einmal für den Kehrwert der Steigungen durch den Prozentualen Fehler der Steigung Multipliziert mit dem Kehrwert der Steigungen aus den Abbildungen 6,7 und 8 (Diese Fehler wurden dem Fit Programm entnommen). Die Fehlerbalken des  $l \cdot F$  Produktes ergeben sich nach Gleichung A.5 mit den im folgenden noch aufgeführten Unsicherheiten für  $l$  und  $F$ . Die Messungen des Radius und der Länge der Stange  $l$  wurden mit einem Messschieber mit Nonius gemessen. Bei der Messung viel auf das meistens jeweils zwei verschiedene Messergebnisse gleich wahrscheinlich waren. Aus diesem Grund sind die Messergebnisse mit einer Unsicherheit nach Gleichung A.2 mit  $a= 0,12$  mm versehen, wobei bei der Unsicherheit des Radius darauf zu achten war das der Durchmesser bestimmt wurde wesshalb der fehler durch zwei dividiert werden musste. Da die Kraft mit einem Kraftmesser mit analoger anzeige bestimmt, somit ergibt sich die Unsicherheit nach A.2 mit  $a=0,2$  N. Für die Masse ergab sich die Unsicherheit durch die Messung des Gewichts mithilfe einer Digitalen Waage. Also ergab sie sich nach Gleichung A.1 mit  $a=0,01$  g. Die Unsicherheit von  $J_{theo.}$  ergibt sich nach Gleichung A.5 angewandt auf die Gleichung 3.2 mit den nach den oben genannten Gleichungen für Unsicherheiten der Masse und des Radius. Um die Unsicherheit von  $J_{exp.}$  zu erhalten wurde die Unsicherheit der Steigung (Die Steigung der Geraden aus Abb. 9) dividiert durch zwei  $\pi$ .

### 3.3. Daten und Analyse

Die in den Abbildungen 6,7 und 8 zu sehenden Steigungen der linearen Anpassung ist in 2 zusehen. Man erkennt in den Abbildungen das einige Werte zum teil sehr Stark von der Anpassung abweichen, dies ist vermutlich auf Fehler bei der Durchführung zurückzuführen.

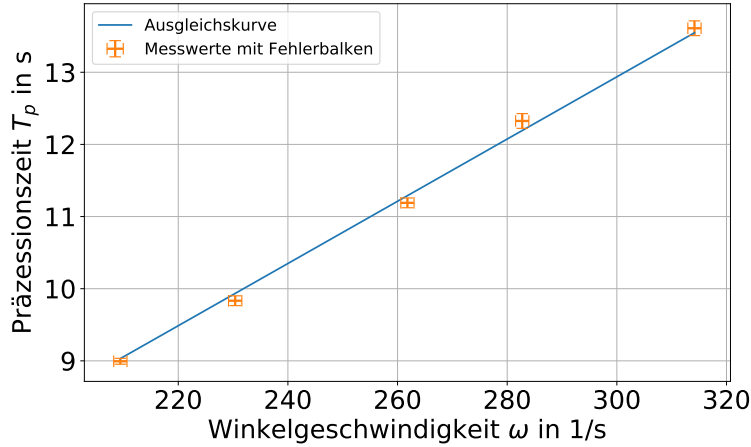
**Tabelle 2:** Zu sehen sind die Werte für Die Steigung die Kraft für die drei unterschiedlichen Positionen sowie die Masse der Kugel, Radius der Kugel sowie die Länge l.

Position	$\frac{\Delta T_p}{\Delta \omega}$	Kraft	Radius	Masse	Länge l
Unten 1	$(5,13 \pm 0,09) \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}^2$	$(0,144 \pm 0,005) \text{ N}$	$(25,39 \pm 0,01) \text{ mm}$	$(512,240 \pm 0,003) \text{ g}$	$(84,82 \pm 0,02) \text{ mm}$
Mitte 2	$(4,31 \pm 0,02) \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}^2$	$(0,166 \pm 0,005) \text{ N}$	$(25,39 \pm 0,01) \text{ mm}$	$(512,240 \pm 0,003) \text{ g}$	$(84,82 \pm 0,02) \text{ mm}$
Oben 3	$(3,59 \pm 0,03) \cdot 10^{-2} \text{ 1/s}^2$	$(0,220 \pm 0,005) \text{ N}$	$(25,39 \pm 0,01) \text{ mm}$	$(512,240 \pm 0,003) \text{ g}$	$(84,82 \pm 0,02) \text{ mm}$



**Abbildung 6:** Aufgetragen ist die die Präzessionzeit  $T_p$  gegen die Kreisfrequenz  $\omega$  bei Positionierung des Zusatzgewichtes bei Position 1.

Im nächsten Schritt wurde das Produkt der Länge l un der Kräfte F gegen den Kehrwert der Steigung aus den Abbildungen 6,7 und 8 aufgetragen. Daraus resultierte die Abbildung 9. Man erkennt das die lineare Anpassung die drei Messwerte nicht besonders gut Approximiert da keiner der Punkte auf der Geraden liegt. Dies ist wie schon vorher erwähnt auf Fehler bei der Durchführung zurückzuführen. Über den in Kapitel 3.1 bereits genannten Zusammenhang zwischen der Steigung aus der Abbildung und dem Trägheitsmoment. Dieser Zusammenhang lautet:  $\frac{a}{1\pi} = J$  wobei es sich bei



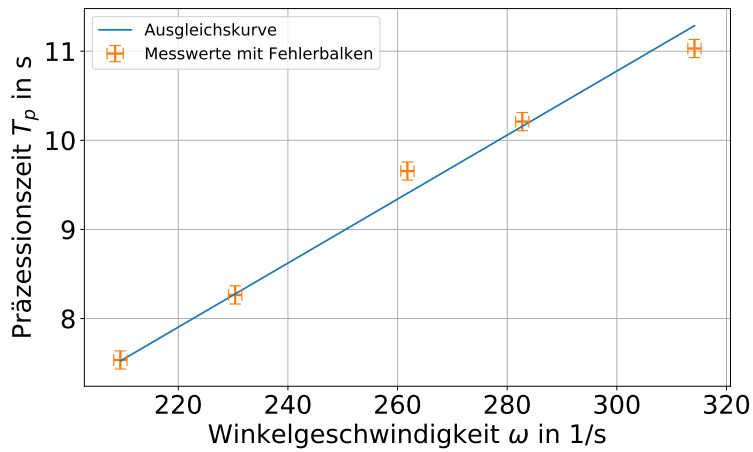
**Abbildung 7:** Aufgetragen ist die die Präzessionszeit  $T_p$  gegen die Kreisfrequenz  $\omega$  bei Positionierung des Zusatzgewichtes bei Position 2.

a um die Steigung handelt. Somit erhält man für  $J_{exp.}$  den folgenden Wert:  $J_{exp.} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Dieser Wert wurde dann mit dem  $J_{theo.}$  verglichen der mithilfe der folgender Gleichungen berechnet wurde:

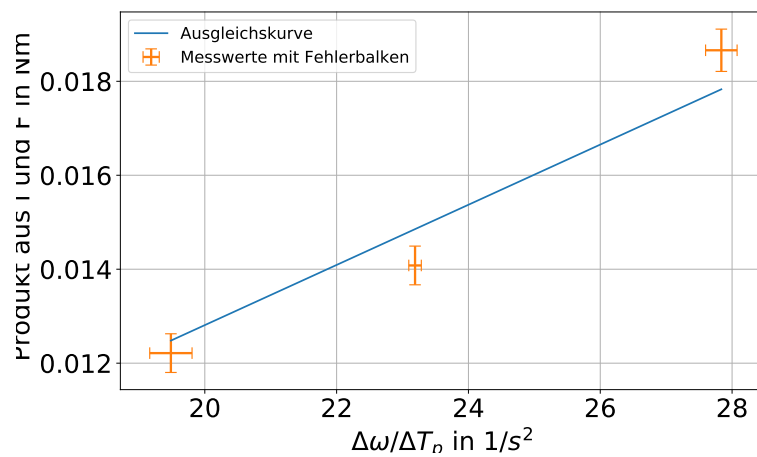
$$J_{Kugel} = \frac{2}{5}mr^2 \quad (3.1)$$

$$J_{exp} = J_{Kugel} + J_{Zusatz} \quad (3.2)$$

Die Masse und der Radius der Kugel wurden wie in Kapitel 3.1 beschrieben gemessen und das Trägheitsmoment der Stange und des Zusatzgewichtes war mit  $J_{Zusatz} = 15 \text{ g} \cdot \text{cm}^2$  angeben. Somit ergab sich dann folgender Wert:  $J_{theo.} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Wie man erkennt unterscheiden die beiden Werte für das Trägheitsmoment um ca. 30 %.



**Abbildung 8:** Aufgetragen ist die die Präzessionszeit  $T_p$  gegen die Kreisfrequenz  $\omega$  bei Positionierung des Zusatzgewichtes bei Position 3.



**Abbildung 9:** Aufgetragen ist das Produkt l mal F gegen  $\frac{\Delta\omega}{\Delta T_p}$ .

## 4. Schlussfolgerung

Bei dem Maxwellschen Fallrad wurde zunächst aus Abmessungen und Gewicht das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse  $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  errechnet, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung  $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$  bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius  $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11) \text{ m}$  geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius  $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04) \text{ m}$  verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt zum einen die vorherige Messung ist jedoch einfacher und genauer direkt zu bestimmen. Des weiteren plausibilisiert die Übereinstimmung der Abrollradien die Werte für effektive Beschleunigung und Trägheitsmoment. Somit bestätigen die Messwerte die theoretischen Annahmen.

Bei dem Kreisel erhielt man nach den jeweiligen Rechnungen für  $J_{\text{theo.}} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  und  $J_{\text{exp.}} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Wie man erkennt unterscheiden sich die Werte um ca. 30%. Dies ist entweder auf einen groben Rechenfehler zurückzuführen oder auf Fehler bei der Durchführung des Experimentes. Da auch nach mehrfacher Durchsicht kein Fehler gefunden werden konnte ist es jedoch wahrscheinlicher das der Fehler bei der Durchführung des Experimentes zu suchen ist. Bei der Auswertung der Messwerte fiel auf das der Kehrwert der Steigung aus Abb. 7 am nach unten am Stärksten von der linearen Anpassung abweicht und das obwohl sich die Gemessenen Werte für die Präzessionszeit hier am besten Linearisieren ließen. Dies lässt einen vermuten. Um verwertbare Ergebnisse zu erhalten müsste dieser Teil des Experimentes wiederholt werden.

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Programme

Die Plots wurden mit Gnuplot oder Python erstellt. Beide Programme nutzten den Levenberg–Marquardt Algorithmus. Die Fehler wurden nach Empfehlung des „GUM“, insbesondere mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

### A.2. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung  $u$  für die Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung  $u$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung  $u$  für die Messwerte  $x_i$  und den Mittelwert  $\bar{x}$ :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kombinierte Standardunsicherheit der Messgröße  $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Standardunsicherheit eines Wertes die sich aus mehreren Messgrößen mit Unsicherheiten

zusammensetzt:

$$u(f(x_1, \dots, x_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2} u(x_i)^2 \quad (\text{A.5})$$

Unsicherheit des Trägheitsmomentes :

$$\begin{aligned} \Delta J_S = & \frac{1}{6} [((H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^4)^{-1} (4M^2 R_S^2 \Delta R_S^2 (H_S(H_S^2 + 6R_S^2)(H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2R_i(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4)))^2 + \\ & M^2(4H_A^2 R_A^2 \Delta R_A^2 (12H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + \\ & 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + 4H_k^2 R_a^2 \Delta R_a^2 (-H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4) + \\ & 6R_a^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + R_A^4 \Delta H_A^2 (6H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - \\ & H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + \Delta H_k^2 ((R_a^2 - R_i^2)(H_S(6H_A R_A^2 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + \\ & 3H_k(R_a^4 - R_i^4)) - 3(R_a^4 - R_i^4)(H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + \Delta R_i^2 (12.0H_k R_i^3 (H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4))(H_k R_i - R_S^2))^2) + \\ & (9M^2 \Delta H_S^2 (2H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + R_S^4)^2 + \Delta M^2 (H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - \\ & R_i^4))^2) (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Unsicherheit des Abrollradius:

$$\Delta R = \left[ \left( \frac{\Delta M c J}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{(cJ)/((g-2c)M) M^2}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta J c}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{\frac{Jc}{(g-2c)M} M}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta c g \sqrt{Jc}}{c(g-2c) \sqrt{2gM-4Mc}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.7})$$

## Literatur

- [1] Markus Donath und Anke Schmidt. *Begleitkurs zu den Experimentellen Übungen I*. 2017. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/course/view.php?id=28561> (besucht am 03.01.2018).