Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll M3

Elastizität

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

h.hawighorst@uni-muenster.de

j_siev11@uni-muenster.de

betreut von

Christian Thiede

6. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung

2. Torsionsschwingung

2.1. Methoden

Das Experiment unterteilte sich in zwei Abschnitte, im ersten wurde die Schwingungsdauer eines Torsionspendels mit Zylinder um das Schubmodul G des Drahtes zu bestimmen. Dies bildetet die Grundlage um anschließend die Trägheitsmomente der Hantel mit Gewichten in verschiedenen Abständen der Rotationsachse zu bestimmen. Gemessen wurden daher alle für das Schubmodul relevanten Größen, d.h. die Schwingungsdauer die Abmessungen des Drahtes und der Gewichte sowie die Masse letzterer. Dies wurde sowohl für den Zylinder, die Hantel ohne Scheiben und mit aufgelegten Scheiben in fünf verschiedenen Abständen durchgeführt. Der Radius des Drahtes wurde an fünf stellen je dreimal gemessen.

2.2. Daten und Analyse

Bei der Messung des Radius des Drahtes wurde in 13 von 15 Messungen der selbe Wert festgestellt, dies war zudem der Mittelwert. Daher ist davon auszugehen das der Draht eine im Vergleich zur Messgenauigkeit konstante Dicke aufweist. Die einzelnen Drahtradien sowie Schwingungsdauern sind dem Laborbuch zu entnehmen. Die Unsicherheiten ergab sich nach den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von $\pm 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Alle weiteren Entfernungen wurden einmal gemessen, da sie nicht in vierter Potenz in das Schubmodul eingehen, hier wurden Dreiecksverteilungen mit $a = 1\,\mathrm{mm}$ angenommen. Die auf den Gewichten gegebene Masse wurde als gegeben und exakt im Vergleich zu den anderen Messungenauigkeiten angenommen. Bei der Schwingungsdauer des Torsionspendels mit Zylinder wurden drei Messungen je drei Schwingungen durchgeführt und gemittelt. Bei der Hantel wurden die Schwingungsdauern je einmal über drei Perioden gemessen.

Torsionspendel mit Zylinder

Mit den Messdaten aus Tabelle 1 und Gleichungen 2.1 und 2.2 folgt für das Schubmodul des Drahtes $G \pm \Delta G = (7{,}87 \pm 0{,}09) \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/s^2m}$.

Tabelle 1: Messdaten des Torsionspendels mit Zylinder

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1{,}8150 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Masse des Zylinders m_z	$2{,}648\,\mathrm{kg}$
Radius des Zylinders R_z	$(0{,}0735 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2{,}500 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$
Gemittelte Schwingungsdauer T_z	$(32{,}58 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}$

$$G = \frac{4\pi L_D m_z R_z^2}{R_D^4 T_z^2} \tag{2.1}$$

$$\Delta G = G\sqrt{\left(\frac{\Delta L_D}{L_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R_z}{R_z}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R_D}{R_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_z}{T_z}\right)^2} \tag{2.2}$$

Torsionspendel mit Hantel

Hier wurde die Schwingungsdauer einer Hantel mit aufgelegten Scheiben beobachtet, wobei der Abstand a des Scheibenschwerpunktes zur Rotationsachse variiert wurde.

Tabelle 2: Messdaten des Torsionspendels mit Hantel und aufgelegten Scheiben

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1{,}8150 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Masse der Achse m_1	$0{,}217\,73\,\mathrm{kg}$
Radius der Achse R_1	$(0{,}0599 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Länge der Achse H_1	$(0{,}270 \pm 0{,}004)\,\mathrm{m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2{,}500 \pm 0{,}002) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$
Masse der aufgelegten Scheibe m_2	$0{,}297\,28\,\mathrm{kg}$
Radius der aufgelegten Scheibe R_2	$(0{,}0245 \pm 0{,}0004)\,\mathrm{m}$
Höhe der aufgelegten Scheibe H_2	$(0{,}020\,40 \pm 0{,}000\,04)\,\mathrm{m}$

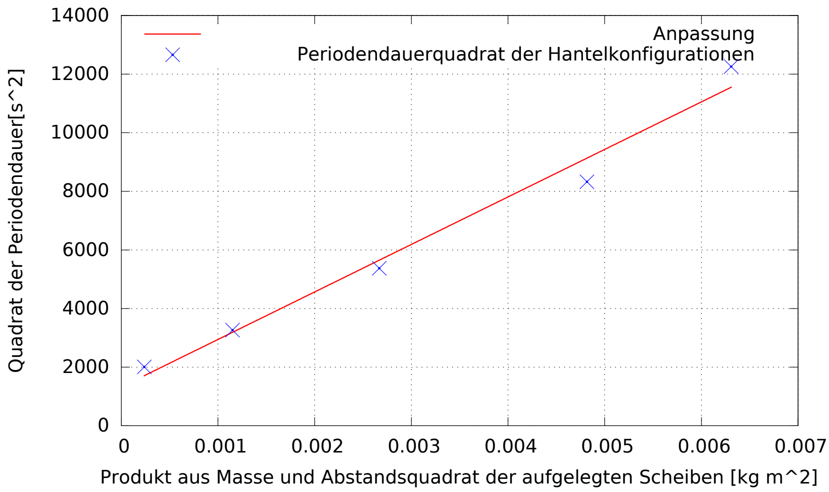

Abbildung 1: Dargestellt werden die Messung mit Anpassung der Schwingungsdauern der Hantel mit aufgelegten Scheiben in verschiedenen Abständen zur Rotationsachse. Die Einheiten der Achsen sind so gewählt, dass die Messpunkte nach dem Steinerschen Satz linear sind.

Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 1 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt und man erhält nach der

Anpassung[1] die Werte: $b = (1{,}62 \pm 0{,}13) \cdot 10^6\,{}^{\mathrm{s}^2}\!/_{\mathrm{kg\,m}^2}$ und $c = (1{,}3 \pm 0{,}5) \cdot 10^3\,\mathrm{s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 2.3 folgt durch Koeffzientenvergleich $D^* = (2{,}4 \pm 0{,}2) \cdot 10^{-5}\,{}^{\mathrm{kg\,m}^2}\!/_{\mathrm{s}^2}$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*}(J_1 + 2J_2 + 2m_2a^2) \tag{2.3}$$

Die Schwingungsdauer der Hantel ohne Scheiben T_0 betrug $(39{,}03 \pm 0{,}08)\,\mathrm{s}$. Es folgt mit Gleichung 2.4 für das Trägheitsmoment des Hantelstabes $J_1 = (9{,}4 \pm 0{,}8) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m}^2$.

$$J = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \pm \frac{T^2 D^*}{4\pi^2}\sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta D^*}{D^*}\right)^2} \tag{2.4}$$

Aus dem Parameter c und der Gleichung 2.3 und $a = 0$ folgt für das Trägheitsmoment der Hantelscheiben mit Schwerpunkt auf der Rotationsachse:

$$J_2 = \frac{cD^*}{8\pi^2} - \frac{J_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cD^*}{8\pi}\right)^2 \left(\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D^*}{D^*}\right)^2\right) + \left(\frac{J_1}{2}\right)^2} \tag{2.5}$$

Es folgt $J_2 = (-7{,}485 \pm 42{,}900) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m}^2$ da die Unsicherheit größer als der Wert ist, ist es nicht sinnvoll weitere Betrachtungen mit diesen Werten

[1]Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

2.3. Diskussion

Im Vergleich mit den Literaturwerten erscheint eine Stahllegierung wahrscheinlich. So besitzt zum Beispiel „CrV-Federstahl" oder „V2A-Stahl" ein Schubmodul[2] $G = 8{,}000 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg/s^2m}$. Genauso Wahrscheinlich sind jedoch auch andere Stahllegierungen, da die Eigenschaften von den genauen Anteilen der Legierungsbestandteilen steuerbar sind und das gewünschte Schubmodul mit verschiedenen Zusätzen erreicht werden kann.

3. Schlussfolgerung

[2]entnommen: Gerthsen Physik, Vogel 1977

A. Anhang

A.1. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung u für die Intervallbreite a:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \tag{A.1}$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung u:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \tag{A.2}$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung u für die Messwerte x_i und den Mittelwert$\bar{x}$:

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{A.3}$$

Kominierte Standartunsicherheit der Messgröße $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \tag{A.4}$$