

# Elastizität

## Einführung

Ein fester Körper ist nicht vollkommen starr, sondern lässt sich durch äußere Kräfte auf verschiedene Weise verformen. Solange die Verformung reversibel ist, d.h. nach Einwirkung der äußeren Kraft der Ausgangszustand wieder eingenommen wird, spricht man von elastischer Verformung. Im Versuch werden zwei voneinander unabhängige elastische Verformungen von Festkörpern untersucht, die Biegung und die Torsion.

## Elastische Deformation

### 1 Größen zur Beschreibung des elastischen Verhaltens

Abhängig von der Art der Krafteinwirkung auf einen Festkörper benötigt man unterschiedliche Größen zur Beschreibung des elastischen Verhaltens. Der Elastizitätsmodul  $E$  wird bei der Beschreibung eines Zugversuchs benötigt. Dehnt man ein Material durch die Wirkung einer äußeren Kraft, dann ist die elastischen Zugspannung  $\sigma$  im Material der relativen Längenänderung  $\varepsilon = \Delta L/L$  proportional (Hookesches Gesetz):

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (1)$$

Ein auf Zug belasteter Stab erfährt nicht nur eine Längenänderung, sondern auch eine Verkürzung der Querabmessung  $R$  (z.B. der Radius). Das Verhältnis der relativen Querverkürzung zur relativen Längenänderung heißt Querkontraktionszahl  $\mu$ :

$$\mu = - \frac{\Delta R/R}{\Delta L/L}. \quad (2)$$

$\mu$  wird auch als Poisson-Zahl bezeichnet und liegt im Bereich von 0,2 bis 0,5.

Wird ein Würfel durch äußere Kräfte elastisch geschert, dann treten in dem Würfel Schubspannungen  $\tau$  auf. Diese Schubspannungen sind dem Scherwinkel  $\alpha$  proportional. Die Proportionalitätskonstante zwischen Schubspannung  $\tau$  und Scherwinkel  $\alpha$  wird als Schubmodul  $G$  bezeichnet:

$$\tau = G \alpha. \quad (3)$$

Der Kompressionsmodul  $K$  gibt den Zusammenhang zwischen einem allseitigen Druck  $p$  und der relativen Volumenänderung wieder:

$$p = -K \frac{\Delta V}{V}. \quad (4)$$

Zwei der vier Materialgrößen  $E, \mu, G$  und  $K$  sind unabhängig voneinander bestimmbar. Die jeweils anderen lassen sich durch bekannte Relationen berechnen.

## 2 Elastische Biegung

Wird an das freie Ende eines einseitig eingespannten Stabes ein Gewicht  $F$  gehängt, so verbiegt sich der Stab unter dem Einfluss der wirkenden Kraft (vgl. Abb. 1). Vernachlässigt man das Eigengewicht des Stabes, dann ruft die Kraft in jedem Abstand  $z$  von der Einspannstelle ein Drehmoment  $M_a$  hervor mit

$$M_a = (L - z) F. \quad (5)$$

An der Einspannstelle ist das Drehmoment maximal und am freien Ende Null.

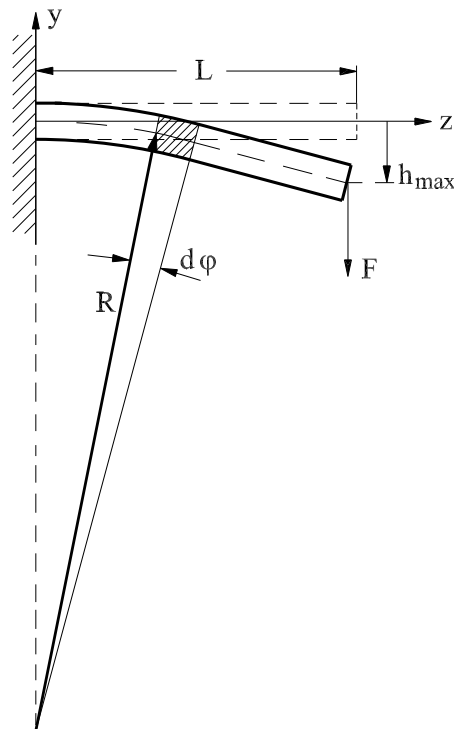


Abbildung 1: Elastische Biegung eines einseitig eingespannten Stabes

Dem von außen wirkenden Drehmoment  $M_a$  muss ein gleich großes, jedoch entgegengesetzt gerichtetes das Gleichgewicht halten. Letzteres wird durch die elastischen Spannungen im Stab erzeugt. Ziel der Theorie ist es, die Durchbiegung des Stabes als Funktion von Material, Form und wirkender Kraft zu berechnen.

Für den Stabquerschnitt sei eine einfache, symmetrische Gestalt angenommen, und entsprechend dieser Symmetrie sei der Stab eingespannt. Die horizontale Hauptachse des Querschnitts sei die  $x$ -Achse und die vertikale Hauptachse die  $y$ -Achse.

In einem Abstand  $z$  von der Einspannstelle werden zwei Querschnittsflächen, die ursprünglich parallel waren und den Abstand  $dz$  hatten, infolge der Verbiegung einen Winkel  $d\varphi$  miteinander einschließen. Die Querschnittsflächen sollen eben und senkrecht zur Stabachse bleiben (Abb. 1 und 2).  $R$  ist der lokale Krümmungsradius der jetzt gekrümmten Stabachse.

In diesem Scheibchen der Dicke  $dz$  sind Fasern, die oberhalb einer gewissen Linie AB liegen, gedehnt und die darunter liegenden verkürzt worden. Eine Faser der Höhe  $dy$  im Abstand  $y$  von der Stabachse ist um die Strecke  $dl$  gedehnt. Ihre relative Längenänderung (=Dehnung)  $\varepsilon$  beträgt

$$\varepsilon = \frac{dl}{dz}. \quad (6)$$

Da für den Winkel  $d\varphi$  gilt

$$d\varphi = \frac{dl}{y} = \frac{dz}{R} \quad \text{ergibt sich} \quad \frac{dl}{dz} = \frac{y}{R}. \quad (7)$$

Mithin folgt für  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{y}{R}. \quad (8)$$

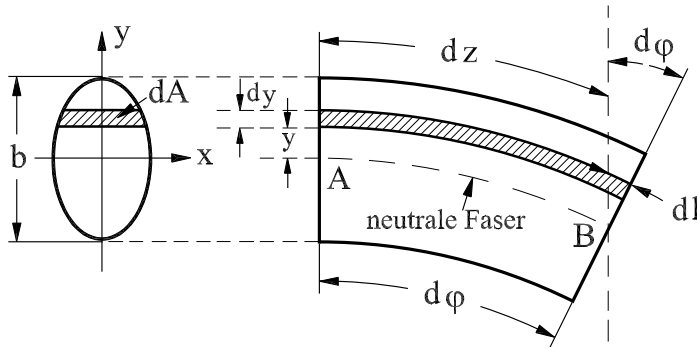


Abbildung 2: Biegung des Scheibchen der Dicke  $dz$

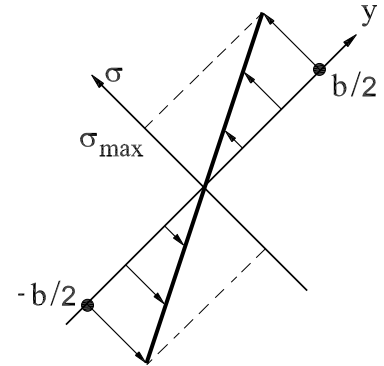


Abbildung 3: Spannungsverteilung in der Querschnittsfläche

Nach dem Hookeschen Gesetz (Gleichung 1) ist die elastische Spannung  $\sigma$  in der betrachteten Faser der Dehnung  $\varepsilon$  proportional:

$$\sigma = E \frac{y}{R}. \quad (9)$$

Die Spannungen aller Fasern in einer Querschnittsfläche sollen nun von der Art sein, dass

1. ihr Flächenintegral über die Querschnittsfläche keine Komponente in Richtung Stabachse hat (reine Biegung) und dass
2. sie ein Drehmoment liefern, welches vom Betrage gleich dem äußeren ist. Die inneren Spannungen erzeugen dann ein Drehmoment, welches dem durch die äußere Kraft hervorgerufenen Drehmoment das Gleichgewicht hält.

Die erste Forderung liefert

$$\int \sigma dA = 0. \quad (10)$$

Setzt man darin (9) ein so folgt

$$\int E \varepsilon dA = \int E \frac{y}{R} dA = 0. \quad (11)$$

Da  $E$  und  $R$  auf der Querschnittsfläche als konstant angenommen werden, folgt

$$\frac{E}{R} \int y dA = 0. \quad (12)$$

Die neutrale Faser, die Faser in der Dehnungen und Spannungen Null sind, muss also durch die horizontale Hauptachse des Querschnitts, die den Flächenschwerpunkt enthält, gehen.

Die zweite Forderung liefert

$$\begin{aligned} \int y \sigma dA &= M_a \\ \frac{E}{R} \int y^2 dA &= M_a. \end{aligned} \quad (13)$$

Das Integral  $\int y^2 dA$  ist nur von der geometrischen Form des Stabquerschnitts abhängig. Man bezeichnet es in formaler Analogie zum Trägheitsmoment als Flächenträgheitsmoment  $I_q$ . Weiter unten ist es für zwei spezielle Stabquerschnitte angegeben. Es gilt also:

$$\frac{E}{R} I_q = M_a. \quad (14)$$

Aus (14) lässt sich die Abhängigkeit des lokalen Krümmungsradius  $R$  von  $E$ ,  $I_q$  und  $M_a$  ablesen.

Setzt man den Wert für  $R$  aus (14) in (9) ein, dann ergibt sich die durch  $M_a$  hervorgerufene Spannungsverteilung in einer Querschnittsfläche (Abb. ??):

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_a}{I_q} y \\ \sigma &= \frac{(L - z) F}{I_q} y. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Spannungen sind in der neutralen Faser Null und ändern sich linear mit  $y$ . Am oberen und am unteren Rand des Stabes sind sie maximal und betragen

$$\sigma_{max} = \pm F(L - z)b/2I_q.$$

Außerdem dient (14) dazu, die Durchbiegung des Stabes zu berechnen. Bezeichnet man mit  $h(z)$  die Kurve der neutralen Faser in der  $y$ - $x$ -Ebene, dann ist  $R$  der lokale Krümmungsradius dieser Kurve. Die Differentialgeometrie liefert folgenden Zusammenhang zwischen  $R$  und  $h(z)$ :

$$R = \frac{\sqrt{(1 + (dh/dz)^2)^3}}{\pm d^2h/dz^2}, \quad (16)$$

beziehungsweise in der hier gut erfüllten Näherung  $(dh/dz)^2 \ll 1$

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d^2h}{dz^2}. \quad (17)$$

(17) in (14) eingesetzt ergibt

$$E I_q \frac{d^2h}{dz^2} = M_a. \quad (18)$$

Dies ist die Grundgleichung zur Berechnung der Durchbiegung von Stäben unter der Einwirkung äußerer Drehmomente  $M_a$ . Für den einfachen Fall:

einseitig eingespannt, Vernachlässigung des Eigengewichts, Belastung am freien Ende, folgt

$$E I_q \frac{d^2h}{dz^2} = (L - z) F. \quad (19)$$

Zweifache Integration der Differentialgleichung (19) und Nutzung der Anfangsbedingungen  $h(z) = 0$  sowie  $dh/dz = 0$  beide an der Stelle  $z = 0$  ergibt

$$h(z) = \frac{F}{E I_q} \left( L \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right). \quad (20)$$

Aus (20) lässt sich schließlich die maximale Durchbiegung am freien Ende des Stabes  $h_{max} = h(z = L)$  berechnen zu

$$h_{max} = \frac{F}{E I_q} \frac{L^3}{3}. \quad (21)$$

Das Flächenträgheitsmoment für spezielle Stabquerschnitte erhält man aus der Definition  $I_q = \int y^2 dA$ . Für einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser  $d$  ergibt sich

$$I_{Kreis} = \frac{\pi d^4}{64}$$

und für einen rechteckigen Querschnitt mit den Kantenlängen  $a$  und  $b$  ( $a$  senkrecht zur Biegungsebene)

$$I_{Rechteck} = \frac{a b^3}{12}.$$

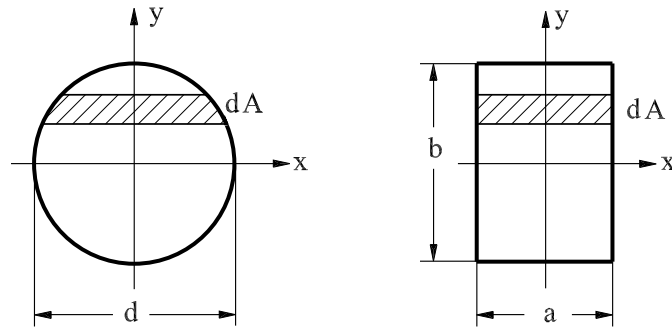


Abbildung 4: Zur Bestimmung der Flächenträgheitsmomente von Kreis und Rechteck

### 3 Elastische Torsion

Ein zylindrischer Stab mit dem Radius  $R$  und der Länge  $L$  sei an einem Ende fest eingespannt. Am freien Ende werde er unter der Wirkung eines äußeren Drehmoments  $M_a = R F$  gegenüber dem festen Ende um einen Winkel  $\varphi$  tordiert.

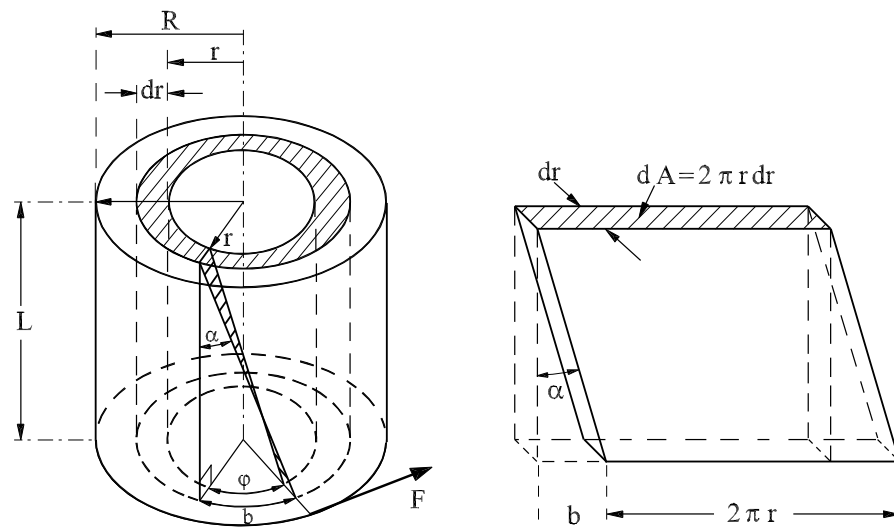


Abbildung 5: Torsion eines Zylinders

Um den Spannungszustand zu beschreiben, betrachtet man in dem Stab einen ko-axialen Hohlzylinder vom Radius  $r$  und der Wandstärke  $dr$  (Abb. 3, linke Seite). In der rechten Seite von Abb. 3 ist dieser Hohlzylinder in die Zeichenebene 'abgewickelt' dargestellt. Danach lässt sich der Spannungszustand als eine Scherung des Hohlzylinders beschreiben. Die Schubspannung in dem Hohlzylinder  $\tau$  ist proportional dem Scherwinkel  $\alpha$  (3)

$$\tau = G \alpha. \quad (22)$$

Für den Scherwinkel  $\alpha$  lässt sich aus Abb. 3 ablesen

$$\alpha = \frac{b}{L} = \frac{\varphi r}{L}. \quad (23)$$

Damit ergibt sich aus (22)

$$\tau = G \frac{\varphi r}{L}. \quad (24)$$

Die Summe aller Schubspannungen am freien Ende des Stabes muss ein Drehmoment zur Folge haben, das dem äußeren entgegengesetzt gleich ist. Es ist also zu fordern

$$\int r \tau dA = M_a. \quad (25)$$

In dieses Integral ist die Schubspannung  $\tau$  entsprechend (24) einzusetzen und als Flächenelement  $dA$  die Kreisringfläche des Hohlzylinders  $dA = 2\pi r dr$ . Man erhält

$$\int_0^R r \frac{G \varphi r}{L} 2\pi r dr = M_a. \quad (26)$$

Nimmt man an, dass der Torsionsmodul und der Torsionswinkel in der Querschnittsfläche konstant sind, dann lässt sich das Integral elementar auswerten, und man erhält

$$\frac{G \varphi}{L} 2\pi \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi G \varphi R^4}{2L}. \quad (27)$$

Dies führt zu dem Resultat

$$\frac{\pi G R^4}{2L} \varphi = M_a. \quad (28)$$

(28) beschreibt die Abhängigkeit des Torsionswinkels von den Stababmessungen, dem Stabmaterial und dem äußeren Drehmoment.

## 4 Torsionsschwingungen

Wenn man den in der vorausgehenden Ziffer diskutierten, elastisch tordierten Stab loslässt, so führt der Stab Torsionsschwingungen aus. Es wird angenommen, dass diese Schwingungen rein elastisch und ungedämpft sind. Die Bewegungsgleichung des schwingenden Stabes lautet:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D^* \varphi = 0, \quad (29)$$

wobei  $J$  das Trägheitsmoment des Systems ist und  $D^*$  das rücktreibende Direktionsmoment des Stabes.  $D^*$  lässt sich aus (28) als Proportionalitätskonstante zwischen  $M_a$  und  $\varphi$  ablesen zu

$$D^* = \frac{\pi G R^4}{2L}. \quad (30)$$

Die Dauer einer Torsionsschwingung ergibt sich aus (29) zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D^*}}. \quad (31)$$

Demnach können  $D^*$  und damit auch  $G$  aus den Torsionsschwingungen des Stabes bestimmt werden. Setzt man  $D^*$  aus (30) in (31) ein und löst nach  $G$  auf, dann folgt

$$G = \frac{8\pi L J}{R^4 T^2}. \quad (32)$$

Im Experiment ist der Stab ein vertikal aufgehängter dünner Draht, der am unteren Ende koaxial eine schwere, zylindrische Scheibe trägt. Die Scheibe hat die Masse  $m_z$  und den Radius  $R_z$ . Das Trägheitsmoment des Systems ist damit bestimmt durch das Trägheitsmoment  $J_z$  der Scheibe bezüglich ihrer Achse. Dieses Trägheitsmoment beträgt

$$J_z = \frac{1}{2} m_z R_z^2. \quad (33)$$

Setzt man  $J_z$  in (32) ein, erhält man schließlich für den Schubmodul

$$G = \frac{4\pi L m_z R_z^2}{R^4 T^2}. \quad (34)$$

## 5 Der Steinersche Satz

Der Steinersche Satz lautet: Das Trägheitsmoment  $J_A$  eines Körpers der Masse  $m$  um eine Achse durch den beliebigen Punkt A ist gleich dem Trägheitsmoment  $J_S$  um die parallele Achse durch den Schwerpunkt S, vermehrt um  $a^2 m$ , wobei  $a$  der Abstand der beiden Achsen ist.

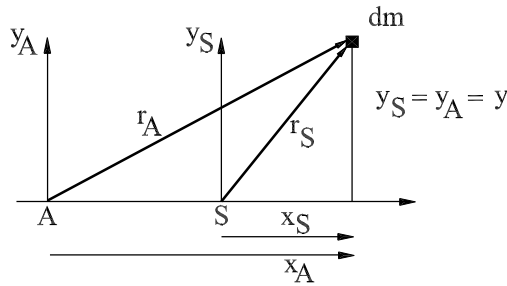


Abbildung 6: Zur Herleitung des Steinerschen Satzes

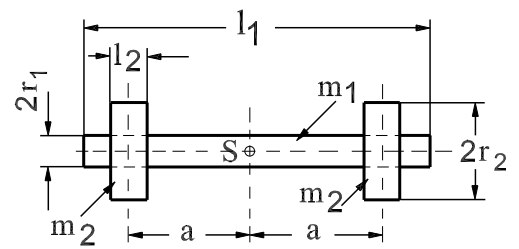


Abbildung 7: Zur Berechnung des Trägheitsmoments einer Hantel

Es sei  $z$  die Richtung der Achsen und  $x$  die Richtung der Verbindungsgeraden von A und S (siehe Abb. 5). Es gilt:

$$J_A = \int r_A^2 dm \quad \text{und} \quad J_S = \int r_S^2 dm \quad (35)$$



mit

$$r_A^2 = x_A^2 + y^2 \quad \text{und} \quad r_S^2 = x_S^2 + y^2. \quad (36)$$

In (36) wird  $x_A$  von A und  $x_S$  von S aus gezählt. Es folgt

$$\begin{aligned} r_A^2 &= (x_S + a)^2 + y^2 \\ &= x_S^2 + y^2 + a^2 + 2a x_S. \end{aligned} \quad (37)$$

Mithin ist

$$J_A = \int r_S^2 dm + a^2 \int dm + 2a \int x_S dm. \quad (38)$$

Das letzte Glied in dieser Gleichung führt i.a. auf die  $x$ -Koordinate des Schwerpunktes. Diese ist im vorliegenden Fall jedoch Null, da der Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt. Es folgt

$$J_A = J_S + a^2 m \quad (39)$$

Mit (39) lässt sich das Trägheitsmoment einer Hantel  $J_H$  berechnen, welches aus den Trägheitsmomenten der Hantelachse  $J_1$  (Vollzylinder, Masse  $m_1$ , Länge  $l_1$  und Radius  $r_1$ ) und dem der beiden Scheiben  $J_2$  (Hohlzylinder, Masse  $m_2$ , Länge  $l_2$ , Innenradius  $r_1$  und Außenradius  $r_2$ ) zusammengesetzt ist (Abb. 7). Bezüglich einer Drehachse, die durch den Schwerpunkt geht und senkrecht zur Zylinderachse ist, haben diese die Trägheitsmoment

$$J_1 = m_1 \left( \frac{1}{12} l_1^2 + \frac{1}{4} r_1^2 \right) \quad (40)$$

und

$$J_2 = m_2 \left( \frac{1}{12} l_2^2 + \frac{1}{4} (r_2^2 + r_1^2) \right). \quad (41)$$

und das Trägheitsmoment der ganzen Hantel ist nach (39)

$$J_H = J_1 + 2 J_2 + 2 m_2 a^2. \quad (42)$$

Benutzt man die Hantel als Torsionspendel, so erhält man nach (31) einen linearen Zusammenhang zwischen  $T^2$  und  $a^2$ :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*} (J_1 + 2 J_2 + 2 m_2 a^2) \quad (43)$$