

Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll M5

Jo-Jo und Kreisel

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Lukas Britt

20. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung	1
2. Maxwellsches Fallrad	1
2.1. Methoden	2
2.2. Daten und Analyse	3
2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt	3
2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung	4
2.2.3. Vergleich der Abrollradien	5
3. Schlussfolgerung	6
A. Anhang	7
A.1. Verwendete Programme	7
A.2. Verwendete Gleichungen	7

1. Zusammenfassung

Der Versuchstag bestand aus zwei Experimenten welche die Rotation starrer Körper betrachten, zunächst wurde das Fallverhalten des Maxwellsche Fallrad, ähnlich einem Jo-Jo, untersucht und anschließend die Präzessionsbewegung eines Kreisels.

Bei dem Maxwellschen Fallrad wurde eine gleichmäßig beschleunigte Translation und Rotation beobachtet. Aus Abmessungen und Gewicht wurde das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ bestimmt, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$ bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11) \text{ m}$ geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04) \text{ m}$ verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt die vorherige Messung.

Im zweiten Experiment wurde die Präzessionszeit T_p eines Kreisels bei annähernd konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gemessen. Bei dem untersuchten Kreisel handelte es sich um einen schweren, symmetrischen Kreisel. Durch das Experiment sollte das Trägheitsmoment J des Kreisels bestimmt werden. Einmal experimentell über den Zusammenhang zwischen $\frac{\Delta\omega}{\Delta T_p}$ und dem Produkt aus der Kraft F und dem Abstand l zwischen dem Unterstützungspunkt und dem Angriffspunkt des Kraftmessers vgl. Abb. ?? (im folgendem $J_{\text{exp.}}$ genannt). Und einmal aus der Masse und dem Radius der Kugel sowie einem gegebenen Trägheitsmoment des Stabes mit dem Zusatzgewicht im folgendem J_{theo} genannt. Da sich $J_{\text{theo.}} = (1,3356 \pm 0,0004) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ und $J_{\text{exp.}} = (1,0194 \pm 0,0319) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ deutlich voneinander unterscheiden ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass beim Experimentieren Fehler unterlaufen sind.

2. Maxwellsches Fallrad

Im ersten Teil des Experimentes wurde das Mawellsche Fallrad gemäß Abb. 1 untersucht. Hierbei wird, anders als im freien Fall, die potentielle Energie nur zum Teil in kinetische Energie umgewandelt, da das Rad zu rotieren beginnt. Dies resultiert in einer verlangsamten Fallbewegung mit Beschleunigung g^* .

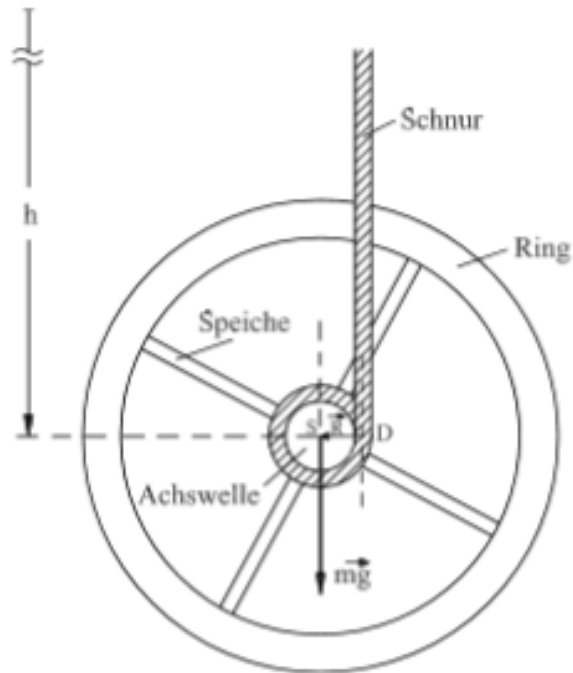


Abbildung 1: Seitenansicht des maxwellschen Fallrades.[lw]

Aus dem geometrischen Aufbau sowie der Masse folgt das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes, die Beschleunigung konnte direkt bestimmt werden. Der Steinersche Satz erlaubt nun Rückschlüsse auf den Abrollradius. Dieser wurde mit dem gemessenen Radius verglichen.

2.1. Methoden

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wurde das Rad unter Benutzung eines Messschiebers mit Nonius vermessen. Alle Bestandteile wurden hierbei als Voll- oder Hohlzylinder betrachtet. Die Verdickung am Schnittpunkt der Achsen wurde nicht vermessen, zum Ausgleich wurde das Schnittvolumen doppelt berücksichtigt. Da der Abstand der Verdickung zur Drehachse klein gegenüber dem Abstand des äußeren Ringes ist, ist davon auszugehen dass der Unterschied zu vernachlässigen ist. Größen welche in vierter Potenz in das Trägheitsmoment eingingen wurden mehrfach gemessen, um den Einfluss von möglichen Unebenheiten des Rades auf die Ergebnisse zu verringern. Die Masse des Rades wurde mittels einer Waage bestimmt. Anschließend wurden die Fallzeiten t für

fünf verschiedene Höhen h je fünfmal mit einer Stoppuhr manuell bestimmt.

2.2. Daten und Analyse

Im folgenden soll nun zunächst das Trägheitsmoment J_s bestimmt werden. Anschließend wird die effektive Beschleunigung aus den Daten der Fallzeiten ermittelt und Abschließend werden die Abrollradien mit Hilfe des Steinerschen Satzes verglichen.

2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt

Allgemein ist das Trägheitsmoment J definiert durch:

$$J = \int_V \vec{r}_\perp^2 \varrho(\vec{r}) dV. \quad (2.1)$$

Angewandt auf die vorliegende Geometrie bei Annahme einer konstanten Massenverteilung folgt bezüglich der Symmetrieachse:

$$J_s = J_K + 2J_S + J_A \quad (2.2)$$

$$= \varrho \pi \left[\frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) + 2H_S \left(\frac{H_S^2}{12} R_S^2 + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_A}{2} R_A^4 \right] \quad (2.3)$$

Wobei H die jeweilige Höhe und R den jeweiligen Radius des Zylinders beschreiben. R_a und R_i stehen für Außen- bzw. Innenradius des äußeren Kreistrings. Die Dichte ϱ ist als Masse pro Volumen gegeben:

$$\varrho = \frac{M}{\pi(H_K(R_a^2 - R_i^2) + 2H_S R_S^2 + H_A R_A^2)}. \quad (2.4)$$

Durch einsetzen der Gleichungen 2.4 in Gleichung 2.3 erhält man das Trägheitsmoment

$$J_s = \frac{M \left(2H_S \left(\frac{H_A R_A^4}{2} + \frac{H_S^2 R_S^2}{12} + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) \right)}{H_A R_A^2 + H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i}. \quad (2.5)$$

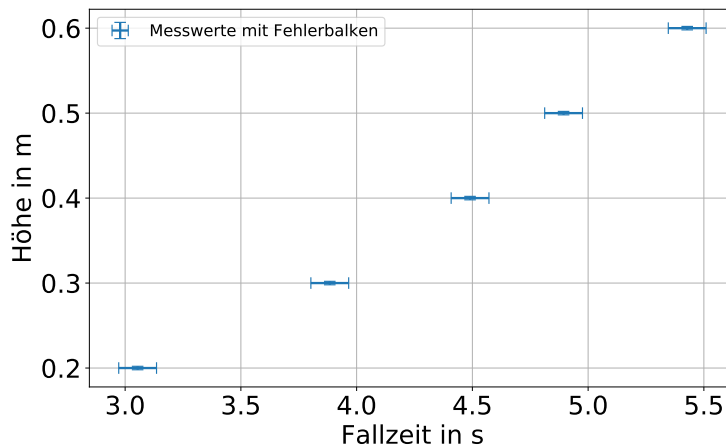
Mit den Messwerten aus Tabelle 1 folgt aus den Gleichungen 2.5 und A.5 bezüglich der Symmetrieachse $J = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Der relative Fehler ist $\frac{\Delta J}{J} = 0.2\%$.

Tabelle 1: Abmessungen des Fallrades

Masse des Fallrades M	$(0,732\,040 \pm 0,000\,006)$ kg
Höhe bzw. Tiefe des Kreisrings H_k K	$(0,011\,62 \pm 0,000\,04)$ m
Außenradius R_a	$(0,085\,11 \pm 0,000\,03)$ m
Innenradius und Speichenhöhe $R_i = H_S$	$(0,072\,71 \pm 0,000\,04)$ m
Außenradius R_a	$(0,004\,05 \pm 0,000\,02)$ m
Speichenradius R_S	$(0,004\,03 \pm 0,000\,03)$ m
Achsenhöhe H_A	$(0,200\,30 \pm 0,000\,02)$ m

2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung

Um abschließend den gemessenen Abrollradius mit dem Abrollradius nach steinerschem Satz vergleichen zu können, wird neben dem Trägheitsmoment die effektive Beschleunigung g^* benötigt.

**Abbildung 2:** Die Höhe h des Fallrades in Abhängigkeit der jeweiligen Fallzeiten t .

Die Abbildung 2 stellt die Messwerte dar. Da die theoretischen Betrachtungen und der Graph eine quadratische Abhängigkeit suggerieren, werden diese Messwerte anschließend in Abbildung 3 linearisiert dargestellt. Abbildung 4 stellt die jeweiligen Steigungen einer geraden durch Ursprung und Messpunkt der Abbildung 3 dar.

Anschließend wurde das arithmetische Mittel c der Datenpunkte aus Abbildung 4 gebildet. Aus der zugehörigen Bewegungsgleichung ist abzulesen, dass $\frac{g^*}{2} = \frac{h}{T^2} = c$. Es

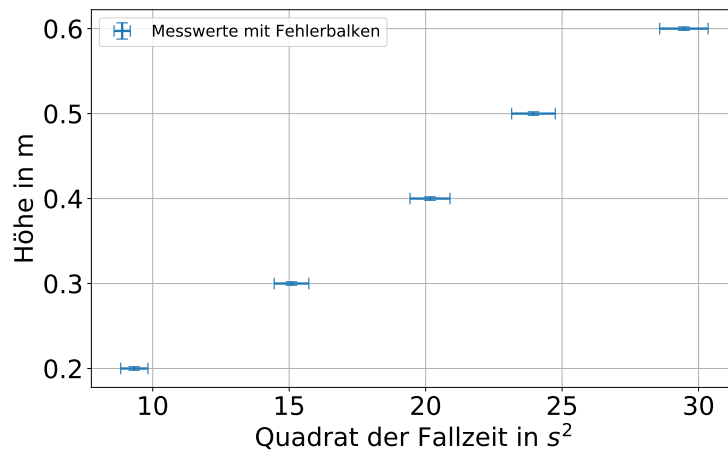


Abbildung 3: Die Messpunkte nach Abb. 2 in Einheiten von t^2 .

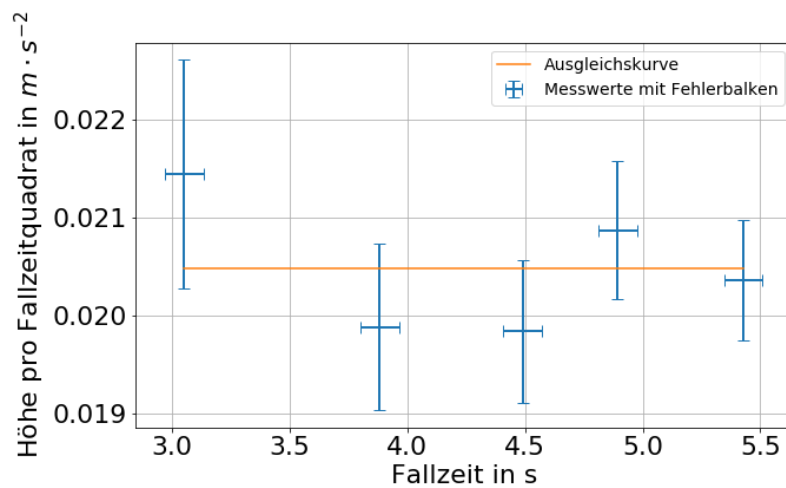


Abbildung 4: Messpunkte aus Abb. 2 in Einheiten von $\frac{h}{t^2}$

folgt: $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$.

2.2.3. Vergleich der Abrollradien

Aus der Zusammenhang zwischen der effektiven Beschleunigung und dem Abrollradius nach Gleichung 2.6 folgt für den Abrollradius Gleichung 2.7.

$$g^* = g \frac{mR^2}{J_s + mR^2} = 2c \quad (2.6)$$

$$R = \sqrt{\frac{2cJ_s}{M(g - 2c)}} \quad (2.7)$$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1, der effektiven Beschleunigung g^* aus Abbildung 4 sowie der Fallbeschleunigung g aufgrund des Erdschwerefeldes und der Unsicherheit nach Gleichung A.6 folgt $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11)$ m. Die Messung der Durchmesser von Faden und Aufhängeachse mit dem Messschieber ergab einen Radius $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04)$ m. Der direkt gemessene Radius bestätigt den zuvor errechneten Wert. Des weiteren liefert die direkte Messung erwartungsgemäß die kleinere Unsicherheit.

3. Schlussfolgerung

Bei dem Maxwellschen Fallrad wurde zunächst aus Abmessungen und Gewicht das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008)$ kg · m² errechnet, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung $g^* = (0,0410 \pm 0,0019)$ m/s² bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11)$ m geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04)$ m verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt zum einen die vorherige Messung ist jedoch einfacher und genauer direkt zu bestimmen. Des weiteren plausibilisiert die Übereinstimmung der Abrollradien die Werte für effektive Beschleunigung und Trägheitsmoment. Somit bestätigen die Messwerte die theoretischen Annahmen.

A. Anhang

A.1. Verwendete Programme

Die Plots wurden mit Gnuplot oder Python erstellt. Beide Programme nutzten den Levenberg–Marquardt Algorithmus. Die Fehler wurden nach Empfehlung des „GUM“, insbesondere mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

A.2. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung u für die Intervallbreite a :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung u :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung u für die Messwerte x_i und den Mittelwert \bar{x} :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kominierte Standardunsicherheit der Messgröße $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Unsicherheit des Trägheitsmomentes :

$$\begin{aligned} \Delta J_S = \frac{1}{6} [& ((H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^4)^{-1} (4M^2 R_S^2 \Delta R_S^2 (H_S(H_S^2 + 6R_S^2)(H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2R_i(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4)))^2 + \\ & M^2(4H_A^2 R_A^2 \Delta R_A^2 (12H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - \\ & 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + 4H_k^2 R_a^2 \Delta R_a^2 (-H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4) + \\ & 6R_a^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + R_A^4 \Delta H_A^2 (6H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - \\ & H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + \Delta H_k^2 ((R_a^2 - R_i^2)(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + \\ & 3H_k(R_a^4 - R_i^4)) - 3(R_a^4 - R_i^4)(H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + \Delta R_i^2 (12.0H_k R_i^3 (H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4))(H_k R_i - R_S^2))^2) + \\ & (9M^2 \Delta H_S^2 (2H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + R_S^4)^2 + \Delta M^2 (H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - \\ & R_i^4))^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^2)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Unsicherheit des Abrollradius:

$$\Delta R = \left[\left(\frac{\Delta M c J}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{(cJ)/((g-2c)M)M^2}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta J c}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{\frac{Jc}{(g-2c)M}M}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c g \sqrt{Jc}}{c(g-2c) \sqrt{2gM-4Mc}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.6})$$