

Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll M3

Elastizität

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Christian Thiede

6. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Zusammenfassung	1
1.1. Stäbe	1
2. Torsionsschwingung	2
2.1. Methoden	2
2.2. Daten und Analyse	3
2.3. Diskussion	7
3. Schlussfolgerung	7
A. Anhang	8
A.1. Verwendete Gleichungen	8

1. Zusammenfassung

1.1. Stäbe

In dieser Versuchsreihe wurde das Elastizitätsmodul von verschiedenen Materialien bestimmt. Zunächst wurde die Durchbiegung von vier verschiedenen Stäben gegen das angehängte Gewicht aufgetragen. Bei den Stäben handelte es sich um einen Runden Stahlstab, einen Runden Aluminiumstab, einen Runden Messingstab und um einen Rechteckigen Messingstab. Der Rechteckige Messingstab besitzt zwei unterschiedlich lange Kantenlängen. Dieser Messingstab wurde jeweils einmal so eingespannt, sodass jeweils eine der beiden Kanten nach oben zeigt. Diese Durchbiegung in Abhängigkeit vom Gewicht ist in den Abbildungen 1 bis ?? zu sehen. Mithilfe von den aus den Abbildungen entnommenen Steigungen wurde nach Gleichung A.5 mithilfe von den Gleichungen A.6 und A.7 das Elastizitätsmodul E berechnet. Somit ergab sich unter einsetzen der in Tabelle 1 zu sehenden Werte, die ebenfalls in der Tabelle zu sehenden Werte, für das Elastizitätsmodul. Vergleicht man diese Werte für das Elastizitätsmodul mit Literaturwerten¹ Tabelle 2

Tabelle 1: Elastizitätsmodul E berechnet nach A.5 mit allen dazu nötigen Werten

	a [$\frac{m}{g}$]	b[m]	c[m]	d[m]	L[m]	E [$\frac{N}{m^2}$]
Aluminium Rund	0,305			0,00297	0,298	74921967405
Messing Hochkant	0,041	0,0020	0,0050		0,287	94293095026
Messing Quer	0,264	0,0050	0,0020		0,287	93133852625
Messing Rund	0,202			0,00296	0,295	111186381240
Stahl Rund	0,114			0,00297	0,290	181538008224

Tabelle 2: Literaturwerte für das Elastizitätsmodul

	Elastizitätsmodul E [$\frac{GN}{m^2}$]
Aluminium	70
Eisen	190
Kupfer	110
Messing	90

¹Entnommen aus „Physik: für Wissenschaftler und Ingenieure“ von Paul A. Tipler und Gene Mosca in der 7. Ausgabe von 2014.

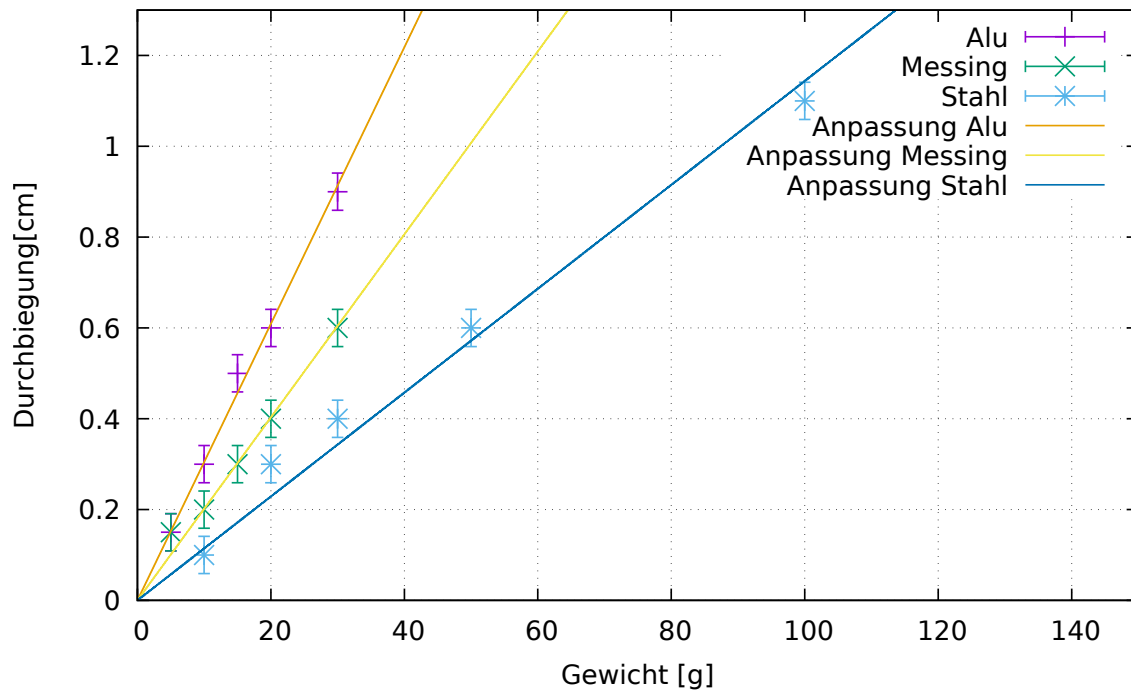


Abbildung 1: Durchbiegung der Runden Stäbe in Abhängigkeit vom Gewicht.

2. Torsionsschwingung

2.1. Methoden

Das Experiment unterteilte sich in zwei Abschnitte, im ersten wurde die Schwingungsdauer eines Torsionspendels mit Zylinder um das Schubmodul G des Drahtes zu bestimmen. Dies bildet die Grundlage um anschließend die Trägheitsmomente der Hantel mit Gewichten in verschiedenen Abständen der Rotationsachse zu bestimmen. Gemessen wurden daher alle für das Schubmodul relevanten Größen, d.h. die Schwingungsdauer die Abmessungen des Drahtes und der Gewichte sowie die Masse letzterer. Dies wurde sowohl für den Zylinder, die Hantel ohne Scheiben und mit aufgelegten Scheiben in fünf verschiedenen Abständen durchgeführt. Der Radius des Drahtes wurde an fünf Stellen je dreimal gemessen.

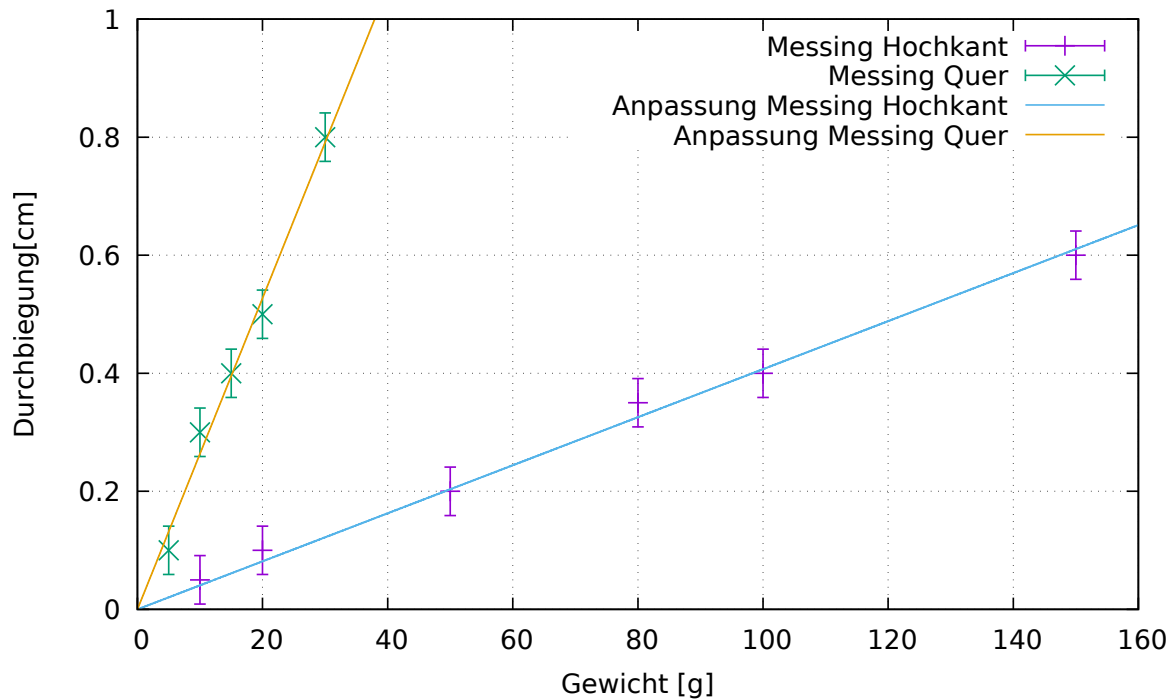


Abbildung 2: Durchbiegung des in zwei verschiedenen Ausrichtungen eingespannten Rechteckigen Stabes in Abhängigkeit vom Gewicht.

2.2. Daten und Analyse

Bei der Messung des Radius des Drahtes wurde in 13 von 15 Messungen der selbe Wert festgestellt, dies war zudem der Mittelwert. Daher ist davon auszugehen dass der Draht eine im Vergleich zur Messgenauigkeit konstante Dicke aufweist. Die einzelnen Drahtradien sowie Schwingungsdauern sind dem Laborbuch zu entnehmen. Die Unsicherheiten ergab sich nach den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von $\pm 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Alle weiteren Entfernungen wurden einmal gemessen, da sie nicht in vierter Potenz in das Schubmodul eingehen, hier wurden Dreiecksverteilungen mit $a = 1 \text{ mm}$ angenommen. Die auf den Gewichten gegebene Masse wurde als gegeben und exakt im Vergleich zu den anderen Messungenauigkeiten angenommen. Bei der Schwingungsdauer des Torsionspendels mit Zylinder wurden drei Messungen je drei Schwingungen durchgeführt und gemittelt. Bei der Hantel wurden die Schwingungsdauern je einmal über drei Perioden gemessen.

Torsionspendel mit Zylinder

Mit den Messdaten aus Tabelle 3 und Gleichungen 2.1 und 2.2 folgt für das Schubmodul des Drahtes $G \pm \Delta G = (7,87 \pm 0,09) \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$.

Tabelle 3: Messdaten des Torsionspendels mit Zylinder

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1,8150 \pm 0,0004) \text{ m}$
Masse des Zylinders m_z	$2,648 \text{ kg}$
Radius des Zylinders R_z	$(0,0735 \pm 0,0004) \text{ m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2,500 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Gemittelte Schwingungsdauer T_z	$(32,58 \pm 0,04) \text{ s}$

$$G = \frac{4\pi L_D m_z R_z^2}{R_D^4 T_z^2} \quad (2.1)$$

$$\Delta G = G \sqrt{\left(\frac{\Delta L_D}{L_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R_z}{R_z}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R_D}{R_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_z}{T_z}\right)^2} \quad (2.2)$$

Torsionspendel mit Hantel

Hier wurde die Schwingungsdauer einer Hantel mit aufgelegten Scheiben beobachtet, wobei der Abstand a des Scheibenschwerpunktes zur Rotationsachse variiert wurde.

Tabelle 4: Messdaten des Torsionspendels mit Hantel und aufgelegten Scheiben

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes L_D	$(1,8150 \pm 0,0004) \text{ m}$
Masse der Achse m_1	$0,21773 \text{ kg}$
Radius der Achse R_1	$(0,0599 \pm 0,0004) \text{ m}$
Länge der Achse H_1	$(0,270 \pm 0,004) \text{ m}$
Radius des Drahtes R_D	$(2,500 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Masse der aufgelegten Scheibe m_2	$0,29728 \text{ kg}$
Radius der aufgelegten Scheibe R_2	$(0,0245 \pm 0,0004) \text{ m}$
Höhe der aufgelegten Scheibe H_2	$(0,02040 \pm 0,00004) \text{ m}$

Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt, da der letzte Messpunkt deutlich Abseits einer gedachten Grade durch die anderen Messpunkte lag, wurde hier von einem groben Fehler ausgegangen und er wurde bei der Anpassung ausgelassen.

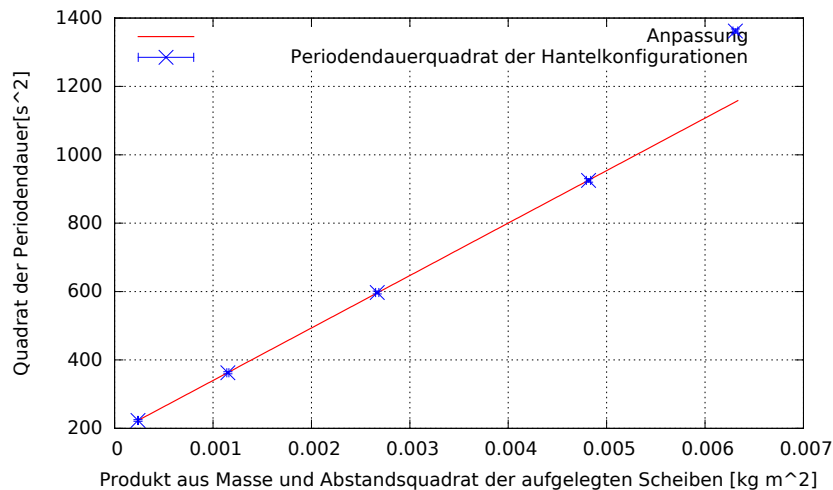


Abbildung 3: Dargestellt werden die Messung mit Anpassung der Schwingungsdauern der Hantel mit aufgelegten Scheiben in verschiedenen Abständen zur Rotationsachse. Die Einheiten der Achsen sind so gewählt, dass die Messpunkte nach dem Steinerschen Satz linear sind.

«««< HEAD Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt und man erhält nach der Anpassung² die Werte: $b = (1,62 \pm 0,13) \cdot 10^6 \text{ s}^2/\text{kg m}^2$ und $c = (1,3 \pm 0,5) \cdot 10^3 \text{ s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 2.3 folgt durch Koeffizientenvergleich $D^* = (2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

===== Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 3 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$ gewählt, da der letzte Messpunkt deutlich Abseits einer gedachten Grade durch die anderen Messpunkte lag, wurde hier von einem groben Fehler ausgegangen und er wurde bei der Anpassung ausgelassen. Man erhält nach der Anpassung³ die Werte: $b = (1,5346 \pm 0,0030) \cdot 10^5 \text{ s}^2/\text{kg m}^2$ und $c = (186,587 \pm 0,800) \text{ s}^2$. Aus der Steigung b und Gleichung 2.3 folgt durch Koeffizientenvergleich $D^* = (8,189 \pm 0,015) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ »»»> 7f87df1d78da537607abe4981a243fca98cd9d4b

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*}(J_1 + 2J_2 + 2m_2a^2) \quad (2.3)$$

Die Schwingungsdauer der Hantel ohne Scheiben T_0 betrug $(13,01 \pm 0,03) \text{ s}$. Es folgt mit Gleichung 2.4 für das Trägheitsmoment des Hantelstabes $J_1 = (3,511 \pm 0,011) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$.

$$J = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \pm \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta D^*}{D^*}\right)^2} \quad (2.4)$$

Aus dem Parameter c und der Gleichung 2.3 und $a = 0$ folgt für das Trägheitsmoment der Hantelscheiben mit Schwerpunkt auf der Rotationsachse $J_2 = (1,80 \pm 0,50) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$.

$$J_2 = \frac{cD^*}{8\pi^2} - \frac{J_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cD^*}{8\pi}\right)^2 \left(\left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta D^*}{D^*}\right)^2\right) + \left(\frac{J_1}{2}\right)^2} \quad (2.5)$$

²Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

³Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

Tabelle 5: Vergleich der Experimentellen Trägheitsmomente mit den theoretisch berechneten

Objekt	Theoretischer Wert	Experimenteller Wert
Hantelstange	$(1,324 \pm 0,004) \cdot 10^{-3}$	$(3,51 \pm 0,17) \cdot 10^{-4}$
Scheibe	$(5,76 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}$	$(1,8 \pm 0,5) \cdot 10^{-5}$
Hantel	$(1,440 \pm 0,004) \cdot 10^{-3}$	$(3,870 \pm 0,009) \cdot 10^{-4}$

2.3. Diskussion

Im Vergleich mit den Literaturwerten erscheint eine Stahllegierung wahrscheinlich. So besitzt zum Beispiel „CrV-Federstahl“ oder „V2A-Stahl“ ein Schubmodul⁴ $G = 8,000 \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$. Genauso Wahrscheinlich sind jedoch auch andere Stahllegierungen, da die Eigenschaften von den genauen Anteilen der Legierungsbestandteilen steuerbar sind und das gewünschte Schubmodul mit verschiedenen Zusätzen erreicht werden kann.

3. Schlussfolgerung

⁴entnommen: Gerthsen Physik, Vogel 1977

A. Anhang

A.1. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung u für die Intervallbreite a :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung u :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung u für die Messwerte x_i und den Mittelwert \bar{x} :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kominierte Standardunsicherheit der Messgröße $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Elastizitätsmodul E :

$$E = \frac{F}{h_{\max} I_q} \frac{L^3}{3} \quad (\text{A.5})$$

Flächenträgheitsmoment Kreis:

$$I_{\text{Kreis}} = \frac{\pi d^4}{64} \quad (\text{A.6})$$

Flächenträgheitsmodul Rechteck:

$$I_{\text{Rechteck}} = \frac{bc^3}{12} \quad (\text{A.7})$$

b senkrecht zur Biegungsebene, c waagrecht zu Biegungsebene.

Kraft:

$$F = 10 \cdot a \cdot m \quad (\text{A.8})$$

a ist die Steigung entnommen aus den Abbildungen 1, 2, ??, ??, ??.

Unsicherheit des Elastizitätsmoduls für Runde Stäbe:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot u_d}{d}\right)^2} \quad (\text{A.9})$$

Unsicherheit des Elastizitätsmoduls für eckige Stäbe:

$$u_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot u_c}{c}\right)^2} \quad (\text{A.10})$$