

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll M3

### Elastizität

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Christian Thiede

6. Dezember 2017

**Inhaltsverzeichnis**

<b>1. Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2. Torsionsschwingung</b>	<b>1</b>
2.1. Methoden . . . . .	1
2.2. Daten und Analyse . . . . .	1
2.3. Diskussion . . . . .	5
<b>3. Schlussfolgerung</b>	<b>5</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>6</b>
A.1. Verwendete Gleichungen . . . . .	6

## 1. Zusammenfassung

## 2. Torsionsschwingung

### 2.1. Methoden

Das Experiment unterteilte sich in zwei Abschnitte, im ersten wurde die Schwingungsdauer eines Torsionspendels mit Zylinder um das Schubmodul  $G$  des Drahtes zu bestimmen. Dies bildet die Grundlage um anschließend die Trägheitsmomente der Hantel mit Gewichten in verschiedenen Abständen der Rotationsachse zu bestimmen. Gemessen wurden daher alle für das Schubmodul relevanten Größen, d.h. die Schwingungsdauer, die Abmessungen des Drahtes und der Gewichte sowie die Masse letzterer. Dies wurde sowohl für den Zylinder, die Hantel ohne Scheiben und mit aufgelegten Scheiben in fünf verschiedenen Abständen durchgeführt. Der Radius des Drahtes wurde an fünf Stellen je dreimal gemessen.

### 2.2. Daten und Analyse

Bei der Messung des Radius des Drahtes wurde in 13 von 15 Messungen der selbe Wert festgestellt, dies war zudem der Mittelwert. Daher ist davon auszugehen, dass der Draht eine im Vergleich zur Messgenauigkeit konstante Dicke aufweist. Die einzelnen Drahtradien sowie Schwingungsdauern sind dem Laborbuch zu entnehmen. Die Unsicherheiten ergaben sich nach den Gleichungen A.2, A.3 und A.4 aus der statistischen Unsicherheit und einer Ablesegenauigkeit von  $\pm 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . Alle weiteren Entfernungen wurden einmal gemessen, da sie nicht in vierter Potenz in das Schubmodul eingehen, hier wurden Dreiecksverteilungen mit  $a = 1 \text{ mm}$  angenommen. Die auf den Gewichten gegebene Masse wurde als gegeben und exakt im Vergleich zu den anderen Messungenauigkeiten angenommen. Bei der Schwingungsdauer des Torsionspendels mit Zylinder wurden drei Messungen je drei Schwingungen durchgeführt und gemittelt. Bei der Hantel wurden die Schwingungsdauern je einmal über drei Perioden gemessen.

**Torsionspendel mit Zylinder**

Mit den Messdaten aus Tabelle 1 und Gleichungen 2.1 und 2.2 folgt für das Schubmodul des Drahtes  $G \pm \Delta G = (7,87 \pm 0,09) \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$ .

**Tabelle 1:** Messdaten des Torsionspendels mit Zylinder

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes $L_D$	$(1,8150 \pm 0,0004) \text{ m}$
Masse des Zylinders $m_z$	$2,648 \text{ kg}$
Radius des Zylinders $R_z$	$(0,0735 \pm 0,0004) \text{ m}$
Radius des Drahtes $R_D$	$(2,500 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Gemittelte Schwingungsdauer $T_z$	$(32,58 \pm 0,04) \text{ s}$

$$G = \frac{4\pi L_D m_z R_z^2}{R_D^4 T_z^2} \quad (2.1)$$

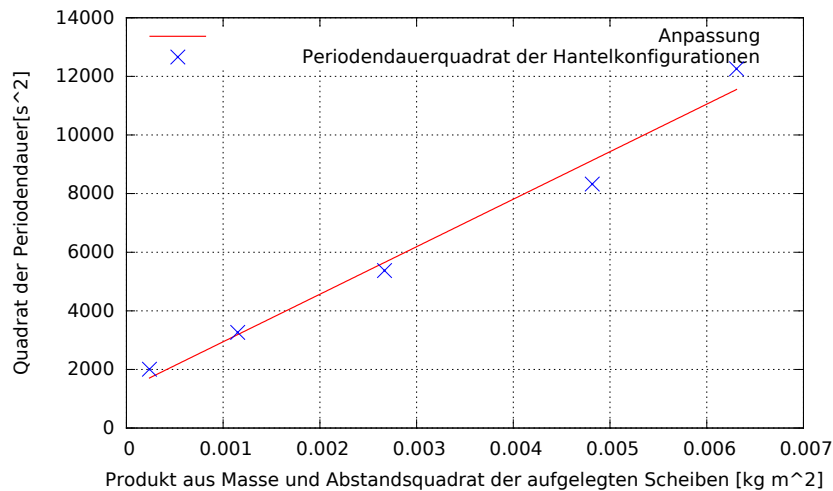
$$\Delta G = G \sqrt{\left(\frac{\Delta L_D}{L_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta R_z}{R_z}\right)^2 + \left(4\frac{\Delta R_D}{R_D}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T_z}{T_z}\right)^2} \quad (2.2)$$

### Torsionspendel mit Hantel

Hier wurde die Schwingungsdauer einer Hantel mit aufgelegten Scheiben beobachtet, wobei der Abstand  $a$  des Scheibenschwerpunktes zur Rotationsachse variiert wurde.

**Tabelle 2:** Messdaten des Torsionspendels mit Hantel und aufgelegten Scheiben

Messgröße	Messwert
Länge des Drahtes $L_D$	$(1,8150 \pm 0,0004) \text{ m}$
Masse der Achse $m_1$	$0,21773 \text{ kg}$
Radius der Achse $R_1$	$(0,0599 \pm 0,0004) \text{ m}$
Länge der Achse $H_1$	$(0,270 \pm 0,004) \text{ m}$
Radius des Drahtes $R_D$	$(2,500 \pm 0,002) \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Masse der aufgelegten Scheibe $m_2$	$0,29728 \text{ kg}$
Radius der aufgelegten Scheibe $R_2$	$(0,0245 \pm 0,0004) \text{ m}$
Höhe der aufgelegten Scheibe $H_2$	$(0,02040 \pm 0,00004) \text{ m}$



**Abbildung 1:** Dargestellt werden die Messung mit Anpassung der Schwingungsdauern der Hantel mit aufgelegten Scheiben in verschiedenen Abständen zur Rotationsachse. Die Einheiten der Achsen sind so gewählt, dass die Messpunkte nach dem Steinerschen Satz linear sind.

Der Steinersche Satz sagt einen linearen Zusammenhang für Abb. 1 vorher, daher wurde eine Anpassung des Typs  $T^2(2m_2a^2) = b(2ma^2) + c$  gewählt und man erhält nach der

Anpassung<sup>1</sup> die Werte:  $b = (1,62 \pm 0,13) \cdot 10^6 \text{ s}^2/\text{kg m}^2$  und  $c = (1,3 \pm 0,5) \cdot 10^3 \text{ s}^2$ . Aus der Steigung  $b$  und Gleichung 2.3 folgt durch Koeffizientenvergleich  $D^* = (2,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{D^*}(J_1 + 2J_2 + 2m_2a^2) \quad (2.3)$$

Die Schwingungsdauer der Hantel ohne Scheiben  $T_0$  betrug  $(39,03 \pm 0,08) \text{ s}$ . Es folgt mit Gleichung 2.4 für das Trägheitsmoment des Hantelstabes  $J_1 = (9,392 \pm 0,800) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$ .

$$J = \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \pm \frac{T^2 D^*}{4\pi^2} \sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta D^*}{D^*}\right)^2} \quad (2.4)$$

Aus dem Parameter  $c$  und der Gleichung 2.3 und  $a = 0$  folgt für das Trägheitsmoment der Hantelscheiben

---

<sup>1</sup>Die Anpassung wurde durch „Gnuplot“ mit dem Levenberg–Marquardt Algorithmus vorgenommen.

### 2.3. Diskussion

Im Vergleich mit den Literaturwerten erscheint eine Stahllegierung wahrscheinlich. So besitzt zum Beispiel „CrV-Federstahl“ oder „V2A-Stahl“ ein Schubmodul<sup>2</sup>  $G = 8,000 \cdot 10^{10} \text{ kg/s}^2\text{m}$ . Genauso Wahrscheinlich sind jedoch auch andere Stahllegierungen, da die Eigenschaften von den genauen Anteilen der Legierungsbestandteilen steuerbar sind und das gewünschte Schubmodul mit verschiedenen Zusätzen erreicht werden kann.

## 3. Schlussfolgerung

---

<sup>2</sup>entnommen: Gerthsen Physik, Vogel 1977

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung  $u$  für die Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung  $u$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung  $u$  für die Messwerte  $x_i$  und den Mittelwert  $\bar{x}$ :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kominierte Standardunsicherheit der Messgröße  $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$