

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll M5

### Jo-Jo und Kreisel

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Lukas Britt

20. Dezember 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2. Maxwellsches Fallrad</b>	<b>1</b>
2.1. Methoden . . . . .	1
2.2. Daten und Analyse . . . . .	2
2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt . . . . .	2
2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung . . . . .	3
2.2.3. Vergleich der Abrollradien . . . . .	4
<b>3. Schlussfolgerung</b>	<b>7</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>8</b>
A.1. Verwendete Programme . . . . .	8
A.2. Verwendete Gleichungen . . . . .	8
<b>Literatur</b>	<b>9</b>

## 1. Zusammenfassung

Der Versuchstag bestand aus zwei Experimenten welche die Rotation starrer Körper betrachten, zunächst wurde das Fallverhalten des Maxwellsche Fallrad, ähnlich einem Jo-Jo, untersucht und anschließend die Präzessionsbewegung eines Kreisels.

Das Maxwellsche Fallrad eignet sich zur Untersuchung von gleichmäßig beschleunigten Bewegungen, da die potentielle Energie in Translation und Rotation umgewandelt wird somit hat das Rad eine geringere Geschwindigkeit und die Bewegung lässt sich ohne aufwendige Messinstrumente beobachten, da die Fallzeiten groß genug waren um sie mit einer Herkömmlichen Stoppuhr zu messen. Aus Abmessungen und Gewicht wurde das Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse  $J_s = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  bestimmt, anschließend wurde aus den Fallzeiten die effektive Beschleunigung  $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$  bestimmt. Abschließend wurde mit dem Steinerschen Satz auf den Abrollradius  $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11) \text{ m}$  geschlossen und mit dem gemessenen Abrollradius  $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04) \text{ m}$  verglichen. Der geometrisch bestimmte Wert bestätigt die vorherige Messung.

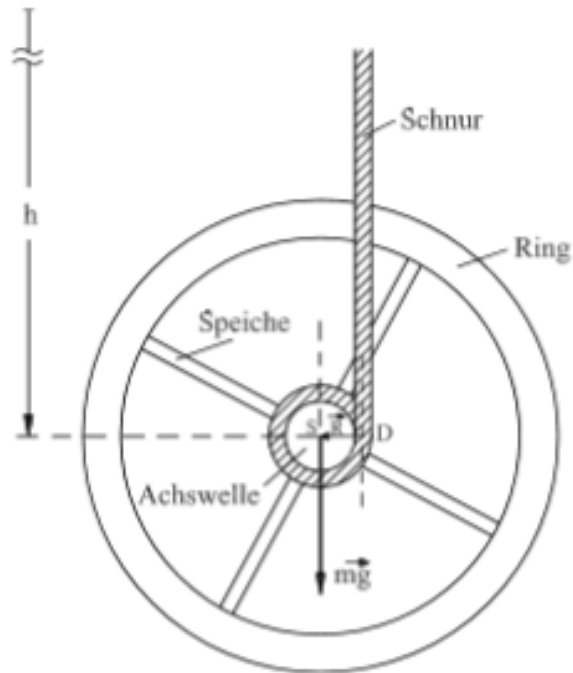
## 2. Maxwellsches Fallrad

Im ersten Teil des Experimentes wurde das Mawellsche Fallrad gemäß Abb. 1 untersucht. Hierbei wird, anders als im freien Fall, die potentielle Energie nur zum Teil in kinetische Energie umgewandelt, da das Rad zu rotieren beginnt. Dies resultiert in einer verlangsamten Fallbewegung mit Beschleunigung  $g^*$ .

Aus dem geometrischen Ausbau sowie der Masse folgt das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes, die Beschleunigung konnte direkt bestimmt werden. Der Steinersche Satz erlaubt nun Rückschlüsse auf den Abrollradius. Dieser wurde mit dem gemessenen Radius verglichen.

### 2.1. Methoden

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wurde das Rad unter Benutzung eines Messschiebers mit Nonius vermessen. Alle Bestandteile wurden hierbei als Voll- oder Hohlzylinder



**Abbildung 1:** Seitenansicht des maxwellschen Fallrades.[1]

betrachtet. Die Verdickung am Schnittpunkt der Achsen wurde nicht vermessen, zum Ausgleich wurde das Schnittvolumen doppelt berücksichtigt. Da der Abstand der Verdickung zur Drehachse klein gegenüber dem Abstand des äußeren Ringes ist, ist davon auszugehen, dass der Unterschied zu vernachlässigen ist. Größen, welche in vierter Potenz in das Trägheitsmoment eingehen, wurden mehrfach gemessen, um den Einfluss von möglichen Unebenheiten des Rades auf die Ergebnisse zu verringern. Die Masse des Rades wurde mittels einer Waage bestimmt. Anschließend wurden die Fallzeiten  $t$  für fünf verschiedene Höhen  $h$  je fünfmal mit einer Stoppuhr manuell bestimmt.

## 2.2. Daten und Analyse

### 2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt

Allgemein ist das Trägheitsmoment  $J$  definiert durch:

$$J = \int_V \vec{r}_\perp^2 \rho(\vec{r}) dV. \quad (2.1)$$

**Tabelle 1:** Abmessungen des Fallrades

Masse des Fallrades $M$	$(0,732\,040 \pm 0,000\,006) \text{ kg}$
Höhe bzw. Tiefe des Kreisrings $H_K$	$(0,011\,62 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius $R_a$	$(0,085\,11 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Innenradius und Speichenhöhe $R_i = H_S$	$(0,072\,71 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius $R_a$	$(0,004\,05 \pm 0,000\,02) \text{ m}$
Speichenradius $R_S$	$(0,004\,03 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Achsenhöhe $H_A$	$(0,200\,30 \pm 0,000\,02) \text{ m}$

Angewandt auf die vorliegende Geometrie bei Annahme einer konstanten Massenverteilung folgt bezüglich der Symmetrieachse:

$$J_s = J_K + 2J_S + J_A \quad (2.2)$$

$$= \varrho \pi \left[ \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) + 2H_S \left( \frac{H_S^2}{12} R_S^2 + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_A}{2} R_A^4 \right] \quad (2.3)$$

Wobei  $H$  die jeweilige Höhe und  $R$  den jeweiligen Radius des Zylinders beschreiben.  $R_a$  und  $R_i$  stehen für Außen- bzw. Innenradius des äußeren Kreisrings. Die Dichte  $\varrho$  ist als Masse pro Volumen gegeben:

$$\varrho = \frac{M}{\pi (H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2H_S R_S^2 + H_A R_A^2)}. \quad (2.4)$$

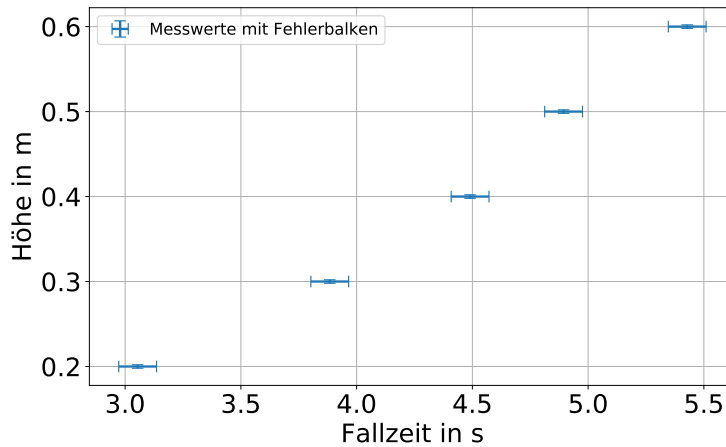
Durch einsetzen der Gleichungen 2.4 in Gleichung 2.3 erhält man das Trägheitsmoment

$$J_s = \frac{M \left( 2H_S \left( \frac{H_A R_A^4}{2} + \frac{H_S^2 R_S^2}{12} + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) \right)}{H_A R_A^2 + H_K (R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i}. \quad (2.5)$$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1 folgt aus den Gleichungen 2.5 und A.5 bezüglich der Symmetrieachse  $J = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Der relative Fehler ist  $\frac{\Delta J}{J} = 0.2\%$ .

### 2.2.2. Bestimmung der effektiven Beschleunigung

Um abschließend den gemessenen Abrollradius mit dem Abrollradius nach steinerschem Satz vergleichen zu können, wird neben dem Trägheitsmoment die effektive Beschleunigung  $g^*$  benötigt.



**Abbildung 2:** Die Höhe  $h$  des Fallrades in Abhängigkeit der jeweiligen Fallzeiten  $t$ .

Die Abbildung 2 stellt die Messwerte dar. Da die theoretischen Betrachtungen und der Graph eine quadratische Abhängigkeit suggerieren, werden diese Messwerte anschließend in Abbildung 3 linearisiert dargestellt. Abbildung 4 stellt die jeweilige Steigung einer gerade durch Ursprung und Messpunkt der Abbildung 3 dar.

Anschließend wurde das arithmetische Mittel  $c$  der Datenpunkte aus Abbildung 4 gebildet. Aus der zugehörigen Bewegungsgleichung ist abzulesen, dass  $\frac{g^*}{2} = \frac{h}{T^2} = c$ . Es folgt:  $g^* = (0,0410 \pm 0,0019) \text{ m/s}^2$ .

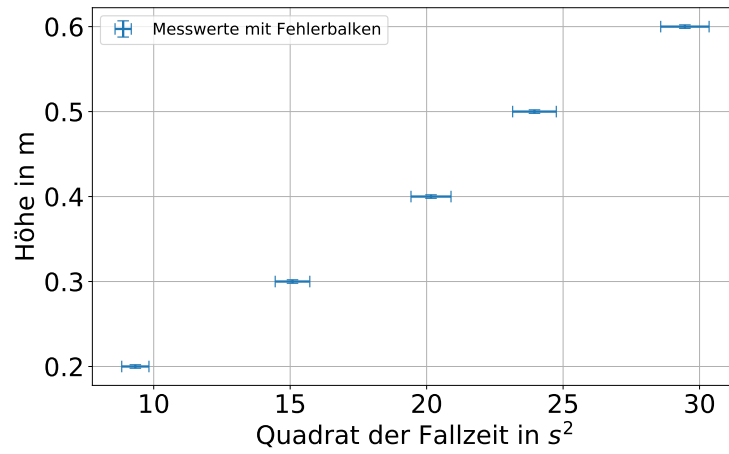
### 2.2.3. Vergleich der Abrollradien

Aus der Zusammenhang zwischen der effektiven Beschleunigung und dem Abrollradius nach Gleichung 2.6 folgt für den Abrollradius Gleichung 2.7.

$$g^* = g \frac{mR^2}{J_s + mR^2} = 2c \quad (2.6)$$

$$R = \sqrt{\frac{2cJ_s}{M(g - 2c)}} \quad (2.7)$$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1, der effektiven Beschleunigung  $g^*$  aus Abbildung 4 sowie der Fallbeschleunigung  $g$  aufgrund des Erdschwerefeldes und der Unsicherheit



**Abbildung 3:** Die Messpunkte nach Abb. 2 in Einheiten von  $t^2$ .

nach Gleichung A.6 folgt  $R = (0,004\,60 \pm 0,000\,11)$  m. Die Messung der Durchmesser von Faden und Aufhängeachse mit dem Messschieber ergab einen Radius  $R_{\text{geometrisch}} = (0,004\,55 \pm 0,000\,04)$  m. Der direkt gemessene Radius bestätigt den zuvor errechneten Wert. Des weiteren liefert die direkte Messung erwartungsgemäß die kleinere Unsicherheit.

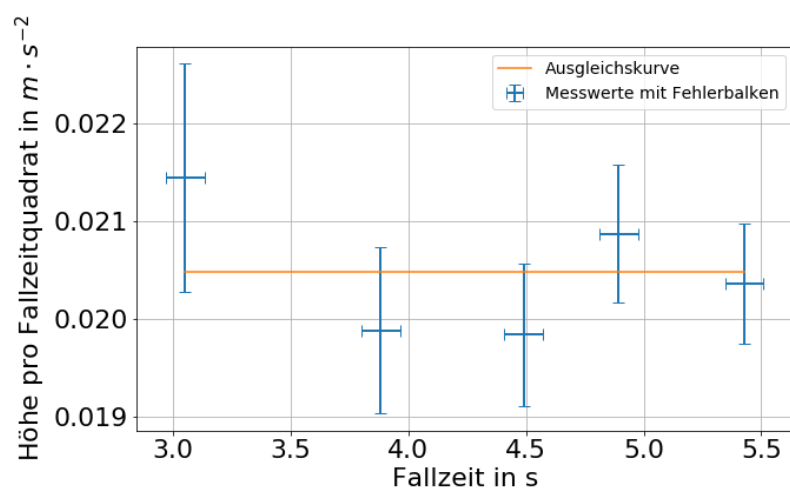


Abbildung 4: Messpunkte aus Abb. 2 in Einheiten von  $\frac{h}{t^2}$



### **3. Schlussfolgerung**

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Programme

Die Plots wurden mit Gnuplot oder Python erstellt. Beide Programme nutzten den Levenberg–Marquardt Algorithmus. Die Fehler wurden nach Empfehlung des „GUM“, insbesondere mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

### A.2. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung  $u$  für die Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung  $u$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung  $u$  für die Messwerte  $x_i$  und den Mittelwert  $\bar{x}$ :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kominierte Standardunsicherheit der Messgröße  $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$

Unsicherheit des Trägheitsmomentes :

$$\Delta J_S = \frac{1}{6} [((H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^4)^{-1} (4M^2 R_S^2 \Delta R_S^2 (H_S(H_S^2 + 6R_S^2)(H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2R_i(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4)))^2 + M^2(4H_A^2 R_A^2 \Delta R_A^2 (12H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + 4H_k^2 R_a^2 \Delta R_a^2 (-H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4) + 6.0R_a^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + R_A^4 \Delta H_A^2 (6H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + \Delta H_k^2 ((R_a^2 - R_i^2)(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4)) - 3(R_a^4 - R_i^4)(H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + \Delta R_i^2 (12.0H_k R_i^3 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4))(H_k R_i - R_S^2))^2) + (9M^2 \Delta H_S^2 (2H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + R_S^4)^2 + \Delta M^2 (H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^2)]^{\frac{1}{2}}$$
(A.5)

Unsicherheit des Abrollradius:

$$\Delta R = \left[ \left( \frac{\Delta M c J}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{(cJ)/((g-2c)M)M^2}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta J c}{\sqrt{2(-2c+g)} \sqrt{\frac{Jc}{(g-2c)M}M}} \right)^2 + \left( \frac{\Delta c g \sqrt{Jc}}{c(g-2c) \sqrt{2gM-4Mc}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(A.6)

## Literatur

- [1] Markus Donath und Anke Schmidt. *Begleitkurs zu den Experimentellen Übungen I*. 2017. URL: <https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/course/view.php?id=28561> (besucht am 03.01.2018).