

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll S2

**Experimentieren, und dann?**

Hauke Hawighorst, Jörn Sievneck

Gruppe 9Mi

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

25. Oktober 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>3. Methoden</b>	<b>3</b>
<b>4. Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
4.1. Pendel mit konstanter Länge . . . . .	4
4.2. Pendel mit unterschiedlichen Längen . . . . .	5
<b>5. Schlussfolgerung</b>	<b>7</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>8</b>
A.1. Verwendete Gleichungen und Definition der Variablen . . . . .	8

## 1. Zusammenfassung

Anlass dieses Experimentes, waren Messungen der Universität Münster welche die lokalen Gravitationsbeschleunigung  $g$ , nach wiederholten Messungen, auf  $(10,75 \pm 0,25) \text{ m/s}^2$  beziffern. Dies widerspricht den Angaben der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig (PTB), welche die Gravitationsbeschleunigung für Münster mit  $g = 9,813 \text{ m/s}^2$  angibt. Um diese Unterschiede besser beurteilen zu können, sollte die Gravitationsbeschleunigung mit Hilfe eines weiteren Experimentes bestimmt werden. Wie in Abschnitt 2 erläutert, eignet sich hierfür das Fadenpendel, da die Periodendauer nur von der Fallbeschleunigung  $g$  und dem Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängung  $l$  abhängen. Zunächst wurden fünfmal je 20 Schwingungsdauern bei einer Länge gemessen. Anschließend wurden dreimal 10 Pendelschwingungen bei verschiedenen Längen vermessen. Die zunächst durchgeführten Messungen mit einer Pendellänge ergaben  $g = (9,809 \pm 0,013) \text{ m/s}^2$ , die Messungen über verschiedene Längen sind mit dem gegebenen Wert konsistent. Beide Messungen bestätigen die Messungen des PTB.

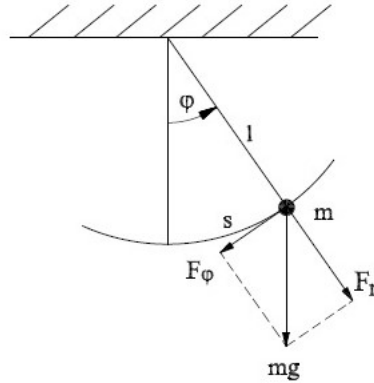
## 2. Theoretische Grundlagen

Im Folgenden soll die Bewegungsgleichung für das Pendel hergeleitet werden. Vereinfachend angenommen werden hierzu: Reibungsfreiheit, kleine Auslenkungen sowie die Approximierbarkeit der Masse  $m$  durch einen Massepunkt. Ausgangspunkt ist hierzu die Erhaltung der Systemenergie  $E$ , welche sich aufgrund der Annahmen aus potentieller Energie  $V$  und kinetischer Energie  $T$  zusammensetzt. Es gilt:

$$E = T + V = \text{const.} \quad (2.1)$$

Des Weiteren gilt für die kinetische Energie  $T$ , da sich der Massepunkt auf einer Kreisbahn bewegt, dass sich die relevante Geschwindigkeit  $v$  über den Kreistradius bzw. die Länge zwischen Aufhängung und Schwerpunkt  $l$  sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  darstellen lässt. Mit  $v = l\dot{\varphi}$  folgt:

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \quad (2.2)$$



**Abbildung 1:** Die Abbildung zeigt schematisch den Aufbau des Fadenpendels sowie die relevanten Kräfte.

Aus der Skizze des Fadenpendels <sup>1</sup> lesen wir für die potentielle Energie ab:

$$V = -l \cos(\varphi) mg \quad (2.3)$$

Durch Einsetzen von den Gleichungen (2.2) und (2.3) in Gleichung (2.1) erhalten wir:

$$E = -l \cos(\varphi) mg + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} = \text{const.} \quad (2.4)$$

Dieses lässt sich durch differenzieren nach der Zeit (2.5) sowie der Kleinwinkelnäherung und elementaren Umformungen auf die gewünschte Form (2.6) bringen:

$$0 = lmg \dot{\varphi} \sin(\varphi) + ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \quad (2.5)$$

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi \quad (2.6)$$

Diese lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung lässt sich mit einem komplexwertigen Potenzreihenansatz lösen. Dieser führt mit  $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$  auf eine Funktion der Form:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2.7)$$

Wobei  $a$  und  $\varphi_0$  an die Anfangsbedingungen angepasst werden müssen.

<sup>1</sup>Skizze entnommen aus dem Informationsmaterial zu den Experimentellen Übungen der Universität Münster 2017, url: [https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/pluginfile.php/1334529/mod\\_resource/content/1/Fadenpendel\\_Einf.pdf](https://sso.uni-muenster.de/LearnWeb/learnweb2/pluginfile.php/1334529/mod_resource/content/1/Fadenpendel_Einf.pdf)

Eine Pendelschwingung entspricht genau einer Periode( $2\pi$ ) des Sinus. Daher gilt bezüglich der Schwingungsdauer  $T$ :

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}}T \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.9)$$

Es folgt für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{2\pi l}{T^2} \quad (2.10)$$

Aus Gleichung 2.10 lassen sich zwei Variablen ablesen, welche zu messen sind und deren Unsicherheiten berücksichtigt werden müssen. Die kombinierte Standardunsicherheit setzt sich aus den Unsicherheiten der Länge  $l$  und der Schwingungsdauer  $T$  zusammen. Da Länge und Zeit in diesem Experiment unabhängige Größen sind, gilt nach GUM:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l}u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}u(T)\right)^2} \quad (2.11)$$

$$= g\sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(2\frac{u(T)}{T}\right)^2} \quad (2.12)$$

### 3. Methoden

Wie aus Abschnitt 2 deutlich wird, lässt sich die Fallbeschleunigung aus Kreisradius und Schwingungsdauer berechnen. Zunächst wurden daher fünfmal die Zeit für 20 Pendelschwingungen gemessen, um sowohl das Risiko des Verzählens als auch die Messungenauigkeiten durch das manuelle Zeitnehmen zu minimieren. In einer zweiten Messreihe wurden jeweils weniger Pendelschläge (30) gezählt, jedoch wurde verschiedene Pendellänge ausgewertet. Die Längen wurden mit einem Maßband bestimmt, gemessen wurde von der Aufhängung bis zu der Oberseite der Metallkugel anschließend wurde der Kugelradius (15 mm) addiert, da die für die Schwingungsdauer relevante Länge der Abstand

zwischen Aufhängung und Schwerpunkt ist. Die Schwingungsdauer wurde mit einer Stoppuhr bestimmt. Start und Endpunkt wurden, mithilfe des Kugelschattens, eindeutig auf dem Tisch gekennzeichnet. Als Messpunkt wurde die Stelle maximaler Geschwindigkeit gewählt, um den Einfluss einer Unsicherheit des Ortes auf die Schwingungsdauer zu minimieren.

## 4. Ergebnisse und Diskussion

### 4.1. Pendel mit konstanter Länge

**Tabelle 1:** Anzahl der Pendelschwingungen sowie die zugehörige Dauer an. Die Länge des Pendels betrug  $(1,1450 \pm 0,0012)$  m

Messung Nr.	Anzahl der Schwingungen	Gesamtdauer [s]	Dauer einer Schwingung $T$ [s]
1	20	42,94	2,1470
2	20	42,94	2,1470
3	20	42,91	2,1455
4	20	42,91	2,1455
5	20	42,97	2,1485
Durchschnitt		42,93	2,1467

Zur Bestimmung der Unsicherheiten wurde angenommen, dass die Pendellänge um nicht mehr als 3 mm von dem gemessenen Wert abweicht, hierdurch ergibt sich mit Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch eine Dreiecksverteilung nach Gleichung A.1 mit  $a = 6$  mm eine Standardunsicherheit von 1,2 mm.

Bei der Zeitmessung wurden zwei relevante Unsicherheitsquellen identifiziert, zum einen die Reaktionszeit von etwa 0,1 Sekunden je Messung, sowie die Standardabweichung aufgrund der Schwankungen der gemessenen Zeiten. Unsicherheiten aufgrund der Digitalen Anzeige oder Kalibrierung der Stoppuhr sind so klein gegenüber der Ungenauigkeit aufgrund der Reaktionszeit, dass sie zu vernachlässigen sind. Die Unsicherheit des Typs B, für  $a = 0,1$  s und  $N = 20$  wird nach Gleichung A.1 mit  $1,0 \cdot 10^{-3}$  s abgeschätzt. Die Unsicherheit des Typs A ergibt sich aus Tabelle 1, mit  $t_p = 1,14$  sowie den Gleichung A.3, sie beträgt  $3 \cdot 10^{-7}$  s. Aus Gleichung A.4 folgt mit einsetzen der obigen Werte das die

Unsicherheit des Typs A keinen Einfluss auf die signifikanten Stellen der kombinierten Unsicherheit bezüglich der Zeit hat, sie beträgt daher ebenfalls  $1,0 \cdot 10^{-3}$  mm. Mit den Gleichungen 2.10 und 2.12 erhält man:  $g = (9,809 \pm 0,013) \text{ m/s}^2$ .

## 4.2. Pendel mit unterschiedlichen Längen

**Tabelle 2:** Dauer der Pendelschwingungen in Abhängigkeit unterschiedlicher Pendellängen mit einer Standardunsicherheit von  $\pm 0,0012$  m

Pendel Länge in m	Anzahl der Messungen	Anzahl der Schwingungen	Ø Gesamtdauer in s	Ø Dauer einer Schwingung in s
0,774	3	10	17,64	$(1,760 \pm 1,057) \cdot 10^{-5}$
0,844	3	10	18,44	$(1,840 \pm 9,434) \cdot 10^{-6}$
0,995	3	10	19,72	$(1,970 \pm 7,642) \cdot 10^{-6}$
1,012	3	10	20,10	$(2,010 \pm 1,510) \cdot 10^{-6}$
1,058	3	10	20,66	$(2,070 \pm 2,547) \cdot 10^{-6}$

Diese Messreihe diene genauso wie die erste Messreihe dazu die Gravitationsbeschleunigung rechnerisch aus der Schwingungsdauer eines Pendels zu bestimmen. Hierzu wurden mehrere Messung der Schwingungsdauer bei variierender Länge des Pendels durchgeführt. Damit man die Messdaten auswerten kann muss man zunächst die möglichen Fehlerquellen ausfindig machen und die Unsicherheiten berechnen die von ihnen ausgehen. Diese Unsicherheiten kann man zunächst in drei Teilbereiche aufteilen:

- Unsicherheiten die bei der Berechnung der Schwingungsdauer auftreten:  
Diese Unsicherheiten werden mit einer Typ A Unsicherheitsberechnung nach Gleichung A.3 mit  $t_p = 1,32$  abgeschätzt und sind in Tabelle 2 angegeben.
- Unsicherheiten beim Messen der Zeit einer Pendelschwingung:  
Die Reaktionszeit beim Stoppen der Zeit und die digitale Anzeige der Stoppuhr sind die Unsicherheiten, die bei der Zeitmessung auftreten können. Bei der Reaktionszeit handelt es sich um eine Typ B Unsicherheit die nach Formel A.1 mit  $a = 0,2$  abgeschätzt wird, da hier angenommen wird, dass die Reaktionszeit bei  $\pm 0,1$  s liegt. Die jeweiligen Werte der Unsicherheit in Tabelle 3 eingetragen. Da die Stoppuhr immer auf Millisekunden rundet wird die Unsicherheit beim Ablesen der Zeit

mit einer Rechteckverteilung nach Gleichung A.2 (mit  $a = 0,01 \text{ s}$ ) und  $N = 10$  abgeschätzt, somit kommt man auf eine Unsicherheit von  $\pm 0,0028 \text{ s}$ .

- Unsicherheiten beim Messen der verschiedenen Pendellängen:

Bei dem Messen der Länge kann ein Ablesefehler aufgrund des Analogen Maßbandes entstehen. Dementsprechend wird diese Unsicherheit nach Gleichung A.1 mit  $a = 0,06 \text{ m}$  abgeschätzt und man kommt auf die Unsicherheit bei der Pendellänge die in Tabelle 3 zu sehen ist.

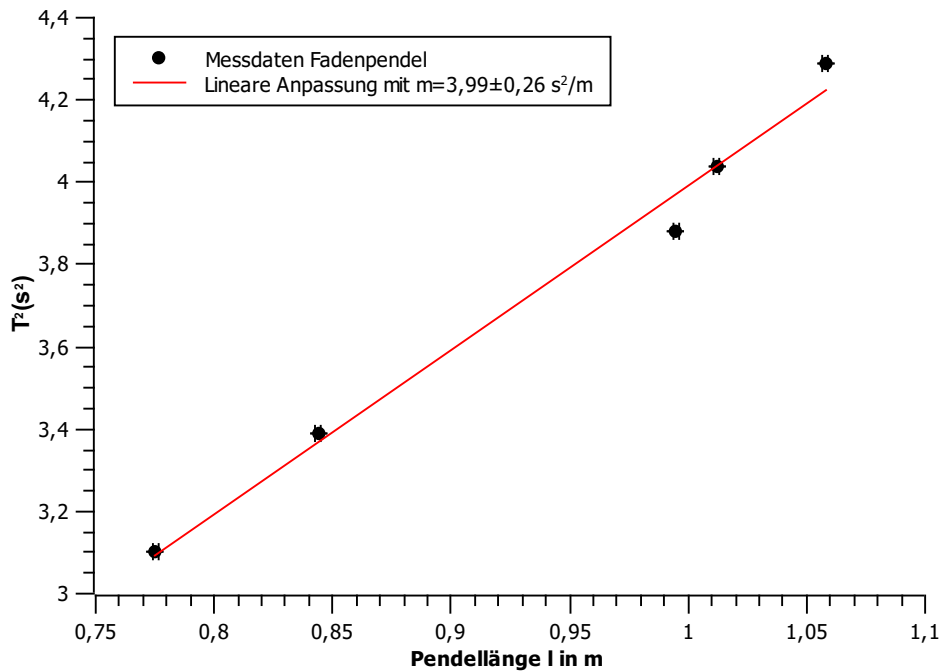
Die kombinierte Standardunsicherheit wird nach Gleichung A.4 mit den Werten aus der Tabelle 3 berechnet. Hierbei handelt es sich um die Endgültige Unsicherheit mit der dann auch der, im nachfolgendem berechnete, Wert für die Gravitationsbeschleunigung betrachtet werden muss.

Dieser letzte und entscheidende Wert, der ebenfalls in Tabelle 3 zusehen ist, ist die Gravitationsbeschleunigung die nach Gleichung 2.10 bestimmt wird. Diese Werte sind in Abbildung 2 aufgetragen. Die y-Achse auf der die Schwingungsdauer aufgetragen ist wurde quadriert um einen Linearen Zusammenhang zu erzeugen. Um diesen Zusammenhang zu verdeutlichen wurde eine Lineare Anpassung (nach Methode der kleinsten Quadrate) mit Steigung  $m = (3,99 \pm 0,26) \text{ s}^2/\text{m}$  verwendet. Betrachtet man nun diese Abbildung so sieht man das zwei Messwerte stark von dem Idealwert abweichen. Dies ist vermutlich auf Messfehler bei der Durchführung des Experimentes zurückzuführen. Vor allem der Wert für die Pendellänge von  $0,995 \text{ m}$  mit  $g = 10,1 \text{ m/s}^2$ , weicht sehr stark vom erwarteten Wert für  $g = 9,813 \text{ m/s}^2$  ab. Dies führt dann dazu das der Wert für die Gravitationsbeschleunigung für die Pendellänge von  $1,058 \text{ m}$  ebenfalls stark von den anderen Werten abweichen.

**Tabelle 3:** Abweichungen der einzelnen Messungen, der Kombinierten Unsicherheit sowie des Errechneten Wertes von  $g$

Länge des Pendels in m	Unsicherheit der Digitalen Anzeige der Stoppuhr in s	Unsicherheit der Analogen Anzeige des Maßbandes in m	Unsicherheit durch die Reaktionszeit in s	Kombinierte Unsicherheit in $\text{m/s}^2$	$g$ in $\text{m/s}^2$
0,774	$\pm 0,002$	$\pm 0,0012$	$\pm 0,0003$	0,021	9,824
0,844	$\pm 0,002$	$\pm 0,0012$	$\pm 0,0003$	0,02	9,803
0,995	$\pm 0,002$	$\pm 0,0012$	$\pm 0,0003$	0,019	10,10
1,012	$\pm 0,002$	$\pm 0,0012$	$\pm 0,0003$	0,019	9,886
1,058	$\pm 0,002$	$\pm 0,0012$	$\pm 0,003$	0,023	9,786





**Abbildung 2:** In der Grafik ist die Dauer einer Schwingung zum Quadrat in Abhängigkeit der Pendellänge, sowie eine Lineare Anpassung zu sehen.

## 5. Schlussfolgerung

Bis auf einen Messwert liegen alle Bestwerte in einem Bereich zwischen  $9,78 \text{ m/s}^2$  und  $9,89 \text{ m/s}^2$ . Bei dem abweichenden Messwert ist von einem groben Fehler in der Durchführung auszugehen.

Somit bestätigen die vorliegenden Messungen die Werte der PTB und widersprechen mehrheitlich den vorausgegangenen Messungen der Universität Münster. Mögliche Ursache für einen Fehler in der Auswertung der Fallzeit im Fallrohr ist die Annahme, dass die Kugel auf Höhe der ersten Lichtschranke ruhe, bei der Demonstration war dies jedoch offensichtlich nicht der Fall, da die Kugel deutlich oberhalb der Lichtschranke fallengelassen wurde.

Abschließend ist anzumerken, dass der Wert des PTB plausibel erscheinen und die Messungen mithilfe des Fallrohres neu ausgewertet werden sollten und ggf. weitere Fehlerquellen identifiziert werden müssen.

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Gleichungen und Definition der Variablen

- Standardunsicherheit  $u$  bei einer Dreieckverteilung mit der Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}N} \quad (\text{A.1})$$

- Standardunsicherheit  $u$  durch Reaktionszeit je Pendelschwingung  $N$  bei einer Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}N} \quad (\text{A.2})$$

- Standardabweichung  $\sigma$ :

$$\sigma = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

- Kombinierte Standardunsicherheit bei mehreren Unsicherheiten einer Größe:

$$u_{ges} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (\text{A.4})$$