Drehpendel nach Pohl
Einführung

Das Drehpendel nach Pohl (oder Pohl'sches Rad, vgl. Abb. 1) eignet sich zur Untersuchung von freien, gedämpften und erzwungenen Drehschwingungen. Zur Erzeugung der erzwungenen Schwingungen dient ein Motor, der über ein Exzentergestänge am Rad befestigt ist. Die Dämpfung kann über eine Wirbelstrombremse zugeschaltet werden.

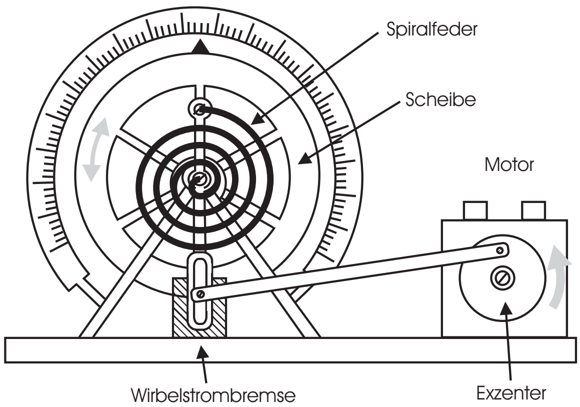

Abbildung 1: Drehpendel nach Pohl

Harmonische Schwingungen

Freie und erzwungene (gedämpfte) Schwingungen gehören zu den wichtigsten Phänomenen der Physik. Sie sind auf Gebieten verschiedenster Art zu beobachten, an mechanisch schwingenden Systemen wie Pendeln, Saiten oder Drehpendeln, in elektromagnetischen Schwingkreisen oder in schwingenden Ladungsverteilungen in Atomen, Molekülen und Festkörpern. So verschieden die schwingenden physikalischen Größen auch sein mögen, alle harmonisch schwingenden Systeme gehorchen denselben Gesetzmäßigkeiten. Das Verständnis der Eigenschaften von schwingenden Systemen, insbesondere der Resonanz, ist daher Grundlage für das Verständnis einer Vielzahl von Naturphänomenen.

Am Beispiel eines Drehschwingers werden im Folgenden die allgemeinen Eigenschaften schwingfähiger Systeme zusammengestellt und diskutiert.

Eine Kreisscheibe mit dem Trägheitsmoment J ist an einer Drehachse befestigt, auf die eine Spiralfeder ein rücktreibendes Drehmoment $-D\varphi$ ausübt, das durch die Federkonstante D und den Verdrillungswinkel φ gegeben ist. Neben dem von der Spiralfeder verursachten Drehmoment wirkt ein zur Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ der Scheibe proportionales bremsendes Drehmoment $-r\dot{\varphi}$ auf die Scheibe. Die Bewegungsgleichung[1] für die Scheibe lautet dann

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi - r\dot{\varphi}\,. \tag{1}$$

Umordnen der Terme ergibt

$$J\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = 0\,. \tag{2}$$

Man bringt die Gleichung auf die Normalform

$$\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0\,, \tag{3}$$

indem man die Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J} \qquad \text{und} \qquad 2\rho = \frac{r}{J} \tag{4}$$

einführt.

1 Freie Schwingungen

Bringt man durch einen einmaligen Eingriff Energie in das System, etwa indem man die Scheibe auslenkt und loslässt, beginnt das System die freie Schwingung $\varphi(t)$ auszuführen.

Mit dem Ansatz

$$\varphi(t) = C \cdot e^{\omega t} \tag{5}$$

und Einsetzen in die Bewegungsgleichung (3) erhält man (wenn man die triviale Lösung $C = 0$ ignoriert)

$$\omega_{1,2} = -\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}\,. \tag{6}$$

Es sind drei Fälle zu unterscheiden, die drei charakteristische Bewegungsformen beschreiben.

[1] Die Newtonsche Bewegungsgleichung $F = \dot{p} = m\ddot{x}$ (Kraft F, Impuls p, Masse m, Ort x) entspricht für Drehbewegungen der Gleichung $M = \dot{L} = J\ddot{\varphi}$ (Drehmoment M, Drehimpuls L, Trägheitsmoment J, Winkel φ).

1.1 Starke Dämpfung: Kriechfall

Für den Fall dass $\rho^2 > \omega_0^2$ ist $\sqrt{\rho^2 - \omega_0^2}$ reell und positiv. Damit sind beide Lösungen $\omega_{1,2}$ reell und negativ und die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(t) = Ae^{\omega_1 t} + Be^{\omega_2 t}\,, \tag{7}$$

mit reellen Konstanten A und B, die z.B. durch die Anfangswerte von φ und $\dot{\varphi}$ zur Zeit $t = 0$ festgelegt sind. Man erhält somit zwei mit zunehmendem t monoton abfallende Teile $e^{\omega_1 t}$ und $e^{\omega_2 t}$, so dass $\varphi(t)$ insgesamt eine monoton abfallende Funktion der Zeit t ist.

In diesem Fall der starken Dämpfung schwingt das ausgelenkte System nicht, es bewegt sich asymptotisch "kriechend" in die Ruhelage zurück. Ein Beispiel für ein solches System wäre ein Fadenpendel in einem Honigglas.

1.2 Aperiodischer Grenzfall

Für den Fall dass $\rho^2 = \omega_0^2$ fallen ω_1 und ω_2 zusammen und es muss eine zweite linear unabhängige Lösung für die Bewegungsgleichung gefunden werden. Mit dem Ansatz

$$\varphi(t) = (A + Bt) \cdot e^{\omega t} \tag{8}$$

und den Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$ erhält man die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0(1 + \omega_0 t) \cdot e^{-\omega_0 t} \tag{9}$$

Das System kommt in diesem Fall der Ruhelage in besonders kurzer Zeit wieder sehr nahe. Überlegen Sie, wie weit das System nach der charakteristischen Zeit $T = 2\pi/\omega_0$ noch von der Ruhelage entfernt ist!

Bei Systemen zur Schwingungsdämpfung, zum Beispiel bei Stoßdämpfern im Auto, wird versucht, den aperiodischen Grenzfall zu erreichen.

1.3 Schwache Dämpfung: Schwingung

Im Fall $\rho^2 < \omega_0^2$ ergeben sich zwei verschiedene komplexe Werte für ω

$$\omega_{1,2} = -\rho \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}\,. \tag{10}$$

Mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = -\varphi_0\rho$ erhält man die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\rho t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} \cdot t)\,. \tag{11}$$

Diese Gleichung beschreibt eine (co)sinus-förmige Schwingung, deren Amplitude exponentiell mit der Zeit abklingt. Im reibungsfreien Fall $\rho \to 0$ ist die Schwingung ungedämpft und erfolgt mit der Kreisfrequenz ω_0, der **Eigenfrequenz** des Systems. Bei vorhandener Reibung ist die Eigenfrequenz

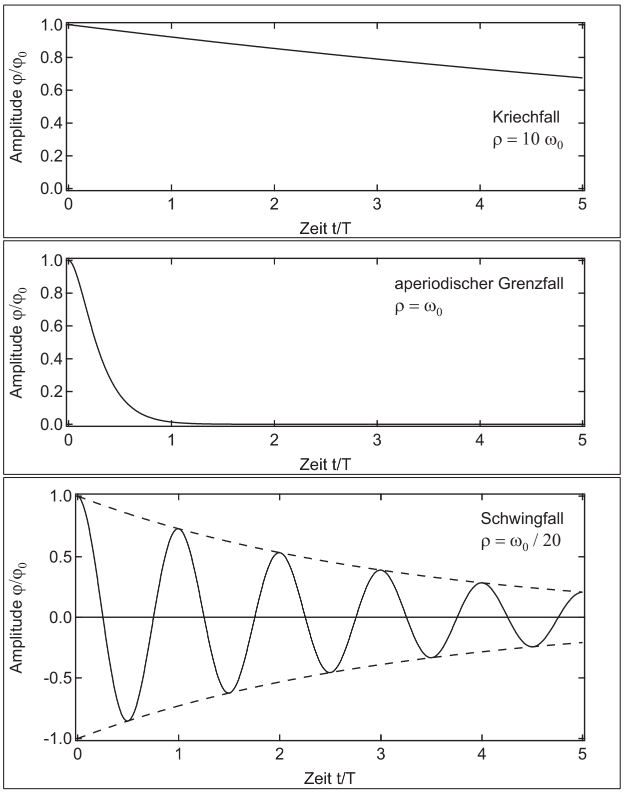

Abbildung 2: Freie Schwingung für die Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = 1$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = 0$, im Kriechfall (oben) und im aperiodischen Grenzfall (Mitte) sowie im Schwingfall (unten) für die Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = -\varphi_0\omega_0/20$.

$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \rho^2}$ kleiner als ω_0. Allerdings ist die Eigenfrequenz $\tilde{\omega}$ in praktisch allen vorkommenden Fällen nur wenige Promille von ω_0 verschieden.

Die drei Lösungen der harmonischen Bewegungsgleichung (3) sind in Abbildung 2 dargestellt. Die gestrichelt gezeichneten Hilfslinien $\pm e^{-\rho t}$ im gedämpften Schwingfall geben die Grenzen an, zwischen denen das System gemäß $\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \rho^2} \cdot t)$ hin und her schwingt.

2 Erzwungene Schwingungen

Wirkt auf ein Drehschwingsystem ein periodisches äußeres Drehmoment $M_0 \cos(\omega t)$, so gehorcht das System der Bewegungsgleichung

$$J\ddot{\varphi} + r\dot{\varphi} + D\varphi = M_0 \cos(\omega t)\,. \tag{12}$$

In Normalform lautet die Gleichung

$$\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \mu \cos(\omega t) \qquad \text{mit} \qquad \mu = M_0/J\,. \tag{13}$$

Die äußere periodische Anregung zwingt dem System eine Schwingung mit der Frequenz ω der Anregung auf. Beim Einschalten der Anregung können auch freie gedämpfte Schwingungen, wie im letzten Abschnitt beschrieben, angeregt werden und es entsteht eine Überlagerung beider Schwingungen. Nachdem die gedämpfte freie Schwingung abgeklungen ist, nach Ende des sogenannten Einschwingvorgangs also, wird der stationäre Zustand erreicht, bei dem die Energiezufuhr von außen genau die Reibungsverluste deckt.

Im stationären Zustand ist

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t - \alpha) \tag{14}$$

mit der Amplitude

$$\varphi_0 = \frac{\mu}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\rho^2\omega^2}} \tag{15}$$

und der Phase

$$\tan\alpha = \frac{-2\rho\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{16}$$

eine Lösung der Bewegungsgleichung (13). Die erzwungene Schwingung ist also eine mit der Frequenz der Anregung ω oszillierende Kosinusfunktion, deren Phase um α hinter der Phase der Anregung her hinkt und deren (zeitlich konstante) Amplitude φ_0 von der Frequenz der Anregung und der Dämpfung des Systems ρ abhängt. Im Resonanzfall für $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\rho^2}$ ist die Amplitude maximal. Die Resonanz ist umso ausgeprägter, je kleiner die Dämpfung ist. Für das reibungsfreie System $\rho \to 0$ tritt eine sogenannte **Resonanzkatastrophe** ein, d.h. die Amplitude wird unendlich groß, wenn die Frequenz der Anregung gleich der Eigenfrequenz ist, $\omega = \omega_0$.

1 Was Sie zur Versuchsdurchführung wissen sollten

Harmonische Schwingungen, insbesondere erzwungene Schwingungen.

2 Durchführung und Auswertung

1. Machen Sie sich zuerst mit den verschiedenen Bewegungsmöglichkeiten (freie, gedämpfte und erzwungene Schwingung) des Drehpendels vertraut.

2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz des Drehpendels für die freie (näherungsweise ungedämpfte) Schwingung

   (a) mit Hilfe einer Stoppuhr,

   (b) aus der aufgenommenen Messkurve am Computer.

3. Stellen Sie mit Hilfe der Wirbelstrombremse drei verschiedene Dämpfungen ein (ohne äußere Anregung) und bestimmen Sie jeweils die Eigenfrequenz und die Dämpfung aus der Abnahme der Amplitude mit der Zeit. Betreiben Sie die Wirbelstrombremse dabei nicht länger als 2 – 3 Minuten mit mehr als 1 A und nie mit mehr als 2 A.
4. Das Pendel wird mit Hilfe des Exzenters und der Wirbelstrombremse zu einer erzwungenen, gedämpften Schwingung angeregt. Bestimmen Sie zunächst den Zusammenhang zwischen der Frequenz der Anregung ω und der Spannung am Tacho-Ausgang (Kalibrierkurve!). Messen Sie anschließend für drei verschiedene Dämpfungen die Abhängigkeit der Amplitude φ_0 von ω (Jeweils mindestens 20 Messpunkte; wählen Sie die Messpunkte in der Umgebung der Resonanzfrequenz dichter).
5. Stellen Sie ihre drei Resonanzkurven ($\varphi_0(\omega)$) grafisch dar. Bestimmen Sie die jeweilige Dämpfung aus der Position den Maximums.
6. Beobachten Sie für kleine Dämpfung die Phasenbeziehung zwischen Anregung und Drehpendel bei hohen Frequenzen, bei niedrigen Frequenzen und in der Nähe der Resonanzfrequenz. Beschreiben Sie Ihre Beobachtungen.
7. Machen Sie sich anhand eines Fadenpendels den Zusammenhang zwischen Anregungsfrequenz und Amplitude bei niedrigen und hohen Frequenzen, sowie in Resonanz noch einmal klar. Beobachten Sie auch hier die Phasenbeziehung.
8. Führen Sie eine kleine "Nichtlinearität" ein, indem Sie ein kleines Gewicht etwa einen Finger breit neben dem Pfeil an dem Drehpendel befestigen. Fahren Sie nun langsam eine Resonanzkurve durch (ohne Dämpfung), indem Sie die Anregungsfrequenz langsam ändern, einmal ausgehend von hohen Frequenzen und einmal ausgehend von niedrigen Frequenzen. Was beobachten Sie in der Nähe der Resonanz?
9. Stellen Sie näherungsweise die Resonanzfrequenz ein und versuchen Sie die beiden stabilen Schwingungszustände zu beobachten.
10. Überprüfen Sie, ob Sie alle Messungen durchgeführt und alle Größen bestimmt haben, die Sie zur Auswertung benötigen.
11. Bestimmen Sie die Unsicherheiten Ihrer Messergebnisse und diskutieren Sie alle Ihre Beobachtungen.