

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll S2

**Experimentieren, und dann?**

Hauke Hawighorst, Jörn Sievneck

Gruppe 9Mi

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

25. Oktober 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2. Theoretische Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>3. Methoden</b>	<b>3</b>
<b>4. Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>4</b>
4.1. Pendel mit konstanter Länge . . . . .	4
<b>5. Schlussfolgerung</b>	<b>5</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>6</b>
A.1. Verwendete Gleichungen und Definition der Variablen . . . . .	6
A.2. Quellen . . . . .	6

## 1. Einführung

Anlass dieses Experimentes, waren Messungen der Universität Münster welche die lokalen Fallbeschleunigung  $g$ , nach wiederholten Messungen, auf  $(10,75 \pm 0,25) \text{ m/s}^2$  beziffern. Dies widerspricht den Angaben der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig welche die Fallbeschleunigung für Münster mit  $g = 9,813 \text{ m/s}^2$  angibt. Um diese Unterschiede besser beurteilen zu können, sollte die Fallbeschleunigung mit Hilfe eines weiteren Experimentes bestimmt werden. Wie in Abschnitt 2 erläutert, eignet sich hierfür das Fadenpendel, da die Periodendauer nur von der Fallbeschleunigung  $g$  und dem Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängung  $l$  abhängen.

Zunächst wurden fünfmal je 20 Schwingungsdauern bei einer Länge gemessen. Anschließend wurden 30 Pendelschwingungen bei verschiedenen Längen vermessen. Die zunächst durchgeführten Messungen mit einer Pendellänge ergaben  $g = (9,809 \pm 0,013) \text{ m/s}^2$ , die Messungen über verschiedene Längen sind mit dem gegebenen Wert konsistent. Beide Messungen bestätigen die Messungen des PTB.

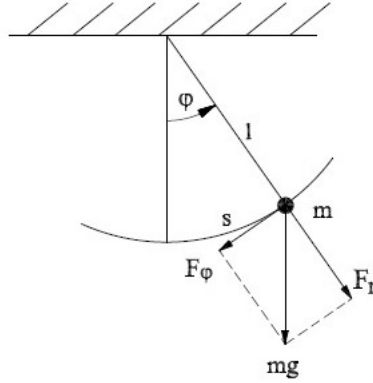
## 2. Theoretische Grundlagen

Im folgenden soll die Bewegungsgleichung für das Pendel hergeleitet werden. Vereinfachend angenommen werden hierzu: Reibungsfreiheit, kleine Auslenkungen sowie die Approximierbarkeit der Masse durch einen Massepunkt der Masse  $m$ . Ausgangspunkt ist hierzu die Erhaltung der Systemenergie  $E$ , welche sich aufgrund der Annahmen aus potentieller Energie  $V$  und kinetischer Energie  $T$  zusammensetzt. Es gilt:

$$E = T + V = \text{const.} \quad (2.1)$$

Des weiteren gilt für die kinetische Energie  $T$ , da sich der Massepunkt auf einer Kreisbahn bewegt, dass die relevante Geschwindigkeit  $v$  über den Kreistradius bzw. die Länge zwischen Aufhängung und Schwerpunkt  $l$  sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  darstellen lässt. Mit  $v = l\dot{\varphi}$  folgt:

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \quad (2.2)$$



**Abbildung 1:** Die Abbildung zeigt schematisch den Aufbau des Fadenpendels sowie die relevanten Kräfte.

Aus der Abbildung 1 lesen wir für die potentielle Energie ab:

$$V = -l \cos(\varphi) mg \quad (2.3)$$

Durch Einsetzen von den Gleichungen (2.2) und (2.3) in Gleichung (2.1) erhalten wir:

$$E = -l \cos(\varphi) mg + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} = \text{const.} \quad (2.4)$$

Dieses lässt sich durch differenzieren nach der Zeit (2.5) sowie der Kleinwinkelnäherung und elementaren Umformungen auf die folgende Form (2.6) bringen:

$$0 = lmg \dot{\varphi} \sin(\varphi) + ml^2 \dot{\varphi} \ddot{\varphi} \quad (2.5)$$

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi \quad (2.6)$$

Diese lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung lässt sich mit einem komplexwertigen Potenzreihenansatz lösen. Dieser führt mit  $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$  auf eine Funktion der Form:

$$\varphi(t) = a \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2.7)$$

Wobei  $a$  und  $\varphi_0$  an die Anfangsbedingungen angepasst werden müssen.

Eine Pendelschwingung entspricht genau einer Periode( $2\pi$ ) des Sinus. Daher gilt bezüglich

der Schwingungsdauer  $T$ :

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}} T \quad (2.8)$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.9)$$

Es folgt für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{2\pi l}{T^2} \quad (2.10)$$

Aus Gleichung 2.10 lassen sich zwei Variablen ablesen, welche zu messen sind und deren Unsicherheiten berücksichtigt werden müssen. Die kombinierte Standardunsicherheit setzt sich aus den Unsicherheiten der Länge  $l$  und der Schwingungsdauer  $T$  zusammen. Da Länge und Zeit in diesem Experiment unabhängige Größen sind, gilt nach GUM:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u(T)\right)^2} \quad (2.11)$$

$$= g \sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{u(T)}{T}\right)^2} \quad (2.12)$$

### 3. Methoden

Wie aus Abschnitt 2 deutlich wird lässt sich die Fallbeschleunigung aus Kreisradius und Schwingungsdauer berechnen. Zunächst wurden daher fünfmal die Zeit für 20 Pendelschwingungen gemessen, um sowohl das Risiko des verzählens als auch die Messungenauigkeiten durch das manuelle Zeitnehmen zu minimieren. In einer zweiten Messreihe wurden jeweils weniger Pendelschläge (30) gezählt, jedoch wurde verschiedene Pendellänge ausgewertet. Die Längen wurden mit einem Maßband bestimmt, gemessen wurde von der Aufhängung bis zu der Oberseite der Metallkugel anschließend wurde der Kugelradius (15 mm) addiert, da die für die Schwingungsdauer relevante Länge der Abstand zwischen Aufhängung und Schwerpunkt ist. Die Schwingungsdauer wurde mit einer Stopp-

uhr bestimmt. Start und Endpunkt wurden, mithilfe des Kugelschattens, eindeutig auf dem Tisch gekennzeichnet. Als Messpunkt wurde die Stelle maximaler Geschwindigkeit gewählt, um den Einfluss einer Unsicherheit des Ortes auf die Schwingungsdauer zu minimieren.

## 4. Ergebnisse und Diskussion

### 4.1. Pendel mit konstanter Länge

Messung Nr.	Anzahl der Schwingungen	Gesamtdauer [s]	Dauer einer Schwingung $T$ [s]
1	20	42,94	2,147
2	20	42,94	2,147
3	20	42,91	2,1455
4	20	42,91	2,1455
5	20	42,97	2,1485
Durchschnitt		42,934	2,1467

**Abbildung 2:** Die Tabelle gibt die Anzahl der Pendelschwingungen sowie die zugehörige Dauer an. Die Länge des Pendels betrug  $(1,1450 \pm 0,0012)$  m

Zur Bestimmung der Unsicherheiten wurde angenommen, dass die Pendellänge um nicht mehr als 3 mm von dem gemessenen Wert abweicht, hierdurch ergibt sich mit Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch eine Dreiecksverteilung nach Gleichung A.1 mit  $a = 6$  mm eine Standardunsicherheit von 1,2 mm.

Bei der Zeitmessung wurden zwei relevante Unsicherheitsquellen identifiziert, zum einen die Reaktionszeit von etwa 0,1 Sekunden je Messung, sowie die Standardabweichung aufgrund der Schwankungen der gemessenen Zeiten. Unsicherheiten aufgrund der Digitalen Anzeige oder Kalibrierung der Stoppuhr sind so klein gegenüber der Ungenauigkeit aufgrund der Reaktionszeit, dass sie zu vernachlässigen sind. Die Unsicherheit des Typs B, für  $a = 0,1$  s und  $N = 20$  wird nach Gleichung A.1 mit  $1,0 \cdot 10^{-3}$  s abgeschätzt. Die Unsicherheit des Typs A ergibt sich aus Tabelle 2, mit  $t_p = 1,14$  sowie den Gleichung A.3, sie beträgt  $3 \cdot 10^{-7}$  s. Aus Gleichung A.4 folgt mit einsetzen der obigen Werte dass die Unsicherheit des Typs A keinen Einfluss auf die signifikanten Stellen der kombinierten

Unsicherheit bezüglich der Zeit hat, sie beträgt daher ebenfalls  $1,0 \cdot 10^{-3}$  mm. Mit den Gleichungen 2.10 und 2.12 erhält man:  $g = (9,809 \pm 0,013) \text{ m/s}^2$ .

## 5. Schlussfolgerung

Bis auf einen Messwert liegen alle Bestwerte in einem Bereich zwischen  $9,78 \text{ m/s}^2$  und  $9,89 \text{ m/s}^2$ . Bei dem abweichenden Messwert ist von einem groben Fehler in der Durchführung auszugehen.

Somit bestätigen die vorliegenden Messungen die Werte der PTB und widersprechen mehrheitlich den vorausgegangenen Messungen der Universität Münster. Mögliche Ursache für einen Fehler in der Auswertung der Fallzeit im Fallrohr ist die Annahme, dass die Kugel auf Höhe der ersten Lichtschranke ruhe, bei der Demonstration war dies jedoch offensichtlich nicht der Fall, da die Kugel deutlich oberhalb der Lichtschranke fallengelassen wurde.

Abschließend ist anzumerken, dass der Wert des PTB plausibel erscheinen und die Messungen mithilfe des Fallrohres neu ausgewertet werden sollten und ggf weitere Fehlerquellen identifiziert werden müssen.

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Gleichungen und Definition der Variablen

- Standartunsicherheit  $u$  bei einer Dreieckverteilung mit der Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}N} \quad (\text{A.1})$$

- Standartunsicherheit  $u$  durch Reaktionszeit je Pendelschwingung  $N$  bei einer Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}N} \quad (\text{A.2})$$

- Standartabweichung  $\sigma$

$$\sigma = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

- Kombinierte Standartunsicherheit bei mehreren Unsicherheiten einer Größe

$$u_{ges} = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \quad (\text{A.4})$$

### A.2. Quellen