

# Experimentelle Übungen I

## Versuchsprotokoll M5

### Jo-Jo und Kreisel

Hauke Hawighorst, Jörn Sieveneck

Gruppe 9

`h.hawighorst@uni-muenster.de`

`j_siev11@uni-muenster.de`

betreut von

Betreuer

20. Dezember 2017

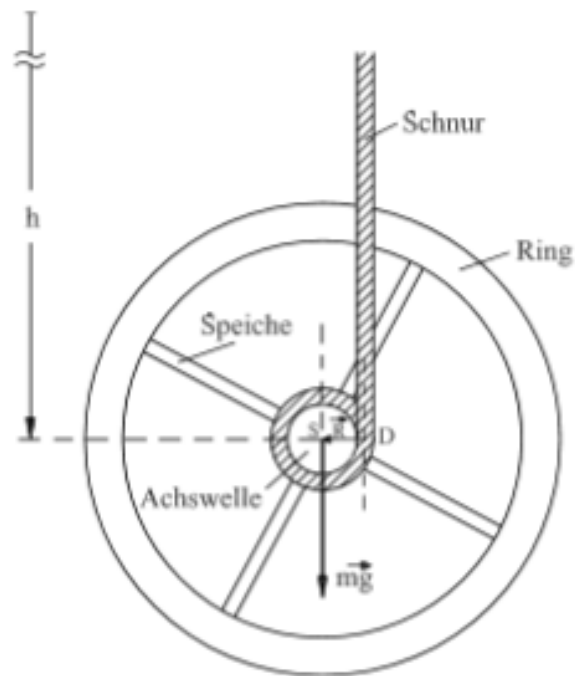
# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zusammenfassung</b>	<b>1</b>
<b>2. Maxwellsches Fallrad</b>	<b>1</b>
2.1. Methoden . . . . .	2
2.2. Daten und Analyse . . . . .	2
2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt . . . . .	2
2.2.2. Bestimmung $g^*$ . . . . .	3
<b>3. Schlussfolgerung</b>	<b>5</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>6</b>
A.1. Verwendete Programme . . . . .	6
A.2. Verwendete Gleichungen . . . . .	6
<b>Literatur</b>	<b>7</b>

## 1. Zusammenfassung

## 2. Maxwellsches Fallrad

Im ersten Teil des Experimentes wurde das Mawellsche Fallrad gemäß Abb. 1 untersucht. Hierbei wird, anders als im freien Fall, die potentielle Energie nur zum Teil in kinetische Energie umgewandelt, da das Rad zu rotieren beginnt. Dies resultiert in einer verlangsamten Fallbewegung mit Beschleunigung  $g^*$ .



**Abbildung 1:** Seitenansicht des maxwellschen Fallrades.[1]

Aus dem geometrischen Ausbau sowie der Masse folgt das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes, die Beschleunigung konnte direkt bestimmt werden. Der Steinersche Satz erlaubt nun Rückschlüsse auf den Abrollradius. Dieser wurde mit dem gemessenen Radius verglichen.

## 2.1. Methoden

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes wurde das Rad unter Benutzung eines Messschiebers mit Nonius vermessen. Alle Bestandteile wurden hierbei als Voll- oder Hohlzylinder betrachtet. Die Verdickung am Schnittpunkt der Achsen wurde nicht vermessen, zum Ausgleich wurde das Schnittvolumen doppelt berücksichtigt. Da der Abstand der Verdickung zur Drehachse klein gegenüber dem Abstand des äußeren Ringes ist, ist davon auszugehen dass der Unterschied zu vernachlässigen ist. Größen welche in vierter Potenz in das Trägheitsmoment eingingen wurden mehrfach gemessen, um den Einfluss von möglichen Unebenheiten des Rades auf die Ergebnisse zu verringern. Die Masse des Rades wurde mittels einer Waage bestimmt. Anschließend wurden die Fallzeiten  $t$  für fünf verschiedene Höhen  $h$  je fünfmal mit einer Stoppuhr manuell bestimmt.

## 2.2. Daten und Analyse

### 2.2.1. Bestimmung Trägheitsmoment im Schwerpunkt

Allgemein ist das Trägheitsmoment  $J$  definiert durch:

$$J = \int_V \vec{r}_\perp^2 \varrho(\vec{r}) dV. \quad (2.1)$$

Angewandt auf die vorliegende Geometrie bei Annahme einer konstanten Massenverteilung folgt bezüglich der Symmetrieachse:

$$J_s = J_K + 2J_S + J_A \quad (2.2)$$

$$= \varrho \pi \left[ \frac{H_K}{2} (R_a^4 - R_i^4) + 2H_S \left( \frac{H_S^2}{12} R_S^2 + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_A}{2} R_A^4 \right] \quad (2.3)$$

Wobei  $H$  die jeweilige Höhe und  $R$  den jeweiligen Radius des Zylinders beschreiben.  $R_a$  und  $R_i$  stehen für Außen- bzw. Innenradius des äußeren Kreistrings. Die Dichte  $\varrho$  ist als Masse pro Volumen gegeben:

$$\varrho = \frac{M}{\pi(H_K(R_a^2 - R_i^2) + 2H_S R_S^2 + H_A R_A^2)}. \quad (2.4)$$

**Tabelle 1:** Abmessungen des Fallrades

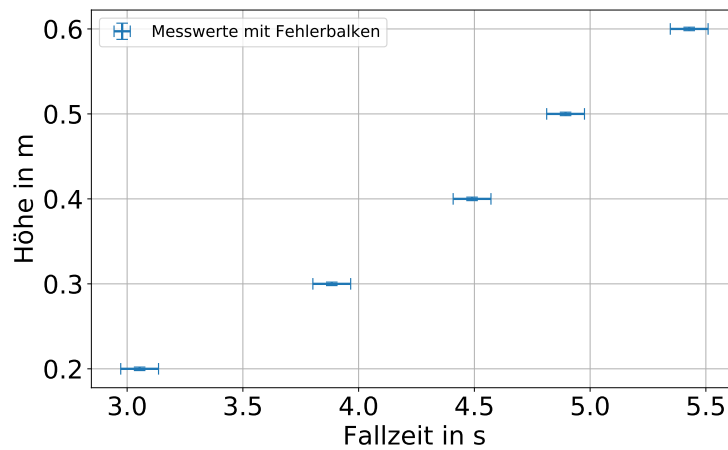
Masse des Fallrades $M$	$(0,732\,040 \pm 0,000\,006) \text{ kg}$
Höhe bzw. Tiefe des Kreisrings $H_k$ K	$(0,011\,62 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius $R_a$	$(0,085\,11 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Innenradius und Speichenhöhe $R_i = H_S$	$(0,072\,71 \pm 0,000\,04) \text{ m}$
Außenradius $R_a$	$(0,004\,05 \pm 0,000\,02) \text{ m}$
Speichenradius $R_S$	$(0,004\,03 \pm 0,000\,03) \text{ m}$
Achsenhöhe $H_A$	$(0,200\,30 \pm 0,000\,02) \text{ m}$

Mit einsetzten Gleichungen 2.4 in Gleichung 2.3 erhält man das Trägheitsmoment

$$J_s = \frac{M \left( 2H_S \left( \frac{H_A R_A^4}{2} + \frac{H_S^2 R_S^2}{12} + \frac{R_S^4}{4} \right) + \frac{H_k}{2} (R_a^4 - R_i^4) \right)}{H_A R_A^2 + H_k (R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i}. \quad (2.5)$$

Mit den Messwerten aus Tabelle 1 folgt aus den Gleichungen 2.5 und A.5 bezüglich der Symmetrieachse  $J = (0,003\,702 \pm 0,000\,008) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

### 2.2.2. Bestimmung $g^*$

**Abbildung 2**

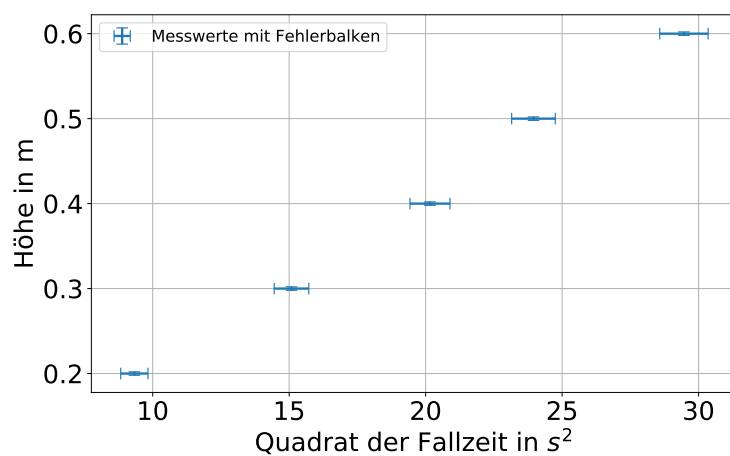


Abbildung 3

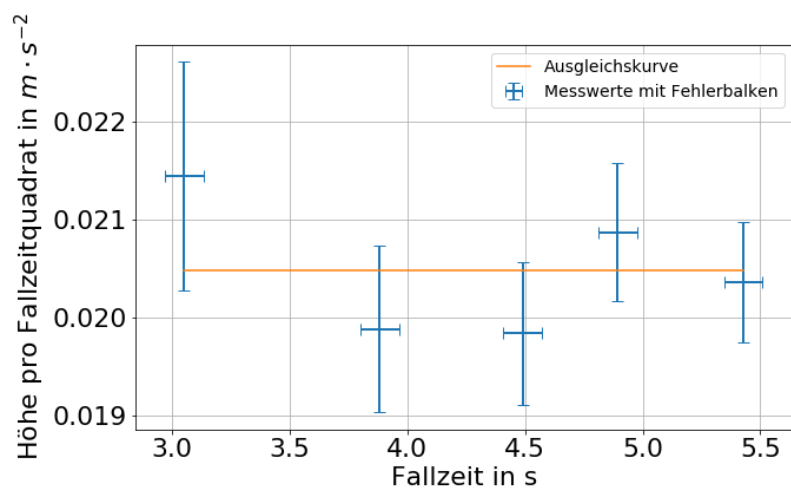


Abbildung 4

### **3. Schlussfolgerung**

## A. Anhang

### A.1. Verwendete Programme

Die Plots wurden mit Gnuplot oder Python erstellt. Beide Programme nutzten den Levenberg–Marquardt Algorithmus. Die Fehler wurden nach Empfehlung des „GUM“, insbesondere mit Hilfe der gaußschen Fehlerfortpflanzung berechnet.

### A.2. Verwendete Gleichungen

Standardunsicherheit der Rechteckverteilung  $u$  für die Intervallbreite  $a$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}} \quad (\text{A.1})$$

Standardunsicherheit der Dreieckverteilung  $u$ :

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \quad (\text{A.2})$$

Standardunsicherheit des Mittelwertes der Normalverteilung  $u$  für die Messwerte  $x_i$  und den Mittelwert  $\bar{x}$ :

$$u(\bar{x}) = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (\text{A.3})$$

Kominierte Standardunsicherheit der Messgröße  $g(x_i)$

$$u(g(x_i)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2} \quad (\text{A.4})$$



Unsicherheit des Trägheitsmomentes :

$$\begin{aligned} \Delta J_S = \frac{1}{6} [ & ((H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^4)^{-1} (4M^2 R_S^2 \Delta R_S^2 (H_S(H_S^2 + 6R_S^2)(H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2R_i(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4)))^2 + \\ & M^2(4H_A^2 R_A^2 \Delta R_A^2 (12H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + \\ & 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + 4H_k^2 R_a^2 \Delta R_a^2 (-H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4) + \\ & 6.0R_a^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + R_A^4 \Delta H_A^2 (6H_S R_A^2 (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - \\ & H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) - 3H_k(R_a^4 - R_i^4))^2 + \Delta H_k^2 ((R_a^2 - R_i^2)(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + \\ & 3H_k(R_a^4 - R_i^4)) - 3(R_a^4 - R_i^4)(H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i))^2 + \Delta R_i^2 (12.0H_k R_i^3 (H_A R_A^2 + \\ & H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i) - 2(H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - R_i^4))(H_k R_i - R_S^2))^2) + \\ & (9M^2 \Delta H_S^2 (2H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + R_S^4)^2 + \Delta M^2 (H_S(6H_A R_A^4 + H_S^2 R_S^2 + 3R_S^4) + 3H_k(R_a^4 - \\ & R_i^4))^2) (H_A R_A^2 + H_k(R_a^2 - R_i^2) + 2R_S^2 R_i)^2 ]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

## Literatur

- [1] Markus Donath und Anke Schmidt. *Anleitung zu den Experimentellen Übungen zur Mechanik und Elektrizitätslehre*. Auflage Wintersemester 2017/2018. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Physikalisches Institut, Oktober 2017.