Experimentelle Übungen I

Versuchsprotokoll S2

Experimentieren,und dann?

Hauke Hawighorst, Jörn Sievneck

Gruppe 9Mi

h.hawighorst@uni-muenster.de

j_siev11@uni-muenster.de

25. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1. Kurzfassung

2. Einführung

Anlass dieses Experimentes, waren Messungen der Universität Münster welche die lokalen Fallbeschleunigung g, nach wiederholten Messungen, auf $(10{,}75 \pm 0{,}25)\,\mathrm{m/s^2}$ beziffern. Dies widerspricht den Angaben der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig welche die Fallbeschleunigung für Münster mit $g = 9{,}813\,\mathrm{m/s^2}$ angibt. Um diese Unterschiede besser beurteilen zu können, sollte die Fallbeschleunigung mit Hilfe eines weiteren Experimentes bestimmt werden. Wie in Abschnitt 3 erläutert, eignet sich hierfür das Fadenpendel, da die Periodendauer nur von der Fallbeschleunigung g und dem Abstand des Schwerpunktes von der Aufhängung l abhängen.

3. Theoretische Grundlagen

Im folgenden soll die Bewegungsgleichung für das Pendel hergeleitet werden. Vereinfachend angenommen werden hierzu: Reibungsfreiheit, kleine Auslenkungen sowie die Approximierbarkeit der Masse durch einen Massepunk der Masse m. Ausgangspunkt ist hierzu die Erhaltung der Systemenergie E, welche sich aufgrund der Annahmen aus potentieller Energie V und kinetischer Energie T zusammensetzt. Es gilt:

$$E = T + V = \text{const.} \tag{3.1}$$

Des weiteren gilt für die kinetische Energie T, da sich der Massepunkt auf einer Kreisbahn bewegt, dass die relevante Geschwindigkeit v über den Kreisradius bzw. die Länge zwischen Aufhängung und Schwerpunkt l sowie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ darstellen lässt. Mit $v = l\dot{\varphi}$ folgt:

$$T = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} \tag{3.2}$$

Aus der Abbildung Fadenpendel Skizze qqq lesen wir für die potentielle Energie ab:

$$V = -l\cos(\varphi)mg \tag{3.3}$$

Durch Einsetzten von den Gleichungen3.2 und (3.3) in Gleichung (3.1) erhalten wir:

$$E = -l\cos(\varphi)mg + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} = \text{const.} \tag{3.4}$$

Dieses lässt sich durch differenzieren nach der Zeit (3.5) sowie der Kleinwinkelnäherung und elementaren Umformungen auf die folgende Form (3.6) bringen:

$$0 = lmg\dot{\varphi}\sin(\varphi) + ml^2\dot{\varphi}\ddot{\varphi} \tag{3.5}$$

$$0 = \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi \tag{3.6}$$

Diese lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung lässt sich mit einem komplexwertigen Potenzreihenansatz lösen. Dieser führt mit $\omega := \sqrt{\frac{g}{l}}$ auf eine Funktion der Form:

$$\varphi(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0) \tag{3.7}$$

Wobei a und φ_0 an die Anfangsbedingungen angepasst werden müssen.
Eine Pendelschwingung entspricht genau einer Periode(2π) des Sinus. Daher gilt bezüglich der Schwingungsdauer T:

$$2\pi = \sqrt{\frac{g}{l}}T \tag{3.8}$$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.9}$$

Es folgt für die Fallbeschleunigung:

$$g = \frac{2\pi l^2}{T^2} \tag{3.10}$$

Aus Gleichung 3.10 lassen sich zwei Variablen ablesen, welche zu messen sind und deren

Unsicherheiten berücksichtigt werden müssen. Die kombinierte Standartunsicherheit setzt sich aus den Unsicherheiten der Länge l und der Schwingungsdauer T zusammen. Da Länge und Zeit in diesem Experiment unabhängige Größen sind, gilt nach GUM:

$$u(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} u(l)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} u(T)\right)^2} \tag{3.11}$$

$$= g\sqrt{\left(\frac{u(l)}{l}\right)^2 + \left(2\frac{u(T)}{T}\right)^2} \tag{3.12}$$

4. Methoden

5. Ergebnisse und Diskussion

5.1. Pendel mit konstanter Länge

Messung Nr.	Anzahl der Schwingungen	Gesamtdauer [s]	Dauer einer Schwingung T [s]
1	20	42,94	2,147
2	20	42,94	2,147
3	20	42,91	2,1455
4	20	42,91	2,1455
5	20	42,97	2,1485
Durchschnitt		42,934	2,1467

Abbildung 1: Die Tabelle gibt die Anzahl der Pendelschwingungen sowie die zugehörige Dauer an. Die Länge des Pendels betrug $(1{,}1450 \pm 0{,}0012)$ m

Zur Bestimmung der Unsicherheiten wurde angenommen, dass die Pendellänge um nicht mehr als 3 mm von dem gemessenen Wert abweicht, hierdurch ergibt sich mit Approximation der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion durch eine Dreiecksverteilung nach Gleichung A.1 mit $a = 6$ mm eine Standartunsicherheit von 1,2 mm.
Bei der Zeitmessung wurden zwei Unsicherheitsquellen identifiziert, zum einen die Reaktionszeit von etwa 0,1 Sekunden je Messung, sowie die Standartabweichung aufgrund der Schwankungen der gemessenen Zeiten. Die Unsicherheit des Typs B, für $a = 0{,}1$ s und $N = 20$ wird nach Gleichung A.2 mit $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ s abgeschätzt. Die Unsicherheit des Typs A ergibt sich aus Tabelle 1, $t_p = 1,14$ sowie Gleichung A.3, sie beträgt $3 \cdot 10^{-7}$ s. Aus Gleichung A.4 folgt mit einsetzten der obigen Werte das die Unsicherheit des Typs A keinen Einfluss auf die signifikanten Stellen der kombinierten Unsicherheit bezüglich der Zeit hat, sie beträgt daher ebenfalls $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ mm. Mit den Gleichungen 3.10 und 3.12 erhält man: $g = (9{,}809 \pm 0{,}015)\,\mathrm{m/s^2}$.

6. Schlussfolgerung

A. Anhang

A.1. Verwendete Gleichungen und Definition der Variablen

- Standartunsicherheit u bei einer Dreieckverteilung mit der Intervallbreite a:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{6}} \tag{A.1}$$

- Standartunsicherheit u durch Reaktionszeit je Pendelschwingung N bei einer Intervallbreite a:

$$u = \frac{a}{2\sqrt{3}N} \tag{A.2}$$

- Standartabweichung σ

$$\sigma = t_p \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{A.3}$$

- Kombinierte Standartunsicherheit bei mehreren Unsicherheiten einer Größe

$$u_g es = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} \tag{A.4}$$

A.2. Quellen