Gekoppelte Pendel
Einführung

In diesem Versuch wird die Bewegung zweier Pendel untersucht, die nebeneinander in einer Ebene schwingen und durch eine weiche Feder verbunden sind (vgl. Abb. 1). Die weiche Feder ist die (schwache) Kopplung zwischen den Pendeln, sie bewirkt eine gegenseitige Beeinflussung der Pendelbewegungen derart, dass sich die Schwingungsamplituden der beiden Pendel periodisch ändern. Dieses Phänomen wird als Schwebung bezeichnet.

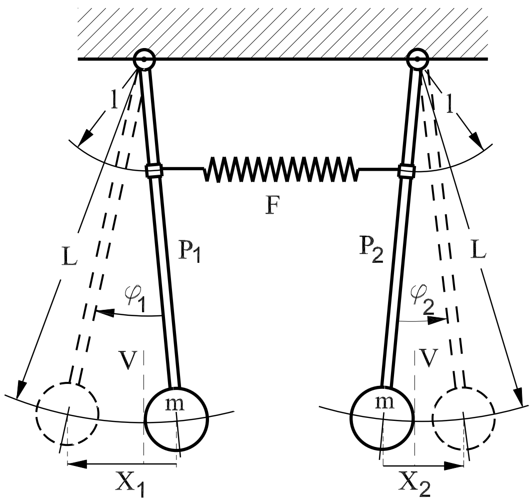

Abbildung 1: Gekoppelte Pendel

1 Bewegungsgleichungen

Zur theoretischen Beschreibung der Bewegung gekoppelter Pendel machen wir (vgl. Fadenpendel, bzw. Mathematisches Pendel) folgende Annahmen:

1. Beide Pendel schwingen in einer Ebene.
2. Beide Pendel haben die gleiche Länge L und die gleiche Masse m. Sie schwingen damit einzeln (als freie Pendel) mit der gleichen Eigenfrequenz.

3. Die Auslenkwinkel φ aus der Ruhelage seien so klein, dass $\sin\varphi \approx \varphi$ gesetzt werden kann.

4. Als Maß für die Pendelauslenkung wird der horizontale Abstand x des Pendels von der Nullage ($x \approx L\varphi$, sh. Abb. 1) genommen.

Die Bewegungsgleichung eines frei schwingenden Schwerependels lautet:

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{L}\; x \equiv -D_0\; x. \tag{1}$$

Aus ihrer Lösung ergibt sich für die Kreisfrequenz $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ und damit für die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{2}$$

Bei einem Schwerependel hängt die rücktreibende Kraft $F_0 = -D_0 x$ von der Masse m, der Länge L und der Erdbeschleunigung g ab. Bei gekoppelten Pendeln wirken zusätzlich zu F_0 noch Kräfte von der Kopplungsfeder F (Abb. 1). Hat zu einem bestimmten Zeitpunkt das Pendel P_1 die Auslenkung x_1 und das Pendel P_2 die Auslenkung x_2, so ist die Feder um das Stück

$$(x_1' - x_2') = \frac{l}{L}\;(x_1 - x_2) \tag{3}$$

gedehnt.

Bezeichnet man mit D_F' die Federkonstante der Kopplungsfeder, so ist die von ihr auf die Pendel übertragene Kraft

$$F_{1,2} = D_F'\;(x_1' - x_2'). \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (3) in (4) und mit der Definition $D_F = (l/L)D_F'$ erhält man

$$F_{1,2} = \pm D_F\;(x_1 - x_2). \tag{5}$$

Die Bewegungsgleichungen der gekoppelten Pendel lauten daher

$$\mathrm{P}_1: \quad m\ddot{x}_1 \;=\; -D_0\;x_1 - D_F\;(x_1 - x_2) \tag{6}$$

$$\mathrm{P}_2: \quad m\ddot{x}_2 \;=\; -D_0\;x_2 + D_F\;(x_1 - x_2). \tag{7}$$

Dies sind zwei gekoppelte Differentialgleichungen. Sie lassen sich mit Hilfe der Substitutionen

$$z_1 = x_1 - x_2 \quad \text{und} \quad z_2 = x_1 + x_2 \tag{8}$$

entkoppeln, und man erhält die unabhängigen Gleichungen

$$\ddot{z}_1 \;+\; (\omega_0^2 + \frac{2D_F}{m})\;z_1 \;=\; 0 \tag{9}$$

$$\ddot{z}_2 \;+\; \omega_0^2\;z_2 \;=\; 0. \tag{10}$$

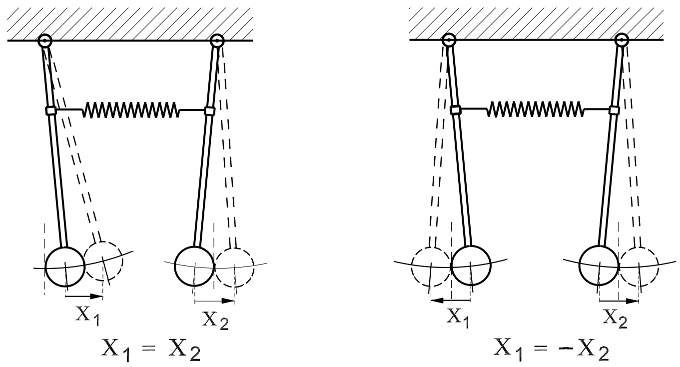

Abbildung 2: Grundschwingungen gekoppelter Pendel: links gleichsinnig, rechts gegensinnig

2 Grundschwingungen

Vor der Diskussion der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichungen seien zwei Spezialfälle genannt, die zugleich die Grundschwingungen gekoppelter Pendel beschreiben (Abb. 2).

Gleichsinnige Bewegung: $x_1 = x_2$ und damit $z_1 = 0$. Beide Pendel schwingen mit gleicher Auslenkung und gleicher Phase. Die Frequenz der gleichsinnigen Bewegung ω_{gl} ergibt sich aus (10):

$$\omega_{\mathrm{gl}} = \omega_0. \tag{11}$$

Bei gleichsinniger Bewegung der Pendel ist die Frequenz des Systems identisch mit der Eigenfrequenz eines freien Pendels.

Gegensinnige Bewegung: $x_1 = -x_2$ und damit $z_2 = 0$. Beide Pendel schwingen mit gleicher Auslenkung aber entgegengesetzter Phase. Diese Grundschwingung wird durch (9) beschrieben. Ihre Frequenz beträgt

$$\omega_{\mathrm{geg}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2D_F/m} = \omega_0\ \sqrt{1 + 2D_F/D_0}. \tag{12}$$

Bei gegensinniger Bewegung schwingt das System mit einer Frequenz, die größer ist als ω_0. Für schwache Kopplung, die im folgenden angenommen wird, gilt $D_F \ll D_0$, und damit folgt aus (12)

$$\omega_{\mathrm{geg}} \approx \omega_0\ (1 + D_F/D_0). \tag{13}$$

3 Lösungen der Bewegungsgleichungen

Die allgemeinen Lösungen der Differentialgleichungen (9) und (10) lauten

$$z_1 = x_1 - x_2 = a'\ \sin(\omega_{\mathrm{geg}} t) + b'\ \cos(\omega_{\mathrm{geg}} t) \tag{14}$$

$$z_2 = x_1 + x_2 = a\ \sin(\omega_{\mathrm{gl}} t) + b\ \cos(\omega_{\mathrm{gl}} t). \tag{15}$$

Wählt man für die Amplituden die Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = x_0 \quad \text{und} \quad x_2(0) = 0 \tag{16}$$

und für die Geschwindigkeiten

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0, \tag{17}$$

so ist in diesem Zustand das Pendel P_2 gerade in der Nullage und in Ruhe, während P_1 maximal ausgeschlagen ist. Einsetzen der Anfangsbedingungen für die Amplituden in (14) und (15) ergibt $b = b' = x_0$. Um die Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeiten nutzen zu können, werden (14) und (15) differenziert:

$$\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = a' \,\omega_{\text{geg}} \,\cos(\omega_{\text{geg}} t) - x_0 \,\omega_{\text{geg}} \,\sin(\omega_{\text{geg}} t) \tag{18}$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = a \,\omega_{\text{gl}} \,\cos(\omega_{\text{gl}} t) - x_0 \,\omega_{\text{gl}} \,\sin(\omega_{\text{gl}} t). \tag{19}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeiten ergibt $a = a' = 0$. Damit ergeben sich aus (14) und (15) die speziellen Lösungen

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\, x_0 \,[\cos(\omega_{\text{geg}} t) + \cos(\omega_{\text{gl}} t)] \tag{20}$$

$$x_2 = \tfrac{1}{2}\, x_0 \,[-\cos(\omega_{\text{geg}} t) + \cos(\omega_{\text{gl}} t)], \tag{21}$$

oder nach Anwendung des Theorems über die Summe und Differenz von trigonometrischen Funktionen

$$x_1 = x_0 \,\cos[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})t] \,\cdot\, \cos[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}})t] \tag{22}$$

$$x_2 = x_0 \,\sin[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})t] \,\cdot\, \sin[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}})t]. \tag{23}$$

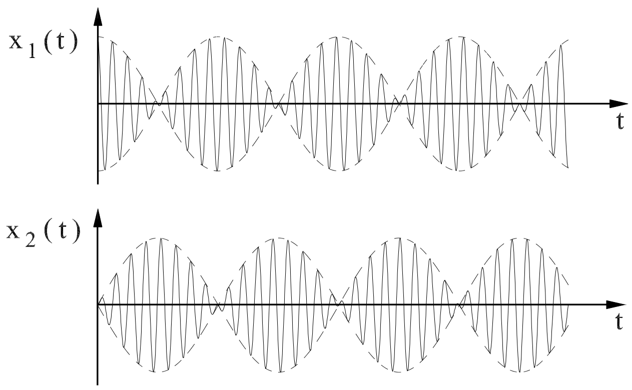

Abbildung 3: Auslenkungen gekoppelter Pendel als Funktion der Zeit (Schwebung). Man beachte den Phasensprung beim Nulldurchgang der Schwebung.

Die Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ beschreiben die Zeitabhängigkeit der Auslenkungen gekoppelter Pendel und damit auch das Schwebungsphänomen (Abb. 3). Wegen der vorausgesetzten schwachen Kopplung ist nach (13) ω_{geg} nur geringfügig größer als ω_{gl}, und es gilt:

$$\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}} \ll \omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}}. \tag{24}$$

Die Faktoren

$$\cos[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}})t] \quad \text{und} \quad \sin[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}})t] \tag{25}$$

sind damit zeitlich schnell veränderliche Größen, während sich

$$\cos[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})t] \quad \text{und} \quad \sin[\tfrac{1}{2}(\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})t] \tag{26}$$

nur langsam mit der Zeit verändern. Letztere modulieren die Amplituden der Pendelschwingungen. Für die Schwingungsdauer T der Pendel (schnell veränderlicher Vorgang) gilt nach (25)

$$T = \frac{4\pi}{(\omega_{\text{geg}} + \omega_{\text{gl}})}. \tag{27}$$

Für die Schwebungsdauer T_S gilt nach (26)

$$T_S = \frac{4\pi}{(\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})}. \tag{28}$$

Für den langsam veränderlichen Vorgang ist der zeitliche Abstand zweier Stillstände eines Pendels gleich der halben Schwebungsdauer.

4 Der Kopplungsgrad

Der Kopplungsgrad k der beiden Pendel ist zunächst statisch definiert. Lenkt man das Pendel P_1 statisch um x_1 aus, so folgt das Pendel P_2 teilweise und erfährt den Ausschlag x_2. Der Kopplungsgrad ist der Quotient der beiden Auslenkungen

$$k \equiv \frac{x_2}{x_1}. \tag{29}$$

Im Gleichgewichtszustand der statischen Auslenkung gilt:

$$m\ddot{x}_2 = 0 = -D_0\, x_2 - D_F\, (x_2 - x_1) \tag{30}$$

und daher

$$k = \frac{x_2}{x_1} = \frac{D_F}{D_0 + D_F}. \tag{31}$$

Der Kopplungsgrad kann jedoch auch dynamisch bestimmt werden, da die relative Frequenzaufspaltung $(\omega_{\text{geg}} - \omega_{\text{gl}})/\omega_{\text{gl}} = \Delta\omega/\omega_0$ eine Funktion des Kopplungsgrades ist. Dieser Zusammenhang wird im folgenden hergeleitet.

Für die beiden Grundschwingungen der gekoppelten Pendel gilt nach (9) und (10)

$$m\ \omega_{\text{geg}}^2 = m\ \omega_0^2 + 2\ D_F = D_0 + 2\ D_F \tag{32}$$

$$m\ \omega_{\text{gl}}^2 = m\ \omega_0^2 = D_0. \tag{33}$$

Subtraktion und Addition der beiden Gleichungen liefert

$$m\ (\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2) = 2\ D_F \tag{34}$$

$$m\ (\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2) = 2\ (D_0 + D_F). \tag{35}$$

Hieraus erhält man durch Division

$$k = \frac{D_F}{D_0 + D_F} = \frac{\omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2}{\omega_{\text{geg}}^2 + \omega_{\text{gl}}^2} \tag{36}$$

oder, umgerechnet auf die Schwingungsdauern

$$k = \frac{T_{\text{gl}}^2 - T_{\text{geg}}^2}{T_{\text{gl}}^2 + T_{\text{geg}}^2}. \tag{37}$$

Aus (36) folgt

$$k\ \omega_{\text{geg}}^2 + k\ \omega_{\text{gl}}^2 = \omega_{\text{geg}}^2 - \omega_{\text{gl}}^2 \tag{38}$$

$$\frac{\omega_{\text{geg}}}{\omega_{\text{gl}}} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}. \tag{39}$$

Hieraus lässt sich die relative Frequenzaufspaltung berechnen:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \sqrt{\frac{1+k}{1-k}} - 1. \tag{40}$$

Für kleine Kopplungsgrade entwickeln wir diesen Ausdruck nach Potenzen von k. Durch Anwendung der bekannten Reihenentwicklungen

$$\sqrt{1 \pm k} = 1 \pm \frac{1}{2}k - \frac{1}{8}k^2 \pm \frac{1}{16}k^3 \cdots \tag{41}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm k}} = 1 \mp \frac{1}{2}k + \frac{3}{8}k^2 \mp \frac{5}{16}k^3 \cdots \tag{42}$$

erhält man bis zur 3. Ordnung in k:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = k + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k^3 + \cdots. \tag{43}$$