Töluleg Greining
Verkefni 7

Bjarki Geir Benediktsson, Haukur Óskar Þorgeirsson, Matthías Páll Gissurarson
Kennari: Máni Maríus Viðarsson

21. febrúar 2013

1 Dæmi 7

Við notuðum það sem gefið var og fengum út eftirfarandi mismunakvótatöflu.

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_i{+}4]$
0	-1	0.5	0	0.5	-0.3125	0.125
1	-1	0.5	0.5	-0.125	-0.0625	
2	0	1	0.25	-0.25		
3	1	1.25	0			
4	1	1.25				

en út frá henni fæst að

$$p(x) = 0.5 + 0.5(x+1)^2 - (5/16)(x+1)^2 x + (1/8)(x+1)^2 x(x-1)$$

$$= \frac{x^4}{8} - \frac{3x^3}{16} - 0.25x^2 + 0.5625x + 1,$$

og

$$p(0.3) = 0.5 + 0.5 \cdot 1.3^2 - (5/16)(1.3^2) \cdot 0.3 + 0.125 \cdot 1.3^2 \cdot 0.3 \cdot -0.7 = 1.1422.$$

Við fáum svo út frá ójöfnunni $-1 \leq f^{(5)}(x) \leq 4$ að

$$-0.00207025 = -1 \cdot \frac{(0.3+1)^2 \cdot 0.3 \cdot (0.3-1)^2}{5!} \leq f(0.3) - p(0.3) \leq 4 \cdot \frac{(0.3+1)^2 \cdot 0.3 \cdot (0.3-1)^2}{5!} = 0.008281,$$

svo

$$1.14012975 \leq f(0.3) \leq 1.150481$$

en lengd bilsin er $|0.008281 + 0.00207025| = 0.01035125$. Ef við notum miðpunkt bilsins til að nálga $f(0.3)$ og rúnum af miðað við leng bilsins fáum við fáum við þá $f(0.3) = 1.14012975 + 0.005175625 = 1.145305374 \pm 0.005175625 = 1.15 \pm 0.01$.

2 Dæmi 8

2.1 a)

Við höfum mæligildin:

x	0.0	0.4	0.7	0.9	1.0
y	1.22	0.53	0.34	0.72	1.22

Við höfum, líkt og í glærunum, s_i, einskorðun s við hvert bil $[t_i, t_{i+1}]$ (t_i verandi x gildin að ofan, $i = 0, .., 4$) þar sem $s_i(x) = a_i + b_i(x-t_i) + c_i(x-t_i)^2 + d_i(x-t_i)^3$. Við vitum að $a_i = y_i$, $i = 0, .., 4$. Þannig eru

$$\begin{aligned}
s_0(x) &= 1.22 + b_0(x-0.0) + c_0(x-0.0)^2 + d_0(x-0.0)^3 = a_0 + b_0 x + c_0 x^2 + d_0 x^3 \\
s_1(x) &= 0.53 + b_1(x-0.4) + c_1(x-0.4)^2 + d_1(x-0.4)^3 \\
s_2(x) &= 0.34 + b_2(x-0.7) + c_2(x-0.7)^2 + d_2(x-0.7)^3 \\
s_3(x) &= 0.72 + b_3(x-0.9) + c_3(x-0.9)^2 + d_3(x-0.9)^3
\end{aligned}$$

Út frá reglunum sem skilgreina splæsibrúun með lotubundna splæsibrúun fæst því

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.4 & 2(0.4+0.3) & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 2(0.3+0.2) & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 2(0.2+0.1) & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 2(0.1) & 2(0.4+0.1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0.4 & 1.4 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1.0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.2 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

$$= 3 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{0.34-0.53}{0.3} - \frac{0.53-1.22}{0.4} \\ \frac{0.72-0.34}{0.2} - \frac{0.34-0.53}{0.3} \\ \frac{1.22-0.72}{0.1} - \frac{0.72-0.34}{0.2} \\ \frac{0.53-1.22}{0.4} - \frac{1.22-0.72}{0.1} \end{bmatrix}$$

Gott er að muna að efsta og neðsta línan í hverju fylki nema c_i fylkinu eru fengnar úr því að við notum lotubundin endaskilyrði.

Við vitum a_i, og höfum nú fundið c_i með því að leysa þetta jöfnuhneppi($i = 0, .., 4$). Þá getum við leyst b_i og d_i ($i = 0, .., 3$) út úr eftirfarandi jöfnum, sem sjálfar koma úr skilgreiningu á splæsibrúun: ($h_i = t_{i+1} - t_i$)

$$\begin{aligned}
a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 &= a_{i+1}, \quad i = 0, .., 3 \\
b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 &= b_{i+1}, \quad i = 0, .., 3 \\
2c_i + 6d_i h_i &= 2c_{i+1}, \quad i = 0, .., 3
\end{aligned}$$

Þegar búið er að reikna a_2, b_2, c_2, og d_2 höfum við fundið $s_2(x) = s(x)|_{[0.7, 0.9]}$, en þá getum við nálgað $f(0.8)$ með því að reikna $s(0.8) = s_2(0.8)$.