Háskóli Íslands **Verkfræði- og náttúruvísindasvið**

Töluleg greining (STÆ405G)

Heimaverkefni III
Hreyfikerfi og hreyfimyndir

22.3.2013

Tilgangur þessa verkefnis er að beita tölulegum aðferðum til þess að leysa upphafsgildisverkefni og setja lausnir þeirra fram með hreyfimyndum. Við tökum fyrir tvö stærðfræðileg líkön úr aflfræði (e. dynamics) og síðan megið þið velja ykkur líkan eftir eigin höfði úr hvaða hagnýtingu sem er, þó ekki einfaldan eða tvöfaldan pendúl, því þeir hafa mikið komið við sögu í þessu námskeiði á undanförnum árum. Ef þið viljið taka fyrir pendúla, þá þurfa þeir að vera að minnsta kosti þrefaldir.

Sígild aflfræði er geysilega ríkulegt og heillandi viðfangsefni. Til eru ógrynni af stærðfræðilegum líkönum úr raunvísindum og verkfræði þar sem hægt er leysa með tölulegum aðferðum og setja fram með hreyfimyndum. Á Wikipedia er hægt að finna mjög fínar greinar um þessi efni og raunar um stærðfræði almennt. Ég hvet ykkur eindregið til þess að fletta upp ensku heitunum sem ég nefni í þessum texta á Wikipedia og lesa ykkur til um viðfangsefnin og leita að hugmyndum til fyrirmyndar að ykkar eigin verkefni. Nemendur í sveiflufræði geta til dæmis haft samráð við kennara sína.

Eftir að yfirferð á verkefninu er lokið þá munum við hafa sýningu á vel völdum hreyfimyndum í fyrirlestri og veita verðlaun sem bera yfirskriftina:

`Matlab`-*Eddan fyrir bestu hreyfimyndina í tölulegri greiningu árið 2013.*

Dómnefnd `Matlab`-Eddunnar árið 2013 skipa þeir Guðmundur Einarsson, Jóhann Sigursteinn Björnsson og Máni Maríus Viðarsson. Dómnefndin velur 10-20 myndir í úrslit en nemendur námskeiðsins kjósa bestu myndina. Meir um þetta þegar nær dregur.

1 Forsagnar-og-leiðréttingaraðferð

Nákvæmustu aðferðirnar sem sem fjallað er um í kennslubókinni okkar eru

- Fjórða-og-fimmta-stigs Runge-Kutta-Fehlberg-aðferð með breytilegri skrefstærð.
- Fimmta-og-sjötta-stigs Runge-Kutta-Verner-aðferð með breytilegri skrefstærð.
- Fjögurra-og-þriggja-skrefa Adams-forsagnar-og-leiðréttingaraðferð
- Fjögurra-og-þriggja-skrefa Adams-forsagnar-og-leiðréttingaraðferð með breytilegri skrefstærð.

Á heimasíðu höfundar kennslubókarinnar: `http://www.pcs.cnu.edu/~bbradie/mivps.html` finnið þið forritin `rk45, rkv56, adams_pc4` og `vs_pc4.m`. Afritið þau yfir á vélina ykkar. Lesið vandlega grein 7.7 á bls. 608-621 í kennslubók og glöggvið ykkur á uppbyggingu þessara forrita.

Þið eigið að forrita forsagnar-og-leiðréttingaraðferð þar sem forsagnarskrefið er tekið með fimm skrefa Adams-Bashforth-aðferð:

$$\tilde{w}_j = w_{j-1}+h\big(\tfrac{1901}{720}f(t_{j-1},w_{j-1})-\tfrac{1387}{360}f(t_{j-2},w_{j-2})+\tfrac{109}{30}f(t_{j-3},w_{j-3})-\tfrac{637}{360}f(t_{j-4},w_{j-4})+\tfrac{251}{720}f(t_{j-5},w_{j-5})\big)$$

og leiðréttingarskrefið er tekið með fjögurra-skrefa Adams-Moulton-aðferð

$$w_j = w_{j-1}+h\big(\tfrac{251}{720}f(t_j,\tilde{w}_j)+\tfrac{646}{720}f(t_{j-1},w_{j-1})-\tfrac{264}{720}f(t_{j-2},w_{j-2})+\tfrac{106}{720}f(t_{j-3},w_{j-3})-\tfrac{19}{720}f(t_{j-4},w_{j-4})\big).$$

Báðar þessar aðferðir hafa 5. stigs staðarskekkju. Til þess að koma aðferðinni af stað þurfum við því að nota 5. stigs Runge-Kutta-Fehlberg aðferð. Þessari aðferð er lýst með næst síðustu formúlunni á bls. 611 í kennslubókinni og $k_1, \dots, k_6$ eru reiknaðir skv. formúlum á bls. 612.

(i) Forritið á að heita `adams_pc5` og við mælum með því að það sé uppbyggt eins og `adams_pc4` á heimasíðu kennslubókarinnar `http://www.pcs.cnu.edu/ bbradie/mivps.html` og skilgreiningin á því á að vera: `function [wi, ti] = adams_pc5 ( RHS, t0, x0, tf, N )`

(ii) Skrifið lýsingu á nálgunaraðferðinni fyrir framan forritið í skýrslunni. Lýsinguna á forritinu í `m`-skránni megið þið hafa á ensku, eins og í `adams_pc4`, en munið að aðlaga textann nýja forritinu.

(iii) Prófið forritið með því að finna nálgunarlausn á $x'(t) = -3tx(t)^2 + 1/(1+t^3)$ með $x(0) = 0$, sem hefur réttu lausnina $x(t) = t/(1+t^3)$. (Sjá upphafið að grein 7.7 í kennslubók.)

(iv) Teiknið fjórar myndir í skýrslunni tvær sem sýna upp réttu lausnina og nálgunarlausn fyrir sitt hvort gildið á h, þannig að mismunur sjáist og tvær myndir með tilsvarandi skekkju. (Sjá myndir í grein 7.7)

(iv) Finnið út hvað gildið á h þarf að velja lítið til þess að heildarskekkjan á bilinu $[0, 5]$ sé minni en 10^{-4}.

(v) Notið `Matlab`-skipanirnar `tic` og `toc` til þess að mæla hraðvirkni forritsins í samanburði við `rk45` og `rkv56`. Gerið þetta með því að taka fína skiptingu á bilinu $[0, 5]$ og mæla hversu langan tíma það tekur fyrir hvert forrit að ljúka verkefninu. Gerið grein fyrir því hversu mörg fallgildi $\mathbf{f}(t, \mathbf{w})$ forritin þurfa að reikna út í hverju tilfelli. Hvaða forrit er best?

2 Einfaldur pendúll

Einfaldur pendúll (e. simple pendulum) í plani er heillandi fyrirbæri svo ekki sé sagt dáleiðandi. Hreyfijafnan fyrir útslagshorn pendúls er annars stigs ólínuleg jafna $\theta'' + (g/\ell)\sin\theta = 0$ þar sem g táknar þyngdarhröðunina og ℓ táknar lengd pendúlsins. Við köllum þetta einfaldan pendúl.

Ef útslagshornið er lítið þá er $\sin\theta \approx \theta$ og menn taka nálgun sem lausn línulegu afleiðujöfnunnar $\theta'' + (g/\ell)\theta = 0$ almenn lausn hennar er af gerðinni $\theta(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ þar sem $\omega = \sqrt{g/\ell}$. Þessi lausn er kölluð *harmónískur pendúll.* Ef við setjum upphafsskilyrðin $\theta(t_0) = \theta_0$ og $\theta'(t_0) = \theta_1$, þá fáum við lausnina

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega(t - t_0)) + \frac{\theta_1}{\omega}\sin(\omega(t - t_0)).$$

Í möppunni *Forrit* á heimasíðu námskeiðsins á Uglunni finnið þið skrána `pendull.m`. Í henni er sýnt hvernig hreyfimynd er búin til fyrir harmóníska pendúlinn. Úttakið er skráin `pendull.avi`. Hana má síða spila í myndbandsforriti.

Fyrsta verk okkar er að hlaða niður þessu forriti og fá það til þess að virka í `Matlab`. Gerið nokkrar tilraunir með forritið með því að breyta upphafsskilyrðunum.

Takið eftir því að myndin er tvískipt. Neðri parturinn sýnir sveiflu pendúlsins, en efri parturinn er *fasarit* (e. phase plot) jöfnunnar. Það er almennt skilgreint fyrir lausn $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ á fyrsta stigs tvívíðu jöfnuhneppi $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ sem braut lausnarinnar, þ.e.a.s. ferillinn $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ í x_1x_2-planinu. Athugið að við teiknum fyrst allan ferilinn og sýnum síðan á hreyfimyndinni hver staða pendúlsins er miðað við fasaritið með $x_1(t) = \theta(t)$ og $x_2(t) = \theta'(t)$.

(i) Skrifið upp fyrsta stigs hneppi sem er jafngilt jöfnu $\theta''(t) + (g/\ell)\sin\theta(t)$ fyrir einfaldan pendúl.

(ii) Notið forritið `adams_pc5` sem þið gerðuð í síðasta lið til þess að reikna út nálgun á hneppinu.

(iii) Takið hreyfimyndina sem gefin er og búið nýja hreyfimynd þar sem harmóníski og einfaldi (ólínulegi) pendúlinn og tilsvarandi fasarit eru sýnd í ólíkum litum, en ferlarnir tveir eiga að vera reiknaðir út með sömu upphafsskilyrðum. Setjið fasaritin í tvær myndir ofan fyrir ofan pendúlana. Athugið að þið getið þurft hafa skrefstærðina í útreikningunum mjög litla til þess að fá góða nálgun, en þið þurfið um það bil 25 tímapunkta í einni lotu pendúlsins til þess að fá eðlilega hreyfimynd. Til viðmiðunar er lota harmóníska pendúlsins $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$.

(v) Veljið nokkur gildi á upphafshorninu og metið fyrir hvaða gildi á θ_0 línulega nálgunin er góð í þrjár lotur og hvenær lausnirnr fara að greinast í sundur.

(vi) Stækkið útslagið og búið til eina hreyfimynd þar sem útslagið er stórt og mikið skilur á milli lausnanna tveggja. Nefnið hreyfimyndina `hr2.avi` og skilið henni með keyrsluskrá `hr2.m` á Uglu.

3 Róla – örvun með lotubundnum breytum

Nú ætlum við að skoða fyrirbæri sem nefnt er á ensku *parametric excitation*, *parametric resonance* og *parametric pumping* og ég veit varla hvað heitir á íslensku. Köllum þetta *örvun með lotubundnum breytum*. Við þekkjum þetta fyrirbæri öll frá því að við vorum lítil og lékum okkur í rólu. Þá komum við okkur fyrst á ferð og sveifluðum síðan fótunum fram og aftur í takti eða úr takti við sveiflu rólunnar til þess að herða eða hægja á sveiflu rólunnar.

Pendúll er punktmassi m sem hangir í massalausri stöng. Ef við horfum á okkur sjálf í rólunni sem pendúl, þá hækkum við og lækkum massamiðju okkar á víxl þegar við sveiflum fótunum. Það er eins og að hafa lengd pendúlsins tímaháða $\ell = s(t)$

Við köllum þetta örvaðan pendúl. Jafna hans er

$$\theta'' + \frac{g}{s(t)}\theta = 0$$

og við gerum tilraunir með að föll af gerðinni

Á að vera g/s(t)
*sin(\theta)

$$s(t) = \ell + a\cos(\omega t + \varphi)$$

þar sem þið eigið að velja útslagið a, horntíðnina ω og fasahliðrunina φ.

Munið að horntíðni hreintóna pendúlsins er $\sqrt{g/\ell}$ og lota hans $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Lota einfalda (ólínulega) pendúlsins er gefin með formúlu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \cdots\right)$$

þar sem θ_0 er hámarksútslag hans. Þessar staðreyndir geta hjálpað ykkur við að velja horntíðnina ω og fasahliðrunina φ í þessum hluta verkefnisins.

(i) Fyrsta stigs hneppi sem er jafngild hreyfijöfnu örvaða pendúlsins.

(ii) Notið sömu aðferð og í síðasta lið til þess að leysa afleiðujöfnuna og setjið lausnina fram með hreyfimynd eins og í síðasta lið með einfalda pendúlnum og örvaða pendúlnum í ólíkum litum í sömu hreyfimynd. Skilið hreyfimyndinni `hr3.avi` með skýrslunni og keyrsluskránni `hr3.m` sem býr hana til.

(iii) Fyrir hvaða gildi á ω og φ örvast útslag pendúlsins mest?

(iv) Hvaða gildi á φ notar maður til þess að hægja á rólunni?

(v) Túlkið eðlisfræðilega hvernig þetta gengur fyrir sig.

4 Kúlupendúll

Byrjið á því að fletta upp orðinu *pendulum* á Wikipedia og renna ykkur niður síðuna þar til þið sjáið kúlupendúl sveiflast undir með mynd af Foucault í bakgrunni. Við ætlum að reikna út nálganir á hreyfijöfnum kúlupendúls og teikna upp lausnina á mynd eins of þessari. Takið eftir ferlinum sem ritaður er í botninn. Við æltum líka að teikna hann.

Kúlupendúll sem sveiflast í þyngdarsviði hefur hreyfiorkuna

$$T = \tfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \tfrac{1}{2}m\ell^2(\sin^2\theta)\dot{\phi}^2$$

þar sem m er massi pendúlsins, ℓ er lengd hans, $\theta = \theta(t)$ er hornið sem hann myndar við lóðlínu sem fall af tíma t. $\dot{\theta}$ er tímaafleiða θ, fallið ϕ er hornið sem pendúllinn myndar við xz-planið sem fall af tíma og $\dot{\phi}$ er afleiða ϕ með tilliti til tíma.

Stöðuorka pendúlsins í þyngdarsviði er

$$U = -mg\ell\cos\theta$$

og er hún því sett 0 þegar pendúllinn stendur hornrétt á lóðrétta ásinn.

Lagrange-fallið er $L = T - U$ og skriðþungarnir sem svara til breytanna θ og ϕ eru

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = m\ell^2\dot{\theta}, \qquad \text{og} \qquad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = m\ell^2(\sin^2\theta)\,\dot{\phi}$$

Heildarorkan er

$$H = T + U = \frac{p_\theta^2}{2m\ell^2} + \frac{p_\phi^2}{2m\ell^2\sin^2\theta} - m\ell g\cos\theta.$$

Samkvæmt Hamilton-aflfræði (e. hamiltonian mechanics) eru hreyfijöfnurnar fjórar:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\ell^2}, \\
\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{m\ell^2\sin^2\theta}, \\
\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial\theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{m\ell^2\sin^3\theta} - mg\ell\sin\theta, \\
\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial\phi} = 0.
\end{aligned}$$

Það er þægilegast að innleiða breyturnar $x_1 = \theta$, $x_2 = \phi$, $x_3 = p_\theta$ og $x_4 = p_\phi$.

(i) Skrifið upp fyrsta stigs hneppið sem er jafngilt hreyfijöfnum kúlupendúlsins.

(ii) Notið nú forritið ykkar til þess að leysa jöfnuna og búið til hreyfimynd. Þið þurfið að breyta teikniforritinu og teikna þrívíddarmynd með `Matlab`-skipuninni `plot3` til þess að teikna í þremur víddum. Ímyndið ykkur að það renni blek frá penúlnum niður á gólfið og að hann riti feril. Í myndinni eigið þið að teikna ferilinn sem þannig myndast í gólfið fyrir neðan pendúlinn eða í aðra mynd líkt og fasamyndirnar í fyrri liðum.

(iii) Skilið inn hreyfimynd í `hr4.avi` og tilheyrandi keyrsluskrá `hr4.m`, ásamt annarri grafík.

5 Hreyfikerfi að eigin vali

Notið eins aðferðir og í síðustu tveimur greinum til þess að leysa afleiðujöfnuhneppi sem lýsir einhverju kerfi að eigin vali. Notið þá grafísku framsetningu á lausninni sem ykkur finnst best eiga við.

(i) Notið eigið forrit til útreikninganna, en ef ykkur þykir það ganga treglega eða ekki gefa nógu nákvæmar lausnir á skikkanlegum tíma þá skuluð þið nota Runge-Kutta-Verner-aðferðina í forritinu `rkv56`. Hún er nákvæmasta aðferðin sem eigum völ á.

(ii) Skilið inn hreyfimynd/grafík í skránni `hr5.avi` tilheyrandi keyrsluskrá `hr5.m`.

Atriði um frágang og framsetningu:

Lesið vandlega forsíðu Heimaverkefnis I. Við yfirferð á verkefnunum þá verður eftirfarandi listi hafður til hliðsjónar og er dregið niður fyrir þau atriði á honum sem er ábótavant.

- Þjappið `.avi` skrám og ekki gleyma að skila inn hreyfimyndaskrám og viðeigandi keyrsluskrám með nöfnum sem nefnd eru í skýrslunni.
- Nöfn á forsíðu efst til hægri og undirskriftir á síðustu síðu.
- Forritakeyrslur eru í skýrslunni.
- Kaflaheiti og kaflanúmer eru eins og í fyrirmælunum
- Forritunarkóði og forritakeyrslur auðgreindar, og í leturgerð sem hentar (t.d. `verbatim` og M-code LaTeX Package: mcode.sty, (er að finna í Matlab-möppunni á Uglu)).
- Útskýringar í haus forrita, `>>help` *forrit* á að gefa lýsingu á forritinu.
- Inntök og úttök forrita eru þau sömu og í fyrirmælunum, og í sömu röð.
- Skráarheiti og fallaheiti eins og í fyrirmælunum.
- Kóði inndreginn (Ctrl+A, Ctrl+I).
- Kóði útskýrður

Um skil: Úrlausn á að skila ekki síðar en kl. 16.00 föstudaginn 12. apríl 2013.

Gangi ykkur vel!
Ragnar.