**MAMLOUK** Haya [21107689] Sorbonne Université

**OZGENC** Doruk [21113927] 2024-2025

**MOGPL – Rapport de projet :**

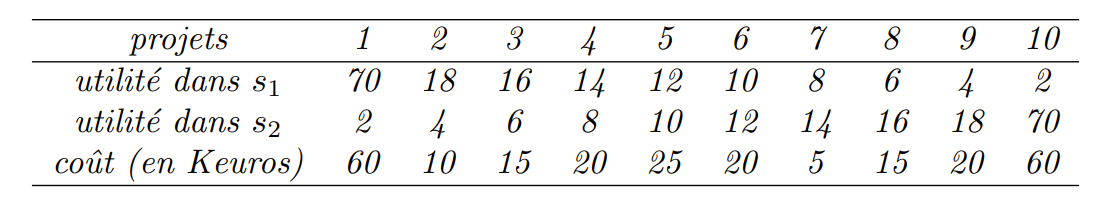
**Optimisation robuste dans l’incertain total**

SUMMARY

INTROdUCTIOn explain the example sac s dos that we will use

Nous abordons un cas de sélection optimale de projets en tenant compte de contraintes budgétaires et de scénarios incertains. Plus précisément, nous disposons d'une enveloppe budgétaire de **100 K€** et devons choisir parmi une liste de **10 projets**. Le coût de chaque projet est connu, tandis que l'utilité associée varie selon deux scénarios socio-économiques possibles (**s1** et **s2**).

Le tableau ci-dessous présente les utilités de chaque projet dans les deux scénarios ainsi que leurs coûts respectifs :



1. **Linéarisation des critères maxmin et minmax regret**

Posons pour la suite les données suivantes :

* + - ***P***  : l’ensemble des projets
    - ***B***  : le budget
    - : utilité du projet *j* dans le scénario *i* avec ,
    - : coût du projet *j* avec

1. **Formulation du problème de maxmin**

Le critère **maxmin** cherche à maximiser la valeur minimale obtenue dans tous les scénarios possibles. En d'autres termes, on veut trouver une solution qui garantit le meilleur résultat possible dans le pire cas.

Pour maximiser la fonction g(x) = , nous introduisons une variable continue ***t*** pour représenter le minimum des . Le problème peut alors être formulé comme un programme linéaire :

**Variables :**

* : variable binaire,
* ***t***  : variable continue représentant le minimum des ) =

**Fonction objectif** :

**max *t***

**Contraintes :**

1. ***t*** ) =
2. ,

Cette modélisation a été implémentée dans un fichier Python (maxmin.py), utilisant le solveur Gurobi. Une solution optimale *x\**, maximisant ***t*** au sens du critère maxmin, a été déterminée. La solution obtenue est la suivante :

*x\**= (0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)

La valeur de la fonction objective (maxmin) : 66

1. **Formulation du problème de minmax regret**

Le critère **minmax regret** cherche à minimiser le regret maximal parmi tous les scénarios possibles. Autrement dit, on cherche une solution qui réduit au minimum le "manque à gagner" dans le pire des cas.

Ce problème est résolu en deux étapes : la première consiste à calculer les regrets pour chaque scénario, et la seconde à maximiser le regret maximal à l'aide d'un programme linéaire.

**Étape 1 : Calcul des regrets**

Définissons les regrets *=) - ) =* ***) -*** où ) est la valeur maximale de sur tous les x. Ainsi, pour chaque scénario *i*, nous devons calculer).

**Étape 2 : Minimisation du regret maximal**

Pour minimiser la fonction g(x) = , introduisons une variable continue ***t*** pour représenter le maximum des regrets. Le problème peut alors être formulé comme un programme linéaire.

**Variables :**

* : variable binaire,
* ***t***  : variable continue représentant le maximum des

**Fonction objectif** :

**max *t***

**Contraintes :**

1. ***t*** *)* -
2. ,

Cette modélisation a été implémentée dans un fichier Python (minmaxRegret.py), en utilisant le solveur Gurobi. Gurobi nous a permis de trouveret en résolvant les programmes linéaires associés aux solutions optimales et respectivement. Par la suite, il a résolu le programme linéaire pour déterminer la solution optimale du regret minmax, fournissant les résultats suivants :

et

et

La valeur de la fonction objective (minmax regret) : 50

1. **Représentation des points dans le plan**

Nous souhaitons représenter dans le plan z1(x) et z2(x) les quatre points suivants :

*z(*)

*z(*(20, 118)

Les points et ne se trouvent pas sur la ligne reliant *z(*et *z(*. Cela démontre qu'aucune des solutions et n’aurait pu être obtenue en maximisant une moyenne pondérée (avec des coefficients positifs) entre *)* et ). Ces solutions sont spécifiques à leurs critères respectifs et ne peuvent être réduites à un compromis linéaire simple.

Si une solution optimale, telle que ou , pouvait être obtenue en maximisant une moyenne pondérée, cela signifierait qu’elle correspondrait à un compromis linéaire entre *)* et ), pondéré par des coefficients positifs. Cependant, les solutions maxmin et minmax regret , ne suivent pas cette logique.

Elles sont conçues pour répondre à des critères spécifiques :

* La solution maxmin vise à équilibrer les deux objectifs en minimisant le pire résultat possible.
* La solution minmax regret cherche à minimiser le regret maximal dans tous les scénarios possibles.

Ces critères ne sont pas alignés sur la logique de compromis linéaire (combinaison linéaire), car ils se concentrent sur des aspects plus complexes que la simple combinaison pondérée des deux objectifs. Ainsi, ces solutions ne peuvent être interprétées comme des résultats d'une optimisation basée sur une moyenne pondérée.

1. **Généralisation du problème**

L'étude des temps de résolution pour le problème de sac-à-dos robuste a été réalisée en considérant les deux critères d'optimisation : **maxmin** et **minmax regret**. Pour chaque combinaison de n∈{5,10,15} (nombre de scénarios) et p ∈ {10,15,20} (nombre de projets), 10 instances ont été générées aléatoirement. Les coûts et utilités des projets ont été choisis dans l’intervalle [1, 100], et le budget de poids a été fixé à 50% du coût total des projets. Les temps moyens de résolution ont été calculés grâce au fichier Python tps\_resol.py.

Les temps moyens de résolution (en secondes) obtenus pour chaque configuration sont présentés dans le tableau suivant :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **n** | **p** | Temps moyen de résolution (**maxmin**) | Temps moyen de résolution (**minmax regret**) |
| 1 | 5 | 10 | 0.008989 | 0.022132 |
| 2 | 5 | 15 | 0.008715 | 0.026239 |
| 3 | 5 | 20 | 0.012839 | 0.028806 |
| 4 | 10 | 10 | 0.007990 | 0.055671 |
| 5 | 10 | 15 | 0.011154 | 0.066685 |
| 6 | 10 | 20 | 0.013054 | 0.053114 |
| 7 | 15 | 10 | 0.009295 | 0.061391 |
| 8 | 15 | 15 | 0.018638 | 0.057342 |
| 9 | 15 | 20 | 0.012659 | 0.068193 |

Interprétation

1. Complexité accrue pour Minimax Regret : Les temps de résolution pour Minimax Regret sont significativement plus élevés que ceux pour Maxmin, indiquant une complexité supplémentaire liée aux contraintes spécifiques pour minimiser le regret maximal. Ces contraintes nécessitent une évaluation approfondie des scénarios, ce qui augmente la charge computationnelle.
2. Impact des paramètres nn et pp :
   1. Lorsque pp (nombre de projets) augmente, les temps augmentent modérément, car le problème nécessite d’examiner un plus grand nombre de variables.
   2. L’effet de nn (nombre de scénarios) est plus marqué, surtout pour Minimax Regret, car chaque scénario ajoute des contraintes supplémentaires, amplifiant la difficulté de résolution.
3. Pertinence des résultats : Cette analyse met en lumière l’impact des paramètres sur les contraintes du problème. L’approche Maxmin reste rapide pour des instances de taille moyenne, tandis que Minimax Regret exige plus de ressources pour garantir une robustesse face à tous les scénarios.

En conclusion, bien que les deux approches soient faisables pour des instances de taille modérée, Minimax Regret montre une croissance plus rapide des temps de résolution avec l'augmentation des contraintes, ce qui pourrait poser des défis pour des instances plus larges

1. **Linéarisation du critère maxOWA**
   1. **Définition de *Lk(z)***

Soit un vecteur , on définit *L(z)* = (*L1(z)*, …, *Ln(z)*), où *Lk(z)* est définie par :

où représente le i-ème plus petit élément de *z*, puisque (*(x)*, . . . , *(x)*) représente le résultat d’un tri des composantes de (*(x)*,. . . , *(x)*) par ordre croissant.

On considère le programme linéaire suivant :

**Fonction objectif** :

**min**

**Contraintes :**



On veut montrer que *Lk(z)* est la valeur optimale de ce programme linéaire.

Intuitivement, pour minimiser , on veut :

1. Sélectionner exactement *k* variables (pour respecter les contraints)
2. Choisir les *k* plus petites valeurs de (on minimise)

Donc trouver la solution optimale revient à faire la somme des *k* plus petites valeurs de , et c’est ce que représente *Lk(z)*.

Cette formulation permet une linéarisation du critère **maxOWA**, transformant un problème combinatoire complexe en un programme linéaire soluble.

* 1. **Programme linéaire relaxé et dual**

Soit le programme linéaire ci-dessus relaxé en variables continues :

**Fonction objectif** :

**min**

**Contraintes :**



Soit le dual du programme linéaire ci-dessus, pour :

* Variable du dual: contrainte
* Variable du dual: contrainte

**Fonction objectif** :

**max k**

**Contraintes :**



**Calcul des composantes du vecteur L(2, 9, 6, 8, 5 , 4)  en utilisant la formulation du dual**

Soit . En triant *z*, on obtient: [2, 4, 5, 6, 8, 9]

* -
* -

Prenons comme exemple. Cette composante correspond à la somme des deux plus petites valeurs de *z*, soit et .

Dans le dual, est la variable associée à la contrainte dans le primal. La valeur de doit être suffisamment grande pour satisfaire les deux plus petites valeurs de *z* tout en respectant les contraintes. Ici, est choisi comme valeur optimale.

**Calcul des**

Pour  :

 :

Pour i , . Ces valeurs n'affectent pas le résultat car seules les deux plus petites valeurs de *z* sont pertinentes pour .

**Vérification de la fonction objectif du dual** :

La fonction objectif est donnée par :

max 2 .

en substituant les valeurs , , et les autres

on obtient : 2 . 4 - (2 + 0) = 8 - 2 = 6

Cette valeur correspond exactement à obtenue dans le primal.

* 1. **OWA sous forme linéaire en termes de *Lk(z)***

L’OWA (Ordered Weighted Average) est défini par où sont des poids positifs et décroissants lorsque i augmente ( a déjà été défini précédemment).

On veut montrer qu’on peut réécrire avec  *-* pour et .

On veut exprimer en fonction des termes .

**Rappel :** représente le i-ème plus petit élément de *z*

représente la somme des k premiers

Donc

En substituant dans , on obtient :

+ … + avec

+

On obtient le résultat par définition des et .a

* 1. **Formulation linéaire et application sur notre exemple**

En utilisant les résultats des questions précédentes, le problème de l’optimisation d’un OWA peut alors être formulé comme un programme linéaire (appliqué sur notre exemple).

**Variables :**

* : variable binaire,
* : variable représentant l’utilité totale dans le scénario *k*
* : variable pour modéliser les contraintes de linéarisation

**Fonction objectif** :

**max**

**Contraintes :**

1. ,

Cette modélisation a été implémentée dans un fichier Python (maxOWA.py), utilisant le solveur Gurobi. Une solution optimale *x\**, maximisant OWA, a été déterminée. La solution obtenue est la suivante :