

Python で楽しむ初等整数論

Hayao Suzuki

PyCon mini Hiroshima 2019

October 12, 2019

Contents

- 1 自己紹介
- 2 初等整数論とは
- 3 ピタゴラス数
- 4 素数が無限個あることの証明
- 5 ピタゴラス数ふたたび
- 6 まとめ

自己紹介

お前誰よ

名前 Hayao Suzuki (鈴木 駿)

Twitter @CardinalXaro

ブログ <https://xaro.hatenablog.jp/>

専門 数学 (組合せ論・グラフ理論)

学位 修士 (工学)、電気通信大学

仕事 株式会社アイリッジで Python プログラマをしている

技術書の査読

- 『Effective Python』(オライリージャパン) など
- <https://xaro.hatenablog.jp/> に一覧あります。

いろんな発表

- 「SymPy による数式処理」(PyCon JP 2018) など
- <https://xaro.hatenablog.jp/> に一覧あります。

初等整数論とは

整数論とは

数の性質に関する数学の一分野

初等整数論とは

代数的な手法や解析的な手法を使わない数論

初等だから簡単ですね？ よかった！

初等とは予備知識がいないという意味であり決して簡単ではありません。

Python で楽しむ初等整数論

- 定理の結果を Python でプログラミングしてみよう
- 定理の証明から Python でプログラミングしてみよう

でも... 難しいんでしょう？

割り算ができれば大丈夫！（個人差があります）

定理 (Pythagoras)

直角三角形の斜辺の長さを c とし、それ以外の辺の長さを a, b とする。そのとき、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。

定義 (Pythagorean Triple)

$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ自然数の組 (a, b, c) をピタゴラス数と呼ぶ。

ピタゴラス数を計算しよう：根性編

根性で計算だ！

```
from itertools import product

for a, b, c in product(range(1, 20), repeat=3):
    if a ** 2 + b ** 2 == c ** 2:
        print(a, b, c)
```

ピタゴラス数を計算しよう：根性編

根性で計算したぞ！

3 4 5

4 3 5

5 12 13

6 8 10

8 6 10

8 15 17

9 12 15

12 5 13

12 9 15

15 8 17

原始ピタゴラス数

命題 (ピタゴラス数からピタゴラス数を作る)

自然数の組 (a, b, c) がピタゴラス数ならば、任意の自然数 n に対して (na, nb, nc) もまたピタゴラス数である。

定義 (Primitive Pythagorean Triple)

互いに素であるピタゴラス数を原始ピタゴラス数と呼ぶ。

原始ピタゴラス数を計算しよう

ちょっと工夫した

```
from itertools import combinations
from math import gcd

for a, b, c in combinations(range(1, 50), 3):
    if a ** 2 + b ** 2 == c ** 2 and gcd(a, b) == 1:
        print(a, b, c)
```

ちょっと工夫した

- a, b, c はそれぞれ違う数である
- a, b は互いに素である

原始ピタゴラス数を計算しよう

原始ピタゴラス数の計算

3 4 5

5 12 13

7 24 25

8 15 17

9 40 41

12 35 37

20 21 29

原始ピタゴラス数をもっと上手く計算しよう

命題

互いに素な奇数 $s, t (s > t)$ 対して、
 $a = st, b = \frac{s^2 - t^2}{2}, c = \frac{s^2 + t^2}{2}$ は原始ピタゴラス数となる。

原始ピタゴラス数をもっと上手く計算しよう

上手く工夫した

```
from itertools import count, combinations
from math import gcd

for t, s in filter(
    lambda x: gcd(*x) == 1,
    combinations(range(1, 10, 2), r=2),
):
    print(
        s * t,
        int((s ** 2 - t ** 2) / 2),
        int((s ** 2 + t ** 2) / 2),
    )
```

原始ピタゴラス数をもっと上手く計算しよう

原始ピタゴラス数をもっと上手く計算した

3 4 5

5 12 13

7 24 25

9 40 41

15 8 17

21 20 29

35 12 37

45 28 53

63 16 65

素数は無限個ある

定理 (Euclid)

素数は無限に存在する。

証明.

素数は有限個あると仮定し、それを p_1, p_2, \dots, p_n とする。また、 $P = \prod_{i=1}^n p_i + 1$ とする。このとき、 P は素数が合成数のいずれかである。 P が素数の場合、定義から P は p_1, p_2, \dots, p_n のいずれよりも大きい素数である。 P が合成数である場合、ある素数 q で割り切れるが、 P の定義から P は p_1, p_2, \dots, p_n で割り切れるので $P + 1$ を割り切ることができない。よって q は p_1, p_2, \dots, p_n とは異なる素数である。よって、 P が素数、合成数のいずれであっても p_1, p_2, \dots, p_n とは異なる新たな素数が得られる。以上より、素数は無限に存在する。 □

ピタゴラス数（復習）

定義 (Pythagorean Triple)

$a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ自然数の組 (a, b, c) をピタゴラス数と呼ぶ。

Dirichlet の算術級数定理

定理 (Dirichlet)

a, b を互いに素な数とする。そのとき、任意の自然数 n に対して $an + b$ と表せる素数は無限に存在する。

Dirichlet の算術級数定理の証明.

複素函数論を勉強しよう！



まとめ

いえーい