

令和 6 年度  
修士学位論文

論文用テンプレート

○○所属

○○課程 ○○専攻

○○分野

指導教員 ○○ ○○教授

令和○年入学

学籍番号 82313206

氏名 八木颯仁

# 目次

第 1 章	緒言	1
第 2 章	Introduction	2
2.1	セクション	2
第 3 章	Torsions	7
3.1	セクション	7
第 4 章	Reductions	8
4.1	$E_{0,s}^{(1+3s)}$	8
第 5 章	本論	9
5.1	セクション	9
5.1.1	サブセクション	9
参考文献		10

# 第 1 章 緒言

ここに諸元を書く [1]

# 第 2 章 Introduction

## 2.1 セクション

**Theorem 2.1.1.** (Shioda-Tate formula, [2] Theorem 3.4)

$$\rho(S) = 2 + \sum_{v \in R} (m_v - 1) + \text{rank}(E(K)) \quad (2.1)$$

である.

**Theorem 2.1.2.**

$$E_{1,s} : y^2 = x(x - 4s^2)(x + (s^2 - 1)^2) \quad (2.2)$$

の  $\overline{\mathbb{Q}}(s)$  上のランクは 0 である.

証明

$$\Delta_{E_{1,s}} = 256s^4(s+1)^4(s-1)^4(s^2+1)^4 \quad (2.3)$$

Table 2.1 Singular fibers of  $E_{1,s}$

Place	Type	$m_v$
$s = 0$	$I_4$	4
$s = \pm 1$	$I_4$	4
$s = \pm i$	$I_4$	4
$s = \infty$	$I_4$	4

$$e(\mathcal{E}_{1,s}) = 24 \quad (2.4)$$

したがって  $\mathcal{E}_{1,s}$  は K3 曲面であり.  $\rho(\mathcal{E}_{1,s}) \leq 20$  である. Theorem 2.1.1 より

$$\text{rank}(E_{1,s}) = 0 \quad (2.5)$$

□

**Theorem 2.1.3.**

$$E_{4,t} : y^2 = x(x - 4s^2)(x + (s^2 - 1)^2), s = \frac{2t}{t^2 - 3} \quad (2.6)$$

は

$$\left( s^2 - 1, \sqrt{-1}s(s^2 - 1) \frac{t^2 + 3}{t^2 - 3} \right) \quad (2.7)$$

を通る.

$$1 \leq \text{rank } E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t)) \leq 2 \quad (2.8)$$

証明

$$\Delta_{E_{4,t}} = 4096t^4(t-1)^4(t+1)^4(t-3)^4(t+3)^4(t^2-3)^4(t^4-2t^2+9)^4 \quad (2.9)$$

Table 2.2 Singular fibers of  $E_{4,t}$

Place	Type	$m_v$
$t = 0$	$I_4$	4
$t = \pm 1$	$I_4$	4
$t = \pm 3$	$I_4$	4
$t = \pm\sqrt{3}$	$I_4$	4
$t^4 - 2t^2 + 9 = 0$	$I_4$	4
$t = \infty$	$I_4$	4

$$e(\mathcal{E}_{4,t}) = 48 \quad (2.10)$$

TODO:  $\rho(\mathcal{E}_{4,t}) \leq 40$  である. Theorem 2.1.1 より

$$\text{rank } E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t)) \leq 2 \quad (2.11)$$

□

上の評価は不十分. 生成元は 1 つしか見つからないので, ランクの上界が 1 であることを示したい.

**Theorem 2.1.4.** ([2] Proposition 4.1.)

$$\text{rank } E(k(C)) + \text{rank } E^{(u)}(k(C)) = \text{rank } E(k(C)(\sqrt{u})) \quad (2.12)$$

**Theorem 2.1.5.**

$$E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t)) = E_{1,s}(\overline{\mathbb{Q}}(s)(\sqrt{1+3s^2})) \quad (2.13)$$

$$E_{1,s}^{(1+3s^2)} : (1+3s^2)y^2 = x(x-4s^2)(x+(s^2-1)^2) \quad (2.14)$$

$$\text{rank } E_{1,s}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) + \text{rank } E_{1,s}^{(1+3s^2)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) = \text{rank } E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t)) \quad (2.15)$$

さらに

$$E_{0,s} : y^2 = x(x-4s)(x+(s-1)^2) \quad (2.16)$$

$$E_{0,s}^{(1+3s)} : (1+3s)y^2 = x(x-4s)(x+(s-1)^2) \quad (2.17)$$

$$E_{0,s}^{(s(1+3s))} : s(1+3s)y^2 = x(x-4s)(x+(s-1)^2) \quad (2.18)$$

$$\text{rank } E_{0,s}^{(1+3s)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) + \text{rank } E_{0,s}^{(s(1+3s))}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) = \text{rank } E_{1,s}^{(1+3s^2)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) \quad (2.19)$$

証明

$$s = \frac{2t}{t^2 - 3} \quad (2.20)$$

を  $t$  について解くと

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1+3s^2}}{s} \quad (2.21)$$

したがって

$$E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t)) = E_{1,s}(\overline{\mathbb{Q}}(s)(\sqrt{1+3s^2})) \quad (2.22)$$

□

**Theorem 2.1.6. TODO**

$$\text{rank } E_{1,s}^{(1+3s^2)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) = ? \quad (2.23)$$

証明

$$\Delta(E_{1,s}^{(1+3s^2)}) = (1+3s^2)^6 \Delta(E_{1,s}) \quad (2.24)$$

$$e(\mathcal{E}_{1,s}^{(1+3s^2)}) = 36 \quad (2.25)$$

Theorem 2.1.1 からは

$$\text{rank } E_{1,s}^{(1+3s^2)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) \leq 2 \quad (2.26)$$

しか分からない。K3 ですらないので、 $H^2$  の次元が分からず、reduction を取る方法でも計算が進められない。

$$\text{rank } E_{1,s}^{(1+3s^2)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) = ? (1 \text{ or } 2) \quad (2.27)$$

Table 2.3 Singular fibers of  $E_{1,s}^{(1+3s^2)}$

Place	Type	$m_v$
$s = 0$	$I_4$	4
$s = \pm 1$	$I_4$	4
$s = \pm i$	$I_4$	4
$s = \pm \frac{1}{\sqrt{-3}}$	$I_0^*$	5
$s = \infty$	$I_4$	4

□

**Theorem 2.1.7.** TODO

$$\text{rank } E_{0,s}^{(1+3s)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) \leq 1 \quad (2.28)$$

証明

$$\Delta(E_{0,s}^{(1+3s)}) = 256s^2(s-1)^4(s+1)^4(3s+1)^6 \quad (2.29)$$

Table 2.4 Singular fibers of  $E_{0,s}^{(1+3s)}$

Place	Type	$m_v$
$s = 0$	$I_2$	2
$s = \pm 1$	$I_4$	4
$s = -\frac{1}{3}$	$I_0^*$	5
$s = \infty$	$I_2^*$	7

$$e(\mathcal{E}_{0,s}^{(1+3s)}) = 24 \quad (2.30)$$

Theorem 2.1.1 からは

$$\text{rank } E_{0,s}^{(1+3s)}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) \leq 1 \quad (2.31)$$

□

**Theorem 2.1.8.** TODO

$$\text{rank } E_{0,s}^{(s(1+3s))}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) \leq 1 \quad (2.32)$$

証明

$$\Delta(E_{0,s}^{(s(1+3s))}) = 256s^8(s-1)^4(s+1)^4(3s+1)^6 \quad (2.33)$$

Table 2.5 Singular fibers of  $E_{0,s}^{(s(1+3s))}$

Place	Type	$m_v$
$s = 0$	$I_2^*$	7
$s = \pm 1$	$I_4$	4
$s = -\frac{1}{3}$	$I_0^*$	5
$s = \infty$	$I_2$	2

上と同様に

$$\text{rank } E_{0,s}^{(s(1+3s))}(\overline{\mathbb{Q}}(s)) \leq 1 \quad (2.34)$$

□



## 第 3 章 Torsions

### 3.1 セクション

**Theorem 3.1.1.**

$$E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t))_{\text{tors}} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad (3.1)$$

$$T_1 = (2s(s+1)^2, 2s(s+1)^2(s^2+1)) \quad (3.2)$$

$$T_2 = (2is(s^2-1), 2is(s+i)^2(s^2-1)) \quad (3.3)$$

で生成される.

証明

$$E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t))[2] = E_{1,s}(\overline{\mathbb{Q}}(s))[2] = \{O, (0,0), (4s^2,0), (-(s^2-1)^2,0)\} \quad (3.4)$$

$$2T_1 = (4s^2, 0) \quad (3.5)$$

$$2T_2 = (0, 0) \quad (3.6)$$

[2] の Lem.3.5 より

$$E_{4,t}(\overline{\mathbb{Q}}(t))_{\text{tors}} \hookrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{12} \quad (3.7)$$

なので位数 8 の点は存在しない. □

*Remark 3.1.2.* これは

$$E_{1,s}(\mathbb{Q}(s))_{\text{tors}} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \quad (3.8)$$

の別証明になっている.

## 第 4 章 Reductions

### 4.1 $E_{0,s}^{(1+3s)}$

K3 なので

$$\dim_{\mathbb{Q}_l} H_{\text{ét}}^2(\tilde{S}, \mathbb{Q}_l) = 22 \quad (4.1)$$

である. Let  $V$  be the subspace of  $\text{NS}(\tilde{S})$  generated by the singular fibers and the zero section. Then  $V$  is of rank 19, on which the Frobenius automorphism acts by multiplication by  $p$ .

## 第 5 章 本論

### 5.1 セクション

ここに本論を書く [3] [4] [5]. Fig. 5.1 と Eq. 5.1 はに示すように, hoge である.

#### 5.1.1 サブセクション

Dummy Image

Fig. 5.1 caption

##### 5.1.1.1 サブサブセクション

色は匂へど散りぬるを 我が世誰ぞ常ならむ 有為の奥山今日越えて 浅き夢見じ酔ひもせず

A quick brown fox jumps over the lazy dog.

$$\left(\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx\right)^2 = \sum_{k=0}^\infty \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{1}{2k+1} = \prod_{k=1}^\infty \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2} \quad (5.1)$$

# 参考文献

- [1] V. Mnih, K. Kavukcuoglu, D. Silver, A. Graves, I. Antonoglou, D. Wierstra, and M. Riedmiller. Playing atari with deep reinforcement learning. arXiv preprint arXiv:1312.5602, (2013).
- [2] B. Naskręcki. Mordell-Weil ranks of families of elliptic curves associated to Pythagorean triples. eng. *Acta Arithmetica* 160.2, pp. 159–183, (2013). URL: <http://eudml.org/doc/279803>.
- [3] L. Yao, Y.-W. A. Wu, L. Yao, and Z. Z. Liao. An integrated IMU and UWB sensor based indoor positioning system. *2017 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN)*. IEEE. 2017, pp. 1–8.
- [4] D. Ugarte. Curling and closure of graphitic networks under electron-beam irradiation. *Nature* 359.6397, pp. 707–709, (1992).
- [5] 野村篤史, 須ヶ崎聖人, 坪内孝太, 西尾信彦, 下坂正倫, et al. UWB の測定距離と直接波の減衰度を利用したデバイスフリー複数人屋内測位. 研究報告ユビキタスコンピューティングシステム (UBI) 2022.1, pp. 1–8, (2022).