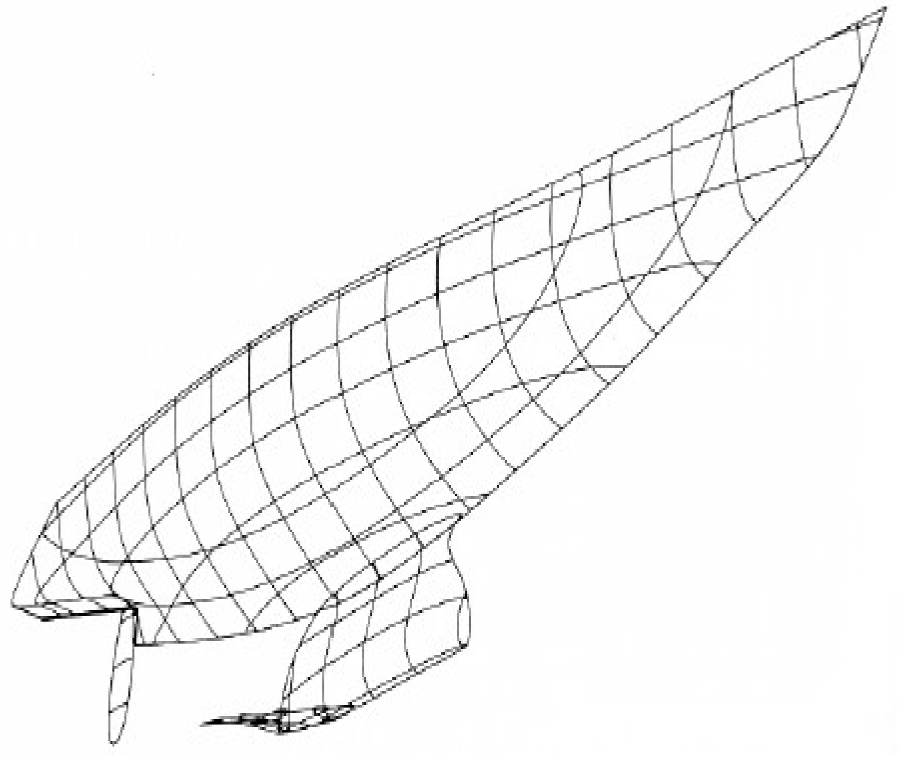
Curvas y Superficies

Introducción

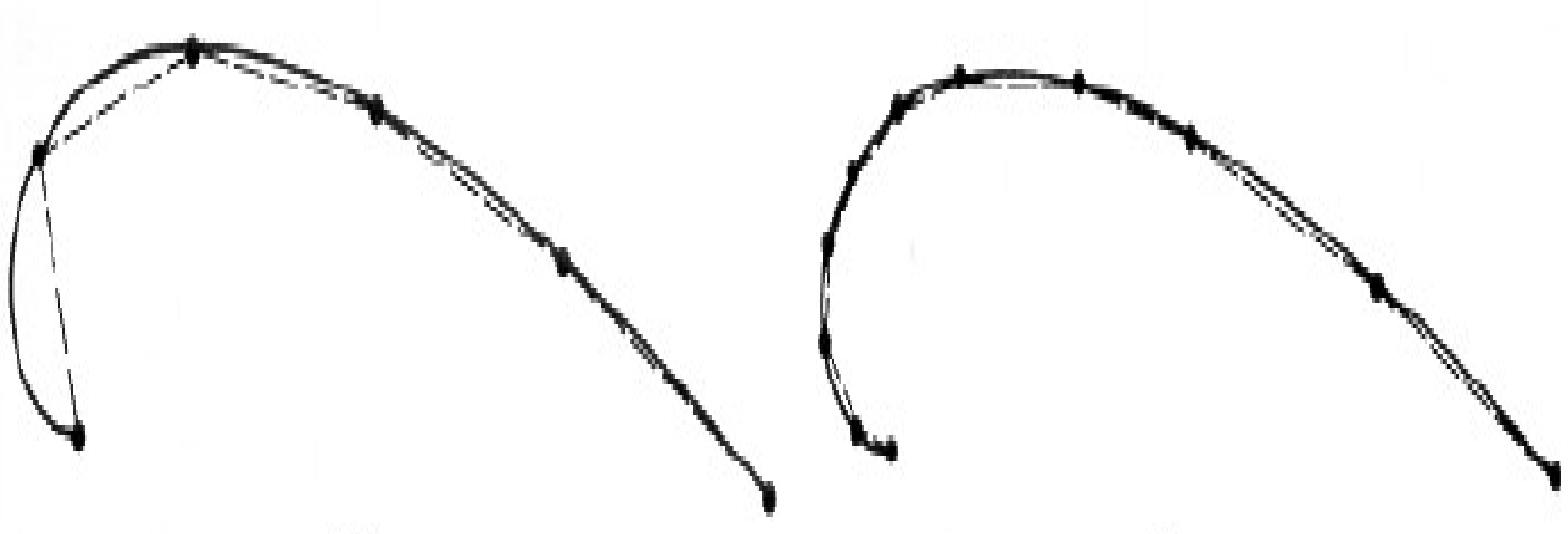
- Frecuentemente las superficies son descritas en mallas de superficies definidas
- Pueden ser obtenidas por digitalización de un modelo físico
- Una curva luego es ajustada a los puntos de digitalizados



Representación de curvas

- Por medio de conjuntos de puntos
  - En ese caso un visión adecuada puede ser realizada por aproximar los puntos por segmento de recta
- Analítica- representación matemática
  - Preescisión
  - Almacenamiento compacto
  - Facilidad de calculo (exacta)
  - Facilidad para calcular las propiedades de la curva
  - Facilidad diseñar las curvas
  - Facilidad para hacer alteraciones continuas

Representación de curvas



(a) (b)

Ajuste curvas

- Del punto de vista analítico
  - Puntos de una superficie real digitalizada
  - Es un problema de interpolación
  - Una curva se ajusta a los puntos dados
  - Una técnica usual son los *splines* cúbicos
  - Estrategia de aproximación polinomial por partes

Aproximación de curvas

- Si los puntos dados son aproximados para valores desconocidos
  – Puntos obtenidos en medidas experimentales
  – La curva muestra la tendencia de los datos
  – En general la curva puede no pasar por los puntos pero se aproxima a ellos
  – Alternativamente puede se puede desear una descripción matemática
  – Representaciones de Bézier y B - splines

Representaciones de curvas

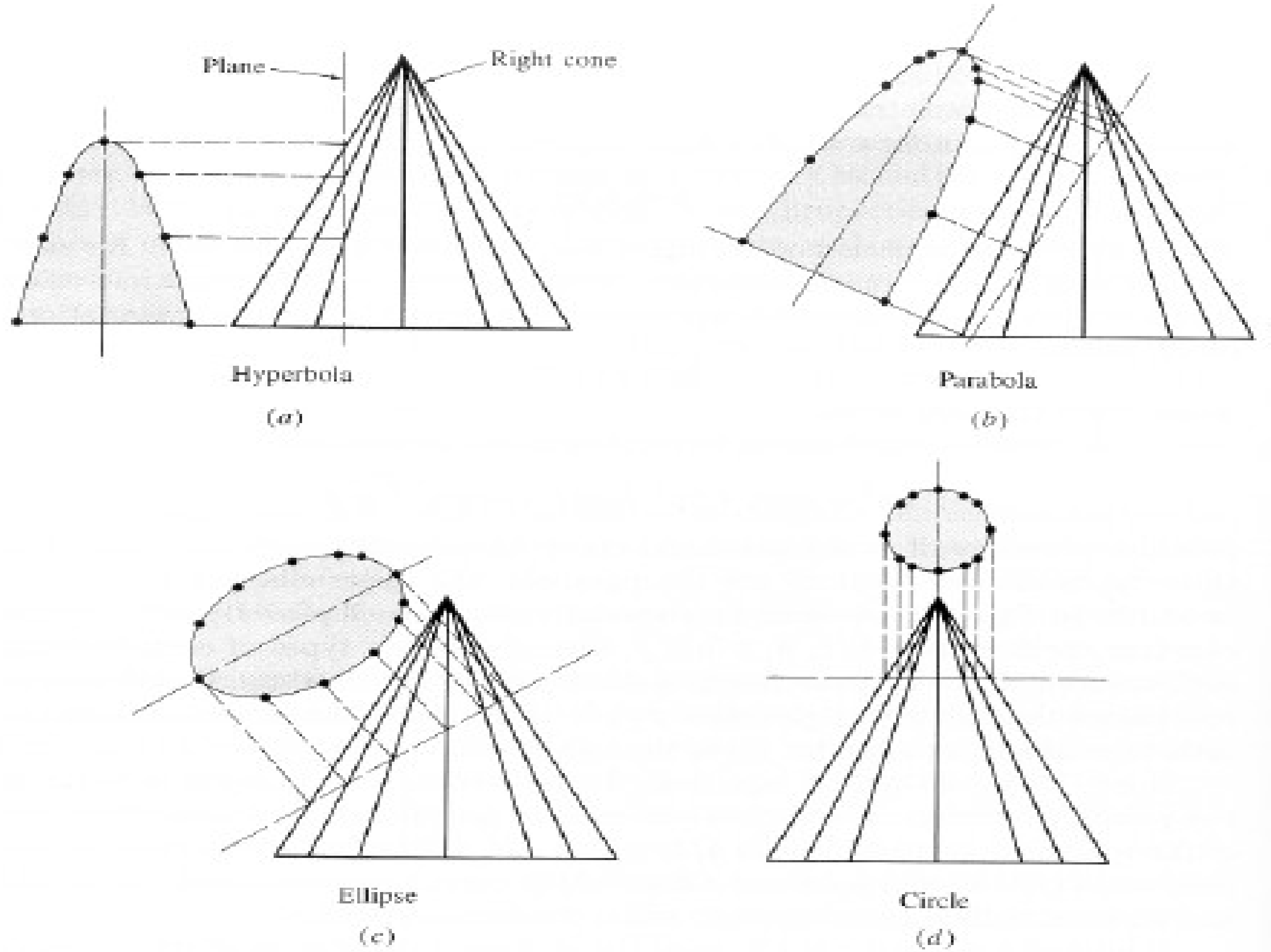
Cuando los valores son aproximados y son calculados de manera experimental existen 2 manares de poder ser representada:

- Paramétrica
- No paramétrica

No Paramétricas

- La forma no paramétrica explicita
  - $y = f(x)$ ejemplo para una recta
  - $y = m*x + b$
- De forma implícita curvas cerradas son mejor representadas
  - $F(x, y) = 0$
  - $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$

No Paramétricas



No Paramétricas

- Limitaciones
  - Implícita y explicita son dependientes del sistema de coordenadas
  - Los puntos de la curva calculados en incrementos en *x* y *y* no están distribuidos uniformemente lo que afecta a la calidad de la gráfica

Paramétricas

- En el caso de funciones paramétricas cada punto de la curva es representada como una función de un único parámetro por ejemplo:
  - $x = x(t)$
  - $y = y(t)$
- Por lo tanto la posición de un punto P es definido por:
  - $P(t) = [x(t) \;\; y(t)]$

Paramétricas

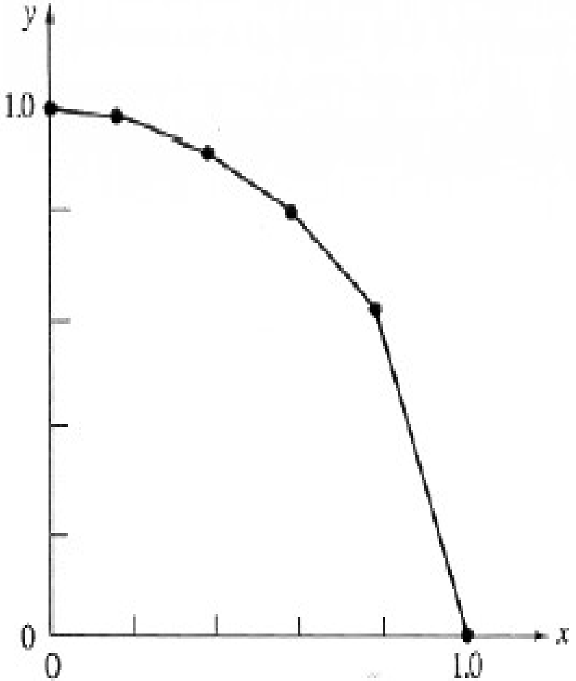
- La derivada o vector tangente a al curva es:
  - $P'(t) = [x'(t) \;\; y'(t)]$

- La inclinación de la curva esta dada por :
  - $dx/dy = dx/dt/dy/dt = x'(t) / y'(t)$

Observaciones

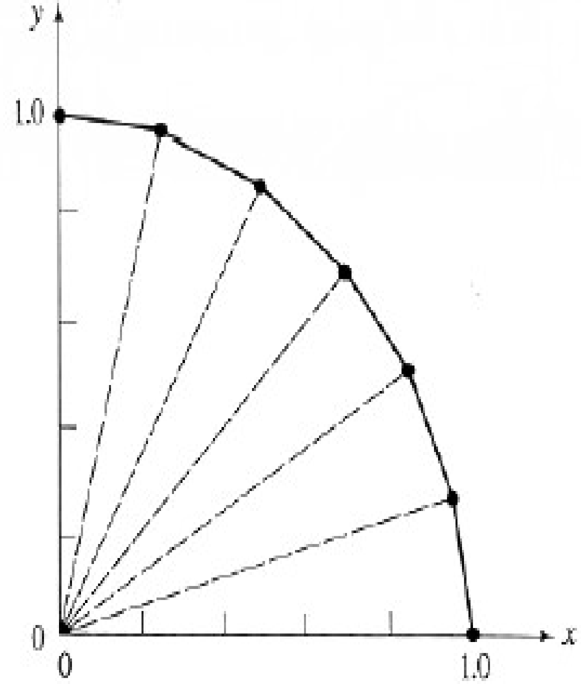
- Las curvas paramétricas es adecuada para representar curvas cerradas
- La forma paramétrica es independiente del sistema de coordenadas
- Determinar un punto en una curva es trivial en el caso de la representación explicita, para la paramétrica es iterada

Observaciones



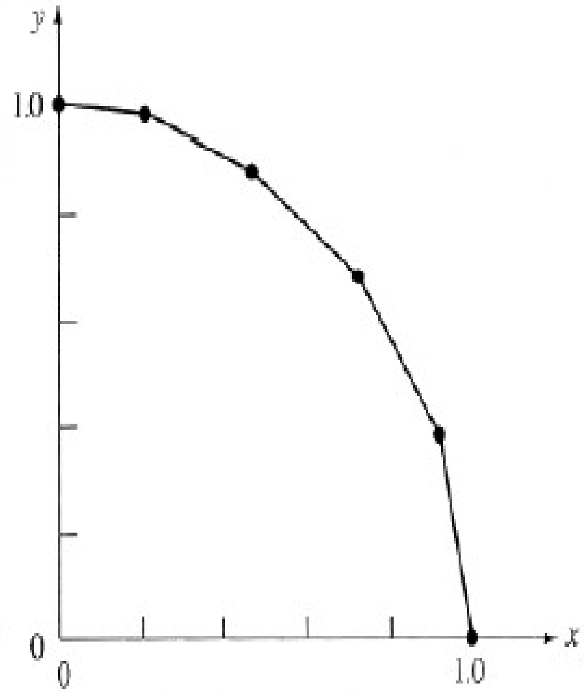
$y = +\sqrt{1 - x^2} \quad 0 \leq x \leq 1$

(a)



$x = \cos\theta \quad y = \sin\theta \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$

(b)

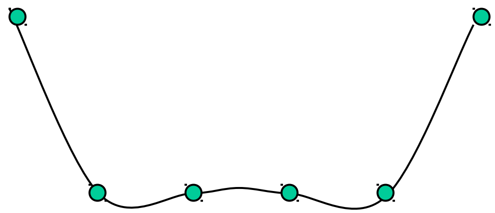


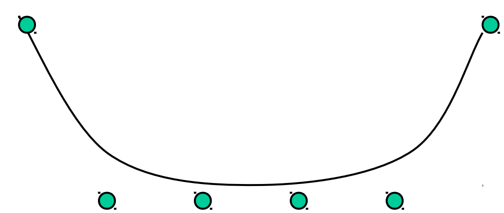
$x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad y = \dfrac{2t}{1 + t^2} \quad 0 \leq t \leq 1$

(c)

Interpolación x Aproximación

- Es natural querer modelar una curva suave que pase por un conjunto de puntos dados
- Si la curva deseada es polinomial, llamamos tal curva de *interpolación polinomial lagrangeana*
- Entretanto, el resultado no siempre es el esperado (oscilaciones)
- Es mas común querer curvas que "pasen cerca" de los puntos dados, esto es, *aproximaciones*

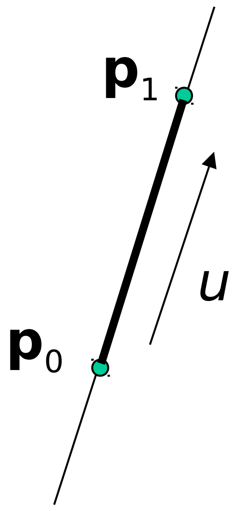




Algoritmo de De Casteljau

- Suponga que queremos aproximar una curva polinomial entre dois puntos $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$
- A solución natural es un segmento de recta que pase por $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$ cuya parametrización mas comun es:

  $\mathbf{p}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_0 + u\,\mathbf{p}_1$
- Podemos pensar en $\mathbf{p}(u)$ como una media ponderada entre $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_1$
- Observe que los polinomios $(1 - u)$ y u suman 1 para cualquier valor de u
  - Son llamados de funciones de mezcla (*blending functions*)



Algoritmo de De Casteljau

- Para generalizar la idea para tres pontos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ consideramos primeramente los segmentos de recta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$

  $\mathbf{p}_{01}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_0 + u\,\mathbf{p}_1$

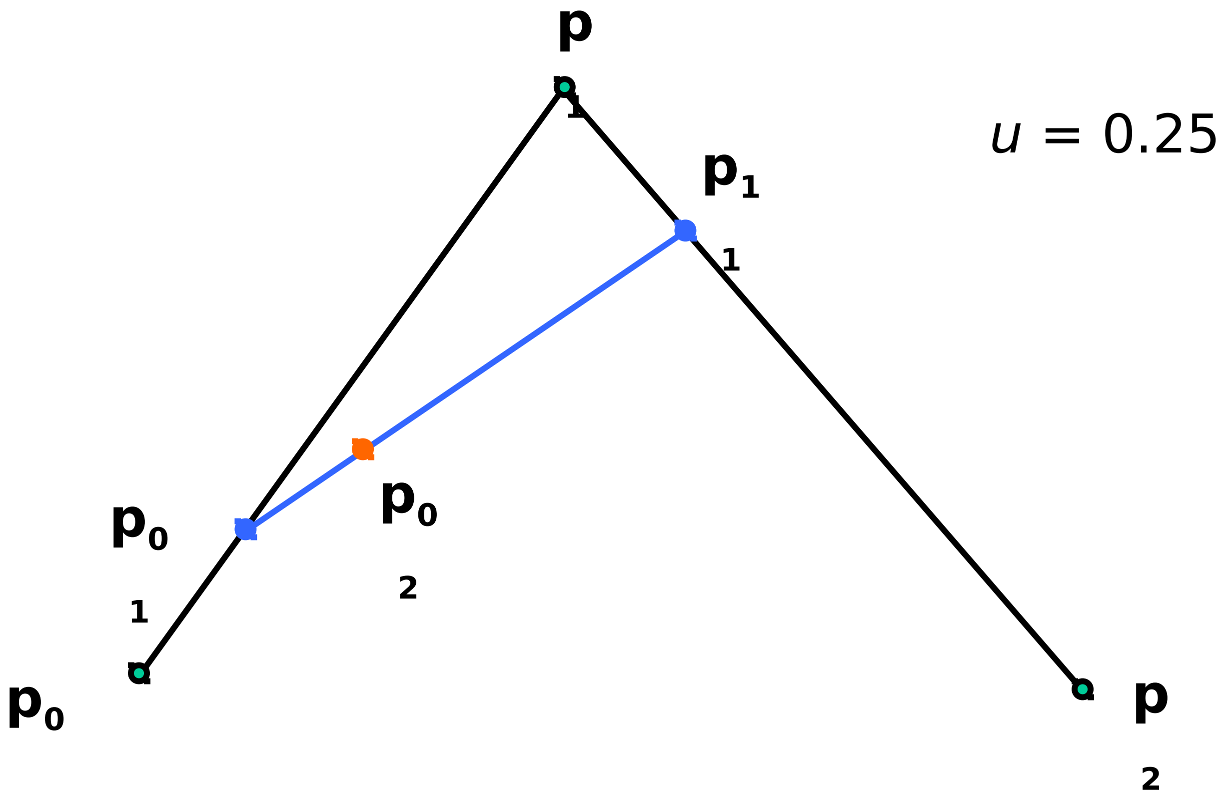
  $\mathbf{p}_{11}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_1 + u\,\mathbf{p}_2$

- Podemos ahora realizar una interpolación entre $\mathbf{p}_{01}(u)$ y $\mathbf{p}_{12}(u)$

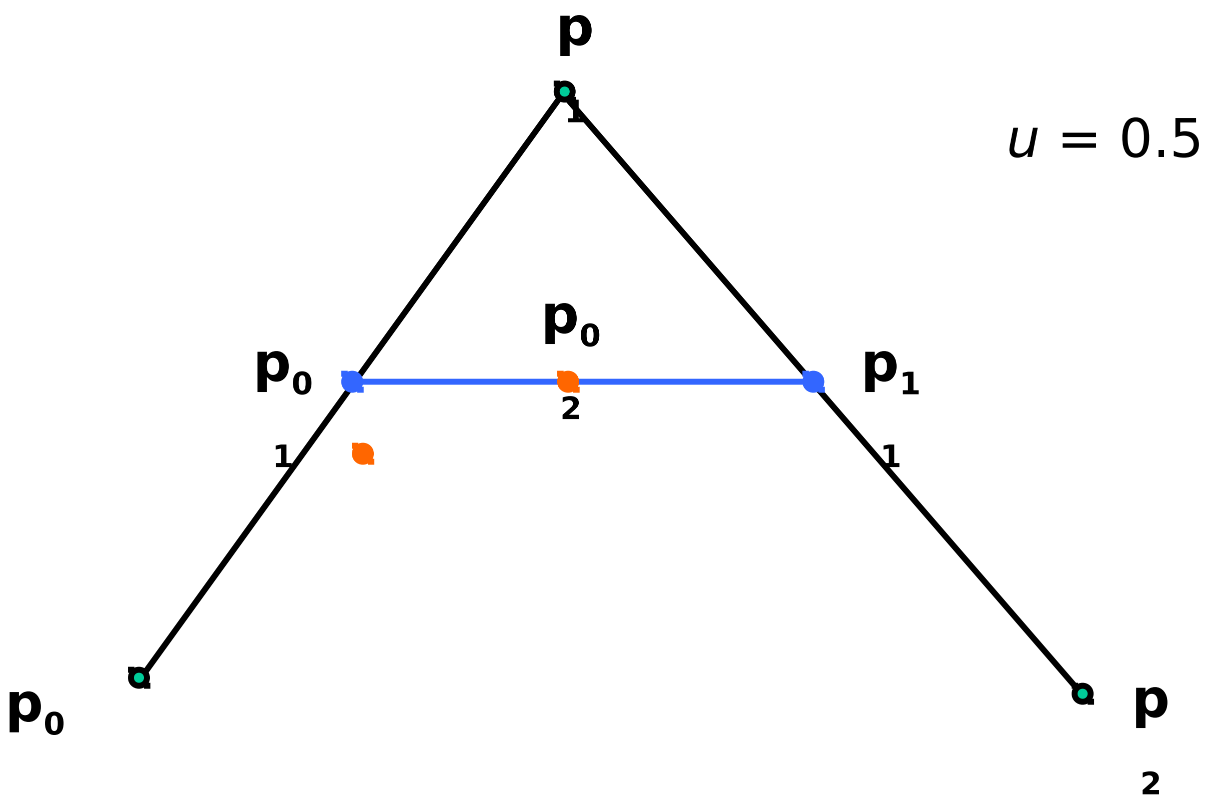
  $\mathbf{p}_{02}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_{01}(u) + u\,\mathbf{p}_{11}(u)$

  $= (1 - u)^2\,\mathbf{p}_0 + 2\,u\,(1 - u)\,\mathbf{p}_1 + u^2\,\mathbf{p}_2$

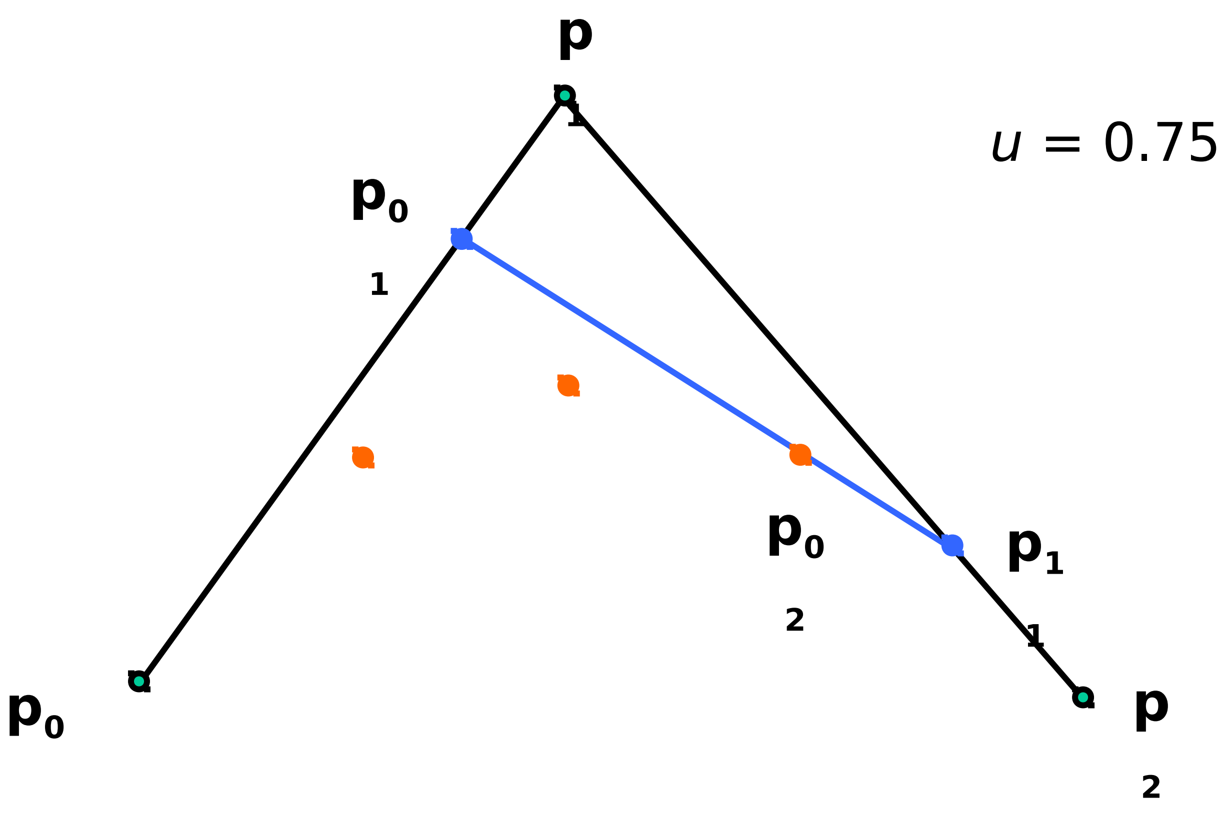
Algoritmo de De Casteljau



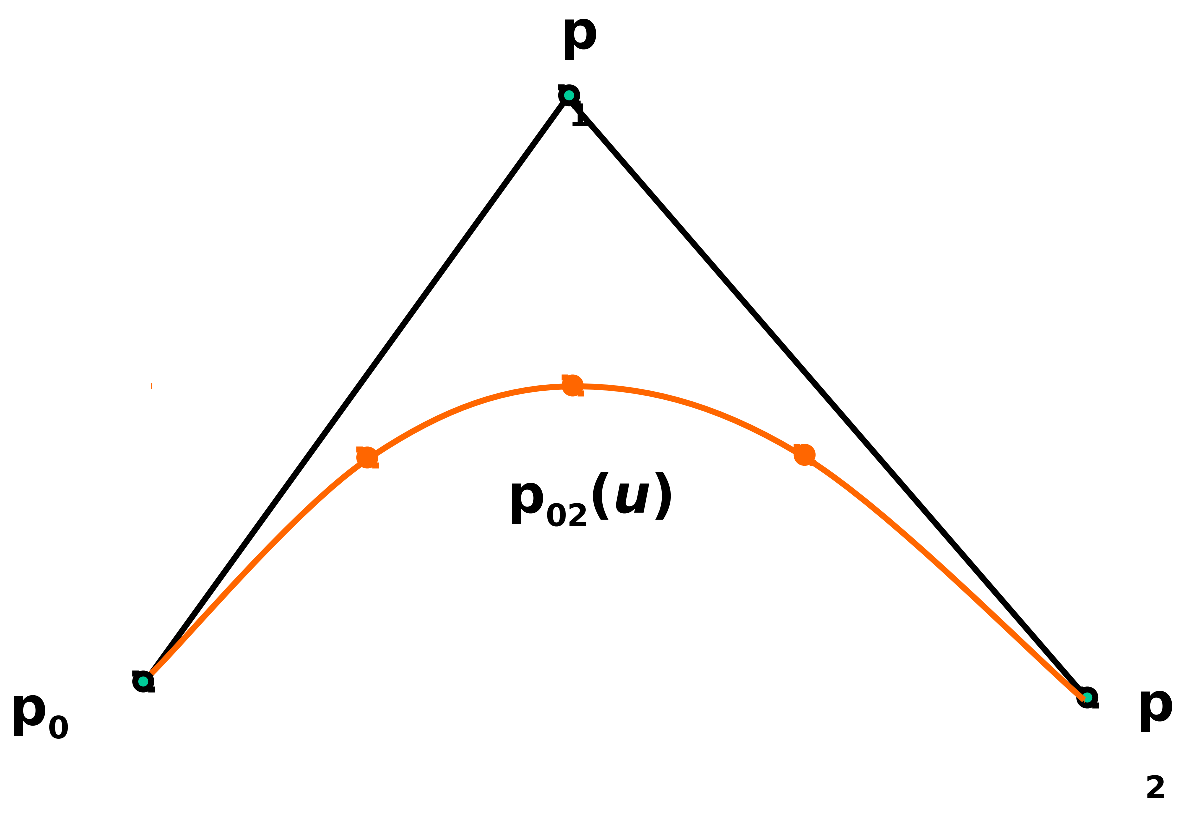
Algoritmo de De Casteljau



Algoritmo de De Casteljau



Algoritmo de De Casteljau



Algoritmo de De Casteljau

- La curva obtenida puede ser entendida como la “mezcla” de los pontos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ por intermedio de tres funciones cuadráticas:
  - $b_{02}(u) = (1 - u)^2$
  - $b_{12}(u) = 2u(1 - u)$
  - $b_{22}(u) = u^2$
- Aplicando una vez mas la idea podemos definir una cúbica por 4 puntos

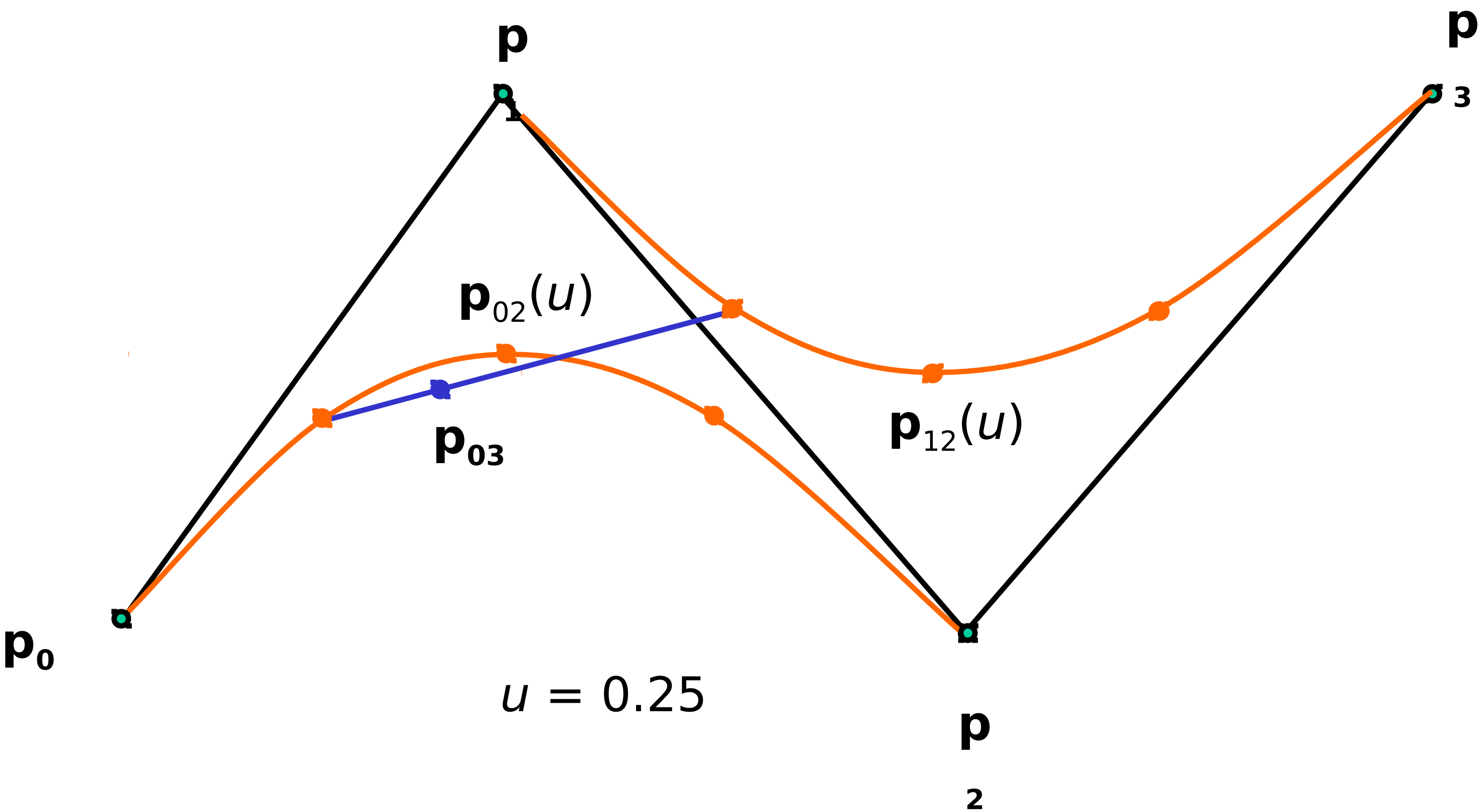
$$\mathbf{p}_{02}(u) = (1 - u)^2\,\mathbf{p}_0 + 2\,u\,(1 - u)\,\mathbf{p}_1 + u^2\,\mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p}_{12}(u) = (1 - u)^2\,\mathbf{p}_1 + 2\,u\,(1 - u)\,\mathbf{p}_2 + u^2\,\mathbf{p}_3$$

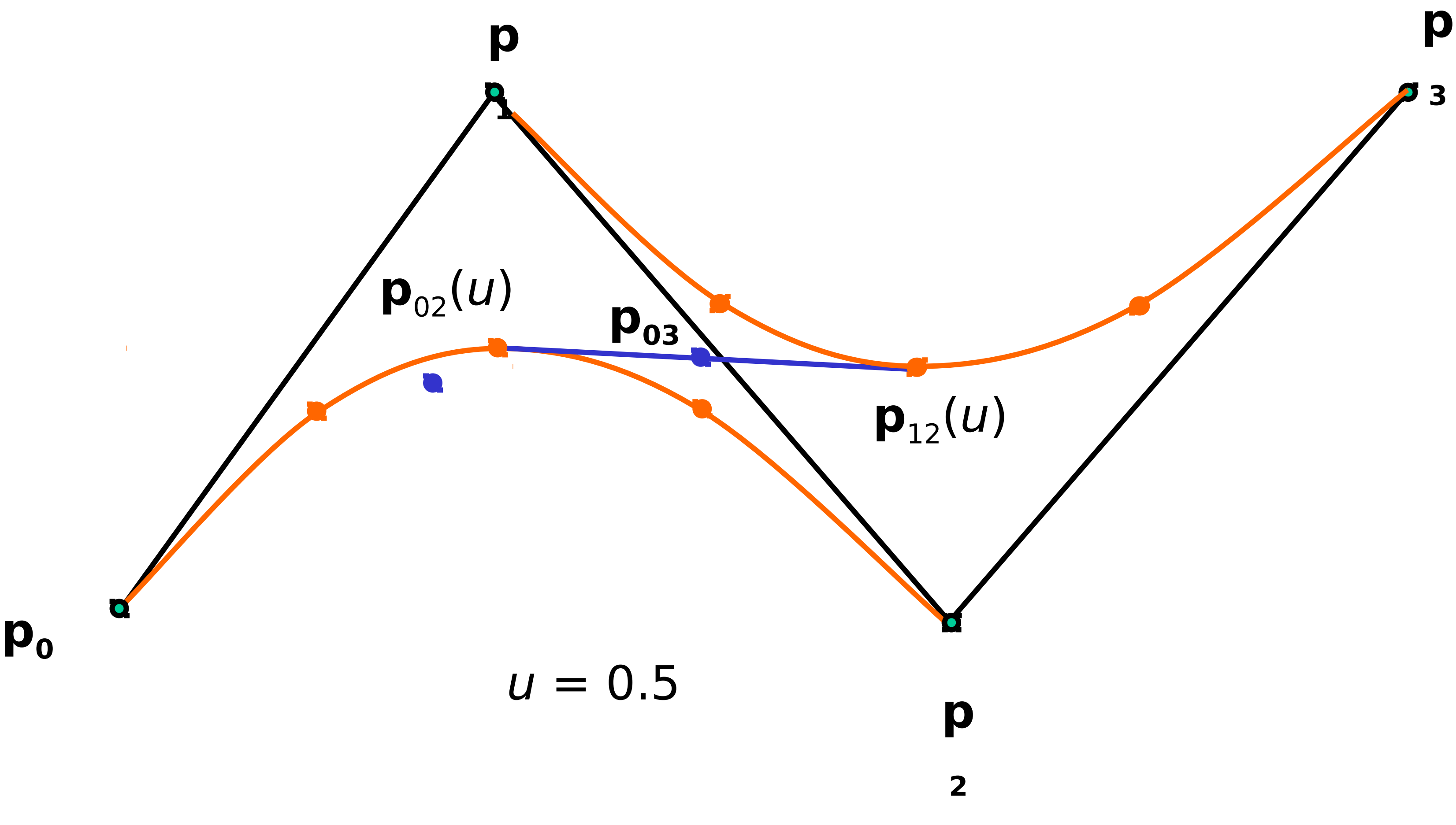
$$\mathbf{p}_{03}(u) = (1 - u)\,\mathbf{p}_{02}(u) + u\,\mathbf{p}_{12}(u)$$

$$= (1 - u)^3\,\mathbf{p}_0 + 3\,u\,(1 - u)^2\,\mathbf{p}_1 + 3\,u^2\,(1 - u)\,\mathbf{p}_2 + u^3\,\mathbf{p}_3$$

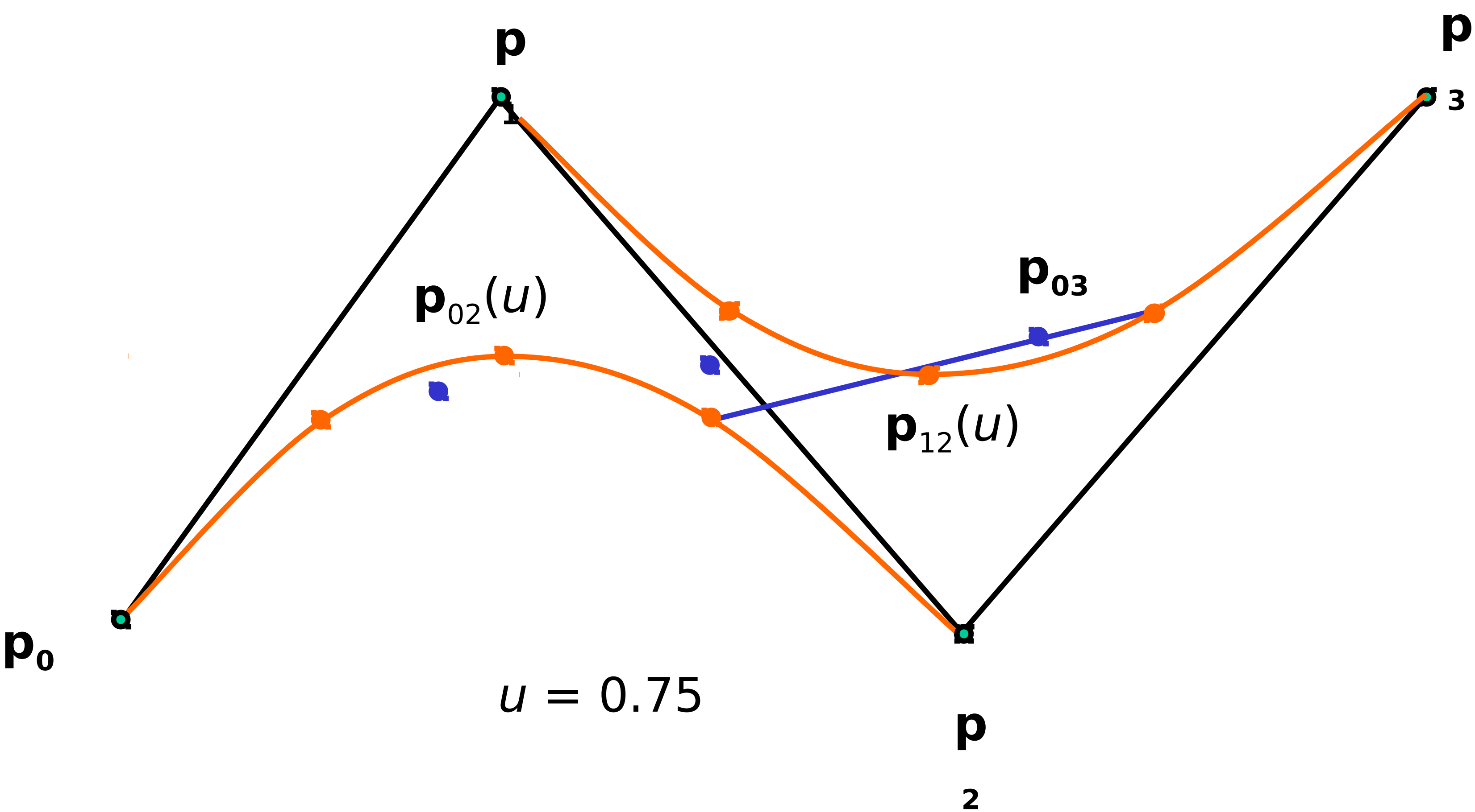
Algoritmo de De Casteljau



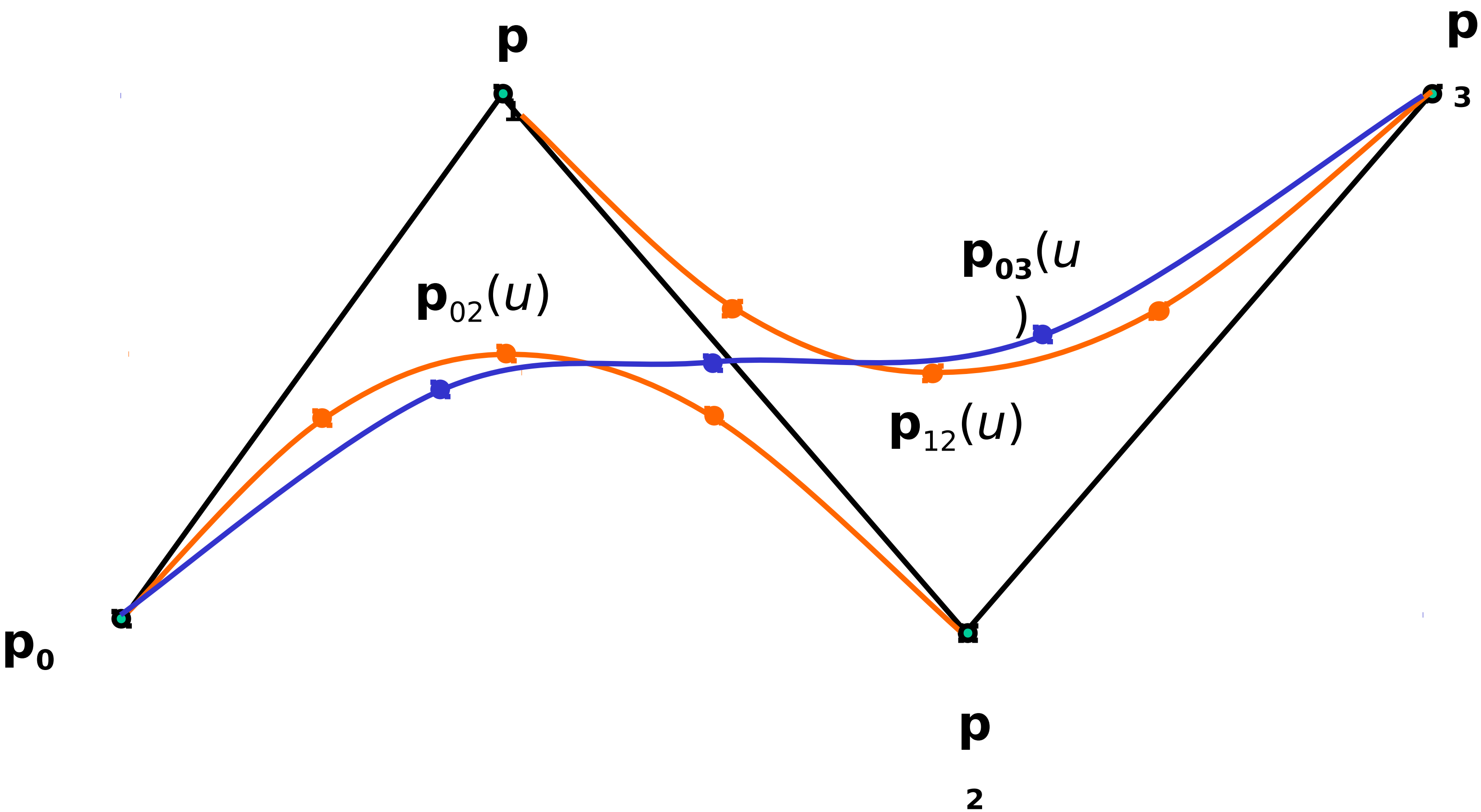
Algoritmo de De Casteljau



Algoritmo de De Casteljau



Algoritmo de De Casteljau



Algoritmo de De Casteljau

- Nuevamente tenemos una curva dada por la suma de 4 funciones de mezcla (ahora cúbicas), cada una multiplicada por uno de los 4 puntos
  - $b_{03}(u) = (1 - u)^3$
  - $b_{13}(u) = 3\, u\, (1 - u)^2$
  - $b_{23}(u) = 3\, u^2\, (1 - u)$
  - $b_{33}(u) = u^3$
- En general, una curva de grado *n* puede ser construída de esta forma y será expressa por

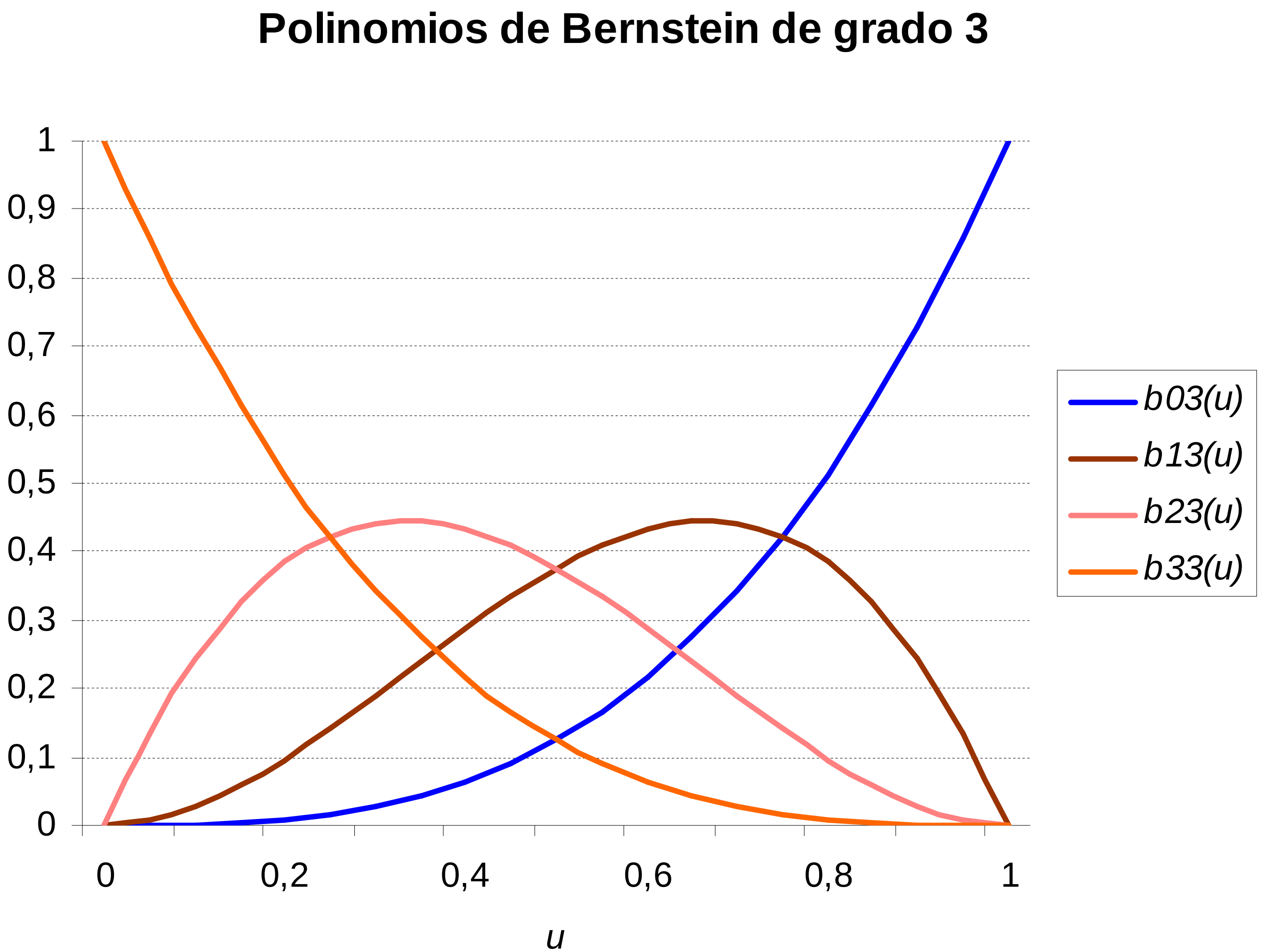
$$\mathbf{p}_{0n}(u) = \sum_{j=0}^{n} b_{jn}(u)\, \mathbf{p}_j$$

Curvas de Bézier e Polinomios de Bernstein

- Las curvas construídas por el algoritmo de De Casteljau son conocidas como *curvas de Bézier* y las funciones de mezcla son llamadas de *base Bézier* o *polinômios de Bernstein*
- Observamos que los polinómios de Bernstein de grado n tiene como forma general $b_{i\,n}(u) = c_i\, u^i\, (1 - u)^{n-i}$
- Si escribimos las constantes c_i para los diversos polinomios, tendremos
  - 1º grado: 1 1
  - 2º grado: 1 2 1
  - 3º grado: 1 3 3 1
  - 4º grado: 1 4 6 4 1
- Vemos que el patrón de formación corresponde al *Triangulo de Pascal* y porlo tanto, podemos escribir

$$b_{i\,n}(u) = \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i}$$

Polinomios de Bernstein



Forma Matricial de la Base Bézier

- Podemos escribir la ecuación para una curva de Bézier cúbica en la forma

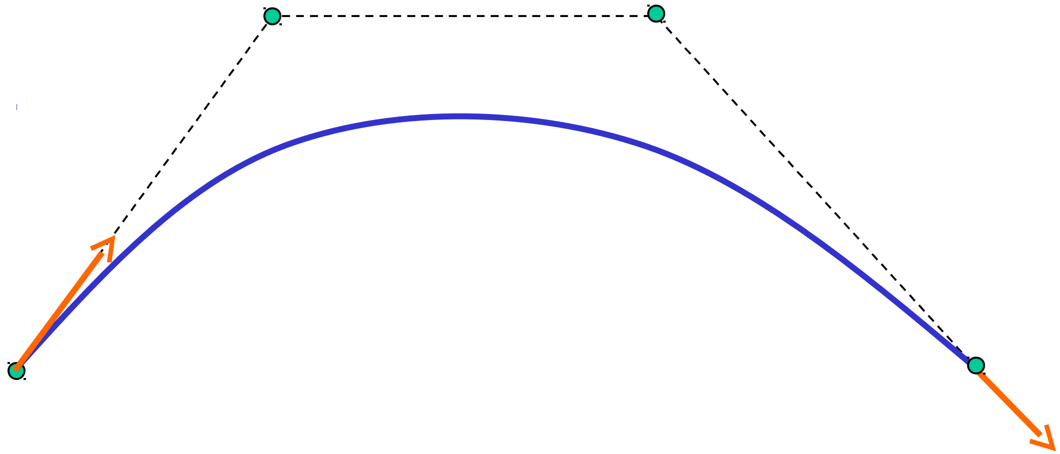
$$\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}_{03}(u) = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3]\ \mathbf{M}_B \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

- Donde M es la matriz de coeficientes de Bézier

$$\mathbf{M}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades de Curva de Bézier

- Continuidad infinita (todas las derivadas son contínuas)
- El grado de la curva (del polinomio) esta dado por el número de puntos del polígono de control menos 1
- La curva de Bézier está contenida en el lado convexo del polígono de control
  - Los polinomios de Bernstein suman 1 para cualquier *u*
- La curva interpola el primer y último punto del polígono de control



Propriedades de la Curva de Bézier

- Las tangentes a la curva en $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_n$ tinen la direción de los segmentos de recta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_{n\text{-}1}\mathbf{p}_n$, respectivamente
  - Para cubicas, las derivadas son $3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$ y $3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$
- Cualquier linea recta intercepta la curva tantas o menos veces cuando intercepta el polígono de control
  - No puede oscilar demasiadamente
- Transformar los puntos de control (transf. afin) y dibujar la curva es equivalente a dibujar la curva transformada