Power iteration

작성일시	@April 8, 2022 3:17 PM
Keywords	
생성자	김 김하연
Note	
최종 편집	@October 7, 2022 1:24 AM
속성	
최종편집자	김 김하연

* power iteration

고유값과 고유벡터 ← 고유벡터끼리는 서로 직교 → 내적 0, 곱은 0

$Av = \lambda v \quad (|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots)$

↳ ⊕ 임의 벡터 $x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$ (고유벡터의 합으로 표현가능!)

↳ $Ax = \lambda_1 x_1 v_1 + \lambda_2 x_2 v_2 + \cdots + \lambda_n x_n v_n$

A를 k번 곱함

$A^k x = \lambda_1^k x_1 v_1 + \lambda_2^k x_2 v_2 + \cdots + \lambda_n^k x_n v_n$

$A^k x = \lambda_1^k \left[x_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2 v_2 + \cdots \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n v_n \right]$

$\lim_{k \to \infty} A^k x = \lambda_1^k x_1 v_1$

λ_1이 가장 큼!

↳ 이 방식을 반복하면서 절댓값이 가장 큰 값을 구할수 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

(1) 초기값 $\vec{x_0} = (0\ ,\ 1)^T$을 가지고 멱수법(power method)을 4번 적용하여 (즉, $\vec{x_4}$까지 계산하여), 절대값이 가장 큰 A의 고유값(eigenvalue)과 그에 대응하는 고유벡터(eigenvector)의 근사값을 각각 구하시오.

답: $\boxed{12.9667, \quad (0.8325\ ,\ 1)^T}$

$$\vec{x_1} = A\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix} 0.625 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ||\vec{x_1}||_\infty = 8,$$

$$\vec{x_2} = A\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 94 \end{pmatrix} \approx 94 \cdot \begin{pmatrix} 0.7979 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ||\vec{x_2}||_\infty = 94,$$

$$\vec{x_3} = A\vec{x_2} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 75 \\ 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 995 \\ 1202 \end{pmatrix} \approx 1202 \cdot \begin{pmatrix} 0.8278 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ||\vec{x_3}||_\infty = 1202,$$

$$\vec{x_4} = A\vec{x_3} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 995 \\ 1202 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12975 \\ 15586 \end{pmatrix} \approx 15586 \cdot \begin{pmatrix} 0.8325 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad ||\vec{x_4}||_\infty = 15586.$$

$\frac{||\vec{x_4}||_\infty}{||\vec{x_3}||_\infty} = \frac{15586}{1202} \approx 12.9667$이므로, 가장 큰 고유값과, 해당하는 고유벡터의 근사값은 각각 12.9667, $(0.8325\ ,\ 1)^T$이다. 참고로, 실제 값들은 각각 13, $\left(\frac{5}{6}, 1\right)^T \approx (0.8333\ ,\ 1)^T$이다.

즉, 대각행렬 A가 주어졌을 때, 가장 큰(절댓값으로) 고윳값을 찾는 방법

$$b_{k+1} = \frac{Ab_k}{||Ab_k||}$$

L1 norm : 각 벡터의 원소들의 차이들의 합(직선거리 x)