Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

երկրորդ մաս

ԵՐԵՎԱՆ 2012

Խմբագիրներ՝

Ա. Ա. Սահակյան
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դեկան,
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ

Մ. Ս. Մարտիրոսյան
ԵՊՀ մաթեմատիկական անալիզի և ֆունկցիաների տեսության
ամբիոնի դոցենտ,
ֆիզ.-մաթ. գիտությունների թեկնածու

Դասագիրքը նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաթեմատիկական, բնագիտական և տեխնիկական մասնագիտությունների համար: Տեսական հարուստ նյութից զատ, այն աչքի է ընկնում նաև լուծված օրինակների բազմազանությամբ, ինչը հնարավորություն է տալիս դասագրքից օգտվելու նշված մասնագիտությունների առկա և հեռակա բաժիններում սովորող բոլոր ուսանողներին:

ԽՄԲԱԳԻՐՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Վ. Խ. Մուսոյանի հեղինակած մաթեմատիկական անալիզի դասագրքի առաջին մասը, որը լույս տեսավ 2009 թվականին, անմիջապես գտավ իր ընթերցողին: Այդ ընթերցողն առաջին հերթին հայ ուսանողն էր, որին ընծայվեց մայրենիով գրված ու մաթեմատիկական անալիզի ժամանակակից պահանջներին բավարարող մի դասագիրք:

Առաջին մասի հրատարակումից կարճ ժամանակ անց պրոֆեսոր Մուսոյանի անսպասելի վախճանը մեզ միայնակ թողեց դասագրքի երկրորդ մասի ձեռագրերի հետ: Դրանք խմբագրելիս փորձել ենք առավելագույնս պահպանել հեղինակի շարադրման ոճը:

Հատուկ երախտագիտություն ենք հայտնում մեր գործընկերոջը՝ Միքայել Պողոսյանին, ով զգալի ավանդ ունի ինչպես գրքում տեղ գտած գծագրերի ձևավորման, այնպես էլ վերջնական խմբագրման գործում:

X ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ՇԱՐՔԵՐ

§1. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

1. Կետային զուգամիտություն և հավասարաչափ զուգամիտություն:

Դիցուք $\{f_n\}$-ը $X \subset R$ բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների հաջորդականություն է՝

$$f_n : X \to R, \ \ n = 1,2,...,$$

կամ, այլ կերպ ասած, $f_n(x)$-ը $X \times N$ դեկարտյան արտադրյալի վրա որոշված երկու փոփոխականի ֆունկցիա է, որտեղ $x \in X$, $n \in N$: Այդպիսի հաջորդականությունը կոչվում է X բազմության վրա որոշված *ֆունկցիոնալ հաջորդականություն*:

Կասենք f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $x_0 \in X$ կետում ձգտում է A-ի (A-ն կարող է լինել նաև $\pm\infty$), կամ՝ f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականության սահմանը x_0 կետում A-ն է, եթե $f_n(x_0)$ թվային հաջորդականության սահմանը A-ն է՝

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = A :$$

Կասենք f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա *կետորեն զուգամիտում է* f ֆունկցիային, եթե X բազմության յուրաքանչյուր x կետում տեղի ունի

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{1.1}$$

առնչությունը: Այդ դեպքում f-ը կոչվում է f_n հաջորդականության *սահմանային ֆունկցիա կամ սահման*:

Թվային հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, (1.1) սահմանային առնչությունը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $x \in X$ կետի և յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի x-ից և ε-ից կախված $n_0(x,\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

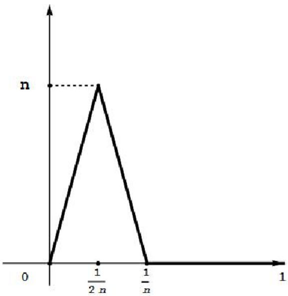
$$n > n_0(x,\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon : \qquad (1.1')$$

Օրինակ 1: $f_n(x) = x^n$ հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում կետորեն զուգամիտում է

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

ֆունկցիային:

Օրինակ 2: $f_n(x)$ հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում որոշենք հետևյալ կերպ. $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ և $f_n(1) = 0$, իսկ $\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ և $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ հատվածների վրա ֆունկցիան գծային է:



Այս հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում կետորեն զուգամիտում է $f(x) \equiv 0$ ֆունկցիային: Իսկապես. $0 < x_0 \le 1$ դեպքում՝

$$n > \frac{1}{x_0} \Rightarrow f_n(x_0) = 0,$$

իսկ $x_0 = 0$ դեպքում՝ $f_n(x_0) = 0$, $n = 1,2,...$:

Սահմանում: *Կասենք f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ (կախված միայն ε-ից), այնպիսին, որ $n > n_0(\varepsilon)$ դեպքում $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի ունի X բազմությանը պատկանող բոլոր x կետերի համար՝*

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X : \qquad (1.2)$$

Պարզ է, որ հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականությունը զուգամիտում է նաև կետորեն (նույն սահմանին): Այսուհետև այդ երկու զուգամիտությունները զանազանելու համար կետորեն զուգամիտության դեպքում կգրենք

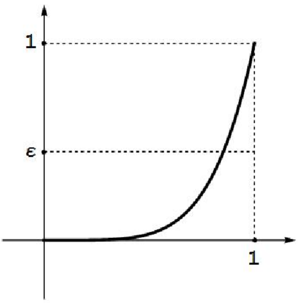
$$f_n(x) \to f(x), \quad x \in X,$$

իսկ հավասարաչափ զուգամիտության դեպքում՝

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \; x \in X:$$

Օրինակ 3: $f_n(x) = x^n$ հաջորդականությունը $[0,1)$ միջակայքում զուգամիտում է $f(x) \equiv 0$ ֆունկցիային, սակայն զուգամիտությունը հավասարաչափ չէ:

Իրոք, եթե վերցնենք $0 < \varepsilon < 1$, այդ դեպքում (1.2) պայմանը չի բավարարվի: Ավելին,



$$x^n < \varepsilon, \quad x \in [0,1)$$

պայմանը չի բավարարվի ոչ մի n-ի դեպքում, որովհետև

$$\lim_{x \to 1} x^n = 1:$$

Մյուս կողմից, ցանկացած $[0,a]$ հատվածում ($0 < a < 1$) զուգամիտությունը հավասարաչափ է, որովհետև

$$x \in [0,a] \Rightarrow x^n \le a^n < \varepsilon, \quad n > n_0:$$

Օրինակ 4: Օրինակ 2-ում կառուցած f_n հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում զրոյին զուգամիտում է ոչ հավասարաչափ, որովհետև $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, որի պատճառով (1.2) պայմանը չի բավարարվում:

Մյուս կողմից, ցանկացած $[\delta,1]$ հատվածում ($0 < \delta < 1$) զուգամիտությունը հավասարաչափ է, որովհետև

$$n > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f_n(x) = 0, \quad x \in [\delta,1]:$$

Դիցուք $\{u_n(x)\}$-ը X բազմության վրա որոշված ֆունկցիոնալ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{1.3}$$

շարքը կոչվում է *ֆունկցիոնալ շարք*, իսկ $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը կոչվում է (1.3) շարքի *մասնակի գումարների հաջորդականություն*:

Ֆունկցիոնալ շարքի կետորեն զուգամիտությունը և հավասարաչափ զուգամիտությունը սահմանվում են այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության միջոցով:

Սահմանում: *Կասենք (1.3) ֆունկցիոնալ շարքը X բազմության վրա կետորեն կամ հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, եթե $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ հաջորդականությունը X-ի վրա համապատասխանաբար կետորեն կամ հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$-ին:*

Թե՛ կետային և թե՛ հավասարաչափ զուգամիտության դեպքում $f(x)$-ն անվանում են (1.3) շարքի գումար և երկու դեպքում էլ գրում են՝

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,, \quad x \in X\,,$$

իսկ զուգամիտության տեսակը (կետորեն կամ հավասարաչափ) լրացուցիչ նշում են:

Եթե f_n-ը նախօրոք տրված կամայական ֆունկցիոնալ հաջորդականություն է, ապա

$$f_1(x) + \big(f_2(x) - f_1(x)\big) + \cdots + \big(f_n(x) - f_{n-1}(x)\big) + \cdots \tag{1.4}$$

շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը f_n-ն է: Ուստի, օգտվելով կետորեն կամ հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականությունների օրինակներից, (1.4)-ի միջոցով կարող ենք կառուցել համապատասխան շարքերի օրինակներ:

2. Հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը:

Թեորեմ 1.1 (Հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը հաջորդականությունների համար) : *Որպեսզի f_n հաջորդականությունը X բազմության վրա լինի հավասարաչափ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ (կախված միայն ε -ից), այնպիսին, որ*

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|f_{n+m}(x)-f_n(x)\right|<\varepsilon\ ,\ \ \forall x\in X\ ,\ \ m=1,2,...\ : \qquad (1.5)$$

► (1.5) պայմանի անհրաժեշտությունն անմիջապես բխում է (1.2)-ից:

Բավարարություն: Նախ նկատենք, որ (1.5)-ից հետևում է f_n հաջորդականության կետորեն զուգամիտությունը (X -ի վրա): Իրոք, երբ $x\in X$ կետը ֆիքսված է, (1.5)-ը դառնում է $f_n(x)$ թվային հաջորդականության զուգամիտության Կոշիի պայմանը: Ուստի, Կոշիի պայմանի բավարարության շնորհիվ, $f_n(x)$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է: Այդ հաջորդականության սահմանը նշանակելով $f(x)$ -ով՝ կստանանք

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\ ,\ \ x\in X$$

առնչությունը: Այնուհետև, (1.5)-ում x -ը և n -ը ֆիքսենք, իսկ m -ը ձգտեցնենք անվերջի: Կստանանք՝

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|f(x)-f_n(x)\right|\le\varepsilon\ ,\ \ \forall x\in X : ■$$

Թեորեմ 1.1' (Հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը շարքերի համար): *Որպեսզի (1.3) ֆունկցիոնալ շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ*

$$n>n_0(\varepsilon)\Rightarrow\left|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+m}(x)\right|<\varepsilon\ ,\ \forall x\in X\ ,\ \ m=1,2,...: \qquad (1.6)$$

► Քանի որ (1.3) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը նրա մասնակի գումարների հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությունն է, (1.5)-ի մեջ տեղադրելով $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$, կստանանք (1.6)-ը:

■

§2. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՇԱՐՔԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

1. Վայերշտրասի (մաժորանտով) հայտանիշը:

Թեորեմ 2.1: *Եթե գոյություն ունի* $\lambda_n > 0$ *թվային հաջորդականություն, այնպիսին, որ*

ա) $|u_n(x)| \le \lambda_n$, $x \in X$, $n \in N$,

բ) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$,

ապա $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *շարքը* X *-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:*

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ թվային շարքը կոչվում է $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքի *մաժորանտ*:

► Թվային շարքերի վերաբերյալ Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, բ)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+m} < \varepsilon \,, \ \forall m \in N \, : \tag{2.1}$$

Մյուս կողմից, ա)-ից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} &|u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+m}(x)| \le |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+m}(x)| \le \\ &\le \lambda_{n+1} + \cdots + \lambda_{n+m} \ , \ \ \forall x \in X \, : \end{aligned} \tag{2.2}$$

Քանի որ (2.1)-ից և (2.2)-ից հետևում է (1.6)-ը, ուստի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X բազմության վրա: ■

Օրինակ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^2}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է R -ի վրա, քանի որ $\left|\frac{\sin nx}{1+n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ և $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$:

Լրացում: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը կոչվում է *նորմալ զուգամետ* X բազմության վրա, եթե $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է այդ բազմության վրա: Կոշիի սկզբունքից հետևում է, որ նորմալ զուգամետ շարքը նաև բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է: Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ (տե՛ս §4):

Վայերշտրասի հայտանիշն ապացուցելիս մենք ապացուցեցինք նաև, որ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը նորմալ զուգամետ է X-ի վրա:

<u>2. Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները:</u>

Սահմանում: $\{f_n\}$ *ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը կոչվում է հավասարաչափ սահմանափակ* X *բազմության վրա, եթե գոյություն ունի* $M > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$|f_n(x)| \le M\ ,\quad x \in X\ ,\quad n \in N\ :$$

Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները վերաբերում են

$$\sum a_n(x) b_n(x) \tag{2.3}$$

տեսքի շարքերին, որտեղ $b_n(x)$ հաջորդականությունը նվազող է՝ $b_{n+1}(x) \le b_n(x)$, $x \in X$, $n \in N$:

Թեորեմ 2.2 (Աբելի հայտանիշը): *Եթե* $\sum a_n(x)$ *շարքը* X *բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ* $b_n(x)$ *հաջորդականությունը նվազող է և հավասարաչափ սահմանափակ* X *բազմության վրա, ապա (2.3) շարքը* X *բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:*

Թեորեմ 2.3 (Դիրիխլեի հայտանիշը): *Եթե* $\sum a_n(x)$ *շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է* X *բազմության վրա, իսկ* $b_n(x)$ *հաջորդականությունը նվազող է և հավասարաչափ ձգտում է զրոյի* X*-ի վրա, ապա (2.3) շարքը* X *բազմության վրա զուգամիտում է հավասարաչափ:*

Ինչպես թվային շարքերի դեպքում, այնպես և այստեղ, Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները ապացուցվում են Աբելի ձևափոխության միջոցով (կիրառելով Կոշիի սկզբունքը):

Աբելի ձևափոխության համաձայն, ունենք

$$\sum_{n=p}^{q} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=p}^{q-1} A_n^{(p)}(x)(b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_q^{(p)}(x)b_q(x)\,, \qquad (2.4)$$

որտեղ $A_n^{(p)}(x) = a_p(x) + \cdots + a_n(x)$, $p \le n \le q$, $x \in X$:

► *(Աբելի հայտանիշի ապացույցը)* Քանի որ $\sum a_n(x)$ շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ, ապա Կոշիի սկզբունքի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$p > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|A_n^{(p)}(x)\right| < \varepsilon\,, \quad x \in X: \qquad (2.5)$$

Քանի որ $b_n(x)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|b_n(x)\right| \le M\,, \quad x \in X\,, \quad n \in N: \qquad (2.6)$$

Հաշվի առնելով (2.5)-ը և (2.6)-ը՝ (2.4)-ից կստանանք.

$$p > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{n=p}^{q} a_n(x)b_n(x)\right| \le 3M\varepsilon\,, \quad x \in X:$$

Կոշիի սկզբունքի համաձայն, (2.3) շարքը X-ի վրա զուգամիտում է հավասարաչափ: ■

► *(Դիրիխլեի հայտանիշի ապացույցը)* Քանի որ $\sum a_n(x)$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|A_n^{(p)}(x)\right| \le M\,, \quad p \le n \le q\,, \; x \in X: \qquad (2.7)$$

Քանի որ $b_n(x)$-ը նվազող է և $b_n(x) \rightrightarrows 0$, $x \in X$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow 0 \le b_n(x) < \varepsilon\,, \quad x \in X\,: \qquad (2.8)$$

Հաշվի առնելով (2.7)-ը և (2.8)-ը՝ (2.4)-ից կստանանք

$$p > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^{q} a_n(x) b_n(x) \right| \le M\varepsilon\,, \quad x \in X\,:$$

Կոշիի սկզբունքի համաձայն, (2.3) շարքը X-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է: ■

Բերենք Դիրիխլեի հայտանիշի կիրառության մի օրինակ:

Թեորեմ 2.4: *Եթե* $b_n \downarrow 0$, *ապա* $R \setminus \{2\pi n : n \in Z\}$ *բազմության կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա*

$$\sum b_n \sin nx \quad \text{և} \quad \sum b_n \cos nx$$

շարքերը զուգամիտում են հավասարաչափ:

► Ապացուցենք այդ շարքերից միայն առաջինի հավասարաչափ զուգամիտությունը: Ունենք (տե՛ս IX.3.4)՝

$$|\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx| \le \frac{1}{|\sin x/2|}\,, \quad x \ne 2\pi n\,:$$

Քանի որ $\dfrac{1}{\sin x/2}$ ֆունկցիան անընդհատ է $R \setminus \{2\pi n : n \in Z\}$ բազմության վրա, ապա, Վայերշտրասի առաջին թեորեմի համաձայն, այդ բազմության կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա այն սահմանափակ է: Այսինքն՝ $\sum \sin nx$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է նշված բազմությունների վրա:

Մյուս կողմից, b_n-ը x-ից կախված չէ, ուստի նրա համար զուգամիտությունը և հավասարաչափ զուգամիտությունը նույնն են: Մնում է կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը: ■

§3. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՇԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ինչպես գիտենք, ֆունկցիաների վերջավոր գումարների համար ճիշտ են հետևյալ հատկությունները.

1^0. Անընդհատ ֆունկցիաների գումարն անընդհատ է:

2^0. Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների գումարը նույնպես ունի վերջավոր սահման, և գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին:

3^0. Ինտեգրելի ֆունկցիաների գումարը նույնպես ինտեգրելի է, և գումարի ինտեգրալը հավասար է գումարելիների ինտեգրալների գումարին:

4^0. Դիֆերենցելի ֆունկցիաների գումարը նույնպես դիֆերենցելի է, և գումարի ածանցյալը հավասար է գումարելիների ածանցյալների գումարին:

Մեր նպատակն է նման թեորեմներ ապացուցել անվերջ գումարների՝ ֆունկցիոնալ շարքերի համար: Նշենք, որ առանց լրացուցիչ պայմանների այդ հատկությունները ֆունկցիոնալ շարքերի համար ճիշտ չեն: Համապատասխան հակաօրինակները կբերվեն կոնկրետ հարցի ուսումնասիրման ժամանակ:

1. Ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհատությունը: Սկսենք հակաօրինակից, այսինքն՝ բերենք *ֆունկցիոնալ շարքի օրինակ, որի գումարելիները (անդամները) անընդհատ են, բայց գումարն անընդհատ չէ*:

$$x+(x^2-x)+\cdots+(x^n-x^{n-1})+\cdots\,,\ \ x\in[0,1] \qquad (3.1)$$

շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝ $f_n(x)=x^n$, ձգտում է

$$f(x)=\begin{cases}0,\ 0\le x<1\\ 1,\ x=1\end{cases} \qquad (3.2)$$

ֆունկցիային, երբ $n\to\infty$: Հետևաբար, (3.1) շարքի գումարը (3.2) ֆունկցիան է, որը $x=1$ կետում խզվում է:

Թեորեմ 3.1: *Եթե*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,,\ \ x\in X \qquad (3.3)$$

շարքի $u_n(x)$ անդամներն անընդհատ են X բազմության վրա և շարքը X-ի վրա զուգամիտում է հավասարաչափ, ապա շարքի գումարը՝ $f(x)$ ֆունկցիան, նույնպես անընդհատ է X-ի վրա:

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար այս թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 3.1$'$: *Եթե*

ա) $f_n \in C(X)$, $n \in N$, *բ)* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in X$,

ապա $f \in C(X)$ *:*

► Վերցնենք կամայական $x_0 \in X$ կետ և ապացուցենք f ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում: Ունենք՝

$$\begin{aligned} &\left|f(x)-f(x_0)\right| \le \left|f(x)-f_n(x)\right| + \\ &+\left|f_n(x)-f_n(x_0)\right| + \left|f_n(x_0)-f(x_0)\right|: \end{aligned} \tag{3.4}$$

բ)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|f(x)-f_{n_1}(x)\right| < \varepsilon,\ x \in X: \tag{3.5}$$

ա)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{c} |x-x_0|<\delta \\ x \in X \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(x_0)\right| < \varepsilon: \tag{3.6}$$

Հաշվի առնելով (3.5)-ը և (3.6)-ը՝ (3.4)-ի մեջ կվերցնենք $n = n_1$ և կստանանք՝

$$\left.\begin{array}{c} |x-x_0|<\delta \\ x \in X \end{array}\right\} \Rightarrow \left|f(x)-f(x_0)\right| < 3\varepsilon:$$

Թեորեմ 3.1$'$-ն ապացուցված է: ■

Թեորեմ 3.1-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.1$'$-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

Թեորեմ 3.1-ը հակադարձելի է հետևյալ իմաստով.

Թեորեմ 3.2 (Դինի): *Եթե*

ա) $K \subset R$ *կոմպակտ բազմություն է,* *բ)* $u_n(x) \geq 0$, $u_n \in C(K)$ *և*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\,, \quad x \in K \tag{3.7}$$

շարքը կետորեն զուգամետ է,

գ) $f \in C(K)$ *,*

ապա (3.7) շարքը K *-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է:*

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար Դինիի թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 3.2՛: *Եթե*

ա) $K \subset R$ *կոմպակտ բազմություն է,*

բ) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $x \in K$, $n \in N$; $f_n \in C(K)$ *և* $f_n(x) \to f(x)$, $x \in K$,

գ) $f \in C(K)$ *,*

ապա

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,, \quad x \in K \;: \tag{3.8}$$

► Նշանակենք $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$ և ապացուցենք, որ

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows 0\,, \quad x \in K\,, \tag{3.9}$$

ինչը համարժեք է (3.8)-ին:

բ)-ից հետևում է, որ $\varphi_n(x)$-ը նվազելով K-ի վրա կետորեն ձգտում է 0-ի: Հետևաբար, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի և $x \in K$ կետի համար գոյություն ունի $n_x \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\varphi_{n_x}(x) < \varepsilon \;: \tag{3.10}$$

Քանի որ φ_{n_x}-ը անընդհատ ֆունկցիա է, ապա գոյություն ունի x կետի Δ_x շրջակայք, այնպիսին, որ (3.10) անհավասարությունը բավարարվի $\Delta_x \cap K$ բազմության վրա՝

$$t \in \Delta_x \cap K \Rightarrow \varphi_{n_x}(t) < \varepsilon \;:$$

$\{\Delta_x\}$ բաց միջակայքերի ընտանիքը ծածկում է K կոմպակտ բազմությունը, հետևաբար, Բորելի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի K-ի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $\Delta_{x_1},...,\Delta_{x_p}$: Նշանակենք $n_0 = \max(n_{x_1},...,n_{x_p})$: Այդ դեպքում, φ_n հաջորդականության նվազելու հաշվին, կստանանք՝

$$n > n_0 \Rightarrow \varphi_n(t) < \varepsilon, \ \ t \in K,$$

ինչը համարժեք է (3.9)-ին: ■

Թեորեմ 3.2-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.2'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

§1, կետ 1-ում բերված օրինակները ցույց են տալիս, որ եթե Դինիի թեորեմի պայմաններից որևէ մեկը խախտվում է, ապա թեորեմի եզրակացությունը ճիշտ չէ:

<u>**2. Անդամ առ անդամ սահմանային անցում:**</u>

Թեորեմ 3.3: *Դիցուք a-ն X բազմության կուտակման կետ է (որը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ $\pm\infty$): Եթե*

ա) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X-ի վրա,

բ) գոյություն ունեն $\lim_{x\to a} u_k(x) = c_k$, $k \in N$ վերջավոր սահմանները, ապա

1⁰. $\sum_{k=1}^{\infty} c_k =: C$ շարքը զուգամետ է,

2⁰. $\lim_{x\to a} f(x) = C$,

կամ, որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to a} u_k(x),$$

այսինքն՝ գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին:

Հաջորդականությունների լեզվով թեորեմ 3.3-ը վերաձևակերպվում է այսպես.

Թեորեմ 3.3': *Եթե*[*]

ա) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in X$,

բ) գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = C_n$ *վերջավոր սահմանները, ապա*

1⁰. գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C$ *վերջավոր սահմանը,*

2⁰. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$,

կամ, որ նույնն է՝

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x):$$

► *1⁰-ի ապացույցը:* Կոշիի սկզբունքի համաձայն, ա)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|f_{n+m}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon\,,\ \ x \in X\,,\ \ m \in N:$$

Այստեղ n-ը և m-ը ֆիքսելով, իսկ x-ը ձգտեցնելով a-ի՝ բ)-ի շնորհիվ կստանանք

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|C_{n+m} - C_n\right| \le \varepsilon\,,\ \ m \in N$$

պայմանը: Այժմ, օգտվելով թվային հաջորդականությունների համար Կոշիի սկզբունքից, կստանանք 1^0-ը:

2⁰-ի ապացույցը: Ունենք, որ

$$\left|f(x) - C\right| \le \left|f(x) - f_n(x)\right| + \left|f_n(x) - C_n\right| + \left|C_n - C\right|: \tag{3.11}$$

ա)-ից և 1^0-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|f(x) - f_{n_1}(x)\right| < \varepsilon\,,\ \ x \in X \text{ և } \left|C_{n_1} - C\right| < \varepsilon: \tag{3.12}$$

բ)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի a-ի U շրջակայք այնպիսին, որ

---

[*] Այս թեորեմն անվանում են նաև հաջորդական սահմանների թեորեմ:

$$x \in X \cap U,\ \ x \neq a \Rightarrow \left| f_{n_1}(x) - C_{n_1} \right| < \varepsilon : \tag{3.13}$$

(3.11)-ի մեջ վերցնելով $n = n_1$ և հաշվի առնելով (3.12), (3.13)-ը՝ կստանանք.

$$x \in X \cap U,\ \ x \neq a \Rightarrow \left| f(x) - C \right| < 3\varepsilon : \blacksquare$$

Թեորեմ 3.3-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.3'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$: Այս դեպքում $C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$:

<u>**3. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրումը:**</u>

Թեորեմ 3.4: *Եթե*

ա) $u_n \in C[a,b],\ n \in N$,

բ) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *շարքը* $[a,b]$ *հատվածի վրա հավասարաչափ զուգամետ է, ապա*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx : \tag{3.14}$$

Թեորեմ 3.4': *Եթե*

ա) $f_n \in C[a,b],\ n \in N$, *բ)* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a,b]$, *ապա*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx, \tag{3.14'}$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx :$$

Այս դեպքում ասում են, որ կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ:

► (3.14')-ը ապացուցելու համար գնահատենք ինտեգրալների տարբերությունը: Նախ նկատենք, որ սահմանային ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն՝ $f \in C[a,b]$, հետևաբար, (3.14$'$)-ի ձախ կողմի ինտեգրալը գոյություն ունի: Բացի դրանից, բ)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon\,, \quad x \in [a,b]:$$

Այդ դեպքում՝

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \le \varepsilon(b-a): \blacksquare$$

Թեորեմ 3.4-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.4$'$-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$: Այդ դեպքում

$$\int_a^b f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)dx\,,$$

հետևաբար (3.14$'$)-ը կընդունի (3.14) տեսքը:

Հակաօրինակ: §1, կետ 1-ում բերված օրինակ 2-ը ցույց է տալիս, որ այս թեորեմները կետորեն զուգամիտության դեպքում ճիշտ չեն:

Լրացում: Այս թեորեմներում ֆունկցիաների անընդհատության պայմանը կարելի է փոխարինել նրանց ինտեգրելի լինելու պայմանով: Դրանում համոզվելու համար բավական է ապացուցել հետևյալ պնդումը.

Լեմմա 3.1: *Եթե ա)* $f_n \in \Re[a,b]$, *բ)* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a,b]$, *ապա* $f \in \Re[a,b]$*:*

► Դարբուի թեորեմի հետևանք 2-ի շնորհիվ բավական է ապացուցել, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածի տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$, այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon\ : \tag{3.15}$$

բ)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon_1 > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1 \in N$, այնպիսին, որ

$$\left|f_{n_1}(x)-f(x)\right|<\varepsilon_1,\quad x\in[a,b]: \tag{3.16}$$

ա)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի $[a,b]$-ի տրոհում՝ $a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$, այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^{m-1}\omega_i(f_{n_1})\Delta x_i<\varepsilon_1: \tag{3.17}$$

(3.16)-ից հետևում է, որ եթե $x,y\in[x_i,x_{i+1}]$, ապա

$$\left|f(x)-f(y)\right|\le\left|f(x)-f_{n_1}(x)\right|+\left|f_{n_1}(x)-f_{n_1}(y)\right|+$$
$$+\left|f_{n_1}(y)-f(y)\right|\le 2\varepsilon_1+\omega_i(f_{n_1}),$$

որտեղից էլ՝ $\omega_i(f)\le 2\varepsilon_1+\omega_i(f_{n_1})$: Այժմ, հաշվի առնելով (3.17)-ը, կստանանք՝

$$\sum_{i=0}^{m-1}\omega_i(f)\Delta x_i<2\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_1:$$

Մնում է ε_1-ն ընտրել այնպես, որ բավարարվի $2\varepsilon_1(b-a)+\varepsilon_1<\varepsilon$ անհավասարությունը: ■

<u>**4. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցումը:**</u>

Թեորեմ 3.5: *Եթե*

ա) $u_n(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են՝ $u_n'\in C[a,b]$,

բ) $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$, $x\in[a,b]$ շարքը կետորեն զուգամետ է,

գ) $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$, $x\in[a,b]$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է,

ապա f ֆունկցիան դիֆերենցելի է և $f'(x)=g(x)$, $x\in[a,b]$ կամ, որ նույնն է՝

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x),\quad x\in[a,b]:$$

Ձևակերպենք այս թեորեմը հաջորդականությունների լեզվով.

Թեորեմ 3.5': *Եթե*

ա) $f_n' \in C[a,b]$,

բ) $f_n(x) \to f(x)$, $x \in [a,b]$,

գ) $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a,b]$,

ապա f *-ը դիֆերենցելի է և* $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$ *կամ, որ նույնն է՝*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x):$$

► Դիցուք՝ $x \in [a,b]$: Օգտվելով նախ Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից, այնուհետև կատարելով սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ*՝ կստանանք.

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt, \quad n \to \infty:$$

Մյուս կողմից՝ $f_n(x) - f_n(a) \to f(x) - f(a)$, $n \to \infty$: Հետևաբար, սահմանի միակության համաձայն,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt, \quad x \in [a,b]:$$

Քանի որ թեորեմ 3.1'-ի համաձայն, $g \in C[a,b]$, ապա ըստ փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի հատկության, f -ը դիֆերենցելի է և $f'(x) = g(x)$, $x \in [a,b]$: ■

Թեորեմ 3.5-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.5'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

Հակաօրինակ: Ունենք՝ $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{\sqrt{n}} \rightrightarrows 0 =: f(x)$, $x \in R$: Ուստի, $f'(x) = 0$, $x \in R$: Սակայն $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$, որը չի ձգտում $f'(x)$-ին, օրինակ՝ $x_0 = 0$ կետում:

---

* Օգտվում ենք թեորեմ 3.4'-ից:

Ստորև ներկայացվող թեորեմները նախորդ երկու թեորեմների համապատասխան ընդհանրացումներն են:

Թեորեմ 3.6: *Եթե*

ա) u_k *ֆունկցիաները դիֆերենցելի են* X *միջակայքում,*

բ) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *շարքը զուգամետ է մի որևէ* $a \in X$ *կետում,*

գ) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$ *շարքը հավասարաչափ զուգամետ է* X *-ում,*

ապա

1⁰. $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ *շարքը հավասարաչափ զուգամետ է յուրաքան-չյուր* $E \subset X$ *սահմանափակ բազմության վրա,*

2⁰. f *-ը դիֆերենցելի է* X *-ում և* $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(x)$, $x \in X$:

Թեորեմ 3.6′: *Եթե*

ա) f_n *ֆունկցիաները դիֆերենցելի են* X *միջակայքում,*

բ) Գոյություն ունի $a \in X$ *կետ, այնպիսին, որ* $f_n(a)$ *հաջորդականությունը զուգամետ է,*

գ) $f_n'(x)$ *հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է* X *միջակայքում,*

ապա

1⁰. $f_n(x)$ *հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է յուրաքանչյուր* $E \subset X$ *սահմանափակ բազմության վրա՝*

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E,$$

2⁰. f *-ը դիֆերենցելի է* X *միջակայքում և* $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$:

► *1⁰-ի ապացույցը:* Նախ ապացուցենք, որ կամայական $x_0 \in X$ կետի համար

$$g_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \tag{3.18}$$

հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $X \setminus \{x_0\}$ բազմության վրա:

Կոշիի սկզբունքի համաձայն, գ)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| f'_{n+m}(x) - f'_n(x) \right| < \varepsilon \,,\ x \in X \,,\ m \in N \,: \tag{3.19}$$

Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն, գոյություն ունի $c \in X$ կետ, այնպիսին, որ

$$g_{n+m}(x) - g_n(x) = \frac{f_{n+m}(x) - f_n(x) - \left[f_{n+m}(x_0) - f_n(x_0) \right]}{x - x_0} =$$

$$= f'_{n+m}(c) - f'_n(c):$$

Հաշվի առնելով (3.19)-ը՝ կստանանք

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| g_{n+m}(x) - g_n(x) \right| < \varepsilon \,,\ x \in X \setminus \{x_0\} \,,\ \ m \in N \,,$$

հետևաբար, Կոշիի սկզբունքի համաձայն, g_n հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $X \setminus \{x_0\}$ բազմության վրա:

Այժմ, (3.18)-ի մեջ վերցնելով $x_0 = a$, կստանանք, որ $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} \right\}$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $X \setminus \{a\}$ բազմության վրա: Այդ հաջորդականության անդամները բազմապատկելով $x - a$ ֆունկցիայով (որը E-ի վրա սահմանափակ է), կստանանք E-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականություն՝ $f_n(x) - f_n(a)$: Հաշվի առնելով բ) պայմանը՝ կստանանք 1^0-ը:

2^0-ի ապացույցը: Թեորեմ $3.3'$-ի համաձայն, ամեն մի $x_0 \in X$ կետի համար ունենք՝

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \to \infty} f'_n(x_0) \,,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Թեորեմ 3.6-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.6$'$-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$:

Հակաօրինակ: Դիցուք՝ $f_n(x) = e^{-\frac{n}{x}}$, $x \in (0,\infty)$: Այդ դեպքում

$$f_n'(x) = \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{x}\right)^2 e^{-\frac{n}{x}} \rightrightarrows 0\,, \quad x \in (0,\infty)\,,$$

որովհետև $0 < t^2 e^{-t} \le M$, $t \in (0,\infty)$:

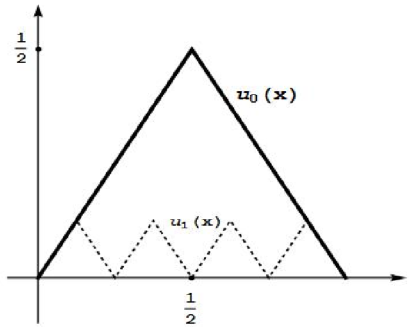
Սակայն $f_n(x) \to 0$, $x \in (0,\infty)$ զուգամիտությունը հավասարաչափ չէ, որովհետև $f_n(n) = e^{-1}$: Այսպիսով, E բազմության սահմանափակ լինելու պայմանն էական է:

Ընթերցողին առաջարկում ենք ինքնուրույն ստուգել նաև բ) պայմանի անհրաժեշտությունը:

<u>**5. Վան դեր Վարդենի օրինակը:**</u> Կառուցենք *ֆունկցիայի օրինակ, որը անընդհատ է* R *-ում, բայց ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ*: Յուրաքանչյուր $x \in R$ կետի համար նշանակենք՝

$$u_0(x) = d(x, \mathbb{Z})\,,$$

որը x կետի հեռավորությունն է ամբողջ թվերի բազմությունից: $u_0(x)$-ը 1 պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, որի գրաֆիկն ունի հետևյալ տեսքը.



Այնուհետև նշանակենք՝

$$u_k(x)=\frac{u_0\left(4^k x\right)}{4^k} \quad \text{և} \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x):$$

Վայերշտրասի հայտանիշի համաձայն, այս շարքը հավասարաչափ զուգամետ է R-ի վրա, հետևաբար, $f\in C(R)$:

Վերցնենք կամայական $x_0\in R$ կետ և ապացուցենք, որ այդ կետում f-ը դիֆերենցելի չէ: Նախ նկատենք, որ յուրաքանչյուր n-ի համար գոյություն ունի միակ $s_n\in\mathbb{Z}$ կետ, այնպիսին, որ

$$x_0\in\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right)=:\Delta_n:$$

Այնուհետև, $x_n\in\Delta_n$ կետն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի

$$\left|x_n-x_0\right|=\frac{1}{4^{n+1}}$$

հավասարությունը: Քանի որ $\frac{1}{4^k}$ թիվը u_k-ի պարբերություն է, ապա

$$k>n\Rightarrow u_k(x_n)=u_k(x_0):$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=1}^{n}(\pm 1)=:z_n:$$

Քանի որ զույգ n-ի դեպքում z_n-ը զույգ է, իսկ կենտ n-ի դեպքում՝ կենտ, ապա z_n-ը զուգամետ չէ: Դա նշանակում է, որ f ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի չէ (վերջավոր ածանցյալ չունի), ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

§4. ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

Ֆունկցիոնալ շարքի պարզագույն օրինակ է հանդիսանում

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

աստիճանային շարքը: Այդպիսի շարքի կետորեն զուգամիտությունը մենք ուսումնասիրել ենք նախորդ գլխում և ստացել ենք այդ շարքի զուգամիտության շառավղի հաշվման Կոշի – Հադամարի բանաձևը՝

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} :$$

Ապացուցել ենք, որ (IX, թեորեմ 5.1) $|x| < R$ պայմանին բավարարող կետերում $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ $|x| > R$ պայմանին բավարարող կետերում այն տարամետ է:

Ստորև մենք կուսումնասիրենք $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությունը և նրա գումարի ֆունկցիոնալ հատկությունները՝ անընդհատությունը, դիֆերենցելիությունը և այլն:

1. Աբելի թեորեմները:

Թեորեմ 4.1 (Աբելի առաջին թեորեմը): *Եթե* $R > 0$ *և*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ , \qquad (4.1)$$

ապա $f \in C(-R, R)$ *:*

Այս թեորեմը բխում է հետևյալ լեմմայից.

Լեմմա 4.1 (Աբել): *Եթե* $R > 0$ *և* $0 < r < R$*, ապա (4.1) շարքը* $[-r, r]$ *հատվածում նորմալ զուգամետ է, այսինքն՝ շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքը հավասարաչափ զուգամետ է**:*

► Նախ նկատենք, որ

$$|x| \le r \Rightarrow |a_n x^n| \le |a_n| r^n : \qquad (4.2)$$

Քանի որ $\sum |a_n r^n|$ շարքը զուգամետ է, ապա Վայերշտրասի մաժորանտով հայտանիշի լրացման համաձայն, $[-r, r]$-ում (4.1) շարքը նորմալ զուգամետ է: ■

---

* Կոշիի սկզբունքի համաձայն, այն կլինի նաև հավասարաչափ զուգամետ:

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

►Վերցնենք կամայական $x_0 \in (-R, R)$ կետ և ապացուցենք, որ f-ը x_0 կետում անընդհատ է: Այդ նպատակով ընտրենք $|x_0| < r < R$ պայմանին բավարարող որևէ r թիվ: Լեմմայի համաձայն, (4.1)-ը $[-r, r]$-ում հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի նրա գումարը՝ $f(x)$-ը, անընդհատ է $[-r, r]$-ում, որովհետև այդ հատվածում շարքի անդամներն անընդհատ են: ■

Թեորեմ 4.2 (Աբելի երկրորդ թեորեմը): *Եթե $0 < R < \infty$ և (4.1) շարքը $x = R$ կետում զուգամետ է, ապա այն $[0, R]$ հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ, և նրա f գումարը R կետում ձախից անընդհատ է՝*

$$\lim_{x \to R-} f(x) = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \ : \qquad (4.3)$$

► Ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհատության մասին թեորեմի համաձայն, բավական է ապացուցել, որ (4.1)-ը $[0, R]$ հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ:

Ունենք՝

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n , \quad x \in [0, R] :$$

Քանի որ (4.3) շարքը զուգամետ է, իսկ $b_n(x) = \left(\frac{x}{R} \right)^n$ հաջորդականությունը յուրաքանչյուր $x \in [0, R]$ կետի համար ըստ n-ի նվազող է և հավասարաչափ սահմանափակ է $[0, R]$ հատվածում, ապա, Աբելի հայտանիշի համաձայն, (4.1) շարքը $[0, R]$-ում զուգամիտում է հավասարաչափ: ■

Օրինակ: Աբելի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ շարքը [0,1] հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ: Բացի դրանից, Կոշի – Հադամարի բանաձևի համաձայն, այդ շարքը $[0,1)$ միջակայքում բացարձակ զուգամետ է: Ուստի, այդ շարքը $[0,1)$ միջակայքում *բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է, բայց նորմալ զուգամետ չէ*: Իսկապես՝ $\sum \frac{x^n}{n}$ շարքը $[0,1)$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ չէ: Հակառակ դեպքում, անդամ առ անդամ սահմանային անցման թեորեմի համաձայն, կստացվեր, որ $\sum \frac{1}{n}$ շարքը զուգամետ է, ինչը հակասություն է:

Թեորեմ 4.3 (Աբելի թեորեմը շարքերի Կոշիի արտադրյալի վերաբերյալ): *Եթե* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ *և* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ *շարքերը զուգամետ են, որտեղ երրորդ շարքը նախորդ երկուսի Կոշիի արտադրյալն է, ապա*

$$C = AB: \tag{4.4}$$

► Դիտարկենք

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n, \quad h(x) = \sum c_n x^n$$

աստիճանային շարքերը: Եթե դրանց զուգամիտության շառավիղները նշանակենք համապատասխանաբար R_1, R_2 և R_3, ապա Կոշի - Հադամարի բանաձևի համաձայն, $R_i \geq 1$ և այդ շարքերը $|x|<1$ պայմանին բավարարող կետերում բացարձակ զուգամետ են: Հետևաբար, Կոշիի թեորեմի համաձայն (IX, թեորեմ 4.5)՝

$$h(x) = f(x)g(x), \quad |x|<1: \tag{4.5}$$

Մյուս կողմից, Աբելի երկրորդ թեորեմի համաձայն՝

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = A, \quad \lim_{x\to 1-} g(x) = B, \quad \lim_{x\to 1-} h(x) = C,$$

ուստի, (4.5) հավասարությունում անցնելով սահմանի, երբ $x \to 1-$, կստանանք (4.4)-ը: ■

2. Տաուբերի թեորեմը:

Թեորեմ 4.4: *Եթե*

ա) $na_n \to 0$, $n \to \infty$,

բ) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \to A$ *, երբ* $x\to 1-$ *, ապա*

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n = A \,:$$

► Վերցնենք՝ $0\le x<1$ և $N=\left[\dfrac{1}{1-x}\right]$: Բավական է ապացուցել, որ

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{N}a_n \to 0,\ \text{երբ}\ x\to 1- \ ,$$

այսինքն՝

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n x^n-\sum_{n=0}^{N}a_n(1-x^n)\to 0,\ \text{երբ}\ x\to 1- :$$

Այդ գումարները նշանակենք S_1 և S_2 : ա)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի N_1 բնական թիվ, այնպիսին, որ $n>N_1 \Rightarrow |na_n|<\varepsilon$: Այդ դեպքում, վերցնելով $N=N_1$, կստանանք

$$|S_1|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}na_n\frac{x^n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{N+1}\sum_{n=N+1}^{\infty}x^n<\frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)}<\varepsilon \,:$$

S_2 -ը գնահատելու համար օգտագործենք

$$1-x^n=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})<n(1-x),$$

անհավասարությունը, որտեղից՝

$$|S_2|<(1-x)\sum_{n=0}^{N}n|a_n|\le\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}n|a_n| :$$

Կոշիի թեորեմի համաձայն (II, հետևանք թեորեմ 2.2-ից)՝ $\dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}n|a_n|\to 0$, երբ $N\to\infty$, ուստի, եթե N-ը բավականաչափ մեծ է, այսինքն՝ x-ը ձախից բավականաչափ մոտ է 1-ին, ապա $|S_2|<\varepsilon$, որի արդյունքում էլ՝ $|S_1-S_2|<2\varepsilon$: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Առանց ա) պայմանի Տաուբերի թեորեմը ճիշտ չէ:

Օրինակ: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\to\frac{1}{2}$, երբ $x\to 1$, բայց $\sum(-1)^n$ շարքը տարամետ է:

<u>3. Աստիճանային շարքի ինտեգրումը և ածանցումը:</u>

Թեորեմ 4.5: *Եթե*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը դրական է՝ $R>0$, *և* $|x|<R$, *ապա* $[0,x]$ *հատվածում այդ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել՝*

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt&=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\cdots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\cdots=\\&=x\left(a_0+\frac{a_1}{2}x+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^n+\cdots\right):\end{aligned}\tag{4.6}$$

Ապացույցը հետևում է Աբելի առաջին թեորեմից և ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման թեորեմից:

Լրացում 1: *Եթե աստիճանային շարքը զուգամիտում է նաև զուգամիտության միջակայքի* R *ծայրակետում, ապա Աբելի երկրորդ թեորեմից հետևում է, որ այդ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել նաև* $[0,R]$*-ում:*

Լրացում 2: *Քանի որ* $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, *ապա, Կոշի – Հադամարի բանաձևի համաձայն, (4.6) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը նույնպես հավասար է* R*-ի:*

Թեորեմ 4.6: *Եթե (4.1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը դրական է՝* $0<R\le\infty$, *ապա* $(-R,R)$ *միջակայքում* f*-ը դիֆերենցելի է և*

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots,\ \ x\in(-R,R):\tag{4.7}$$

► Քանի որ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|na_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\,,$$

ապա, Կոշի – Հադամարի բանաձևի համաձայն[*], (4.7) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը նույնպես R-ն է:

Վերցնենք կամայական $x_0\in(-R,R)$ և (4.7)-ը ապացուցենք x_0 կետում: Դրա համար վերցնենք՝ $r\in(|x_0|,R)$: Աբելի լեմմայի համաձայն, (4.7)-ը $[-r,r]$ հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ: Ուստի, ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցման թեորեմի համաձայն, f-ը $[-r,r]$ հատվածում դիֆերենցելի է և այդ հատվածում տեղի ունի (4.7)-ը: ■

Դիտողություն: $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$ շարքը զուգամիտության միջակայքի $x=1$ ծայրակետում զուգամիտում է, բայց այդ կետում (4.7)-ը ճիշտ չէ, որովհետև ածանցված շարքը $x=1$ կետում տարամիտում է:

Օրինակներ:

1^0. $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots$, $|x|<1$ շարքն ինտեգրելով $[0,x]$ հատվածում՝ կստանանք.

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\ : \qquad (4.8)$$

Քանի որ (4.8)-ը $x=1$ կետում նույնպես զուգամիտում է և $\ln(1+x)$ ֆունկցիան անընդհատ է 1 կետում, ապա, Աբելի երկրորդ թեորեմի համաձայն, կստանանք

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\,,\quad x\in(-1,1]:$$

---

[*] $a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots=\frac{1}{x}\left(a_1x+2a_2x^2+\cdots+na_nx^n+\cdots\right)$:

2^0. $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \cdots, \quad |x| < 1,$ շարքն ինտեգրելով, կստանանք

$$arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \,, \quad |x| < 1 : \qquad (4.9)$$

Քանի որ ստացված շարքը զուգամիտում է նաև $x = \pm 1$ կետերում, և $arctgx$ ֆունկցիան անընդհատ է այդ կետերում, ապա, Աբելի երկրորդ թեորեմի համաձայն, (4.9) վերլուծությունը տեղի ճիշտ կլինի նաև այդ կետերում:

3^0. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \,, \; |x| < 1,$

բինոմական շարքի մեջ x-ը փոխարինելով $-x^2$-ով՝ կստանանք.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \,, \quad |x| < 1 :$$

Այս շարքը $[0, x]$ հատվածում ինտեգրենք.

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} :$$

Քանի որ շարքը զուգամիտում է նաև $x = \pm 1$ կետերում (ըստ Ռաբեի հայտանիշի), ապա վերլուծությունը ճիշտ է նաև այդ կետերում:

4. Աստիճանային շարքը՝ որպես Թեյլորի շարք: Դիտարկենք

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

աստիճանային շարքը, որի զուգամիտության շառավիղը դրական է՝ $0 < R \le \infty$:

Քանի որ աստիճանային շարքը անդամ առ անդամ ածանցելիս զուգամիտության շառավիղը չի փոխվում, ապա, կիրառելով նախորդ թեորեմը և մաթեմատիկական ինդուկցիա, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը $(-R, R)$ միջակայքում կարող ենք ածանցել k անգամ: Արդյունքում կստանանք

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}a_n(x^n)^{(k)}\ ,\quad x\in(-R,R)\ ,\quad k\in N\ , \tag{4.10}$$

որովհետև $n<k\Rightarrow(x^n)^{(k)}=0$ ։

Այնուհետև, (4.10)-ի մեջ տեղադրելով $x=0$, և հաշվի առնելով

$$(x^n)^{(k)}\Big|_{x=0}=\begin{cases}k!, & n=k\\ 0, & n>k\end{cases}$$

հավասարությունը, կստանանք

$$f^{(k)}(0)=a_k k!,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\quad k=0,1,2,...:$$

Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 4.7: *Աստիճանային շարքի գումարը* $(-R,R)$ *միջակայքում անվերջ դիֆերենցելի է, և աստիճանային շարքն իր գումարի Թեյլորի շարքն է:*

§5. ՎԱՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Թեորեմ 5.1: *Եթե* f *ֆունկցիան անընդհատ է* $[a,b]$ *հատվածում, ապա գոյություն ունի* P_n *բազմանդամների հաջորդականություն, որը* $[a,b]$ *հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է* f *ֆունկցիային*:

<u>**1. Լանդաուի ապացույցը:**</u> Լրացուցիչ ենթադրություններ՝

ա) Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $[a,b]=[0,1]$ ։

Իրոք, եթե թեորեմը $[0,1]$ հատվածի համար ճիշտ է և

$$P_n(y)\rightrightarrows f(a+(b-a)y)\ ,\quad y\in[0,1],$$

ապա

$$P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\rightrightarrows f(x)\ ,\quad x\in[a,b]:$$

բ) Բավական է թեորեմն ապացուցել

$$f(0)=f(1)=0 \tag{5.1}$$

լրացուցիչ պայմանի դեպքում:

Իրոք, եթե (5.1) պայմանի առկայության դեպքում թեորեմը ճիշտ է, ապա գոյություն ունի P_n բազմանդամների հաջորդականություն, որը $[0,1]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է

$$g(x)=f(x)-f(0)-x\left[f(1)-f(0)\right]$$

ֆունկցիային՝ $P_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $x\in[0,1]$:

Այդ դեպքում $P_n(x)+f(0)+x\left[f(1)-f(0)\right]\rightrightarrows f(x)$, $x\in[0,1]$:

գ) Ենթադրենք, որ (5.1) պայմանը բավարարվում է: $[0,1]$ հատվածից դուրս $f(x)$-ը համարենք զրո՝ $f(x)=0$, $x\in R\setminus[0,1]$: Այսպես շարունակված f ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա կլինի հավասարաչափ անընդհատ:

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► Նշանակենք՝

$$Q_n(t)=c_n(1-t^2)^n,\ n=1,2,\dots,$$

որտեղ $c_n=\left\{\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt\right\}^{-1}$, $n=1,2,\dots$:

Նկատենք, որ $c_n<\sqrt{n}$: Իսկապես, Բեռնուլիի անհավասարության համաձայն, ունենք՝

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt=2\int_{0}^{1}(1-t^2)^n dt\ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-t^2)^n dt\ge$$

$$\ge 2\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-nt^2)dt=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}:$$

Այսպիսով, Q_n-ը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1^0. $Q_n(t)\ge 0$, $t\in\left[-1,1\right]$, $n\in N$:

2^0. $\int_{-1}^{1} Q_n(t)dt = 1$, $n \in N$:

3^0. Յուրաքանչյուր $0 < \delta < 1$ թվի համար $Q_n(t) \rightrightarrows 0$, երբ $\delta \le |t| \le 1$:

Վերջին հատկությունը հետևում է $Q_n(t) \le \sqrt{n}(1-\delta^2)^n$, $\delta \le |t| \le 1$, անհավասարությունից:

Այժմ նշանակենք՝

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)dt \;,\; 0 \le x \le 1: \tag{5.2}$$

գ)-ի համաձայն,

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt \,,$$

որտեղից էլ, կատարելով փոփոխականի փոխարինում, կստանանք

$$P_n(x) = \int_{0}^{1} f(t)Q_n(t-x)dt \,,\; x \in [0,1]$$

ներկայացումը, ինչից երևում է, որ P_n-ը բազմանդամ է: Ապացուցենք, որ

$$P_n(x) \rightrightarrows f(x),\; x \in [0,1]:$$

2^0-ից և (5.2)-ից կստանանք՝

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} [f(x+t) - f(x)]Q_n(t)dt \,,\; 0 \le x \le 1: \tag{5.3}$$

գ)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|t| \le \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon:$$

Այդ դեպքում, (5.3)-ից կունենանք՝

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\le \int_{|t|\le\delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)dt + \\ &+ \int_{\delta\le|t|\le1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)dt \le \varepsilon \int_{|t|\le\delta} Q_n(t)dt + 4M \max_{\delta\le|t|\le1} Q_n(t), \end{aligned} \tag{5.4}$$

որտեղ $M = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$:

3^0-ի համաձայն, ֆիքսված δ -ի համար գոյություն ունի n_0, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow \max_{\delta \le |t| \le 1} Q_n(t) < \varepsilon : \tag{5.5}$$

2^0-ից, (5.4)-ից և (5.5)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon + 4M\varepsilon, \ x \in [0,1] :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

2. Բեռնշտեյնի ապացույցը:

Նախ ապացուցենք հետևյալ նույնությունները.

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{5.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) : \tag{5.7}$$

Այդ նպատակով դիտարկենք Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը՝

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n : \tag{5.8}$$

Այստեղ տեղադրելով $p = x$, $q = (1-x)$, կստանանք (5.6)-ը:

Այնուհետև, (5.8)-ի երկու կողմը ածանցելով ըստ p -ի, կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1} :$$

Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով p -ով՝ կստանանք

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} : \tag{5.9}$$

հավասարությունը: Այստեղ տեղադրելով $p = x$, $q = (1-x)$, կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx : \tag{5.10}$$

Այժմ, (5.9)-ի երկու կողմը ածանցելով ըստ p -ի, կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^{k-1} q^{n-k} = n\left[(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2}\right]:$$

Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով p-ով և ստացված հավասարության մեջ տեղադրելով $p = x$, $q = 1 - x$՝ կստանանք.

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx\left[1 + (n-1)x\right]: \tag{5.11}$$

Այժմ, եթե (5.6)-ի երկու կողմը բազմապատկենք n^2x^2-ով, իսկ (5.10)-ինը՝ $-2nx$-ով, և ստացված հավասարությունները գումարենք (5.11)-ին, կստանանք (5.7)-ը:

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► Նշանակենք՝

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]: \tag{5.12}$$

B_n-ը բազմանդամ է, որի աստիճանը չի գերազանցում n-ը: Ապացուցենք, որ B_n-ը $[0,1]$-ում հավասարաչափ ձգտում է f-ին*: Այդ նպատակով (5.6)-ի երկու կողմը բազմապատկենք $f(x)$-ով և ստացվածից հանենք (5.12)-ը՝

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \; x \in [0,1]: \tag{5.13}$$

Քանի որ $f \in C[0,1]$, ապա, Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| < \delta \\ x, y \in [0,1] \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon: \tag{5.14}$$

* Այստեղ ևս գործում ենք նախորդ կետի ա) լրացուցիչ ենթադրությամբ:

Վերցնելով (5.14) պայմանին բավարարող ֆիքսած δ` (5.13)-ից կստանանք`

$$|f(x)-B_n(x)| \le \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} +$$

$$+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta} \left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \tag{5.15}$$

$$\le \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

որտեղ $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$:

Մյուս կողմից ունենք`

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge\delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{(k-nx)^2\ge\delta^2 n^2} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \le$$

$$\le \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2}: \tag{5.16}$$

որտեղ վերջին քայլում օգտվեցինք (5.7)-ից: Քանի որ $x(1-x)\le\frac{1}{4}$, $x\in[0,1]$, ապա թեորեմի պնդումը հետևում է (5.15)-ից և (5.16)-ից: ■

XI ԳԼՈՒԽ

ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Անվերջ սահմաններով ինտեգրալների սահմանումը:

Դիցուք՝ $f:[a,\infty)\to R$ և յուրաքանչյուր $A>a$ թվի համար f -ն ինտեգրելի է $[a,A]$ հատվածում՝ $f\in\Re[a,A]$: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx \qquad (1.1)$$

սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ* a -ից ∞ (կամ $[a,\infty)$ -ում) և նշանակվում է

$$\int_a^\infty f(x)dx \qquad (1.2)$$

սիմվոլով: Ընդ որում, եթե (1.1) սահմանը վերջավոր է, ապա f -ը կոչվում է ինտեգրելի $[a,\infty)$ -ում և (1.2) անիսկական ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, իսկ եթե (1.1) սահմանը գոյություն չունի կամ $\pm\infty$ է, ապա (1.2) ինտեգրալը կոչվում է *տարամետ*:

Օրինակ: $\int_0^A \frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^A=arctgA\to\frac{\pi}{2}$, երբ $A\to\infty$, հետևաբար,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2} \ :$$

Նման ձևով է սահմանվում f ֆունկցիայի ինտեգրալը $(-\infty,a]$ և $(-\infty,\infty)$ միջակայքերում՝

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^a f(x)dx \quad (A'<a), \qquad (1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A'\to-\infty \\ A\to+\infty}} \int_{A'}^{A} f(x)dx : \qquad (1.4)$$

(1.2) ինտեգրալի վերաբերյալ ընդունված տերմինները օգտագործվում են նաև (1.3) և (1.4) ինտեգրալների համար:

Քանի որ

$$\int_{A'}^{A} f(x)dx = \int_{A'}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{A} f(x)dx \ , \quad A' < a < A \ ,$$

ապա (1.4) սահմանի գոյությունը համարժեք է (1.1) և (1.3) սահմանների միաժամանակյա գոյությանը*:

Հետևաբար, ինտեգրալը $(-\infty,\infty)$ միջակայքում կարելի է սահմանել նաև

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

հավասարության միջոցով, ընդ որում, աջ կողմի գումարը a-ի ընտրությունից կախված չէ:

Օրինակներ: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} \int_{A'}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A'\to-\infty} (-arctgA') = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi \ :$$

2. Ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևը: Եթե f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,\infty)$ միջակայքում և F-ը նրա որևէ նախնական է, ապա ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևի համաձայն՝

$$\int_{a}^{A} f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)\Big|_{a}^{A} :$$

Հետևաբար, (1.2) անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ գոյություն ունի

---

* Բացառություն է կազմում միայն այն դեպքը, երբ այդ սահմանները տարբեր նշանի անվերջներ են:

$$\lim_{A\to\infty} F(A) = F(\infty)$$

վերջավոր սահմանը: Այդ դեպքում

$$\int_a^\infty f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty :$$

Հանգունորեն՝ $\int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^a$, $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^\infty$:

Օրինակ: Հաշվենք $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bxdx$ ինտեգրալը $(a>0)$: Այս դեպքում (տե՛ս V, §1, կետ 4)՝ $F(x) = -\dfrac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}$: Քանի որ $F(\infty)=0$, $F(0) = -\dfrac{b}{a^2+b^2}$, ուստի

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bxdx = \frac{b}{a^2+b^2} :$$

Հանգունորեն՝

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bxdx = \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}\Bigg|_0^\infty = \frac{a}{a^2+b^2} :$$

3. Անիսկական ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները:

Առաջիկայում մենք կսահմանափակվենք (1.2) տեսքի ինտեգրալների դիտարկումով: Այդ տեսքի ինտեգրալների մասին ասված ամեն ինչ հեշտությամբ կարելի է տարածել մյուս դեպքերի վրա:

Անիսկական ինտեգրալների տեսությունը նման է թվային շարքերի տեսությանը, ուստի այստեղ մենք կօգտագործենք թվային շարքերի տեսության մեջ ընդունված տերմինները.

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx \quad (a < A) \tag{1.5}$$

ինտեգրալը կանվանենք (1.2) անիսկական ինտեգրալի *մասնակի ինտեգրալ*, իսկ

$$\int_A^{\infty} f(x)dx \quad (a < A) \tag{1.6}$$

ինտեգրալը՝ (1.2) անիսկական ինտեգրալի *մնացորդ կամ պոչ*:

Թվարկենք անիսկական ինտեգրալների պարզագույն հատկություն-ները՝ ապացույցները թողնելով ընթերցողին[*]:

1^0. Որպեսզի $\int_a^{\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ որևէ A-ի համար զուգամիտի (1.6) անիսկական ինտեգրալը (պոչը), ընդ որում,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{A} f(x)dx + \int_A^{\infty} f(x)dx \ :$$

2^0. Եթե $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա $\lim_{A\to\infty}\int_A^{\infty} f(x)dx = 0$:

Դիտողություն: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտության դեպքում f ֆունկցիան կարող է չձգտել զրոյի, երբ $A\to\infty$: Օրինակ՝

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in N \\ 0, & x \notin N \end{cases} \ :$$

3^0. Եթե $\int_a^{\infty} f(x)dx$-ը զուգամետ է, ապա $\int_a^{\infty} cf(x)dx$ ինտեգրալը ($c = const$) նույնպես զուգամետ է և

$$\int_a^{\infty} cf(x)dx = c\int_a^{\infty} f(x)dx \ :$$

4^0. Եթե $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի հետ մեկտեղ զուգամետ է նաև $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ինտեգրալը, ապա $\int_a^{\infty}[f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \pm \int_a^{\infty} g(x)dx$:

---

[*] Ապացույցները նման են թվային շարքերի համապատասխան հատկությունների ապացույցներին:

4. Դրական ֆունկցիայի ինտեգրալի զուգամիտությունը*: Եթե $f(x)\geq 0$, ապա

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx$$

ֆունկցիան $[a,\infty)$ միջակայքում աճող է (լայն իմաստով), ուստի այդ ֆունկցիայի սահմանի հարցը, երբ $A\to\infty$, այսինքն՝ (1.2) ինտեգրալի զուգամիտության հարցը, լուծվում է մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմի միջոցով: Վերաձևակերպելով այդ թեորեմը (1.2) անիսկական ինտեգրալի համար՝ կստանանք հետևյալ արդյունքը:

Թեորեմ 1.1: *Եթե* $f(x)\geq 0$, *ապա* $\int_a^\infty f(x)dx$ *անիսկական ինտեգրալի զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ* F *ֆունկցիան լինի վերևից սահմանափակ: Երբ* F *ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, (1.2) անիսկական ինտեգրալը* $+\infty$ *է:*

Այս թեորեմի միջոցով ապացուցվում են անիսկական ինտեգրալների *բաղդատման հայտանիշները*:

I հայտանիշ: *Եթե գոյություն ունի* $A>a$ *թիվ, այնպիսին, որ* $x>A\Rightarrow f(x)\leq g(x)$, *ապա* $\int_a^\infty g(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է* $\int_a^\infty f(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտությունը:*

II հայտանիշ: *Եթե գոյություն ունի*

---

* Այս կետում դիտարկվող բոլոր ենթինտեգրալ ֆունկցիաները ոչ բացասական են և Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի են յուրաքանչյուր $[a,A]$, $A>a$ հատվածում:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K\,,\quad 0\le K\le\infty$$

սահմանը, ապա $K<\infty$ *դեպքում* $\int_a^\infty g(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտու-թյունից հետևում է* $\int_a^\infty f(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ* $K>0$ *դեպքում* $\int_a^\infty f(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է* $\int_a^\infty g(x)dx$ *ինտեգրալի զուգամիտությունը:*

Այսպիսով, $0<K<\infty$ *դեպքում երկու ինտեգրալները զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:*

Այս հայտանիշների ապացույցները նման են թվային շարքերի վերաբերյալ համանման հայտանիշների ապացույցներին (և թողնվում են ընթերցողին):

Դիտարկենք համեմատումը $\frac{1}{x^\lambda}$ ֆունկցիայի հետ: Հեշտ է ստուգել, որ $a>0$ դեպքում այս ֆունկցիայի ինտեգրալը $[a,\infty)$ միջակայքում զուգամետ է, երբ $\lambda>1$, և տարամետ է, երբ $\lambda\le1$: Եղնելով բաղդատման հայտանիշներից՝ ստացվում են հետևյալ պնդումները.

1^0. *Դիցուք՝* $f(x)=\frac{\varphi(x)}{x^\lambda}$ *: Այդ դեպքում,*

ա) եթե $\lambda>1$ *և* $0\le\varphi(x)\le c<\infty$, *ապա* $\int_a^\infty f(x)dx$ *ինտեգրալը զուգամետ է,*

բ) եթե $\lambda\le1$ *և* $\varphi(x)\ge c>0$, *ապա* $\int_a^\infty f(x)dx$ *ինտեգրալը տարամետ է:*

Որպես բաղդատման II հայտանիշի հետևանք, կստանանք հետևյալը.

2^0. *Եթե* $f(x) \sim \dfrac{c}{x^\lambda}$, $x \to \infty$, *որտեղ* $c > 0$ [*], *ապա* $\lambda > 1$ *դեպքում* $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ $(a > 0)$ *ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ* $\lambda \le 1$ *դեպքում այն տարամետ է:*

Օրինակներ: 1) Դիտարկենք $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{3/2}}{1+x^2}dx$ և $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ինտեգրալները:

Երբ $x \to \infty$, ենթինտեգրալ ֆունկցիաները համապատասխանաբար $\lambda = \dfrac{1}{2}$ և $\lambda = 2$ կարգի անվերջ փոքրեր են, ուստի այդ ինտեգրալներից առաջինը տարամետ է, իսկ երկրորդը՝ զուգամետ:

2) Դիտարկենք ռացիոնալ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը՝ $\int\limits_a^\infty \dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, որտեղ $P(x)$-ը m աստիճանի բազմանդամ է, իսկ $Q(x)$-ը $n > m$ աստիճանի է, որը $[a,\infty)$ միջակայքում արմատ չունի:

Երբ $x \to \infty$, ենթինտեգրալ ֆունկցիան $\lambda = n - m$ կարգի անվերջ փոքր է, հետևաբար, $n = m + 1$ դեպքում այդ ինտեգրալը տարամետ է, իսկ $n \ge m + 2$ դեպքում՝ զուգամետ:

5. Ինտեգրալի զուգամիտությունն ընդհանուր դեպքում:

Թեորեմ 1.2 (Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը) : *Որպեսզի*

$$\int\limits_a^\infty f(x)dx$$

անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունենա* $E > a$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$A, A' > E \Rightarrow \left| \int\limits_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ :} \tag{1.7}$$

---

[*] Այլ կերպ ասած, f-ը $1/x$-ի նկատմամբ λ կարգի անվերջ փոքր է:

► Քանի որ $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ մասնակի ինտեգրալի համար ճշմարիտ է

$$F(A')-F(A)=\int_A^{A'} f(x)dx$$

հավասարությունը, ուստի, կիրառելով F ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու վերաբերյալ Կոշիի սկզբունքը (II, §5, կետ 9), կստանանք (1.7)-ը: ■

Ստորև ներկայացվող թեորեմները վերաբերում են

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx \tag{1.8}$$

տեսքի ինտեգրալներին:

Թեորեմ 1.3 (Աբելի հայտանիշը) : *Եթե* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ* g *ֆունկցիան* $[a,\infty)$ *միջակայքում մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա (1.8) ինտեգրալը զուգամետ է:*

Թեորեմ 1.4 (Դիրիխլեի հայտանիշը): *Եթե* $F(A)=\int_a^A f(x)dx$ *ֆունկցիան սահմանափակ է* $[a,\infty)$ *միջակայքում և* $g(x)\downarrow 0$, *երբ* $x\to\infty$, *ապա (1.8) ինտեգրալը զուգամետ է:*

► Այս հայտանիշներն անմիջապես բխում են Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից և միջին արժեքի երկրորդ թեորեմից (V, §7)՝

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A)\int_A^{\xi} f(x)dx + g(A')\int_{\xi}^{A'} f(x)dx \quad (A\le\xi\le A'): \tag{1.9}$$

Երկու հայտանիշների պայմաններում էլ A-ն և A'-ը բավականաչափ մեծ ընտրելու դեպքում աջ կողմում գրված գումարելիները ցանկացած չափով փոքր են դառնում: Իրոք, Աբելի հայտանիշի դեպքում (1.2) ինտեգրալը զուգամետ է, ուստի Կոշիի սկզբունքի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $E>a$ թիվ, այնպիսին, որ

$$A > E \Rightarrow \left| \int_A^{\xi} f(x)dx \right| < \varepsilon , \quad \left| \int_{\xi}^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon \ : \tag{1.10}$$

Բացի դրանից, g ֆունկցիան $[a, \infty)$ միջակայքում սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|g(x)| \le M , \quad x \in [a, \infty) : \tag{1.11}$$

(1.9) - (1.11) առնչություններից հետևում է, որ

$$A, A' > E \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x) g(x) dx \right| < 2M\varepsilon \ ,$$

հետևաբար, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, (1.8) ինտեգրալը զուգամետ է:

Դիրիխլեի հայտանիշի դեպքում (1.9)-ի աջ կողմի գումարելիների մեջ առաջին արտադրիչներն են ձգտում զրոյի, իսկ երկրորդ արտադրիչները սահմանափակ են: ■

Օրինակ: Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն $\int_1^{\infty} \frac{\sin ax}{x^{\lambda}} dx$ և $\int_1^{\infty} \frac{\cos ax}{x^{\lambda}} dx$ ինտեգրալները $\lambda > 0$ և $a \ne 0$ պայմանների դեպքում զուգամետ են: Իսկապես, $g(x) = \frac{1}{x^{\lambda}} \downarrow 0 \ \left(x \to \infty \right)$, իսկ

$$F(A) = \int_1^A \sin ax dx \text{ և } G(A) = \int_1^A \cos ax dx$$

ֆունկցիաները սահմանափակ են (ստուգեք ինքնուրույն):

<u>**6. Բացարձակ և պայմանական զուգամետ ինտեգրալներ:**</u>

Սահմանում: $\int_a^{\infty} f(x)dx$ *ինտեգրալը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է*

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx \tag{1.12}$$

ինտեգրալը:

Թեորեմ 1.5: *Բացարձակ զուգամետ ինտեգրալը նաև զուգամետ է:*

►Ապացույցը հետևում է ինտեգրալի անհավասարությունից՝

$$\left|\int_A^{A'} f(x)dx\right| \le \int_A^{A'} |f(x)|\,dx \quad (A \le A')$$

և Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից: ■

Սահմանում: $\int_a^\infty f(x)dx$ *ինտեգրալը կոչվում է պայմանական զուգամետ, եթե այն զուգամետ է, իսկ* $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ *ինտեգրալը՝ տարամետ:*

Օրինակ: Դիտարկենք $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda}dx$, $0<\lambda\le 1$ ինտեգրալը: Ապացուցենք, որ այն պայմանական զուգամետ է: Բաղդատման I հայտանիշի համաձայն, բավական է ապացուցել

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$$

ինտեգրալի տարամիտությունը:

Ապացուցենք հակառող ենթադրությամբ՝ $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx<\infty$: Քանի որ $\sin^2 x \le |\sin x|$, ապա բաղդատման I հայտանիշի համաձայն՝

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}dx<\infty: \tag{1.12}$$

Մյուս կողմից՝ $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, հետևաբար՝ $\frac{1}{2x}=\frac{\sin^2 x}{x}+\frac{\cos 2x}{2x}$: Քանի որ աջ կողմում գրված գումարելիների ինտեգրալները զուգամետ են $[1,\infty)$ միջակայքում, ուրեմն $\frac{1}{2x}$ ֆունկցիայի ինտեգրալը նույնպես զուգամետ է, ինչը հակասություն է:

Ինտեգրալների բացարձակ զուգամիտությունը ստուգելու համար օգտվում են բաղդատման հայտանիշներից:

Օրինակ: $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{1+x^2}dx$, $a\in R$ ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, քանի որ

$$\left|\frac{\sin ax}{1+x^2}\right|\le\frac{1}{1+x^2},$$

իսկ $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալը զուգամետ է:

§2. ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[a,b)$ վերջավոր միջակայքում, անսահմանափակ է b կետի շրջակայքում և յուրաքանչյուր $\eta\in(a,b)$ թվի համար ինտեգրելի է $[a,\eta]$ հատվածում՝ $f\in\Re[a,\eta]$: Նշանակենք՝ $F(\eta)=\int_a^{\eta}f(x)dx$: Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{\eta\to b}F(\eta) \tag{2.1}$$

սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ* $[a,b)$ *միջակայքում* և նշանակվում է

$$\int_a^b f(x)dx \tag{2.2}$$

սիմվոլով: Ընդ որում, եթե (2.1) սահմանը վերջավոր է, ապա (2.2) ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ* և f -ը կոչվում է ինտեգրելի $[a,b)$-ում:

---

* Եթե f -ը սահմանափակ է $[a,b)$ -ում, ապա այդ սահմանը գոյություն ունի և հավասար է f -ի որոշյալ ինտեգրալին (տես V, §3): Նոր իրավիճակ կլինի միայն այն դեպքում, երբ f -ը $[a,b)$ -ում լինի անսահմանափակ:

Իսկ եթե (2.1) սահմանը գոյություն չունի կամ $\pm\infty$ է, ապա (2.2) ինտեգրալը կոչվում է *տարամետ*:

Օրինակ: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 1}\int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to 1}\arcsin\eta = \frac{\pi}{2}$:

Հանգունորեն սահմանվում է նաև f ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը $(a,b]$ միջակայքում, երբ f ֆունկցիան անսահմանափակ է a կետի շրջակայքում: Այս դեպքում նույնպես անիսկական ինտեգրալը նշանակվում է (2.2) սիմվոլով: Այդ երկու դեպքերը տարբերելու համար առաջին դեպքում ասում են, որ (2.2) ինտեգրալի *եզակիության կետը* b-ն է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ a-ն: Այս տերմինը օգտագործվում է նաև $\int_a^\infty$ և $\int_{-\infty}^a$ ինտեգրալների համար՝ առաջին դեպքում ասում են, որ ինտեգրալի *եզակիության կետը* ∞-ն է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ $-\infty$-ը:

Այսպիսով,

$$\int_a^\omega f(x)dx$$

ինտեգրալում ω վերին սահմանը $\left(|\omega|<\infty\right)$ կոչվում է այդ *ինտեգրալի եզակիություն կամ եզակիության կետ*, եթե f ֆունկցիան ω-ի շրջակայքում անսահմանափակ է: Հանգունորեն,

$$\int_\omega^b f(x)dx$$

ինտեգրալում ω ստորին սահմանը կոչվում է այդ ինտեգրալի եզակիություն, եթե ω-ի շրջակայքում f ֆունկցիան անսահմանափակ է: Եթե $|\omega|=\infty$, ապա ω-ն կանվանենք եզակիություն՝ անկախ f-ի վարքից:

Օրինակներ: ա) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to -1}\int_\eta^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta\to -1}(-\arcsin\eta) = \frac{\pi}{2}$, բ) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ինտեգրալում առկա է երկու եզակիության կետ՝ -1-ը և 1-ը.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_{-1}^{0}\ \ +\int_{0}^{1}\ \ =\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi :$$

գ) Դիտարկենք

$$\int_{a}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}\ ,\quad a<b\ ,\ \lambda>0 \tag{2.3}$$

ինտեգրալը և պարզենք, թե λ-ի ո՞ր արժեքների դեպքում է այս ինտեգրալը զուգամետ:

$\lambda=1$ դեպքում ($a<\eta<b$)՝

$$\int_{\eta}^{b}\frac{dx}{x-a}=\ln(b-a)-\ln(\eta-a)\to+\infty\text{, երբ } \eta\to a+:$$

$\lambda\neq 1$ դեպքում՝

$$\int_{\eta}^{b}\frac{dx}{(x-a)^{\lambda}}=\frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}-\frac{(\eta-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\to\begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda<1\\ +\infty, & \lambda>1\end{cases}:$$

Հետևաբար, (2.3) ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $\lambda<1$, և տարամետ է, երբ $\lambda\geq 1$: Մասնավոր դեպքում՝ $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ ինտեգրալը* զուգամետ է, երբ $\lambda<1$ և տարամետ է, երբ $\lambda\geq 1$:

Համանմանորեն՝ $\int_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$ ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $\lambda<1$ և տարամետ է, երբ $\lambda\geq 1$:

Անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները և դրական ֆունկցիաների դեպքում դրանց բաղդատման

---

* Չշփոթեք սա $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^{\lambda}}$ ինտեգրալի հետ, որը զուգամետ է, երբ $\lambda>1$, և տարամետ է, երբ $\lambda\leq 1$:

հայտանիշները նույնն են, ինչ որ անվերջ սահմաններով անիսկական ինտեգրալներինը, այդ պատճառով էլ մենք դրանք մանրամասն չենք շարադրի:

Բաղդատման հայտանիշների հետևանքներն այս դեպքում ձևակերպվում են հետևյալ կերպ.

1^0. Դիցուք $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{(b-x)^{\lambda}}$, $\lambda>0$: Այդ դեպքում

ա) եթե $\lambda<1$ և $0\le\varphi(x)\le c$, ապա $\displaystyle\int_a^b\frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\lambda}}dx$ ինտեգրալը զուգամետ է,

բ) եթե $\lambda\ge1$ և $\varphi(x)\ge c>0$, ապա $\displaystyle\int_a^b\frac{\varphi(x)}{(b-x)^{\lambda}}dx$ ինտեգրալը տարամետ է:

2^0. Եթե $f(x)\sim\dfrac{c}{(b-x)^{\lambda}}$, երբ $x\to b$, ապա $\lambda<1$ դեպքում ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $\lambda\ge1$ դեպքում՝ տարամետ:

Այս հայտանիշների անալոգները ձևակերպվում են նաև այն դեպքում, երբ եզակիության կետը a -ն է:

Որպես օրինակ ուսումնասիրենք

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx:=B(a,b) \qquad (2.4)$$

ինտեգրալը, որը կոչվում է *Էյլերի (կամ էյլերյան) «բետտա» ֆունկցիա*: Եզակիության կետերը երկուսն են՝ 0-ն և 1-ը:

Երբ $x\to0$, ապա $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{1-a}}$, հետևաբար՝ 0 կետում* (կամ 0 կետի շրջակայքում) (2.4) ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $1-a<1$, այսինքն՝ երբ

---

* Այսինքն՝ $\int_0^c f(x)dx$, $0<c<1$ ինտեգրալը:

$a>0$: Երբ $x\to 1$, ապա $f(x)\sim\dfrac{1}{(1-x)^{1-b}}$, հետևաբար՝ 1 կետում (2.4) ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $b>0$:

Այսպիսով, (2.4) ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $a>0$ և $b>0$:

Այժմ դիտարկենք

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx := \Gamma(a) \tag{2.5}$$

ինտեգրալը, որը կոչվում է *էյլերյան «գամմա» ֆունկցիա*:

Այս դեպքում եզակիության կետերն են 0-ն և ∞ -ը:

Երբ $x\to 0$, ապա $f(x)\sim\dfrac{1}{x^{1-a}}$, հետևաբար 0 կետում (2.5)-ը զուգամիտում է, երբ $a>0$:

Մյուս կողմից, բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, $\int_1^\infty x^A e^{-x}dx$ ինտեգրալը զուգամիտում է A-ի ցանկացած արժեքի դեպքում, քանի որ

$$x^{A+2}e^{-x}\to 0,\ \text{երբ}\ x\to\infty,\ \text{ուստի}\ x^A e^{-x}<\frac{1}{x^2},\ \text{երբ}\ x>x_0:$$

Այսպիսով, (2.5) ինտեգրալը զուգամետ է, երբ $a>0$:

<u>**2. Ֆրուլլանիի ինտեգրալը:**</u> *Ֆրուլլանիի ինտեգրալ* են անվանում

$$\mathcal{I}=\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx\ ,\quad 0<a<b\,,$$

ինտեգրալը, որտեղ $f\in C[0,\infty)$:

Թեորեմ 2.1: *Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=:f(\infty)$ վերջավոր սահմանը, ապա*

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left[f(0)-f(\infty)\right]\ln\frac{b}{a}\ : \tag{2.6}$$

► Եթե $0<\delta<\Delta<\infty$, ապա

$$\mathcal{I}(\delta,\Delta):=\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(ax)}{x}dx-\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(bx)}{x}dx=$$
$$=\int_{a\delta}^{a\Delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{b\delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt=\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(t)}{t}dt-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt: \tag{2.7'}$$

Այս ինտեգրալների համար կիրառելով միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը (V, §4, կետ 4)՝ կստանանք

$$\mathcal{I}(\delta,\Delta)=\left[f(\xi)-f(\eta)\right]\ln\frac{b}{a} \tag{2.7}$$

հավասարությունը, որտեղ $a\delta<\xi<b\delta$, $a\Delta<\eta<b\Delta$:

(2.7)-ում անցնենք սահմանի, երբ $\delta\to0$, $\Delta\to\infty$: Այդ դեպքում՝ $\xi\to0$, $\eta\to\infty$: Ուստի

$$\lim_{\delta\to0}f(\xi)=f(0)\,,\quad \lim_{\Delta\to\infty}f(\eta)=f(\infty)\,,$$

որտեղից կստանանք (2.6)-ը: ■

Թեորեմ 2.2: *Եթե*

$$\mathcal{I}=\int_{1}^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt \tag{2.8}$$

ինտեգրալը զուգամետ է, ապա

$$\mathcal{I}=f(0)\ln\frac{b}{a}\ : \tag{2.9}$$

► Այս դեպքում ունենք՝

$$\mathcal{I}(\delta,\Delta)=f(\xi)\ln\frac{b}{a}-\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt\,,\ \ a\delta<\xi<b\delta\ : \tag{2.10}$$

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից հետևում է, որ

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta}\frac{f(t)}{t}dt\to0\,,\ \text{երբ}\ \Delta\to\infty\,,$$

ուստի, (2.10)-ում անցնելով սահմանի, երբ $\delta\to0$, $\Delta\to\infty$, կստանանք (2.9)-ը: ■

Օրինակներ: Թեորեմ 2.1-ի համաձայն՝ $\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$ ։

Թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝ $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}dx=\ln\frac{b}{a}$ ։

Թեորեմ 2.1-ի համաձայն՝ $\int\limits_0^{\infty}\frac{arctgax-arctgbx}{x}dx=-\frac{\pi}{2}\ln\frac{b}{a}$ ։

<u>**3. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը ընդհանուր դեպքում:**</u>

Թեորեմ 2.3: *Որպեսզի*

$$\int\limits_a^{\omega}f(x)dx\ ,\ \ a<\omega\le\infty$$

անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա E թիվ, այնպիսին, որ

$$E<A<A'<\omega\Rightarrow\left|\int\limits_A^{A'}f(x)dx\right|<\varepsilon\ ։ \tag{2.11}$$

► $\omega=+\infty$ դեպքը արդեն քննարկել ենք (§1, կետ 5): $\omega<\infty$ դեպքում (2.11)-ը

$$F(A)=\int\limits_a^{A}f(x)dx\ ,\ \ a\le A<\omega$$

ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու վերաբերյալ Կոշիի պայմանն է (II, §5, կետ 9): ■

Այն դեպքում, երբ անիսկական ինտեգրալի եզակիությունը ինտեգրալի ստորին սահմանն է (վերջավոր կամ $-\infty$), Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Որպեսզի

$$\int\limits_{\omega}^{b}f(x)dx\ ,\ \ -\infty\le\omega<b\ ,$$

անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա E թիվ, այնպիսին, որ

$$\omega < A < A' < E \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon \text{ :}$$

§3. ՄԱՍԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԵՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ

1. Մասերով ինտեգրում: Դիցուք u և v ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են* $[a,b)$ միջակայքում, $a < b \le +\infty$: Այդ դեպքում կամայական $\eta \in (a,b)$ թվի համար ճիշտ է մասերով ինտեգրման բանաձևը՝

$$\int_a^\eta udv = uv\Big|_a^\eta - \int_a^\eta vdu\,, \quad a < \eta < b \text{ :}$$

Այստեղ առկա է փոփոխականի վերին սահմանով երեք արտահայտություն: Եթե այդ երեքից կամայական երկուսը ունենան վերջավոր սահման, երբ $\eta \to b$, ապա երրորդը նույնպես կունենա վերջավոր սահման և կստանանք՝

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu\,,$$

որտեղ

$$uv\Big|_a^b = \lim_{x \to b} u(x)v(x) - u(a)v(a) \text{ :}$$

Մենք դիտարկեցինք այն դեպքը, երբ b-ն միակ եզակիության կետն է: Մնացած դեպքերում դատողությունները նույնն են:

Օրինակներ: 1) $\int_0^1 \ln xdx = x\ln x\Big|_0^1 - \int_0^1 xd\ln x = -1$: Այստեղ եզակիության կետը 0-ն է:

2) $$\int_0^{\pi/2} \ln\sin xdx = x\ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{x}{tgx}dx \text{ :}$$

---

* Ունեն անընդհատ ածանցյալ:

Ստացված ինտեգրալն իսկական ինտեգրալ է, որովհետև ենթինտեգրալ ֆունկցիան եզակիության կետի (որը 0-ն է) շրջակայքում սահմանափակ է: Այսպիսով, մասերով ինտեգրման միջոցով ապացուցվեց, որ $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x dx$ ինտեգրալը զուգամետ է:

3) $\mathcal{I}_n = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = -\int_0^\infty t^n de^{-t} = -t^n e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt^n =$

$= n\int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n\mathcal{I}_{n-1}$: Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ կստանանք

$$\mathcal{I}_n = n!$$

հավասարությունը:

<u>**2. Փոփոխականի փոխարինում:**</u> Ենթադրենք f ֆունկցիան անընդհատ է $[a,b)$ միջակայքում, $a < b \le \infty$: Քննարկենք

$$\int_a^b f(x)dx$$

անիսկական ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման հարցը:

Եթե $\varphi(t)$-ն խիստ մոնոտոն է և $\varphi'(t)$-ն անընդհատ է $[\alpha,\beta)$ ($\beta \le \infty$) (կամ $(\beta,\alpha]$ ($\beta \ge -\infty$)) միջակայքում, ընդ որում $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t\to\beta}\varphi(t) = b$, ապա տեղի ունի փոփոխականի փոխարինման բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \qquad (3.1)$$

պայմանով, որ այս ինտեգրալներից մեկը գոյություն ունի (այդ դեպքում մյուսը նույնպես գոյություն ունի): Նկատենք նաև, որ երբ β-ն վերջավոր է, աջ կողմի ինտեգրալը կարող է լինել նաև իսկական ինտեգրալ:

(3.1)-ն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $t_0 \in (\alpha,\beta)$ կետ և նշանակենք $x_0 = \varphi(t_0)$: Այդ դեպքում՝

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_\alpha^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt : \qquad (3.2)$$

Եթե գոյություն ունի (3.1)-ի ինտեգրալներից մեկը, ապա (3.2)-ում անցնելով սահմանի, երբ $t_0 \to \beta$ կամ, որ նույնն է, $x_0 \to b$, կստանանք (3.1)-ը:

Օրինակներ: ա) Հաշվենք $\mathcal{I} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ինտեգրալը:

Նշանակենք $x = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$: Այդ դեպքում՝ $dx = (b-a)\sin 2\varphi d\varphi$, ուստի

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{(b-a)\sin 2\varphi d\varphi}{\sqrt{(b-a)\sin^2\varphi(b-a)\cos^2\varphi}} = \int_0^{\pi/2} 2d\varphi = \pi :$$

բ) Ցույց տանք, որ $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ և $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ ինտեգրալները զուգամետ են: Դրանք կոչվում են *Ֆրենելի ինտեգրալներ*:

Նշանակելով՝ $x^2 = t$, կստանանք՝ $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ուստի

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt :$$

Ստացված ինտեգրալներից առաջինը զուգամետ է, քանի որ $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \to 0$, երբ $t \to 0$, իսկ երկրորդը զուգամետ է Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն:

XII ԳԼՈՒԽ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սահմանումը:

Դիցուք X-ը և Y-ը թվային բազմություններ են, $f(x,y)$ ֆունկցիան որոշված է $X\times Y$ դեկարտյան արտադրյալի վրա, ընդ որում, y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է (y_0-ն կարող է լինել թե' վերջավոր, թե' անվերջ):

Սահմանում:

1) *Դիցուք y_0-ն վերջավոր է: Կասենք, որ y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա և կգրենք՝*

$$f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x),\ \text{երբ}\ y\to y_0,\ x\in X,$$

կամ՝

$$f(x,y)\underset{y\to y_0}{\rightrightarrows}\varphi(x),\ x\in X,$$

եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $0<|y-y_0|<\delta$ պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր $y\in Y$-ի համար $|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$ անհավասարությունը տեղի ունի X բազմությանը պատկանող բոլոր x կետերի համար՝

$$0<|y-y_0|<\delta,\ y\in Y\Rightarrow|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon,\ x\in X: \qquad (1.1)$$

2) *Կասենք, որ y-ը $y_0=+\infty$-ին ձգտելիս $f(x,y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա՝ $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, երբ $y\to+\infty$, $x\in X$, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ*

$$y > E, y \in Y \Rightarrow \left| f(x,y) - \varphi(x) \right| < \varepsilon,\ x \in X : \tag{1.2}$$

2') *Կասենք, որ y-ը $y_0 = -\infty$-ին ձգտելիս $f(x,y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա՝ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, երբ $y \to -\infty$, $x \in X$, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ*

$$y < E, y \in Y \Rightarrow \left| f(x,y) - \varphi(x) \right| < \varepsilon,\ x \in X : \tag{1.2'}$$

Մասնավորաբար, երբ Y բազմությունը համընկնում է N բնական թվերի բազմության հետ, 2) սահմանումը վերածվում է ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության սահմանմանը: Այսինքն՝ *ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարի ընդհանրացումն է:*

Կարևոր օրինակ: *Եթե $f \in C([a,b] \times [c,d])$, ապա կամայական $y_0 \in [c,d]$ կետի համար*

$$f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0),\ \text{երբ}\ y \to y_0,\ x \in [a,b]:$$

► Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x' - x''| < \delta,\ x', x'' \in [a,b] \\ |y' - y''| < \delta,\ y', y'' \in [c,d] \end{array}\right\} \Rightarrow \left| f(x',y') - f(x'',y'') \right| < \varepsilon :$$

Այստեղ վերցնելով $y'' = y_0$, $y' = y$, $x' = x'' = x$՝ կստանանք (1.1)-ը: ■

Լրացում: Միավորելով վերջավոր և անվերջ կուտակման կետերի դեպքերը՝ հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սահմանումը կարելի է ձևակերպել y_0 կուտակման կետի շրջակայքերի լեզվով.

կասենք, որ y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի y_0-ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ x \in X : \qquad (1.3)$$

2. Ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը:

Թեորեմ 1.1: *Որպեսզի*

$$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x),\ y \to y_0,\ x \in X,$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա y_0-ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$$y, y' \in U \cap Y,\ y, y' \neq y_0 \Rightarrow |f(x,y) - f(x,y')| < \varepsilon, x \in X : \qquad (1.4)$$

► (1.4)-ի անհրաժեշտությունն անմիջապես հետևում է (1.3)-ից: Ապացուցենք (1.4)-ի բավարարությունը:

Վերցնենք կամայական $x \in X$ հաստատագրված կետ: Այդ դեպքում $f(x,y)$-ը կդառնա y-ից կախված մեկ փոփոխականի ֆունկցիա, իսկ (1.4)-ը կդառնա այդ ֆունկցիայի համար վերջավոր սահմանի գոյության Կոշիի պայմանը (II, §5, 9): Ուստի՝ հաստատագրված x-ի դեպքում $f(x,y)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, երբ $y \to y_0$: Այդ սահմանը նշանակենք $\varphi(x)$-ով: Այնուհետև (1.4)-ում x-ը և y-ը հաստատագրենք, իսկ y'-ը ձգտեցնենք y_0-ի: Անցնելով սահմանի՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի y_0-ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon,\ x \in X,$$

այսինքն՝ $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, երբ $y \to y_0$, $x \in X$: ■

3. Ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության Հայնեի սահմանումը:

Դիցուք՝ $f : X \times Y \to R$, y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է:

Կասենք, որ y-ը y_0-ին ձգտելիս $f(x,y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա, եթե յուրաքանչյուր $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \to y_0$ հաջորդականության համար՝

$$f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x),\ \text{երբ}\ n \to \infty,\ x \in X :$$

Ապացուցենք, որ *Կոշիի և Հայնեի սահմանումները համարժեք են*:

► Սահմանափակվենք այն դեպքով, երբ y_0-ն վերջավոր է:

Նախ ապացուցենք, որ *Կոշիի պայմանից բխում է Հայնեի պայմանը*: Իրոք, $f(x,y)$-ը բավարարում է Կոշիի պայմանին, նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |y - y_0| < \delta,\ y \in Y \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon,\ x \in X:$$

Վերցնենք որևէ $y_n \to y_0$ հաջորդականություն, $y_n \in Y,\ y_n \neq y_0$: Այդ դեպքում գոյություն կունենա $N(\delta)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\delta) \Rightarrow |y_n - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x,y_n) - \varphi(x)| < \varepsilon:$$

Իսկ դա նշանակում է, որ $f(x,y_n) \rightrightarrows \varphi(x),\ x \in X$:

Այժմ ցույց տանք, որ *Հայնեի պայմանից բխում է Կոշիի պայմանը*: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Կոշիի պայմանը չի բավարարվում՝ նշանակում է, որ մի որևէ $\varepsilon_0 > 0$ թվի համար ինչպիսի $\delta > 0$ թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա (x_δ, y_δ) կետ, այնպիսին, որ $0 < |y_\delta - y_0| < \delta$, $y_\delta \in Y$, բայց

$$|f(x_\delta, y_\delta) - \varphi(x_\delta)| \geq \varepsilon_0,\ x_\delta \in X:$$

Վերցնելով $\delta = \dfrac{1}{n},\ n = 1,2,\ldots$ և համապատասխան կետը նշանակելով (x_n, y_n), կստանանք, որ $y_0 \neq y_n \in Y$, $y_n \to y_0$, բայց

$$|f(x_n, y_n) - \varphi(x_n)| \geq \varepsilon_0,\ x_n \in X:$$

Սա հակասում է Հայնեի պայմանին: ■

Կիրառություն 1 (Սահմանային ֆունկցիայի անընդհատությունը) :

Դիցուք՝ $f : X \times Y \to R$, իսկ y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է:

Թեորեմ 1.2: *Դիցուք՝*

ա) յուրաքանչյուր հաստատագրված $y \in Y$ *արժեքի համար* $f(x,y)$*-ը որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է* X *բազմության վրա,* *բ)* $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, *երբ* $y\to y_0$, $x\in X$ *:*

Այդ դեպքում՝ $\varphi\in C(X)$ *:*

► Վերցնենք որևէ $y_n\to y_0$ հաջորդականություն, $y_n\in Y$, $y_n\neq y_0$: Այդ դեպքում՝ $f(x,y_n)\rightrightarrows\varphi(x)$, $n\to\infty$, $x\in X$:

Մնում է կիրառել ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմը (X, §3, 1, թեորեմ 3.1'): ■

Կիրառություն 2 (Դինիի ընդհանուր թեորեմը): Դիցուք՝ $f:K\times Y\to R$, y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է և $y<y_0$, $\forall y\in Y$:

Թեորեմ 1.3: *Դիցուք՝*

ա) K *-ն կոմպակտ բազմություն է,*

բ) յուրաքանչյուր $y\in Y$ *հաստատագրված արժեքի դեպքում* $f(x,y)\in C(K)$ *և* $f(x,y)$ *-ը աճելով ձգտում է* $\varphi(x)$ *-ին, երբ* y *-ը աճելով ձգտում է* y_0 *-ին,*

գ) $\varphi\in C(K)$ *:*

Այդ դեպքում՝ $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $y\to y_0$, $x\in X$ *:*

► Վերցնենք որևէ $y_n\uparrow y_0$ հաջորդականություն, $y_n\in Y$, $y_n\neq y_0$: Այդ դեպքում $f(x,y_n)$ հաջորդականությունը կբավարարի ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների վերաբերյալ Դինիի թեորեմի պայմաններին (X, §3, 1, թեորեմ 3.2'), ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն կունենա $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$0\le\varphi(x)-f(x,y_{n_0})<\varepsilon,\ x\in X:$$

Այդ դեպքում՝

$$y_{n_0}<y<y_0\Rightarrow|\varphi(x)-f(x,y)|<\varepsilon,\ \ x\in X,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

<u>4. Հաջորդական սահմանների թեորեմը:</u> Դիցուք՝ $f(x,y):X\times Y\to R$, a -ն X -ի կուտակման կետ է, b -ն՝ Y -ի:

Թեորեմ 1.4: *Դիցուք՝*

ա) $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \to b$, $x \in X$,

բ) յուրաքանչյուր $y \in Y$ *կետի համար՝* $f(x,y) \to \psi(y)$, *երբ* $x \to a$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ *և* $\lim\limits_{y\to b}\psi(y)$ *վերջավոր սահմանները և միմյանց հավասար են՝*

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y):$$

► Ապացուցենք այն դեպքում, երբ a-ն և b-ն վերջավոր են:

Նախ ցույց տանք, որ $\lim\limits_{y\to b}\psi(y)$ սահմանը գոյություն ունի ու վերջավոր է: Հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, ա)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{c} 0<|y-b|<\delta \\ 0<|y'-b|<\delta \\ y,y'\in Y \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x,y)-f(x,y')|<\varepsilon, \quad x\in X:$$

y-ը և y'-ը ֆիքսելով, իսկ x-ը ձգտեցնելով a-ի՝ կստանանք

$$\left.\begin{array}{c} 0<|y-b|<\delta \\ 0<|y'-b|<\delta \\ y,y'\in Y \end{array}\right\} \Rightarrow |\psi(y)-\psi(y')|\le\varepsilon,$$

ինչը b կետում ψ ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու Կոշիի պայմանն է: Ուստի գոյություն ունի

$$\lim_{y\to b}\psi(y) = A \tag{1.5}$$

վերջավոր սահմանը:

Ցույց տանք, որ $\varphi(x) \to A$, երբ $x \to a$: Ունենք՝

$$|\varphi(x)-A| \le |\varphi(x)-f(x,y)| + |f(x,y)-\psi(y)| + |\psi(y)-A|: \tag{1.6}$$

ա)-ից և (1.5)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի մի $y_0 \in Y$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|\varphi(x) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ x \in X \quad \text{և} \quad |\psi(y_0) - A| < \frac{\varepsilon}{3} : \tag{1.7}$$

բ)-ի համաձայն, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x, y_0) - \psi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3} : \tag{1.8}$$

(1.6)-ի մեջ տեղադրելով $y = y_0$ և հաշվի առնելով (1.7)-(1.8)-ը՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Դիտողություն: Այս թեորեմի ապացույցը կարելի է հանգեցնել ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմին (X, §3, 2, թեորեմ 3.3'): Ուշադիր ընթերցողը կնկատի, որ այստեղ մենք կրկնեցինք հաջորդականությունների դեպքում կատարված դատողությունները: Բացի դրանից, դժվար չէ նկատել, որ թեորեմ 1.4-ի պայմաններում գոյություն ունի նաև $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y)$ կրկնակի սահմանը:

§2. ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Դիցուք՝ $f : [a, b] \times Y \to R$ և յուրաքանչյուր $y \in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում $f(x, y)$-ը, որպես x փոփոխականից կախված ֆունկցիա, ինտեգրելի է $[a, b]$ հատվածում: Այս պայմանն այսուհետ կգրենք $f(\cdot, y) \in \Re[a, b]$, $y \in Y$ տեսքով: Դիտարկենք y-ից կախված հետևյալ ֆունկցիան (ինտեգրալը)՝

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y :$$

Այն կանվանենք *պարամետրից կախված ինտեգրալ*, որտեղ y փոփոխականը կոչվում է պարամետր: Այս պարագրաֆում մեր նպատակն է ուսումնասիրել I ֆունկցիայի հատկությունները:

1. <u>Սահմանային անցում պարամետրից կախված ինտեգրալի նշանի տակ:</u> Դիցուք՝ $f:[a,b]\times Y\to R$, y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է:

Թեորեմ 2.1: *Դիցուք՝* 1) $f(\cdot,y)\in\Re[a,b]$, $y\in Y$,

2) $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, $y\to y_0$, $x\in[a,b]$:

Այդ դեպքում՝ ա) $\varphi\in\Re[a,b]$,

$$\textit{բ)}\ \lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b\lim_{y\to y_0}f(x,y)dx\,:$$

Այս դեպքում ասում են, որ կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ:

► Վերցնենք որևէ $y_n\to y_0$ հաջորդականություն, $y_n\in Y$, $y_n\neq y_0$: Այդ դեպքում՝ $f(x,y_n)\rightrightarrows\varphi(x)$, $x\in[a,b]$, ուստի $\varphi\in\Re[a,b]$ (X, §3, 3, լեմմա 3.1):

բ)-ն ապացուցելու համար գնահատենք ինտեգրալների տարբերությունը: Ունենք՝

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\right|\le\int_a^b\left|f(x,y)-\varphi(x)\right|dx\,:$$

Մյուս կողմից, 2) պայմանի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի y_0-ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$$y\in U\cap Y, y\neq y_0\Rightarrow\left|f(x,y)-\varphi(x)\right|<\varepsilon\,,\ x\in[a,b]:$$

Հետևաբար՝

$$\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b\varphi(x)dx\right|\le\varepsilon(b-a)\,,$$

ինչից էլ հետևում է բ)-ն: ■

Թեորեմ 2.2 (պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը): *Եթե* $f \in C([a,b]\times[c,d])$, *ապա* $I \in C[c,d]$*:*

► Վերցնենք կամայական $y_0 \in [c,d]$ և ապացուցենք, որ I ֆունկցիան y_0 կետում անընդհատ է: Կանտորի թեորեմի համաձայն (տե՛ս կարևոր օրինակը)՝ $f(x,y) \rightrightarrows f(x,y_0)$, $y \to y_0$, $x \in [a,b]$, ուստի թեորեմ 2.1-ի համաձայն՝ $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$: ■

2. Պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցումը:

Դիցուք՝ $f:[a,b]\times[c,d]\to R$:

Թեորեմ 2.3: *Եթե*

1) $f(\cdot,y)\in C[a,b]$, $y\in[c,d]$,

2) $f'_y \in C\big([a,b]\times[c,d]\big)$,

ապա $I(y)$ *ֆունկցիան դիֆերենցելի է*[*] $[c,d]$ *հատվածում և*

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx\,,\; y\in[c,d]\,: \tag{2.1}$$

Այս դեպքում ասում են, որ կարելի է ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ:

Ածանցման (2.1) բանաձևը կոչվում է *Լայբնիցի կանոն*:

► Վերցնենք կամայական $y_0\in[c,d]$ կետ և (2.1) բանաձևն ապացուցենք այդ կետում: Ունենք, որ

$$\begin{aligned}\frac{I(y_0+\Delta y)-I(y_0)}{\Delta y} &= \int_a^b \frac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}\,dx = \\ &= \int_a^b f'_y(x,y_0+\theta\Delta y)\,dx,\quad 0<\theta=\theta(x,y)<1,\end{aligned} \tag{2.2}$$

որտեղ վերջին քայլում օգտվել ենք Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից:

Մյուս կողմից, թեորեմի 2) պայմանի և Կանտորի թեորեմի համաձայն՝

---

[*] Նախորդ թեորեմից ելնելով՝ այն կլինի նույնիսկ անընդհատ դիֆերենցելի:

$$f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y) \rightrightarrows f'_y(x, y_0), \text{ երբ } \Delta y \to 0,\ x \in [a,b]:$$

Ուստի, (2.2) ինտեգրալի համար կիրառելով ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցման թեորեմը, կստանանք պահանջվող հավասարությունը.

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0)dx = I'(y_0): \blacksquare$$

Դիտողություն:

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \int_{y_0}^{y} f'_y(x,t)dt + \left[f(x,y_0) - f(x_0,y_0)\right]$$

հավասարությունից հետևում է, որ եթե բավարարվում են թեորեմ 2.3-ի պայմանները, ապա $f \in C([a,b]\times[c,d])$:

<u>**3. Պարամետրից կախված ինտեգրալի ինտեգրումը:**</u>

Թեորեմ 2.4: Եթե $f \in C([a,b]\times[c,d])$, ապա

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)dy \right\} dx: \tag{2.3}$$

► Թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝ (2.3)-ի ինտեգրալները գոյություն ունեն: Ապացուցենք դրանց հավասարությունը: Նշանակենք՝

$$\Phi(\eta) = \int_c^{\eta} I(y)dy,\quad \eta \in [c,d], \tag{2.4}$$

$$\Psi(\eta) = \int_a^b \left\{ \int_c^{\eta} f(x,y)dy \right\} dx,\quad \eta \in [c,d], \tag{2.5}$$

և ցույց տանք, որ $\Phi(\eta) = \Psi(\eta),\ \eta \in [c,d]$ (այստեղ տեղադրելով $\eta = d$՝ կստանանք (2.3)-ը):

Քանի որ $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$, ապա բավական է ապացուցել, որ

$$\Phi'(\eta) = \Psi'(\eta),\quad \eta \in [c,d]: \tag{2.6}$$

Նախ նկատենք, որ $\Phi'(\eta) = I(\eta)$՝ որպես փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի ածանցյալ: Մնում է ցույց տալ, որ

$$\Psi'(\eta) = I(\eta)\,, \quad \eta \in [c,d]: \tag{2.7}$$

Այդ նպատակով դիտարկենք $F(x,\eta) := \int_c^\eta f(x,y)dy$ ֆունկցիան: Քանի որ

$$F'_\eta(x,\eta) = f(x,\eta)\,, \tag{2.8}$$

հետևաբար, (2.7)-ը ապացուցելու համար մեզ մնում է համոզվել, որ (2.5) ինտեգրալի համար Լայբնիցի կանոնը կիրառելի է, այսինքն՝ պետք է ցույց տալ, որ F ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 2.3-ի պայմաններին.

1) $F(\cdot,\eta) \in C[a,b]$, 2) $F'_\eta \in C([a,b]\times[c,d])$:

Իսկապես. առաջին պայմանը հետևում է թեորեմ 2.2-ից, իսկ երկրորդը՝ (2.8) հավասարությունից: ■

4. Միայն x-ից կախված արտադրիչի ներմուծումը: Դիտարկենք

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)g(x)dx\,, \tag{2.9}$$

ինտեգրալը, որտեղ $g \in \Re[a,b]$ կամ g-ն բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական իմաստով:

Թեորեմ 2.1': *Դիցուք՝ $f:[a,b]\times Y \to R$, y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է: Եթե 1) $f(\cdot,y) \in \Re[a,b]$, $y \in Y$, 2) $f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x)$, երբ $y \to y_0$, $x \in [a,b]$, ապա ա) $\varphi \in \Re[a,b]$, բ) $\lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)g(x)dx = \int_a^b \varphi(x)g(x)dx$:*

► ա)-ն ապացուցվել է թեորեմ 2.1-ում, ապացուցենք բ)-ն: Այդ նպատակով գնահատենք ինտեգրալների տարբերությունը՝

$$\left|\int_a^b f(x,y)g(x)dx - \int_a^b \varphi(x)g(x)dx\right| = \left|\int_a^b \left[f(x,y)-\varphi(x)\right]g(x)dx\right| \le$$
$$\le \int_a^b \left|f(x,y)-\varphi(x)\right|\left|g(x)\right|dx: \tag{2.10}$$

2) պայմանի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} 0 < |y - y_0| < \delta \\ y \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \varepsilon\,, \quad x \in [a,b]: \tag{2.11}$$

(2.10) - (2.11)-ից կստանանք՝

$$\left.\begin{array}{l} |y - y_0| < \delta \\ y \in Y \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\int_a^b f(x,y)g(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx\right| < \varepsilon \int_a^b |g(x)|dx:$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

2.2-2.4 թեորեմների նմանակները (2.9) ինտեգրալի համար ձևակերպվում և ապացուցվում են նույն ձևով, ինչպես $g(x)$ արտադրիչի բացակայության դեպքում: Միակ տարբերությունն այն է, որ թեորեմ 2.1-ի փոխարեն օգտագործվում է թեորեմ $2.1^{'}$-ը:

§3. ՊԱՐԱՄԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Առաջիկայում կօգտագործենք ՊԿԱԻ հապավումը, որը նշանակում է *պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալ*:

1. ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտությունը:

Դիցուք՝ $f:[a,\omega)\times Y \to R$, որտեղ ω-ն կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես և՝ $+\infty$: Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր $y \in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում

$$I(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)dx\,, \quad y \in Y\,, \tag{3.1}$$

անիսկական ինտեգրալը* զուգամետ է: Այսինքն՝ $f(\cdot,y) \in \Re[a,A]$, $A \in (a,\omega)$ և

$$F(y,A) = \int_a^A f(x,y)dx\,, \quad a \le A < \omega$$

---

* Վերջավոր ω-ի դեպքում կենթադրենք, որ առկա է անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ:

ֆունկցիան, որը որոշված է $Y\times[a,\omega)$ դեկարտյան արտադրյալի վրա, Y բազմության վրա կետորեն զուգամիտում է $I(y)$ ֆունկցիային՝

$$\lim_{A\to\omega}F(y,A)=I(y)\,,\quad y\in Y:$$

Սահմանում: *Կասենք, որ (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա զուգամիտում է հավասարաչափ, եթե*

$$F(y,A)\rightrightarrows I(y)\,,\ A\to\omega\,,\ y\in Y:$$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E<A<\omega\Rightarrow\left|F(y,A)-I(y)\right|<\varepsilon\,,\ y\in Y:$$

Այն դեպքում, երբ անիսկական ինտեգրալի եզակիության կետը ինտեգրալի ստորին սահմանն է, ՊԿԱԻ-ի զուգամիտությունը սահմանվում է նման ձևով: Իսկ այն դեպքում, երբ անիսկական ինտեգրալի թե' վերին և թե' ստորին սահմանները եզակիություններ են,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}f(x,y)dx\,,\ -\infty\le\omega_1<\omega_2\le+\infty\,,\qquad(3.1')$$

ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտությունը սահմանելու համար վերցնում են կամայական $a\in(\omega_1,\omega_2)$ թիվ և (3.1') ինտեգրալը ներկայացնում են երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով՝

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}f(x,y)dx=\int_{\omega_1}^{a}f(x,y)dx+\int_{a}^{\omega_2}f(x,y)dx:\qquad(3.1'')$$

Այս դեպքում (3.1') ինտեգրալը կոչվում է հավասարաչափ զուգամետ Y բազմության վրա, եթե Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ են (3.1'') հավասարության աջ կողմի երկու ինտեգրալները: Դժվար չէ համոզվել, որ այս սահմանումը a-ի ընտրությունից կախված չէ:

2. ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքը:

Թեորեմ 3.1: *Որպեսզի (3.1) ինտեգրալը լինի հավասարաչափ զուգամետ Y բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունենա մի E թիվ, այնպիսին, որ*

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon \,, \ y \in Y : \qquad (3.2)$$

► Քանի որ

$$F(y,A') - F(y,A) = \int_A^{A'} f(x,y)dx \ ,$$

ապա ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի պայմանը $F(y,A)$ ֆունկցիայի համար կընդունի (3.2) տեսքը: ■

<u>**3. ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ:**</u>

1^0. Մաժորանտով հայտանիշը: *Եթե գոյություն ունի $\varphi(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ*

ա) $|f(x,y)| \le \varphi(x)$, $x \in [a,\omega)$, $y \in Y$,

բ) φ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը զուգամետ է՝

$$\int_a^{\omega} \varphi(x)dx < \infty ,$$

ապա (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Այս դեպքում φ ֆունկցիան կոչվում է f ֆունկցիայի կամ (3.1) ինտեգրալի *մաժորանտ*:

► Անիսկական ինտեգրալի վերաբերյալ Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, բ) պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \int_A^{A'} \varphi(x)dx < \varepsilon :$$

Մյուս կողմից, ա) պայմանից հետևում է, որ

$$\left| \int_A^{A'} f(x,y)dx \right| \le \int_A^{A'} \varphi(x)dx , \quad y \in Y :$$

Այս երկու անհավասարություններից հետևում է (3.2)-ը, ուստի ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է: ■

Օրինակ: $\int_1^{\infty}\frac{\sin xy}{x^{\alpha}}dx$ ինտեգրալը $\alpha>1$ դեպքում ամբողջ թվային առանցքի վրա $(y\in R)$ հավասարաչափ զուգամետ է: Այս դեպքում մաժորանտ է $1/x^{\alpha}$ ֆունկցիան:

2^0. Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները: Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները վերաբերում են

$$\int_a^{\omega} f(x,y)g(x,y)dx\,,\quad y\in Y \tag{3.3}$$

տեսքի ինտեգրալներին:

Աբելի հայտանիշը: *Եթե՝ ա)* $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ *ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է* Y *բազմության վրա, բ)* $g(\cdot,y)$ *ֆունկցիան մոնոտոն է և հավասարաչափ սահմանափակ, այսինքն՝ գոյություն ունի* M *թիվ, այնպիսին, որ* $|g(x,y)|\le M$, $x\in[a,\omega)$, $y\in Y$, *ապա (3.3) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է* Y *բազմության վրա:*

Դիրիխլեի հայտանիշը: *Եթե՝ ա) գոյություն ունի* M *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left|\int_a^{A} f(x,y)dx\right|\le M\,,\quad A\in(a,\omega)\,,\quad y\in Y\,,$$

բ) $g(\cdot,y)$ *ֆունկցիան նվազող է և* $g(x,y)\rightrightarrows 0$, *երբ* $x\to\omega$, $y\in Y$, *ապա (3.3) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է* Y *-ի վրա:*

Այս հայտանիշները հետևում են ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից և միջին արժեքի երկրորդ թեորեմից, համաձայն որի, յուրաքանչյուր $y\in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում գոյություն ունի ξ կետ՝ $A\le\xi\le A'$, այնպիսին, որ

$$\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)dx = g(A,y)\int_A^{\xi} f(x,y)dx + g(A',y)\int_{\xi}^{A'} f(x,y)dx\,: \tag{3.4}$$

Աբելի հայտանիշի ապացույցը:

► ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, ա) պայմանից հետևում է, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left|\int_A^{\xi} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\,, \quad \left|\int_{\xi}^{A'} f(x,y)dx\right| < \varepsilon\,,\ y \in Y:$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով բ) պայմանը, (3.4)-ից կստանանք՝

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left|\int_A^{A'} f(x,y)g(x,y)dx\right| < 2M\varepsilon\,,\ y \in Y\,,$$

ուստի (3.3) ինտեգրալը բավարարում է ՊԿԱԻ հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի պայմանին: Դա նշանակում է, որ Y բազմության վրա այն հավասարաչափ զուգամետ է: ■

Դիրիխլեի հայտանիշի պայմաններում (3.4)-ի աջ կողմի գումարելիների մեջ առաջին արտադրիչներն են հավասարաչափ ձգտում զրոյի, իսկ երկրորդ արտադրիչները հավասարաչափ սահմանափակ են Y բազմության վրա:

Դիտողություն: f և g ֆունկցիաներից մեկը կարող է կախված լինել միայն x-ից: Այդպիսի դեպքերում Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշները ձևակերպելիս միայն x-ից կախված ֆունկցիային վերաբերվող պայմանի մեջ «հավասարաչափ» բառը պետք է բաց թողնել:

Օրինակներ: 1) Աբելի հայտանիշի համաձայն,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $a \in [0,\infty)$ միջակայքում: Իրոք, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $f(0) = 1$ ֆունկցիայի ինտեգրալը $[0,\infty)$ միջակայքում զուգամետ է (տես XI, §1, 5), իսկ $g(x,a) = e^{-ax}$ ֆունկցիան ըստ x-ի մոնոտոն է և $|g(x,a)| \le 1$, երբ $x, a \in [0,\infty)$:

2) Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin x dx$$

ինտեգրալը յուրաքանչյուր $a_0 > 0$ թվի համար հավասարաչափ զուգամետ է $[a_0,\infty)$ միջակայքում: Իրոք,

$$\left|\int_0^A \sin x dx\right| \le 2\,,\ \text{երբ}\ 0 < A < \infty\,,$$

իսկ $g(x,a) = e^{-ax}$ ֆունկցիան ըստ x-ի մոնոտոն է և $[a_0,\infty)$ միջակայքում հավասարաչափ ձգտում է զրոյի, քանի որ $a \ge a_0$ դեպքում

$$\left|e^{-ax}\right| \le e^{-a_0 x} \to 0,\ \text{երբ}\ x \to +\infty:$$

3^0. Դինիի հայտանիշը: *Եթե*

ա) $f(x,y) \ge 0$ *և* $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$,

բ) $I(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx,\quad y \in [c,d]$ (3.5)

ինտեգրալը կետորեն զուգամետ է $[c,d]$ *հատվածում,*

գ) $I(y) \in C[c,d]$,

ապա (3.5) ինտեգրալը $[c,d]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է:

► Այս հայտանիշն անմիջապես հետևում է Դինիի ընդհանուր թեորեմից (թեորեմ 1.3): Իրոք, պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, ա) պայմանից հետևում է, որ $A \in (a,\omega)$ հաստատագրված արժեքի դեպքում

$$F(y,A) = \int_a^A f(x,y)dx\,,\ y \in [c,d]$$

ֆունկցիան անընդհատ է $[c,d]$ հատվածում և $F(y,A)$-ն աճելով ձգտում է $I(y)$ անընդհատ ֆունկցիային, երբ A-ն աճելով ձգտում է ω-ին: Ուստի Դինիի ընդհանուր թեորեմի համաձայն`

$$F(y,A) \rightrightarrows I(y),\ A \to \omega,\ y \in [c,d] : \blacksquare$$

<u>**4. ՊԿԱԻ-ի բերումը ֆունկցիոնալ հաջորդականության կամ շարքի:**</u>

(3.1) ինտեգրալը որպես ֆունկցիոնալ հաջորդականության ներկայացնելու համար վերցնենք

$$A_0 = a,\ A_n \in [a,\omega),\ A_n \to \omega$$

պայմաններին բավարարող A_n թվային հաջորդականություն և նշանակենք՝

$$g_n(y) = \int_a^{A_n} f(x,y)dx,\quad y \in Y : \tag{3.6}$$

Այդ դեպքում, ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի և Հայնեի սահմանումների համարժեքության համաձայն, որպեսզի (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա լինի հավասարաչափ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $A_n \in [a,\omega),\ A_n \to \omega$ հաջորդականության համար՝

$$g_n(y) \rightrightarrows I(y),\ \text{երբ}\ n \to \infty,\ y \in Y :$$

Այնուհետև, քանի որ (3.6) հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտությունը համարժեք է

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx,\quad y \in Y \tag{3.7}$$

ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաչափ զուգամիտությանը, ուստի (3.1) ինտեգրալի հավասարաչափ զուգամիտությունը համարժեք է (3.7) շարքի հավասարաչափ զուգամիտությանը:

§4. ՊԿԱԻ-Ի ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Այս պարագրաֆում կապացուցենք §2-ում ապացուցված թեորեմների նմանակները անիսկական ինտեգրալների համար: Այս դեպքում §2-ում ձևակերպված թեորեմների պայմաններին ավելանում են լրացուցիչ պայմաններ՝ համապատասխան անիսկական ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիտության պայմանները:

<u>1. ՊԿԱԻ-ի անընդհատությունը:</u>

Թեորեմ 4.1: *Դիցուք՝*

1) $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$,

2) $I(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ *անիսկական ինտեգրալը* $[c,d]$ *հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է:*

Այդ դեպքում՝ $I \in C[c,d]$ *:*

► Թեորեմ 2.2-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $A \in (a,\omega)$ հաստատագրված արժեքի դեպքում

$$F(y,A)=\int_a^{A} f(x,y)dx$$

ֆունկցիան անընդհատ է $[c,d]$ հատվածում և 2)-ի համաձայն՝

$$F(y,A) \rightrightarrows I(y),\ A\to\omega,\ y\in[c,d]:$$

Սահմանային ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն՝ $I \in C[c,d]$: ■

<u>2. Սահմանային անցում ՊԿԱԻ-ի նշանի տակ:</u>

Դիցուք՝ $a<\omega\le\infty$, $f:[a,\omega)\times Y\to R$ և y_0-ն Y-ի կուտակման կետ է: Դիտարկենք

$$I(y)=\int_a^{\omega} f(x,y)dx,\ y\in Y \qquad (4.1)$$

անիսկական ինտեգրալը:

Թեորեմ 4.2: *Դիցուք՝*

1) $f(\cdot,y)\in C[a,\omega)$, $y\in Y$,

2) Յուրաքանչյուր $A\in[a,\omega)$ *թվի դեպքում՝* $f(x,y)\rightrightarrows\varphi(x)$, *երբ* $y\to y_0$, $x\in[a,A]$, *3) Y բազմության վրա (4.1) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է: Այդ դեպքում՝*

ա) $\int_a^{\omega} \varphi(x)dx$ *ինտեգրալը զուգամետ է,*

բ) $\lim_{y \to y_0} \int_a^{\omega} f(x,y)dx = \int_a^{\omega} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx$ *:*

► Նախ ապացուցենք ա)-ն: 3)-ից հետևում է (թեորեմ 3.1), որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x,y)dx \right| < \varepsilon, \quad y \in Y:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $y \to y_0$, համաձայն թեորեմ 2.1-ի կստանանք՝

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} \varphi(x)dx \right| \le \varepsilon: \tag{4.2}$$

Անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության վերաբերյալ Կոշիի սկզբունքի համաձայն, (4.2)-ից հետևում է ա)-ն:

բ)-ն ապացուցելու համար գնահատենք ինտեգրալների տարբերությունը: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \left| I(y) - \int_a^{\omega} \varphi(x)dx \right| &\le \left| I(y) - \int_a^{A} f(x,y)dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx \right| + \left| \int_A^{\omega} \varphi(x)dx \right|: \end{aligned} \tag{4.3}$$

3)-ից և ա)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $A \in (a,\omega)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left| I(y) - \int_a^{A} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \; y \in Y \;\text{ և }\; \left| \int_A^{\omega} \varphi(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}: \tag{4.4}$$

2)-ից հետևում է, որ (թեորեմ 2.1)

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)dx=\int_a^A \varphi(x)dx:$$

Ուստի գոյություն ունի y_0-ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$$y\in U\cap Y, y\neq y_0 \Rightarrow \left|\int_a^A f(x,y)dx-\int_a^A \varphi(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}: \qquad (4.5)$$

Այսպիսով, (4.3)-(4.5) գնահատականներից հետևում է, որ

$$y\in U\cap Y, y\neq y_0 \Rightarrow \left|I(y)-\int_a^\omega \varphi(x)dx\right|<\varepsilon:$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Առաջադրանք: Համոզվել, որ $F(y,A)=\int_a^A f(x,y)dx$ ֆունկցիան բավարարում է հաջորդական սահմանների վերաբերյալ թեորեմ 1.4-ին և թեորեմ 4.2-ը բխեցնել այդ թեորեմից:

Այժմ բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ առանց երրորդ պայմանի թեորեմ 4.2-ի եզրակացությունը ճիշտ չէ: Դրա համար կառուցենք $f_n(x)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հետևյալ կերպ՝

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x\in[0,n]\\ 0, & x\in[n+1,\infty)\end{cases},$$

իսկ $[n,n+1]$ հատվածում f_n ֆունկցիան գծային է: Այդ դեպքում $f_n(x)\rightrightarrows 0=\varphi(x)$, $n\to\infty$, $x\in[0,\infty)$, սակայն $\int_0^\infty f_n(x)dx\geq 1$, իսկ $\int_0^\infty \varphi(x)dx=0$:

Թեորեմ 4.3 (Մոնոտոն զուգամիտության թեորեմը): *Դիցուք y_0-ն Y բազմության կուտակման կետ է և յուրաքանչյուր $y\in Y$ տարրի համար՝ $y<y_0$: Եթե*

1) $0 \le f(\cdot, y) \in C[a,\omega)$, $y \in Y$,

2) $f(x,y)$ *-ը աճելով ձգտում է* $\varphi(x)$ *անընդհատ ֆունկցիային, երբ* y *-ը աճելով ձգտում է* y_0 *-ին,*

3) Y *բազմության վրա (4.1) ինտեգրալը կետորեն զուգամետ է, ապա*

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx = \int_a^\omega \varphi(x)dx : \tag{4.6}$$

Այստեղ աջ կողմի ինտեգրալը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ $+\infty$ *:*

► Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ

$$\int_a^\omega \varphi(x)dx < \infty , \tag{4.7}$$

և համոզվենք, որ այդ դեպքում բավարարվում են թեորեմ 4.2-ի պայմանները: Իրոք, Դինիի ընդհանուր թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $A \in (a,\omega)$ թվի համար՝

$$f(x,y) \rightrightarrows \varphi(x), \text{ երբ } y \to y_0, \ [a, A], \tag{4.8}$$

այսինքն՝ թեորեմ 4.2-ի երկրորդ պայմանը բավարարված է: Երրորդ պայմանը հետևում է ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության մաժորանտով հայտանիշից, քանի որ $0 \le f(x,y) \le \varphi(x)$ և φ -ի ինտեգրալը զուգամետ է: Այսպիսով, թեորեմ 4.2-ի համաձայն, (4.6)-ը տեղի ունի:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ

$$\int_a^\omega \varphi(x)dx = \infty : \tag{4.9}$$

Պետք է ապացուցենք, որ

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\omega f(x,y)dx = \infty :$$

(4.9)-ից հետևում է, որ կամայական E թվի համար գոյություն ունի $A \in (a,\omega)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^A \varphi(x)dx > E :$$

Մյուս կողմից, (4.8)-ից հետևում է (թեորեմ 2.1), որ

$$\lim_{y\to y_0}\int_a^A f(x,y)dx=\int_a^A \varphi(x)dx>E:$$

Ուստի գոյություն ունի $E_1<y_0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$E_1<y<y_0 \Rightarrow \int_a^A f(x,y)dx>E:$$

Հետևաբար՝

$$E_1<y<y_0 \Rightarrow \int_a^\omega f(x,y)dx\ge\int_a^A f(x,y)dx>E,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Հետևանք (դրական շարքերի ինտեգրումը): *Դիցուք՝*

1) $0\le u_k(x)\in C[a,\omega)$, $\omega\le\infty$, $k\in\mathbb{N}$,

2) $\int_a^\omega u_k(x)dx$ *ինտեգրալները զուգամետ են,* $k=1,2,\dots$,

3) $\sum_{k=1}^\infty u_k(x)$ *շարքը* $[a,\omega)$ *միջակայքում կետորեն զուգամիտում է* $\varphi(x)$ *անընդհատ ֆունկցիային:*

Այդ դեպքում

$$\int_a^\omega \varphi(x)dx=\sum_{k=1}^\infty\int_a^\omega u_k(x)dx,$$

որտեղ շարքը կարող է լինել ինչպես զուգամետ, այնպես էլ՝ տարամետ:

► Նշանակենք՝ $f_n(x)=\sum_{k=1}^n u_k(x)$: Այդ դեպքում $f_n(x):=f(x,n)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում են թեորեմ 4.3–ի պայմանները, ուստի $\lim_{n\to\infty}\int_a^\omega\sum_{k=1}^n u_k(x)dx=\int_a^\omega\varphi(x)dx$, այսինքն՝ $\int_a^\omega\varphi(x)dx=\sum_{k=1}^\infty\int_a^\omega u_k(x)dx$: ■

3. ՊԿԱԻ-ի ածանցումը:

Թեորեմ 4.4: *Դիցուք՝*

1) $f(\cdot, y) \in C[a,\omega)$, $y \in [c,d]$,

2) $f_y' \in C([a,\omega)\times[c,d])$,

3) $\int_a^{\omega} f(x,y)dx$ *անիսկական ինտեգրալը զուգամիտում է գոնե մեկ կետում,*

4) $\int_a^{\omega} f_y'(x,y)dx$ *ինտեգրալը* $[c,d]$ *հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է:*

Այդ դեպքում

ա) $I(y) = \int_a^{\omega} f(x,y)dx$ *ինտեգրալը* $[c,d]$ *հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է,*

բ) $I(y)$ *ֆունկցիան* $[c,d]$ *հատվածում դիֆերենցելի է և*

$$I'(y) = \int_a^{\omega} f_y'(x,y)dx\,,\ y \in [c,d]$$

(այլ կերպ ասած՝ I *ֆունկցիայի ածանցյալը կարելի է հաշվել Լայբնիցի կանոնով):*

► Վերցնենք կամայական $A_n \uparrow \omega$ հաջորդականություն և նշանակենք՝

$$g_n(y) = \int_a^{A_n} f(x,y)dx :$$

Այդ դեպքում $g_n(y)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը կբավարարի ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների ածանցման վերաբերյալ թեորեմ 3.5'-ի (X, §3, 4) պայմաններին: Իրոք, պարամետրից կախված իսկական ինտեգրալի ածանցման թեորեմ 2.3-ի համաձայն, g_n ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են $[c,d]$ հատվածում և

$$g'_n(y)=\int_a^{A_n} f'_y(x,y)dx:$$

Բացի դրանից, 4)-ից հետևում է, որ $g'_n(y)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $[c,d]$ հատվածում: Հետևաբար, նշված թեորեմ 3.5'-ի համաձայն, կստանանք՝

Ա) $g_n(y)\rightrightarrows I(y)$, $y\in[c,d]$,

Բ) I-ն $[c,d]$-ում դիֆերենցելի է և $g'_n(y)\rightrightarrows I'(y)$:

Վերջապես, հավասարաչափ զուգամիտության Հայնեի սահմանման համաձայն, Ա)-ից հետևում է ա)-ն, իսկ Բ)-ից՝ բ)-ն: ■

Ապացուցված թեորեմի օգնությամբ հաշվենք *Դիրիխլեի ինտեգրալը*՝

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx\ :$$

Նշանակենք՝

$$I(a)=\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx\ ,\ a\in[0,\infty):\tag{4.10}$$

Ինչպես գիտենք (§3, 3, 2^0), (4.10) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի ՊԿԱԻ-ի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, $I(a)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0,\infty)$ միջակայքում: Հետևաբար՝

$$I=I(0)=\lim_{a\to 0+}I(a):\tag{4.11}$$

$I(a)$-ն հաշվելու համար նախ Լայբնիցի կանոնով հաշվենք $I'(a)$-ն՝

$$I'(a)=-\int_0^{\infty}e^{-ax}\sin xdx\,,\ \ a>0:\tag{4.12}$$

Այստեղ Լայբնիցի կանոնը կիրառելի է, քանի որ յուրաքանչյուր $a>0$ թվի համար (4.12) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $\left[\frac{a}{2},\infty\right)$ միջակայքում, հետևաբար, a կետում (4.12) հավասարությունը ճիշտ է:

(4.12)-ի մեջ տեղադրելով աջ կողմի ինտեգրալի արժեքը (XI, §1, 2)՝ կստանանք, որ $I'(a) = -\dfrac{1}{1+a^2}$, $a > 0$: Հետևաբար՝

$$I(a) = -arctga + C: \tag{4.13}$$

C հաստատունը հաշվելու համար (4.13) հավասարության մեջ a-ն ձգտեցնենք $+\infty$-ի: Քանի որ $a > 0$ դեպքում

$$|I(a)| \le \int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a} \to 0,\ a \to +\infty,$$

ապա (4.13)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք $C = \dfrac{\pi}{2}$: Հետևաբար, $I(a) = \dfrac{\pi}{2} - arctga \to \dfrac{\pi}{2}$, $a \to 0$: (4.11)-ի համաձայն՝ $I = \dfrac{\pi}{2}$:

4. ՊԿԱԻ-ի ինտեգրումը:

Թեորեմ 4.5: *Եթե*

1) $f \in C([a,\omega)\times[c,d])$,

2) $I(y) = \int_a^\omega f(x,y)dx$ *անիսկական ինտեգրալը* $[c,d]$ *հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է, ապա*

$$\int_c^d \left\{\int_a^\omega f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^\omega \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx: \tag{4.14}$$

► Վերցնենք կամայական $A \in (a,\omega)$ թիվ: Այդ դեպքում պարամետրից կախված իսկական ինտեգրալի ինտեգրման թեորեմ 2.4-ի համաձայն կստանանք՝

$$\int_c^d \left\{\int_a^A f(x,y)dx\right\}dy = \int_a^A \left\{\int_c^d f(x,y)dy\right\}dx: \tag{4.15}$$

Այստեղ A-ն ձգտեցնենք ω-ի և համոզվենք, որ ձախ կողմի ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ: Նշանակենք՝

$$F(y,A)=\int_a^A f(x,y)dx\,,\ y\in[c,d]:$$

Այդ դեպքում՝

1^0) $F(\cdot,A)\in C[c,d]$ (ըստ թեորեմ 2.2-ի),

2^0) $F(y,A)\rightrightarrows I(y)$, $A\to\omega$, $y\in[c,d]$ (ըստ այս թեորեմի 2) պայմանի):

Այժմ կիրառելով թեորեմ 2.1-ը՝ (4.15)-ի ձախ կողմի ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ և, (4.15)-ում անցնելով սահմանի*, երբ $A\to\omega$, կստանանք (4.14)-ը: ■

Հետևանք: *Եթե*

1) $0\le f(x,y)\in C([a,\omega)\times[c,d])$, *2)* $I(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx$ *ինտեգրալը կետորեն զուգամետ է* $[c,d]$ *հատվածում, 3)* $I\in C[c,d]$, *ապա տեղի ունի (4.14)-ը:*

▶ ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Դինիի հայտանիշի համաձայն, նշված պայմաններում $\int_a^\omega f(x,y)dx$ ինտեգրալը $[c,d]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի բավարարվում են թեորեմ 4.5-ի պայմանները, հետևաբար տեղի ունի (4.14)-ը: ■

<u>**5. ՊԿԱԻ-ի անիսկական ինտեգրալը:**</u>

Թեորեմ 4.6: *Դիցուք՝*

1) $f(x,y)\in C([a,\omega)\times[c,\omega_1))$, $a<\omega\le\infty$; $c<\omega_1\le\infty$,

2) ա) $\int_a^\omega f(x,y)dx$ *ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է յուրաքանչյուր* $\left[c,d\right]$ *հատվածում,* $d\in\left(c,\omega_1\right)$,

* Ըստ անիսկական ինտեգրալի սահմանման, (4.15)-ի աջ կողմի ինտեգրալը կձգտի (4.14)-ի աջ կողմի ինտեգրալին:

բ) $\int_c^{\omega_1} f(x,y)dy$ *ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է յուրաքանչյուր* $[a,b]$ *հատվածում,* $b\in(a,\omega)$,

3) $\int_a^{\omega}\left\{\int_c^{\omega_1}|f(x,y)|dy\right\}dx$ *ինտեգրալը (կամ մյուս հաջորդական ինտեգրալը) զուգամետ է:*

Այդ դեպքում $\int_c^{\omega_1}\left\{\int_a^{\omega} f(x,y)dx\right\}dy$ *և* $\int_a^{\omega}\left\{\int_c^{\omega_1} f(x,y)dy\right\}dx$ *ինտեգրալները զուգամետ են ու*

$$\int_c^{\omega_1}\left\{\int_a^{\omega} f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^{\omega}\left\{\int_c^{\omega_1} f(x,y)dy\right\}dx: \tag{4.16}$$

► Վերցնենք կամայական $C\in[c,\omega_1)$ թիվ: Այդ դեպքում ա)-ի և նախորդ թեորեմի համաձայն՝

$$\int_c^{C}\left\{\int_a^{\omega} f(x,y)dx\right\}dy=\int_a^{\omega}\left\{\int_c^{C} f(x,y)dy\right\}dx: \tag{4.17}$$

Այստեղ C-ն ձգտեցնենք ω_1-ի և համոզվենք, որ աջ կողմի ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ: Նշանակելով

$$F(x,C)=\int_c^{C} f(x,y)dy\,,\ x\in[a,\omega)$$

ու օգտվելով բ)-ից՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $A\in(a,\omega)$ թվի համար

1^0) $F(x,C)\rightrightarrows\int_c^{\omega_1} f(x,y)dy\,,\ C\to\omega_1\,,\ x\in[a,A]$:

Բացի այդ՝

$$|F(x,C)|\le\int_c^{C}|f(x,y)|dy\le\int_c^{\omega_1}|f(x,y)|dy\,,\ C\in[c,\omega_1)\,,$$

ուստի 3) պայմանի և մաժորանտով հայտանիշի համաձայն կստանանք, որ

2^0) $F(x,C)$ ֆունկցիայի ինտեգրալն ըստ x-ի $[a,\omega)$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է:

Թեորեմ 4.2-ի համաձայն, 1^0) -2^0)-ից հետևում է, որ (4.17)-ի աջ կողմի ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ, երբ $C \to \omega_1$: Արդյունքում կստացվի (4.16)-ը: ■

Հակաօրինակ: Բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ առանց երրորդ պայմանի այս թեորեմի եզրակացությունը ճիշտ չէ: Դիտարկենք

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \in C([a,\infty) \times [a,\infty)),\ a > 0$$

ֆունկցիան: Դժվար չէ ստուգել, որ թեորեմ 4.6-ի առաջին երկու պայմանները բավարարվում են: Իրոք, $A \ge a$ դեպքում՝

$$\int_A^\infty f(x,y)dx = -\frac{x}{x^2 + y^2}\bigg|_{x=A}^{\infty} = \frac{A}{A^2 + y^2} < \frac{1}{A},$$

ինչը ցույց է տալիս, որ ա) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ թվային առանցքի վրա (քանի որ ինտեգրալի պոչը հավասարաչափ ձգտում է զրոյի): Նույնը ճիշտ է նաև բ) ինտեգրալի համար:

Մյուս կողմից՝

$$\int_a^\infty dx \int_a^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4} \ne \frac{\pi}{4} = \int_a^\infty dy \int_a^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx :$$

Հետևանք (Դրական ֆունկցիայի դեպքը): *Եթե*

1) $0 \le f(x,y) \in C([a,\omega) \times [c,\omega_1))$,

2) ա) $\int_a^\omega f(x,y)dx = I(y) \in C[c,\omega_1)$, *բ)* $\int_c^{\omega_1} f(x,y)dy = J(x) \in C[a,\omega)$,

ապա[*]

$$\int_c^{\omega_1} \left\{ \int_a^\omega f(x,y)dx \right\} dy = \int_a^\omega \left\{ \int_c^{\omega_1} f(x,y)dy \right\} dx : \qquad (4.16)$$

[*] Այս երկու հաջորդական ինտեգրալները զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:

► ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Դինիի հայտանիշի համաձայն, թեորեմ 4.6-ի 2) պայմանի ա) և բ) կետերը բավարարված են:

Այժմ, եթե (4.16) հաջորդական ինտեգրալներից որևէ մեկը զուգամետ է, ապա բավարարված կլինի նաև թեորեմ 4.6-ի 3) պայմանը, հետևաբար, տեղի կունենա (4.16) հավասարությունը: Իսկ եթե (4.16) հաջորդական ինտեգրալները երկուսն էլ տարամետ են, ապա նրանց երկուսի արժեքներն էլ $+\infty$-ն է, հետևաբար, նորից տեղի ունի (4.16) հավասարությունը: ■

Դիտողություն: Այս պարագրաֆում մենք դիտարկեցինք այն անիսկական ինտեգրալները, որոնցում միակ եզակիությունը ինտեգրալի վերին սահմանն էր: Դժվար չէ համոզվել, որ 4.1-4.6 թեորեմները ճիշտ են նաև այն դեպքում, երբ անիսկական ինտեգրալի եզակիությունը ինտեգրալի ստորին սահմանն է: Իսկ երբ ինտեգրալի թե' վերին և թե' ստորին սահմանները եզակիություններ են՝

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x,y)dx, \tag{4.18}$$

վերցնելով կամայական $a\in(\omega_1,\omega_2)$ կետ, (4.18) ինտեգրալը կներկայացնենք

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2}\cdot=\int_{\omega_1}^{a}\cdot+\int_{a}^{\omega_2}\cdot$$

գումարի տեսքով և, եթե ենթադրենք, որ $\int_{\omega_1}^{a}\cdot$ և $\int_{a}^{\omega_2}\cdot$ ինտեգրալների համար 4.1-4.6 թեորեմները ճիշտ են, ապա նրանք ճիշտ կլինեն նաև (4.18) ինտեգրալի համար:

Բացի դրանից, նույն դատողությունների միջոցով կհամոզվենք, որ թեորեմ 4.6-ի և նրա հետևանքի մեջ ոչ միայն a-ն կարող է լինել եզակիության կետ*, այլ նաև c-ն: Այս դեպքում հետևանքը կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

Հետևանք': *Եթե*

1') $0\le f(x,y)\in C((a,\omega)\times(c,\omega_1))$,

---

* Ինտեգրալների վերին սահմաններից բացի:

2′) ա′) $\int_a^{\omega} f(x,y)dx \in C(c,\omega_1)$ *, բ′)* $\int_c^{\omega_1} f(x,y)dy \in C(a,\omega)$,

ապա տեղի ունի (4.16)-ը:

Օգտվելով այս դիտողությունից՝ հաշվենք *Էյլեր - Պուասոնի ինտեգրալը.*

$$I := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx :$$

Վերցնենք կամայական $t > 0$ թիվ և կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = ty$: Կստանանք՝

$$I = \int_0^{\infty} te^{-t^2y^2} dy :$$

Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկենք e^{-t^2} ֆունկցիայով և ստացված հավասարությունն ինտեգրենք $(0,\infty)$ բաց միջակայքում.

$$I^2 = \int_0^{\infty} Ie^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t^2} te^{-t^2y^2} dy \right\} dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-t^2(1+y^2)} tdt \right\} dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{4} :$$

Հետևաբար $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$:

<u>6. Միայն x-ից կախված արտադրիչի ներմուծումը:</u> Այստեղ մենք կապացուցենք մի թեորեմ, որը մեզ պետք կգա Ֆուրիեի ինտեգրալն ուսումնասիրելիս (XIV գլխում):

Թեորեմ 4.7: *Եթե*

1) $f(x,y) \in C([a,\infty) \times [c,d])$ *և* $|f(x,y)| \le M$, $x \in [a,\infty), y \in [c,d]$,

2) $g(x)$ *-ը բացարձակ ինտեգրելի է* $[a,\infty)$ *միջակայքում, ապա*

ա) $I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)g(x)dx$, $y \in [c,d]$, (4.19)

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c,d]$ *-ում,* բ) $I \in C[c,d]$,

գ) $$\int_c^d \left\{ \int_a^\infty f(x,y)g(x)dx \right\} dy = \int_a^\infty \left\{ \int_c^d f(x,y)g(x)dy \right\} dx : \qquad (4.20)$$

► ա) Քանի որ

$$|f(x,y)g(x)| \le M|g(x)|,\ y \in [c,d],$$

ապա 2) պայմանից և մաժորանտով հայտանիշից հետևում է, որ (4.19) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $[c,d]$ հատվածում:

բ) Քանի որ

$$F(y,A) = \int_a^A f(x,y)g(x)dx$$

ֆունկցիան յուրաքանչյուր հաստատագրված $A \in (a,\infty)$ արժեքի դեպքում անընդհատ է ըստ y-ի $[c,d]$-ում (թեորեմ 2.1'), և

$$F(y,A) \rightrightarrows I(y),\ A \to \infty,\ y \in [c,d], \qquad (4.21)$$

ապա $I \in C[c,d]$:

գ) Ունենք, որ (ըստ §2, 4-ի վերջում նշված թեորեմ 2.4-ի նմանակի)

$$\int_c^d \left\{ \int_a^A f(x,y)g(x)dx \right\} dy = \int_a^A \left\{ \int_c^d f(x,y)g(x)dy \right\} dx,\ A \in (a,\infty): \qquad (4.22)$$

Այստեղ անցնելով սահմանի*, երբ $A \to \infty$, կստանանք (4.20)-ը: ■

§5. ԷՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Առաջին սեռի էյլերյան ինտեգրալ: Մենք ցույց ենք տվել (XI, §2, 1), որ

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \qquad (5.1)$$

ինտեգրալը զուգամիտում է a և b պարամետրերի դրական արժեքների դեպքում:

---

* (4.21)-ի համաձայն, (4.22)-ում կարելի է կատարել սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ:

Այստեղ մենք կապացուցենք B ֆունկցիայի մի քանի պարզագույն հատկություններ:

1^0. $B(a,b) = B(b,a)$:

► Այս հատկությունն ապացուցելու համար (5.1)-ում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = 1 - t$: Կստանանք՝

$$B(a,b) = -\int_1^0 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{a-1} dt = B(b,a) : \blacksquare$$

2^0. *Եթե* $b > 1$, *ապա*

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a,b-1) : \tag{5.2}$$

► (5.1)-ում կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$B(a,b) = \frac{1}{a}\int_0^1 (1-x)^{b-1} dx^a = \frac{1}{a} x^a (1-x)^{b-1}\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{1}{a}\int_0^1 x^a d(1-x)^{b-1} = \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx :$$

Այնուհետև, օգտվելով

$$x^a(1-x)^{b-2} = x^{a-1}(1-x)^{b-2} - x^{a-1}(1-x)^{b-1}$$

նույնությունից, կստանանք

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a} B(a,b-1) - \frac{b-1}{a} B(a,b)$$

հավասարությունը: Այստեղից հաշվելով $B(a,b)$-ն՝ կհանգենք (5.2)-ին: ■

Հետևանք:

$$B(a,n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} : \tag{5.3}$$

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$B(a,1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a},$$

այսինքն՝ (5.3)-ը $n=1$ դեպքում ճիշտ է:

Այնուհետև, եթե (5.3)-ը n բնական թվի համար ճիշտ է, ապա (5.2)-ի շնորհիվ այն ճիշտ կլինի նաև $(n+1)$-ի համար: ■

Մասնավոր դեպքում, երբ a-ն էլ է բնական թիվ՝ $a=m$, կստանանք՝

$$B(m,n)=\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}:$$

3^0. $B(a,b)=\int_0^{\infty}\frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}dy$: (5.4)

► Ապացուցելու համար (5.1)-ում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝

$$x=\frac{y}{1+y},\ y\in[0,\infty):$$

Այդ դեպքում $1-x=\frac{1}{1+y}$ և $dx=\frac{dy}{(1+y)^2}$:

Տեղադրելով այս արժեքները (5.1)-ի մեջ՝ կստանանք (5.4)-ը: ■

<u>**2. Երկրորդ սեռի էյլերյան ինտեգրալ:**</u> Մենք ցույց ենք տվել (XI, §2, 1), որ

$$\Gamma(a)=\int_0^{\infty}x^{a-1}e^{-x}dx \tag{5.5}$$

ինտեգրալը զուգամիտում է $a>0$ դեպքում:

Այստեղ մենք հանգամանորեն կուսումնասիրենք Γ ֆունկցիայի հատկությունները:

1^0. $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$: (5.6)

► (5.5)-ում կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$\Gamma(a)=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}e^{-x}dx^a=\frac{1}{a}e^{-x}x^a\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{a}\int_0^{\infty}x^ae^{-x}dx=\frac{1}{a}\Gamma(a+1):\ ■$$

Հետևանք: $\Gamma(n)=(n-1)!$, $n=1,2,...$: (5.7)

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n=1$ դեպքում՝ $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1$: Այսինքն՝ (5.7)-ը $n=1$ դեպքում ճիշտ է:

Այնուհետև, եթե (5.7)-ը n բնական թվի համար ճիշտ է, ապա (5.6)-ի շնորհիվ այն ճիշտ կլինի նաև $(n+1)$-ի համար: ■

2^0. Γ*-ն* $(0,\infty)$ *միջակայքում անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա է և*

$$\Gamma^{(n)}(a)=\int_0^\infty x^{a-1}(\ln x)^n e^{-x}dx\,,\; a\in(0,\infty)\,,\; n=1,2,...: \tag{5.8}$$

► Այս բանաձևը կապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով՝ օգտվելով ՊԿԱԻ-ի ածանցման Լայբնիցի կանոնից: Դրա համար պետք է ցույց տանք, որ յուրաքանչյուր $a\in(0,\infty)$ կետում (կետի շրջակայքում) (5.8) ինտեգրալների համար Լայբնիցի կանոնը կիրառելի է: Այսինքն՝ պետք է ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր հաստատագրված $n\in N$ բնական թվի համար (5.8) ինտեգրալը կամայական $a\in(0,\infty)$ կետի շրջակայքում ըստ a պարամետրի զուգամիտում է հավասարաչափ: Իսկ դրա համար բավական է ապացուցենք, որ (5.8) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է կամայական $[c,d]\subset(0,\infty)$ փակ հատվածում:

Քանի որ (5.8) անիսկական ինտեգրալի եզակիությունները $x=0$ և $x=\infty$ կետերն են, ուստի պետք է ապացուցենք (§3, 1), որ

$$\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)^n e^{-x}dx \quad \text{և} \quad \int_1^\infty x^{a-1}(\ln x)^n e^{-x}dx$$

ինտեգրալները հավասարաչափ զուգամետ են $[c,d]$ հատվածում: Դա հետևում է մաժորանտով հայտանիշից, քանի որ այդ ինտեգրալներից առաջինի համար մաժորանտ է հանդիսանում $g(x)=x^{c-1}\left|\ln x\right|^n$ ֆունկցիան, իսկ երկրորդի համար՝ $h(x)=Mx^d e^{-x}$ ֆունկցիան, որտեղ $M=\max\limits_{x\in[1,\infty)}\dfrac{(\ln x)^n}{x}$: Համոզվելու համար, որ g և h ֆունկցիաների ինտեգրալները համապատասխանաբար $(0,1]$ և $[1,\infty)$ միջակայքերում զուգամետ են, g և h ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը ներկայացնենք երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝

$$g(x) = x^{\frac{c}{2}-1} \cdot \left(x^{\frac{c}{2}} \left|\ln x\right|^n \right), \quad h(x) = \frac{M}{x^2} \cdot \left(x^{d+2} e^{-x} \right),$$

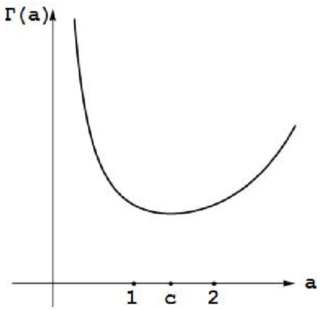
որտեղ առաջին արտադրիչների ինտեգրալները համապատասխան միջակայքերում զուգամետ են, իսկ երկրորդ արտադրիչները սահմանափակ են: Բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, g և h ֆունկցիաների ինտեգրալները համապատասխանաբար $(0,1]$ և $[1,\infty)$ միջակայքերում զուգամետ են: ■

3^0. Γ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեսքը պարզելու համար (5.8)-ը դիտարկենք $n = 2$ դեպքում: Կստանանք $\Gamma''(a) > 0$, $a \in (0,\infty)$, ուստի $\Gamma'(a)$ ֆունկցիան $(0,\infty)$ միջակայքում աճում է:

Մյուս կողմից, (5.6)-ի համաձայն, $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$: Հետևաբար, Ռոլլի թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի $c \in (1,2)$ կետ, այնպիսին, որ $\Gamma'(c) = 0$: Ուստի $\Gamma'(a) < 0$, երբ $a \in (0,c)$ և $\Gamma'(a) > 0$, երբ $a \in (c,\infty)$:

Այսինքն՝ Γ ֆունկցիան $(0,c]$ միջակայքում նվազում է, իսկ $[c,\infty)$ միջակայքում՝ աճում:

Բացի դրանից, (5.6)-ի համաձայն, $\Gamma(a) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{a} \sim \dfrac{1}{a}$, երբ $a \to 0$: Այսպիսով, Γ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը՝



<u>**3. Էյլեր - Գաուսի բանաձևը:**</u> Ապացուցենք, որ

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} : \tag{5.9}$$

► Այս բանաձևն ապացուցելու համար (5.5) ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝

$$e^{-x} = z\,,\ \ x = \ln\frac{1}{z}\,,\ \ dx = -\frac{dz}{z}\,,\ \ z \in (0,1):$$

Տեղադրելով այս արժեքները (5.5)-ում՝ կստանանք

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{z}\right)^{a-1} dz \tag{5.10}$$

ներկայացումը: Երեք հիմնական սահմաններից երկրորդի համաձայն՝

$$n\left(1 - z^{\frac{1}{n}}\right) \to \ln\frac{1}{z}\,,\ \text{երբ}\ \ n \to \infty:$$

Ապացուցենք, որ $n\left(1 - z^{1/n}\right)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $(0,1)$ միջակայքին պատկանող z-երի դեպքում աճող է՝

$$n\left(1 - z^{1/n}\right) \uparrow \ln\frac{1}{z}\,,\ \ z \in (0,1): \tag{5.11}$$

Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր հաստատագրված $z \in (0,1)$ արժեքի դեպքում $\varphi(t) = \dfrac{1 - z^t}{t}$ ֆունկցիան $(0,1)$ միջակայքում նվազող է, այսինքն՝ $\varphi'(t) \le 0$: Քանի որ

$$\varphi'(t) = \frac{-tz^t \ln z - (1 - z^t)}{t^2} = \frac{z^t - z^t \ln z^t - 1}{t^2}\,,$$

ապա, նշանակելով $z^t = x$, պետք է ապացուցենք

$$\psi(x) := x - x\ln x \le 1\,,\ x \in (0,1)$$

անհավասարությունը: Դա իր հերթին հետևում է նրանից, որ ψ ֆունկցիան $(0,1]$ միջակայքում աճող է* և $\psi(1) = 1$:

Վերադառնանք (5.9)-ի ապացույցին: Նախ քննարկենք $a > 1$ դեպքը: Այդ դեպքում թեորեմ 4.3-ի համաձայն, (5.10)-ից և (5.11)-ից հետևում է, որ

---

* Քանի որ $\psi'(x) = -\ln x > 0\,,\ x \in (0,1)$:

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^{a-1}\int_0^1 (1 - z^{1/n})^{a-1} dz :$$

Այս ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$$1 - z^{1/n} = y,\ \ z = (1-y)^n,\ \ dz = -n(1-y)^{n-1}dy,$$

կստանանք՝

$$\Gamma(a) = \lim_{n\to\infty} n^a \int_0^1 y^{a-1}(1-y)^{n-1}dy = \lim_{n\to\infty} n^a B(a,n):$$

Հաշվի առնելով (5.3)-ը՝ այստեղից կստանանք (5.9)-ը:

Մնաց քննարկելու $a \in (0,1)$ դեպքը: Այս դեպքում էլ, (5.6)-ի համաձայն՝

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a}\Gamma(a+1) = \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty} n^{a+1}\frac{(n-1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+1+n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)},$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել: ■

<u>4. B և Γ ֆունկցիաների կապը:</u> Ապացուցենք հետևյալ բանաձևը՝

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}: \tag{5.12}$$

► Վերցնենք կամայական $t > 0$ թիվ և (5.5) ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = ty$: Կստանանք՝

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy: \tag{5.12'}$$

Այստեղ a-ն փոխարինելով $(a+b)$-ով, իսկ t-ն՝ $(1+t)$-ով՝ կստանանք

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(1+t)y}dy$$

հավասարությունը, որի երկու կողմը բազմապատկելով t^{a-1}-ով՝ կստանանք

$$\Gamma(a+b)\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^{\infty}t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy \qquad (5.13)$$

բանաձևը: Հավասարության երկու կողմը ինտեգրելով ըստ t-ի $(0,\infty)$ միջակայքում և հաշվի առնելով (5.4)-ը՝ կստանանք

$$\Gamma(a+b)B(a,b)=\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy\right\}dt: \qquad (5.14)$$

Ցույց տանք, որ այստեղ կարելի է ինտեգրման հերթականությունը փոխել: Դրա համար համոզվենք, որ

$$f(t,y):=t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}\in C((0,\infty)\times(0,\infty))$$

դրական ֆունկցիան բավարարում է §4, կետ 5-ի հետևանք'-ի ա') և բ') պայմաններին:

Հաշվի առնելով (5.12')-ը՝ կստանանք

ա') $\int_0^{\infty}f(t,y)dt=y^{a+b-1}\cdot e^{-y}\int_0^{\infty}t^{a-1}e^{-ty}dt=y^{b-1}e^{-y}\Gamma(a)\in C(0,\infty)$: (5.15)

(5.13)-ի համաձայն՝

բ') $\int_0^{\infty}f(t,y)dy=\Gamma(a+b)\dfrac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\in C(0,\infty)$:

Փոխելով (5.14)-ում ինտեգրման հերթականությունը և հաշվի առնելով (5.15)-ը՝ կստանանք

$$\Gamma(a+b)B(a,b)=\int_0^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}f(t,y)dt\right\}dy=\Gamma(a)\Gamma(b),$$

ինչը համարժեք է (5.12)-ին: ■

<u>**5. Γ ֆունկցիայի լրացման բանաձևը:**</u> Ապացուցենք, որ եթե $0<a<1$, ապա

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{\pi}{\sin a\pi}: \qquad (5.16)$$

► Այս բանաձևը հետևում է Էյլեր - Գաուսի բանաձևից և Էյլերի հետևյալ բանաձևից (XIV, §3, 4).

$$\sin x = x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right):$$

Այստեղ տեղադրենք $x = a\pi$ `

$$\sin a\pi = a\pi\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{k^2}\right): \tag{5.17}$$

Էյլեր - Գաուսի բանաձևի համաձայն՝

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\cdot\frac{n^{1-a}\cdot(n-1)!}{(1-a)(1-a+1)\cdots(1-a+n-1)} =$$

$$= \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)}\cdot\frac{n}{\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{n-1}\right)(n-a)} =$$

$$= \frac{1}{a}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{a^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{a\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{a^2}{k^2}\right)}:$$

Հաշվի առնելով (5.17)-ը՝ այստեղից կստանանք (5.16)-ը: ■

Կրկին հաշվենք Էյլեր - Պուասոնի ինտեգրալը՝ այս անգամ օգտվելով Γ ֆունկցիայի լրացման բանաձևից: (5.16)-ում տեղադրենք $a = \frac{1}{2}$: Կստանանք՝ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$: Հետևաբար՝

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}:$$

XIII ԳԼՈՒԽ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ, ՍՏԻԼՏՅԵՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§1. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1. Ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանումը, վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ: Դիցուք՝ $f:[a,b]\to R$: Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի որևէ P տրոհում՝ $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ և նշանակենք՝

$$V(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(x_{i+1})-f(x_i)\right|:$$

Այս գումարը կոչվում է f ֆունկցիայի *վարիացիոն գումար* (P տրոհմանը համապատասխանող): Եռանկյան անհավասարությունից հետևում է, որ տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս (տրոհումը մանրատելիս) վարիացիոն գումարը կարող է միայն մեծանալ:

Բոլոր տրոհումներին համապատասխանող վարիացիոն գումարների ճշգրիտ վերին եզրը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $[a,b]$ հատվածում f ֆունկցիայի *լրիվ վարիացիա* և նշանակվում՝ $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$:

Եթե $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$, ապա f-ն անվանում են *վերջավոր (սահմանափակ) վարիացիայի ֆունկցիա $[a,b]$ հատվածում:* $[a,b]$ հատվածում վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների բազմությունը նշանակվում է $BV[a,b]$ սիմվոլով:

Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ *վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիան սահմանափակ է:* Իսկապես, եթե $a\le x\le b$, ապա $\left|f(x)-f(a)\right|+\left|f(b)-f(x)\right|\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$, որտեղից էլ՝

$$\left|f(x)\right|\le\left|f(x)-f(a)\right|+\left|f(a)\right|\le\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+\left|f(a)\right|:$$

Նշենք վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների մի քանի դասեր:

1^0. Հատվածում մոնոտոն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի է, ընդ որում՝

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)| :$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանումից:

2^0. **Սահմանում**: *Կասենք, որ f-ը $[a,b]$ հատվածում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին, եթե գոյություն ունի $L>0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$|f(x) - f(y)| \le L|x - y| ,$$

կամայական $x, y \in [a,b]$ կետերի համար:

Լիպշիցի պայմանին բավարարող ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $Lip[a,b]$ սիմվոլով:

Ապացուցենք, որ տեղի ունի հետևյալ ներառումը՝

$$Lip[a,b] \subset BV[a,b] :$$

► Իրոք, $[a,b]$ հատվածի $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ տրոհման համար՝

$$V(f,P) \le \sum_{i=0}^{n-1} L[x_{i+1} - x_i] = L(b-a) : \blacksquare$$

3^0. Եթե f-ը դիֆերենցելի է $[a,b]$ հատվածում և $|f'(x)| \le M$, $x \in [a,b]$, ապա $f \in BV[a,b]$:

► Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն՝

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x-y)| \le M|x-y| ,\ x, y \in [a,b] :$$

Ուստի՝ $f \in Lip[a,b] \subset BV[a,b] : \blacksquare$

Ներկայացնենք ոչ վերջավոր (անվերջ) վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ՝

$$f(x) = x\cos\frac{\pi}{2x},\ x \in (0,1] \text{ և } f(0) = 0 :$$

Վերցնենք $[0,1]$ հատվածի

$$P=\left\{0,\ \frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n-1},\ \cdots,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$$

տրոհումը: Քանի որ

$$\cos 2k\frac{\pi}{2}=(-1)^k,\quad \cos(2k-1)\frac{\pi}{2}=0,$$

ապա

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^{n}2\left|\frac{1}{2k}(-1)^k\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\to\infty, \text{ երբ } n\to\infty:$$

2. Փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի վարիացիան:

Թեորեմ 1.1: *Եթե* $\varphi\in\Re[a,b]$ *և* $f(x)=\int_a^x\varphi(t)dt$, *ապա* $f\in BV[a,b]$ *և*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\int_a^b|\varphi(t)|dt:$$

► Դիցուք՝ $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$: Քանի որ

$$V(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(t)dt\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|\varphi(t)|dt=\int_a^b|\varphi(t)|dt,$$

ուստի

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\le\int_a^b|\varphi(t)|dt:$$

Ապացուցենք հակառակ անհավասարությունը: Ունենք՝

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\ge\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(t)dt\right|=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x_i)dt-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\varphi(x_i)-\varphi(t)\right]dt\right|\ge$$

$$\ge\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi(x_i)dt\right|-\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\varphi(x_i)-\varphi(t)\right]dt\right|\right\}\ge\sum_{i=0}^{n-1}|\varphi(x_i)\Delta x_i|-\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\varphi)\Delta x_i,$$

որտեղ $\omega_i(\varphi)$-ն φ ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i,x_{i+1}]$ հատվածում: Այստեղ անցնենք սահմանի, երբ տրոհման տրամագիծը ձգտում է զրոյի:

$\varphi \in \Re[a,b]$ պայմանի շնորհիվ $\sum \omega_i(\varphi)\Delta x_i$ գումարը կձգտի զրոյի, իսկ $\sum |\varphi(x_i)|\Delta x_i$ գումարը կձգտի $|\varphi|$ ֆունկցիայի ինտեգրալին: Կստանանք՝

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \ge \int_a^b |\varphi(t)|dt :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

3. <u>$BV[a,b]$ դասի կառուցվածքը:</u>

Թեորեմ 1.2: *Ցանկացած $f, g \in BV[a,b]$ ֆունկցիաների համար՝*

ա) $\alpha f + \beta g \in BV[a,b]$ ($\alpha, \beta \in R$), ընդ որում,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(\alpha f + \beta g) \le |\alpha| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |\beta| \overset{b}{\underset{a}{V}}(g),$$

բ) $|f| \in BV[a,b]$, ընդ որում $\overset{b}{\underset{a}{V}}(|f|) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$,

գ) $fg \in BV[a,b]$, ընդ որում $\overset{b}{\underset{a}{V}}(fg) \le \sup\limits_{[a,b]}|g(x)| \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + \sup\limits_{[a,b]}|f(x)| \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$,

դ) եթե $|g(x)| \ge m > 0, x \in [a,b]$, ապա $\dfrac{1}{g} \in BV[a,b]$, ընդ որում, $\overset{b}{\underset{a}{V}}\left(\dfrac{1}{g}\right) \le \dfrac{1}{m^2} \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$:

► Այս պնդումները անմիջապես հետևում են ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանումից: Ապացուցենք, օրինակ, գ)-ն: Նշանակելով $h = fg$, $M_f = \sup\limits_{[a,b]}|f(x)|$, $M_g = \sup\limits_{[a,b]}|g(x)|$, կստանանք՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} |h(x_{i+1}) - h(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + g(x_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| \le$$

$$\le M_f \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + M_g \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le$$

$$\le M_f \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) + M_g \overset{b}{\underset{a}{V}}(f):$$

Հետևաբար

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(h) \le M_g \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + M_f \overset{b}{\underset{a}{V}}(g): \blacksquare$$

4. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հիմնական հատկությունը:

Թեորեմ 1.3: *Որպեսզի $f \in BV[a,b]$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $c \in (a,b)$ կետի համար $[a,c]$ և $[c,b]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում f -ը լինի վերջավոր վարիացիայի, ընդ որում,*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f): \tag{1.1}$$

► *Անհրաժեշտություն:* Վերցնենք $[a,c]$ և $[c,b]$ հատվածների կամայական տրոհումներ՝ P_1 և P_2, և նշանակենք՝ $P = P_1 \cup P_2$: Կստանանք՝

$$V(f,P_1) \le V(f,P) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),\ V(f,P_2) \le V(f,P) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

հետևաբար, $[a,c]$ և $[c,b]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում f -ը վերջավոր վարիացիայի է:

(1.1) հավասարությունն ապացուցենք՝ ցույց տալով, որ

$$\text{ա) } \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f),\ \text{բ) } \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \ge \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f):$$

ա)-ն ապացուցելու համար վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական P տրոհում և նշանակենք $P' = P \cup \{c\}$: Այնուհետև, $P_{[a,c]}$-ով նշանակենք P' տրոհման այն կետերի (կարգավորված) բազմությունը, որոնք պատկանում են $[a,c]$ հատվածին, իսկ $P_{[c,b]}$-ով՝ P' տրոհման այն կետերի բազմությունը, որոնք պատկանում են $[c,b]$ հատվածին: Այդ դեպքում կունենանք՝*

$$V(f,P) \le V(f,P') = V(f,P_{[a,c]}) + V(f,P_{[c,b]}) \le \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f),$$

ինչից էլ հետևում է ա)-ն:

---

* Տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս վարիացիոն գումարը կարող է միայն մեծանալ:

բ)-ն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն $[a,c]$ և $[c,b]$ հատվածների $P_{[a,c]}$ և $P_{[c,b]}$ տրոհումներ, այնպիսիք, որ

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) < V(f, P_{[a,c]}) + \varepsilon\,,\quad \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) < V(f, P_{[c,b]}) + \varepsilon\,:$$

Նշանակելով $P_{[a,b]} = P_{[a,c]} \cup P_{[c,b]}$՝ կստանանք

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) \le V(f, P_{[a,c]}) + V(f, P_{[c,b]}) + 2\varepsilon = V(f, P_{[a,b]}) + 2\varepsilon \le$$

$$\le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + 2\varepsilon\,:$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ թիվը կամայական էր, ապա այստեղից հետևում է բ)-ն:

Բավարարություն: Բավարարությունը հետևում է ա) անհավասարությունից և թեորեմի անհրաժեշտությունից: ■

Հետևանք: $\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) - V(f, P_{[a,c]}) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - V(f, P_{[a,b]})\,:$

► (1.1)-ի համաձայն՝

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f) - V(f, P_{[a,c]}) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{b}{\underset{c}{V}}(f) - V(f, P_{[a,c]}) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - V(f, P_{[a,b]}) -$$

$$-\left(\overset{b}{\underset{c}{V}}(f) - V(f, P_{[c,b]})\right) \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) - V(f, P_{[a,b]}),$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Դիտողություն: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի միջոցով կարելի է ապացուցել թեորեմ 1.3–ի հետևյալ ընդհանրացումը. *որպեսզի* $f \in BV[a,b]$, *անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $[a,b]$ *հատվածի կամայական* $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ *տրոհման համար՝* $f \in BV[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0,1,\cdots,m-1$, *ընդ որում,*

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \overset{c_{i+1}}{\underset{c_i}{V}}(f)\,:$$

5. Ժորդանի վերլուծությունը:

Թեորեմ 1.4: *Որպեսզի $f \in BV[a,b]$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի երկու աճող (լայն իմաստով) ֆունկցիաների տարբերության տեսքով:*

► Այս թեորեմի բավարարությունը հետևում է թեորեմ 1.2-ի ա) կետից և այն փաստից, որ մոնոտոն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի է:

Ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Նշանակենք՝

$$V(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f),\ x \in (a,b],\ V(a) = 0:$$

Այս ֆունկցիան կոչվում է f -ի *վարիացիոն ֆունկցիա:*

(1.1)-ից հետևում է, որ $V(x)$ -ը աճող է: Իրոք, եթե $a \le x_1 < x_2 \le b$, ապա $V(x_2) = V(x_1) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \ge V(x_1)$: Այնուհետև f -ը ներկայացնենք

$$f(x) = V(x) - [V(x) - f(x)]$$

տեսքով և ապացուցենք, որ $g(x) := V(x) - f(x)$ ֆունկցիան աճող է: Իրոք, եթե $a \le x_1 < x_2 \le b$, ապա (1.1)-ի համաձայն,

$$g(x_2) - g(x_1) = \overset{x_2}{\underset{a}{V}}(f) - f(x_2) - \left\{\overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) - f(x_1)\right\} =$$

$$= \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \ge 0:$$

Վերջին քայլում գրված անհավասարությունը հետևում է

$$f(x_2) - f(x_1) \le |f(x_2) - f(x_1)| \le \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)$$

գնահատականից: ■

6. Վերջավոր վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիաներ:

Թեորեմ 1.5: *Եթե $f \in BV[a,b] \cap C[a,b]$, ապա*

$$\lim_{\lambda \to 0} V(f,P) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \tag{1.2}$$

որտեղ λ -ն P տրոհման տրամագիծն է:

► Այս թեորեմն ապացուցվում է Դարբուի թեորեմի (V, թեորեմ 2.3) սխեմայով: Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $[a,b]$ հատվածի $P_1 = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ տրոհում, այնպիսին, որ

$$\mathop{V}_a^b(f) - V(f, P_1) < \varepsilon : \tag{1.3}$$

Մյուս կողմից, Կանտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $[a,b]$ հատվածի $\lambda < \delta$ տրամագծով կամայական $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ տրոհման համար՝

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad 0 \le i \le n-1, \tag{1.4}$$

որտեղ $\omega_i(f)$-ը f ֆունկցիայի տատանումն է $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածում:

Այժմ վերցնենք մի $P: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ տրոհում, որի տրամագիծը փոքր է δ-ից և նշանակենք՝ $P_2 = P \cup P_1$: Այդ դեպքում (1.3)-ի և (1.4)-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} \mathop{V}_a^b(f) - V(f,P) &= \left\{ \mathop{V}_a^b(f) - V(f, P_2) \right\} + \\ &+ \left\{ V(f,P_2) - V(f,P) \right\} \le \varepsilon + m \cdot 2\frac{\varepsilon}{2m} = 2\varepsilon, \end{aligned} \tag{1.5}$$

քանի որ P տրոհմանը $x_k \in (t_i, t_{i+1})$ կետն ավելացնելիս $V(f,P)$ վարիացիոն գումարը կմեծանա ամենաշատը $2\omega_i(f)$ չափով՝

$$|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \le |f(t_{i+1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(t_i)| \le 2\omega_i(f) :$$

Ստացվեց, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow 0 \le \mathop{V}_a^b(f) - V(f,P) < 2\varepsilon,$$

ինչը համարժեք է (1.2)-ին: ■

Թեորեմ 1.6: *Եթե* $f\in BV[a,b]\cap C[a,b]$, *ապա* $V(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ *վարիացիոն ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է* $[a,b]$ *հատվածում:*

► Վերցնենք կամայական $x_0\in[a,b)$ կետ և ապացուցենք V ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում աջից: Քանի որ V ֆունկցիան աճող է, ապա բավական է ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $t\in[x_0,b]$ թիվ, այնպիսին, որ $V(t)-V(x_0)<\varepsilon$ կամ, որ նույնն է՝ $\overset{t}{\underset{x_0}{V}}(f)<\varepsilon$:

Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հիմնական հատկության համաձայն՝ $f\in BV[x_0,b]$, ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $[x_0,b]$ հատվածի $P:x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ տրոհում, այնպիսին, որ

$$\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f)-V(f,P)<\varepsilon/2: \tag{1.6}$$

Մյուս կողմից, f-ը x_0 կետում անընդհատ է, հետևաբար գոյություն ունի $t\in(x_0,x_1)$ կետ, այնպիսին, որ

$$\left|f(t)-f(x_0)\right|<\varepsilon/2: \tag{1.7}$$

Նշանակենք՝ $P_1=P\cup\{t\}$: Այդ դեպքում կստանանք՝

$$\overset{t}{\underset{x_0}{V}}(f)-\left|f(t)-f(x_0)\right|\le\overset{t}{\underset{x_0}{V}}(f)-\left|f(t)-f(x_0)\right|+\overset{b}{\underset{t}{V}}(f)-V(f,P_{[t,b]})=$$

$$=\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f)-V(f,P_1)\le\overset{b}{\underset{x_0}{V}}(f)-V(f,P)<\varepsilon/2:$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (1.7)-ը, կստանանք՝ $\overset{t}{\underset{x_0}{V}}(f)<\varepsilon$:

V ֆունկցիայի անընդհատությունը ձախից ապացուցվում է նման դատողությունների միջոցով: ■

7. Վեկտորարժեք ֆունկցիաներ, ուղղելի կորեր:

Դիցուք՝ $f:[\alpha,\beta]\to R^k$ $(\alpha,\beta\in R)$: Վերցնենք $[\alpha,\beta]$ հատվածի կամայական P տրոհում՝

$$P:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$$

և նշանակենք՝

$$V(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(t_{i+1})-f(t_i)\right|, \tag{1.8}$$

$$\mathop{V}_{\alpha}^{\beta}(f)=\sup_P V(f,P):$$

f վեկտորարժեք ֆունկցիան կանվանենք վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա, եթե $\mathop{V}_{\alpha}^{\beta}(f)<\infty$:

$[\alpha,\beta]$ հատվածում վերջավոր վարիացիայի վեկտորարժեք (R^k-արժեք) ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $BV([\alpha,\beta],R^k)$ սիմվոլով:

Վերջավոր վարիացիայի վեկտորարժեք ֆունկցիաների ուսումնասիրությունը կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով բերվում է թվային ֆունկցիաների դեպքին: Եթե f վեկտորարժեք ֆունկցիան ներկայացնենք կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝

$$f(x)=\left(f^1(x),\cdots,f^k(x)\right),\ f^j:[\alpha,\beta]\to R,\ 1\le j\le k,$$

ապա տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.7: *Որպեսզի $f\in BV([\alpha,\beta],R^k)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$f^j\in BV[\alpha,\beta],\ 1\le j\le k: \tag{1.9}$$

► Այս թեորեմը բխում է $z=(z^1,\cdots,z^k)\in R^k$ վեկտորի նորմի հետևյալ գնահատականներից՝

$$\left|z^j\right|\le|z|\le\left|z^1\right|+\cdots+\left|z^k\right|,\ 1\le j\le k: \tag{1.10}$$

Իրոք, (1.10) անհավասարությունները գրենք $f(t_{i+1})-f(t_i)$ վեկտորի համար՝

$$\left|f^j(t_{i+1})-f^j(t_i)\right|\le\left|f(t_{i+1})-f(t_i)\right|\le\sum_{m=1}^{k}\left|f^m(t_{i+1})-f^m(t_i)\right|:$$

Այժմ, i-ին տալով $0,1,\cdots,n-1$ արժեքները և գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$V(f^j,P)\le V(f,P)\le\sum_{m=1}^{k}V(f^m,P),\ 1\le j\le k \tag{1.11}$$

անհավասարությունները: (1.9) պայմանի անհրաժեշտությունը հետևում է (1.11)-ի ձախ անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ աջ: ■

Այժմ ենթադրենք, որ $f\in C([\alpha,\beta],R^k)$: Այդ դեպքում f-ը ներկայացնում է կոր[*] (կամ կորի պարամետրացում): Ընդ որում, եթե նշանակենք $M_i=f(t_i)=\left(f^1(t_i),\cdots,f^k(t_i)\right)$, $0\le i\le n$, ապա $V(f,P)$ վարիացիոն գումարը կհանդիսանա այդ կորին ներգծված $L=M_0M_1\cdots M_n$ բեկյալի երկարությունը՝

$$p=\sum_{i=0}^{n-1}\left|M_{i+1}-M_i\right|=V(f,P): \tag{1.12}$$

Կորի երկարության երկրորդ սահմանման համաձայն[**], որպես կորի S երկարություն ընդունվում է

$$S=\sup\{p\}$$

մեծությունը, որը կարող է լինել նաև $+\infty$:

Մյուս կողմից, (1.12)-ի համաձայն՝

$$S=\sup\{p\}=\sup V(f,P)=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f):$$

Այսպիսով, f կորի երկարությունը f ֆունկցիայի վարիացիան է: Բացի դրանից, թեորեմ 1.7-ը կորի տերմիններով կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

---

[*] Այստեղ մենք օգտվում ենք (VI, §3)-ում և (VII, §3)-ում ընդունված տերմիններից:

[**] (VI, §3)-ում մենք քննարկել ենք $k=2$ մասնավոր դեպքը:

Թեորեմ 1.7' (Ժորդան): *Որպեսզի f ֆունկցիայով տրված կորը լինի ուղղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ f ֆունկցիայի կոորդինատային ֆունկցիաները լինեն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ:*

Ընթերցողին առաջարկվում է ապացուցել հետևյալ թեորեմը.

Եթե f^j, $1 \le j \le k$, ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են $[\alpha, \beta]$-ում, ապա f ֆունկցիայով տրված կորն ուղղելի է, և դրա երկարությունը հավասար է

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left[\left(f^j(t) \right)' \right]^2} \, dt :$$

§2. ՍՏԻԼՏՅԵՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ

1. Ստիլտեսի ինտեգրալի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները: Ստիլտեսի ինտեգրալը Ռիմանի ինտեգրալի ընդհանրացումն է, ուստի այստեղ մենք կօգտվենք V գլխում ներմուծված տերմիններից: Դիցուք՝ $f, g : [a,b] \to R$: Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական P տրոհում՝

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \ \lambda = \max_i (x_{i+1} - x_i),$$

և կազմենք *Ստիլտեսի ինտեգրալային գումարը*՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \left[g(x_{i+1}) - g(x_i) \right], \ \ \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] : \qquad (2.1)$$

Սահմանում[*]: *Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի Ստիլտեսի ինտեգրալ ըստ g ֆունկցիայի և նշանակվում է՝*

$$\int_a^b f(x) dg(x) \ \text{ կամ } \ (S)\int_a^b f(x) dg(x) \ \text{ կամ } \int_a^b f dg :$$

Այս դեպքում f-ն անվանում են ինտեգրելի ըստ g-ի: $[a,b]$ հատվածում ըստ g-ի ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $\Re_g[a,b]$ սիմվոլով:

---

[*] $g(x) = x$, $x \in [a,b]$, դեպքում Ստիլտեսի ինտեգրալը համընկնում է Ռիմանի ինտեգրալին:

Հետևյալ պնդումները (Ստիլտեսի ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները) անմիջապես հետևում են սահմանումից.

1^0. Եթե $f_1, f_2 \in \Re_g[a,b]$, ապա $f_1 + f_2 \in \Re_g[a,b]$ և

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dg(x) = \int_a^b f_1(x)dg(x) + \int_a^b f_2(x)dg(x):$$

2^0. Եթե $f \in \Re_{g_1}[a,b]$ և $f \in \Re_{g_2}[a,b]$, ապա $f \in \Re_{g_1 \pm g_2}[a,b]$ և

$$\int_a^b f(x)d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x)dg_1(x) \pm \int_a^b f(x)dg_2(x):$$

3^0. Եթե $f \in \Re_g[a,b]$ և $\alpha, \beta \in R$, ապա $\alpha f \in \Re_{\beta g}[a,b]$ և

$$\int_a^b \alpha f(x)d\beta g(x) = \alpha\beta\int_a^b f(x)dg(x):$$

4^0. Եթե $a < c < b$ և գոյություն ունեն բոլոր երեք ինտեգրալները, ապա

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^c f(x)dg(x) + \int_c^b f(x)dg(x):$$

Այստեղ կարելի է ապացուցել, որ ձախ կողմի ինտեգրալի գոյությունից հետևում է աջ կողմի ինտեգրալների գոյությունը: Սակայն աջ կողմի ինտեգրալների գոյությունից չի հետևում ձախ կողմի ինտեգրալի գոյությունը: Օրինակ՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

ֆունկցիաների համար $[-1,0]$ և $[0,1]$ հատվածներում ինտեգրալները գոյություն ունեն, սակայն $[-1,1]$ հատվածում՝ ոչ: Այս պարբերության մեջ բերված պնդումների ապացույցները թողնում ենք ընթերցողին:

<u>2. Մասերով ինտեգրում:</u> Ապացուցենք

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)df(x), \tag{2.2}$$

բանաձևը, նախապես ենթադրելով, որ գրված ինտեգրալներից որևէ մեկը գոյություն ունի:

► Դիցուք գոյություն ունի աջ կողմի ինտեգրալը: Այդ դեպքում $[a,b]$ հատվածի P տրոհման և $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ կետերի ընտրությունից հետո դիտարկենք $[a,b]$ հատվածի մի նոր տրոհում՝ $Q=\{a,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-1},b\}$: Ձևափոխենք (2.1) ինտեգրալային գումարը.

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(x_i) = \\
&= -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})\right] + f(\xi_{n-1})g(x_n) - f(\xi_0)g(x_0) = \\
&= f(x)g(x)\Big|_a^b - \Big\{ g(a)\left[f(\xi_0)-f(a)\right] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_k)-f(\xi_{k-1})\right] + \\
&+ g(b)\left[f(b)-f(\xi_{n-1})\right] \Big\} = f(x)g(x)\Big|_a^b - \sigma',
\end{aligned} \tag{2.3}$$

որտեղ σ'-ը Q տրոհմանը համապատասխանող $\int_a^b g df$ ինտեգրալի համար կազմված ինտեգրալային գումար է:

Քանի որ, ըստ ենթադրության, այդ ինտեգրալը գոյություն ունի, ուստի*

$$\sigma' \to \int_a^b g df , \quad \lambda \to 0 :$$

Հետևաբար, (2.3) հավասարությունից հետևում է, որ λ-ն 0-ի ձգտելիս, σ-ն ունի վերջավոր սահման և այդ սահմանը հավասար է (2.2)-ի աջ կողմում գրված արտահայտությանը: ■

3. Ըստ աճող ֆունկցիայի Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյության պայմանը:

Դիցուք g ֆունկցիան աճող է, իսկ f-ը սահմանափակ է՝ $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$: Այս դեպքում Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյության ուսումնասիրությունը կատարվում է նույն մեթոդով, ինչ որ Ռիմանի ինտեգրալի դեպքում:

Դիցուք տրված է $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ տրոհումը: Նշանակենք՝

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad \Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$$

---

* Եթե Q տրոհման տրամագիծը λ'-ն է, ապա $\lambda' \le 2\lambda$, հետևաբար, $(\lambda \to 0) \Rightarrow (\lambda' \to 0)$:

և կազմենք Դարբուի (Դարբու - Ստիլտեսի) գումարները՝

$$s=\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i)\,, \qquad S=\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i):$$

Այդ դեպքում կունենանք, որ նույն տրոհման դեպքում՝

$$s \le \sigma \le S\,,$$

ընդ որում, s-ը և S-ը $\sigma=\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\left[g(x_{i+1})-g(x_i)\right],\quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ գումարների ճշգրիտ եզրերն են: Բացի այդ, Դարբու - Ստիլտեսի գումարներն օժտված են $g(x)=x$ դեպքում ապացուցած (V, §2) երկու հիմնական հատկություններով:

Առաջին հատկություն: *Տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս (տրոհումը մանրատելիս) Դարբուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ փոքրանալ:*

Երկրորդ հատկություն: *Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը:*

Այնուհետև, ներմուծելով Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալները՝

$$I_* = \sup\{s\}\,,\; I^* = \inf\{S\}\,,$$

կստանանք՝

$$s \le I_* \le I^* \le S:$$

Այժմ ձևակերպենք Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, որն ապացուցվում է ճիշտ նույն դատողություններով*, ինչ որ $g(x)=x$ պարզագույն դեպքում (V, §2):

Թեորեմ 2.1: *Եթե g ֆունկցիան աճող է, իսկ f-ը՝ սահմանափակ, ապա ըստ g-ի f ֆունկցիայի Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S-s)=0\,,$$

կամ, որ նույնն է՝

---

* Ընթերցողին առաջարկվում է վերականգնել այդ դատողությունները:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta g(x_i)=0\,, \qquad (2.4)$$

որտեղ $\omega_i(f)$ -ը f ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում:

4. <u>Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյությունն ընդհանուր դեպքում:</u>

Թեորեմ 2.2: *Եթե՝ ա) $f\in C[a,b]$, բ) $g\in BV[a,b]$, ապա*

$$\int_a^b f dg \qquad (2.5)$$

Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյություն ունի:

► Նախ ապացուցենք թեորեմն այն դեպքում, երբ g -ն խիստ աճող է: Ըստ Կանտորի թեորեմի հետևանքի, ա) պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $\lambda<\delta$ տրամագծով կամայական $P: a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b$ տրոհման համար՝

$$\omega_i(f)<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\,,$$

ինչի արդյունքում էլ՝

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(f)\Delta g(x_i)<\varepsilon\,:$$

Հետևաբար, թեորեմ 2.1-ի համաձայն, (2.5) ինտեգրալը գոյություն ունի:

Այն դեպքում, երբ $g\in BV[a,b]$ ֆունկցիան աճող չէ, Ժորդանի վերլուծության համաձայն, g -ն կարելի է ներկայացնել երկու խիստ աճող ֆունկցիաների տարբերության տեսքով՝

$$g(x)=\varphi(x)-\psi(x)\,,\ x\in[a,b]\,:$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^b f d\varphi \ \text{ և } \int_a^b f d\psi$$

ինտեգրալները գոյություն ունեն, հետևաբար, Ստիլտեսի ինտեգրալի պարզագույն հատկությունների համաձայն, գոյություն ունի նաև (2.5) ինտեգրալը: ■

Դիտողություն: Մասերով ինտեգրման (2.2) բանաձևի համաձայն, թեորեմ 2.2-ի պայմաններում գոյություն ունի նաև

$$\int_a^b g df$$

ինտեգրալը:

Թեորեմ 2.3: *Եթե՝ ա) $f \in \Re[a,b]$, բ) $g \in Lip[a,b]$, ապա* $\int_a^b f dg$ *ինտեգրալը գոյություն ունի:*

► Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ g-ն աճող է: բ) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $L > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left(x, y \in [a,b]\right) \Rightarrow \left(\left|g(x) - g(y)\right| \le L\left|x - y\right|\right): \tag{2.6}$$

(2.6)-ից և ա) պայմանից հետևում է, որ

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta g(x_i) \le L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \to 0,\ \lambda \to 0:$$

Հետևաբար, թեորեմ 2.1-ի համաձայն, $\int_a^b f dg$ ինտեգրալը գոյություն ունի:

Ընդհանուր դեպքում g-ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$g(x) = Lx - [Lx - g(x)] =: g_1(x) - g_2(x),$$

որտեղ $g_1(x) = Lx$ և $g_2(x) = Lx - g(x)$ ֆունկցիաներն աճող են ու բավարարում են Լիպշիցի պայմանին: Իրոք, եթե $a \le x < y \le b$, ապա

$$\begin{aligned} &g_2(y) - g_2(x) = Ly - g(y) - L(x) + g(x) = \\ &= L(y - x) - [g(y) - g(x)] \ge 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

որտեղ վերջին անհավասարությունը հետևում է (2.6) պայմանից: Այսպիսով, g_2 ֆունկցիան աճող է: Ապացուցենք, որ այն բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: (2.7)-ից և (2.6)-ից հետևում է, որ

$$\left|g_2(y) - g_2(x)\right| \le L(y - x) + \left|g(y) - g(x)\right| \le 2L(y - x):$$

Այսինքն՝ g_2 ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի պայմանին: Հետևաբար, f -ը ինտեգրելի է թե՛ ըստ g_1 -ի, թե՛ ըստ g_2 -ի:

Ուստի, Ստիլտեսի ինտեգրալի պարզագույն հատկությունների համաձայն, f -ն ինտեգրելի է ըստ g -ի: ■

5. Ստիլտեսի ինտեգրալի ներկայացումը Ռիմանի ինտեգրալով:

Թեորեմ 2.4: *Եթե՝ ա) $f \in \Re[a,b]$, բ) $g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt$, որտեղ $\varphi \in \Re[a,b]$, ապա*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx, \tag{2.7}$$

որտեղ աջ կողմի ինտեգրալը Ռիմանի ինտեգրալ է:

► (2.1) ինտեգրալային գումարը ներկայացնենք

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i)\varphi(x)dx$$

տեսքով, իսկ (2.7)-ի աջ կողմի ինտեգրալը՝

$$I := \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi(x)dx:$$

Գնահատենք դրանց տարբերությունը՝

$$|\sigma - I| \le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(\xi_i) - f(x)||\varphi(x)|dx:$$

Քանի որ φ -ն ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով, ապա այն սահմանափակ է՝ $|\varphi(x)| \le M$, $x \in [a,b]$: Հետևաբար,

$$|\sigma - I| \le M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f)\Delta x_i \to 0, \text{ երբ } \lambda \to 0,$$

քանի որ $f \in \Re[a,b]$:

Այսպիսով, λ -ն 0-ի ձգտելիս, σ -ն ձգտում է I սահմանին: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Թեորեմ 2.5: *Եթե՝ ա) $f \in \Re[a,b]$, բ) $g \in C[a,b]$ և $g' \in \Re[a,b]$* [*], *ապա*

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)dx \ :$$

► Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի վերաբերյալ երկրորդ թեորեմի համաձայն (V, §6)՝

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt \ :$$

Մնում է կիրառել նախորդ թեորեմը: ■

<u>**6. Ստիլտեսի ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները:**</u>

Թեորեմ 2.6: *Դիցուք g -ն աճող է $[a,b]$ հատվածում: Այդ դեպքում՝*

ա) եթե $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ և $f \in \Re_g[a,b]$, ապա $\int_a^b fdg \geq 0$,

բ) եթե $f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a,b]$ և $f_1, f_2 \in \Re_g[a,b]$, ապա

$$\int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg ,$$

գ) եթե $f \in \Re_g[a,b]$ և $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, ապա

$$m[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b fdg \leq M[g(b) - g(a)],$$

դ) եթե $f \in \Re_g[a,b]$, ապա $|f| \in \Re_g[a,b]$ և

$$\left|\int_a^b fdg\right| \leq \int_a^b |f| dg \ :$$

Թեորեմն ապացուցվում է նույն դատողություններով, ինչ Ռիմանի ինտեգրալի դեպքում:

---

[*] Վերջավոր թվով կետերում g' -ը կարող է գոյություն չունենալ:

Թեորեմ 2.7: *Եթե $f \in C[a,b]$, $g \in BV[a,b]$, ապա*

$$\left|\int_a^b f dg\right| \le \int_a^b |f| dV, \tag{2.8}$$

որտեղ V -ն g ֆունկցիայի վարիացիոն ֆունկցիան է՝

$$V(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(g),\ x \in (a,b],\ V(a) = 0 :$$

► Քանի որ

$$|\sigma| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g(x_{i+1}) - g(x_i)]\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)||g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

և

$$|g(x_{i+1}) - g(x_i)| \le \overset{x_{i+1}}{\underset{x_i}{V}}(g) = V(x_{i+1}) - V(x_i),$$

ապա

$$|\sigma| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|[V(x_{i+1}) - V(x_i)]:$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք (2.8)-ը: ■

Հետևանք: *Եթե՝ $f \in C[a,b]$, $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$, ապա*

$$\left|\int_a^b f dg\right| \le M \overset{b}{\underset{a}{V}}(g) : \tag{2.8'}$$

Ապացույցը հետևում է (2.8)-ից և նախորդ թեորեմի գ) կետից:

<u>7. Միջին արժեքի թեորեմները:</u>

Թեորեմ 2.8: *Եթե ա) $f \in C[a,b]$, բ) g -ն աճող է, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f dg = f(\xi)[g(b) - g(a)] :$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ Ռ-իմանի ինտեգրալի դեպքում:

Թեորեմ 2.9: *Եթե՝ ա) f -ը աճող է $[a,b]$ հատվածում, բ) $g \in C[a,b]$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(\xi)-g(a)] + f(b)[g(b)-g(\xi)]: \qquad (2.9)$$

► Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, այնուհետև՝ նախորդ թեորեմը՝ կստանանք

$$\int_a^b fdg = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b gdf = f(b)g(b) - f(a)g(a) -$$

$$-g(\xi)\left[f(b)-f(a)\right],$$

ինչը համարժեք է (2.9)-ին: ■

Հետևանք[*]: *Եթե ա) f-ը աճող է $[a,b]$-ում, բ) $\varphi \in \Re[a,b]$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a,b]$ կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)dx: \qquad (2.10)$$

► Նշանակենք՝ $g(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$, $x \in [a,b]$: Այդ դեպքում, կիրառելով նախ (2.7)-ը, այնուհետև՝ թեորեմ 2.9-ը, կստանանք (2.10)-ը: ■

<u>8. Փոփոխականի փոխարինում:</u>

Թեորեմ 2.10: *Եթե ա) g-ն խիստ աճող է և $g \in C[\alpha,\beta]$, բ) $h \in C[g(\alpha), g(\beta)]$, ապա*

$$\int_\alpha^\beta h(g(t))dg(t) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} h(x)dx: \qquad (2.11)$$

► $[\alpha,\beta]$ հատվածի $P: \alpha = x_0 < x_1 < ... < x_n = \beta$ տրոհման (որի տրամագիծը λ-ն է) և $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ կետերի ընտրությունից հետո նշանակենք՝ $t_i = g(x_i)$, $\eta_i = g(\xi_i)$ և դիտարկենք $[g(\alpha), g(\beta)]$ հատվածի

$$Q: g(\alpha) = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = g(\beta)$$

[*] Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմն է Ռիմանի ինտեգրալի համար (V, § 7):

տրոհումը, որի տրամագիծը նշանակենք λ^* -ով: Այդ դեպքում՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} h\big(g(\xi_i)\big)\big[g(x_{i+1}) - g(x_i)\big] = \sum_{i=0}^{n-1} h(\eta_i)\Delta t_i \ : \qquad (2.12)$$

Այժմ, եթե $\lambda \to 0$, ապա g ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատության շնորհիվ՝ $\lambda^* \to 0$: (2.12)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք (2.11)-ը: ■

9. Ստիլտեսի ինտեգրալի երկրաչափական մեկնաբանումը:

Դիցուք ունենք պարամետրական տեսքով տրված կոր՝

$$\left.\begin{aligned} x &= g(t) \\ y &= f(t) \end{aligned}\right\}, \ \ \alpha \le t \le \beta \ , \qquad (2.13)$$

որտեղ g -ն և f -ը անընդհատ են, ընդ որում, g -ն խիստ աճող է, իսկ f -ը՝ դրական: Նշված պայմաններում գոյություն ունի $x = g(t)$ ֆունկցիայի հակադարձը՝ $t = g^{-1}(x)$, $x \in \big[g(\alpha), g(\beta)\big]$, որը նույնպես անընդհատ է: Հետևաբար, (2.13) կորը կարելի է ներկայացնել բացահայտ տեսքով՝

$$y = f\big(g^{-1}(x)\big) = h(x), \ x \in [a,b], \qquad (2.14)$$

որտեղ $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$:

Այժմ դիտարկենք կորագիծ սեղանը, որը սահմանափակված է աբսցիսների առանցքով, $x = a$, $x = b$ ուղիղներով և $y = h(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով: Եթե այդ պատկերի մակերեսը նշանակենք P -ով, ապա

$$P = \int_a^b h(x)dx \ :$$

Մյուս կողմից, (2.11) բանաձևի համաձայն՝*

$$\int_\alpha^\beta f(t)dg(t) = \int_\alpha^\beta h\big(g(t)\big)dg(t) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} h(x)dx = \int_a^b h(x)dx = P \ :$$

---

* (2.13)-ից հետևում է, որ $f(t) = h\big(g(t)\big)$:

Այսպիսով, նշված պայմաններում $\int_{\alpha}^{\beta} fdg$ Ստիլտեսի ինտեգրալը հանդիսանում է (2.13) կորով սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը:

10. Սահմանային անցում Ստիլտեսի ինտեգրալի նշանի տակ:

Թեորեմ 2.11: *Եթե ա)* $f_n \in C[a,b]$ *և* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a,b]$,

բ) $g \in BV[a,b]$, *ապա*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dg(x) = \int_a^b f(x)dg(x) : \tag{2.15}$$

► ա) պայմանի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a,b]:$$

Այդ դեպքում, (2.8')-ի համաձայն, կունենանք՝

$$\left|\int_a^b f_n(x)dg(x) - \int_a^b f(x)dg(x)\right| = \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dg(x)\right| \le \varepsilon \mathop{V}_a^b(g),$$

ինչից էլ հետևում է (2.15)-ը: ■

Թեորեմ 2.12: *Եթե՝ ա)* $f \in C[a,b]$, *բ)* $\mathop{V}_a^b(g_n) \le M$ *և* $g_n(x) \to g(x)$, $x \in [a,b]$ *(կետորեն), ապա*

1⁰. $g \in BV[a,b]$ *և* $\mathop{V}_a^b(g) \le M$ *:*

2⁰. $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dg_n(x) = \int_a^b f(x)dg(x)$*:*

► 1^0. $[a,b]$ հատվածի կամայական

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

տրոհման համար ունենք՝

$$\sum_{i=0}^{m-1} |g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i)| \le \mathop{V}_a^b(g_n) \le M :$$

n-ը ձգտեցնելով անվերջության և բ) պայմանից օգտվելով՝ կստանանք

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left| g(x_{i+1}) - g(x_i) \right| \le M$$

անհավասարությունը, որից էլ՝ 1^0-ը:

2^0. Նշանակենք՝

$$I_n := \int_a^b f dg_n\,,\ I := \int_a^b f dg\,,\ \sigma_n = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \Delta g_n(x_i)\,,\ \sigma = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \Delta g(x_i):$$

Այդ դեպքում եռանկյան անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$\left| I - I_n \right| \le \left| I - \sigma \right| + \left| \sigma - \sigma_n \right| + \left| \sigma_n - I_n \right|: \tag{2.16}$$

Գնահատենք աջ կողմի գումարելիները: Ըստ Կանտորի թեորեմի հետևանքի՝ ա) պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon\,,$$

որտեղ λ-ն P տրոհման տրամագիծն է, իսկ $\omega_i(f)$-ը՝ f ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում:

(2.8')-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} \left| \sigma_n - I_n \right| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) - f(x) \right] dg_n(x) \right| \le \\ &\le \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[f(x_i) - f(x) \right] dg_n(x) \right| \le \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f) \cdot \mathop{V}_{x_i}^{x_{i+1}}(g_n) \le \\ &\le \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \mathop{V}_{x_i}^{x_{i+1}}(g_n) = \varepsilon \cdot \mathop{V}_a^b(g_n) \le \varepsilon M: \end{aligned} \tag{2.17}$$

Նույն դատողություններով կստանանք նաև, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow \left| \sigma - I \right| < \varepsilon M: \tag{2.18}$$

Այժմ P տրոհումը ֆիքսենք ($\lambda < \delta$ պայմանի առկայությամբ): Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma\,,$$

ուստի գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow \left|\sigma - \sigma_n\right| < \varepsilon : \tag{2.19}$$

(2.16)-(2.19) առնչություններից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow \left|I - I_n\right| < 2M\varepsilon + \varepsilon ,$$

ինչից էլ հետևում է 2^0-ը: ■

XIV ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԵՐ

§1. ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔ, ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ

1. Եռանկյունաչափական շարքի գործակիցների հաշվումը Էյլեր - Ֆուրիեի մեթոդով: $T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$ տեսքի ֆունկցիան* կոչվում է *եռանկյունաչափական բազմանդամ*, ընդ որում, բազմանդամը կոչվում է n-րդ աստիճանի, եթե $a_n^2+b_n^2>0$: a_k, $0\le k\le n$ և b_k, $1\le k\le n$ թվերը կոչվում են T բազմանդամի գործակիցներ (a_0-ն կոչվում է նաև բազմանդամի ազատ անդամ):

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \qquad (1.1)$$

տեսքի շարքերը կոչվում են *եռանկյունաչափական շարքեր*, իսկ a_k, b_k թվերը կոչվում են (1.1) շարքի գործակիցներ: Մեր առաջիկա նպատակն է (1.1) շարքի գումարի միջոցով հաշվել a_k, b_k գործակիցները: Դրա համար մեզ պետք կգան հետևյալ բանաձևերը՝

ա) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mxdx=0$, $m\in Z$,

բ) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx=\begin{cases}0, & m\ne 0\\ 2\pi, & m=0\end{cases}$, $m\in Z$,

գ) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos kxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sin(m+k)x+\sin(m-k)x\right]dx=0$, $m,k\in N$,

---

* Ընդունված է $a_0+\sum_{k}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$ տեսքի գումարները (վերջավոր կամ անվերջ) գրել առանց փակագծերի:

դ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m-k)x - \cos(m+k)x\right] dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \pi, & m = k \end{cases}$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m-k)x + \cos(m+k)x\right] dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \pi, & m = k \end{cases}$,

$m, k \in N$:

Թեորեմ 1.1: *Եթե (1.1) շարքը $[-\pi, \pi]$ հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ, ապա*

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos kx dx, \quad k = 0,1,2,...$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\sin kx dx, \quad k = 1,2,... \tag{1.2}$$

► (1.1) շարքը անդամ առ անդամ ինտեգրելով և հաշվի առնելով ա)-ն ու բ)-ն՝ կստանանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \pi \ ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x) dx :$$

a_m գործակիցը հաշվելու համար (1.1) շարքը բազմապատկենք $\cos mx$ ֆունկցիայով՝

$$T(x)\cos mx = \frac{a_0}{2}\cos mx + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx : \tag{1.3}$$

Քանի որ հավասարաչափ զուգամետ շարքը սահմանափակ ֆունկցիայով բազմապատկելիս հավասարաչափ զուգամիտությունը պահպանվում է[*], ապա (1.3) շարքը կարող ենք անդամ առ անդամ ինտեգրել: Հաշվի առնելով ա)-դ) բանաձևերը՝ կստանանք

[*] Հետևում է հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից:

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos mx dx = a_m \pi \ ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(x)\cos mx dx\,,\ m \in N:$$

Նման դատողություններով կհաշվենք նաև b_m -ը: ■

<u>2. Ֆուրիեի շարք:</u> Դիցուք f -ը 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է և $f \in \Re[-\pi,\pi]$ կամ f -ը $[-\pi,\pi]$ հատվածում բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական ինտեգրալի իմաստով: Նշանակենք՝

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt\,,\quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt\,,\ k = 0,1,2,...: \qquad (1.4)$$

a_k, b_k թվերը կոչվում են f ֆունկցիայի *Ֆուրիեի գործակիցներ*:

Այդ դեպքում

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

եռանկյունաչափական շարքը կոչվում է f ֆունկցիայի *Ֆուրիեի շարք*: Ֆուրիեի շարք լինելը ցույց են տալիս հետևյալ կերպ՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx: \qquad (1.4')$$

Այսինքն՝ (1.4') բանաձևը նշանակում է, որ a_k, b_k թվերը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են: Նախորդ թեորեմը կվերաձևակերպվի հետևյալ կերպ.

եթե եռանկյունաչափական շարքը $[-\pi,\pi]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, ապա այդ շարքը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

Առաջիկայում մենք կուսումնասիրենք հակառակ հարցը՝ ի՞նչ պայմանների դեպքում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը այս կամ այն իմաստով կզուգամիտի իրեն:

3. <u>Դիրիխլեի ինտեգրալը:</u> f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարը x_0 կետում նշանակենք $S_n(x_0)$ -ով.

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0 : \qquad (1.5)$$

Մեր նպատակն այդ մասնակի գումարի ինտեգրալային ներկայացում ստանալն է: Դրա համար կօգտվենք Ֆուրիեի գործակիցների (1.4) բանաձևերից և հետևյալ լեմմայից.

Լեմմա: *Եթե* $\alpha\notin\{2\pi k : k\in Z\}$, *ապա*

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} : \qquad (1.6)$$

►

$$\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\cos 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\cdots+2\cos n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\left[\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(1-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]+\cdots+\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\alpha\right]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} :$$

■

Հետևյալ թեորեմում Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարը x_0 կետում ներկայացված է *Դիրիխլեի ինտեգրալով:*

Թեորեմ 1.2: *Ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.*

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt: \qquad (1.7)$$

► (1.5)-ի մեջ տեղադրելով a_k, b_k գործակիցների (1.4) արժեքները և հաշվի առնելով (1.6)-ը՝ կստանանք, որ

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\cos kt\cos kx_0+\sin kt\sin kx_0\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x_0)\right]dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x_0)}{2\sin\frac{t-x_0}{2}}dt:$$

Այստեղ ենթինտեգրալ ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն, ուստի ինտեգրման $[-\pi,\pi]$ հատվածը կարող ենք փոխարինել $[x_0-\pi,x_0+\pi]$ հատվածով՝*

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{x_0-\pi}^{x_0+\pi}f(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x_0)}{2\sin\frac{t-x_0}{2}}dt:$$

Այստեղ ինտեգրալում կատարենք $t-x_0=u$ փոփոխականի փոխարինումը՝

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cdot+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cdot:$$

---

* Եթե F -ն ունի 2π պարբերություն և ինտեգրելի է $[-\pi,\pi]$ հատվածում, ապա կամայական a թվի համար ճշմարիտ է $\int_a^{a+2\pi}F(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt$ հավասարությունը:

Այս ինտեգրալներից առաջինում կատարելով $u=-t$ փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք (1.7)-ը: ■

4. Ռիմանի լեմման:

Թեորեմ 1.3: *Եթե* $g\in\Re[a,b]$, *ապա*

$$\text{ա) } \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(t)\sin\lambda t dt=0\,, \text{ բ) } \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt=0\,:$$

► Ապացուցենք միայն ա)-ն: Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական

$$P: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

տրոհում և նշանակենք՝ $m_i=\inf\limits_{[t_i,t_{i+1}]}g(t)$: Այդ դեպքում՝

$$\left|\int_a^b g(t)\sin\lambda t dt\right|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin\lambda t dt+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin\lambda t dt\right|\le$$
$$\le\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(g)\Delta t_i+\frac{2}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|, \qquad (1.8)$$

որտեղ $\omega_i(g)$-ն g ֆունկցիայի տատանումն է $[t_i,t_{i+1}]$ հատվածում:

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ: Նախ՝ P տրոհումն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(g)\Delta t_i<\varepsilon/2 \qquad (1.9)$$

պայմանը, այնուհետև՝ հաստատագրենք այդ P տրոհումը և $E\in R$ թիվն ընտրենք այնպես, որ

$$\lambda>E\Rightarrow\frac{2}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|<\frac{\varepsilon}{2}\,: \qquad (1.10)$$

ա)-ն հետևում է (1.8)-(1.10) առնչություններից: ■

Լրացում: Լեմման ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ g-ն բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական ինտեգրալի իմաստով:

► Ապացուցենք այն դեպքում, երբ եզակիության կետը b-ն է:

Վերցնենք $\eta\in(a,b)$ թիվն այնպես, որ

$$\int_{\eta}^{b}|g(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}: \tag{1.11}$$

Այդ դեպքում՝

$$\left|\int_{a}^{b} g(t)\sin\lambda t dt\right| \le \left|\int_{a}^{\eta} g(t)\sin\lambda t dt\right| + \left|\int_{\eta}^{b} g(t)\sin\lambda t dt\right|: \tag{1.12}$$

Ռիմանի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \left|\int_{a}^{\eta} g(t)\sin\lambda t dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}: \tag{1.13}$$

(1.11)-(1.13) առնչություններից հետևում է, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \left|\int_{a}^{b} g(t)\sin\lambda t dt\right| < \varepsilon ,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Հետևանք: *Եթե* f *-ն ինտեգրելի է* $[-\pi,\pi]$ *հատվածում, կամ բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական ինտեգրալի իմաստով, ապա նրա Ֆուրիեի գործակիցները ձգտում են 0-ի՝*

$$a_k \to 0,\ \ b_k \to 0 \text{, երբ } k \to \infty :$$

<u>**5. Տեղայնացման (լոկալիզացիայի) սկզբունքը:**</u>

Թեորեմ 1.4: x_0 *կետում* f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի վարքը*[*] *կախված է* x_0 *կետի կամայապես փոքր շրջակայքում* f *-ի ընդունած արժեքներից:*

► Վերցնենք որևէ $\delta \in (0,\pi)$ թիվ և Դիրիխլեի ինտեգրալը տրոհենք երկու գումարելիների՝

---

[*] Այսինքն՝ զուգամիտությունը կամ տարամիտությունը:

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left[f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\left[f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt: \qquad (1.14)$$

Քանի որ ըստ Ռիմանի լեմմայի (1.14)-ի երկրորդ գումարելին ձգտում է զրոյի, երբ $n\to\infty$, ապա $S_n(x_0)$-ի վարքը կախված է առաջին գումարելիից, որի մեջ մասնակցում են միայն $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ միջակայքում f-ի ընդունած արժեքները (δ-ն կարող ենք վերցնել որքան կամենանք փոքր): ■

Հետևանք: *Եթե գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $f(x)=g(x)$, $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$, ապա այդ ֆունկցիաների Ֆուրիեի շարքերը x_0 կետում ունեն նույն վարքը*:*

► Եթե (1.14) հավասարությունը գրենք f և g ֆունկցիաների համար, ապա առաջին գումարելիները կհամընկնեն, իսկ երկրորդ գումարելիները կձգտեն զրոյի: ■

§2. ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐ

Այստեղ մենք կուսումնասիրենք f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի կետային զուգամիտության հարցը: Ենթադրենք, որ f ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ՝ $f(x_0-)$ և $f(x_0+)$: Նշանակենք՝

$$S_0=\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}:$$

---

[*] Եթե այդ շարքերից մեկը զուգամիտում է S թվին, ապա մյուսը զուգամիտում է նույն S-ին:

Եթե f ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է, ապա $f(x_0-)=f(x_0+)=f(x_0)$, ուստի այս դեպքում $S_0=f(x_0)$:

Մենք կապացուցենք, որ որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը x_0 կետում զուգամիտում է S_0 թվին:

1. <u>Դինիի հայտանիշը:</u> Դիտարկենք f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի ներկայացումը Դիրիխլեի ինտեգրալի միջոցով՝

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0-t)+f(x_0+t)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt: \qquad (2.1)$$

Այս բանաձևի մեջ տեղադրելով $f(x)\equiv 1$՝ կստանանք

$$1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt:$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $-S_0$-ով և ստացվածը գումարելով (2.1)-ին՝ կստանանք

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S_0\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt: \qquad (2.2)$$

Նշանակենք՝ $\varphi(t)=f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S_0$ և ձևակերպենք *Դինիի հայտանիշը.*

Թեորեմ 2.1: *Եթե գոյություն ունի $\delta\in(0,\pi)$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_0^{\delta}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt<+\infty, \qquad (2.3)$$

ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը x_0 կետում զուգամիտում է S_0 թվին:

► (2.2)-ից ունենք, որ

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt : \qquad (2.4)$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, f -ը 2π պարբերությամբ ֆունկցիա է, որը բացարձակ ինտեգրելի է $[-\pi,\pi]$ հատվածում, ուստի φ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $[0,\pi]$ հատվածում: Հետևաբար, (2.3) պայմանից հետևում է, որ $\frac{\varphi(t)}{t}$ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $(0,\pi]$ միջակայքում:

Մյուս կողմից, $\frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}}$ ֆունկցիան $(0,\pi]$ միջակայքում անընդհատ է և սահմանափակ, հետևաբար,

$$g(t) := \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{t/2}{\sin t/2}$$

ֆունկցիան $(0,\pi]$ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի է: Ռիմանի լեմմայի լրացման համաձայն, (2.4)-ի աջ կողմի ինտեգրալը ձգտում է զրոյի, երբ $n \to \infty$: Այսպիսով՝ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[S_n(x_0) - S_0\right] = 0$ կամ, որ նույնն է՝

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S_0 : \blacksquare$$

2. Լիպշիցի հայտանիշը: Քանի որ

$$\varphi(t) = f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - \left[f(x_0-) + f(x_0+)\right] =$$
$$= \left[f(x_0 - t) - f(x_0-)\right] + \left[f(x_0 + t) - f(x_0+)\right],$$

ապա $|\varphi(t)| \le |f(x_0 - t) - f(x_0-)| + |f(x_0 + t) - f(x_0+)|$: Հետևաբար, եթե

$$\int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0-)|}{t} dt < +\infty \quad \text{և} \quad \int_0^{\delta} \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0+)|}{t} dt < +\infty , \qquad (2.5)$$

ապա Դինիի (2.3) պայմանը տեղի կունենա:

Սահմանում: *Կասենք, որ f ֆունկցիան x_0 կետում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին L գործակցով և $\alpha \in (0,1]$ ցուցիչով, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$0 < t < \delta \Rightarrow \left| f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm) \right| \leq L\, t^{\alpha} : \qquad (2.6)$$

Այն մասնավոր դեպքում, երբ f -ն անընդհատ է x_0 կետում, Լիպշիցի (2.6) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$|t| < \delta \Rightarrow \left| f(x_0 + t) - f(x_0) \right| \leq L |t|^{\alpha} : \qquad (2.6')$$

Այժմ ձևակերպենք *Լիպշիցի հայտանիշը:*

Թեորեմ 2.2: *Եթե x_0 կետում f ֆունկցիան բավարարում է Լիպշիցի (2.6) պայմանին, ապա x_0 կետում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է S_0 թվին:*

► Բավական է ցույց տալ, որ Լիպշիցի պայմանից հետևում է (2.5)-ը: Իսկապես՝

$$\int_0^{\delta} \frac{\left| f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm) \right|}{t} dt \leq \int_0^{\delta} \frac{L\, t^{\alpha}}{t} dt = L \int_0^{\delta} \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$$

ու, քանի որ $\alpha \in (0,1]$, ապա վերջին ինտեգրալը զուգամետ է: ■

<u>3. Կտոր առ կտոր դիֆերենցելի ֆունկցիայի դեպքը:</u>

Սահմանում: *$f:[a,b] \to R$ ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր դիֆերենցելի, եթե գոյություն ունեն $[a,b]$ հատվածի P տրոհում՝ $P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ և $g_i :[x_i, x_{i+1}] \to R$, $0 \leq i \leq m-1$ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ*

$$f(x) = g_i(x),\ x \in (x_i, x_{i+1}) :$$

Հեշտ է նկատել, որ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի f ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով $\left(0 \leq i \leq m-1\right)$.

ա) (x_i, x_{i+1}) բաց միջակայքերում f -ը դիֆերենցելի է,

բ) գոյություն ունեն

$$f(x_i+)=g_i(x_i)\,,\quad f(x_{i+1}-)=g_i(x_{i+1})\,,$$

վերջավոր միակողմանի սահմանները,

գ) գոյություն ունեն

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_i+t)-f(x_i+)}{t}=g_i'(x_i)\,,\ \lim_{t\to 0+}\frac{f(x_{i+1}-t)-f(x_{i+1}-)}{t}=-g_i'(x_{i+1})$$

վերջավոր միակողմանի սահմանները:

Ուստի կտոր առ կտոր դիֆերենցելի ֆունկցիան յուրաքանչյուր $x_0\in\left[a,b\right]$ կետում բավարարում է 1 ցուցիչով Լիպշիցի պայմանին: Հետևաբար, Լիպշիցի հայտանիշից հետևում է հետևյալ հայտանիշը.

Թեորեմ 2.3: *Եթե f ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն և կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է $[-\pi,\pi]$ հատվածում, ապա յուրաքանչյուր $x_0\in R$ կետում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է S_0 թվին:*

<u>4. Դիրիխլեի լեմման:</u>

Լեմմա 2.1: *Եթե $g\in BV[0,\delta]$, ապա* $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\delta g(t)\dfrac{\sin\lambda t}{t}dt=\dfrac{\pi}{2}g(0+)$ *:*

► Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի ժորդանի վերլուծության համաձայն, կարող ենք ենթադրել, որ g -ն աճող է: Այդ դեպքում $g(0+)$ սահմանը գոյություն ունի, իսկ $h(t):=g(t)-g(0+)$ ֆունկցիան աճող է և ոչ բացասական, ընդ որում, $h(0+)=0$: Ունենք՝

$$\int\limits_0^\delta g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt=g(0+)\int\limits_0^\delta\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\int\limits_0^\delta h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt\ : \qquad (2.7)$$

Այստեղ աջ կողմի առաջին գումարելիի սահմանը կհաշվենք Դիրիխլեի անիսկական ինտեգրալի միջոցով (XII, §4, 3)՝

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\delta\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^{\lambda\delta}\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\ :$$

Լեմման ապացուցելու համար մեզ մնում է ցույց տալ, որ (2.7)-ի աջ կողմի երկրորդ գումարելին ձգտում է զրոյի՝

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\delta} h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = 0\,: \tag{2.8}$$

Քանի որ $h(0+) = 0$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\eta \in (0,\delta)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < t \le \eta \Rightarrow h(t) < \varepsilon\,: \tag{2.9}$$

Այնուհետև օգտվենք հետևյալ հավասարությունից՝

$$\int_0^{\delta} h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \int_0^{\eta} h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt + \int_{\eta}^{\delta} h(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt =: I_1(\lambda) + I_2(\lambda) \tag{2.10}$$

և գնահատենք $I_1(\lambda)$-ն ու $I_2(\lambda)$-ն:

Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի $\xi \in [0,\eta]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$I_1(\lambda) = h(\eta)\int_{\xi}^{\eta}\frac{\sin\lambda t}{t}dt = h(\eta)\int_{\lambda\xi}^{\lambda\eta}\frac{\sin x}{x}dx\,: \tag{2.11}$$

Քանի որ $F(y) = \int_0^{y}\frac{\sin x}{x}dx$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0,\infty)$ միջակայքում (V, §5) և $F(y) \to \frac{\pi}{2}$, երբ $y \to +\infty$, ապա այն սահմանափակ է՝ $|F(y)| \le K$: Ուստի (2.9)-ից և (2.11)-ից հետևում է, որ

$$|I_1(\lambda)| \le 2\varepsilon K\,: \tag{2.12}$$

$I_2(\lambda)$-ն գնահատելու համար նկատենք, որ Ռիմանի լեմմայի համաձայն, $I_2(\lambda) \to 0$, $\lambda \to \infty$: Հետևաբար, գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda > E \Rightarrow |I_2(\lambda)| < \varepsilon\,: \tag{2.13}$$

Համադրելով (2.10), (2.12) և (2.13) առնչությունները՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \left|\int_0^\delta h(t)\frac{\sin \lambda t}{t}dt\right| < \varepsilon(2K+1),$$

ինչը համարժեք է (2.8)-ին: Լեմման ապացուցված է: ■

<u>5. Դիրիխլե - Ժորդանի հայտանիշը:</u>

Թեորեմ 2.4: *Եթե գոյություն ունի* $\delta > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ* $f \in BV[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$*, ապա* x_0 *կետում* f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է* S_0 *թվին:*

► Ունենք (կարող ենք ենթադրել, որ $\delta \in (0, \pi)$)՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\delta [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)]\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \cdot :$$

Ռիմանի լեմմայի համաձայն, երկրորդ գումարելին ձգտում է զրոյի, երբ $\lambda \to \infty$: Քանի որ $\varphi(x) = \frac{x}{\sin x}$, $\varphi(0) = 1$ ֆունկցիան $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում աճող է*, ապա**

$$g(t) := [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)]\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \in BV[0, \delta]:$$

Ուստի, Դիրիխլեի լեմմայի համաձայն,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}g(0+)\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}[f(x_0 -) + f(x_0 +)]\frac{\pi}{2} = S_0 : \blacksquare$$

Վերջում բերենք երկու օրինակ, որոնք ցույց են տալիս, որ Դինիի և Դիրիխլե - Ժորդանի հայտանիշները միմյանցից անկախ են, այսինքն՝ մեկը մյուսից չի հետևում:

---

* $\varphi'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} = \cos x\frac{tgx - x}{\sin^2 x} > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

** Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների արտադրյալը վերջավոր վարիացիայի է:

1^0. Դիցուք՝ $f(x)=\dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}}$, $x\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, $f(0)=0$

և թվային առանցքի մնացած կետերում f ֆունկցիան շարունակվում է այնպես, որ ունենա 2π պարբերություն՝ $f(x+2\pi)=f(x)$:

Այս ֆունկցիան $[-\pi,0]$ և $[0,\pi]$ միջակայքերում մոնոտոն է, հետևաբար՝ $f\in BV[-\pi,\pi]$: Սակայն $x_0=0$ կետում f-ը չի բավարարում Դինիի պայմանին, որովհետև

$$\int_0^\delta\frac{|\varphi(t)|}{t}dt=\int_0^\delta\frac{|f(t)+f(-t)-2f(0)|}{t}dt=2\int_0^\delta\frac{dt}{t\left|\ln\dfrac{t}{2\pi}\right|}=\infty:$$

2^0. Նկատենք, որ $f(x)=x\cos\dfrac{\pi}{2x}$, $x\in[-\pi,\pi]\setminus\{0\}$, $f(0)=0$

ֆունկցիան $x_0=0$ կետում բավարարում է Լիպշիցի պայմանին՝

$$|f(x)-f(0)|\le|x|,$$

հետևաբար, այն բավարարում է նաև Դինիի պայմանին: Սակայն կամայական $[0,\delta]$ հատվածում f-ի վարիացիան անվերջ է (XII, §1, 1), այսինքն՝ $x_0=0$ կետում f-ը չի բավարարում Դիրիխլե - Ժորդանի պայմանին:

§3. ՈՉ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԻ

Նախորդ պարագրաֆներում ենթադրվում էր, որ f ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և ունի 2π պարբերություն: Այս պարագրաֆում մեր նպատակն է նախորդ պարագրաֆում ապացուցված հայտանիշները կիրառել այն դեպքերի համար, երբ f ֆունկցիան պարբերական չէ, կամ ուղղակի որոշված է վերջավոր միջակայքում:

1. $(-\pi,\pi]$ միջակայքի դեպքը: Դիցուք f-ը որոշված է $(-\pi,\pi]$ միջակայքում (կամ $(-\pi,\pi]$ միջակայքը պարունակող ցանկացած բազմության վրա) և այդ միջակայքում ինտեգրելի է Ռիմանի իմաստով: Դիտարկենք այն միակ $f^*: R \to R$ ֆունկցիան, որն ունի 2π պարբերություն և բավարարում է $f^*(x) = f(x)$, $x \in (-\pi,\pi]$ պայմանին: Մասնավորաբար՝ $f^*(-\pi) = f(\pi)$:

Այս դեպքում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք ասելով կհասկանանք f^* ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx\,, \tag{3.1}$$

որտեղ

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\cos kt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\sin kt dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt \end{aligned} \quad :$$

Եթե $x_0 \in (-\pi,\pi)$ ներքին կետում f^* ֆունկցիան (կամ որ նույնն է՝ f ֆունկցիան) բավարարում է նախորդ հայտանիշներից որևէ մեկի պայմանին, ապա (3.1) շարքը x_0 կետում զուգամիտում է

$$S_0 = \frac{f^*(x_0-) + f^*(x_0+)}{2} = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

թվին: Մասնավորաբար, եթե f ֆունկցիան x_0 կետում նաև անընդհատ է, ապա (3.1) շարքը $x_0 \in (-\pi,\pi)$ կետում զուգամիտում է $f(x_0)$-ին:

Այլ է վիճակը $x_0 = \pi$ կետում: Եթե $x_0 = \pi$ կետում f^* ֆունկցիան բավարարում է հայտանիշներից որևէ մեկի պայմանին, ապա (3.1) շարքը $x = \pi$ կետում զուգամիտում է

$$S_0 = \frac{f^*(\pi-) + f^*(\pi+)}{2} = \frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2}$$

թվին: (3.1) շարքը նույն S_0 թվին կզուգամիտի նաև $x=-\pi$ կետում: Մասնավորաբար, եթե f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[-\pi,\pi]$ հատվածում, ապա $-\pi$ և π կետերում (3.1) շարքը կզուգամիտի այդ կետերում ֆունկցիայի արժեքների միջին թվաբանականին՝

$$\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$$

թվին (և ոչ ֆունկցիայի արժեքներին այդ կետերում), իսկ $(-\pi,\pi)$ բաց միջակայքում (3.1) շարքը կզուգամիտի $f(x)$ ֆունկցիային:

Նշենք նաև, որ $(-\pi,\pi]$ միջակայքի փոխարեն կարելի է վերցնել 2π երկարությամբ ցանկացած միջակայք՝ $(\alpha,\alpha+2\pi]$:

2. Կամայական հատվածի դեպքը: Դիցուք՝ $f\in C(-\ell,\ell]$, որտեղ ℓ-ը կամայական դրական թիվ է: Նշանակենք՝ $\varphi(x)=f\left(\dfrac{\ell}{\pi}x\right)$: Այդ դեպքում $\varphi\in C(-\pi,\pi]$, ուստի նախորդ կետում շարադրվածը կիրառելի է φ ֆունկցիայի համար, հետևաբար, որոշակի պայմանների դեպքում այն վերածվում է Ֆուրիեի շարքի՝

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx,\ x\in(-\pi,\pi), \tag{3.2}$$

որտեղ

$$\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\cos ktdt=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(y)\cos\frac{k\pi}{\ell}ydy,\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right)\sin ktdt=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(y)\sin\frac{k\pi}{\ell}ydy \end{aligned}\quad :$$

(3.2)-ում նշանակելով $\dfrac{\ell}{\pi}x=y\in(-\ell,\ell)$՝ կստանանք

$$f(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{\pi k}{\ell}y+b_k\sin\frac{\pi k}{\ell}y,\ y\in(-\ell,\ell):$$

Նախորդ կետում հատվածի ծայրակետերի վերաբերյալ արված դիտողությունը մնում է ուժի մեջ նաև այս դեպքում:

Նշենք նաև, որ $(-\ell,\ell]$ միջակայքի փոխարեն կարելի է վերցնել կամայական 2ℓ երկարության միջակայք՝ $(\alpha,\alpha+2\ell]$:

<u>**3. Միայն ըստ կոսինուսների (սինուսների) վերլուծություններ:**</u>

Այստեղ մենք օգտվելու ենք հետևյալ երկու փաստերից, որոնք հետևում են ինտեգրալի հատկություններից.

ա) եթե $F\in\Re[-\pi,\pi]$ *ֆունկցիան կենտ է, ապա* $\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt=0$,

բ) եթե $F\in\Re[-\pi,\pi]$ *ֆունկցիան զույգ է, ապա* $\int_{-\pi}^{\pi}F(t)dt=2\int_{0}^{\pi}F(t)dt$ *:*

Դիցուք $f\in\Re[-\pi,\pi]$ ֆունկցիան զույգ է: Այդ դեպքում $f(t)\cos kt$ ֆունկցիաները զույգ են, իսկ $f(t)\sin kt$ ֆունկցիաները՝ կենտ : Ուստի

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ktdt=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\cos ktdt,\ k=0,1,2,...\tag{3.3}$$
$$b_k=0,\ k=1,2,...:$$

Հետևաբար, f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը կպարունակի միայն կոսինուսները՝

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\,,$$

որտեղ a_k գործակիցները որոշվում են (3.3) բանաձևերով:

Իսկ եթե f ֆունկցիան կենտ է, ապա $f(t)\cos kt$ ֆունկցիաները կենտ են, իսկ $f(t)\sin kt$ ֆունկցիաները՝ զույգ: Ուստի այս դեպքում՝

$$a_k=0,\ k=0,1,...,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(t)\sin ktdt\,,\quad k=1,2,...:\tag{3.4}$$

Հետևաբար, կենտ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը կպարունակի միայն սինուսները՝

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

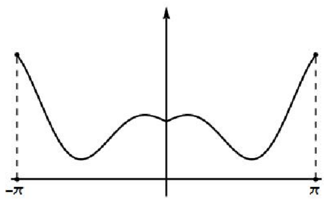
որտեղ b_k գործակիցները հաշվվում են (3.4) բանաձևերով:

Այժմ ենթադրենք, թե f ֆունկցիան որոշված է միայն $(0,\pi]$ միջակայքում և անընդհատ է: Այս դեպքում f ֆունկցիան կարելի է վերլուծել թե' միայն ըստ կոսինուսների, և թե' միայն ըստ սինուսների: Իրոք, ներմուծելով

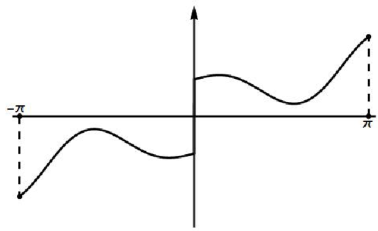
ա) $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$, և բ) $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ -f(-x), & x\in[-\pi,0) \end{cases}$

ֆունկցիաները, որոնցից g-ն զույգ է, իսկ h-ը՝ կենտ, հարցը կբերվի նախորդ դեպքերին: Ընդ որում, ա) դեպքում f-ը կվերլուծվի միայն ըստ կոսինուսների շարքի, որի գործակիցները որոշվում են (3.3) բանաձևերով, իսկ բ) դեպքում՝ միայն ըստ սինուսների շարքի, որի գործակիցները որոշվում են (3.4) բանաձևերով: Ընդսմին, $(0,\pi)$ բաց միջակայքում

ա)



բ)

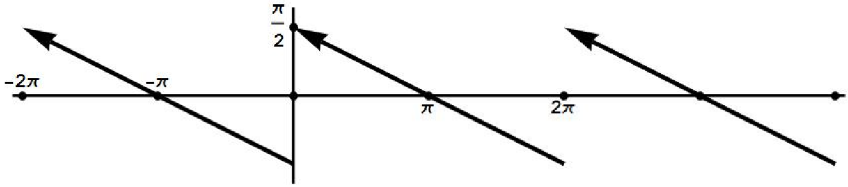


շարքերը կզուգամիտեն $f(x)$-ին (որոշակի պայմանների դեպքում), իսկ $x=0$ և $x=\pi$ կետերում այդ շարքերի վարքերը կլինեն տարբեր:

Օրինակներ:

1) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ ֆունկցիան վերլուծենք Ֆուրիեի շարքի $(0,2\pi]$ միջակայքում:

Դիցուք f^*-ը այն ֆունկցիան է, որն ունի 2π պարբերություն, $f(0)=0$ և $f^*(x)=f(x)$, $x\in(0,2\pi)$:



Քանի որ f^*-ը կենտ է, ապա

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos ktdt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^*(t)\cos ktdt = 0\,,\ k = 0,1,2,...\,,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin kxdx = -\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi}(\pi - x)d\cos kx =$$

$$= -\frac{1}{2\pi k}(\pi - x)\cos kx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\cos kxd(\pi - x) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},\ k \in N:$$

Այժմ, ելնելով f^*-ի սահմանումից և թեորեմ 2.3-ից, կստանանք, որ (3.5) շարքն ամբողջ թվային առանցքի վրա զուգամիտում է $f^*(x)$-ին: Մասնավորաբար՝

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx\,,\quad x \in (0,2\pi): \tag{3.5}$$

Ելնելով (3.5) վերլուծությունից, կարելի է ստանալ նոր վերլուծություններ: (3.5)-ի մեջ x-ը փոխարինելով $2x$-ով՝ կստանանք

$$\frac{\pi}{2} - x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{k}\,,\quad x \in (0,\pi)\,,$$

կամ, որ նույնն է՝

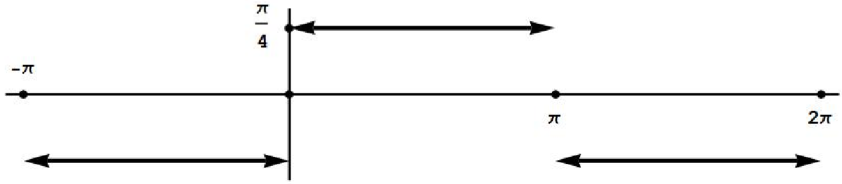
$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{2k}\,,\quad x \in (0,\pi): \tag{3.6}$$

(3.5)-ից հանելով* (3.6)-ը՝ կստանանք

* Առաջին շարքի անդամները նախապես զույգ առ զույգ խմբավորելուց հետո:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad x\in(0,\pi): \qquad (3.7)$$

Քանի որ (3.7) շարքի անդամները 2π պարբերությամբ կենտ ֆունկցիաներ են, ապա այդ շարքը ամբողջ թվային առանցքի վրա կզուգամիտի հետևյալ ֆունկցիային՝



(3.7)-ից հանելով (3.6)-ը՝ կստանանք

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}, \quad x\in(0,\pi),$$

կամ, որ նույնն է՝

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\sin nx}{n}, \quad x\in(0,\pi): \qquad (3.8)$$

Քանի որ (3.8) հավասարության երկու կողմի ֆունկցիաները կենտ են և 0 կետում ընդունում են 0 արժեքը, ապա (3.8) հավասարությունը տեղի կունենա $(-\pi,\pi)$ միջակայքում:

Եթե (3.8) շարքը դիտարկենք ամբողջ թվային առանցքի վրա, ապա $x=\pi k$ կետերում այն կզուգամիտի զրոյի, իսկ մնացած կետերում կզուգամիտի այն 2π պարբերություն ունեցող $g(x)$ ֆունկցիային, որը $(-\pi,\pi)$ միջակայքում համընկնում է x-ի հետ (իսկ π կետում 0 է):

2) $f(x)=x^2$ ֆունկցիան վերլուծենք $[-\pi,\pi]$ հատվածում:

Քանի որ f ֆունկցիան զույգ է, ապա $b_k=0$, $a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos kx dx$:

Ուստի $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx=\frac{1}{3\pi}x^3\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}$, իսկ $k=1,2,...$ դեպքում՝

$$a_k = \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} x^2 d\sin kx = \frac{2}{\pi k} x^2 \sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int_0^{\pi} \sin kx \cdot 2x dx =$$

$$= \frac{4}{\pi k^2}\int_0^{\pi} x d\cos kx = \frac{4}{\pi k^2} x\cos kx\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{\pi k^2}\cdot \pi \cos \pi k = (-1)^k \frac{4}{k^2} :$$

Հետևաբար՝ $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2}\cos kx$, $x \in [-\pi, \pi]$: Այստեղ տեղադրելով $x = \pi$ ՝ կստանանք $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ կամ, որ նույնն է՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} :$$

3) $f(x) = \cos ax$ ֆունկցիան վերլուծենք $[-\pi, \pi]$ հատվածում, որտեղ $a \in R \setminus Z$:

Քանի որ f ֆունկցիան զույգ է, ապա $b_k = 0$, իսկ

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(a+k)x + \cos(a-k)x] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi(a+k)}\sin(a+k)x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi(a-k)}\sin(a-k)x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi(a+k)}\sin \pi(a+k) + \frac{1}{\pi(a-k)}\sin(a-k)\pi =$$

$$= \frac{1}{\pi(a+k)}\sin a\pi \cos k\pi + \frac{1}{\pi(a-k)}\sin a\pi \cos k\pi =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\pi}\sin a\pi \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k}\right) = \frac{(-1)^k 2a}{\pi(a^2 - k^2)}\sin a\pi, \ k = 1, 2, ...,$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ax dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi} :$$

Հետևաբար՝

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2a}{\pi(a^2 - k^2)} \sin a\pi \cos kx ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sin a\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2a}{\pi(a^2 - k^2)} \cos kx \ , \ x \in [-\pi, \pi] :$$

Այստեղ տեղադրելով $x = \pi$ և նշանակելով $a\pi = z$ ՝ կստանանք

$$ctgz = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2} \ , \ z \in R \setminus \{k\pi\} : \qquad (3.9)$$

<u>4. $\sin x$ ֆունկցիայի վերլուծությունն անվերջ արտադրյալի (Էյլեր):</u>

(3.9)-ից ունենք՝

$$ctgz - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2} \ , \ z \in R ,\ z \neq \pi k : \qquad (3.10)$$

Քանի որ յուրաքանչյուր հաստատագրված $x \in (0, \pi)$ թվի համար (3.10) շարքը $[0, x]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է, ապա այդ շարքն անդամ առ անդամ ինտեգրելով, կստանանք

$$\int_0^x \left(ctgz - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \left(\frac{1}{z + \pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) dz ,$$

ուստի

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left| (z + \pi k)(z - \pi k) \right| \Big|_{z=0}^{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right) : \qquad (3.11)$$

Անվերջ արտադրյալների 4^0 պարզագույն հատկության համաձայն (IX, §6, 2), (3.11)-ից կստանանք՝ $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$, կամ, որ նույնն է՝

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right), \ \ x \in [0, \pi] : \qquad (3.12)$$

► Ապացուցենք, որ (3.12) հավասարությունը տեղի ունի ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նշանակենք՝ $f(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$ և ապացուցենք, որ $f(x + \pi) = -f(x)$, ինչից և կհետևի (3.12)-ը: Ունենք՝

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} x\prod_{k=1}^{n}\frac{\pi^2k^2-x^2}{\pi^2k^2}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\prod_{k=-n}^{n}(x+\pi k)\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi^2k^2},$$ ուստի

$$f(x+\pi)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\prod_{k=-n}^{n}[x+\pi(k+1)]\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi^2k^2}=$$

$$=-\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\prod_{m=-(n-1)}^{n-1}(x+\pi m)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\pi^2k^2}\frac{(x+\pi n)[x+\pi(n+1)]}{\pi^2n^2}=-f(x):\blacksquare$$

Վերջում նշենք, որ օգտվելով $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ հավասարությունից և (3.12)-ից, կարելի է ստանալ $\cos x$ ֆունկցիայի վերլուծությունն անվերջ արտադրյալի:

§4. ՖԵՅԵՐԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. <u>Ֆեյերի թեորեմը:</u> Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և ունի 2π պարբերություն: Նշանակենք՝[*]

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_{n-1}(x)}{n},\quad n\in N,$$

որտեղ $S_k(x)$-ը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի k-րդ մասնակի գումարն է: σ_n հաջորդականությունն անվանում են f ֆունկցիայի *Ֆեյերի միջիններ*:

Թեորեմ 4.1 (Ֆեյեր): *Եթե $f\in C(R)$ և ունի 2π պարբերություն, ապա*

$$\sigma_n(x)\rightrightarrows f(x),\quad x\in R: \tag{4.1}$$

► Օգտվելով $S_k(x)$-ի (1.7) ինտեգրալային ներկայացումից՝ կստանանք

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\left[f(x-t)+f(x+t)\right]\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt: \tag{4.2}$$

Այնուհետև, գումարելով

---

[*] Ենթադրվում է, որ f ֆունկցիան $[-\pi,\pi]$ հատվածում ինտեգրելի է:

$$2\sin\frac{t}{2}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=\cos kt-\cos(k+1)t\,,\quad k=0,1,...,n-1$$

նույնությունները, կստանանք՝

$$2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t=1-\cos nt=2\sin^2\frac{nt}{2}\,:$$

Հաշվի առնելով այս հավասարությունը՝ (4.2)-ից հանգում ենք

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\left[f(x-t)+f(x+t)\right]\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt\,, \tag{4.3}$$

հավասարությանը, որի աջ մասը կոչվում է *Ֆեյերի ինտեգրալ*:

(4.3) բանաձևի մեջ տեղադրելով $f(x)\equiv 1$՝ կստանանք

$$1=\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt\,: \tag{4.4}$$

Նշանակենք՝

$$\Phi_n(t)=\frac{1}{\pi n}\frac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}\,,$$

որը կոչվում է *Ֆեյերի կորիզ*: Հեշտ է ստուգել, որ այն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1^0. $\Phi_n(t)\geq 0$, $\qquad$ 2^0. $\int_0^\pi\Phi_n(t)dt=1$:

3^0. Կամայական $\delta>0$ թվի համար՝ $\Phi_n(t)\rightrightarrows 0$, երբ $t\in[\delta,\pi]$:

Ֆեյերի թեորեմը հետևում է (4.3)-ից և 1^0-3^0 հատկություններից:

Իրոք, (4.4)-ը բազմապատկելով $-f(x)$-ով և ստացվածը գումարելով (4.3)-ին՝ կստանանք

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[f(x-t) + f(x+t) - 2f(x) \right] \Phi_n(t)dt : \qquad (4.5)$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ Կանտորի թեորեմից հետևում է, որ f -ը հավասարաչափ անընդհատ է, ապա գոյություն ունի $\delta \in (0,\pi)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 \le t \le \delta \Rightarrow \left| f(x \pm t) - f(x) \right| < \varepsilon, \quad x \in R : \qquad (4.6)$$

Այդ դեպքում, համաձայն (4.5)-ի և 1^0-ի, կստանանք՝

$$\left| \sigma_n(x) - f(x) \right| \le \frac{1}{2}\int_0^{\delta} \left| f(x-t) + f(x+t) - 2f(x) \right| \Phi_n(t)dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\delta}^{\pi} \left| f(x-t) + f(x+t) - 2f(x) \right| \Phi_n(t)dt :$$

Այնուհետև, նշանակելով $M = \max_{x \in R} \left| f(x) \right|$ և հաշվի առնելով (4.6)-ը, կստանանք՝

$$\left| \sigma_n(x) - f(x) \right| \le \varepsilon \int_0^{\delta} \Phi_n(t)dt + 2M\pi \max_{t \in [\delta,\pi]} \left| \Phi_n(t) \right|, \quad x \in R : \qquad (4.7)$$

$\Phi_n(t)$ ֆունկցիայի 1^0 - 3^0 հատկությունների շնորհիվ, (4.7)-ից հետևում է (4.1)-ը: ■

Հետևանք: *Եթե 2π պարբերություն ունեցող f ֆունկցիան անընդհատ է և f -ի Ֆուրիեի գործակիցները հավասար են զրոյի՝ $a_k, b_k = 0$, ապա $f(x) \equiv 0$, $x \in R$:*

► Այս դեպքում՝ $S_k(x)$ -երը, $k = 0,1,2,\ldots$, հետևաբար նաև՝ $\sigma_n(x)$ -երը, $n \in N$, նույնաբար 0 են, ուստի $f(x)$ -ը նույնպես նույնաբար զրո է: ■

Թեորեմ 4.1': *Եթե 2π պարբերություն ունեցող f ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ՝ $f(x_0-)$ և $f(x_0+)$, ապա*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = S_0 = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} :$$

Ապացուցվում է նույն դատողություններով, ինչ որ նախորդ դեպքում: Այս թեորեմը համադրելով միջին թվաբանականների վերաբերյալ Կոշիի թեորեմի (II, §2, 4) հետ՝ կստանանք, որ *եթե* x_0 *կետում* f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամետ է, ապա նրա գումարը* S_0 *-ն է:*

Դիտողություն: Ֆեյերի թեորեմը $[0,2\pi]$ հատվածում որոշված ֆունկցիայի համար կձևակերպվի հետևյալ կերպ. *եթե* $f \in C[0,2\pi]$ *և* $f(0) = f(2\pi)$, *ապա*

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [0,2\pi]: \tag{4.1'}$$

► Դիտարկենք այն $f^*: R \to R$ ֆունկցիան, որն ունի 2π պարբերություն և $f^*(x) = f(x)$, $x \in (0,2\pi]$: Այդ դեպքում $f^* \in C(R)$ և ունի 2π պարբերություն: Հետևաբար, (4.1')-ը հետևում է (4.1)-ից: ■

<u>**2. Վայերշտրասի թեորեմները:**</u> Դիցուք՝ $E \subset R$ և $f: E \to R$: Ապացուցենք, որ հետևյալ պնդումները համարժեք են.

ա) Գոյություն ունի P_n բազմանդամների հաջորդականություն, որը E բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f -ին՝

$$P_n(x) \rightrightarrows f(x), \; x \in E:$$

բ) Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի Q_ε բազմանդամ, այնպիսին, որ

$$|Q_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon, \; x \in E:$$

► Իրոք, ա)$\Rightarrow$բ) առնչությունը հետևում է հավասարաչափ զուգամիտության սահմանումից: Իսկ բ)$\Rightarrow$ա) առնչությունն ապացուցելու համար վերցնենք՝ $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in N$ և նշանակենք՝ $P_n = Q_{\frac{1}{n}}$: Այդ դեպքում բ)-ի համաձայն՝

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \; x \in E, \; n \in N,$$

այսինքն՝ $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$: ■

Եթե f-ը բավարարում է ա) կամ բ) համարժեք պայմաններից որևէ մեկին, ապա ասում են, որ E *բազմության վրա* f *ֆունկցիան կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով:*

$P(E)$-ով կնշանակենք այն $f: E \to R$ ֆունկցիաների դասը, որոնք կարելի է E բազմության վրա հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամ-ներով:

Թեորեմ 4.2 (Վայերշտրասի առաջին թեորեմը): *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով՝*

$$P([a,b]) = C([a,b]) :$$

Թեորեմ 4.3 (Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը): *Եթե* $f \in C[0,2\pi]$ *և* $f(0) = f(2\pi)$, *ապա գոյություն ունի* T_n *եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականություն, որը* $[0,2\pi]$ *հատվածում հավասարաչափ զուգամիտում է* f *-ին՝*

$$T_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [0,2\pi] : \tag{4.8}$$

► Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը հետևում է Ֆեյերի թեորեմից, իսկ առաջին թեորեմը՝ երկրորդ թեորեմից:

Իրոք, քանի որ $\sigma_n(x)$ ֆունկցիաները եռանկյունաչափական բազման-դամներ են, ապա (4.1')-ից հետևում է (4.8)-ը:

Վայերշտրասի առաջին թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք*, որ $[a,b] = [0,1]$ և ցույց տանք, որ $f \in C[0,1]$ ֆունկցիան կարելի է $[0,1]$ հատվածում հավասարաչափ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամ-ներով:

Դիտարկենք հետևյալ պայմաններին բավարարող $g \in C[0,2\pi]$ օժանդակ ֆունկցիան.

---

* Ընդհանուր դեպքը փոփոխականի փոխարինման միջոցով բերվում է այս դեպքին:

$g(x) = f(x)$, երբ $x \in [0,1]$,

$g(2\pi) = g(0)$,

$[1,2\pi]$ հատվածում g-ն գծային է:

Այսպես կառուցված g ֆունկցիան բավարարում է Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի պայմաններին, ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $T_\varepsilon(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամ՝

$$T_\varepsilon(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

այնպիսին, որ

$$|g(x) - T_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0,2\pi]: \tag{4.9}$$

Այնուհետև նկատենք, որ $a_k \cos kx$ և $b_k \sin kx$, $1 \le k \le n$ ֆունկցիաներն իրենց հերթին կարելի է հավասարաչափ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամներով, ուստի գոյություն ունեն $P_k(x)$ և $Q_k(x)$, $1 \le k \le n$ բազմանդամներ, այնպիսիք, որ

$$|a_k \cos kx - P_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4n}, \ |b_k \sin kx - Q_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4n}, \tag{4.10}$$
$$x \in [0,2\pi], \ k = 1,...,n$$

(որպես P_k և Q_k բազմանդամներ կարելի է վերցնել $a_k \cos kx$ և $b_k \sin kx$ ֆունկցիաների Թեյլորի շարքերի մասնակի գումարները):

Նշանակելով

$$R(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [P_k(x) + Q_k(x)],$$

և հաշվի առնելով (4.9)-(4.10)-ը՝ կստանանք

$$|g(x) - R(x)| \le |g(x) - T_\varepsilon(x)| + |T_\varepsilon(x) - R(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2n \cdot \frac{\varepsilon}{4n} = \varepsilon, \tag{4.11}$$
$$x \in [0,2\pi]:$$

Քանի որ $[0,1]$ հատվածում $g(x)$-ը համընկնում է $f(x)$-ին, ապա (4.11)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - R(x)| < \varepsilon \,, \; x \in [0,1] \,,$$

այսինքն՝ f ֆունկցիան $[0,1]$ հատվածում կարելի է հավասարաչափ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամներով: ■

§5. ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔ ԸՍՏ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ

<u>1. Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաներ:</u> Դիցուք՝ $f:[a,b] \to \mathbb{C}$, որտեղ $[a,b] \subset R$, իսկ $\mathbb{C}$-ն կոմպլեքս թվերի դաշտն է: Այդպիսի ֆունկցիան կոչվում է *իրական փոփոխականի կոմպլեքս (կոմպլեքսարժեք) ֆունկցիա*: Յուրաքանչյուր $t \in [a,b]$ արժեքի դեպքում $f(t)$ կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t)) = \varphi(t) + i\psi(t) \,, \;\; t \in [a,b] \qquad (5.1)$$

տեսքով, որտեղ $\varphi, \psi : [a,b] \to R$: Այսպիսով, (5.1) բանաձևի օգնությամբ f կոմպլեքս ֆունկցիան ներկայացվում է φ և ψ իրական (իրականարժեք) ֆունկցիաների միջոցով, որոնք համապատասխանաբար կոչվում են f *–ի իրական և կեղծ մասեր*:

f կոմպլեքս ֆունկցիայի սահմանը $t_0 \in [a,b]$ կետում սահմանվում է ճիշտ նույն ձևով, ինչ որ իրական ֆունկցիայի դեպքում*: Այն է՝ $z_0 = x_0 + iy_0$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման t_0 կետում և նշանակվում է՝ $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = z_0$, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{c} 0 < |t - t_0| < \delta \\ t \in [a,b] \end{array} \right\} \Rightarrow |f(t) - z_0| < \varepsilon \, :$$

Թեորեմ 5.1: *Որպեսզի* $\lim\limits_{t \to t_0} f(t) = z_0$, *անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0 \,, \quad \lim_{t \to t_0} \psi(t) = y_0 \, :$$

---

* Տե՛ս նաև վեկտոր - ֆունկցիայի սահմանը (VII, §2, 6):

Ապացույցը հետևում է

$$|\varphi(t)-x_0|\le|f(t)-z_0|\le|\varphi(t)-x_0|+|\psi(t)-y_0|,$$
$$|\psi(t)-x_0|\le|f(t)-z_0|\le|\varphi(t)-x_0|+|\psi(t)-y_0|$$

անհավասարություններից (ինչպես կոորդինատային զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի դեպքում (VII, §1, 3)):

Այս թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ.

որպեսզի $f(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ *կոմպլեքս ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* φ *և* ψ *ֆունկցիաները ունենան վերջավոր սահմաններ, ընդ որում,*

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=\lim_{t\to t_0}\varphi(t)+i\lim_{t\to t_0}\psi(t)\ :$$

Կոմպլեքս ֆունկցիայի անընդհատությունը, ածանցյալը և ինտեգրալը կրկին սահմանվում են ճիշտ նույն ձևով, ինչ որ իրական ֆունկցիաների դեպքում, ընդ որում ճիշտ են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 5.2: *Որպեսզի* f *ֆունկցիան* $t_0\in[a,b]$ *կետում լինի դիֆերենցելի (ունենա ածանցյալ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ* φ *և* ψ *ֆունկցիաները* t_0 *կետում լինեն դիֆերենցելի, ընդ որում,*

$$f'(t_0)=\varphi'(t_0)+i\psi'(t_0)\ :$$

Թեորեմ 5.3: *Որպեսզի* f *ֆունկցիան* $[a,b]$ *հատվածում լինի ինտեգրելի (Ռիմանի իմաստով), անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\varphi,\psi\in\Re[a,b]$*, ընդ որում,*

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^b\varphi(t)dt+i\int_a^b\psi(t)dt\ :$$

Ռիմանի իմաստով ինտեգրելի կոմպլեքս ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $\Re\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ սիմվոլով:

Դժվար չէ ստուգել, որ ինտեգրալի հավասարությունով արտահայտվող այն հատկությունները, որոնք չեն առնչվում իրական թվերի բազմության կարգավորվածությանը[*], պահպանվում են նաև կոմպլեքս ֆունկցիաների համար: Այլ կերպ ասած, բացի միջին արժեքի թեորեմներից և անհավասարություններով արտահայտվող հատկություններից, մնացած բոլոր հատկությունները պահպանվում են:

Ցույց տանք, որ միջին արժեքի թեորեմը չի պահպանվում: Օրինակ,

$$e^{int} = \cos nt + i\sin nt$$

ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$\int_0^{2\pi} e^{int}dt = \int_0^{2\pi} \cos ntdt + i\int_0^{2\pi} \sin ntdt = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & n \in Z,\, n \neq 0 \end{cases}, \tag{5.2}$$

սակայն $\left|e^{int}\right| = 1 \neq 0$, $n \in N$:

Կոմպլեքս ֆունկցիաների համար ավելանում է ինտեգրալի համալուծի մասին հետևյալ հատկությունը՝

$$\overline{\int_a^b f(t)dt} = \int_a^b \overline{f(t)}dt, \tag{5.3}$$

որը հետևում է թեորեմ 5.3-ից:

Ինտեգրալի անհավասարությունով արտահայտվող հատկություններից պահպանվում է ինտեգրալի մոդուլի գնահատականը՝

եթե $\Re([a,b],\mathbb{C})$, ապա $|f| \in \Re[a,b]$ և $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$:

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ իրական ֆունկցիաների դեպքում:

Այսպիսով, $\Re([a,b],\mathbb{C})$-ն կոմպլեքս գծային տարածություն է, որն ընդգրկում է $C([a,b],\mathbb{C})$-ն՝ $[a,b]$ հատվածում անընդհատ կոմպլեքս ֆունկցիաների տարածությունը: $C([a,b],\mathbb{C})$-ն հանդիսանում է $\Re([a,b],\mathbb{C})$-ի ենթատարածություն:

---

[*] Կոմպլեքս թվերի բազմությունը կարգավորված չէ:

<u>2. Սկալյար արտադրյալ, նորմ և հեռավորություն:</u> Դիցուք E -ն կոմպլեքս գծային (վեկտորական) տարածություն է, այսինքն՝ E -ի վրա սահմանված են գումարման և կոմպլեքս թվով բազմապատկման գործողություններ:

Ենթադրենք E տարածության յուրաքանչյուր x և y տարրերի զույգին համապատասխանեցված է մի $<x,y>$ կոմպլեքս թիվ, որը կոչվում է այդ տարրերի սկալյար արտադրյալ, այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ աքսիոմները՝

1) $<x,y>=\overline{<y,x>}$,

2) $<x_1+x_2,y>=<x_1,y>+<x_2,y>$,

3) $<\alpha x,y>=\alpha<x,y>$,

4) ա) $<x,x>\geq 0$, բ) $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$:

2) և 3) աքսիոմները համադրելով 1)-ի հետ՝ կստանանք

2') $<x,y_1+y_2>=<x,y_1>+<x,y_2>$,

3') $<x,\alpha y>=\overline{\alpha}<x,y>$:

Կոմպլեքս գծային տարածությունը, որում սահմանված է սկալյար արտադրյալ, կոչվում է *ունիտար տարածություն*: Այդ դեպքում

$$\|x\|=\sqrt{<x,x>}$$

թիվը կոչվում է x վեկտորի նորմ: Նորմի հատկությունները ապացուցելու համար մեզ անհրաժեշտ է *Շվարցի անհավասարությունը*՝

եթե բավարարվում են 1)-3) և 4)-ի ա) աքսիոմները, ապա

$$|<x,y>|\leq\|x\|\|y\|: \tag{5.4}$$

► Կամայական $\lambda\in\mathbb{C}$ թվի համար ունենք՝

$$0\leq<x-\lambda y,x-\lambda y>=\|x\|^2-\overline{\lambda}<x,y>-\lambda\overline{<x,y>}+|\lambda|^2\|y\|^2: \tag{5.5}$$

Երբ $\|y\|\neq 0$, այստեղ տեղադրելով $\lambda=\dfrac{<x,y>}{\|y\|^2}$, կստանանք՝

$$0\leq\|x\|^2-\frac{|(x,y)|^2}{\|y\|^2},$$

ինչը համարժեք է (5.4)-ին:

Երբ $\|y\| = 0$, բայց $\|x\| \neq 0$, (5.4)-ը կապացուցվի նույն կերպ: Իսկ երբ $\|x\| = \|y\| = 0$, ապա (5.5)-ում տեղադրելով $\lambda =< x, y >$, կստանանք $0 \leq -2|< x, y >|^2$, այսինքն՝ $< x, y >= 0$: Ինչպես տեսնում ենք, այս դեպքում (5.4)-ը կրկին տեղի ունի: ■

Ապացուցենք, որ նորմն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

ա) $\|x\| \geq 0$, ընդ որում, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

բ)* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

գ) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

► ա)-ն ու գ)-ն անմիջապես հետևում են նորմի սահմանումից (և սկալյար արտադրյալի հատկություններից), իսկ բ)-ն՝ Շվարցի անհավասարությունից: Իրոք՝

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= \|x\|^2 + < x, y > + \overline{< x, y >} + \|y\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} < x, y > + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|< x, y >| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

ինչից և հետևում է բ)-ն: ■

Ունիտար տարածությունում x և y տարրերի $\rho(x, y)$ հեռավորությունը սահմանվում է նորմի միջոցով՝

$$\rho(x, y) = \|x - y\|:$$

Նորմի ա)-գ) հատկություններից հետևում են հեռավորության հետևյալ հատկությունները՝

1^0. $\rho(x, y) \geq 0$, ընդ որում, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2^0. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3^0. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$:

Ունիտար տարածությունում x և y վեկտորները կոչվում են *օրթոգոնալ*, եթե $< x, y >= 0$:

---

* Եթե տեղի ունի հավասարություն, ապա $x = ty$, $t \geq 0$ (կամ $y = 0$):

3. Ֆունկցիոնալ տարածություններ: Օրթոգոնալ համակարգեր:

$C([a,b],\mathbb{C})$ և $\Re([a,b],\mathbb{C})$ տարածություններում f և g ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է

$$< f,g >=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

բանաձևի միջոցով: (5.3)-ի շնորհիվ, սկալյար արտադրյալի 1)-3) և 4)-ի ա) հատկությունները տեղի ունեն թե' $C([a,b],\mathbb{C})$-ում, և թե' $\Re([a,b],\mathbb{C})$-ում: Ինչ վերաբերում է 4)-ի բ) հատկությանը, ապա այն $C([a,b],\mathbb{C})$-ում տեղի ունի, իսկ $\Re([a,b],\mathbb{C})$-ում՝ ոչ: Իրոք, եթե $f\in C([a,b],\mathbb{C})$ և $\int_a^b |f(t)|^2 dt=0$, ապա $f(t)\equiv 0$, $t\in[a,b]$ (ապացուցվում է հակառող ենթադրության մեթոդով): Այս պնդումն ինտեգրելի ֆունկցիաների համար ճիշտ չէ:

Այդուհանդերձ, $\Re([a,b],\mathbb{C})$-ում նորմի հետ կապված այս անհարթությունն անտեսելով*՝ երկու տարածություններում էլ դիտարկվում է f ֆունկցիայի $\|f\|=\left\{\int_a^b |f(t)|^2 dt\right\}^{1/2}$ նորմը:

Շվարցի անհավասարությունն է՝

$$\left|\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt\right|\le\left\{\int_a^b |f(t)|^2 dt\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b |g(t)|^2 dt\right\}^{1/2},$$

որը նաև կոչվում է Կոշի - Բունյակովսկիի անհավասարություն:

Այս տարածություններում երկու ֆունկցիաների հեռավորությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\rho(f,g)=\left\{\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt\right\}^{1/2},$$

* Իրականում 4) –ի բ) պայմանն ընկալվում է այլ՝ *համարյա ամենուրեք* իմաստով (տե'ս XVII , § 2, կետ 3):

որը կոչվում է *միջին քառակուսային հեռավորություն*:

Սահմանում: $\{\varphi_i\} \subset \Re([a,b],\mathbb{C})$ *ֆունկցիաների համակարգը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է օրթոգոնալ համակարգ, եթե*

$$<\varphi_i,\varphi_j>=\int_a^b \varphi_i(t)\overline{\varphi_j(t)}dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \lambda_i>0, & i=j\end{cases}:$$

$\{\varphi_i\}$ օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է *օրթոնորմալ (օրթոգոնալ և նորմավորված)*, եթե $\lambda_i=1$:

Ցանկացած օրթոգոնալ համակարգ կարելի է նորմավորել: Իսկապես, եթե $\{\varphi_i\}$-ն օրթոգոնալ համակարգ է, ապա $\left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\varphi_i\right\}$-ն օրթոնորմալ համակարգ է, որը կոչվում է $\{\varphi_i\}$ համակարգի նորմավորված համակարգ:

Օրինակներ: 1) $\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,...\}$ համակարգը, որը կոչվում է *եռանկյունաչափական համակարգ*, $[0,2\pi]$ հատվածում օրթոգոնալ համակարգ է, իսկ նրա նորմավորվածը* կլինի՝

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},...\right\}:$$

2) $\{e^{ikx},k\in Z\}$ համակարգը, որը կոչվում է *կոմպլեքս եռանկյունաչափական համակարգ*, $[0,2\pi]$ հատվածում օրթոգոնալ է (տե՛ս (5.2)-ը)՝

$$<e^{ikx},e^{imx}>=\int_0^{2\pi} e^{ix(k-m)}dx=\begin{cases}0, & k\neq m\\ 2\pi, & k=m\end{cases},\ k,m\in Z, \tag{5.6}$$

նորմավորվածը կլինի՝ $\left\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}},k\in Z\right\}$:

4. Եռանկյունաչափական շարքի կոմպլեքս գրելաձևը: Դիտարկենք

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx+b_k\sin kx \tag{5.7}$$

կոմպլեքս եռանկյունաչափական բազմանդամը՝ $a_k,b_k\in\mathbb{C}$:

---

* Տե՛ս (§1, 1):

Տեղադրելով[*]

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \qquad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

կստանանք՝

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-ikx} \right]:$$

Հաշվի առնելով $\frac{1}{i} = -i$ հավասարությունը՝ կստանանք

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{5.8}$$

որտեղ

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \; c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \; k = 1,...,n, \; c_0 = a_0: \tag{5.8'}$$

Այսպիսով, (5.7) բազմանդամը կարելի է գրել նաև (5.8) տեսքով, որը կոչվում է *եռանկյունաչափական բազմանդամի կոմպլեքս գրելաձև*:

(5.8) հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով e^{-imx}-ով և ինտեգրելով ստացված հավասարությունը՝ (5.6)-ի շնորհիվ կստանանք

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x) e^{-imx} dx, \quad |m| \le n: \tag{5.9}$$

Եթե $|m| > n$, ապա (5.9) ինտեգրալը հավասար է 0-ի:

(5.8) և (5.9) հավասարություններից հետևում է[**], *որ որպեսզի $T(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամը լինի իրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $c_{-k} = \overline{c_k}$, $k = 0,1,...,n$:*

Այնուհետև դիտարկենք հետևյալ սիմվոլը՝

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \tag{5.10}$$

[*] Էյլերի բանաձևերն են:

[**] (5.3)-ի շնորհիվ:

որը կոչվում է *կոմպլեքս տեսքով գրված եռանկյունաչափական շարք*: Այդ շարքի n-րդ մասնակի գումար է կոչվում

$$S_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}c_k e^{ikx}\ ,\ n=0,1,2,...$$

եռանկյունաչափական բազմանդամը: Ուստի (5.10) շարքի մասնակի գումարները համընկնում են

$$a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \tag{5.11}$$

շարքի մասնակի գումարներին, եթե c_k գործակիցները a_k և b_k գործակիցներից ստացվում են (5.8') բանաձևերի միջոցով: Դրա շնորհիվ մենք կարող ենք համարել, որ (5.10) շարքը դա (5.11) շարքն է՝ գրված մեկ այլ տեսքով, որը կոչվում է (5.11) *եռանկյունաչափական շարքի կոմպլեքս գրելաձև*:

<u>5. Ֆուրիեի շարք ըստ օրթոգոնալ համակարգի:</u> Դիցուք $\{\varphi_k\}$ ($k\in N$ կամ $k\in Z$) համակարգը $[a,b]$ հատվածում օրթոգոնալ է՝

$$<\varphi_i,\varphi_j>=\int_a^b\varphi_i(t)\overline{\varphi_j(t)}dt=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \lambda_i>0, & i=j\end{cases}:$$

$f\in\Re\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ ֆունկցիայի համար նշանակենք՝

$$c_k=\frac{1}{\lambda_k}\int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}dt\ , \tag{5.12}$$

որը կոչվում է f ֆունկցիայի *Ֆուրիեի* k*-րդ գործակից ըստ* $\{\varphi_k\}$ համակարգի: Այդ դեպքում մենք կգրենք

$$f(x)\sim\sum c_k\varphi_k(x)\ ,$$

և այդ շարքը կանվանենք f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք (ըստ* $\{\varphi_k\}$ *համակարգի)*:

Նկատենք, որ f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն ըստ $\{\varphi_k\}$ օրթոգոնալ համակարգի նույնն է, ինչ որ f-ի Ֆուրիեի շարքն ըստ $\left\{\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}$

նորմավորված համակարգի: Այլ կերպ ասած՝ օրթոգոնալ համակարգը նորմավորելիս Ֆուրիեի շարքը չի փոխվում:

Իրոք, քանի որ $c_k\varphi_k=\sqrt{\lambda_k}c_k\dfrac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$, իսկ (5.12)-ի շնորհիվ՝

$$\sqrt{\lambda_k}c_k=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_a^b f(t)\overline{\varphi_k(t)}dt=\int_a^b f(t)\overline{\left[\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}\right]}dt,$$

ապա $\sqrt{\lambda_k}c_k$-ն f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցն է ըստ նորմավորված համակարգի:

Մենք ուսումնասիրելու ենք $f\in\Re\left([a,b],\mathbb{C}\right)$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն ըստ եռանկյունաչափական համակարգի՝

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\ ,$$

որտեղ

$$\left.\begin{aligned}a_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\ dt\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\ dt\end{aligned}\right.\ ,\ k=0,1,2,...\ ,$$

և ըստ կոմպլեքս եռանկյունաչափական համակարգի՝

$$f\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{ikx}\ ,$$

որտեղ

$$c_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt: \qquad (5.12')$$

Ինչպես տեսանք 4-րդ կետում, այդ երկու շարքերն ըստ էության նույն շարքերն են:

Նախ ապացուցենք ընդհանուր բնույթի մի թեորեմ:

<u>6. Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքստրեմալ հատկությունը:</u>

Թեորեմ 5.4: *Եթե* $\{\varphi_k\}$ *համակարգն օրթոգոնալ է* $[a,b]$ *հատվածում, ապա*

$$I_n(z_1,...,z_n)=\int_a^b\left|f(t)-\sum_{k=1}^n z_k\varphi_k(t)\right|^2 dt\ ,\ z_k\in\mathbb{C}\ ,\ k=1,...,n \qquad (5.13)$$

ֆունկցիան (հաստատագրված n*-ի դեպքում) փոքրագույն արժեք է ընդունում այն և միայն այն դեպքում, երբ* $z_k=c_k$, $k=1,...,n$ *, որտեղ* c_k*-ն* f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցն է:*

► Քանի որ օրթոգոնալ համակարգը նորմավորելիս Ֆուրիեի շարքը չի փոխվում, ապա կարող ենք ենթադրել, որ $\{\varphi_k\}$ համակարգը օրթոնորմալ է $[a,b]$ հատվածում: Այդ դեպքում ունենք՝

$$\begin{aligned}I_n&=\int_a^b\left[f(t)-\sum_{k=1}^n z_k\varphi_k(t)\right]\overline{\left[f(t)-\sum_{k=1}^n z_k\varphi_k(t)\right]}dt=\\&=\int_a^b\left[f(t)-\sum_{k=1}^n z_k\varphi_k(t)\right]\left[\overline{f(t)}-\sum_{k=1}^n \overline{z_k}\,\overline{\varphi_k(t)}\right]dt=\\&=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n\overline{z_k}c_k-\sum_{k=1}^n z_k\overline{c_k}+\sum_{k=1}^n|z_k|^2:\end{aligned} \qquad (5.14)$$

Քանի որ

$$|z_k-c_k|^2=(z_k-c_k)(\overline{z_k}-\overline{c_k})=|z|^2-z_k\overline{c_k}-\overline{z_k}c_k+|c_k|^2,$$

ապա (5.14)-ից կստանանք՝

$$I_n=\|f\|^2+\sum_{k=1}^n|z_k-c_k|^2-\sum_{k=1}^n|c_k|^2\ , \qquad (5.15)$$

ինչից և հետևում է թեորեմի պնդումը: ■

(5.15)-ի մեջ տեղադրելով $z_k=c_k$, $k=1,...,n$ և հաշվի առնելով (5.13)-ը՝ կստանանք

$$\int_a^b\left|f(t)-\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(t)\right|^2 dt=\|f\|^2-\sum_{k=1}^n|c_k|^2\ , \qquad (5.16)$$

որը կոչվում է *Բեսսելի նույնություն*:

Հետևանք (Բեսսելի անհավասարությունը): *Եթե* $\{\varphi_k\}$ *համակարգը օրթոնորմալ է, ապա*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le \|f\|^2 , \qquad (5.17)$$

որտեղ c_k *-ն* f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի* k *-րդ գործակիցն է:*

► (5.16)-ից ունենք՝ $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \le \|f\|^2$: Այստեղ n-ը ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք (5.17)-ը: ■

Չնորմավորված համակարգի համար (5.16)-ը և (5.17)-ը համապատասխանաբար կընդունեն հետևյալ տեսքերը.

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |c_k|^2 , \qquad (5.16')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2 \le \|f\|^2 : \qquad (5.17')$$

<u>7. Եռանկյունաչափական համակարգի փակությունը և լրիվությունը:</u>

Թեորեմ 5.5: *Դիցուք՝* $f, g \in \Re([0,2\pi], \mathbb{C})$ *և*

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\, dt \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\, dt \end{aligned}\right\} ,\ k = 0,1,\ldots;\quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt ,\ k \in Z ,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos kt\, dt \\ \beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin kt\, dt \end{aligned}\right\} ,\ k = 0,1,\ldots;\quad d_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt ,\ k \in Z ,$$

$$S_n(t,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} :$$

Այդ դեպքում՝

ա) $\int_0^{2\pi}\left|f(t)-S_n(t,f)\right|^2 dt \to 0$, երբ $n\to\infty$,

բ) $\frac{a_0\overline{\alpha_0}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\overline{\alpha_k}+b_k\overline{\beta_k}\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$,

բ′) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\overline{d_k}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt$:

► ա)-ն համարժեք է հետևյալին՝*

$$\left\|f-S_n(f)\right\|\to 0,\quad n\to\infty : \tag{5.18}$$

Բավական է (5.18)-ը ապացուցել իրական ֆունկցիաների համար: Իրոք, եթե $f=\varphi+i\psi$ (որտեղ $\varphi,\psi\in\Re[0,2\pi]$), ապա $S_n(f)=S_n(\varphi)+iS_n(\psi)$ և

$$\left\|f-S_n(f)\right\|\le\left\|\varphi-S_n(\varphi)\right\|+\left\|\psi-S_n(\psi)\right\| :$$

Հետևաբար, եթե (5.18)-ը ճիշտ է φ և ψ իրական ֆունկցիաների համար, ապա այն ճիշտ է նաև f կոմպլեքս ֆունկցիայի համար:

Այն մասնավոր դեպքում, երբ $f\in C[0,2\pi]$ և $f(0)=f(2\pi)$, ա)-ն հետևում է Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքստրեմալ հատկությունից և Ֆեյերի թեորեմից (դիտողությունից): Իսկապես, քանի որ σ_n-ը եռանկյունաչափական բազմանդամ է, որի աստիճանը n-ը չի գերազանցում, ապա Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքստրեմալ հատկության համաձայն՝

$$\int_0^{2\pi}\left|f(t)-S_n(t,f)\right|^2 dt\le\int_0^{2\pi}\left|f(t)-\sigma_n(t)\right|^2 dt : \tag{5.19}$$

Մյուս կողմից, Ֆեյերի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0\in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n>n_0\Rightarrow\left|f(t)-\sigma_n(t)\right|<\sqrt{\varepsilon/2\pi},\ t\in[0,2\pi] : \tag{5.20}$$

---

* Այս դեպքում ասում են, որ $S_n(f)$ հաջորդականությունը միջին քառակուսային իմաստով զուգամիտում է f-ին:

Համադրելով (5.19)-ը և (5.20)-ը՝ կստանանք, որ $n > n_0$ դեպքում՝

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - S_n(t,f) \right|^2 \le \varepsilon :$$

Այժմ ապացուցենք (5.18)-ը կամայական $f \in \Re[0,2\pi]$ ֆունկցիայի համար: Կարող ենք ենթադրել, որ $f(0) = f(2\pi)$, քանի որ մի կետում ֆունկցիայի արժեքի փոփոխումը չի ազդում ինտեգրալի արժեքի վրա:

Վերցնենք $[0,2\pi]$ հատվածի կամայական

$$P : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2\pi \,, \; \lambda = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i \,,$$

տրոհում և կառուցենք $g \in C[0,2\pi]$, $g(0) = g(2\pi)$ կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիա հետևյալ կերպ. $g(x_i) = f(x_i)$, $0 \le i \le n$, իսկ $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \le i \le n-1$ հատվածներում g-ն գծային է (g ֆունկցիայի գրաֆիկը բեկյալ է, որի գագաթները $(x_i, f(x_i))$ կետերն են): Այդ դեպքում ամեն մի $t \in [x_i, x_{i+1}]$ կետի համար կունենանք՝

$$\left| f(t) - g(t) \right| \le \max\left(\left| f(t) - f(x_i) \right|, \left| f(t) - f(x_{i+1}) \right| \right) \le \omega_i(f) \,,$$

որտեղ $\omega_i(f)$-ը f ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում, և

$$\left| g(t) \right| \le \max\left(\left| f(x_i) \right|, \left| f(x_{i+1}) \right| \right) \le \sup_{[0,2\pi]} \left| f(t) \right| = M :$$

Ուստի $\left| f(t) - g(t) \right| \le 2M$, $t \in [0,2\pi]$ և, հետևաբար,

$$\|f - g\|^2 = \int_0^{2\pi} \left| f(t) - g(t) \right|^2 dt \le 2M \int_0^{2\pi} \left| f(t) - g(t) \right| dt =$$

$$= 2M \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| f(t) - g(t) \right| dt \le 2M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \to 0 \,, \; \lambda \to 0 :$$

Այսպիսով, ամեն մի $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի P տրոհում, այնպիսին, որ

$$\|f - g\| < \varepsilon / 2 : \qquad (5.21)$$

Մյուս կողմից, Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքստրեմալ հատկության և եռանկյան անհավասարության համաձայն՝

$$\|f - S_n(f)\| \le \|f - S_n(g)\| \le \|f - g\| + \|g - S_n(g)\|, \tag{5.22}$$

որտեղ $\|g - S_n(g)\| \to 0$, $n \to \infty$: Ուստի գոյություն ունի $n_0 \in N$, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow \|g - S_n(g)\| < \frac{\varepsilon}{2}: \tag{5.23}$$

Համադրելով (5.21)-(5.23)-ը՝ կստանանք

$$n > n_0 \Rightarrow \|f - S_n(f)\| < \varepsilon :$$

Թեորեմի բ) կետն ապացուցելու համար պետք է ցույց տալ, որ

$$\frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k} \right) \to \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \text{ երբ } n \to \infty : \tag{5.24}$$

Դրա համար նախ նկատենք, որ

$$\frac{1}{\pi} < S_n(t, f), g > \to \frac{1}{\pi} < f, g >, \text{ երբ } n \to \infty : \tag{5.25}$$

Իրոք, օգտվելով սկալյար արտադրյալի հատկություններից և Շվարցի անհավասարությունից՝ կարող ենք գնահատել նշված սկալյար արտադրյալների տարբերությունը.

$$|< S_n(t, f), g > - < f, g >| = |< S_n(t, f) - f, g >| \le$$
$$\le \|S_n(t, f) - f\| \cdot \|g\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

որից և հետևում է (5.25)-ը:

Մյուս կողմից՝

$$\frac{1}{\pi} < S_n(t, f), g > = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_n(t, f) \overline{g(t)} dt =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) \overline{g(t)} dt = \tag{5.26}$$
$$= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k} \right):$$

Համադրելով (5.25)-ը և (5.26)-ը, կստանանք (5.24)-ը:

բ՛)-ն ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Այս թեորեմի ա) պնդումն անվանում են *եռանկյունաչափական համակարգի փակություն*, բ) պնդումը՝ *Պարսևալի ընդհանրացված հավասարություն*:

բ) և բ՛) հավասարությունների մեջ վերցնելով $g = f$ ՝ կստանանք

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt, \tag{5.27}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt, \tag{5.27՛}$$

որոնք կոչվում են *Պարսևալի հավասարություններ*:

Հետևանք: *Եթե* $f \in C[0,2\pi]$ *և* $a_k = b_k = 0$, $k = 0,1,\ldots$, *ապա*

$$f(x) \equiv 0,\ x \in [0,2\pi]:$$

այլ կերպ ասած, նույնաբար զրոյից բացի, ուրիշ անընդհատ ֆունկցիա չկա, որն օրթոգոնալ լինի եռանկյունաչափական համակարգի բոլոր ֆունկցիաներին:

Այս հատկությունը կոչվում է *եռանկյունաչափական համակարգի լրիվություն:*

Ապացույցն անմիջապես հետևում է (5.27)-ից:

<u>**8. Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը:**</u>

Թեորեմ 5.6: *Եթե* $f \in \Re[0,2\pi]$ *և*

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos kx + b_k\sin kx\ ,$$

ապա կամայական $x_0 \in (0,2\pi]$ *կետի համար՝*

$$\int_0^{x_0} f(x)dx = \int_0^{x_0}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\int_0^{x_0}\cos kxdx + b_k\int_0^{x_0}\sin kxdx: \tag{5.28}$$

► Պարսևալի բ) հավասարության մեջ վերցնենք՝

$$g(x) = \begin{cases}1,\ 0 \le x \le x_0\\ 0,\ x_0 < x \le 2\pi\end{cases}:$$

Այդ դեպքում՝

$$\left.\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\cos kx\,dx\\ \beta_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sin kx\,dx\end{aligned}\right.,\quad k=1,2,\dots,\qquad \alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}dx:$$

Ուստի բ)-ն կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\cos kxdx+b_k\frac{1}{\pi}\int_0^{x_0}\sin kxdx\right]:$$

Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով π -ով՝ կստանանք (5.28)-ը: ■

Օրինակ: Ունենք (տես §3, 4), որ $\frac{\pi-x}{2}\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx$: Կիրառելով (5.28)-ը՝ կստանանք

$$\frac{\pi}{2}x-\frac{1}{4}x^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-\cos kx}{k^2},\ x\in[0,2\pi],$$

հետևաբար,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\ x\in[0,2\pi]: \qquad (5.29)$$

Այստեղ տեղադրելով $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (տես §3, 4) [*], կստանանք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{6},\ x\in[0,2\pi]:$$

---

[*] Այս շարքի գումարը կարելի է հաշվել նաև (5.29)-ը ինտեգրելու միջոցով:

§6. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԸ

1. Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների նվազման արագությունը:

Սահմանում: $f:[a,b]\to R\ (\mathbb{C})$ *ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ դիֆերենցելի, եթե* $f'\in C[a,b]$ $(f'\in C\left([a,b],\mathbb{C}\right))$*: Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է* $C^1[a,b]$ $(C^1\left([a,b],\mathbb{C}\right))$ *սիմվոլով:* $C^m[a,b]$ $(C^m\left([a,b],\mathbb{C}\right))$ *սիմվոլով նշանակվում է այն ֆունկցիաների դասը, որոնք ունեն* m *-րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:*

$f:[a,b]\to R\ (\mathbb{C})$ *ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի, եթե գոյություն ունեն* $[a,b]$ *հատվածի*

$$P: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

տրոհում և $g_i\in C^1[x_i,x_{i+1}]$, $0\le i\le n-1$ *ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ*

$$f(x)=g_i(x)\,,\ x\in(x_i,x_{i+1})\,,\ 0\le i\le n-1:$$

Լեմմա 6.1: *Եթե* $f\in C\left([-\pi,\pi],\mathbb{C}\right)$, $f(-\pi)=f(\pi)$, *և* f *-ը* $[-\pi,\pi]$ *հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա*

$$c_k(f')=ikc_k(f)\,,\ \ k\in\mathrm{Z}\,, \tag{6.1}$$

որտեղ $c_k(f)$ *-ը և* $c_k(f')$ *-ը համապատասխանաբար* f *և* f' *ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցներն են՝*

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt\,,\quad c_k(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}dt\,, \tag{6.2}$$

կամ, որ նույնն է՝

$$f\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}\,,\ \ f'\sim\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f')e^{ikx}\ :$$

(6.1)-ը նշանակում է, որ f' -ի Ֆուրիեի շարքը ստացվում է f -ի Ֆուրիեի շարքից՝ անդամ առ անդամ ածանցման միջոցով:

► Նախ քննարկենք այն դեպքը, երբ f ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է ամբողջ $[-\pi,\pi]$ հատվածում: Այդ դեպքում, (6.2)-ում կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, կստանանք՝

$$c_k(f')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)e^{-ikt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}df(t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}f(t)e^{-ikt}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{ik}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt=ikc_k(f),$$

քանի որ $f(\pi)e^{-ik\pi}-f(-\pi)e^{ik\pi}=0$:

Ընդհանուր դեպքում (երբ f-ը $[-\pi,\pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի է և անընդհատ), գոյություն ունի $[-\pi,\pi]$ հատվածի $-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi$ տրոհում, այնպիսին, որ $[x_j,x_{j+1}]$, $0\le j\le n-1$ հատվածներից յուրաքանչյուրում f-ն անընդհատ դիֆերենցելի է: Այս դեպքում $[-\pi,\pi]$ հատվածով տարածված ինտեգրալը կտրոհենք $[x_j,x_{j+1}]$ հատվածներով տարածված ինտեգրալների գումարի և յուրաքանչյուր գումարելու համար կկիրառենք մասերով ինտեգրման բանաձևը:

Քանի որ

$$\sum_{j=0}^{n-1}f(t)e^{-ikt}\Big|_{x_j}^{x_{j+1}}=f(\pi)e^{-ik\pi}-f(-\pi)e^{ik\pi}=0,$$

ապա արդյունքում կստանանք (6.1)-ը: ■

Թեորեմ 6.1: *Դիցուք՝* $f\in C^{m-1}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ *և* $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $j=0,1,\ldots,m-1$*: Եթե* $f^{(m-1)}$*-ը* $[-\pi,\pi]$ *հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա*

$$c_k(f^{(m)})=(ik)^m c_k(f),\quad k\in\mathrm{Z} \tag{6.3}$$

և

$$|c_k(f)|=\frac{\gamma_k}{|k|^m},\quad k\in\mathrm{Z}, \tag{6.4}$$

որտեղ $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k^2<\infty$:

► Օգտվելով (6.1)-ից և կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ կստանանք (6.3)-ը:

Այնուհետև, նշանակելով $\gamma_k=\left|c_k(f^{(m)})\right|$ և հաշվի առնելով (5.27') Պարսևալի հավասարությունը՝

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|c_k(f^{(m)})\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f^{(m)}(t)\right|^2dt,$$

(6.3)-ից կստանանք (6.4)-ը: ■

Դիտողություն 1: $f\in C^{m-1}\left([-\pi,\pi],\mathbb{C}\right)$ և $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$ պայմանների փոխարեն կարելի է ենթադրել, որ f -ը ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է և $f\in C^{m-1}\left(R,\mathbb{C}\right)$:

Դիտողություն 2: Եթե f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը գրված է եռանկյունաչափական համակարգով՝

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\ ,$$

ապա Էյլերի բանաձևի շնորհիվ ունենք՝ $a_k=c_k-c_{-k}$, $b_k=i(c_k-c_{-k})$, ուստի (6.4)-ից կստանանք՝

$$a_k=\frac{\alpha_k}{k^m},\ \ b_k=\frac{\beta_k}{k^m},\ \ k\in N, \tag{6.4'}$$

որտեղ $\sum\alpha_k^2<\infty$, $\sum\beta_k^2<\infty$:

<u>2. Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի զուգամիտության արագությունը:</u>

Թեորեմ 6.2: *Դիցուք* $f\in C^{(m-1)}\left([-\pi,\pi],\mathbb{C}\right)$ *և* $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $0\le j\le m-1$*: Եթե* $f^{(m-1)}$*-ը* $[-\pi,\pi]$ *հատվածում կտոր առ կտոր* *անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը $[-\pi,\pi]$ հատվածում նորմալ[*] զուգամիտում է f ֆունկցիային: Ընդ որում,*

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|\le\frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}\,,\ \varepsilon_n\to 0\,, \tag{6.5}$$

որտեղ $S_n(x)$ -ը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի n -րդ մասնակի գումարն է:

► (6.4')-ում վերցնելով $m=1$, կստանանք՝

$$\left|a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|\le\frac{\alpha_k+\beta_k}{k}\,,\ k\in N\,,$$

ընդ որում, $\dfrac{\alpha_k+\beta_k}{k}$ թվերից կազմած շարքը զուգամետ է[**], ուստի Վայերշտրասի (մաժորանտով) հայտանիշի լրացման համաձայն,

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx \tag{6.6}$$

շարքը նորմալ զուգամետ է: Քանի որ f -ը կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է և անընդհատ, ընդ որում, $f(-\pi)=f(\pi)$, ապա (§3, 1) f -ի Ֆուրիեի շարքը՝ (6.6)-ը, $[-\pi,\pi]$ հատվածում զուգամիտում է f ֆունկցիային՝

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\,,\ x\in[-\pi,\pi]: \tag{6.6'}$$

Այժմ ապացուցենք (6.5)-ը: (6.4')-ի համաձայն, ունենք՝

$$\begin{aligned}\left|f(x)-S_n(x)\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\cos kx+b_k\sin kx\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\alpha_k+\beta_k}{k^m}\le\\&\le\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}(\alpha_k+\beta_k)^2\right\}^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\right)^{1/2}:\end{aligned} \tag{6.7}$$

Մյուս կողմից (IX, §2)՝

---

[*] Շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքը հավասարաչափ զուգամետ է:

[**] $\dfrac{\alpha_k+\beta_k}{k}\le\dfrac{1}{2}\left[(\alpha_k+\beta_k)^2+\dfrac{1}{k^2}\right]\le\alpha_k^2+\beta_k^2+\dfrac{1}{2k^2}$:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}\leq\frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}: \tag{6.8}$$

Համադրելով (6.7)-ը և (6.8)-ը՝ կստանանք (6.5)-ը: ■

<u>3. Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ածանցումը:</u>

Թեորեմ 6.3: *Դիցուք* $f\in C^{(m)}\left([-\pi,\pi],\mathbb{C}\right)$ *և* $f^{(j)}(-\pi)=f^{(j)}(\pi)$, $0\leq j\leq m-1$, $m\in N$ *: Եթե* $f^{(m-1)}$ *-ը* $[-\pi,\pi]$ *հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա* f *ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը* $[-\pi,\pi]$ *հատվածում կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել* $m-1$ *անգամ՝*

$$f^{(s)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)^{(s)},\ x\in[-\pi,\pi],\ 1\leq s\leq m-1: \tag{6.9}$$

► f ֆունկցիայի (6.6) Ֆուրիեի շարքը s անգամ անդամ առ անդամ ածանցման արդյունքում կստացվի

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^s\left\{a_k\cos\left(kx+s\frac{\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+s\frac{\pi}{2}\right)\right\} \tag{6.10}$$

շարքը, որի համար մաժորանտ է հանդիսանում $\sum\frac{\alpha_k+\beta_k}{k}$ շարքը, քանի որ (6.4')-ի համաձայն, ունենք՝

$$\left|k^s\left\{a_k\cos\left(kx+s\frac{\pi}{2}\right)+b_k\sin\left(kx+s\frac{\pi}{2}\right)\right\}\right|\leq k^s\left(|a_k|+|b_k|\right)\leq$$

$$\leq k^s\frac{\alpha_k+\beta_k}{k^m}\leq\frac{\alpha_k+\beta_k}{k}\ (\text{քանի որ } m-s\geq 1):$$

Ուստի, Վայերշտրասի մաժորանտով հայտանիշի համաձայն, (6.9) շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ: Հետևաբար, ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցման թեորեմի համաձայն (X, §3, 4), տեղի ունի (6.9)-ը: ■

§7. ՖՈՒՐԻԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

<u>1. Նախնական դատողություններ:</u> Դիցուք f -ը թվային առանցքի վրա անընդհատ ֆունկցիա է, որը x կետում բավարարում է Դինիի պայմանին (§2, 1): Վերցնենք $\ell>|x|$ և գրենք f ֆունկցիայի վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի $(-\ell,\ell)$ միջակայքում (§3, 2)՝

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{\ell}x+b_k\sin\frac{k\pi}{\ell}x, \tag{7.1}$$

որտեղ

$$a_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}tdt,\ \ b_k=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}tdt,\ k=0,1,...:$$

(7.1)-ի մեջ տեղադրելով a_k, b_k գործակիցների արժեքները և նշանակելով $\frac{k\pi}{\ell}=z_k$՝ կստանանք

$$f(x)=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\ell}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\cos\frac{k\pi x}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos\frac{k\pi}{\ell}tdt+\sin\frac{k\pi x}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\sin\frac{k\pi}{\ell}tdt\right)= \tag{7.2}$$

$$=\frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{-\ell}^{\ell}f(t)\cos z_k(x-t)dt\right]\Delta z_k:$$

Այնուհետև ℓ-ը ձգտեցնենք անվերջության: Եթե (7.2)-ի առաջին գումարելին ձգտի զրոյի, իսկ երկրորդ գումարելին ձգտի

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(x-t)dt\right\}dz$$

ինտեգրալին, որը կոչվում է f ֆունկցիայի *Ֆուրիեի ինտեգրալ*, ապա արդյունքում կստանանք՝

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos z(x-t)dt\right\}dz: \tag{7.3}$$

<u>2. Դինիի հայտանիշը:</u>

Թեորեմ 7.1: *Եթե ա) f-ը բացարձակ ինտեգրելի է $(-\infty,\infty)$ միջակայքում՝*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty,$$

բ) Գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \infty ,$$

ապա x կետում տեղի ունի (7.3) հավասարությունը:

բ) պայմանը կոչվում է Դինիի պայման: Այն կարելի է փոխարինել Դինիի (2.3) ընդհանուր պայմանով, որի դեպքում (7.3) հավասարության ձախ կողմի $f(x)$ թիվը պետք է փոխարինել $S_0 = \dfrac{f(x-) + f(x+)}{2}$ թվով:

► Նշանակենք (x-ը ֆիքսված է)՝

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt :$$

Այս ինտեգրալը բավարարում է պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալի ինտեգրման վերաբերյալ (XII, թեորեմ 4.5) թեորեմի պայմաններին (կամայական $[c,d] = [0, A]$, $A > 1$ հատվածում): Ուստի, փոխելով ինտեգրման հերթականությունը, կստանանք՝

$$f_A(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^A \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt \right\} dz = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_0^A \cos z(t-x) dz \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \frac{\sin Au}{u} du :$$

Այստեղից կստանանք՝

$$f_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x-t) + f(x+t)] \frac{\sin At}{t} dt : \qquad (7.4)$$

(7.3) հավասարությունն ապացուցելու համար (անիսկական ինտեգրալի սահմանման համաձայն) պետք է համոզվել, որ $f_A(x) \to f(x)$, երբ $A \to \infty$: Օգտվենք Դիրիխլեի ինտեգրալից (XII, §4, 3)՝

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \frac{1}{2} :$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $-2f(x)$-ով և ստացվածը գումարելով (7.4)-ին՝ կստանանք

$$f_A(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t}\sin Atdt: \qquad (7.5)$$

Այնուհետև վերցնենք որևէ $T>1$ թիվ և (7.5) ինտեգրալը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$f_A(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{T}\frac{f(x-t)+f(x+t)-2f(x)}{t}\sin Atdt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_T^{\infty}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{t}\sin Atdt-2f(x)\frac{1}{\pi}\int_T^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt=: \qquad (7.6)$$

$$=:I_1+I_2+I_3:$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ և գնահատենք I_1, I_2 և I_3 ինտեգրալները:

ա) պայմանից հետևում է, որ ($T>1$, x-ը ֆիքսված է) գոյություն ունի $T_0>1$ թիվ, այնպիսին, որ

$$T>T_0 \Rightarrow |I_2|\le\frac{1}{\pi}\int_T^{\infty}\big[|f(x-t)|+|f(x+t)|\big]dt<\frac{\varepsilon}{3}: \qquad (7.7)$$

Քանի որ $A>1$, ապա գոյություն ունի $T_1>T_0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$T>T_1 \Rightarrow 2|f(x)|\frac{1}{\pi}\left|\int_T^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt\right|<\frac{\varepsilon}{3}: \qquad (7.8)$$

Այնուհետև ֆիքսելով T-ն՝ I_1 ինտեգրալի համար կիրառենք Ռիմանի լեմման. $I_1\to 0$, երբ $A\to\infty$: Ուստի գոյություն ունի մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$A>E \Rightarrow |I_1|<\frac{\varepsilon}{3}: \qquad (7.9)$$

Համադրելով (7.6)-(7.9)-ը՝ կստանանք

$$A>E \Rightarrow |f_A(x)-f(x)|<\varepsilon: \blacksquare$$

3. Միայն ըստ կոսինուսների (սինուսների) վերլուծություններ:

Ֆուրիեի (7.3) ինտեգրալը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos z(t-x)dt\right\}dz=\int_0^{\infty}[a(z)\cos zx+b(z)\sin zx]dz,$$

որտեղ

$$a(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ztdt,\quad b(z)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ztdt:$$

1^0. Եթե f ֆունկցիան զույգ է, ապա $b(z)=0$, $a(z)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\cos ztdt$:

Հետևաբար, այս դեպքում՝

$$f(x)=\int_0^{\infty} a(z)\cos zxdz: \tag{7.10}$$

2^0. Եթե f -ը կենտ է, ապա $a(z)=0$, $b(z)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\sin ztdt$ և

$$f(x)=\int_0^{\infty} b(z)\sin zxdz: \tag{7.11}$$

Եթե f ֆունկցիան որոշված է միայն $(0,\infty)$ միջակայքում, ապա նրա համար կիրառելի են թե՛ (7.10)-ը, և թե՛ (7.11)-ը: Իրոք, ներմուծելով

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\infty)\\ f(-x), & x\in(-\infty,0)\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\infty)\\ -f(-x), & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

ֆունկցիաները՝ որոնցից g -ն զույգ է, իսկ h -ը՝ կենտ, հարցը կբերվի նախորդ դեպքերին:

Օրինակ (Լապլասի ինտեգրալները): Դիտարկենք $f(x)=e^{-ax}$ ֆունկցիան $x\in(0,\infty)$ միջակայքում, որտեղ $a>0$:

Ինչպես գիտենք (XI, §1),

$$\int_0^{\infty} e^{-at}\cos ztdt=\frac{a}{a^2+z^2},\quad \int_0^{\infty} e^{-at}\sin ztdt=\frac{z}{a^2+z^2}:$$

Ուստի 1^0 դեպքում կունենանք՝

$$a(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\cos ztdt=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-at}\cos ztdt=\frac{2}{\pi}\frac{a}{a^2+z^2},$$

և (7.10)-ի համաձայն՝

$$e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty a(z)\cos zxdz=\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2+z^2}dz,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2a}e^{-ax}: \qquad (7.12)$$

2^0 դեպքում կունենանք՝

$$b(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-at}\sin ztdt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{z}{a^2+z^2},$$

և (7.11)-ի համաձայն՝

$$e^{-ax}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z\sin zx}{a^2+z^2}dz,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\int_0^\infty \frac{z\sin zx}{a^2+z^2}dz=\frac{\pi}{2}e^{-ax}: \qquad (7.13)$$

(7.12) և (7.13) ինտեգրալները կոչում են Լապլասի անունով:

4. Ֆուրիեի ինտեգրալի կոմպլեքս գրելաձևը: Ֆուրիեի ձևափոխություն:

Քանի որ

$$I(z)=\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos z(t-x)dt$$

ֆունկցիան զույգ է, ապա Ֆուրիեի (7.3) ինտեգրալը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos z(t-x)dt\right\}dz: \qquad (7.14)$$

Մյուս կողմից (ապացույցը հաջորդիվ)՝

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left\{\int_{-\infty}^\infty f(t)\sin z(x-t)dt\right\}dz: \qquad (7.15)$$

(7.15)-ը բազմապատկելով i-ով, ստացվածը գումարելով (7.14)-ին և հաշվի առնելով Էյլերի բանաձևը կստանանք՝

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{iz(x-t)}dt\right\}dz\,, \tag{7.16}$$

որը ճիշտ է Դինիի հայտանիշի պայմաններում:

Այս ինտեգրալը կոչվում է Ֆուրիեի ինտեգրալ՝ գրված կոմպլեքս տեսքով: Մինչ այժմ մենք ենթադրել էինք, որ f ֆունկցիան իրական է, սակայն դժվար չէ համոզվել, որ (7.16) բանաձևը ճիշտ է նաև կոմպլեքս ֆունկցիաների համար:

(7.16) բանաձևը կարելի է գրել նաև այլ տեսքով՝

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixz}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-izt}dt\right\}dz\,: \tag{7.17}$$

Այնուհետև նշանակենք՝

$$\hat{f}(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-izt}dt\,,$$

որը կոչվում է f ֆունկցիայի Ֆուրիեի ձևափոխություն: Այդ դեպքում (7.17)-ը կգրվի

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(z)e^{ixz}dz$$

տեսքով:

► Այժմ ապացուցենք (7.15)-ը: Նշանակենք՝

$$\begin{aligned}I_{pq}&:=\int_{-p}^{q}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin z(x-t)dt\right\}dz=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left\{\int_{-p}^{q}\sin z(x-t)dz\right\}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\left.\frac{\cos z(t-x)}{t-x}\right|_{z=-p}^{q}dt\,:\end{aligned} \tag{7.18}$$

(7.15)-ն ապացուցելու համար մենք պետք է ցույց տանք, որ

$$I_{pq}\to 0\,,\ \text{երբ}\ \ p,q\to+\infty\,: \tag{7.19}$$

Այդ նպատակով (7.18) ինտեգրալը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$I_{pq}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{\cos qt-\cos pt}{t}dt\,: \tag{7.20}$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\dfrac{\cos qt-\cos pt}{t}$ ֆունկցիան կենտ է և նրա ինտեգրալը զուգամետ է*, ապա

$$0=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos qt-\cos pt}{t}dt\,:$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $-f(x)$-ով և ստացվածը գումարելով (7.20)-ին՝ կստանանք

$$I_{pq}=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x+t)-f(x)]\frac{\cos qt-\cos pt}{t}dt=$$

$$=\int_{|t|\le T}[f(x+t)-f(x)]\frac{\cos qt-\cos pt}{t}dt+ \tag{7.21}$$

$$+\int_{|t|\ge T} f(x+t)\frac{\cos qt-\cos pt}{t}dt-f(x)\int_{|t|\ge T}\frac{\cos qt-\cos pt}{t}dt\,:$$

Քանի որ վերջին ինտեգրալը զրո է, ապա վերցնելով $T>1$, (7.21)-ից կստանանք՝

$$\left|I_{pq}\right|\le\left|\int_{|t|\le T}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}(\cos qt-\cos pt)dt\right|+2\int_{|t|\ge T}\left|f(x+t)\right|dt\,: \tag{7.22}$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon>0$ թիվ և T-ն ընտրենք այնպես, որ (7.22)-ի երկրորդ գումարելին փոքր լինի ε-ից (դա կարելի է անել համաձայն Դինիի հայտանիշի ա) պայմանի)։ Իսկ (7.22)-ի առաջին գումարելին, Դինիի պայմանի շնորհիվ, բավարարում է Ռիմանի լեմմայի պայմանին, ուստի այն ձգտում է զրոյի, երբ $p,q\to+\infty$։ Հետևաբար, գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ $p,q>E\Rightarrow\left|I_{pq}\right|<2\varepsilon$, ինչը համարժեք է (7.19)-ին։ ■

---

* 0 կետի շրջակայքում ֆունկցիան սահմանափակ է, իսկ ∞-ի շրջակայքում զուգամիտությունը հետևում է Դիրիխլեի հայտանիշից։

XV ԳԼՈՒԽ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

§1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐ

1. Հավասարաստիճան անընդհատություն: Դիցուք $K \subset R^k$ բազմությունը կոմպակտ է[*]: Ինչպես ընդունված է, $C(K)$-ով նշանակենք K բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների դասը:

Սահմանում: *$\mathcal{F} \subset C(K)$ ֆունկցիաների ընտանիքը կոչվում է հավասարաստիճան անընդհատ, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ բոլոր $f \in \mathcal{F}$ ֆունկցիաների համար տեղի ունի*

$$\left.\begin{matrix} |x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in K \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \tag{1.1}$$

պայմանը:

Թեորեմ 1.1: *Ցանկացած $\{f_1, \cdots, f_m\} \subset C(K)$ վերջավոր ընտանիք հավասարաստիճան անընդհատ է:*

► Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր f_i, $1 \le i \le m$ ֆունկցիա հավասարաչափ անընդհատ է, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_i > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{matrix} |x' - x''| < \delta_i \\ x', x'' \in K \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon,\ 1 \le i \le m:$$

Նշանակելով $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_m\}$, կունենանք՝

$$\left.\begin{matrix} |x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in K \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon,\ 1 \le i \le m:$$

Այսինքն՝ բավարարվում է (1.1) պայմանը: ■

---

[*] Ընդհանուր դեպքում K-ն կարող է լինել ցանկացած մետրիկական տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն:

Թեորեմ 1.2: *Եթե՝* $\{f_n,\ n\in N\}\subset C(K)$ *և*

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)\,,\ x\in K\,, \tag{1.2}$$

ապա $\{f_n,\ n\in N\}$ *ընտանիքը հավասարաստիճան անընդհատ է:*

► Ինչպես գիտենք, անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականության հավասարաչափ սահմանը անընդհատ ֆունկցիա է՝ $f\in C(K)$: Կանտորի թեորեմի համաձայն, f-ը հավասարաչափ անընդհատ է, ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_1>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l}|x'-x''|<\delta_1\\ x',x''\in K\end{array}\right\}\Rightarrow|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}: \tag{1.3}$$

Այնուհետև, եռանկյան անհավասարության համաձայն ունենք՝

$$\begin{aligned}&|f_n(x')-f_n(x'')|\le|f_n(x')-f(x')|+\\&+|f(x')-f(x'')|+|f(x'')-f_n(x'')|:\end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.2)-ի համաձայն գոյություն ունի $n_0\in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n>n_0\Rightarrow|f_n(x')-f(x')|<\frac{\varepsilon}{3}\,,\ |f(x'')-f_n(x'')|<\frac{\varepsilon}{3}: \tag{1.5}$$

Համադրելով (1.3)-(1.5)-ը՝ կստանանք

$$\left.\begin{array}{l}|x'-x''|<\delta_1\\ x',x''\in K\end{array}\right\}\Rightarrow|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon\,,\ \text{երբ}\ n>n_0: \tag{1.6}$$

Բացի այդ, թեորեմ 1.1-ի համաձայն, գոյություն ունի $\delta_0>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l}|x'-x''|<\delta_0\\ x',x''\in K\end{array}\right\}\Rightarrow|f_i(x')-f_i(x'')|<\varepsilon\,,\ 1\le i\le n_0: \tag{1.6$'$}$$

Համադրելով (1.6)-(1.6$'$)-ը՝ կստանանք

$$\left.\begin{array}{l}|x'-x''|<\delta\\ x',x''\in K\end{array}\right\}\Rightarrow|f_n(x')-f_n(x'')|<\varepsilon\,,\ n=1,2,\ldots,$$

որտեղ $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$: ■

2. <u>Հավասարաչափ սահմանափակություն:</u>

Սահմանում: $\mathcal{F} \subset C(K)$ *ընտանիքը կոչվում է հավասարաչափ սահմանափակ, եթե գոյություն ունի* $M > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$|f(x)| \leq M\ ,\ x \in K\ ,\ f \in \mathcal{F}\ ,$$

և այդ ընտանիքը կոչվում է կետորեն սահմանափակ, եթե յուրաքանչյուր $x \in K$ *կետի համար գոյություն ունի* M_x *թիվ, այնպիսին, որ*

$$|f(x)| \leq M_x,\ f \in \mathcal{F}\ :$$

Թեորեմ 1.3: *Եթե* $\mathcal{F} \subset C(K)$ *հավասարաստիճան անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիքը կետորեն սահմանափակ է, ապա այն նաև հավասարաչափ սահմանափակ է:*

► Նշանակենք՝

$$\varphi(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|,\ x \in K\ :$$

Քանի որ $\mathcal{F}$ ընտանիքը կետորեն սահմանափակ է, ապա $\varphi(x)$-ը վերջավոր է (յուրաքանչյուր $x \in K$ կետում):

Ապացուցենք, որ $\varphi \in C(K)$: Այդ նպատակով վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ $\mathcal{F}$ ընտանիքը հավասարաստիճան անընդհատ է, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x - y| < \delta \\ x, y \in K \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ ,\ f \in \mathcal{F}\ :$$

Հետևաբար՝ $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ ,\ f \in \mathcal{F}$, ուստի՝

$$|f(x)| < |f(y)| + \varepsilon \leq \varphi(y) + \varepsilon\ ,\ f \in \mathcal{F}\ : \qquad (1.7)$$

Քանի որ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը այդ բազմության վերին եզրերից փոքրագույնն է, ապա (1.7)-ից հետևում է, որ

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) + \varepsilon\ ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\varphi(x)-\varphi(y)\le\varepsilon : \tag{1.8}$$

x և y տառերի դերերը փոխելով՝ կստանանք

$$\varphi(y)-\varphi(x)\le\varepsilon : \tag{1.8'}$$

(1.8) և (1.8')-ից հետևում է, որ

$$\left.\begin{aligned}&|x-y|<\delta\\&x,y\in K\end{aligned}\right\}\Rightarrow|\varphi(x)-\varphi(y)|\le\varepsilon : \tag{1.8''}$$

Այսպիսով ստացանք, որ $\varphi\in C(K)$: Վայերշտրասի առաջին թեորեմի համաձայն, φ -ն սահմանափակ է՝ գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ

$$\varphi(x)\le M\ ,\ x\in K\ ,$$

ինչից և հետևում է, որ $\mathscr{F}$ ընտանիքը հավասարաչափ սահմանափակ է՝ $|f(x)|\le M$, $x\in K$, $f\in\mathscr{F}$: ■

<u>**3. Արցելայի թեորեմը:**</u>

Թեորեմ 1.4: *Եթե $\mathscr{F}=\{f_n,\ n\in N\}\subset C(K)$ հավասարաստիճան անընդհատ ընտանիքը կետորեն սահմանափակ է, ապա $\{f_n\}$ հաջորդականությունը պարունակում է K -ի վրա հավասարաչափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:*

Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման.

Լեմմա 1.1: *Գոյություն ունի $\{x_n\}\subset K$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $\delta>0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0=n_0(\delta)$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$K\subset\bigcup_{i=1}^{n_0}B(x_i,\delta)\,, \tag{1.9}$$

որտեղ $B(x_i,\delta)$ -ն x_i կենտրոնով և δ շառավղով բաց գունդն է: Այլ կերպ ասած, ամեն մի $\delta>0$ թվի համար K -ն ծածկվում է $\{B(x_i,\delta)\}$ գնդերի բազմության վերջավոր ենթաբազմությամբ:

► Կամայական $r>0$ թվի դեպքում $\{B(z,r),\ z\in K\}$ բաց գնդերի ընտանիքը ծածկում է K կոմպակտ բազմությունը, հետևաբար, գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ, այսինքն՝ գոյություն ունի $\{z_1,\cdots,z_n\}\subset K$ կետերի բազմություն, այնպիսին, որ $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}B(z_i,r)$ ։

Վերցնենք $r=\frac{1}{k}$, $k=1,2,...$ և համապատասխան կետերի բազմությունները նշանակենք

$$\{z_{11},\cdots,z_{1n_1}\},\ \{z_{21},\cdots,z_{2n_2}\},\ ...,\ \{z_{k1},\cdots,z_{kn_k}\},...:$$

Ստացված կետերի հաջորդականությունը համարակալելով գրված հերթականությամբ՝ կստանանք պահանջվող $\{x_n\}$ հաջորդականությունը.

$$x_1=z_{11},\ ...,\ x_{n_1}=z_{1n_1};\ x_{n_1+1}=z_{21},\ ...,\ x_{n_1+n_2}=z_{2n_2};\ ...:\ \blacksquare$$

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► Վերցնենք $\{x_n\}$-ն ինչպես լեմմա 1.1-ում և ցույց տանք, որ գոյություն ունի $\{f_n\}$ հաջորդականության $\{g_k\}$ ենթահաջորդականություն, որը կետորեն զուգամիտում է $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր կետերում:

Քանի որ $\{f_n\}$ հաջորդականությունը կետորեն սահմանափակ է, ապա $\{f_n(x_1)\}$ թվային հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուստի Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, այն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$f_1^1(x_1),f_2^1(x_1),\cdots,f_k^1(x_1),...:$$

Այնուհետև դիտարկենք $\{f_n^1(x_2)\}$ թվային հաջորդականությունը, որը նույնպես սահմանափակ է, ուստի այն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$f_1^2(x_2),f_2^2(x_2),\cdots,f_k^2(x_2),...:$$

Այս գործընթացն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք հաշվելի թվով զուգամետ հաջորդականություններ.

$$\begin{array}{l} f_1^1(x_1), f_2^1(x_1), \cdots, f_k^1(x_1), \dots \\ f_1^2(x_2), f_2^2(x_2), \cdots, f_k^2(x_2), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1^k(x_k), f_2^k(x_k), \cdots, f_k^k(x_k), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

ընդ որում, ֆունկցիաների յուրաքանչյուր $\{f_n^k, n \in N\}$ հաջորդականություն հանդիսանում է նախորդ՝ $\{f_n^{k-1}\}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն: Ուստի, եթե նշանակենք՝ $g_k = f_k^k$, $k \in N$, ապա ֆունկցիաների $\{g_k\}$ հաջորդականությունը կզուգամիտի $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր կետերում, քանի որ $g_n(x_n), g_{n+1}(x_n), \cdots$ հաջորդականությունը $f_1^n(x_n), f_2^n(x_n), \cdots, f_n^n(x_n), \cdots$ զուգամետ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է:

Այնուհետև ապացուցենք, որ $\{g_k\}$ հաջորդականությունը K բազմության վրա զուգամիտում է հավասարաչափ: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $\{g_k\}$ հաջորդականությունը բավարարում է հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի պայմանին (X, թեորեմ 1.1)՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1(\varepsilon) \in N$, այնպիսին, որ

$$n > n_1(\varepsilon) \Rightarrow |g_{n+m}(x) - g_n(x)| < \varepsilon,\ x \in K,\ m = 1, 2, \dots : \qquad (1.10)$$

Քանի որ $\{f_n\}$ հաջորդականությունը, հետևաբար նաև՝ նրա $\{g_k\}$ ենթահաջորդականությունը, հավասարաստիճան անընդհատ է, ապա տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար կարող ենք ընտրել $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} |x - y| < \delta \\ x, y \in K \end{array}\right\} \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3},\ n \in N : \qquad (1.11)$$

Այժմ $n_0(\delta)\in N$ թիվն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի (1.9) պայմանը, որից հետո ամեն մի $x\in K$ կետի համար $i=i(x)$, $1\le i\le n_0$ ինդեքսն ընտրենք այնպես, որ $x\in B(x_i,\delta)$: Օգտվենք

$$\begin{aligned}&\left|g_{n+m}(x)-g_n(x)\right|\le\left|g_{n+m}(x)-g_{n+m}(x_i)\right|+\\&+\left|g_{n+m}(x_i)-g_n(x_i)\right|+\left|g_n(x_i)-g_n(x)\right|\end{aligned}\tag{1.12}$$

անհավասարությունից, որտեղ (1.11)-ի համաձայն՝

$$\left|g_{n+m}(x)-g_{n+m}(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ \left|g_n(x_i)-g_n(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}:\tag{1.13}$$

Քանի որ $\{g_n(x_i),n\in N\}$, $1\le i\le n_0$ վերջավոր թվով հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա թվային հաջորդականությունների զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, գոյություն ունի $n_1\in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n>n_1\Rightarrow\left|g_{n+m}(x_i)-g_n(x_i)\right|<\frac{\varepsilon}{3},\ m=1,2,\ldots,\ 1\le i\le n_0:\tag{1.14}$$

Համադրելով (1.12)-(1.14)-ը՝ կստանանք (1.10)-ը: ■

Վերջում ներկայացնենք հավասարաստիճան անընդհատ և հավասարաչափ սահմանափակ $\{f_n\}$ հաջորդականության օրինակ, որը չի պարունակում հավասարաչափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Վերցնենք՝ $K=R$ և

$$f_0(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\in[-1,1]\\0, & x\in R\setminus[-1,1]\end{cases},\ f_n(x)=f_0(x+n),\ n\in N:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս հաջորդականությունը բավարարում է նշված պայմաններին:

Ընթերցողին առաջարկվում է ապացուցել, որ Արցելայի թեորեմը ճիշտ է նաև կամայական սահմանափակ K բազմության դեպքում:

Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ $\{f_n\}$ հաջորդականության ֆունկցիաները կարելի է շարունակել այնպես, որ նրանք լինեն անընդհատ $\overline{K}$-ի վրա, այնուհետև օգտվեք թեորեմ 1.3-ից:

§2. ՍԹՈՈՒՆ - ՎԱՅԵՐՇՏՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

<u>1. Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմի ձևակերպումը:</u> Դիցուք $K \subset R^k$ բազմությունը կոմպակտ է* և $C(K)$-ն K բազմության վրա անընդհատ իրականարժեք ֆունկցիաների դասն է:

$C(K)$-ն իրական գծային տարածություն է: Ավելին, $C(K)$-ն *հանրահաշիվ է,* այսինքն՝ եթե $f, g \in C(K)$; $\alpha, \beta \in R$, ապա (VII, թեորեմ 3.5)

ա) $\alpha f + \beta g \in C(K)$; բ) $fg \in C(K)$:

Սահմանենք $f \in C(K)$ ֆունկցիայի *հավասարաչափ նորմը*՝

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| :$$

Քանի որ $|f| \in C(K)$, ապա Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $|f|$-ը K կոմպակտ բազմության վրա ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, ուստի

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)| :$$

Ընթերցողին առաջարկվում է ստուգել, որ հավասարաչափ նորմը բավարարում է հետևյալ աքսիոմներին՝

1^0. $\|f\| \geq 0$, ընդ որում $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$, $x \in K$,

2^0. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$,

3^0. $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$, $\alpha \in R$:

Սահմանում: *Կասենք, որ $f_n \in C(K)$ հաջորդականությունն ըստ նորմի զուգամիտում է $f \in C(K)$ ֆունկցիային և կգրենք՝ $f_n \to f$, եթե $\|f_n - f\| \to 0$, երբ $n \to \infty$:*

Ակնհայտ է, որ ըստ նորմի զուգամիտությունը համարժեք է հավասարաչափ զուգամիտությանը՝

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \ x \in K :$$

---

* Ընդհանուր դեպքում K-ն կարող է լինել ցանկացած մետրիկական տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն:

Սահմանում: *Դիցուք՝* $E \subset C(K)$*: Կասենք, որ* $f \in C(K)$ *տարրը կարելի է մոտարկել* E*-ի տարրերով, եթե գոյություն ունի* $f_n \in E$ *հաջորդականություն, այնպիսին, որ* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in K$ *:*

E-ի տարրերով մոտարկելի տարրերի բազմությունը կնշանակենք $\overline{E}$-ով և կանվանենք E *-ի փակույթ*:

Որպեսզի $f \in \overline{E}$*, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունենա* $f_\varepsilon \in E$*, այնպիսին, որ* $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$ *:*

Ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանումներից:

Սահմանում: $E \subset C(K)$ *բազմությունը կոչվում է փակ բազմություն, եթե* $\overline{E} = E$ *:*

Դժվար չէ համոզվել, որ $\overline{E}$-ը փակ բազմություն է՝

$$\overline{(\overline{E})} = \overline{E} : \qquad (2.1)$$

Սահմանում: $A \subset C(K)$ *բազմությունը կոչվում է* $C(K)$ *հանրահաշվի ենթահանրահաշիվ, եթե կամայական* $f, g \in A$ *տարրերի և* $\alpha, \beta \in R$ *թվերի համար՝* $\alpha f + \beta g$, $fg \in A$*, այսինքն՝* A*-ն նույնպես հանրահաշիվ է (*A*-ն փակ է* $C(K)$*-ում սահմանված գործողությունների նկատմամբ):*

Օրինակ: Վերցնենք՝ $K = [a,b] \subset R$ և որպես A վերցնենք հանրահաշվական բազմանդամների բազմությունը՝

$$A = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : \ a_0, a_1, \cdots, a_n \in R, \, n \in N \right\} :$$

Այդ դեպքում A-ն $C[a,b]$-ի ենթահանրահաշիվ է:

Սահմանում: *Կասենք* $A \subset C(K)$ *հանրահաշիվը տարբերում է* K*-ի կետերը, եթե յուրաքանչյուր* $x_1, x_2 \in K$ $(x_1 \neq x_2)$ *կետերի զույգի համար գոյություն ունի* $f \in A$ *տարր, այնպիսին, որ* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *:*

Եթե բոլոր $f \in A$ *տարրերի համար՝* $f(x_0) = 0$*, ապա կասենք, որ* A *հանրահաշիվը* x_0 *կետում անհետանում է:*

Թեորեմ 2.1 (Սթոուն-Վայերշտրաս): *Եթե 1)* $A \subset C(K)$ *-ն հանրահաշիվ է, 2)* A *-ն տարբերում է* K *-ի կետերը, 3)* A *-ն* K *-ի ոչ մի կետում չի անհետանում, ապա* $\overline{A} = C(K)$ *:*

2. Նախապատրաստական լեմմաներ:

Լեմմա 2.1: *Դիցուք՝*

$$u_1(t) \equiv 0 \,,\ u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}\left[t - u_n^2(t)\right] \,,\ n \in N \,,\ t \in [0,1] : \qquad (2.2)$$

Այդ դեպքում $u_n(t)$ *բազմանդամների հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝*

ա) $0 \le u_n(t) \le \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$,

բ) $u_n(t) \rightrightarrows \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$ *:*

► *ա)-ն* ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ դեպքում ունենք՝ $0 = u_1(t) \le \sqrt{t}$, $t \in [0,1]$: Այնուհետև ենթադրենք, թե $0 \le u_n(t) \le \sqrt{t}$ և ապացուցենք, որ* $0 \le u_{n+1}(t) \le \sqrt{t}$: Ունենք՝

$$\sqrt{t} - u_{n+1}(t) = \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\left[t - u_n^2(t)\right] =$$
$$= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2}\left[\sqrt{t} - u_n(t)\right]\left[\sqrt{t} + u_n(t)\right] =$$
$$= \left[\sqrt{t} - u_n(t)\right]\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\sqrt{t} + u_n(t)\right]\right\} \ge 0,\ t \in [0,1],$$

քանի որ $\left.\begin{array}{l} t \in [0,1] \\ u_n(t) \le \sqrt{t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\sqrt{t} + u_n(t)\right] \le 1 :$

---

* Բավական է ապացուցել $u_{n+1}(t) \le \sqrt{t}$ անհավասարությունը, մյուսը հետևում է (2.2)-ից:

բ)-ի ապացույցը: (2.2)-ից և ա)-ից հետևում է, որ $u_n(t) \le u_{n+1}(t) \le \sqrt{t}$: Ուստի, յուրաքանչյուր $t \in [0,1]$ կետում $u_n(t)$ թվային հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ, հետևաբար այն ունի կետորեն զուգամետ է՝ $u_n(t) \to u(t)$, $t \in [0,1]$:

(2.2) հավասարությունում անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$՝ կստանանք, որ $t - u^2(t) = 0$, այսինքն՝ $u(t) = \sqrt{t}$: Այժմ հավասարաչափ զուգամիտությունը հետևում է Դինիի թեորեմից (X, թեորեմ 3.2') : ■

Հետևանք: *Յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունեն* $a_1, \cdots, a_k$ *իրական թվեր, այնպիսիք, որ*

$$\left| a_1 x^2 + \cdots + a_k x^{2k} - |x| \right| < \varepsilon, \ x \in [-1,1] : \qquad (2.3)$$

► Լեմմա 2.1-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $a_1, \cdots, a_k \in R$ թվեր, այնպիսիք, որ

$$\left| a_1 t + \cdots a_k t^k - \sqrt{t} \right| < \varepsilon, \ t \in [0,1]:$$

Այստեղ տեղադրելով $t = x^2$, $x \in [-1,1]$՝ կստանանք (2.3)-ը: ■

Սահմանում: $\mathcal{F} \subset C(K)$ *ընտանիքը կոչվում է փակ՝ ստրուկտուրային գործողությունների նկատմամբ, եթե* $f,g \in \mathcal{F}$ *պայմանից հետևում է, որ* $\max(f,g) \in \mathcal{F}$ *և* $\min(f,g) \in \mathcal{F}$ *, որտեղ*

$$\max(f,g)(x) = \begin{cases} f(x), \text{եթե } f(x) \ge g(x) \\ g(x), \text{եթե } f(x) < g(x) \end{cases}, \ \min(f,g)(x) = \begin{cases} f(x), \text{եթե } f(x) < g(x) \\ g(x), \text{եթե } f(x) \ge g(x) \end{cases}:$$

Լեմմա 2.2: *Փակ հանրահաշիվը փակ է ստրուկտուրային գործողությունների նկատմամբ:*

► Քանի որ $\max(f,g) = \dfrac{f + g + |f - g|}{2}$, $\min(f,g) = \dfrac{f + g - |f - g|}{2}$,

ապա լեմման ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ

$$\varphi \in A \Rightarrow |\varphi| \in A, \qquad (2.4)$$

որտեղ A-ն փակ հանրահաշիվ է:

Եթե $\|\varphi\| \leq 1$, ապա (2.3)-ի մեջ տեղադրելով $x = \varphi(t)$, կստանանք

$$\left| a_1\varphi^2(t) + \cdots + a_k\varphi^{2k}(t) - |\varphi(t)| \right| < \varepsilon,\ t \in K: \tag{2.5}$$

Քանի որ A-ն հանրահաշիվ է, ապա $a_1\varphi^2(t) + \cdots + a_k\varphi^{2k}(t) \in A$ և (2.5)-ը նշանակում է, որ $|\varphi|$-ն կարելի է հավասարաչափ մոտարկել A-ի տարրերով: Քանի որ A-ն փակ հանրահաշիվ է, ուստի $|\varphi| \in A$:

Իսկ երբ $\|\varphi\| > 1$, այդ դեպքում՝ $\psi(t) := \dfrac{\varphi(t)}{\|\varphi\|} \in A$ և $\|\psi\| = 1$, ուստի $|\psi| \in A$, հետևաբար, $|\varphi| \in A$: ■

<u>**3. Հիմնական լեմմա:**</u>

Լեմմա 2.3: *Դիցուք $\mathcal{F} \subset C(K)$ ընտանիքը փակ է ստրուկտուրային գործողությունների նկատմամբ և $f \in C(K)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ կամայական $p, q \in K$ կետերի զույգի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $f_{pq} \in \mathcal{F}$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ*

$$\left| f(x) - f_{pq}(x) \right| < \varepsilon,\ x = p, q: \tag{2.6}$$

Այդ դեպքում $f \in \overline{\mathcal{F}}$:

► Նշանակենք՝

$$E_{pq} = \{x \in K : f_{pq}(x) - \varepsilon < f(x)\},\ F_{pq} = \{x \in K : f(x) < f_{pq}(x) + \varepsilon\}:$$

Այդ դեպքում գոյություն ունեն U_{pq} և V_{pq} $(\subset R^k)$ բաց բազմություններ (VII, թեորեմ 5.2), այնպիսիք, որ

$$E_{pq} = U_{pq} \cap K,\ F_{pq} = V_{pq} \cap K:$$

Պարզ է, որ $p, q \in U_{pq} \cap V_{pq}$: Այժմ, եթե $p \in K$ կետը ֆիքսենք, իսկ q -ն փոփոխենք ամբողջ K -ի վրա, ապա $\left\{V_{pq}, q \in K\right\}$ բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի K կոմպակտ բազմությունը, ուստի գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $V_{pq_1}, \cdots, V_{pq_s}$: Նշանակենք՝

$$f_p = \max\left(f_{pq_1}, \cdots, f_{pq_s}\right); \quad U_p = \bigcap_{i=1}^{s} U_{pq_i} :$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$f_p(x) - \varepsilon < f(x),\ x \in U_p;\ \ f(x) < f_p(x) + \varepsilon\ ,\ x \in K\ , \tag{2.7}$$

ընդ որում, $f_p \in \mathcal{F}$:

Այնուհետև, եթե p -ն փոփոխենք ամբողջ K -ի վրա, ապա $\left\{U_p, p \in K\right\}$ բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի K -ն, ուստի գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $U_{p_1}, \cdots, U_{p_r}$:

Նշանակենք՝ $f_\varepsilon = \min\left(f_{p_1}, \cdots, f_{p_r}\right) \in \mathcal{F}$: Այդ դեպքում (2.7)-ի շնորհիվ կունենանք՝

$$f_\varepsilon(x) - \varepsilon < f(x) < f_\varepsilon(x) + \varepsilon\ ,\ x \in K\ ,\ f_\varepsilon \in \mathcal{F}\ ,$$

այսինքն՝ f ֆունկցիան K բազմության վրա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել $\mathcal{F}$ -ի էլեմենտներով, ուստի $f \in \overline{\mathcal{F}}$: ■

<u>4. Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմի ապացույցը:</u> Պետք է ապացուցենք, որ եթե A հանրահաշիվը բավարարում է թեորեմի պայմաններին, ապա $\overline{A} = C(K)$: (2.1)-ի շնորհիվ, բավական է ապացուցել, որ $\overline{(\overline{A})} = C(K)$: Եթե նշանակենք՝ $B := \overline{A}$, ապա պետք է ապացուցենք, որ $\overline{B} = C(K)$, որտեղ B -ն բավարարում է թեորեմի պայմաններին և B -ն փակ հանրահաշիվ է*:

► 2.2 և 2.3 լեմմաների շնորհիվ, բավական է ապացուցել, որ ցանկացած $f \in C(K)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում է (2.6)-ը ($\mathcal{F}$ -ի դերում

---

* Դժվար չէ ստուգել, որ հանրահաշվի փակույթը նույնպես հանրահաշիվ է:

հանդես է գալիս B-ն): Մենք կապացուցենք ավելին. $x_1, x_2 \in K$ կետերի յուրաքանչյուր զույգի և $\alpha = f(x_1)$, $\beta = f(x_2)$ իրական թվերի զույգի համար գոյություն ունի $g \in B$, այնպիսին, որ

$$g(x_1) = \alpha \ , \ \ g(x_2) = \beta \ : \tag{2.8}$$

Նախ ցույց տանք, որ գոյություն ունի $u \in B$, այնպիսին, որ

$$0 \neq u(x_1) \neq u(x_2) : \tag{2.9}$$

Իրոք, թեորեմի 2) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $u \in B$, այնպիսին, որ $u(x_1) \neq u(x_2)$: Եթե $u(x_1) \neq 0$, ապա տեղի ունի (2.9)-ը, իսկ եթե $u(x_1) = 0$, ապա թեորեմի 3) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $h \in B$, այնպիսին, որ $h(x_1) \neq 0$: Այդ դեպքում $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, թիվը կընտրենք այնպես, որ $v = \lambda h + u$ ֆունկցիան բավարարի (2.9) պայմանին:

Այնուհետև նշանակենք՝

$$\varphi_1(x) = \frac{[u(x) - u(x_2)]u(x)}{[u(x_1) - u(x_2)]u(x_1)} :$$

Այդ դեպքում $\varphi_1 \in B$, $\varphi_1(x_1) = 1$, $\varphi_1(x_2) = 0$:

Նման ձևով կկառուցենք $\varphi_2 \in B$ ֆունկցիան, այնպես, որ $\varphi_2(x_1) = 0$, $\varphi_2(x_2) = 1$:

Եթե նշանակենք $g = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$, ապա կբավարարվի (2.8)-ը և թեորեմի ապացույցը կավարտվի: ■

Օրինակներ:

1^0. Դիցուք $K \subset R^m$-ը կոմպակտ բազմություն է:

Որպես $C(K)$-ի ենթահանրահաշիվ վերցնենք R^m-ում m փոփոխականի բոլոր բազմանդամների (VII, §3, 5) բազմությունը: Այդ դեպքում A-ն բաժանում է K-ի կետերը, քանի որ, եթե $x_1 = (x_1^1, \cdots, x_m^1) \neq (x_1^2, \cdots x_m^2) = x_2$, ապա գոնե մեկ i-ի համար՝ $x_i^1 \neq x_i^2$, ուստի $P(x_1, \cdots, x_m) = x_i$ բազմանդամը բավարարում է $P(x_1) \neq P(x_2)$ պայմանին: Բացի այդ, A-ն K-ի ոչ մի կետում չի անհետանում, քանի որ

A-ն իր մեջ պարունակում է նաև հաստատունները (զրո աստիճանի բազմանդամները):

Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմի համաձայն, $\overline{A} = C(K)$: Այլ կերպ ասած, K -ի վրա յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով (համեմատեք Վայերշտրասի առաջին թեորեմի հետ՝ XIV, թեորեմ 4.2):

2^0. Դիցուք $\varphi \in C[a,b]$ ֆունկցիան խիստ աճող է և $\varphi(x) > 0$, $x \in [a,b]$: A -ով նշանակենք φ -ով ծնված հանրահաշիվը՝

$$A = \left\{ a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots + a_n\varphi^n;\ n \in N,\ a_i \in R \right\}:$$

Այդ դեպքում $A \subset C[a,b]$ հանրահաշիվը բավարարում է Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, $\overline{A} = C[a,b]$:

5. Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմն առանց երրորդ պայմանի:

Դիցուք $A \subset C(K)$ հանրահաշիվը բավարարում է Սթոուն-Վայերշտրասի թեորեմի 2) պայմանին, բայց 3) պայմանին չի բավարարում: Այդ դեպքում գոյություն ունի միակ $x_0 \in K$ կետ, այնպիսին, որ

$$f \in A \Rightarrow f(x_0) = 0:$$

Նշանակենք՝ $C_0(K) = \left\{ f \in C(K) : f(x_0) = 0 \right\}$ և ապացուցենք հետևյալը.

Թեորեմ 2.2: *$\overline{A} = C_0(K)$:*

► Դիտարկենք

$$B = \left\{ c + f : f \in A,\ c \in R \right\}$$

հանրահաշիվը, որն արդեն կբավարարի Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմի բոլոր պայմաններին: Ուստի, յուրաքանչյուր $f \in C_0(K)$ ֆունկցիայի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն կունենա $P \in B$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$\left| f(x) - P(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},\ \ x \in K,$$

որտեղ $P = Q + c$, $Q \in A$, $c \in R$: Հետևաբար,

$$\left|f(x)-Q(x)-c\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ x\in K: \tag{2.10}$$

Այստեղ տեղադրելով $x=x_0$, կստանանք՝

$$|\,c\,|<\frac{\varepsilon}{2}: \tag{2.11}$$

(2.10)-(2.11)-ից հետևում է, որ

$$\left|f(x)-Q(x)\right|<\varepsilon\ ,\ x\in K\ ,\ Q\in A:$$

Այսինքն՝ $f\in C_0(K)\Rightarrow f\in\overline{A}$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

<u>6. Սթոուն-Վայերշտրասի թեորեմը կոմպլեքս հանրահաշիվների համար:</u>

Բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ *թեորեմ 2.1-ը կոմպլեքս հանրահաշիվների համար ճիշտ չէ:*

Որպես K կոմպակտ* բազմություն վերցնենք

$$K=\left\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\right\}$$

բազմությունը, իսկ որպես $A\subset C(K,\mathbb{C})$ հանրահաշիվ վերցնենք

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\ ,\ a_k\in\mathbb{C}\ ,\ n\in N\ ,\ z\in K\ ,$$

բազմանդամներից կազմված հանրահաշիվը: Այդ դեպքում $\overline{A}\neq C(K,\mathbb{C})$, այսինքն՝ K-ի վրա ոչ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաները կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով: Իրոք, $P_n\in A$ բազմանդամը բավարարում է

$$\int_0^{2\pi}P_n(e^{it})e^{imt}dt=0\ ,\quad m\in N \tag{2.12}$$

---

* $\mathbb{C}$ տարածության տոպոլոգիան համընկնում է R^2 տարածության տոպոլոգիայի հետ, որովհետև $z=x+iy=(x,y)$:

պայմանին, հետևաբար, եթե $P_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $z \in K$, ապա (2.12)-ում անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$, կստանանք՝

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{imt} dt = 0, \quad m \in N: \qquad (2.12')$$

Այսինքն՝ եթե $f \in \overline{A}$, ապա f -ը բավարարում է (2.12') պայմանին: Իսկ այդ պայմանին բավարարում են ոչ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաները. որպես օրինակ կարող ենք վերցնել $f(z) = \overline{z}$ ֆունկցիան: Այս դեպքում՝

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt = 2\pi \neq 0:$$

Սահմանում: *$A \subset C(K, \mathbb{C})$ հանրահաշիվը կոչվում է ինքնահամալուծ, եթե $f = u + iv \in A$ պայմանից հետևում է, որ $\overline{f} = u - iv \in A$:*

Ձևակերպենք Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմը կոմպլեքս հանրահաշիվների համար:

Թեորեմ 2.3: *Եթե 1) $A \subset C(K, \mathbb{C})$ ինքնահամալուծ հանրահաշիվ է, 2) A-ն տարբերում է K-ի կետերը, 3) A-ն K-ի ոչ մի կետում չի անհետանում, ապա $\overline{A} = C(K, \mathbb{C})$:*

► Եթե $f = u + iv \in A$, ապա $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ և $v = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$ ֆունկցիաները նույնպես A-ից են: Ուստի, եթե A_R-ով նշանակենք A հանրահաշվին պատկանող իրական ֆունկցիաների դասը, ապա A_R-ը կհանդիսանա $C(K)$ հանրահաշվի ենթահանրահաշիվ, որը բավարարում է Սթոուն - Վայերշտրասի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, կամայական $g = \varphi + i\psi \in C(K, \mathbb{C})$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն $\varphi_n \in A_R$ և $\psi_n \in A_R$ ֆունկցիաների հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x), \; x \in K; \; \psi_n(x) \rightrightarrows \psi(x), \; x \in K:$$

Այսպիսով, $\varphi_n + i\psi_n \in A$ և $\varphi_n(x) + i\psi_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $x \in K$, այսինքն՝ $g \in \overline{A}$: Հետևաբար, $\overline{A} = C(K, \mathbb{C})$: ■

Վերադառնանք սկզբում բերված օրինակին: Եթե $|z|=1$ ($z \in K$), ապա $\bar{z}=\frac{1}{z}$ և $\overline{(z^k)}=\frac{1}{z^k}$, $k \in N$: Ուստի, եթե A-ով նշանակենք

$$R(z)=\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k\,,\ a_k \in \mathbb{C},\ n \in N\,,\ z \in K \tag{2.13}$$

տեսքի ֆունկցիաների բազմությունը, ապա $A \subset C(K,\mathbb{C})$ բազմությունը կհանդիսանա ինքնահամալուծ հանրահաշիվ:

Թեորեմ 2.3-ի համաձայն՝ $\overline{A}=C(K,\mathbb{C})$: Այսինքն՝ K-ի վրա յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել (2.13) տեսքի ֆունկցիաներով:

Հետևաբար, եթե $f \in C(K,\mathbb{C})$, ապա գոյություն ունի $R_n(z)=\sum_{k=-n}^{n} a_k z^k$ ֆունկցիաների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$R_n(z) \rightrightarrows f(z)\,,\ z \in K :$$

z-ը ներկայացնելով $z=e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ տեսքով, կստանանք՝

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt} \rightrightarrows f(e^{it})\,,\ t \in [0,2\pi] : \tag{2.14}$$

Մյուս կողմից, եթե նշանակենք՝

$$F(t)=f(e^{it}),\ f \in C(K,\mathbb{C})\,, \tag{2.15}$$

ապա՝

$$F \in C([0,2\pi],\mathbb{C}),\ F(0)=F(2\pi) \tag{2.16}$$

և կարելի է ապացուցել նաև հակադարձը. (2.16) պայմաններին բավարարող յուրաքանչյուր F ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել (2.15) տեսքով և (2.14)-ից ստանալ Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը (XIV, թեորեմ 4.3):

XVI ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

§1. ԳԾԱՅԻՆ ՁԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ներածություն: Ենթադրվում է, որ ընթերցողը տիրապետում է վերջավոր չափանի գծային տարածություններում գծային ձևափոխությունների պարզագույն հատկություններին:

$A: R^n \to R^m$ ֆունկցիան կոչվում է *գծային ձևափոխություն (գծային օպերատոր, գծային արտապատկերում)*, եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in R^n$ վեկտորների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար՝

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 :$$

$A: R^n \to R^m$ գծային ձևափոխությունների բազմությունը նշանակվում է $L(R^n, R^m)$-ով, իսկ երբ $m = n$, այդ բազմությունը նշանակվում է ուղղակի $L(R^n)$-ով:

$L(R^n, R^m)$-ը գծային տարածություն է. ցանկացած $A_1, A_2 \in L(R^n, R^m)$ արտապատկերումների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար՝

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in L(R^n, R^m) :$$

Վեկտորների $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset R^n$ համակարգը, որում յուրաքանչյուր e_i վեկտորի բոլոր կոորդինատները 0 են, բացառությամբ i-րդի, որը 1 է, կոչվում է R^n *-ում ստանդարտ բազիս*:

$A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխությանը համապատասխանեցվում է $m \times n$ կարգի $[A] = [a_{ij}]$ ($i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$) մատրիցը, որի j-րդ սյունը կազմված է

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

վերլուծության գործակիցներից:

Եթե $A\in L(R^n,R^m)$ և $B\in L(R^m,R^p)$, ապա $[BA]=[B][A]$:

$y=Ax$ համապատասխանությունը $[A]$ մատրիցի միջոցով գրվում է այսպես.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}:$$

$A\in L(R^n)$ արտապատկերման համար հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

ա) $Ax=0\Leftrightarrow x=0$,

բ) $x\neq y\Leftrightarrow Ax\neq Ay$,

գ) $AR^n=R^n$:

Եթե $A\in L(R^n)$ արտապատկերումը բավարարում է այդ երեք պայմաններից որևէ մեկին, հետևաբար նաև մյուս երկուսին, ապա այն հակադարձելի է: $A\in L(R^n)$ ձևափոխության հակադարձը նշանակվում է A^{-1}-ով, իսկ հակադարձելի գծային ձևափոխությունների բազմությունը՝ Ω-ով:

Որպեսզի $A\in\Omega$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\det[A]\neq 0:$$

<u>**2. Գծային ձևափոխության նորմ:**</u> Դիցուք՝ $A\in L(R^n,R^m)$:

Նշանակենք՝

$$\|A\|=\sup_{|x|\le 1}|Ax|,$$

ինչը կանվանենք A *գծային ձևափոխության օպերատորային նորմ* կամ ուղղակի A *գծային ձևափոխության նորմ*:

Թվարկենք նորմի պարզագույն հատկությունները.

1⁰. Եթե $A\in L(R^n,R^m)$, ապա $\|A\|<+\infty$:

► Իրոք, եթե $x=(x_1,...,x_n)=x_1e_1+...+x_ne_n$ վեկտորը բավարարում է $|x|\le 1$ պայմանին, ապա $|x_i|\le|x|\le 1$: Հետևաբար՝

$$|Ax|=|x_1Ae_1+...+x_nAe_n|\le|Ae_1|+...+|Ae_n|,$$

այսինքն՝ $\|A\|\le|Ae_1|+...+|Ae_n|$: ■

2^0. *Եթե* $A\in L(R^n,R^m)$, *ապա* $|Ax|\le\|A\||x|$, $x\in R^n$ *:*

► Իրոք, երբ $x=0$, անհավասարության թե՛ ձախ, և թե՛ աջ կողմերում գրված արտահայտությունները դառնում են 0, իսկ երբ $x\ne 0$, այդ անհավասարությունը համարժեք է հետևյալին՝

$$\left|A\frac{x}{|x|}\right|\le\|A\|: \tag{1.1}$$

Քանի որ $\left|\frac{x}{|x|}\right|=1$, ապա (1.1) անհավասարությունը հետևում է $\|A\|$-ի սահմանումից: ■

Հետևանք: Եթե $A\in L(R^n,R^m)$, ապա

$$|Ax-Ay|=|A(x-y)|\le\|A\|\cdot|x-y|,\ \ x,y\in R^n,$$

ինչը նշանակում է, որ գծային ձևափոխությունը հավասարաչափ անընդհատ է ամբողջ R^n տարածության վրա:

3^0. *Եթե* $A\in L(R^n,R^m)$ *և* $\lambda>0$ *թիվն այնպիսին է, որ*

$$|Ax|\le\lambda|x|,\ x\in R^n, \tag{1.2}$$

ապա $\|A\|\le\lambda$ *:*

► Իրոք, երբ $|x|\le 1$, (1.2)-ից հետևում է, որ $|Ax|\le\lambda$: Ստացվեց, որ λ-ն $\{|Ax|:|x|\le 1\}$ բազմության վերին եզր է, իսկ $\|A\|$-ն՝ ճշգրիտ վերին եզրն է, հետևաբար, $\|A\|\le\lambda$: ■

4^0. $\|A\|$ *-ն բավարարում է նորմի հատկություններին (աքսիոմներին).*

ա) $\|A\| \geq 0$ *, ընդ որում,* $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$ *,*

բ) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$*,* $\lambda \in R$ *,*

գ) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$*,* $A, B \in L(R^n, R^m)$ *:*

► Իրոք, ա)-ն անմիջապես բխում է $\|A\|$-ի սահմանումից, բ)-ն հետևում է այն փաստից, որ դրական հաստատունը կարելի է $\sup$-ի նշանի տակից դուրս հանել:

գ)-ն ցույց տալու համար վերցնենք $|x| \leq 1$ պայմանին բավարարող որևէ $x \in R^n$ վեկտոր: Այդ դեպքում՝

$$|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|,$$

ինչից էլ բխում է գ)-ն: ■

5⁰. Եթե $A \in L(R^n, R^m), B \in L(R^m, R^p)$ *, ապա* $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ *:*

► Իրոք, եթե $|x| \leq 1$, ապա

$$|(AB)x| = |A(Bx)| \leq \|A\| \cdot |Bx| \leq \|A\| \cdot \|B\| : ■$$

<u>3. Հակադարձելի գծային ձևափոխությունների թեորեմը:</u> Քանի որ $L(R^n, R^m)$-ը գծային նորմավորված տարածություն է, ապա այդ տարածությունում նորմի միջոցով կարելի է սահմանել երկու կետերի հեռավորության, կետի շրջակայքի և բաց բազմության գաղափարները (այնպես, ինչպես արվել է R^n-ում): Այս դեպքում $|x|$-ի դերը կատարում է $\|A\|$-ն: Այնուհետև կարելի է դիտարկել $L(R^n, R^m)$-ի վրա որոշված կամ այդ տարածությունից արժեքներ ընդունող արտապատկերումները և սահմանել այդպիսի արտապատկերումների սահմանը և անընդհատությունն, այնպես, ինչպես R^n-ի դեպքում:

Թեորեմ 1.1: *1) Հակադարձելի գծային ձևափոխությունների* $\Omega \subset L(R^n)$ *բազմությունը բաց բազմություն է:*

2) $f(A) := A^{-1} : \Omega \to \Omega$ *արտապատկերումն անընդհատ է* Ω*-ի վրա:*

► 1) Նշանակենք՝ $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$ և ապացուցենք, որ A կետի α շառավղով շրջակայքի բոլոր կետերը պատկանում են Ω-ին, այսինքն՝ եթե $\|B-A\| =: \beta < \alpha$, ապա B-ն հակադարձելի է:

Իրոք, ունենք՝

$$|x| = |A^{-1}(Ax)| \le \frac{1}{\alpha}|Ax| \Rightarrow \alpha|x| \le |Ax|$$

և

$$|(A-B)x| \le \beta|x| \Rightarrow -\beta|x| \le -|Ax - Bx| :$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$(\alpha - \beta)|x| \le |Ax| - |Ax - Bx| \le |Bx| : \qquad (1.3)$$

Վերջին քայլում օգտվեցինք R^n-ում նորմի հետևյալ հատկությունից՝

$$|y_1| - |y_2| \le |y_1 - y_2| \Leftrightarrow |y_1| \le |y_1 - y_2| + |y_2|,$$

որը բխում է եռանկյան անհավասարությունից:

(1.3)-ից արդեն հետևում է, որ B-ն հակադարձելի է, որովհետև B-ն 0 արժեքն ընդունում է միայն 0 կետում:

Թեորեմի 2) պնդումն ապացուցելու համար (1.3)-ում տեղադրենք՝ $x = B^{-1}y$: Կստանանք՝ $|B^{-1}y| \le \dfrac{1}{\alpha - \beta}|y|$, $y \in R^n$, որտեղից էլ, գծային ձևափոխության նորմի 3^0 հատկության համաձայն՝ $\|B^{-1}\| \le \dfrac{1}{\alpha - \beta}$: Քանի որ

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A-B)A^{-1},$$

ապա նորմի 5^0 հատկության համաձայն՝

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \le \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \|A^{-1}\| \le \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \to 0, \text{ երբ } \beta \to 0 :$$

Այլ կերպ ասած՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\|B-A\|<\delta \Rightarrow \|B^{-1}-A^{-1}\|<\varepsilon ,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

1. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $x_0 \in R^n$ կետի շրջակայքում և արժեքներ է ընդունում R^m-ից:

Սահմանում: *f ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի x_0 կետում, եթե գոյություն ունի $A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխություն, այնպիսին, որ*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|}=0 : \tag{2.1}$$

Նշանակելով $x-x_0=h$՝ (2.1) պայմանը կարելի է գրել նաև

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)-Ah|}{|h|}=0 \tag{2.1'}$$

տեսքով:

Այնուհետև նշանակելով

$$\alpha=\alpha(x)=\frac{1}{|x-x_0|}\left[f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\right]\in R^m,\ \alpha(x_0)=0,$$

կստանանք ֆունկցիայի աճի բանաձևը.

$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+|x-x_0|\alpha$, որտեղ $\alpha\to 0$, երբ $x\to x_0$; (2.2)

կամ, որ նույնն է՝

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(|h|),\ \text{երբ}\ h\to 0 : \tag{2.2'}$$

Ճիշտ է նաև հակառակը՝ ֆունկցիայի աճի (2.2) բանաձևից հետևում է (2.1)-ը:

A գծային ձևափոխությունը կոչվում է f *ֆունկցիայի ածանցյալ կամ դիֆերենցիալ* (x_0 կետում) և նշանակվում է $f'(x_0)$ կամ $Df(x_0)$:

$m=1$ դեպքում՝ եթե $A\in L(R^n,R)$, նշանակելով $Ae_j=a_j\in R$, $1\le j\le n$, կունենանք՝ $Ah=a_1h^1+\cdots+a_nh^n$, $h=\begin{pmatrix}h^1\\ \vdots\\ h^n\end{pmatrix}\in R^n$, այսինքն՝ $f:R^n\to R$ թվային ֆունկցիայի դիֆերենցելիության և դիֆերենցիալի նախկին սահմանումը և նոր սահմանումը համարժեք են, ընդ որում, $[f'(x_0)]=\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right)$:

2. Պարզագույն թեորեմներ:

1^0. Եթե f ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա (2.2') պայմանին բավարարող A գծային ձևափոխությունը միակն է:

► Իրոք, եթե B-ն նույնպես բավարարում է (2.2') պայմանին՝

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Bh+\beta|h|,\ \beta\underset{h\to0}{\to}0,$$

ապա (2.2')-ից հանելով վերջինը, կստանանք՝

$$0=(A-B)h+(\alpha-\beta)|h|: \tag{2.3}$$

Այժմ վերցնենք կամայական $y\in R^n$ և (2.3)-ի մեջ տեղադրենք $h=ty$, $t>0$: Կստանանք՝

$$(A-B)ty=(\beta-\alpha)t|y|,\ \beta-\alpha\underset{t\to0}{\to}0:$$

Բաժանելով t-ի՝ կստանանք, որ կամայական $y\in R^n$ վեկտորի համար՝

$$(A-B)y=(\beta-\alpha)|y|\underset{t\to0}{\to}0,$$

կամ, որ նույնն է՝ $(A-B)y=0$: Այսպիսով՝ $A=B$: ■

2^0. Եթե f-ը և g-ն դիֆերենցելի են x_0 կետում, ապա $(f+g)$-ն և af-ը ($a\in R$) նույնպես դիֆերենցելի են x_0 կետում և

$$D(f+g)(x_0)=Df(x_0)+Dg(x_0)\ \text{և}\ Daf(x_0)=aDf(x_0):$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է դիֆերենցելիության սահմանումից:

3⁰. Եթե $f \in L(R^n, R^m)$, ապա f -ը կամայական $x_0 \in R^n$ կետում դիֆերենցելի է և $Df(x_0) = f$:

Այս հատկությունը բխում է դիֆերենցելիության սահմանումից և դիֆերենցիալի միակությունից:

4⁰. Եթե f -ը x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա գոյություն ունեն L և δ դրական թվեր, այնպիսիք, որ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le L|x - x_0| : \qquad (2.4)$$

► Օգտվելով ֆունկցիայի աճի (2.2) բանաձևից և գծային ձևափոխության նորմի 2^0 հատկությունից՝ կստանանք

$$|f(x) - f(x_0)| \le \|A\||x - x_0| + |\alpha||x - x_0| = (\|A\| + |\alpha|)|x - x_0| ,$$

ինչից էլ հետևում է 4^0-ը: ■

Հետևանք: *Դիֆերենցելի ֆունկցիան անընդհատ է:*

*5⁰. **Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը**: Եթե ա) $f : R^n \to R^m$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում և $f'(x_0) = A$, բ) $g : R^m \to R^p$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $y_0 = f(x_0)$ կետում և $g'(y_0) = B$, ապա $h(x) = g(f(x))$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում և*

$$h'(x_0) = BA = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)^* : \qquad (2.5)$$

► g -ի աճի բանաձևից և 4^0 պարզագույն հատկությունից հետևում է, որ

$$h(x) - h(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) =$$
$$= B(f(x) - f(x_0)) + \beta|f(x) - f(x_0)|, \ \beta \underset{x \to x_0}{\to} 0 :$$

Հետևաբար՝

$$h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0) =$$
$$= B[f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)] + \beta|f(x) - f(x_0)| :$$

Օգտվելով գծային ձևափոխության նորմի 2^0 հատկությունից և (2.4) անհավասարությունից՝ կստանանք

---

* (2.5) հավասարությունը գրում են նաև $Dh(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$ տեսքով:

$$\frac{|h(x)-h(x_0)-BA(x-x_0)|}{|x-x_0|} \le \|B\| \frac{|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)|}{|x-x_0|} + L|\beta|,\ \beta \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0,$$

ինչից և հետևում է (2.5)-ը: ■

3. Դիֆերենցելիությունը կոորդինատային ֆունկցիաների լեզվով:

$f: R^n \to R^m$ ֆունկցիան ներկայացնենք կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝

$$f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_m(x)e_m = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},\ f_i : R^n \to R,\ 1 \le i \le m:$$

Նախ նկատենք, որ որպեսզի $A: R^n \to R^m$ արտապատկերումը լինի գծային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կոորդինատային ֆունկցիաները լինեն գծային: Իսկապես, դա հետևում է բազիսային վերլուծություններից՝ եթե $x, y \in R^n$, $\alpha, \beta \in R$, ապա

$$A(\alpha x + \beta y) = A_1(\alpha x + \beta y)e_1 + \cdots + A_m(\alpha x + \beta y)e_m;$$

$$\alpha Ax + \beta Ay = (\alpha A_1 x + \beta A_1 y)e_1 + \cdots + (\alpha A_m x + \beta A_m y)e_m:$$

Բացի դրանից, եթե $A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխության մատրիցը $[a_{ij}]$-ն է, ապա

$$\begin{pmatrix} A_1 e_j \\ \vdots \\ A_m e_j \end{pmatrix} = Ae_j = a_{1j}e_1 + \cdots + a_{mj}e_m = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ 1 \le j \le n:$$

Հետևաբար, $A_i e_j = a_{ij}$, $1 \le j \le n$ ($1 \le i \le m$):

Այսինքն՝ $A_i \in L(R^n, R)$ կոորդինատային ձևափոխության մատրիցը $[a_{ij}]$ մատրիցի i-րդ տողն է:

Թեորեմ 2.1: *Որպեսզի $x_0 \in R^n$ կետում f ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում նրա կոորդինատային ֆունկցիաները լինեն դիֆերենցելի, ընդ որում*

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} : \qquad (2.6)$$

► Նշանակենք $A = f'(x_0)$ և $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, այնուհետև օգտվենք հետևյալ անհավասարություններից՝

$$\frac{|f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - A_i h|}{|h|} \le \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - Ah|}{|h|} \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} \frac{|f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - A_i h|}{|h|} :$$

Անհրաժեշտությունը հետևում է առաջին անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ երկրորդից: ■

Քանի որ $[f_i'(x_0)] = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_n} \right)$, ապա (2.6) բանաձևի համաձայն՝

$$[f'(x_0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} :$$

Այս մատրիցը կոչվում է *Յակոբիի մատրից*, իսկ $m = n$ դեպքում Յակոբիի մատրիցի որոշիչը կոչվում է f արտապատկերման *յակոբիան*:

Հաճախ $A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխությունը նույնացվում է ստանդարտ բազիսում իր մատրիցի հետ: Այդ պայմանավորվածության դեպքում Յակոբիի մատրիցը նշանակվում է $f'(x_0)$, իսկ յակոբիանը՝ $\det f'(x_0)$ կամ $\frac{D(f_1, \cdots, f_n)}{D(x_1, \cdots, x_n)}$ սիմվոլներով:

4. <u>Անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերումներ:</u> Դիցուք $D \subset R^n$ բազմությունը բաց է: $f : D \to R^m$ արտապատկերումը կոչվում է *անընդհատ դիֆերենցելի* D բազմության վրա, եթե f -ը դիֆերենցելի է D -ի բոլոր կետերում (D -ի վրա) և $f' : D \to L(R^n, R^m)$ արտապատկերումն անընդհատ է D -ի վրա (D -ի բոլոր կետերում):

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $x_0 \in D$ կետի և յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon :$$

Թեորեմ 2.2: *Որպեսզի f -ը լինի անընդհատ դիֆերենցելի D բաց բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ բազմության վրա f -ի կոորդինատային ֆունկցիաներն ունենան անընդհատ մասնակի ածանցյալներ:*

Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման.

Լեմմա 2.1: *Եթե $A \in L(R^n, R^m)$ և $[A] = [a_{ij}]$, ապա*

$$|a_{ij}| \le \|A\| \le \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2} : \tag{2.7}$$

► Քանի որ $a_{ij} = A_i e_j$, ապա

$$|a_{ij}| = |A_i e_j| \le |Ae_j| \le \|A\| :$$

Մյուս կողմից, $y = Ax$ հավասարությունը գրենք A ձևափոխության մատրիցի միջոցով՝

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad : \\ y_m = a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}$$

Ուստի $|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2 \le \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)$, հետևաբար

$$|Ax| \le \left\{\sum_{i,j} a_{ij}^2\right\}^{1/2} \cdot |x|,\ x \in R^n :$$

Հաշվի առնելով գծային ձևափոխության նորմի 3^0 հատկությունը՝ կստանանք (2.7)-ը: ■

► Թեորեմն ապացուցելու համար (2.7) անհավասարությունը գրենք $A = f'(x) - f'(x_0)$ գծային ձևափոխության համար՝

$$\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}\right| \le \|f'(x) - f'(x_0)\| \le \left\{\sum_{i,j}\left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}\right]^2\right\}^{1/2} :$$

Թեորեմի անհրաժեշտությունը հետևում է առաջին անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ երկրորդ անհավասարությունից*: ■

§3. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. Նախապատրաստական լեմմա:

Լեմմա 3.1: *Դիցուք $D \subset R^n$ բազմությունն ուռուցիկ տիրույթ է և $f: D \to R^n$ դիֆերենցելի արտապատկերման կոորդինատային ֆունկցիաները բավարարում են*

$$\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right| \le M,\ x \in D,\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n, \tag{3.1}$$

պայմաններին: Այդ դեպքում՝

$$|f(x) - f(y)| \le Mn^2|x - y|,\ x, y \in D : \tag{3.2}$$

► Ունենք՝

$$|f(x) - f(y)| \le \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_i(y)| : \tag{3.3}$$

---

* Նախքան երկրորդ անհավասարության գրելը մենք պետք է համոզվենք, որ f-ը դիֆերենցելի է, ինչը բխում է նախորդ թեորեմից և թվային ֆունկցիաների աճի բանաձևից:

Մյուս կողմից, Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն,

$$f_i(y)-f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x+\theta(y-x))(y_j-x_j)\,,\ 0<\theta<1:$$

Հետևաբար, (3.1)-ի համաձայն,

$$|f_i(x)-f_i(y)|\le nM|x-y|:$$

Այս գնահատականը տեղադրելով (3.3)-ի մեջ՝ կստանանք (3.2)-ը: ■

<u>2. Հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմը:</u>

Թեորեմ 3.1: *Եթե $f:R^n\to R^n$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է $a\in R^n$ կետի շրջակայքում և*

$$\det f'(a)\ne 0\,, \tag{3.4}$$

ապա գոյություն ունեն a-ն պարունակող U բաց բազմություն և $f(a)$-ն պարունակող V բաց բազմություն, այնպիսիք, որ

1^0. $f:U\to V$ արտապատկերումը փոխմիարժեք է,*

2^0. $f^{-1}:V\to U$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է,

3^0. $\left(f^{-1}\right)'(y)=\left(f'(x)\right)^{-1}$, որտեղ $x\in U$, $y=f(x)$:

► Ապացույցը տրոհենք երեք քայլերի:

I քայլ: Ցույց տանք, որ գոյություն ունեն δ և L դրական թվեր, այնպիսիք, որ

$$x',x''\in B(a,\delta)\Rightarrow|x'-x''|\le L|f(x')-f(x'')|: \tag{3.5}$$

► Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $f'(a)$-ն նույնական ձևափոխությունն է: Հակառակ դեպքում (3.4)-ից հետևում է, որ $\lambda=f'(a)$ գծային ձևափոխությունը հակադարձելի է և $F(x)=\lambda^{-1}(f(x))$ ֆունկցիան բավարարում է նշված պայմանին՝

$$F'(a)=(\lambda^{-1})'(f(a))\cdot f'(a)=\lambda^{-1}\cdot f'(a)=\lambda^{-1}\cdot\lambda=I:$$

---

* Այսինքն՝ հակադարձելի է:

Եթե (3.5)-ը ճիշտ է F-ի համար, ապա այն ճիշտ է նաև $f(x)$ ֆունկցիայի համար. այս դեպքում L-ի դերում հանդես կգա $L\left\|\lambda^{-1}\right\|$ գործակիցը:

Ընտրենք $\delta > 0$ թիվն, այնպես, որ $B(a,\delta)$ գնդում բավարարվեն հետևյալ պայմանները՝

ա) $\det f'(x) \neq 0$, $x \in B(a,\delta)$ (այդպիսի δ-ի գոյությունը հետևում է $\det f'(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից),

բ) $\left|\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right| \leq \dfrac{1}{2n^2}$, $x \in B(a,\delta)$, ինչը հետևում է $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ֆունկցիաների անընդհատությունից:

Այնուհետև լեմման կիրառենք $g(x) = f(x) - x$ ֆունկցիայի համար: Քանի որ, ըստ ենթադրության, $f'(a)x = x$, ապա

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}:$$

Հաշվի առնելով բ)-ն՝ կստանանք $\left|g(x') - g(x'')\right| \leq \dfrac{1}{2n^2} \cdot n^2 \left|x' - x''\right|$ անհավասարությունը, այսինքն՝

$$\left|(f(x') - x') - (f(x'') - x'')\right| \leq \frac{1}{2}\left|x' - x''\right|:$$

Մյուս կողմից՝

$$\left|x'' - x'\right| - \left|f(x'') - f(x')\right| \leq \left|(x'' - x') - (f(x'') - f(x'))\right| =$$
$$= \left|(f(x') - x') - (f(x'') - x'')\right|:$$

Այդ երկու անհավասարություններից կստանանք՝

$$\left|x' - x''\right| \leq 2\left|f(x') - f(x'')\right|,\ x', x'' \in B(a,\delta): \blacksquare$$

II քայլ: Գոյություն ունի $r > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$B\big(f(a), r\big) \subset f\big(B(a,\delta)\big), \tag{3.6}$$

այլ կերպ ասած՝ $f(a)$ կենտրոնով և r շառավղով գնդի բոլոր կետերը f ֆունկցիայի արժեքներ են:

► Վերցնենք $0<\eta<\delta$ պայմանին բավարարող որևէ η թիվ և նշանակենք՝

$$K=\{x\in R^n : |x-a|\leq\eta\} \text{ և } d=\inf_{|x-a|=\eta}|f(x)-f(a)|:$$

(3.5) անհավասարության շնորհիվ՝ $d\geq\frac{\eta}{L}>0$:

Նշանակենք $r=\frac{d}{2}$ և ապացուցենք, որ բավարարվում է (3.6) պայմանը: Վերցնենք որևէ $y\in B(f(a),r)$ և ցույց տանք, որ այն f ֆունկցիայի արժեք է: Դիտարկենք $h(x)=|f(x)-y|$ բանաձևով որոշվող $h:K\to R$ ֆունկցիան: Քանի որ h-ը K կոմպակտ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիա է, ապա գոյություն ունի $x_0\in K$ կետ, որում h-ն ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը: Այդ x_0-ն K-ի եզրային կետ չէ, որովհետև, երբ $x\in\partial K$, այսինքն՝ $|x-a|=\eta$, ապա

$$|f(a)-y|<\frac{d}{2}<|f(x)-y|: \tag{3.7}$$

Վերջին անհավասարությունը ստացվում է եռանկյան անհավասարությունից՝

$$d\leq|f(x)-f(a)|\leq|f(x)-y|+|y-f(a)|<|f(x)-y|+\frac{d}{2}:$$

Այսպիսով, $h^2(x)=|f(x)-y|^2=\sum_{i=1}^{n}(f_i(x)-y_i)^2$ ֆունկցիան $x_0\in K$ ներքին կետում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը: Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի համաձայն՝ $\frac{\partial h^2(x_0)}{\partial x_j}=0$, $j=1,\ldots,n$ կամ, որ նույնն է՝

$$2\sum_{i=1}^{n}\left(f_i(x_0)-y_i\right)\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}=0\,,\ j=1,\dots,n\ :$$

Քանի որ $\det\left[\dfrac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}\right]=\det f'(x_0)\neq 0$ (I քայլ, ա) պայման), ապա $f_i(x_0)-y_i=0$, $1\le i\le n$ կամ, որ նույնն է՝ $f(x_0)=y$: ■

III քայլ: Նշանակենք՝ $V=B\left(f(a),r\right)$, $U=f^{-1}(V)\cap B(a,\delta)$ և ավարտենք թեորեմի ապացույցը:

► Քանի որ $f:B(a,\delta)\to R^n$ արտապատկերումն անընդհատ է, ապա յուրաքանչյուր բաց բազմության նախապատկեր բաց է, հետևաբար, U-ն բաց է:

Այնուհետև, (3.5)-ի համաձայն, f արտապատկերումը $B(a,\delta)$-ի վրա հակադարձելի է և $f^{-1}:V\to U$ արտապատկերումն անընդհատ է:

Այժմ վերցնենք կամայական $x_0\in U$ կետ և ապացուցենք թեորեմի 3^0 պնդումն այդ կետում: Եթե $f'(x_0)=A$, ապա

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha\left|x-x_0\right|,\ \alpha\underset{x\to x_0}{\to}0\ : \qquad (3.8)$$

Քանի որ $\det[A]=\det f'(x_0)\neq 0$ (I քայլ, ա) պայման), ապա A գծային ձևափոխությունը հակադարձելի է:

(3.8)-ում նշանակենք՝ $f(x)=y$, $f(x_0)=y_0$ (այդ դեպքում՝ $x=f^{-1}(y)$, $x_0=f^{-1}(y_0)$) և հավասարության երկու մասերում կիրառենք A^{-1}-ը՝

$$f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)=A^{-1}(y-y_0)-A^{-1}\alpha\left|x-x_0\right|:$$

Օգտվելով գծային ձևափոխության նորմի 2^0 հատկությունից և (3.5) անհավասարությունից՝ կստանանք

$$\frac{\left|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)-A^{-1}(y-y_0)\right|}{\left|y-y_0\right|}\le\left\|A^{-1}\right\|\cdot\left|\alpha\right|\cdot L$$

գնահատականը, որի աջ մասը ձգտում է զրոյի, երբ $y \to y_0$: Իսկապես. եթե $y \to y_0$, ապա $x \to x_0$, հետևաբար՝ $\alpha \to 0$: Ստացվեց, որ f^{-1} արտապատկերումը y_0 կետում դիֆերենցելի է և

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \left(f'(x_0)\right)^{-1} :$$

Մեզ մնում է ապացուցել թեորեմի 2^0 պնդումը, այն է՝ յուրաքանչյուր $y_0 \in V$ տարրի համար՝

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \to \left(f^{-1}\right)'(y_0) \text{ , երբ } y \to y_0 ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\left(f'(x)\right)^{-1} \to \left(f'(x_0)\right)^{-1} \text{, երբ } x \to x_0 ,$$

ինչը հետևում է հակադարձելի գծային ձևափոխությունների թեորեմից և $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատ դիֆերենցելիությունից:

Հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմն ապացուցված է: ■

Այժմ բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ *հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմը լոկալ բնույթի է*: Նշանակենք՝

$$f(x, y) = \left(e^x \cos y,\ e^x \sin y\right),\ (x, y) \in R^2 :$$

Այս արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է R^2-ում և

$$\det f'(x,y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & -e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 ,$$

սակայն արտապատկերումն ամբողջ R^2-ում հակադարձելի չէ:

<u>3. Անբացահայտ ֆունկցիաներ:</u> Հակադարձ ֆունկցիայի գոյության խնդիրը դիտարկենք մի նոր տեսանկյունից: Եթե $x = g(y): R^n \to R^n$ ֆունկցիան որոշված է $y = b \in R^n$ կետի շրջակայքում և $a = g(b) \in R^n$, ապա որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում գոյություն ունեն a կետի A շրջակայք և b կետի B շրջակայք, այնպիսիք, որ յուրաքանչյուր $x \in A$ կետի համար գոյություն ունի միակ $y \in B$ կետ, այնպիսին, որ $x = g(y)$, երբ $x \in A$ կամ, որ նույնն է՝ $x - g(y) = 0$, երբ $x \in A$: Այս դեպքում կասենք, որ $(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$* կետի շրջակայքում

---

* $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$:

$$x-g(y)=0 \qquad (3.9)$$

հավասարումից y-ը որոշվում է որպես x-ից կախված միարժեք ֆունկցիա: Եթե (3.9)-ում վեկտորների փոխարեն տեղադրենք իրենց կոորդինատները՝ $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_n)$, $g=(g_1,...,g_n)$, ապա կստանանք՝

$$\left.\begin{array}{l} x_1-g_1(y_1,...,y_n)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n-g_n(y_1,...,y_n)=0 \end{array}\right\}: \qquad (3.9')$$

Այժմ (3.9')-ի փոխարեն դիտարկենք ընդհանուր համակարգ.

$$\left.\begin{array}{l} F_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)=0 \end{array}\right\}, \qquad (3.10')$$

որտեղ $F_i:R^{n+m}\to R$, $1\le i\le m$: Այս համակարգը կարելի է գրել նաև վեկտորական տեսքով՝

$$F(x,y)=0, \qquad (3.10)$$

որտեղ $x=(x_1,...,x_n)$, $y=(y_1,...,y_m)$, $F=(F_1,...,F_m)$, $F:R^{n+m}\to R^m$:

Խնդիր է դրվում ստանալ բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում (3.10) հավասարումից y-ը որոշվում է որպես x-ից կախված միարժեք ֆունկցիա (վերը նշված իմաստով):

Թեորեմ 3.2: *Դիցուք՝* $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$, $b=(b_1,...,b_m)\in R^m$,

$F:R^{n+m}\to R^m$ *արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է* $(a,b)=(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m)\in R^{n+m}$ *կետի շրջակայքում,* $F(a,b)=0$ *և*

$$D:=\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{array}\right|_{(a,b)} \ne 0 \quad :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $a\in R^n$ *կետի* A *շրջակայք և* $b\in R^m$ *կետի* B *շրջակայք, այնպիսիք, որ յուրաքանչյուր* $x\in A$ *կետի համար գոյություն ունի միակ* $y\in B$, *որը կնշանակենք* $y=f(x)$, *այնպիսին, որ*

$F(x, f(x)) = 0$, *երբ* $x \in A$*: *Ընդ որում,* f *արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է* A *- ում:*

► Դիտարկենք $H(x, y) = \big(x, F(x, y)\big) =$

$= \big(x_1, ..., x_n, F_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m), ..., F_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)\big)$ բանաձևով որոշվող $H : R^{n+m} \to R^{n+m}$ արտապատկերումը: H արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է $(a, b) \in R^{n+m}$ կետի շրջակայքում, քանզի նրա կոորդինատային ֆունկցիաներն ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Կիրառելով հանրահաշվի դասընթացից մեզ հայտնի Լապլասի թեորեմը՝ համոզվում ենք, որ $\det H'(a, b) = D$: Քանի որ $D \neq 0$, կարող ենք կիրառել հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմը. գոյություն ունեն (a, b) կետը պարունակող U բաց բազմություն և $H(a, b) = (a, 0)$ կետը պարունակող V բաց բազմություն, այնպիսիք, որ $H : U \leftrightarrow V$ արտապատկերումը լինի փոխմիարժեք: Կարող ենք համարել, որ $U = A_1 \times B$, որտեղ $A_1 \subset R^n$ և $B \subset R^m$ բազմությունները համապատասխանաբար a և b կետերը պարունակող բաց բազմություններ են:

Դիտարկենք H ֆունկցիայի հակադարձը՝ $H^{-1}(x, z) = \big(x, K(x, z)\big)$: Քանի որ H -ի հակադարձն անընդհատ դիֆերենցելի է, ուստի $K : V \to B$ արտապատկերումը նույնպես անընդհատ դիֆերենցելի է:

Այժմ դիտարկենք $\pi(x, y) = y$ բանաձևով որոշվող $\pi : R^{n+m} \to R^m$ գծային ձևափոխությունը: Քանի որ $\pi \circ H = F$, ուստի, եթե $(x, z) \in V$, ապա $F\big(x, K(x, z)\big) = F \circ H^{-1}(x, z) = (\pi \circ H) \circ H^{-1}(x, z) = \pi(x, z) = z$:

Այժմ $A \subset A_1$ բազմությունն ընտրենք այնպես, որ $a \in A$ և $A \times \{0\} \subset V$: Քանի որ $(a, 0) \in V$ և V -ն բաց է, ապա դա հնարավոր է: Նշանակենք՝

$$f(x) = K(x, 0), \text{ երբ } x \in A:$$

---

* Այս դեպքում ասում են, որ (3.10) հավասարումից (կամ (3.10′) համակարգից) (a, b) կետի շրջակայքում y -ը որոշվում է որպես x -ից կախված անբացահայտ ֆունկցիա:

Կստանանք՝

$$F(x,f(x)) = F\left(x,K(x,0)\right) = 0,\ x \in A$$

և, որպեսզի համոզվենք, որ կառուցված $f: A \to B$ ֆունկցիան որոնելին է, մնում է նկատել, որ այն միակն է և անընդհատ դիֆերենցելի է: Իսկապես, առաջինը հետևում է H ֆունկցիայի փոխմիարժեքությունից, իսկ երկրորդը՝ K ֆունկցիայի անընդհատ դիֆերենցելիությունից: ■

§4. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

<u>**1. Հարաբերական էքստրեմումներ:**</u> Դիցուք $F: R^3 \to R$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, իսկ $u = f(x,y,z)$ ֆունկցիան որոշված է

$$F(x,y,z) = 0 \tag{4.1}$$

հավասարմանը բավարարող կետերի S բազմության շրջակայքում: Այլ կերպ ասած՝ $u = f(x,y,z)$ ֆունկցիան որոշված է (4.1) հավասարմամբ որոշվող S *մակերևույթն* ընդգրկող մի ինչ որ բաց բազմության վրա: Խնդիր է դրվում հետազոտել f ֆունկցիայի էքստրեմումները S մակերևույթի վրա:

Սահմանում: $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ *կետը կոչվում է f ֆունկցիայի հարաբերական մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $\left|M - M_0\right| < \delta$ պայմանին բավարարող կամայական $M \in S$ կետի համար տեղի ունի $f(M) \le f(M_0)$ $\left(f(M) \ge f(M_0)\right)$ անհավասարությունը:*

Այն դեպքում, երբ $\dfrac{\partial F}{\partial z}(M_0) \ne 0$, անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի համաձայն, գոյություն ունեն $P_0 = (x_0, y_0)$ կետի A շրջակայք և z_0 կետի B շրջակայք, այնպիսիք, որ M_0 կետի $A \times B$ շրջակայքում (4.1) -ը համարժեք է

$$z = \varphi(x,y),\ (x,y) \in A \tag{4.2}$$

հավասարմանը: Այսինքն՝ այս դեպքում S մակերևույթի հավասարումը (M_0 կետի շրջակայքում) տրվում է *բացահայտ տեսքով*: (4.2) հավասարումից տեղադրելով z-ի արժեքը $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի z արգումենտի փոխարեն՝ կստանանք $u = f(x, y, \varphi(x, y))$, $(x, y) \in A$:

Այսինքն՝ $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների հետազոտման խնդիրը $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ կետում հանգում է $u = f(x, y, \varphi(x, y))$ բարդ ֆունկցիայի բացարձակ (սովորական) էքստրեմումների հետազոտմանը $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ կետում:

(4.1) հավասարումը կոչվում է *կապի հավասարում*:

Ընդհանուր դեպքում (4.1)-ի փոխարեն կարող են լինել մի քանի կապի հավասարումներ՝

$$S: \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0 \end{cases}, \tag{4.3}$$

որտեղ $F_i : R^{n+m} \to R$, $1 \le i \le m$: Խնդիր է դրվում հետազոտել $u = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ ֆունկցիայի հարաբերական* էքստրեմումները (4.3) համակարգին բավարարող $M = (x_1, \ldots, x_{n+m})$ կետերի S բազմության վրա:

Ենթադրենք F_i, $1 \le i \le m$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ կետի շրջակայքում և

$$\left. \frac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})} \right|_{M_0} \ne 0 :$$

Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի համաձայն, գոյություն ունեն $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ կետի A շրջակայք և $Q_0 = (x_{n+1}^0, \ldots, x_{n+m}^0)$ կետի B շրջակայք, այնպիսիք, որ M_0 կետի $A \times B$ շրջակայքում (4.3)-ը համարժեք է հետևյալին՝

---

* Նախորդ տերմինները պահպանվում են:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_1,...,x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+m} = \varphi_m(x_1,...,x_n) \end{cases}, \quad P=(x_1,...,x_n)\in A, \tag{4.4}$$

ընդ որում, φ_i, $1\le i\le m$ ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են:

$u=f(x_1,...,x_{n+m})$ ֆունկցիայի $x_{n+1},...,x_{n+m}$ արգումենտների փոխարեն տեղադրենք $x_{n+i}=\varphi_i(x_1,...,x_n)$, $1\le i\le m$ արժեքները: Կստանանք՝

$$u=f(x_1,...,x_n,\varphi_1(x_1,...,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,...,x_n)) =: g(x_1,...,x_n): \tag{4.5}$$

Այսպիսով՝ $u=f(x_1,...,x_{n+m})$ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների հետազոտման խնդիրը հանգում է (4.5) բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումների հետազոտմանը:

<u>**2. Անհրաժեշտ պայմաններ:**</u> Եթե $M_0=(x_1^0,...,x_{n+m}^0)\in S$ կետը հարաբերական էքստրեմումի կետ է և $u=f(x_1,...,x_{n+m})$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է M_0 կետում, ապա (4.5) բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $P_0=(x_1^0,...,x_n^0)$ կետում և P_0-ն (4.5) բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումի կետ է՝

$$dg(P_0)=0:$$

Օգտվելով դիֆերենցիալի ձևի ինվարիանտությունից՝ կստանանք

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n+\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m}\right|_{P_0}=0 \tag{4.6}$$

հավասարությունը: Այնուհետև, (4.4)-ը տեղադրելով (4.3)-ի մեջ, կստանանք հետևյալ նույնությունները՝

$$\begin{cases} F_1(x_1,...,x_n,\varphi_1(x_1,...,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,...,x_n))\equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1,...,x_n,\varphi_1(x_1,...,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,...,x_n))\equiv 0 \end{cases}, \quad P=(x_1,...,x_n)\in A:$$

Դիֆերենցելով այս նույնությունները և օգտվելով դիֆերենցիալի ձևի ինվարիանտությունից՝ կստանանք

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \cdots + \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}dx_{n+1} + \cdots + \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

պայմանները: Այժմ (4.7)-ը դիտարկենք որպես գծային հավասարումների համակարգ $dx_{n+1},\cdots,dx_{n+m}$ փոփոխականների նկատմամբ, որի որոշիչն է՝

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} \end{vmatrix} :$$

Ըստ ենթադրության, այդ որոշիչը M_0 կետում զրո չէ, հետևաբար, (4.7) համակարգից $dx_{n+1},\cdots,dx_{n+m}$ դիֆերենցիալները M_0 կետում արտահայտվում են $dx_1,\cdots,dx_n$ դիֆերենցիալների միջոցով (գծորեն, ըստ Կրամերի բանաձևերի):

$dx_{n+1},\cdots,dx_{n+m}$ դիֆերենցիալների ստացված արժեքները տեղադրելով (4.6)-ի մեջ և կատարելով նման անդամների միացում՝ հանգում ենք

$$A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n = 0$$

հավասարությանը, որտեղ $dx_1,\cdots,dx_n$ դիֆերենցիալներն արդեն անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալներն են: Հետևաբար, նրանց գործակիցները զրո են՝ $A_i = 0$, $1 \le i \le n$:

Այսպիսով, $M_0 = (x_1^0,\ldots,x_{n+m}^0) \in S$ հարաբերական էքստրեմումի կետում պետք է բավարարվեն հետևյալ $n+m$ հատ պայմանները՝

$$\begin{cases} A_i = 0, \ i = 1,2,\ldots,n \\ F_j = 0, \ j = 1,2,\ldots,m \end{cases} : \quad (4.8)$$

3. Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեթոդը: (4.7) համակարգի i -րդ հավասարումը բազմապատկենք λ_i -ով* $\left(1 \le i \le m\right)$ և ստացված հավասարությունները գումարենք (4.6)-ին՝

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right) dx_n +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}}\right) dx_{n+1} + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}}\right) dx_{n+m} = 0 : \qquad (4.9)$$

Այնուհետև, λ_i թվերն ընտրենք այնպես, որ $dx_{n+1},\ldots,dx_{n+m}$ կախյալ դիֆերենցիալների գործակիցները դառնան զրո՝

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad : \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_{n+m}} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} = 0 \end{cases} \qquad (4.10)$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ անհայտների նկատմամբ գծային հավասարումների (4.10) համակարգի որոշիչը զրո չէ, ուստի այն ունի միակ լուծում: Ստացված λ_i արժեքները տեղադրելով (4.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right) dx_1 + \cdots +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right) dx_n = 0$$

հավասարությունը, որտեղ $dx_1,\ldots,dx_n$ դիֆերենցիալներն անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալներն են: Հետևաբար, գծային կոմբինացիայի գործակիցները զրոներ են՝

---

* λ_i թվերն առայժմ անորոշ գործակիցներ են:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots : \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Արդյունքում $M_0 = (x_1^0,...,x_{n+m}^0) \in S$ էքստրեմումի կետի կոորդինատները և $\lambda_1,...,\lambda_m$ անորոշ գործակիցները պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարումներին՝

$$\begin{cases} F_i(x_1,...,x_{n+m}) = 0,\ 1 \le i \le m \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial x_j} = 0,\ 1 \le j \le n+m: \end{cases} \tag{4.11}$$

Այսպիսով, ստացանք $n + 2m$ անհայտով նույնքան հավասարումներ:

(4.11) համակարգին ամփոփ տեսք տալու համար նշանակենք՝ $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$, որը կոչվում է *Լագրանժի ֆունկցիա*: Այդ դեպքում (4.11)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} F_i = 0,\ 1 \le i \le m \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0,\ 1 \le j \le n+m: \end{cases} \tag{4.11'}$$

4. Բավարար պայմաններ: Դիցուք $M_0 \in S$ կետում բավարարվում են հարաբերական էքստրեմումի համար անհրաժեշտ (4.11) պայմանները: Ենթադրենք նաև, որ $u = f(x_1,...,x_{n+m})$ և F_i, $1 \le i \le m$ ֆունկցիաները M_0 կետում կրկնակի (երկու անգամ) դիֆերենցելի են:

Լագրանժի Φ ֆունկցիայի կառուցվածքից երևում է, որ (4.3) կապի հավասարումների առկայության դեպքում f ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումները համընկնում են Φ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների հետ* կամ, որ նույնն է՝

---

* Քանի որ $\Phi(M) - \Phi(M_0) = f(M) - f(M_0),\ M \in S$:

$$\Phi = f\left(x_1,\cdots,x_n,\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i F_i\left(x_1,\cdots,x_n,\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)\right)$$

բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումների հետ:

Հետևաբար, (4.3) կապի հավասարումների առկայության դեպքում f ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների ուսումնասիրման հարցը (M_0 կետում) հանգում է $d^2\Phi(M_0)$ քառակուսային ձևի ուսումնասիրմանը: Այն է. եթե այդ քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, ապա M_0-ն մինիմումի կետ է, իսկ եթե բացասական որոշյալ է, ապա M_0-ն մաքսիմումի կետ է:

Մյուս կողմից՝

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m}\right)^2\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n+1}}d^2x_{n+1}+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial x_{n+m}}d^2x_{n+m}:^{*}$$

(4.11') անհրաժեշտ պայմանների համաձայն, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_j}(M_0)=0$, $1\le j\le n+m$, ուստի

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_{n+m}}dx_{n+m}\right)^2\Phi=\sum_{i,j=1}^{n+m}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j: \qquad (4.12)$$

Այսինքն՝ Φ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը պետք է հաշվել նույն բանաձևով, ինչ որ այն դեպքում, երբ բոլոր $x_1,\ldots,x_{n+m}$ փոփոխականներն անկախ են: Միայն թե այս դեպքում (4.12)-ի մեջ $dx_{n+1},\ldots,dx_{n+m}$ դիֆերենցիալների փոխարեն պետք է տեղադրել նրանց այն արժեքները, որոնք ստացվում են (4.7) համակարգը լուծելիս:

Օրինակներ: ա) Գտնել $u=x_1^2+\cdots+x_m^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումները $x_1+\cdots+x_m-1=0$ կապի առկայությամբ:

---

* $d^2x_{n+1},\cdots,d^2x_{n+m}$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալների գոյությունը հետևում է (4.7) համակարգի լուծման բանաձևերից:

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\Phi = x_1^2 + \cdots + x_m^2 - \lambda(x_1 + \cdots + x_m - 1):$$

Էքստրեմումի անհրաժեշտ (4.11’) պայմանները կլինեն՝

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_m - 1 = 0 \\ 0 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 2x_i - \lambda,\ 1 \le i \le m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{\lambda}{2} - 1 = 0 \\ x_1 = \cdots = x_m = \dfrac{\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{2}{m} \\ x_i = \dfrac{1}{m}, 1 \le i \le m: \end{cases}$$

Միակ ստացիոնար կետն է՝ $M_0 = \left(\dfrac{1}{m}, \cdots, \dfrac{1}{m}\right)$, իսկ այդ կետում

$$d^2\Phi = 2\left[dx_1^2 + \cdots + dx_m^2\right],$$

որը դրական որոշյալ է, հետևաբար, M_0-ն մինիմումի կետ է:

բ) Ապացուցենք միջինների անհավասարությունը՝

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n};\ x_i \ge 0,\ 1 \le i \le n: \tag{4.13}$$

Դիցուք՝ $c > 0$: Դիտարկենք $S_c = \left\{x \in R^n : x_1 + \cdots + x_n = c,\ x_i \ge 0\right\}$ կոմպակտ բազմության վրա որոշված $u = x_1 \cdots x_n$ անընդհատ ֆունկցիան: Եթե u-ն $M_0 = (x_1^0, ..., x_n^0) \in S_c$ կետում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, ապա $x_i^0 > 0$, $1 \le i \le n$*: Հետևաբար, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ M_0 կետի δ շրջակայքում բավարարվում են $x_i > 0$ պայմանները: Ուստի M_0-ն u ֆունկցիայի հարաբերական մաքսիմումի կետ է՝ $F(x_1, \cdots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n - c = 0$ կապի հավասարման առկայությամբ:

M_0 կետը գտնելու համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\Phi = x_1 \cdots x_n - \lambda(x_1 + \cdots + x_n - c)$$

և գրենք էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

---

* Քանի որ $x_i = 0$ պայմանին բավարարող կետերում u-ն ընդունում է 0 արժեքը:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = c \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \dfrac{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_i} - \lambda = 0 \end{cases}:$$

Այս համակարգն ունի մեկ լուծում՝ $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{c}{n}$, ինչը նշանակում է, որ $M_0 = \left(\dfrac{c}{n}, \cdots, \dfrac{c}{n}\right) \in S_c$ կետում u-ն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը: Հետևաբար, $x_1 \cdots x_n \leq \left(\dfrac{c}{n}\right)^n$, երբ $(x_1, \ldots, x_n) \in S_c$: Այստեղ տեղադրելով $c = x_1 + \cdots + x_n$՝ կստանանք (4.13)-ը:

XVII ԳԼՈՒԽ

ԲԱԶՄԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏՈՎ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Զուգահեռանիստի տրոհումները: $A \subset R^k$ բազմությունը կոչվում է *կոորդինատային զուգահեռանիստ կամ զուգահեռանիստ*, եթե այն հետևյալ տեսքի դեկարտյան արտադրյալ է՝

$$A = \left[a^1, b^1\right] \times \left[a^2, b^2\right] \times \cdots \times \left[a^k, b^k\right],\ a^j < b^j,\ 1 \le j \le k:$$

Զուգահեռանիստի *գագաթներ* կոչվում են այն $(c^1, \cdots, c^k)$ կետերը, որոնց համար $c^i = a^i$ կամ $c^i = b^i$, $1 \le i \le k$:

A զուգահեռանիստի $V(A)$ *ծավալը* սահմանվում է

$$V(A) = \prod_{j=1}^{k} \left(b^j - a^j\right)$$

բանաձևով:

A զուգահեռանիստն անվանում են նաև *փակ զուգահեռանիստ*: $\operatorname{int} A =: \overset{0}{A}$ բազմությունը կանվանենք *բաց զուգահեռանիստ*: Բաց զուգահեռանիստի ծավալը սահմանվում է նույն բանաձևով:

$k = 2$ դեպքում կոորդինատային զուգահեռանիստը ուղղանկյուն է, որի կողմերը զուգահեռ են կոորդինատական առանցքներին, իսկ նրա ծավալը այդ ուղղանկյան մակերեսն է:

$k = 3$ դեպքում կոորդինատային զուգահեռանիստը ուղղանկյուն զուգահեռանիստ է, որի նիստերը զուգահեռ են կոորդինատական հարթություններին:

Դիցուք $P_j = \left\{x_0^j, \ldots, x_{n_j}^j\right\}$-ն $\left[a^j, b^j\right]$ հատվածի տրոհում է՝ $a^j = x_0^j < x_1^j < \cdots < x_{n_j}^j = b^j$: $P_1, \cdots, P_k$ տրոհումներով ծնվում է զույգ առ զույգ ընդհանուր ներքին կետ չունեցող «մանր» զուգահեռանիստերի ընտանիք, որոնցից յուրաքանչյուրը տրոհման հատվածների դեկարտյան արտադրյալ է՝

$$A_{i_1\dots i_k}=:\left[x^1_{i_1},x^1_{i_1+1}\right]\times\cdots\times\left[x^k_{i_k},x^k_{i_k+1}\right],\ 0\le i_j\le n_j-1,\ (j=1,2,\dots,k):$$

Տրված $P_1,\cdots,P_k$ տրոհումներից ծնված $\left\{A_{i_1\dots i_k}\right\}$ զուգահեռանիստերի ընտանիքը, իսկ երբեմն նաև $P=(P_1,\cdots,P_k)$ հավաքածուն, անվանում են A զուգահեռանիստի *կանոնական տրոհում*: $\lambda(P)=\max diam\,A_{i_1\dots i_k}$ -ն կոչվում է P *տրոհման տրամագիծ*:

Նշենք ծավալի մի քանի հատկություններ:

1[0]. Զուգահեռանիստի կանոնական տրոհման դեպքում ամբողջ զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է տրոհման զուգահեռանիստերի ծավալների գումարին՝

$$V(A)=\sum_{i_1,\dots,i_k}V(A_{i_1\dots i_k}):$$

▶ Նշանակենք՝ $\Delta x^j_i=x^j_{i+1}-x^j_i$, $1\le j\le k$, $0\le i\le n_j-1$: Այդ դեպքում $b^j-a^j=\Delta x^j_0+\cdots+\Delta x^j_{n_j-1}$, հետևաբար,

$$V(A)=\left(\Delta x^1_0+\cdots+\Delta x^1_{n_1-1}\right)\left(\Delta x^2_0+\cdots+\Delta x^2_{n_2-1}\right)\cdots\left(\Delta x^k_0+\cdots+\Delta x^k_{n_k-1}\right)=$$

$$=\sum_{i_1,\dots,i_k}\Delta x^1_{i_1}\Delta x^2_{i_2}\cdots\Delta x^k_{i_k}=\sum_{i_1,\dots,i_k}V\left(A_{i_1,\dots,i_k}\right):$$

Երկրորդ հավասարությունն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: ■

Այսուհետ տրոհման զուգահեռանիստերը կհամարակալենք պարզ ձևով՝ $A_1,A_2,\dots,A_r$, որտեղ $r=n_1\cdot\ldots\cdot n_k$: Հետագայում համարակալման հերթականությունը դեր չի խաղում:

2[0]. Եթե $C_1,\dots,C_s$ զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ

$$ա)\ A=\bigcup_{i=1}^{s}C_i,\quad բ)\ \overset{0}{C}_i\cap\overset{0}{C}_k=\varnothing,\ i\ne k,$$

ապա $\{C_i\}_1^s$ *ընտանիքը կոչվում է* A *-ի տրոհում*[*]*:*

Այս ընդհանուր տրոհման դեպքում նույնպես տեղի ունի

$$V(A)=\sum_{i=1}^{s}V(C_i)$$

հավասարությունը:

▶ Դիցուք՝ $C_i=\left[a_i^1,b_i^1\right]\times\cdots\times\left[a_i^k,b_i^k\right]$, $1\le i\le s$: Կառուցենք A զուգահեռանիստի $\mathcal{F}=\{A_1,\ldots,A_r\}$ կանոնական տրոհում հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր j -ի, $1\le j\le k$, դեպքում որպես $\left[a^j,b^j\right]$ հատվածի P_j տրոհման կետեր վերցնենք $A,C_1,\ldots,C_s$ զուգահեռանիստերի j -րդ պրոյեկցիաների ծայրակետերը՝ a^j,b^j,a_i^j,b_i^j, $1\le i\le s$ և համարակալենք աճման կարգով:

Այնուհետև նշանակենք՝ $\mathcal{F}_i=\left\{A_p\in\mathcal{F}:A_p\subset C_i\right\}$, $1\le i\le s$: Այդ դեպքում կբավարարվեն հետևյալ պայմանները.

1) $\mathcal{F}_i$ ընտանիքը հանդիսանում է C_i զուգահեռանիստի կանոնական տրոհում, $1\le i\le s$:

2) $\mathcal{F}=\bigcup_{i=1}^{s}\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_i\cap\mathcal{F}_j=\varnothing$, $i\ne j$:

Հետևաբար

$$V(A)=\sum_{i=1}^{r}V(A_i)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{A_p\in\mathcal{F}_i}V(A_p)=\sum_{i=1}^{s}V(C_i):\blacksquare \qquad (1.1)$$

Լրացում 1: Եթե բ) պայմանը չբավարարվի, ապա

$$V(A)<\sum_{i=1}^{s}V(C_i):$$

▶ Իրոք, այս դեպքում (1.1) հավասարություններից երկրորդը կփոխարինվի < անհավասարությամբ: ■

[*] Ոչ կանոնական տրոհում (մասնավոր դեպքում կարող է լինել կանոնական):

Լրացում 2: Եթե A զուգահեռանիստը ծածկված է $U_1,...,U_s$ զուգահեռանիստերի ընտանիքով, ապա

$$V(A) \leq \sum_{i=1}^{s} V(U_i):$$

▶ Նշանակենք՝ $C_i = A \cap U_i$: Այդ դեպքում C_i զուգահեռանիստերը կբավարարեն ա) պայմանին, հետևաբար

$$V(A) \leq \sum_{i=1}^{s} V(C_i) \leq \sum_{i=1}^{s} V(U_i): \blacksquare$$

3^0*. Եթե* $C_1,...,C_p$ *զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ*

$$\text{ա) } C_i \subset A,\ 1 \leq i \leq p, \quad \text{բ) } \overset{0}{C}_i \cap \overset{0}{C}_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

ապա

$$\sum_{i=1}^{p} V(C_i) \leq V(A):$$

Ապացուցվում է 2^0 հատկության պես:

2. Ինտեգրալի սահմանումը և գոյության անհրաժեշտ պայմանը:

Դիցուք տրված է $f: A \to R$ թվային ֆունկցիան: Վերցնենք A զուգահեռանիստի $A_1,..., A_r$ կանոնական տրոհում և դիտարկենք

$$\sigma = \sum_{i=1}^{r} f(\xi_i)V(A_i),\ \xi_i \in A_i$$

գումարը: Այն կոչվում է f ֆունկցիայի (P տրոհմանը և $\xi_1,...,\xi_r$ կետերին համապատասխանող) *ինտեգրալային գումար* (Ռիմանի):

Սահմանում*: $\mathcal{I}$ *թիվը կոչվում է* f *ֆունկցիայի ինտեգրալ, կամ Ռիմանի ինտեգրալ, եթե յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* $\delta > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma - \mathcal{I}| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

---

* Այդ $\mathcal{I}$ թիվը կոչվում է նաև σ ինտեգրալային գումարի սահման և գրվում է՝ $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma = \mathcal{I}$: Սահմանի պարզագույն հատկությունները պահպանվում են նաև այս դեպքում:

(անկախ P տրոհման և ξ_i կետերի ընտրությունից):

Այդ դեպքում f ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի (Ռիմանի իմաստով): f ֆունկցիայի ինտեգրալը գրվում է հետևյալ կերպ՝[*]

$$\mathcal{I}=\int_A f(x)dx \text{ կամ } \mathcal{I}=\overbrace{\int\cdots\int_A}^{k \text{ հատ}} f(x^1,...,x^k)dx^1...dx^k :$$

Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $\mathfrak{R}(A)$-ով:

$n=2$ կամ $n=3$ դեպքերում համապատասխանաբար գրում են՝

$$\mathcal{I}=\iint_A f(x,y)dxdy \text{ կամ } \mathcal{I}=\iiint_A f(x,y,z)dxdydz :$$

Այդ ինտեգրալներից առաջինը կոչվում է *կրկնակի ինտեգրալ*, իսկ երկրորդը՝ *եռակի ինտեգրալ*:

Թեորեմ 1.1: *Ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է:*

▶ Ապացուցվում է ինչպես մեկ փոփոխականի դեպքում: Այն է. եթե f-ը A զուգահեռանիստի վրա անսահմանափակ է, ապա այն անսահմանափակ է տրոհման զուգահեռանիստերից գոնե մեկի վրա՝ թող դա լինի A_1-ը: Այդ դեպքում, հաստատագրելով $\xi_2,...,\xi_r$ կետերը, ξ_1-ը փոփոխելով, $|\sigma|$-ն կարող ենք որքան կամենանք մեծ դարձնել, ինչը հակասում է (1.2)-ին: ■

<u>**3. Դարբուի գումարները:**</u> Դիցուք $f:A\to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է: Նշանակենք՝

$$m_i=\inf_{A_i} f(x),\ M_i=\sup_{A_i} f(x),\ 1\le i\le r ;$$

$$s:=\sum_{i=1}^r m_i V(A_i),\ S:=\sum_{i=1}^r M_i V(A_i) :$$

Այս գումարները համապատասխանաբար կոչվում են *Դարբուի ստորին և վերին գումարներ* (P տրոհման համար):

---

[*] Հաճախ dx-ը չի գրվում՝ $\int_A f$:

Քանի որ $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, $1 \le i \le r$, ապա, այս անհավասարությունները բազմապատկելով $V(A_i)$-ով և իրար գումարելով, կստանանք՝

$$s \le \sigma \le S:$$

Հաստատագրված տրոհման դեպքում s և S գումարները անփոփոխ են, իսկ σ գումարը կարող է փոփոխվել (ξ_i կետերի փոփոխման շնորհիվ): Ընդ որում, երբ $\xi_i \in A_i$ կետը փոփոխվում է, $f(\xi_i)$-ն փոփոխվելով՝ կարող է կամայապես մոտենալ ինչպես m_i-ին, այնպես էլ՝ M_i-ին: Այդ պատճառով σ գումարը կարող է կամայական չափով մոտ լինել թե՛ s-ին, և թե՛ S-ին: Այսինքն՝ *հաստատագրված տրոհման դեպքում s-ը և S-ը հանդիսանում են σ ինտեգրալային գումարների բազմության ճշգրիտ եզրերը*:

I հատկություն: *Տրոհման x_i^s, $0 \le i \le n_i$, $1 \le s \le k$ կետերին նոր կետեր ավելացնելիս (տրոհումը մանրատելիս)՝ Դարբուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ փոքրանալ:*

▶ Ապացուցենք վերին գումարի դեպքը:

Ենթադրենք տրոհման կետերին ավելացնում ենք մեկ կետ՝ $x' \in \left(x_i^{s_0}, x_{i+1}^{s_0}\right)$: Եթե այդ դեպքում A_j զուգահեռանիստը տրոհվի A'_j և A''_j երկու զուգահեռանիստերի, ապա S գումարի մեջ մասնակցող $M_j V(A_j)$ գումարելին կփոխարինվի $M'_j V(A'_j) + M''_j V(A''_j)$ գումարով, որտեղ

$$M'_j = \sup_{A'_j} f(x), \quad M''_j = \sup_{A''_j} f(x):$$

Նկատենք, որ $M'_j \le M_j$, $M''_j \le M_j$: Այս անհավասարություններից առաջինը բազմապատկենք $V(A'_j)$-ով, իսկ երկրորդը՝ $V(A''_j)$-ով և գումարենք ստացված անհավասարությունները: Կստանանք՝

$$M'_j V(A'_j) + M''_j V(A''_j) \le M_j \left(V(A'_j) + V(A''_j)\right) = M_j V(A_j),$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Լրացում: Քանի որ $M_j - M_j'$ և $M_j - M_j''$ տարբերությունները չեն գերազանցում f ֆունկցիայի տատանումն ամբողջ A զուգահեռանիստի վրա, որը կնշանակենք Ω-ով, ապա $M_j V(A_j)$ գումարելու փոքրացման չափը չի գերազանցի $\Omega V(A_j)$ թիվը:

Փոքրացման ամբողջ չափը գնահատելու համար պետք է հաշվել բոլոր տրոհված A_j զուգահեռանիստերի ծավալների գումարը, որը կլինի

$$\left(x_{i+1}^{s_0} - x_i^{s_0}\right)\prod_{\substack{s=1 \\ s\neq s_0}}^{k}\left(b^s - a^s\right):$$

Հետևաբար, տրոհման կետերին մեկ կետ ավելացնելիս, Դարբուի վերին գումարի փոքրացման չափը չի գերազանցի

$$\Omega\lambda d^{k-1}$$

թիվը, որտեղ $d = \max\limits_s\left(b^s - a^s\right)$:

II հատկություն: *Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումար չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը:*

Այս և հաջորդ պնդումներն ապացուցվում են այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում:

Այնուհետև, նշանակելով $\mathcal{I}_* = \sup\{s\}$, $\mathcal{I}^* = \inf\{S\}$, կունենանք՝

$$s \le \mathcal{I}_* \le \mathcal{I}^* \le S:$$

$\mathcal{I}_*$ և $\mathcal{I}^*$ թվերը կոչվում են *Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալներ* և համապատասխանաբար նշանակում են նաև

$$\underline{\int_A} f(x)dx \text{ և } \overline{\int_A} f(x)dx$$

սիմվոլներով:

Թեորեմ 1.2: *Ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0:$$

Թեորեմ 1.3 (Դարբուի թեորեմը): *Յուրաքանչյուր* $f: A \to R$ *սահմանափակ ֆունկցիայի համար՝*

$$\lim_{\lambda \to 0} s = \mathcal{I}_*, \quad \lim_{\lambda \to 0} S = \mathcal{I}^* :$$

Հետևանք 1: *Որպեսզի սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$ *:*

Հետևանք 2: *Որպեսզի սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունենա* A *զուգահեռանիստի* P *տրոհում, այնպիսին, որ*

$$S - s < \varepsilon :$$

§2. ԼԵԲԵԳԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

1. Ֆունկցիայի տատանում կետում: Դիցուք՝ $E \subset R^n$, $f: E \to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է, և $a \in E \cup E' = \overline{E}$: Յուրաքանչյուր $\delta > 0$ թվի համար նշանակենք՝

$$o(f, a, \delta) = \sup_{\substack{|x-a|<\delta \\ |y-a|<\delta}} |f(x) - f(y)| :$$

Քանի որ $0 < \delta_1 < \delta_2$ պայմանից հետևում է, որ $o(f, a, \delta_1) \le o(f, a, \delta_2)$, ուրեմն $o(f, a, \delta)$-ն, որպես δ-ի ֆունկցիա, աճող է և ներքևից սահմանափակ է (0-ով): Հետևաբար, գոյություն ունի

$$\lim_{\delta \to 0} o(f, a, \delta)$$

վերջավոր սահմանը, որն էլ կոչվում է f *ֆունկցիայի տատանում* a *կետում* և նշանակվում է $o(f, a)$ սիմվոլով:

Թեորեմ 2.1: *Որպեսզի* f *ֆունկցիան* $a \in E$ *կետում լինի անընդհատ*[*], *անհրաժեշտ է և բավարար, որ* $o(f, a) = 0$:

---

[*] $a \in E' \setminus E$ դեպքում թեորեմը կձևակերպվի այսպես. որպեսզի գոյություն ունենա $\lim_{x \to a} f(x)$ վերջավոր սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $o(f, a) = 0$:

▶ *Անհրաժեշտություն:* f ֆունկցիան անընդհատ է $a \in E$ կետում, նշանակում է՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$, որի արդյունքում՝

$$\left.\begin{array}{l} |x-a| < \delta \\ |y-a| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon :$$

Հետևաբար՝ $o(f,a,\delta) < \varepsilon$, ուստի կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար՝ $0 \le o(f,a) \le \varepsilon$: Այստեղից հետևում է, որ $o(f,a) = 0$:

Բավարարություն: $o(f,a) = 0$ պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_0 > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $o(f,a,\delta_0) < \varepsilon$: Հետևաբար՝

$$\left.\begin{array}{l} |x-a| < \delta_0 \\ |y-a| < \delta_0 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon :$$

Վերցնելով $y = a$ ՝ կստանանք.

$$|x-a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon ,$$

ինչը նշանակում է, որ f ֆունկցիան անընդհատ է a կետում: ■

Նշանակենք՝ $B_\varepsilon = \left\{x \in \overline{E} : o(f,x) \ge \varepsilon\right\}$, $\varepsilon > 0$:

Թեորեմ 2.2: B_ε *-ը փակ բազմություն է՝* $B'_\varepsilon \subset B_\varepsilon$ *:*

▶ Ապացուցենք, որ եթե $x \notin B_\varepsilon$ ($x \in \overline{E}$), ապա $x \notin B'_\varepsilon$: $x \notin B_\varepsilon$ պայմանը նշանակում է, որ $o(f,x) < \varepsilon$, հետևաբար, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $o(f,x,\delta) < \varepsilon$:

Ցույց տանք, որ $B(x,\delta)$ գնդում B_ε -ի կետ չկա: Եթե $|x_1 - x| = \delta_1 < \delta$, ապա $B(x, \delta - \delta_1) \subset B(x,\delta)$, հետևաբար

$$o(f, x_1, \delta - \delta_1) \le o(f,x,\delta) < \varepsilon :$$

Այսինքն՝ $o(f,x_1) < \varepsilon$: Որեմն՝ $x_1 \notin B_\varepsilon$: ■

Թեորեմ 2.3 (Կանտորի ընդհանրացված թեորեմը): *Եթե* $K \subset R^n$ *բազմությունը կոմպակտ է և* $f : K \to R$ *սահմանափակ ֆունկցիան այնպիսին է, որ* $o(f, x) < \varepsilon_0$, $x \in K$, *որտեղ* ε_0 *-ն հաստատագրված դրական թիվ է, ապա գոյություն ունի* $\delta > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_0 :$$

Ապացուցվում է նույն կերպ, ինչպես Կանտորի դասական թեորեմը:

Հետևանք: *Եթե* $o(f, x) < \varepsilon_0$, $x \in K$, *ապա գոյություն ունի* $\delta > 0$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\left.\begin{array}{l} E \subset K \\ diam\, E < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_E(f) \le \varepsilon_0 ,$$

որտեղ $\omega_E(f)$ *-ը* f *-ի տատանումն է* E *-ի վրա:*

2. Զրո չափի և զրո ծավալի բազմություններ:

Սահմանում: $E \subset R^n$ *բազմությունը կոչվում է 0 չափի բազմություն, եթե յուրաքանչյուր* $\varepsilon > 0$ *թվի համար գոյություն ունի* $U_1, U_2, \ldots$ *զուգահեռանիստերի** *վերջավոր կամ հաշվելի ընտանիք, այնպիսին, որ*

$$ա)\ E \subset \bigcup_i U_i ,\quad բ)\ \sum_i V(U_i) < \varepsilon : \qquad (2.1)$$

Եթե E *-ն 0 չափի է, ապա կգրենք՝* $m(E) = 0$ *:*

Թեորեմ 2.4: *Վերջավոր կամ հաշվելի բազմությունը 0 չափի է:*

► Ապացուցենք թեորեմն այն դեպքում, երբ E -ն հաշվելի է՝

$$E = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\} :$$

Կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար վերցնենք x_i կետը պարունակող U_i զուգահեռանիստ, այնպիսին, որ $V(U_i) < \dfrac{\varepsilon}{2^i}$, $i = 1, 2, \ldots$: Այդ դեպքում կբավարարվեն (2.1) պայմանները: ■

Թեորեմ 2.5: *Հաշվելի թվով 0 չափի բազմությունների միավորումը 0 չափի է՝*

---

* Փակ կամ բաց:

$$E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\ ,\ \ m(E_i)=0 \Rightarrow m(E)=0\ :$$

▶ Քանի որ $m(E_i)=0$, $i=1,2,...$, ապա ամեն մի $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $U_{i1},U_{i2},...$ զուգահեռանիստերի հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\text{ա) } E_i\subset\bigcup_j U_{ij}\ ,\ \text{բ) } \sum_j V(U_{ij})<\frac{\varepsilon}{2^i}\ :$$

Այդ դեպքում $\{U_{ij}\}$ հաշվելի ընտանիքը ծածկում է E-ն և $\sum_{i,j}V(U_{ij})<\varepsilon$: ■

Սահմանում: *$E\subset R^n$ բազմությունը կոչվում է 0 ծավալի, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $U_1,...,U_m$ զուգահեռանիստերի վերջավոր ընտանիք, այնպիսին, որ*

$$\text{ա) } E\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i\ ,\ \ \text{բ) } \sum_{i=1}^{m}V(U_i)<\varepsilon\ : \qquad (2.2)$$

Եթե E բազմությունը 0 ծավալի է, ապա կգրենք՝ $V(E)=0$:

0 ծավալի բազմությունը նաև 0 չափի է: Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ: Օրինակ. վերցնենք՝ $n=1$ և E-ով նշանակենք $[0,1]$ հատվածի ռացիոնալ կետերի բազմությունը: Այդ դեպքում E-ն հաշվելի է և, հետևաբար, 0 չափի է:

Այժմ, եթե $U_i=[\alpha_i,\beta_i]$, $i=1,...,m$ հատվածները ծածկում են E-ն, ապա նրանք կծածկեն[*] ամբողջ $[0,1]$-ը, քանի որ $\overline{E}=[0,1]$: Հետևաբար՝ $\chi_{[0,1]}(x)\le\sum_{i=1}^{m}\chi_{[\alpha_i,\beta_i]}(x)$: Այստեղից կստանանք՝

$$1=\int_0^1\chi_{[0,1]}(x)dx\le\int_0\sum_i\chi_{[\alpha_i,\beta_i]}(x)dx=\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-\alpha_i)=\sum_{i=1}^{m}V(U_i),$$

---

[*] $\bigcup_{i=1}^{m}U_i$ -ն փակ բազմություն է և $E\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i$, հետևաբար, $\overline{E}\subset\bigcup_{i=1}^{m}U_i$:

ինչը հակասում է (2.2)-ին:

Թեորեմ 2.6: *0 չափի կոմպակտ բազմությունը նաև 0 ծավալի է:*

▶ Այս թեորեմը բխում է Բորելի լեմմայից: Իրոք, եթե $U_1, U_2, \ldots$ բաց զուգահեռանիստերը բավարարում են (2.1) պայմաններին, ընդ որում, E -ն կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{n_i} :$$

Բացի դրանից, $\sum_{i=1}^{m} V(U_{n_i}) \le \sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \varepsilon$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

3. Լեբեգի թեորեմը:

Սահմանում: *Դիցուք՝* $X_0 \subset X \subset R^n$ *: Եթե* $f : X \to R$ *ֆունկցիան* $X \setminus X_0$ *բազմության վրա բավարարում է որոշակի պայմանի և* $m(X_0) = 0$, *ապա ասում են, որ* f *-ը նշված պայմանին բավարարում է* X *-ի վրա համարյա ամենուրեք:*

Թեորեմ 2.7 (Լեբեգ): *Դիցուք* A *-ն* R^n *-ում ընկած փակ զուգահեռանիստ է: Որպեսզի* $f : A \to R$ *սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի* A *-ի վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ* f *-ը* A *-ի վրա լինի համարյա ամենուրեք անընդհատ:*

▶ *Բավարարություն:* f -ի խզման կետերի բազմությունը նշանակենք B -ով: Այն զրո չափի է՝ $m(B) = 0$: Նշանակենք՝ $B_\varepsilon = \{x \in A : o(f, x) \ge \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$: B_ε -ը ևս 0-չափի է՝ $m(B_\varepsilon) = 0$:

Մյուս կողմից, B_ε -ը փակ և սահմանափակ բազմություն է, այսինքն՝ կոմպակտ բազմություն է, հետևաբար, այն 0-ծավալի է՝ $V(B_\varepsilon) = 0$: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $U_1, \ldots, U_m$ բաց զուգահեռանիստեր, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } B_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i \,, \qquad \text{բ) } \sum_{i=1}^{m} V(U_i) < \varepsilon : \qquad (2.3)$$

Նշանակենք՝ $K = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_i \right) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{m} U_i \right)^c$ ։

Քանի որ $\bigcup_{i=1}^{m} U_i$ բազմությունը բաց է, ապա նրա լրացումը փակ է։ Հետևաբար, K-ն փակ է և սահմանափակ, այսինքն՝ կոմպակտ է։

Բացի դրանից, $o(f,x) < \varepsilon$, $x \in K$։ Կանտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} E \subset K \\ diam\, E < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_E(f) < \varepsilon \text{ ։} \tag{2.4}$$

Այժմ կառուցենք A զուգահեռանիստի $A_1, \ldots, A_r$ տրոհումն այնպես, որ $diam\, A_i < \delta$, $i = 1, \ldots, r$ և բավարարվի* հետևյալ պայմանը.

կամ՝ $A_i \subset \overline{U}_j$, որևէ j-ի դեպքում, կամ՝ $A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} U_j \right) = \varnothing$ ($A_i \subset K$)։

Առաջին խմբի տրոհման զուգահեռանիստերի բազմությունը նշանակենք $\mathscr{F}_1$-ով, իսկ երկրորդ խմբինը՝ $\mathscr{F}_2$-ով։

Այսպես կառուցված P տրոհման համար կունենանք՝

$$S - s = \sum_{i=1}^{r} (M_i - m_i) V(A_i) = \sum_{A_i \in \mathscr{F}_1} \omega_{A_i}(f) V(A_i) + \sum_{A_i \in \mathscr{F}_2} \omega_{A_i}(f) V(A_i) \text{ ։}$$

Այստեղ առաջին գումարը կգնահատենք (2.3)-ի օգնությամբ, իսկ երկրորդը՝ (2.4)-ի։ (2.3)-ի համաձայն, առաջին գումարը չի գերազանցի $\Omega\varepsilon$-ը, որտեղ Ω-ն f-ի տատանումն է ամբողջ A-ի վրա։ Իսկ երկրորդ գումարը, (2.4)-ի համաձայն, չի գերազանցի $\varepsilon \cdot V(A)$-ն։ Հետևաբար, P տրոհման համար՝

$$S - s \le \varepsilon \left[\Omega + V(A) \right] \text{ ։}$$

---

* Դրա համար բավական է, որ U_j զուգահեռանիստերի գագաթների կոորդինատները ընդգրկվեն տրոհման կետերի բազմության մեջ։

Դարբուի թեորեմի երկրորդ հետևանքի համաձայն (§1, թեորեմ 1.3), $f \in \Re(A)$: Բավարարության ապացույցն ավարտվեց:

Անհրաժեշտություն: Ցույց տանք, որ եթե $f \in \Re(A)$, ապա f -ի խզման կետերի B բազմությունը 0-չափի է:

Քանի որ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$, ապա բավական է ապացուցել, որ

$$m\left(B_{1/n}\right) = 0, \; n = 1,2,...:$$

Վերցնենք՝ $n = n_0$ և կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Այդ դեպքում $f \in \Re(A)$ պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի $A_1,..., A_r$ տրոհում, այնպիսին, որ

$$S - s = \sum_{i=1}^{r} \omega_{A_i}(f) V(A_i) < \frac{\varepsilon}{n_0}:$$

Նշանակենք $\mathcal{F}$ -ով այն A_i -երի բազմությունը, որոնք բավարարում են $\operatorname{int} A_i \cap B_{1/n_0} \neq 0$ պայմանին: Այդ դեպքում՝ $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \omega_{A_i}(f) \geq \dfrac{1}{n_0}$:

Հետևաբար՝ $\dfrac{1}{n_0} \sum_{A_i \in \mathcal{F}} V(A_i) \leq \sum_{A_i \in \mathcal{F}} \omega_{A_i}(f) V(A_i) < \dfrac{\varepsilon}{n_0}$, այսինքն՝

$$\sum_{A_i \in \mathcal{F}} V(A_i) < \varepsilon: \tag{2.5}$$

Քանի որ $\bigcup_{A_i \in \mathcal{F}} A_i$ բազմությունից դուրս ընկած B_{1/n_0} -ի կետերը A_i -երի եզրային կետեր են, իսկ A_i -երի բոլոր եզրային կետերի բազմությունը 0-չափի է, ապա (2.5)-ից հետևում է, որ $m\left(B_{1/n_0}\right) = 0$: Թեորեմն ապացուցված է: ■

§3. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Ինտեգրալի՝ հավասարությունով արտահայտվող հատկությունները:

Թեորեմ 3.1: *Եթե* $f, g \in \Re(A)$, *ապա*

ա) $f \pm g$, αf, $f \cdot g$, $|f| \in \Re(A)$, բ) $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$ և $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$:

Ապացուցվում է այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում (ա) պնդումը բխում է նաև Լեբեգի թեորեմից):

Թեորեմ 3.2: *Եթե* $C_1,....,C_s$ *զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ* $A = \bigcup_{j=1}^{s} C_j$ *և* $\overset{0}{C}_j \cap \overset{0}{C}_i = \varnothing$, $j \neq i$ * *և* $f \in \Re(A)$, *ապա*

ա) $f \in \Re(C_j)$, $j = 1,...,s$,

բ) $\int_A f = \sum_{j=1}^{s} \int_{C_j} f$:

▶ ա) պնդումը բխում է Լեբեգի թեորեմից: բ) պնդումն ապացուցելու համար A զուգահեռանիստը տրոհենք այնպես, որ յուրաքանչյուր A_i, $1 \le i \le r$ տրոհման զուգահեռանիստ պատկանի $C_1,...,C_s$ զուգահեռանիստերից որևէ մեկին: Այնուհետև այդ P տրոհմանը համապատասխանող ինտեգրալային գումարը տրոհենք հետևյալ կերպ՝

$$\sigma(f,P) = \sum_{A_i \subset C_1} f(\xi_i) V(A_i) + \cdots + \sum_{A_i \subset C_s} f(\xi_i) V(A_i) : \qquad (3.1)$$

Եթե $\lambda(P) \to 0$, ապա $\sigma \to \int_A f$, իսկ (3.1) հավասարության աջ կողմի գումարները կձգտեն բ) հավասարության աջ կողմի ինտեգրալներին, և կստանանք բ) հավասարությունը: ■

Թեորեմ 3.3: *Եթե* $f, g \in \Re(A)$ *և* $f(x) = g(x)$ A*-ի վրա համարյա ամենուրեք, ապա*

$$\int_A f = \int_A g : \qquad (3.2)$$

▶ Քանի որ A_i, $1 \le i \le r$ տրոհման (փակ) զուգահեռանիստերը 0 ծավալի (հետևաբար, 0 չափի) չեն, ապա $\xi_i \in A_i$ կետերը կարող ենք ընտրել

---

* Այս դեպքում նույնպես ասում են, որ $\{C_j\}$ զուգահեռանիստերը կազմում են A զուգահեռանիստի տրոհում:

այնպես, որ $f(\xi_i)=g(\xi_i)$, $1\le i\le r$: Այդ դեպքում $\sigma(f,P)=\sigma(g,P)$: λ-ն ձգտեցնելով 0-ի, կստանանք (3.2)-ը: ■

2. Ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները:

Թեորեմ 3.4: *Եթե* $f\in\Re(A)$ *և* $f(x)\ge 0$, $x\in A$, *ապա* $\int\limits_A f\ge 0$:

▶ Այս դեպքում $\sigma(f,P)\ge 0$: Անցնելով սահմանի՝ կստանանք պահանջվող անհավասարությունը: ■

Հետևանք: *Եթե* $f,g\in\Re(A)$ *և* $f(x)\le g(x)$, $x\in A$, *ապա*

$$\int\limits_A f\le\int\limits_A g :$$

▶ Քանի որ $g(x)-f(x)\ge 0$, ապա թեորեմ 3.4-ի համաձայն,

$$0\le\int\limits_A (g-f)=\int\limits_A g-\int\limits_A f : ■$$

Թեորեմ 3.5: *Եթե* $f\in\Re(A)$, $f(x)\ge 0$, $x\in A$ *և* $\int\limits_A f=0$, *ապա* $f(x)=0$ A*-ի վրա համարյա ամենուրեք:*

▶ Նշանակենք՝ $E_n=\left\{x\in A: f(x)\ge\dfrac{1}{n}\right\}$, $E=\{x\in A: f(x)>0\}$: Այդ դեպքում $E=\bigcup\limits_n E_n$, ուստի բավական է ապացուցել, որ E_n-ը 0 չափի է:

Քանի որ ըստ Դարբուի թեորեմի՝ $\lim\limits_{\lambda\to 0}S=\int\limits_A f=0$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի P տրոհում, այնպիսին, որ $S<\dfrac{\varepsilon}{n}$:

Նշանակենք F-ով այն i ինդեքսների բազմությունը, որոնց համար՝ $A_i\cap E_n\ne\varnothing$: Այդ դեպքում՝ $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i\in F}V(A_i)\le\sum\limits_{i\in F}M_iV(A_i)\le S<\dfrac{\varepsilon}{n}$, հետևաբար $\sum\limits_{i\in F}V(A_i)<\varepsilon$: ■

Թեորեմ 3.6: *Եթե* $f\in\Re(A)$ *և* $m\le f(x)\le M$, $x\in A$, *ապա*

$$mV(A)\le\int_A f\le MV(A):$$

▶ Ըստ թեորեմ 3.4-ի հետևանքի՝

$$mV(A)=\int_A m\le\int_A f(x)\le\int_A M=MV(A): \blacksquare$$

Թեորեմ 3.7: *Եթե* $f\in\Re(A)$, *ապա ա)* $|f|\in\Re(A)$, *բ)* $\left|\int_A f\right|\le\int_A|f|:$

▶ ա) պնդումը հետևում է Լեբեգի թեորեմից: բ)-ի համար ունենք՝

$$\left|\sum_{i=1}^{r}f(\xi_i)V(A_i)\right|\le\sum_{i=1}^{r}|f(\xi_i)|V(A_i):$$

Անցնելով սահմանի, երբ $\lambda\to 0$, կստանանք բ)-ն: ■

Հետևանք: *Եթե* $|f(x)|\le L$, $x\in A$, *ապա* $\left|\int_A f\right|\le LV(A):$

<u>**3. Միջին արժեքի թեորեմները:**</u>

Թեորեմ 3.8: *Եթե* $f\in\Re(A)$, *իսկ* m *-ը և* M *-ը* f *-ի ճշգրիտ եզրերն են* A *զուգահեռանիստի վրա, ապա գոյություն ունի* $\mu\in[m,M]$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_A f=\mu\cdot V(A):$$

▶ Թեորեմ 3.6-ի համաձայն՝ $mV(A)\le\int_A f\le MV(A)$: Քանի որ $V(A)>0$, ապա $m\le\frac{1}{V(A)}\int_A f\le M$: Նշանակելով $\mu:=\frac{1}{V(A)}\int_A f$, կստանանք պահանջվող արդյունքը: ■

Լրացում: *Եթե* $f\in C(A)$, *ապա գոյություն ունի* $\xi\in A$ *կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_A f=f(\xi)V(A):$$

▶ Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, m-ը և M-ը ֆունկցիայի արժեքներ են: Այնուհետև, Բոլցանո - Կոշիի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $\mu \in [m,M]$ թիվը ևս ֆունկցիայի արժեք է, այսինքն՝ գոյություն ունի $\xi \in A$, այնպիսին, որ $f(\xi) = \mu$: ■

Թեորեմ 3.9: *Եթե $f, g \in \Re(A)$, m-ը և M-ը f-ի ճշգրիտ եզրերն են, իսկ g-ն իր նշանը չի փոխում, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m,M]$ թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_A fg = \mu \int_A g : \tag{3.3}$$

▶ Ապացուցենք $g(x) \geq 0$, $x \in A$ դեպքում:

$$m \leq f(x) \leq M$$

անհավասարությունը բազմապատկելով $g(x)$-ով՝ կստանանք

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) :$$

Թեորեմ 3.4-ի հետևանքի համաձայն՝

$$m\int_A g(x) \leq \int_A f(x)g(x) \leq M\int_A g(x) : \tag{3.4}$$

Այստեղ դիտարկենք երկու դեպք՝ ա) $\int_A g = 0$, բ) $\int_A g > 0$:

ա) դեպքում (3.4)-ից հետևում է, որ $\int_A fg = 0$, հետևաբար, այս դեպքում (3.3)-ը ճիշտ է ցանկացած $\mu \in [m,M]$ թվի համար:

բ) դեպքում (3.4)-ը բաժանելով $\int_A g$-ի վրա՝ կստանանք

$$m \leq \frac{\int_A fg}{\int_A g} \leq M$$

անհավասարությունները: Ստացված կոտորակը նշանակելով μ-ով՝ կհանգենք պահանջվող արդյունքին: ■

Լրացում: *Եթե* $f\in C(A)$, *ապա գոյություն ունի* $\xi\in A$ *կետ, այնպիսին, որ*

$$\int_A fg = f(\xi)\int_A g :$$

Ապացուցվում է նախորդ լրացման պես:

§4. ՖՈՒԲԻՆԻ ԹԵՈՐԵՄԸ

Նախ թեորեմը ձևակերպենք մասնավոր դեպքերում:

Դիցուք ունենք $A=[a,b]$ և $B=[c,d]$ թվային առանցքի հատվածները ու $f\in C(A\times B)$: Այդ դեպքում՝

$$\iint_{A\times B} f(x,y)dxdy=\int_A\left\{\int_B f(x,y)dy\right\}dx=\int_B\left\{\int_A f(x,y)dx\right\}dy :$$

Եթե f-ը անընդհատ չէ, այլ ընդամենը՝ $f\in\Re(A\times B)$, ձևավոր փակագծերի մեջ գրված ինտեգրալների գոյությունը հավաստի չէ: Այս դեպքում այդ ինտեգրալները փոխարինվում են Դարբուի ստորին կամ վերին ինտեգրալներով: Դրանք նշանակենք հետևյալ սիմվոլներով՝

$$\mathcal{I}_*(x)=\underline{\int_B} f(x,y)dy\,; \qquad \mathcal{I}^*(x)=\overline{\int_B} f(x,y)dy :$$

Թեորեմ 4.1: *Եթե* $f\in\Re(A\times B)$, *ապա* $\mathcal{I}_*,\mathcal{I}^*\in\Re(A)$ *և*

$$\iint_{A\times B} f(x,y)dxdy=\int_A \mathcal{I}_*(x)dx=\int_A \mathcal{I}^*(x)dx\,,$$

ընդ որում, A*-ի և* B*-ի դերերը կարելի է փոխել:*

Հիմա թեորեմը ձևակերպենք ընդհանուր դեպքում:

Դիցուք տրված են $A\subset R^n$, $B\subset R^m$ զուգահեռանիստերը և $\mathcal{I}_*(x)=\underline{\int_B} f(x,y)dy$, $\mathcal{I}^*(x)=\overline{\int_B} f(x,y)dy$:

Թեորեմ 4.2 (Ֆուբինի): *Դիցուք՝*

$f\in\Re(A\times B)$ *և* $\mathcal{I}_*(x)\le F(x)\le\mathcal{I}^*(x),\ x\in A$ *: Այդ դեպքում* $F\in\Re(A)$ *և*

$$\int_{A\times B} f = \int_A F :$$

▶ Վերցնենք A զուգահեռանիստի որևէ P_A տրոհում, որի համապատասխան տրոհման զուգահեռանիստերն են՝ $A_1,\dots,A_\ell$ և՝ B զուգահեռանիստի P_B տրոհում, որի համապատասխան զուգահեռանիստերն են՝ $B_1,\dots,B_k$: Այդ դեպքում $A\times B\subset R^{n+m}$ զուգահեռանիստի $P=(P_A,P_B)$ տրոհման զուգահեռանիստերը կլինեն $A_i\times B_j$, $1\le i\le \ell$, $1\le j\le k$ զուգահեռանիստերը:

Նախ ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը

$$s(f,P)\le \sum_{i=1}^{\ell}\mathcal{I}_*(\xi_i)V(A_i)=:\sigma(\mathcal{I}_*,P_A,\xi)\,, \tag{4.1}$$

որտեղ $s(f,P)$-ն f ֆունկցիայի Դարբուի ստորին գումարն է ըստ P տրոհման, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_\ell)$, $\xi_i\in A_i$, $1\le i\le \ell$:

Նշանակենք՝ $m_{ij}=\inf\limits_{A_i\times B_j} f$:

Քանի որ $V(A_i\times B_j)=V(A_i)V(B_j)$, ապա

$$s(f,P)=\sum_{i,j}m_{ij}V(A_i\times B_j)\le \sum_{i=1}^{\ell}\left\{\sum_{j=1}^{k}\inf_{y\in B_j}f(\xi_i,y)V(B_j)\right\}V(A_i)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\ell}\left\{s(f(\xi_i,y),P_B)\right\}V(A_i)\le \sum_{i=1}^{\ell}\mathcal{I}_*(\xi_i)V(A_i):$$

Քանի որ $s(\mathcal{I}_*,P_A)=\inf\limits_{\xi}\sigma(\mathcal{I}_*,P_A,\xi)$, $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_\ell)$, ապա (4.1)-ից հետևում է $s(f,P)\le s(\mathcal{I}_*,P_A)$ անհավասարությունը (քանի որ (4.1)-ը ճիշտ է ξ_i կետերի կամայական ընտրության դեպքում):

Այնուհետև գրենք անհավասարությունների հետևյալ շղթան՝

$$s(f,P)\le s(\mathcal{I}_*,P_A)\le s(F,P_A)\le S(F,P_A)\le S(\mathcal{I}^*,P_A)\le S(f,P)\,,$$

որտեղ վերջին անհավասարությունն ապացուցվում է (4.1)-ի պես:

Այստեղից կստանանք՝

$$s(f,P) \le s(F,P_A) \le \underline{\int_A} F \le \overline{\int_A} F \le S(F,P_A) \le S(f,P):$$

Մյուս կողմից, $\int\limits_{A\times B} f$ -ը միակ թիվն է, որը բավարարում է

$$s(f,P) \le \int\limits_{A\times B} f \le S(f,P)$$

անհավասարություններին (բոլոր տրոհումների դեպքում), ուստի $F \in \Re(A)$ և

$$\int\limits_{A\times B} f = \int\limits_A F: \blacksquare$$

Հետևանք 1: *Եթե* $f \in \Re(A\times B)$, *ապա* $\mathcal{I}_*(x) = \mathcal{I}^*(x)$ A*-ի վրա համարյա ամենուրեք*[*]*:*

▶ Ֆուբինիի թեորեմի մեջ որպես F վերցնելով մի դեպքում $\mathcal{I}_*$-ը, մյուս դեպքում՝ $\mathcal{I}^*$-ը, կստանանք $\int\limits_A \mathcal{I}_*(x)dx = \int\limits_A \mathcal{I}^*(x)dx$ հավասարությունը: Հետևաբար,

$$\int\limits_A (\mathcal{I}^* - \mathcal{I}_*) = 0:$$

Թեորեմ 3.5-ի համաձայն, $\mathcal{I}^*(x) - \mathcal{I}_*(x) = 0$, A-ի վրա համարյա ամենուրեք: ■

Ֆուբինիի թեորեմի եզրակացությունը կարելի է գրել նաև այլ տեսքով՝

$$\iint\limits_{A\times B} f = \int\limits_A \left\{ \int\limits_B f(x,y)dy \right\} dx:$$

Հետևանք 2: *Եթե* A*-ն* R^n*-ում ընկած զուգահեռանիստ է և* $f \in \Re(A)$*,* *ապա*

---

[*] *Սա նշանակում է, որ* $\int\limits_B f(x,y)dy$ *ինտեգրալը գոյություն ունի* A*-ի վրա համարյա ամենուրեք:*

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n\ \text{հատ}}_{A} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1,...,x_n)dx_n\ ,$$

եթե միայն բոլոր ինտեգրալները գոյություն ունեն:

Սա ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

§5. ԶԱՓԵԼԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՄԲ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Ժորդանի իմաստով չափելի բազմություններ:

Սահմանում: $C \subset R^n$ *սահմանափակ բազմությունը կոչվում է Ժորդանի իմաստով չափելի բազմություն, կամ կարճ՝* J *-չափելի, եթե նրա եզրը՝* ∂C *-ն, 0 ծավալի է: Ժորդանի իմաստով չափելի բազմությունների դասը կնշանակենք* J *-ով* [*]*:*

Դիտարկենք C բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան՝

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, x \in C \\ 0, x \notin C \end{cases} : R^n \to \{0,1\} :$$

Թեորեմ 5.1: χ_C *ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը* ∂C *-ն է:*

► Եթե $x_0 \in \overset{0}{C}$, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(x_0,\delta) \subset C$: Հետևաբար χ_C ֆունկցիան x_0 կետի շրջակայքում հաստատուն է, ուստի այն x_0 կետում անընդհատ է:

Եթե $x_0 \in \partial C$, ապա կամայական $\delta > 0$ թվի համար $B(x_0,\delta)$ գնդում կան կետեր թե՛ C -ից, և թե՛ C -ի լրացումից: Այսինքն՝ գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in B(x_0,\delta)$ կետեր, այնպիսիք, որ $\chi_C(x_1) = 1$, $\chi_C(x_2) = 0$: Հետևաբար, χ_C ֆունկցիան x_0 կետում խզվում է:

Եթե x_0 -ն C բազմության արտաքին կետ է (C -ի լրացման ներքին կետ է), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(x_0,\delta) \subset R^n \setminus C$:

---

[*] Ապացուցեք, որ J -ն օղակ է՝ $C_1, C_2 \in J \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in J$, $C_1 \setminus C_2 \in J$:

Հետևաբար, $\chi_C(x)=0$, $x\in B(x_0,\delta)$, ուրեմն x_0 կետում χ_C ֆունկցիան անընդհատ է: ■

Այժմ սահմանենք *J-չափելի բազմության ծավալը*: Եթե $C\in J$ և $A\subset R^n$ զուգահեռանիստը իր մեջ ընդգրկում է C-ն՝ $C\subset A$, ապա χ_C ֆունկցիայի նեղացումը A բազմության վրա՝ $\chi_C : A\to R$ ֆունկցիան, Լեբեգի թեորեմի համաձայն A զուգահեռանիստի վրա ինտեգրելի է՝ $\chi_C\in R(A)$: Իսկապես. այդ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը ընկած է ∂C բազմության մեջ, որը 0 չափի է: Այսպիսով, $\int_A \chi_C(x)dx$ ինտեգրալը գոյություն ունի: Այն կանվանենք $C\in J$ բազմության ծավալ և կնշանակենք $V(C)$-ով*՝

$$V(C)=\int_A \chi_C(x)dx,\ C\subset A:$$

Ցույց տանք, որ $V(C)$-ն A զուգահեռանիստի ընտրությունից կախված չէ:

Եթե $C\subset A_1$ և $C\subset A_2$, ապա $C\subset A_1\cap A_2 =: A$, որը նույնպես զուգահեռանիստ է: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում

$$\int_{A_1} \chi_C(x)dx=\int_A \chi_C(x)dx=\int_{A_2} \chi_C(x)dx:$$

Այդ հավասարություններից առաջինն ապացուցելու համար (երկրորդը կապացուցվի նույն կերպ) կառուցենք A_1 զուգահեռանիստի այնպիսի տրոհում, որի տրոհման զուգահեռանիստերից մեկը A-ն է: Այդ դեպքում χ_C ֆունկցիան, A-ից զատ մնացած տրոհման զուգահեռանիստերի վրա համարյա ամենուրեք 0 է: Հետևաբար, χ_C ֆունկցիայի ինտեգրալը այդ մնացած զուգահեռանիստերի վրա 0 է: Քանի որ $\int_{A_1}\chi_C$ ինտեգրալը

---

* Ապացուցեք, որ C-ն կլինի 0 ծավալի այն և միայն այն դեպքում, երբ $C\in J$ և $V(C)=0$:

հավասար է տրոհման զուգահեռանիստերով տարածված ինտեգրալների գումարին, ապա

$$\int_{A_1} \chi_C = \int_A \chi_C :$$

2. J **-չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալ:** Դիցուք՝ $C \in J$ և $f : C \to R$: Նշանակենք՝

$$f_C^*(x) := \begin{cases} f(x), x \in C \\ 0, \quad\; x \notin C \end{cases} ,$$

և C բազմությամբ տարածված f-ի ինտեգրալը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\int_C f = \int_A f_C^* , \tag{5.1}$$

որտեղ A-ն C բազմությունը պարունակող կամայական զուգահեռանիստ է:

f_C^*-ի փոխարեն կարելի է կիրառել նաև $f\chi_C$ սիմվոլը: Լեբեգի թեորեմի համաձայն, որպեսզի (5.1) ինտեգրալը գոյություն ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f\chi_C$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը՝ $B(f\chi_C)$-ն, լինի 0-չափի:

Մյուս կողմից,

$$B(f\chi_C) \subset B(f) \cup B(\chi_C),\ B(f) \subset B(f\chi_C),$$

առնչություններից հետևում է, որ $B(f\chi_C)$-ն 0 չափի է այն և միայն այն դեպքում, երբ $B(f)$ -ն է 0 չափի:

Այսպիսով, (5.1) ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ f ֆունկցիան լինի համարյա ամենուրեք անընդհատ C-ի վրա: Կենթադրենք, որ այդ պայմանը բավարարվում է և այդ ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $\Re(C)$ -ով:

Կիրառելով նախորդ կետի դատողությունները, կհամոզվենք, որ (5.1) ինտեգրալը C բազմությունը պարունակող A զուգահեռանիստի ընտրությունից կախված չէ:

Զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալի հատկությունները մնում են ուժի մեջ նաև այս ընդհանուր ինտեգրալների համար: Նշենք դրանցից մի քանիսը:

1^0. *Եթե ա)* $C=\bigcup_{i=1}^{m} C_i$, $C_i \in J$; $\overset{0}{C}_i \cap \overset{0}{C}_j = \varnothing$, $i \neq j$,

բ) $f \in \Re(C)$,

ապա

1) $f \in \Re(C_i)$, $1 \le i \le m$,

2) $\int_C f = \sum_{i=1}^{m} \int_{C_i} f$:

Այս հատկությանն անվանում են *ինտեգրալի ադիտիվություն*:

▶ 1)-ը հետևում է այն բանից, որ 0 չափի բազմության կամայական ենթաբազմություն նույնպես 0 չափի է:

2)-ն ապացուցելու համար նկատենք, որ $\chi_C(x) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{C_i}(x)$ հավասարությունը տեղի ունի համարյա ամենուրեք R^n-ում (հավասարությունը կարող է խախտվել եզրային կետերում, իսկ այդ կետերի բազմությունը 0-չափի է): Հետևաբար,

$$f\chi_C(x) = \sum_{i=1}^{m} f\chi_{C_i}(x) \text{ համարյա ամենուրեք } R^n\text{-ում:}$$

Մնում է օգտվել չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանումից և զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալների համապատասխան հատկություններից: ■

Հետևանք (չափի ադիտիվությունը): *Նշված պայմաններում վերցնելով* $f(x) \equiv 1$, *կստանանք՝* $V(C) = \sum_{i=1}^{m} V(C_i)$:

2^0. *Եթե* $C \in J$, $f, g \in \Re(C)$ *և* $f(x) = g(x)$, *համարյա ամենուրեք* C *-ում, ապա*

$$\int_C f = \int_C g :$$

▶ Իրոք, $f(x)\chi_C(x) = g(x)\chi_C(x)$, համարյա ամենուրեք A-ում: Մնում է օգտվել չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանումից և զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալի համապատասխան հատկությունից: ■

3^0. *Եթե* $C \in J$, $f \in \Re(C)$, $f(x) \geq 0$ *և* $\int_C f = 0$, *ապա* $f(x) = 0$, *համարյա ամենուրեք* C *-ում:*

▶ Այս դեպքում $f(x)\chi_C(x) \geq 0$: Մնում է օգտվել չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանումից և զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալի համապատասխան հատկությունից: ■

4^0. ***Միջին արժեքի թեորեմը.*** *եթե* $C \in J$, $f \in \Re(C)$, m *-ը և* M *-ը* f *-ի ճշգրիտ եզրերն են, ապա գոյություն ունի* $\mu \in [m, M]$ *թիվ, այնպիսին, որ*

$$\int_C f = \mu V(C) :$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ զուգահեռանիստի դեպքում:

Լրացում: Եթե C -ն կապակցված է և $f \in C(C)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in C$ կետ, այնպիսին, որ

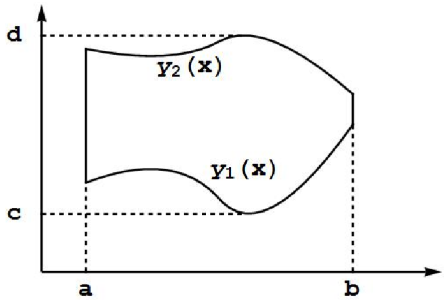
$$\int_C f = f(\xi) V(C) :$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ զուգահեռանիստի դեպքում:

3. Կրկնակի և եռակի ինտեգրալների հաշվումը:

a) Կորագիծ սեղանով տարածված ինտեգրալ: *Դիցուք* $C \subset R^2$ *կորագիծ սեղանը սահմանափակված է* $x = a$, $x = b$ *(* $a < b$ *) ուղիղներով և* $y_1(x) < y_2(x)$, $x \in [a, b]$ *անընդհատ կորերով: Այդ դեպքում* ա) $C \in J$,

բ) $\iint\limits_C f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, երբ $f \in C(C)$:



► Հարթության վրա J -չափելի բազմությունները կոչվում են նաև քառակուսելի բազմություններ (մասնավոր դեպքում, երբ ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ՝ քառակուսելի պատկերներ), իսկ 0-ծավալի բազմությունները՝ 0-մակերեսի բազմություններ: Որպեսզի ապացուցենք ա) պնդումը, մենք պետք է ապացուցենք, որ C -ի եզրը 0-մակերեսի է: Այդ եզրը բաղկացած է $x = a$ և $x = b$ ուղիղների հատվածներից, որոնք ակնհայտորեն 0-մակերեսի են, և $y_1(x)$ ու $y_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներից, որոնց 0-մակերեսի լինելը հետևում է Կանտորի թեորեմից*:

բ) պնդումն ապացուցելու համար նշանակենք՝ $c = \min\limits_{[a,b]} y_1(x)$, $d = \max\limits_{[a,b]} y_2(x)$: Այդ դեպքում՝ $C \subset [a,b] \times [c,d] =: A$: Ըստ J -չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանման ունենք՝

$$\iint\limits_C f(x,y)dxdy = \iint\limits_A f^*(x,y)dxdy ,$$

որտեղ

$$f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases} :$$

Կիրառելով Ֆուբինիի թեորեմը՝ կստանանք

---

* Տե՛ս I հատոր, VI գլուխ:

$$\iint\limits_A f^*(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f^*(x,y)dy : \qquad (5.2)$$

Սակայն, երբ $x \in [a,b]$ կետը հաստատագրված է, այդ դեպքում՝

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & y \in [y_1(x), y_2(x)] \\ 0, & y \notin [y_1(x), y_2(x)] \end{cases},$$

ուստի

$$\int\limits_c^d f^*(x,y)dy = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy :$$

Ստացված արժեքը տեղադրելով (5.2)-ի մեջ՝ կստանանք բ)-ն: ■

b) Եռաչափ տիրույթով տարածված ինտեգրալ: R^3-ում J-չափելի բազմությունները կոչվում են նաև խորանարդելի բազմություններ, (իսկ այն մասնավոր դեպքում, երբ բազմության ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ՝ խորանարդելի մարմիններ):

Ենթադրենք, որ $D \subset R^3$ բազմությունը խորանարդելի մարմին է, որն ընկած է $x = a$ և $x = b$ $(a < b)$ հարթությունների միջև և յուրաքանչյուր $x_0 \in [a,b]$ հաստատագրված արժեքի համար $x = x_0$ հարթության և D-ի հատման պրոյեկցիան Oyz հարթության վրա՝

$$E_{x_0} = \{(y,z) \in R^2 : (x_0, y, z) \in D\}$$

բազմությունը, քառակուսելի է: Այդ դեպքում

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{E_x} f(x,y,z)dydz, \ f \in C(D) : \qquad (5.3)$$

▶ Քանի որ $D \in J$, ապա այն սահմանափակ է: Հետևաբար, գոյություն ունի $[c,d] \times [e,h]$ ուղղանկյուն, այնպիսին, որ

$$D \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,h] =: A \times B,$$

որտեղ $A = [a,b]$, $B = [c,d] \times [e,h]$:

Ըստ սահմանման՝

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{A \times B} f^*(x,y,z)dxdydz, \qquad (5.4)$$

որտեղ

$$f^*(x,y,z) := \begin{cases} f(x,y,z), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Ֆուբինիի թեորեմի համաձայն՝

$$\iiint_{A\times B} f^*(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_B f^*(x,y,z)dydz : \tag{5.5}$$

Սակայն $x \in [a,b]$ հաստատագրված արժեքի դեպքում՝

$$f^*(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (y,z) \in E_x \\ 0, & (y,z) \notin E_x \end{cases},$$

ուստի

$$\iint_B f^*(x,y,z)dydz = \iint_{E_x} f(x,y,z)dydz :$$

Տեղադրելով այս արժեքը (5.5)-ի մեջ, այնուհետև, ստացված արժեքը՝ (5.4)-ի մեջ՝ կստանանք (5.3)-ը: ■

Որոշ հեղինակների մոտ R^3-ում տիրույթը նշանակվում է (D) սիմվոլով, իսկ նրա ծավալը՝ D-ով: Նման ձևով R^2-ում տիրույթը նշանակվում է (P) սիմվոլով, իսկ նրա մակերեսը՝ P-ով:

Հաշվի առնելով այդ պայմանավորվածությունը՝ (5.3) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\iiint_{(D)} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \iint_{(P(x))} f(x,y,z)dydz\ , \tag{5.3}$$

որտեղ

$$\big(P(x)\big) = \big\{(y,z) \in R^2 : (x,y,z) \in (D)\big\} :$$

Կավալիերիի սկզբունքը: *Եթե (V_1) և (V_2) եռաչափ տիրույթները այնպիսին են, որ $P_1(x) = P_2(x)$, $x \in [a,b]$, ապա $V_1 = V_2$:*

▶ Ըստ ծավալի սահմանման՝

$$V_1 = \iiint_{(V_1)} dxdydz\ :$$

Այստեղ կիրառելով (5.3)-ը՝ կստանանք

$$V_1 = \int_a^b \left\{ \iint_{(P_1(x))} dydz \right\}:$$

Մակերեսի սահմանման համաձայն՝

$$\iint_{(P_1(x))} dydz = P_1(x):$$

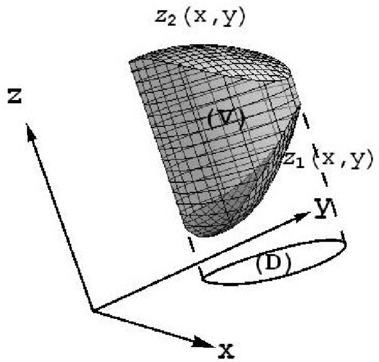
Տեղադրելով նախորդի մեջ՝ կստանանք

$$V_1 = \int_a^b P_1(x)dx^{*}:$$

Քանի որ $P_1(x) = P_2(x)$, $x \in [a,b]$, ապա V_2-ը կարտահայտվի նույն բանաձևով: ■

c) Գլանակերպով տարածված ինտեգրալ: *Դիցուք (V)-ն (D) քառակուսելի հիմքով ուղիղ գլանակերպ է, որի ծնիչը զուգահեռ է z-երի առանցքին, և որը ներքևից ու վերևից սահմանափակված է (D) տիրույթում անընդհատ $z_1(x,y)$ և $z_2(x,y)$ ֆունկցիաների գրաֆիկներով՝ $(V) = \left\{(x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in (D), z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\right\}$: Այդ դեպքում՝*

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{(D)} \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right\} dxdy \;,\; \text{եթե } f \in C((V)):$$



Այս պնդումը կրկին ապացուցվում է Ֆուբինիի թեորեմի օգնությամբ: Օգտվելով Կանտորի թեորեմից՝ կարելի է ապացուցել, որ $(V) \in J$ (ենթադրվում է, որ (D)-ն փակ է):

---

[*] Ծավալների հաշվման բաժնում (I հ., VI գլուխ) այս բանաձևն ապացուցվել էր լրացուցիչ ենթադրությունների դեպքում:

Դիցուք՝ $(V)\subset[a,b]\times[c,d]\times[e,h]=:A\times B$: Այդ դեպքում՝

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{A\times B} f^*(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iint\limits_{A}\left\{\int\limits_{e}^{h} f^*(x,y,z)dz\right\}dxdy:$$

Սակայն, եթե $(x,y)\notin(D)$, ապա $f^*(x,y,z)=0$, հետևաբար՝

$$\iint\limits_{A}\left\{\int\limits_{e}^{h} f^*(x,y,z)dz\right\}dxdy=\iint\limits_{(D)}\left\{\int\limits_{e}^{h} f^*(x,y,z)dz\right\}dxdy \ :$$

Եթե $(x,y)\in(D)$, ապա՝

$$f^*(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z), & z\in\left[z_1(x,y),z_2(x,y)\right] \\ 0, & z\notin\left[z_1(x,y),z_2(x,y)\right]\end{cases}:$$

Հետևաբար՝ $$\iint\limits_{(D)}\left\{\int\limits_{e}^{h} f^*(x,y,z)dz\right\}dxdy=\iint\limits_{(D)}\left\{\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right\}dxdy \ :$$

Տեղադրելով սա նախորդների մեջ՝ կստանանք պահանջվող բանաձևը: ■

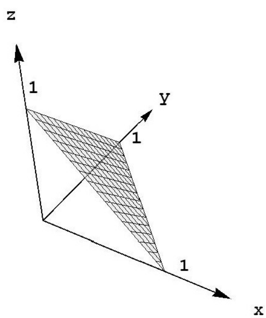
Լրացում: Եթե (D) *-ն կորագիծ սեղան է, որը քննարկվել է a)-ում, ապա*

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{a}^{b}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz : \qquad (5.6)$$

Օրինակ: Հաշվել $\mathcal{I}=\iiint\limits_{(V)}\dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ ինտեգրալը, որտեղ (V)-ն

$x=0$, $y=0$, $z=0$ և $x+y+z=1$

հարթություններով սահմանափակված բուրգն է:



(5.6) բանաձևի համաձայն՝

$$\mathcal{I}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}:$$

Հաջորդաբար հաշվենք ինտեգրալները.

$$\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right];$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right):$$

Վերջապես՝

$$\mathcal{I}=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{3-x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right):$$

<u>**4. Բազմակի ինտեգրալի դասական սահմանումը:**</u> Դիցուք D-ն J-չափելի փակ բազմություն է R^n-ում և $D_1,...,D_m$ J-չափելի բազմությունները այնպիսիք են, որ

$$\text{ա) } D=\bigcup_{i=1}^{m}D_i\,,\quad \text{բ) } \overset{0}{D_i}\cap\overset{0}{D_j}=\varnothing,\ i\neq j:$$

Այս դեպքում կասենք, որ $D_1,...,D_m$ բազմությունները կազմում են D-*ի տրոհում* (կամ՝ D-ն տրոհված է $D_1,...,D_m$ բազմությունների):

Եթե $f:D\to R$, ապա

$$\sigma'=\sum_{i=1}^{m}f(M_i)V(D_i)\,,\ M_i\in D_i$$

գումարը կոչվում է f ֆունկցիայի $\{D_i\}_1^m$ տրոհմանը և $\{M_i\}_1^m$ կետերին համապատասխանող Ռիմանի ինտեգրալային գումար: Նշանակենք՝

$$\lambda=\max_i diam\, D_i:$$

Սահմանում: *Եթե գոյություն ունի $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma'=\mathcal{I}'$ վերջավոր սահմանը*[*], *ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի ինտեգրալ՝ տարածված D բազմությամբ:*

Թեորեմ 5.2: *Եթե f սահմանափակ ֆունկցիան անընդհատ է D-ում համարյա ամենուրեք, ապա $\mathcal{I}'$ վերջավոր սահմանը գոյություն ունի և*

---

[*] Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ $\lambda<\delta\Rightarrow|\sigma'-s'|<\varepsilon$:

$$\mathcal{I}' = \int_D f :$$

► Ունենք՝

$$\int_D f = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} f dx \text{ և } \sigma' = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} f(M_i) dx :$$

Հետևաբար՝

$$\left| \sigma' - \int_D f \right| \le \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \left| f(M_i) - f(x) \right| dx \le \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \omega_{D_i}(f) \cdot V(D_i) :$$

Ուստի թեորեմն ապացուցելու համար մեզ մնում է համոզվել, որ

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} \omega_{D_i}(f) V(D_i) \underset{\lambda \to 0}{\to} 0 : \tag{5.7}$$

Օգտվենք Լեբեգի թեորեմի (թեորեմ 2.7) ապացույցի ընթացքում ներմուծված նշանակումներից: Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $U_1, \dots, U_k$ բաց զուգահեռանիստեր, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } B_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ , բ) } \sum_{i=1}^{k} V(U_i) < \varepsilon :$$

$U_i(\alpha)$-ով նշանակենք այն զուգահեռանիստը, որի կենտրոնը համընկնում է U_i-ի կենտրոնին, իսկ կողմերի երկարությունները բազմապատկված են $(1+\alpha)$-ով ($\alpha > 0$): Այնուհետև նշանակենք՝

$$U = \bigcup_{i=1}^{m} U_i \text{ , } U(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{m} U_i(\alpha), \text{ } K = D \setminus U = D \cap U^C :$$

Այդ դեպքում՝

$$V(U(\alpha)) \le \sum_{i=1}^{m} V(U_i(\alpha)) = (1+\alpha)^n \sum_{i=1}^{m} V(U_i) < (1+\alpha)^n \varepsilon :$$

Քանի որ U-ն բաց է, ապա U^C-ն փակ է, հետևաբար K-ն կոմպակտ բազմություն է:

Բացի դրանից, $o(f, x) < \varepsilon$, $x \in K$: Թեորեմ 2.3-ի համաձայն, գոյություն ունի $\delta_1 > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left.\begin{array}{l} E \subset K \\ diam\, E < \delta_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_E(f) < \varepsilon :$$

$\mathcal{F}_1$-ով նշանակենք այն D_i-երի բազմությունը, որոնք U-ի հետ ունեն ընդհանուր կետ, $\mathcal{F}_2$-ով՝ մնացածը:

Մյուս կողմից, քանի որ $\overline{U}$ բազմությունը կոմպակտ է, իսկ $U^C(\alpha)$-ն՝ փակ, և $\overline{U} \cap U^C(\alpha) = \varnothing$, ապա նրանց հեռավորությունը դրական է՝ $d := d\left(\bar{U}, U^C(\alpha)\right) > 0$: Հետևաբար, եթե $\lambda < d$, ապա

$$(D_1 \in \mathcal{F}_1) \Rightarrow (D_i \subset U(\alpha)) \Rightarrow V\left(\bigcup_{D_1 \in \mathcal{F}_1} D_i\right) \leq V\big(U(\alpha)\big):$$

Այժմ վերցնենք $\lambda < \min(\delta_1, d) =: \delta$ և գնահատենք (5.7) գումարը.

$$\sum_{i=1}^{m} \omega_{D_i}(f) V(D_i) = \sum_{D_i \in \mathcal{F}_1} \omega_{D_i}(f) V(D_i) + \sum_{D_i \in \mathcal{F}_2} \omega_{D_i}(f) V(D_i) \leq$$
$$\leq \Omega \sum_{D_i \in \mathcal{F}_1} V(D_i) + \varepsilon \sum_{D_i \in \mathcal{F}_2} V(D_i) \leq \Omega V\big(U(\alpha)\big) + \varepsilon V(D) \leq$$
$$\leq \Omega (1+\alpha)^n \varepsilon + \varepsilon V(D):$$

(5.7) առնչությունը հետևում է այս գնահատականից: ■

<u>**5. Ինտեգրալի սահմանումը ցանցերի միջոցով:**</u> Յուրաքանչյուր $h > 0$ թվի համար դիտարկենք R^n-ում ընկած խորանարդների հետևյալ ընտանիքը՝

$$\left[m_1 h, (m_1+1)h\right] \times \cdots \times \left[m_n h, (m_n+1)h\right], \tag{5.8}$$

որտեղ $m_1, \ldots, m_n$ թվերը փոփոխվում են ամբողջ թվերի բազմության վրա: Այդ խորանարդները միմյանց հետ ընդհանուր ներքին կետ չունեն և ծածկում են ամբողջ R^n-ը: Խորանարդների այդ ընտանիքը կոչվում է *h-ցանց R^n-ում:*

Դիցուք C-ն R^n-ում ընկած J-չափելի փակ բազմություն է և $f: C \to R$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

Թող, որ $C_1,...,C_{m(h)}$ -ը (5.8) ընտանիքին պատկանող այն խորանարդներն են, որոնք ամբողջությամբ ընկած են C -ի մեջ՝ $C_i \subset C$, $1 \le i \le m(h)$:

Վերցնենք $M_i \in C_i$, $1 \le i \le m(h)$ կամայական կետերը և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{m(h)} f(M_i)V(C_i):$$

Թեորեմ 5.3: *Եթե f սահմանափակ ֆունկցիան անընդհատ է C -ի վրա համարյա ամենուրեք, ապա*

$$\lim_{h\to 0}\tilde{\sigma} = \int_C f:$$

► Դիցուք $C_1,...,C_{m(h)},C_{m(h)+1},...,C_{p(h)}$ -ը (5.8) ընտանիքին պատկանող այն խորանարդներն են, որոնք C -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն և

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{m(h)} f(M_i)V(C_i) + \sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} f(M_i)V(C_i'),$$

որտեղ $C_i' = C_i \cap C$ և $M_i \in C_i'$, $m(h)+1 \le i \le p(h)$: Նախորդ թեորեմի համաձայն՝

$$\lim_{h\to 0}\sigma' = \int_C f:$$

Մեզ մնում է ապացուցել, որ

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} f(M_i)V(C_i') = 0:$$

Քանի որ f -ը սահմանափակ է՝ $|f(x)| \le L$, $x \in C$, ապա

$$\left|\sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} f(M_i)V(C_i')\right| \le L\sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} V(C_i):$$

Այնինքն՝ մեզ մնում է ապացուցել, որ C -ի եզրի հետ ընդհանուր կետ ունեցող (5.8) ընտանիքին պատկանող խորանարդների ծավալների գումարը ձգտում է 0-ի, երբ $h \to 0$:

Իրոք, եթե $U_1,...,U_k$ բաց զուգահեռանիստերը այնպիսին են, որ*

$$\text{ա) } \partial C \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \, , \qquad \text{բ) } \sum_{i=1}^{k} V(U_i) < \varepsilon \, ,$$

ապա բավականաչափ փոքր h-ի դեպքում ∂C-ի հետ ընդհանուր կետ ունեցող խորանարդները կպատկանեն $U = \bigcup U_i$ միավորմանը, հետևաբար, նրանց ծավալների գումարը փոքր կլինի ε-ից: ■

Լրացում: *Թեորեմը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ $\tilde{\sigma}$ գումարի մեջ ընդգրկվում են միայն այն C_i խորանարդները, որոնք բավարարում են $C_i \subset \operatorname{int} C$ պայմանին: Հետևաբար, թեորեմը ճիշտ է նաև ոչ փակ $C \in J$ բազմությունների համար:*

Հետևանքներ: *1) Եթե $C \in J$ և $C_1,...,C_{m(h)}$-ը (5.8) ընտանիքի այն խորանարդներն են, որոնք բավարարում են $C_i \subset \operatorname{int} C$ պայմանին ու $G_h = \bigcup_{i=1}^{m(h)} C_i$, ապա*

$$\lim_{h\to 0} V(G_h) = V(C) \, : \tag{5.9'}$$

Ապացուցելու համար նախորդ լրացման մեջ կվերցնենք՝ $f(x) = 1$, $x \in C$:

2) Եթե $C_1,...,C_{m(h)},C_{m(h)+1},...,C_{p(h)}$-ը (5.8) ընտանիքի այն խորանարդները են, որոնք C-ի հետ ընդհանուր կետ ունեն և $G^h = \bigcup_{i=1}^{p(h)} C_i$, ապա

$$\lim_{h\to 0} V(G^h) = V(C) \, : \tag{5.9}$$

► Քանի որ

$$G^h = G_h \cup \left(\bigcup_{i=m(h)+1}^{p(h)} C_i \right),$$

---

* ∂C-ն 0-ծավալի բազմություն է, քանի որ $C \in J$:

ապա չափի ադիտիվության շնորհիվ՝

$$V(G^h)=V(G_h)+V\left(\bigcup_{i=m(h)+1}^{p(h)}C_i\right): \qquad (5.10)$$

Մյուս կողմից, (5.10)-ի երկրորդ գումարելին ձգտում է 0-ի, երբ $h\to 0$: Հետևաբար, (5.9)-ը հետևում է (5.9')-ից և (5.10)-ից: ■

<u>**6. Բաց բազմության կոմպակտ սպառում:**</u> Դիցուք G-ն R^m-ում ընկած բաց բազմություն է:

Թեորեմ 5.4: *Գոյություն ունի $K_n\subset G$ կոմպակտ չափելի բազմությունների հաջորդականություն, այնպիսին, որ*

$$\text{ա) } K_n\subset \operatorname{int}K_{n+1}, \qquad \text{բ) } G=\bigcup_{n=1}^{\infty}K_n \ :$$

Այդպիսի K_n հաջորդականությունը կոչվում է G-ի կոմպակտ սպառում:

▶ Նշանակենք՝

$$F_n=\left\{x\in G: d(x,G^C)\geq\frac{1}{n}\right\}\cap\left\{x\in R^m:|x|\leq n\right\}:$$

F_n բազմությունները կոմպակտ են և բավարարում են ա) և բ) պայմաններին: Իսկապես, նախ նկատենք, որ $\rho(x)=d(x,G^C)$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ շնորհիվ $|\rho(x)-\rho(y)|\leq|x-y|$ անհավասարության: Ուրեմն $E_n=\left\{x:\rho(x)\geq\frac{1}{n}\right\}$ բազմությունը փակ է, իսկ $\left\{x:\rho(x)>\frac{1}{n}\right\}$ բազմությունը՝ բաց: Հետևաբար, եթե $a\in E_n$, ապա $\rho(a)\geq\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$: Այսինքն՝ a-ն F_{n+1}-ի ներքին կետ է, ուստի $F_n\subset\operatorname{int}F_{n+1}$:

Այնուհետև նշանակենք՝ $\delta_n=d(F_n,\partial F_{n+1})$: $\delta_n>0$, քանի որ F_n-ը կոմպակտ է և $F_n\cap\partial F_{n+1}=\varnothing$:

Ընտրենք R^m-ի մի այնպիսի h-ցանց, որի խորանարդի անկյունագիծը (տրամագիծը) փոքր է δ_n-ից: Այդ ցանցը նշանակենք Ω_n-ով:

Որպես K_n վերցնենք Ω_n-ին պատկանող այն (փակ) խորանարդների միավորումը, որոնք F_n-ի հետ ընդհանուր կետ ունեն: Այս K_n բազմություն-ները կբավարարեն նշված պայմաններին*: ■

§6. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ

1. $J-$չափելի բազմության պատկերը: $J-$չափելի բազմության պատկերն ուսումնասիրելու համար նպատակահարմար է սահմանել վեկտորի և մատրիցի նոր նորմեր:

$x=(x_1,...,x_n)\in R^n$ վեկտորի նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\|x\|:=\max_{1\le i\le n}|x_i|:$$

Այդ դեպքում $\|x-a\|\le r$ գնդի դերում հանդես է գալիս $a=(a_1,...,a_n)$ կենտրոնով $[a_1-r,a_1+r]\times\cdots\times[a_n-r,a_n+r]$ խորանարդը:

$A=(a_{ij})$, $1\le i,j\le n$ մատրիցի նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\|A\|:=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այսպես սահմանված նորմերը բավարարում են նորմի երեք աքսիոմներին (VII, §1):

Լեմմա 6.1: *Դիցուք D-ն R^n-ում ընկած բաց բազմություն է, իսկ $\psi:D\to R^n$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է, փոխմիարժեք է և $\det\psi'(x)\ne 0$, $x\in D$: Այդ դեպքում՝*

a) եթե C-ն D-ում ընկած x^0 կենտրոնով և $2s$ երկարությամբ կողմով փակ խորանարդ է, ապա $\psi(C)$-ն ընկած է $y^0=\psi(x^0)$ կենտրոնով և $2s\max_{x\in C}\|\psi'(x)\|$ կողմի երկարությամբ C' խորանարդի մեջ, որի ծավալն է՝

$$V(C')=\left[\max_{x\in C}\|\psi'(x)\|\right]^n V(C):$$

---

* Երբ G-ն կապակցված է, K_n-ը կարելի է նույնպես կապակցված կառուցել:

b) Եթե $E \subset D$ *և* $m(E)=0$, *ապա* $m(\psi(E))=0$ *:*

c) Եթե F *-ը* D *-ում ընկած* J *-չափելի կոմպակտ բազմություն է, ապա* $\psi(F)$ *-ը նույնպես* J *-չափելի է:*

▶ a)-ն բխում է Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից: Դրանում համոզվելու համար նշանակենք՝ $\psi(x)=(\psi_1(x),....,\psi_n(x))$: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $x \in C$ կետի համար ունենք՝

$$\left|y_i - y_i^0\right| = \left|\psi_i(x)-\psi_i(x^0)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x^0+\theta(x-x^0))(x_i - x_i^0)\right| \le$$

$$\le \left\|x-x^0\right\| \max_{x\in C}\left\|\psi'(x)\right\| \le s \max_{x\in C}\left\|\psi'(x)\right\|:$$

b)-ն ապացուցելու համար դիտարկենք D բազմության մի որևէ $\{K_n\}_1^\infty$ կոմպակտ սպառում՝

$$\text{ա) } K_m \subset \operatorname{int} K_{m+1}, \qquad \text{բ) } D=\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \ :$$

Այդ դեպքում՝

$$E=\bigcup_{m=1}^{\infty}(E\cap K_m), \ \ \psi(E)=\bigcup_{m=1}^{\infty}\psi(E\cap K_m):$$

Ուստի բավական է ապացուցել, որ $\psi(E \cap K_m)$ -ը 0 չափի է, որովհետև հաշվելի թվով 0-չափի բազմությունների միավորումը 0 չափի է: Հանդիսանալով 0 չափի բազմության ենթաբազմություն՝ $E \cap K_m$ -ը 0 չափի է: Ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\{U_i\}$ զուգահեռանիստերի վերջավոր կամ հաշվելի ընտանիք, այնպիսին, որ

$$\text{ա) } E\cap K_m \subset \bigcup_i U_i\,, \qquad \text{բ) } \sum_i V(U_i) < \varepsilon \ :$$

Նշանակենք $U_i' = U_i \cap K_m$: Այդ դեպքում $U_i' \subset K_m$ բազմությունները չափելի են և $E \cap K_m \subset \bigcup_i U_i'$:

(5.9)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր U_i' -ի համար գոյություն ունեն $C_{i1},...,C_{iq_i} \subset K_{m+1}$ (m -ը հաստատագրված է) խորանարդներ, այնպիսիք, որ

$$U_i' \subset \bigcup_{j=1}^{q_i} C_{ij} \text{ և } \sum_{j=1}^{q_i} V(C_{ij}) < 2V(U_i):$$

a)-ի համաձայն, $\psi(C_{ij})$-ն ընկած է C_{ij}' խորանարդի մեջ, որի ծավալն է՝

$V(C_{ij}') = \left[\max_{x \in C_{ij}} \|\psi'(x)\|\right]^n V(C_{ij})$: Այսպիսով,

$$\psi(E \cap K_m) \subset \bigcup_i \psi(U_i') \subset \bigcup_i \left(\bigcup_{j=1}^{q_i} \psi(C_{ij})\right) \subset \bigcup_i \left(\bigcup_{j=1}^{q_i} C_{ij}'\right)$$

և

$$\sum_{i,j} V(C_{ij}') \le \sum_i \sum_{j=1}^{q_i} \left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\|\right]^n V(C_{ij}) <$$
$$< 2\left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\|\right]^n \sum_i V(U_i) < 2\varepsilon \left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\|\right]^n :$$

Հետևաբար, $\psi(E \cap K_m)$ բազմությունը ծածկվել է վերջավոր կամ հաշվելի թվով խորանարդներով, որոնց ծավալների գումարը որքան կամենանք փոքր է*: Այսինքն՝ $\psi(E \cap K_m)$-ը 0-չափի է:

c)-ի ապացույցը. որպեսզի ապացուցենք, որ $\psi(F)$-ը J-չափելի է, պետք է ապացուցենք, որ $\psi(F)$-ը սահմանափակ է և $\partial\psi(F)$-ը 0-չափի է: Քանի որ F-ը կոմպակտ է, ապա $\psi(F)$-ը նույնպես կոմպակտ է (տե՛ս VII, թեորեմ 5.3), հետևաբար, այն սահմանափակ է:

Հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմը կիրառելով ψ և ψ^- արտապատկերումների համար, կհամոզվենք, որ $\partial\psi(F) = \psi(\partial F)$:

Քանի որ F-ը J-չափելի է, ապա ∂F-ը 0-չափի է, ուստի b)-ի համաձայն, $\psi(\partial F)$-ը նույնպես 0-չափի է: ■

2. J – չափելի բազմության գծային պատկերը:

Լեմմա 6.2: *Եթե $T: R^n \to R^n$ արտապատկերումը չվերասերվող գծային ձևափոխություն է և $G \subset R^n$ բազմությունը J-չափելի է, ապա*

---

* Քանի որ m-ը հաստատագրված է:

$$V(TG)=\left|\det T\right|V(G):\qquad(6.1)$$

▶ Նախ (6.1)-ը ապացուցենք ստորև ներկայացված ա) և բ) պարզագույն գծային ձևափոխությունների համար՝

ա) $y=T_{ij}(x_1,...,x_n)=(x_1,...,x_i+x_j,...,x_n)$. այստեղ՝ $y_k=x_k$, երբ $k\neq i$ և $y_i=x_i+x_j$: Այս դեպքում՝

$$\det T_{ij}=\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccccc}1\ldots & & & & 0\ldots 0 & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & & \vdots & & \vdots & 1\end{array}\right| \\ \begin{array}{cccccc} & & i & & j & \end{array}\end{array}=1:$$

բ) $y=T_i^{\lambda}(x_1,...,x_n)=(x_1,...,\lambda x_i,...,x_n)$. այստեղ՝ $y_k=x_k$, երբ $k\neq i$ և $y_i=\lambda x_i$: Այս մի դեպքում էլ՝

$$\det T_i^{\lambda}=\begin{array}{c}\left|\begin{array}{cccccc}1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \lambda & & \\ & & & \vdots & 1 & \\ & & & \vdots & & \ddots \\ 0 & & & \vdots & & 1\end{array}\right| \\ \begin{array}{cccccc} & & & i & & \end{array}\end{array}=\lambda:$$

Սկզբում (6.1)-ը ստուգենք $C=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$ զուգահեռանիստի համար:

ա) դեպքում՝

$$T_{ij}C\subset[a_1,b_1]\times\cdots[a_i+a_j,b_i+b_j]\times\cdots\times[a_n,b_n]=:A:$$

Ըստ սահմանման՝

$$V(T_{ij}C)=\int_A\chi_{T_{ij}C}(y)dy:$$

Նշանակենք՝ $A_1=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_{i-1},b_{i-1}]$,

$$A_2 = \left[a_i + a_j, b_i + b_j\right] \times \left[a_{i+1}, b_{i+1}\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n\right],$$

$$A_3 = \left[a_{i+1}, b_{i+1}\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n\right],$$

և երկու անգամ կիրառելով Ֆուբինիի թեորեմը, կստանանք՝

$$V(T_{ij}C) = \int_{A_1} \left\{ \int_{A_2} \chi_{T_{ij}C}(y)dy \right\} = \int_{A_1} \left\{ \int_{A_3} \left[\int_{\left[a_i + a_j, b_i + b_j\right]} \chi_{T_{ij}C}(y)dy_i \right] \right\} : \qquad (6.2)$$

Երբ $y_k \in [a_k, b_k]$, $k \neq i$ կոորդինատները ֆիքսված են, այդ դեպքում՝

$$\chi_{T_{ij}C}(y) = \begin{cases} 1, & y_i \in [a_i + y_j, b_i + y_j] \\ 0, & y_i \notin [a_i + y_j, b_i + y_j] \end{cases} :$$

Ուստի

$$\int_{[a_i + a_j, b_i + b_j]} \chi_{T_{ij}C}(y)dy_i = \int_{a_i + y_j}^{b_i + y_j} dy_i = b_i - a_i :$$

Տեղադրելով (6.2)-ի մեջ՝ կստանանք $V(T_{ij}C) = V(C)$ հավասարությունը, այսինքն՝ այս դեպքում (6.1)-ը ճշմարիտ է:

բ) դեպքում $T_i^\lambda C$-ն զուգահեռանիստ է, ընդ որում,

$\lambda \geq 0$ դեպքում՝ $T_i^\lambda C = \left[a_1, b_1\right] \times \cdots \times \left[\lambda a_i, \lambda b_i\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n\right]$,

$\lambda < 0$ դեպքում $T_i^\lambda C = \left[a_1, b_1\right] \times \cdots \times \left[-\lambda b_i, -\lambda a_i\right] \times \cdots \times \left[a_n, b_n\right]$:

Հետևաբար,

$$VT_i^\lambda C = |\lambda| \cdot V(C),$$

այսինքն բ) դեպքում նույնպես (6.1)-ը ճշմարիտ է:

Այժմ, եթե G-ն կամայական J-չափելի բազմություն է, նշանակենք $C_1, ..., C_{m(h)}$-ով h-ցանցի այն խորանարդները, որոնք պատկանում են $\overset{0}{G}$-ին և $G_h := \bigcup_{k=1}^{m(h)} C_k$: Այդ դեպքում

$$V(TC_k) = |\det T| \cdot V(C_k), \ k = 1, ..., m(h), \text{ երբ } T = T_{ij} \text{ կամ } T = T_i^\lambda :$$

Ժորդանի չափի ադիտիվության համաձայն՝

$$V(TG_h)=|\det T|\cdot V(G_h):\tag{6.3}$$

(5.9')-ի համաձայն՝

$$V(G_h)\to V(G)\text{, երբ } h\to 0:\tag{6.4}$$

Ցույց տանք, որ

$$V(TG_h)\to V(TG)\text{, երբ } h\to 0:\tag{6.5}$$

Նշանակենք $C_{m(h)+1},...,C_{p(h)}$ -ով h-ցանցի այն խորանարդները, որոնք ∂G-ի հետ ընդհանուր կետ ունեն և $G^h:=\bigcup_{k=1}^{p(h)}C_k$: Այդ դեպքում

$$TG_h\subset TG\subset TG^h,$$

ուստի

$$V(TG_k)\le V(TG)\le V(TG^h):$$

Հետևաբար, (6.5)-ը հետևում է

$$V(TG^h)-V(TG_h)\to 0,\ h\to 0$$

առնչությունից, ինչն իր հերթին հետևում է

$$V(TG^h)-V(TG_h)=|\det T|\left[V(G^h)-V(G_h)\right]$$

հավասարությունից և (5. 9'), (5.9) առնչություններից:

Հաշվի առնելով (6.4)-ը և (6.5)-ը՝ (6.3)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք (6.1)-ը:

Այսպիսով, (6.1)-ն ապացուցվեց ա) և բ) տիպի պարզագույն ձևափոխությունների համար:

Եթե $T:R^n\to R^n$ կամայական չվերասերվող գծային ձևափոխություն է, ապա* $T=T_1...T_p$, որտեղ T_k-երը քննարկված տիպի են, ընդ որում, $\det T=\det T_1...\det T_p$: Այդ դեպքում

$$V(T_1T_2G)=|\det T_1|V(T_2G)=|\det T_1T_2|V(G):$$

---

* Գոյություն ունեն $A_1,...,A_\ell$ և $B_1,...,B_s$ ա) կամ բ) տիպի պարզագույն ձևափոխություններ, այնպիսիք, որ (I-ն նույնական ձևափոխությունն է) $A_1...A_\ell TB_1...B_s=I$: Ուստի $T=(A_1...A_\ell)^{-1}(B_1...B_s)^{-1}=A_\ell^{-1}...A_1^{-1}B_s^{-1}...B_1^{-1}$:

Այսինքն՝ երկու արտադրիչների դեպքում (6.1)-ը ճիշտ է: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կհամոզվենք, որ (6.1)-ը ճիշտ է կամայական թվով արտադրիչների դեպքում: ■

3. J – չափելի բազմության պատկերի չափի գնահատականը:

Լեմմա 6.3: *Դիցուք D-ն R^n-ում ընկած բաց բազմություն է, իսկ $\psi : D \to R^n$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է, փոխմիարժեք է և $\det\psi'(x) \neq 0$, $x \in D$: Եթե D_x-ը D-ում ընկած J-չափելի կոմպակտ բազմություն է, իսկ G-ն D_x-ում ընկած J-չափելի բազմություն է, ապա*

$$V(\psi(G)) \leq \int_G |\det\psi'(x)| dx :^{**} \tag{6.6}$$

► Եթե T-ն հակադարձելի գծային ձևափոխություն է, իսկ $C \subset D_x$ բազմությունը փակ խորանարդ է, ապա

$$V\left(\psi(C)\right) \leq |\det T| \left[\max_{x\in C} \left\|T^{-1}\psi'(x)\right\|\right]^n V(C) : \tag{6.7}$$

Իրոք, 6.1 և 6.2 լեմմաների համաձայն՝

$$V\left(\psi(C)\right) = V\left(TT^{-1}\psi(C)\right) = |\det T| V\left(T^{-1}\psi(C)\right) \leq$$

$$\leq |\det T| \left[\max_{x\in C} \left\|(T^{-1}\psi)'(x)\right\|\right]^n V(C) = |\det T| \left[\max_{x\in C} \left\|T^{-1}\psi'(x)\right\|\right]^n V(C) :$$

Այնուհետև R^n-ում վերցնենք h-ցանց և նշանակենք $C_1,\ldots,C_{m(h)}$-ով ցանցի այն խորանարդները, որոնք ընկած են $\operatorname{int} G$-ի մեջ: Վերցնենք $x_k \in C_k$, $1 \leq k \leq m(h)$ կետեր և (6.7)-ի մեջ տեղադրենք՝ $C = C_k$, $T = \psi'(x_k)$: Կստանանք՝

$$V(\psi(C_k)) \leq |\det\psi'(x_k)| \left[\max_{x\in C_k} \left\|(\psi'(x_k))^{-1}\psi'(x)\right\|\right]^n V(C_k) : \tag{6.8}$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(z,t) = \left\|(\psi'(z))^{-1}\psi'(t)\right\| : D_x \times D_x \to R :$$

** Լեմմա 6.1-ի համաձայն, $\psi(G)$-ն J-չափելի բազմություն է (∂G-ն կոմպակտ է):

Քանի որ D_x-ը փակ, սահմանափակ բազմություն է R^n-ում, ապա $D_x \times D_x$-ը նույնպես փակ, սահմանափակ բազմություն է R^{2n}-ում, այսինքն՝ կոմպակտ բազմություն է: Բացի այդ, $\left\| \left(\psi'(z)\right)^{-1} \psi'(t) \right\|$ ֆունկցիան անընդհատ է $D_x \times D_x$ կոմպակտ բազմության վրա*, քանի որ $\left(\psi'(z)\right)^{-1} \psi'(t)$ մատրիցի էլեմենտներն անընդհատ են: Հետևաբար, $F(z,t)$ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է $D_x \times D_x$ բազմության վրա, ընդ որում, $F(z,z)=1$, երբ $z \in D_x$: Ուրեմն յուրաքանչյուր $\varepsilon_1 > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$h < \delta \Rightarrow F(x_k, x) < \varepsilon_1 + 1,$$

քանի որ

$$F(x_k, x) \le \left| F(x_k, x) - F(x,x) \right| + F(x,x):$$

Վերցնելով $\varepsilon_1 = (1+\varepsilon)^{1/n} - 1 > 0$ թիվը, կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի դեպքում՝

$$h < \delta \Rightarrow F(x_k, x) < (1+\varepsilon)^{1/n}:$$

Հաշվի առնելով այս գնահատականը՝ (6.8)-ից կստանանք

$$V\left(\psi(C_k)\right) \le (1+\varepsilon) \left| \det \psi'(x_k) \right| V(C_k), \ 1 \le k \le m(h):$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$\sum_{k=1}^{m(h)} V\left(\psi(C_k)\right) \le (1+\varepsilon) \sum_{k=1}^{m(h)} \left| \det \psi'(x_k) \right| V(C_k):$$

Մյուս կողմից, եթե նշանակենք $G_h = \bigcup_{k=1}^{m(h)} C_k$, ապա

$$\psi(G_h) = \bigcup_{k=1}^{m(h)} \psi(C_k):$$

---

* $\left| \|A\| - \|B\| \right| \le \|A - B\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} - b_{ij} \right|:$

Հետևաբար,

$$V(\psi(G_h)) \le \bigcup_{k=1}^{m(h)} V(\psi(C_k)),$$

ուստի

$$V(\psi(G_h)) \le (1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{m(h)} \left|\det\psi'(x_k)\right| V(C_k): \qquad (6.9)$$

Ցանցերի միջոցով ինտեգրալի սահմանման համաձայն, երբ $h \to 0$, (6.9)-ի աջ կողմի արտահայտությունը կձգտի $(1+\varepsilon)\int_G \left|\det\psi'(x)\right| dx$ -ին: Ցույց տանք, որ $V(\psi(G_h)) \to V(\psi(G))$:

Նշանակենք G^h -ով h-ցանցի այն խորանարդների միավորումը, որոնք G-ի հետ ընդհանուր կետ ունեն՝

$$C_1, \ldots, C_{m(h)}, C_{m(h)+1}, \ldots, C_{p(h)}:$$

Այդ դեպքում

$$0 \le V(\psi(G)) - V(\psi(G_h)) \le V(\psi(G^h)) - V(\psi(G_h)) \le$$

$$\le \sum_{k=m(h)+1}^{p(h)} V(\psi(C_k)) \le \left[\max_{x\in K_{m+1}} \left\|\psi'(x)\right\|\right]^n \sum_{k=m(h)+1}^{p(h)} V(C_k),$$

որովհետև եթե h-ը բավականաչափ փոքր է, ապա $C_k \subset K_{m+1}$:

Մյուս կողմից, (5. 9'), (5. 9)-ի համաձայն,

$$\sum_{k=m(h)+1}^{p(h)} V(C_k) = V\left(G^h\right) - V\left(G_h\right) \to 0, \text{ երբ } h \to 0:$$

Այժմ (6.9)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$V(\psi(G)) \le (1+\varepsilon)\int_G \left|\det\psi'(x)\right| dx$$

անհավասարությունը, որը ճշմարիտ է յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար: Հետևաբար, այն ճշմարիտ է $\varepsilon = 0$ դեպքում: Լեմման ապացուցված է: ■

4. Փոփոխականի փոխարինման թեորեմը:

Թեորեմ 6.1: *Դիցուք* D*-ն* R^n*-ում ընկած բաց բազմություն է,* $\psi : D \to R^n$ *ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի, փոխմիարժեք արտապատկերում է և* $\det\psi'(x) \neq 0$, $x \in D$*: Այդ դեպքում, եթե* D_x*-ը* D*-ում ընկած* J*-չափելի փակ բազմություն է,* $D_y = \psi(D_x)$ *և* $f \in \Re(D_y)$*, ապա*

ա) $f \circ \psi \in \Re(D_x)$,

բ) $\int\limits_{D_y} f(y)dy = \int\limits_{D_x} f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx$ *:*

► f ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը նշանակենք $B(f)$-ով: Լեբեգի թեորեմի համաձայն, $m(B(f)) = 0$: $f(\psi(x))$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունն ընկած է $\psi^{-1}(B(f))$-ի մեջ: Քանի որ ψ^{-1} ֆունկցիան օժտված է նույն հատկություններով, ինչ որ ψ ֆունկցիան, ապա լեմմա 6.1-ի համաձայն, $m\left(\psi^{-1}(B(f))\right) = 0$: Լեբեգի թեորեմի համաձայն, $f \circ \psi \in \Re(D_x)$: ա)-ն ապացուցվեց:

► բ)-ն ապացուցենք նախ $f(y) \geq 0$, $y \in D_y$ դեպքում: Օգտվենք ինտեգրալի դասական սահմանումից. դիցուք $C_1, \ldots, C_m$-ը D_y-ի տրոհում է: Այդ դեպքում $C_i' := \psi^{-1}(C_i)$, $1 \leq i \leq m$ բազմությունները J-չափելի են և կազմում են D_x-ի տրոհում: Նշանակենք՝ $m_i = \inf\limits_{y \in C_i} f(y)$: Լեմմա 6.3-ի համաձայն՝

$$V(C_i) \leq \int\limits_{C_i'} |\det\psi'(x)|dx, \ 1 \leq i \leq m :$$

Այս անհավասարությունները բազմապատկելով համապատասխան m_i-երով և գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$s := \sum_{i=1}^{m} m_i V(C_i) \leq \sum_{i=1}^{m} m_i \int\limits_{C_i'} |\det\psi(x)|dx \leq \int\limits_{D_x} f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx, \qquad (6.10)$$

որտեղ s-ը $\{C_i\}$ տրոհմանը համապատասխանող f-ի Դարբուի ստորին գումարն է: Քանի որ $s \underset{\lambda \to 0}{\to} \int\limits_{D_y} f(y)dy$, ապա (6.10)-ում անցնելով սահմանի, երբ $\lambda \to 0$, կստանանք՝

$$\int\limits_{D_y} f(y)dy \le \int\limits_{D_x} f(\psi(x))\left|\det \psi'(x)\right| dx: \tag{6.11}$$

Հակառակ անհավասարությունն ապացուցելու համար (6.11)-ը գրենք $x = \psi^{-1}(y): D_y \to D_x$ արտապատկերման և $g(x) := f(\psi(x))\left|\det \psi'(x)\right|$ ֆունկցիայի համար՝

$$\int\limits_{D_x} f(\psi(x))\left|\det \psi'(x)\right| dx \le$$

$$\le \int\limits_{D_y} f\left(\psi\left(\psi^{-1}(y)\right)\right)\left|\det \psi'\left(\psi^{-1}(y)\right)\right|\left|\det\left(\psi^{-1}\right)'(y)\right| dy = \int\limits_{D_y} f(y)dy:$$

Այստեղ օգտվեցինք մատրիցների որոշիչների բազմապատկման կանոնից և հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմից:

Այսպիսով, դրական f ֆունկցիայի համար բ)-ն ճիշտ է:

Ընդհանուր դեպքում նշանակենք՝

$$M = \sup_{y \in D_y} |f(y)|, \; f_1(y) = M \; \text{ և } \; f_2(y) = M - f(y):$$

Այդ դեպքում $f(y) = f_1(y) - f_2(y)$: Քանի որ f_1 ու f_2 ֆունկցիաների համար բ)-ն ճիշտ է, հետևաբար, այն ճիշտ է նաև f-ի համար: ■

<u>**5. Գնդի ծավալը R^n-ում:**</u> Հաշվենք 0 կենտրոնով և R շառավղով $B_n(R)$ գնդի՝

$$B_n(R) = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n, \; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le R^2\right\},$$

$V_n(R)$ ծավալը:

Ունենք՝ $V_1(R) = 2R$: Որպեսզի համոզվենք, որ $B_n(R) \in J$, երբ $n \ge 2$, պետք է ցույց տանք, որ նրա եզրը՝ գնդային սֆերան, 0-ծավալի է, այսինքն՝

$$x_n = \sqrt{R^2 - \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)}\ ,$$
$$x_n = -\sqrt{R^2 - \left(x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2\right)}$$
ֆունկցիաների գրաֆիկները 0-ծավալի են, որտեղ $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leq R^2$:

Սա կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $(n-1)$-ի համար պնդման ճշմարիտ լինելուց n-ի համար ճշմարիտ լինելը հետևում է x_n ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունից: Մանրամասն դատողությունների կատարումը թողնում ենք ընթերցողին:

Այժմ հաշվենք $V_n(R)$-ը: Ըստ սահմանման՝

$$V_n(R) = \int\limits_{B_n(R)} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n :$$

Կատարելով $x = R\xi$, $x_i = R\xi_i$, $1 \leq i \leq n$ փոփոխականի գծային փոխարինումը՝ կստանանք

$$V_n(R) = R^n \int\limits_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1} \cdots \int d\xi_1 \cdots d\xi_n = R^n V_n(1) : \tag{6.12}$$

$V_n(1)$-ը հաշվելու համար կիրառենք Ֆուբինիի թեորեմը.

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1} d\xi_n \int\limits_{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leq 1 - \xi_n^2} \cdots \int d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} =$$
$$= \int_{-1}^{1} d\xi_n V_{n-1}\left(\sqrt{1-\xi_n^2}\right) = \int_{-1}^{1} \left(\sqrt{1-\xi_n^2}\right)^{n-1} V_{n-1}(1) d\xi_n =$$
$$= 2V_{n-1}(1) \int_0^1 \left(\sqrt{1-\xi_n^2}\right)^{n-1} d\xi_n :$$

Կատարելով $\xi_n = \cos\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$ փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi =: 2V_{n-1}(1) \mathcal{I}_n :$$

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և տեղադրելով $V_1(1)=2$ արժեքը՝ կստանանք

$$V_n(1)=2^n \mathcal{I}_2\mathcal{I}_3\ldots\mathcal{I}_n :$$

Մյուս կողմից ունենք՝

$$\mathcal{I}_k=\begin{cases}\dfrac{(k-1)!!}{k!!}, \text{երբ } k-\text{ն կենտ է}\\ \dfrac{(k-1)!!}{k!!}\dfrac{\pi}{2}, \text{երբ } k-\text{ն զույգ է}\end{cases}:$$

(6.12)-ի մեջ տեղադրելով $V_n(1)$-ի և $\mathcal{I}_k$-երի արժեքները՝ կստանանք

$$V_n(R)=R^n 2^n \frac{1}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

բանաձևը (քննարկեք $n=2m$ և $n=2m+1$ դեպքերը):

§7. ԲԱԶՄԱԿԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

<u>**1. Դրական ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ:**</u> Դիցուք D-ն R^m-ում ընկած բաց բազմություն է, որը կարող է լինել նաև ոչ $J-$չափելի: Դիտարկենք $f:D\to[0,\infty)$ դրական ֆունկցիան, որը D-ի կոմպակտ ենթաբազմությունների վրա ինտեգրելի է կամ, որ նույնն է՝ f-ի խզման կետերի բազմությունը 0 չափի է* և յուրաքանչյուր $K\subset D$ կոմպակտ բազմության համար գոյություն ունի M_K թիվ, այնպիսին, որ

$$f(x)\le M_K,\ x\in K :$$

Նշանակենք՝

$$\int_D f=\sup_{K\subset D}\int_K f,\ K\in J : \tag{7.1}$$

---

* Հետևում է D-ի կոմպակտ սպառման գոյությունից:

Եթե ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր է, ապա (7.1) ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, հակառակ դեպքում՝ *տարամետ*: (7.1) ինտեգրալը կոչվում է f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ*:

Այն մասնավոր դեպքում, երբ $D \in J$ և $f(x) \le M$, երբ $x \in D$, f-ի անիսկական ինտեգրալը համընկնում է f-ի ինտեգրալին:

Իրոք, եթե նշանակենք անիսկական ինտեգրալը $\mathcal{I}'$-ով, իսկ ինտեգրալը՝ $\mathcal{I}$-ով, ապա $\mathcal{I}'$-ի սահմանումից հետևում է $\mathcal{I}' \le \mathcal{I}$ անհավասարությունը: Հակառակ անհավասարությունը հետևում է

$$\mathcal{I} = \lim_{h \to 0} \int_{D_h} f \le \mathcal{I}'$$

առնչությունից, որտեղ D_h-ը h-ցանցի այն խորանարդների միավորումն է, որոնք ընկած են D-ի մեջ:

Ընդհանուր դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 7.1: *Եթե K_n-ը D բաց բազմության կոմպակտ J-չափելի սպառում է, ապա*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{K_n} f = \int_D f : \tag{7.2}$$

▶ Քանի որ $f \ge 0$ և $K_n \subset K_{n+1}$, ապա

$$\alpha_n := \int_{K_n} f \le \int_D f \tag{7.3}$$

հաջորդականությունն աճող է, հետևաբար, α_n-ը ունի սահման (վերջավոր կամ անվերջ): Այդ սահմանը նշանակենք α-ով: Այդ դեպքում (7.3)-ից հետևում է, որ

$$\alpha \le \int_D f :$$

Հակառակ անհավասարությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $K \subset D$ կոմպակտ բազմություն: Քանի որ $\operatorname{int} K_n$ բաց բազմությունները ծածկում են K-ն, հետևաբար, գոյություն ունի K-ի վերջավոր ենթածածկույթ: Որպես n_0 վերցնենք առաջացած ինդեքսներից մեծագույնը: Սկսած այդ n_0 համարից՝ $K \subset K_n$: Այդ դեպքում՝

$$\int_K f \le \int_{K_n} f \le \alpha :$$

Հետևաբար, $\sup_K \int_K f \le \alpha$: ■

$\Re_+(D)$-ով նշանակենք այն f-երի բազմությունը, որոնց ինտեգրալը զուգամետ է:

Հետևանք: *Եթե* $f_1, f_2 \in \Re_+(D)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *ապա*

$$\int_D (\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \int_D f_1 + \beta \int_D f_2 :$$

2. Նշանափոխ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ:

Նշանակենք $\Re(D)$-ով այն $f : D \to R$ ֆունկցիաների դասը, որոնք ինտեգրելի են D-ի կոմպակտ J-չափելի ենթաբազմությունների վրա և բավարարում են $|f| \in \Re_+(D)$ պայմանին:

Անիսկական ինտեգրալ կսահմանենք $\Re(D)$ դասի ֆունկցիաների համար: Նշանակենք՝

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \ge 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \ge 0,$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \ge 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \ge 0 :$$

Այդ դեպքում $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$: Քանի որ $|f| \in \Re_+(D)$, ապա $f^+, f^- \in \Re_+(D)$:

Այնուհետև նշանակենք՝

$$\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^- :$$

Թեորեմ 7.2: *Եթե K_n-ը D բաց բազմության կոմպակտ J-չափելի սպառում է և $f \in \Re(D)$, ապա*

$$\int_D f = \lim_{n\to\infty} \int_{K_n} f \text{ :} \tag{7.4}$$

Այս թեորեմը անմիջապես հետևում է նախորդ թեորեմից: Որոշ հեղինակներ անիսկական ինտեգրալը սահմանում են (7.4) սահմանի միջոցով: Ապացուցենք, որ այդ սահմանումը համարժեք է մեր սահմանմանը:

Թեորեմ 7.3: *Եթե D-ի յուրաքանչյուր $\{K_n\}$ կոմպակտ չափելի սպառման համար գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{K_n} f$ վերջավոր սահմանը, ապա $f \in \Re(D)$:*

▶ Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի կոմպակտ բազմությունների $\{K_n\}$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\int_{K_{n+1}} |f(x)|dx > 3\int_{K_n} |f(x)|dx + 2n \text{ *:}$$

Նշանակենք՝ $F_n = K_{n+1} \setminus \operatorname{int} K_n$: Այդ դեպքում՝

$$\int_{F_n} |f(x)|dx > 2\int_{K_n} |f(x)|dx + 2n \text{ :} \tag{7.5}$$

Մյուս կողմից՝

$$\int_{F_n} |f| = \int_{F_n} f^+ + \int_{F_n} f^- \text{ :}$$

Ենթադրենք՝

$$\int_{F_n} f^+ \geq \int_{F_n} f^- \text{ :}$$

Այդ դեպքում $\int_{F_n} |f| \leq 2\int_{F_n} f^+$ և (7.5)-ից հետևում է, որ

---

* Սրան կարելի է հասնել՝ K_n-ը նոսրացնելով, այսինքն՝ վերցնելով ենթահաջորդականություն և նորից համարակալելով:

$$\int_{F_n} f^+ > \int_{K_n} |f| + n \, :$$

Այս անհավասարության մեջ ձախ կողմի ինտեգրալը փոխարինենք իր Դարբուի ստորին գումարով:

Դիցուք $C_1^{(n)},...,C_{p_n(h)}^{(n)}$-ը h-ցանցի այն փակ խորանարդներն են, որոնք ընդգրկված են $\operatorname{int} F_n$-ի մեջ: Այդ դեպքում, եթե h-ը բավականաչափ փոքր է, ապա

$$\sum_i m_i V(C_i^{(n)}) > \int_{K_n} |f| + n \, , \; m_i = \inf_{C_i^{(n)}} f^+ \, :$$

F_n^*-ով նշանակենք այն $C_i^{(n)}$-երի միավորումը, որոնց համապատասխան m_i-երը դրական են՝ $m_i > 0$: Այդ դեպքում՝

$$\int_{F_n^*} f > \int_{K_n} |f| + n \, :$$

Այս անհավասարությանը գումարելով

$$\int_{K_n} f \geq -\int_{K_n} |f|$$

անհավասարությունը՝ կստանանք

$$\int_{K_n^*} f > n \quad (\text{կամ } < -n) \, ,$$

որտեղ $K_n^* = K_n \cup F_n^*$: Քանի որ $\{K_n^*\}$-ը և D-ի կոմպակտ սպառում է, ապա ստացվեց հակասություն: ■

<u>**3. Փոփոխականի փոխարինում:**</u>

Թեորեմ 7.4: *Դիցուք*

ա) D-ն և D'-ը R^m-ում ընկած բաց բազմություններ են, $\psi : D \leftrightarrow D'$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի, փոխմիարժեք արտապատկերում է և $\det \psi'(x) \neq 0$, $x \in D$,

բ) $f \in \Re(D')$:

Այդ դեպքում $f\circ\psi\cdot|\det\psi'|\in\Re(D)$ *և*

$$\int_{D'} f(y)dy=\int_{D} f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx\,: \tag{7.6}$$

► Դիցուք $\{K_n\}$-ը D-ի կոմպակտ $J-$ չափելի սպառում է: Այդ դեպքում $\{\psi(K_n)\}$-ը կհանդիսանա D'-ի կոմպակտ չափելի սպառում: Թեորեմ 6.1-ի համաձայն՝

$$\int_{\psi(K_n)} f^{\pm}(y)dy=\int_{K_n} f^{\pm}(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx\,:$$

f^+-ի և f^--ի համար անցնելով սահմանի և ստացված հավասարությունները իրարից հանելով՝ կստանանք (7.6)-ը: ■

Այս թեորեմի եզրակացությունը կարելի է ձևակերպել այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Այն է. (7.6) ինտեգրալներից մեկի զուգամիտությունից հետևում է մյուսի զուգամիտությունը և նրանց հավասարությունը:

Երբ $D'\in J$, իսկ f-ը սահմանափակ է, այսինքն՝ երբ $\int_{D'} f$-ը գոյություն ունի սովորական* (ոչ անիսկական) իմաստով, հետևյալ թեորեմը էապես լրացնում է սովորական ինտեգրալներում փոփոխականի փոխարինման թեորեմը:

4. Սարդի թեորեմը:

Թեորեմ 7.5: *Դիցուք* D*-ն* R^n*-ում ընկած բաց բազմություն է,* $\psi: D\to R^n$ *ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերում է և* $E=\{x\in D:\det\psi'(x)=0\}$*: Այդ դեպքում* $\psi(E)$*-ն 0 չափի է:*

► Դիցուք $C\subset D$ բազմությունը փակ խորանարդ է, որի կողմի երկարությունը ℓ է՝

$$C=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n],\quad b_i-a_i=\ell\,:$$

---

* Ինչպես արդեն ապացուցել ենք, այդ դեպքում անիսկական ինտեգրալը համընկնում է սովորական ինտեգրալին:

$[a_i, b_i]$ հատվածները տրոհելով $\frac{\ell}{N}$ երկարությամբ հավասար հատվածների՝ կստանանք P կանոնական տրոհում, որի խորանարդների թիվը N^n է: Եթե C_j-ն այդ խորանարդներից որևէ մեկն է և $x \in C_j$, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար բավականաչափ մեծ N-ի դեպքում՝

$$\left|\psi'(x)(y-x) - (\psi(y) - \psi(x))\right| < \varepsilon \|y - x\| \le \varepsilon \frac{\ell}{N}, \qquad (7.7)$$

բոլոր $y \in C_j$ կետերի համար: Իրոք.

$$\left|\psi'(x)(y-x) - (\psi(y) - \psi(x))\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\psi_i'(x)(y-x) - (\psi_i(y) - \psi_i(x))\right|,$$

որտեղ $\psi = (\psi_1, ..., \psi_n)$ և մնում է կիրառել Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը:

Եթե $C_j \cap E \ne \varnothing$, ապա գոյություն ունի $x \in C_j \cap E$: Այդ դեպքում $\det \psi'(x) = 0$, հետևաբար, գոյություն ունի $V \subset R^n$ $(n-1)$ չափանի ենթատարածություն, այնպիսին, որ $\{\psi'(x)(y-x) : y \in C_j\} \subset V$: Այդ դեպքում (7.7)-ի շնորհիվ $\psi(y) - \psi(x)$ կետը պատկանում է V ենթատարածության $\varepsilon \frac{\ell}{N}$ շրջակայքին կամ, որ նույնն է՝ $\psi(y)$ կետը պատկանում է $\psi(x) + V$ (x-ը ֆիքսված է) հիպերհարթության $\varepsilon \frac{\ell}{N}$ շրջակայքին:

Մյուս կողմից, Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից հետևում է, որ գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|\psi(x) - \psi(y)\right| \le M \|x - y\| \le M \cdot \frac{\ell}{N}:$$

Այսպիսով, եթե $C_j \cap E \ne \varnothing$, ապա $\{\psi(y) : y \in C_j\}$ բազմությունը պարունակվում է մի գլանի մեջ, որի բարձրությունն է $2\varepsilon \frac{\ell}{N}$, իսկ հիմքը

$(n-1)$ չափանի գունդ է, որի շառավիղն է՝ $M\cdot\dfrac{\ell}{N}$: Այդ գլանի ծավալն է՝

$L\left(\dfrac{\ell}{N}\right)^n\varepsilon$ (օրթոգոնալ ձևափոխության միջոցով այդպիսի գլանի ծավալի հաշվումը կբերվի կոորդինատային գլանի դեպքին), որտեղ L-ը որևէ հաստատուն է: Սակայն խորանարդների թիվը $\left(C_j\cap E\neq\varnothing\right)$ չի գերազանցում N^n-ը, ուստի $\psi\left(C\cap E\right)$-ն ընդգրկված է $L\left(\dfrac{\ell}{N}\right)^n\varepsilon N^n=L\ell^n\varepsilon$ թվից փոքր կամ հավասար ծավալ ունեցող բազմության մեջ: Քանի որ դա ճիշտ է կամայական $\varepsilon>0$ թվի համար, ուստի $\psi\left(C\cap E\right)$-ն 0-չափի է:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար վերցնենք D-ի որևէ կոմպակտ սպառում՝ $\{K_m\}$: Այդ դեպքում $D=\cup K_m$, հետևաբար, $E=\cup\left(K_m\cap E\right)$ և $\psi(E)=\cup\psi\left(K_m\cap E\right)$:

Քանի որ $K_m\cap E$-ն կարելի է ծածկել h-ցանցի վերջավոր թվով խորանարդներով, որոնք ընդգրկված են K_{m+1}-ի և, հետևաբար նաև՝ D-ի մեջ, ուստի $m\left(\psi\left(K_m\cap E\right)\right)=0$:

Մյուս կողմից, հաշվելի թվով 0-չափի բազմությունների միավորումը 0-չափի է, ուստի $m\left(\psi\left(E\right)\right)=0$: ■

Ապացուցված թեորեմը մեզ թույլ է տալիս փոփոխականի փոխարինման թեորեմներում ազատվել $\det\psi'(x)\neq 0$ պայմանից:

Նշանակենք՝ $G=D\setminus E$: Այդ դեպքում G-ն բաց բազմություն է, որտեղ փոփոխականի փոխարինման թեորեմի բոլոր պայմանները բավարարվում են: Հետևաբար՝

$$\int_{G'}f(y)dy=\int_G f\left(\psi(x)\right)\left|\det\psi'(x)\right|dx,\ G'=\psi(G):$$

Ապացուցենք, որ այս ինտեգրալները համապատասխանաբար հավասար են (7.6)-ի ինտեգրալներին: Բավական է քննարկել $f \geq 0$ դեպքը:

Աջ կողմի ինտեգրալի համար ապացուցենք

$$\int_D f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx \leq \int_G f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx$$

անհավասարությունը (հակառակ անհավասարությունն ակնհայտ է):

Դրա համար բավական է ապացուցել, որ

$$\int_K f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx \leq \int_G f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx \tag{7.8}$$

անհավասարությունը, որտեղ $K \subset D$-ն J-չափելի կոմպակտ բազմություն է:

Դիտարկենք D-ի կոմպակտ չափելի սպառում՝ $\{K_m\}$: Գոյություն ունի m_0 թիվ, այնպիսին, որ $K \subset K_{m_0}$: Այդ դեպքում, երբ h-ը բավականաչափ փոքր է, h-ցանցի այն խորանարդները, որոնք K-ի հետ ընդհանուր կետ ունեն, ընդգրկված են K_{m_0+1}-ի մեջ: Դիցուք $C_1,\ldots,C_{p(h)}$-ը այն խորանարդներն են, որոնք $K \cap E$-ի հետ ընդհանուր կետ ունեն: Նշանակենք՝ $F^h = \bigcup_{i=1}^{p(h)} C_i$: Այդ դեպքում

$$F^h \in J,\ F^h \subset K_{m_0+1},\ K \setminus F^h \subset G:$$

Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$h < \delta \Rightarrow |\det\psi'(x)| < \varepsilon,\ x \in F^h \subset K_{m_0+1}: \tag{7.9}$$

Այդ դեպքում

$$\int_K f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx \leq \int_{K\setminus F^h} + \int_{F^h} \leq \int_G + \int_{F^h}: \tag{7.10}$$

Մյուս կողմից՝ $f(\psi(x)) \leq M$, $x \in K_{m_0+1}$, հետևաբար, (7.9)-ից հետևում է, որ

$$\int_{F^h} f(\psi(x))|\det\psi'(x)|dx \leq M \cdot \varepsilon \cdot V(K_{m_0+1}):$$

Այս գնահատականը տեղադրելով (7.10)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\int_K f(\psi(x))\left|\det\psi'(x)\right|dx \le \int_G \quad + M\,V\left(K_{m_0+1}\right)\cdot \varepsilon :$$

Քանի որ ստացված գնահատականը ճիշտ է կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար, ապա այն ճիշտ է նաև $\varepsilon = 0$ դեպքում: Այսպիսով, (7.8)-ն ապացուցված է: Ձախ կողմերի ինտեգրալների դեպքն ավելի հեշտ է և ընթերցողին առաջարկում ենք այդ դեպքը քննարկել ինքնուրույն:

§8. ՄԻԱՎՈՐԻ ՏՐՈՀՈՒՄԸ

<u>1. Ուրիսոնի լեմման:</u> Դիցուք՝ $f \in C(R^n)$: Նշանակենք՝

$$\operatorname{supp} f = \left\{x \in R^n : f(x) \ne 0\right\},$$

որը կոչվում է f *ֆունկցիայի կրիչ*:

Ստորև $K \prec f$ սիմվոլը նշանակում է.

ա) K -ն կոմպակտ է,

բ) $0 \le f(x) \le 1$, $x \in R^n$,

գ) $f(x) = 1$, $x \in K$,

դ) $\operatorname{supp} f$ -ը կոմպակտ է,

իսկ $f \prec V$ սիմվոլը նշանակում է.

ա) V -ն բաց է,

բ) $0 \le f(x) \le 1$, $x \in R^n$,

գ) $\operatorname{supp} f \subset V$,

դ) $\operatorname{supp} f$ -ը կոմպակտ է:

Լեմմա 8.1 (Ուրիսոն): *Եթե $K \subset R^n$ կոմպակտ բազմությունն ընկած է $V \subset R^n$ բաց բազմության մեջ, ապա գոյություն ունի $f \in C^\infty(R^n)$ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ*

$$K \prec f \prec V :$$

Ապացույցի հիմքում ընկած է Կոշիի օրինակը: Մենք գիտենք, որ

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է: Հետևաբար, անվերջ դիֆերենցելի է նաև

$$\varphi_{(a,b)}(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}\cdot e^{-\frac{1}{(b-x)^2}}, x\in(a,b) \\ 0, \qquad\qquad x\notin(a,b) \end{cases}$$

ֆունկցիան: Նշանակենք՝

$$g_\varepsilon(x)=\frac{\int\limits_0^x \varphi_{(0,\varepsilon)}(t)dt}{\int\limits_0^\varepsilon \varphi_{(0,\varepsilon)}(t)dt},\ \varepsilon>0:$$

Այս ֆունկցիան ևս անվերջ դիֆերենցելի է և $0\le g_\varepsilon(x)\le 1$, ընդ որում,

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases} 0, x\le 0 \\ 1, x\ge\varepsilon \end{cases}:$$

Այնուհետև, կամայական $a=(a_1,...,a_n)\in R^n$ կետի համար նշանակենք՝

$$f_{(a,\varepsilon)}(x)=\varphi\left(\frac{x_1-a_1}{\varepsilon}\right)\cdot\varphi\left(\frac{x_2-a_2}{\varepsilon}\right)\cdots\varphi\left(\frac{x_n-a_n}{\varepsilon}\right),\ x=(x_1,...,x_n),$$

որտեղ $\varphi=\varphi_{(-1,1)}$: Այդ դեպքում՝ $f_{(a,\varepsilon)}\in C^\infty(R^n)$,

$f_{(a,\varepsilon)}(x)>0$, երբ $x\in I(a,\varepsilon):=(a_1-\varepsilon,a_1+\varepsilon)\times\cdots\times(a_n-\varepsilon,a_n+\varepsilon)$, իսկ մնացած կետերում $f_{(a,\varepsilon)}(x)$ -ը զրո է:

Այս նախապատրաստական աշխատանքից հետո անցնենք լեմմա 8.1-ի ապացույցին:

▶ Յուրաքանչյուր $t\in K$ կետի համար գոյություն ունի t կենտրոնով I_t բաց խորանարդ, այնպիսին, որ $\bar{I}_t\subset V$: Այդ դեպքում $K\subset\bigcup\limits_t I_t$: Քանի որ K -ն կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $I_{t_1},...,I_{t_p}$:

Այդ խորանարդների համար վերևում կառուցված $f_{(a,\varepsilon)}$ ֆունկցիաները նշանակենք համապատասխանաբար $f_1,...,f_p$ -ով և $f_0:=f_1+...+f_p$: Այդ դեպքում f_0-ն անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա է, որը K-ի վրա ընդունում է դրական արժեքներ: Հետևաբար $\min_{x\in K} f_0(x) = \varepsilon > 0$:

Բացի դրանից՝

$$\operatorname{supp} f_0 \subset \bigcup_{j=1}^{p} \bar{I}_j \subset V:$$

Հետևաբար, $f(x) = g_\varepsilon\big(f_0(x)\big)$ ֆունկցիան բավարարում է լեմմայի պահանջներին: ■

<u>**2. Միավորի տրոհումը:**</u>

Թեորեմ 8.1: *Եթե $V_1,\ldots,V_n$-ը R^m-ում ընկած բաց բազմություններ են, $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_i \,,$$

ապա գոյություն ունեն $h_i \prec V_i$ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$h_1(x) + \cdots + h_n(x) = 1 \,,\; x \in K \,,\; \sum h_i(x) \le 1,\; x \in R^m: \qquad (8.1)$$

(8.1)-ին բավարարող ֆունկցիաների $\{h_1,\ldots,h_n\}$ հավաքածուն կոչվում է $\{V_i\}$ ծածկույթին ենթարկված *միավորի տրոհում* K-ի վրա:

► Յուրաքանչյուր $x \in K$ կետի համար գոյություն ունի x կենտրոնով I_x բաց խորանարդ, այնպիսին, որ $\bar{I}$-ը ընկած է V_i-երից որևէ մեկի մեջ: Այդ դեպքում՝ $K \subset \bigcup_x I_x$: Քանի որ K-ն կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $I_{x_1},\ldots,I_{x_p}$, ընդ որում, $\bar{I}_{x_1},\ldots,\bar{I}_{x_p}$ փակ խորանարդներից յուրաքանչյուրն ընկած է V_i-երից գոնե մեկի մեջ: H_i-ով նշանակենք այն փակույթների միավորումը, որոնք ընկած են V_i-ի մեջ,

$i=1,2,\dots,n$: Այդ դեպքում H_i-ն կոմպակտ է և $H_i \subset V_i$, $i=1,2,\dots,n$: Ուրիսոնի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունեն g_i ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$H_i \prec g_i \prec V_i,\ i=1,2,\dots,n:$$

Նշանակենք՝ $h_1=g_1$; $h_i=(1-g_1)\cdots(1-g_{i-1})g_i$, $2\le i\le n$:

Այդ դեպքում $h_i \prec V_i$ և

$$h_1+h_2+\cdots+h_i=1-(1-g_1)\cdots(1-g_i),\ 1\le i\le n, \tag{8.2}$$

ինչը ստուգվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Քանի որ $K\subset H_1\cup\cdots\cup H_n$, ապա յուրաքանչյուր $x\in K$ կետում g_i ֆունկցիաներից գոնե մեկը ընդունում է 1 արժեքը, ուստի (8.2)-ը ցույց է տալիս, որ (8.1)-ը տեղի ունի: ■

Թեորեմ 8.2: *Եթե $A\subset R^n$ բազմությունը ծածկված է $O=\{U\}$ բաց բազմությունների ընտանիքով, ապա գոյություն ունի $\Phi=\{\varphi\}$ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների հաշվելի ընտանիք, այնպիսին, որ*

1^0. Յուրաքանչյուր $\varphi\in\Phi$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $U\in O$ բազմություն, այնպիսին, որ $\varphi\prec U$:

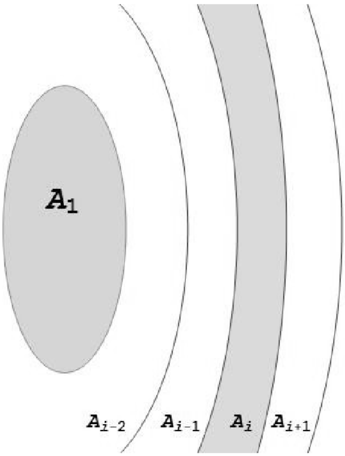
2^0. Յուրաքանչյուր $x\in A$ կետի համար գոյություն ունի x-ը պարունակող V_x բաց բազմություն և Φ-ի F վերջավոր ենթաբազմություն, այնպես, որ

$$\left.\begin{matrix} y\in V_x \\ \varphi\in\Phi\setminus F\end{matrix}\right\}\Rightarrow \varphi(y)=0:$$

3^0. $\sum\limits_{\varphi\in\Phi}\varphi(x)=1$, $x\in A$ *և* $\sum\limits_{\varphi\in\Phi}\varphi(x)\le 1$, $x\in R^n$:

▶ Երբ A-ն կոմպակտ բազմություն է, այդ դեպքում թեորեմն ապացուցված է: Ընդհանուր դեպքում թեորեմն ապացուցենք երեք քայլով:

I քայլ: Ենթադրենք $A=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, որտեղ յուրաքանչյուր A_i կոմպակտ է և $A_i \subset \operatorname{int} A_{i+1}$:



Նշանակենք՝ $B_i = A_i \setminus \operatorname{int} A_{i-1}$ $(A_0=\varnothing)$ և

$$O_i = \{U \cap (\operatorname{int} A_{i+1} \setminus A_{i-2}) : U \in O\},\ i \geq 2,$$
$$O_1 = \{U \cap \operatorname{int} A_2 : U \in O\}:$$

Այդ դեպքում B_i-ն կոմպակտ է, որը ծածկված է բաց բազմությունների O_i վերջավոր ընտանիքով: Այդ զույգի վրա կիրառենք թեորեմ 8.1-ը և առաջացած ֆունկցիաների ընտանիքը նշանակենք Φ_i-ով: Եվ վերջապես, նշանակենք՝ $\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i$:

Այդ դեպքում 1^0-ը և 2^0-ը կբավարարվեն, որովհետև, եթե $x \in A_i$, ապա բոլոր Φ_j, $j \geq i+2$ ընտանիքների բոլոր ֆունկցիաներն այդ կետում ընդունում են 0 արժեքը:

3^0-ն ապահովելու համար նշանակենք՝ $\sigma(x)=\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi(x)$, որը յուրաքանչյուր x կետում վերջավոր գումար է, և յուրաքանչյուր $\varphi \in \Phi$ ֆունկցիայի համար նշանակենք՝

$$\tilde{\varphi}(x)=\frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}:$$

Այդ $\tilde{\varphi}$ ֆունկցիաների ընտանիքը կբավարարի նաև 3^0 պայմանին ($\tilde{\varphi}$-ի անվերջ դիֆերենցելիությունը հետևում է 2^0-ից):

II քայլ: Ենթադրենք, թե A-ն բաց բազմություն է: Այս դեպքում կդիտարկենք A-ի կոմպակտ սպառումը՝

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i\ ,\ K_i\subset \operatorname{int}K_{i+1}\,,$$

և հարցը կհանգի նախորդ դեպքին:

III քայլ: Դիցուք A-ն կամայական բազմություն է: Այս դեպքում նշանակենք՝ $\tilde{A}=\bigcup\limits_{U\in O}U$, որը բաց բազմություն է: $\tilde{A}$-ի համար կառուցված միավորի տրոհումը (O ծածկույթին ենթարկված) կլինի միավորի տրոհում նաև A-ի համար: ■

3. Անիսկական ինտեգրալի սահմանումը միավորի տրոհման միջոցով:

Դիցուք D-ն R^m-ում ընկած բաց բազմություն է, որը կարող է լինել նաև ոչ չափելի, և $f\in\Re(D)$ անիսկական ինտեգրալի իմաստով: Այսինքն՝ f-ի խզման կետերի բազմությունը 0-չափի է և

$$\sup_{K\subset D}\int_K|f|<\infty\,,$$

որտեղ $\sup$-ը վերցվում է ըստ բոլոր J-չափելի կոմպակտ ենթաբազմությունների:

Թեորեմ 8.3: *Եթե $f\in\Re(D)$ և $\{\varphi\}=\Phi$ ընտանիքը միավորի տրոհում է D-ի վրա, ապա*

$$\int_D f=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_D\varphi f\,, \tag{8.3}$$

ընդ որում, (8.3) շարքը բացարձակ զուգամետ է:

► Քանի որ $\{\varphi\}$-ն հաշվելի է, ապա այն կարող ենք համարակալել՝ $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_p,\ldots$: Այդ դեպքում՝

$$\sum_{i=1}^{p}\left|\int_D\varphi_i f\right|\le\int_D|f|\sum_{i=1}^{p}\varphi_i\le\int_D|f|\,,$$

հետևաբար (8.3) շարքը բացարձակ զուգամետ է:

(8.3) հավասարությունն ապացուցելու համար վերցնենք D-ի կոմպակտ սպառում՝ $D=\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$: Այդ դեպքում՝

$$\int_{K_n} f = \sum_{i=1}^{p_n} \int_D \varphi_i f \,, \tag{8.4}$$

որտեղ p_n-ը K_n-ի վրա 0-ից տարբեր արժեքներ ընդունող φ_i ֆունկցիաների ինդեքսներից մեծագույնն է: (8.4)-ում անցնելով սահմանի՝ թեորեմ 7.2-ի շնորհիվ կստանանք (8.3)-ը: ■

XVIII ԳԼՈՒԽ

ԿՈՐԱԳԻԾ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ
(Դասական մոտեցումը)

§1. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Պարամետրացված կոր և նրա կողմնորոշումը: Մինչ այժմ γ կոր ասելով՝ հասկանում էինք անընդհատ արտապատկերում՝ $\gamma \in C\left([\alpha,\beta],R^n\right)$: Այն կոչվում էր պարզ կոր, եթե բավարարվում էր

$$\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta \Rightarrow \gamma(t_1) \ne \gamma(t_2) \tag{1.1}$$

պայմանը (VI, §3, 1 և VII, §3, 3): Այսուհետ նպատակահարմար է կորը դիտարկել նաև որպես երկրաչափական պատկեր կամ շարժվող կետի հետագիծ՝ ճանապարհ:

Սահմանում: $\Gamma \subset R^n$ *բազմությունը կոչվում է պարամետրացված պարզ կոր, եթե գոյություն ունի* $\gamma \in C\left([\alpha,\beta],R^n\right)$ *պարզ կոր,այնպիսին, որ* $\gamma([\alpha,\beta]) = \Gamma$ *: Այդ դեպքում* γ *-ն կոչվում է* Γ *-ի պարամետրացում կամ պարամետրական ներկայացում:*

Եթե Γ-ն պարամետրացված պարզ կոր է, որի համար γ-ն պարամետրացում է, իսկ $t=\varphi(\tau) \in C[\alpha_1,\beta_1]$ ֆունկցիան խիստ աճող կամ խիստ նվազող է, ու $\varphi\left([\alpha_1,\beta_1]\right)=[\alpha,\beta]$, ապա

$$\gamma_1(\tau) := \gamma(\varphi(\tau)),\ \ \tau \in [\alpha_1,\beta_1], \tag{1.2}$$

ֆունկցիան նույնպես Γ-ի պարամետրացում է: Կարող ենք պնդել ավելին. եթե $\gamma_2 \in C\left([\alpha_2,\beta_2],R^n\right)$ ֆունկցիան Γ-ի պարամետրացում է, ապա այն ունի (1.2) տեսքը:

► Իրոք, քանի որ $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$ (VII, §5, 1 և 2), ապա, նշանակելով $\varphi(\tau)=\gamma^{-1}(\gamma_2(\tau))$, կունենանք՝ $\varphi \in C[\alpha_2,\beta_2]$, $\varphi([\alpha_2,\beta_2])=[\alpha,\beta]$ և φ

արտապատկերումը փոխմիարժեք է: Համոզվենք, որ φ ֆունկցիան խիստ մոնոտոն է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, թե $\varphi(\alpha_2)<\varphi(\beta_2)$ և ապացուցենք, որ φ ֆունկցիան խիստ աճող է: Նախ նկատենք, որ φ արտապատկերման փոխմիարժեքությունից և Բոլցանո-Կոշիի II թեորեմից (III, թեորեմ 2.2) հետևում է, որ եթե $\alpha_2<\tau<\beta_2$, ապա $\varphi(\alpha_2)<\varphi(\tau)<\varphi(\beta_2)$ (ապացուցվում է հակասող ենթադրության մեթոդով): Հանգունորեն, եթե $\alpha_2\le\tau'<\tau''\le\beta_2$, ապա $\varphi(\tau')<\varphi(\tau'')$, այսինքն՝ φ ֆունկցիան խիստ աճող է: Մնում է արձանագրել, որ $\gamma(\varphi(\tau))=\gamma\left(\gamma^{-1}\left(\gamma_2(\tau)\right)\right)=\gamma_2(\tau)$: ■

Այսպիսով, եթե Γ-ն պարամետրացված պարզ կոր է, որի համար γ -ն որևէ պարամետրացում է, ապա (1.2) բանաձևի միջոցով ստացվում են Γ-ի բոլոր պարամետրացումները:

Γ-ն կոչվում է նաև γ *վեկտոր - ֆունկցիայի կրիչ:*

Հաճախ Γ-ն պատկերացվում է որպես $\gamma(t)$ շարժվող կետի հետագիծ (կամ՝ ճանապարհ) այն իմաստով, որ եթե t պարամետրը α կետից (աճելով) շարժվում է մինչև β կետը, ապա $\gamma(t)$ կետը $A:=\gamma(\alpha)$ կետից Γ կորի երկայնքով շարժվում է մինչև $B:=\gamma(\beta)$ կետը*: Այս դեպքում A կետը կոչվում է γ *կորի սկզբնակետ*, իսկ B -ն՝ *վերջնակետ*:

A և B կետերը կոչվում են Γ կորի *ծայրակետեր*, կամ ասում են՝ Γ կորը միացնում է A և B կետերը: Սկզբնակետ և վերջնակետ տերմինները Γ կրիչի համար օգտագործել չի կարելի, քանզի եթե (1.2) ներկայացման մեջ φ ֆունկցիան խիստ նվազող է, ապա γ_1-ի համար, որի կրիչը նույն Γ-ն է, սկզբնակետը B-ն է, իսկ վերջնակետը՝ A-ն: Այդ հանգամանքը հաշվի առնելով՝ A սկզբնակետով և B վերջնակետով γ կորի (ֆունկցիայի) կրիչը կնշանակենք $\Gamma(\gamma)$ -ով կամ՝ $\Gamma(AB)$ -ով :

---

* Այդ երևույթի մաթեմատիկական իմաստը կայանում է նրանում, որ Γ կորի $\gamma(t)$ կետերը կարգավորվում են ըստ t պարամետրի:

$\Gamma(AB)$-ն և $\Gamma(BA)$-ն կոչվում են *կողմնորոշված կորեր,* կամ՝ Γ-ի *կողմնորոշումներ:*

Ընդհանուր դեպքում (երբ (1.1) պայմանը կարող է և խախտվել) $\gamma_1 \in C\left([\alpha_1, \beta_1], R^n\right)$ և $\gamma \in C\left([\alpha, \beta], R^n\right)$ արտապատկերումներն անվանում են համարժեք կորեր և նշանակում՝ $\gamma_1 \sim \gamma$, եթե գոյություն ունի $\varphi \in C[\alpha_1, \beta_1]$ խիստ աճող ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\varphi\left([\alpha_1, \beta_1]\right) = [\alpha, \beta]$ և

$$\gamma_1(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)),\ \tau \in [\alpha_1, \beta_1]:$$

Պարզ կորերի դեպքում $\gamma_1 \sim \gamma$ գրառումը նշանակում է, որ $\Gamma(\gamma_1)$ և $\Gamma(\gamma)$ ճանապարհները համընկնում են:

Եթե γ կորը դիտարկենք որպես շարժվող կետի հետագիծ (կամ՝ ճանապարհ), ապա համարժեք կորերը կունենան նույն հետագիծը՝ $\Gamma(\gamma_1) = \Gamma(\gamma)$: Այդուհանդերձ, հաճախ γ արտապատկերումը և նրա հետագիծը նշանակում են նույն տառով:

<u>2. Կորի բնական պարամետրացումը:</u> Դիցուք $\Gamma(AB)$-ն $\gamma \in C\left([\alpha, \beta], R^n\right)$ պարամետրացումով պարզ կողմնորոշված կոր է, ընդ որում γ-ն ուղղելի է և նրա երկարությունը S է*: Այդ դեպքում $\Gamma(AB)$-ն կոչվում է ուղղելի և S-ը կոչվում է նրա երկարություն: Հայտնի է, որ (XIII, §1, 7)

$$S = \bigvee_{\alpha}^{\beta}(\gamma):$$

Նշանակենք՝

$$s(t) = \bigvee_{\alpha}^{t}(\gamma),\ \ \alpha \le t \le \beta\ ,\ (s(\alpha) = 0), \tag{1.3}$$

որը γ անընդհատ ֆունկցիայի վարիացիոն ֆունկցիան է: Հետևաբար, $s(t)$ ֆունկցիան աճող անընդհատ ֆունկցիա է (XIII, §1, 6): Բացի դրանից, (1.1)

---

* Նկատենք, որ այդ դեպքում (1.2) բանաձևով որոշվող $\gamma_1(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ կորը նույնպես ուղղելի է և նրա երկարությունը նույն S-ն է (XIII, §1, 7):

պայմանից հետևում է, որ s-ը խիստ աճող է: Իրոք, հակառակ դեպքում գոյություն կունենան $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ կետեր, այնպիսիք, որ $t_1 < t_2$ և $s(t_1) = s(t_2)$, որի արդյունքում կստանանք $\overset{t_2}{\underset{t_1}{V}}(\gamma) = 0$: Հետևաբար, γ ֆունկցիան $[t_1, t_2]$ հատվածում կլինի հաստատուն, ինչը հակասում է (1.1)-ին:

Հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, $s(t)$ ֆունկցիան կունենա անընդհատ հակադարձ, որը կնշանակենք՝ $t = t(s) : [0, S] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$:

Ստացված $t(s)$ ֆունկցիան տեղադրելով (1.2)-ի մեջ՝ կստանանք $\Gamma(AB)$-ի հետևյալ պարամետրացումը՝

$$r(s) := \gamma(t(s)), \quad 0 \le s \le S,$$

որը կոչվում է $\Gamma(AB)$-ի կամ γ-ի *բնական պարամետրացում*: Բնական պարամետրացման մեջ պարամետրի դերը կատարում է կորի աղեղի երկարությունը:

Լրացում: Որպեսզի ոչ պարզ կորի դեպքում հնարավոր լինի անցնել կորի բնական պարամետրացմանը, պետք է լրացուցիչ պահանջել, որ $s(t) = \overset{t}{\underset{\alpha}{V}}(\gamma)$ ֆունկցիան լինի խիստ աճող: Այսուհետ ենթադրում ենք, որ այդ պայմանը բավարարված է:

Երբ γ կորը ողորկ է, այսինքն՝ երբ $\gamma(t) = \left(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\right)$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է և $\left[\gamma_1'(t)\right]^2 + \ldots + \left[\gamma_n'(t)\right]^2 > 0$, $t \in [\alpha, \beta]$, ապա (XIII, §1, 7)

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\left[\gamma_1'(\tau)\right]^2 + \ldots + \left[\gamma_n'(\tau)\right]^2}\, d\tau : \qquad (1.3')$$

Ուստի $s'(t) = \sqrt{\left[\gamma_1'(t)\right]^2 + \ldots + \left[\gamma_n'(t)\right]^2} > 0$: Այստեղից հետևում է, որ $s(t)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան՝ $t(s)$-ը, նույնպես անընդհատ դիֆերենցելի է: Հետևաբար, γ ողորկ կորի բնական պարամետրացումը՝

$$r(s):=\gamma(t(s))=\left(\gamma_1(t(s)),...,\gamma_n(t(s))\right)=:\left(x_1(s),...,x_n(s)\right) \qquad (1.4)$$

նույնպես անընդհատ դիֆերենցելի է:

Բնական պարամետրացման դեպքում (1.3') բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$s=\int_0^s\sqrt{\left[x_1'(\tau)\right]^2+...+\left[x_n'(\tau)\right]^2}\,d\tau\,,\quad s\in[0,S]:$$

Հետևաբար,

$$\left[x_1'(s)\right]^2+...+\left[x_n'(s)\right]^2=1\,,\quad s\in[0,S]: \qquad (1.5)$$

Պարզենք $r'(s)$ վեկտորի երկրաչափական իմաստը ($n=2,3$ դեպքերում): Դիտարկենք $n=2$ դեպքը և γ կորի բնական պարամետրացումը նշանակենք՝ $r(s)=\left(x(s),y(s)\right)$, $0\le s\le S$: Դիցուք՝ $0\le s_0<S$, $\Delta s>0$: Դիտարկենք

$$r(s_0+\Delta s)-r(s_0)=\left(x(s_0+\Delta s)-x(s_0),y(s_0+\Delta s)-y(s_0)\right)$$

վեկտորը: Այն համուղղված է $\Gamma(AB)$ կորին պատկանող $M_0=r(s_0)$ և $M=r(s_0+\Delta s)$ կետերը միացնող M_0M վեկտորին (կորի հատողին): Քանի որ $\Delta s>0$, ապա

$$\frac{r(s_0+\Delta s)-r(s_0)}{\Delta s}=\left(\frac{x(s_0+\Delta s)-x(s_0)}{\Delta s},\frac{y(s_0+\Delta s)-y(s_0)}{\Delta s}\right)$$

վեկտորը համուղղված է M_0M վեկտորին: Անցնելով սահմանի, երբ $\Delta s\to 0$, կոորդինատային զուգամիտության թեորեմի համաձայն կստանանք՝

$$r'(s_0)=\left(x'(s_0),y'(s_0)\right):$$

Հետևաբար, (1.5) պայմանը նշանակում է, որ $\left|r'(s_0)\right|=1$: Քանի որ M_0M վեկտորի սահմանային դիրքը շոշափողն է M_0 կետում, ուստի $r'(s_0)$ միավոր վեկտորը ցույց է տալիս *ուղղորդված շոշափողի* ուղղությունը, որն անվանում են *շոշափողի դրական ուղղություն* ($\Gamma(BA)$-ի դեպքում կստացվի հակառակ ուղղությունը): Եթե $r(s)=\left(x(s),y(s)\right)$ միավոր վեկտորի կազմած անկյունները կոորդինատական առանցքների դրական ուղղությունների հետ նշանակենք համապատասխանաբար α -ով և β -ով, ապա

$$x'(s_0)=\cos\alpha\ ,\ y'(s_0)=\cos\beta\ : \tag{1.5'}$$

<u>3. Առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալ:</u> Դիցուք $\Gamma(AB)$-ն $\gamma\in C\left([\alpha,\beta],R^n\right)$ պարամետրացումով կողմնորոշված, ուղղելի կոր է և տրված է $f:\Gamma\to R$ $\left(\Gamma=\gamma([\alpha,\beta])\right)$ թվային ֆունկցիան:

Վերցնենք $[\alpha,\beta]$ հատվածի կամայական P տրոհում՝

$$P=\{t_0,t_1,...,t_m\}\ ,\ \ \alpha=t_0<t_1<...<t_m=\beta\ :$$

Նշանակենք՝ $s_i=s(t_i)$ (տե՛ս (1.3)-ը), $\Delta s_i=s_{i+1}-s_i$: Այնուհետև վերցնենք կամայական կետեր՝ $\tau_i\in[t_i,t_{i+1}]$, $0\le i\le m-1$, նշանակենք՝ $\gamma(\tau_i)=M_i$ և կազմենք հետևյալ *ինտեգրալային գումարը*՝

$$\sigma=\sum_{i=0}^{m-1}f(M_i)\Delta s_i\ : \tag{1.6}$$

Սահմանում: *Դիցուք՝* $\lambda=\max\limits_i(t_{i+1}-t_i)$ *: Եթե գոյություն ունի**

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma=I \tag{1.7}$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է f *ֆունկցիայի առաջին սեռի (կամ առաջին տիպի) կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված* $\Gamma(AB)$ *(կամ՝* γ *) կորով և նշանակվում է՝*

$$I=\int_\gamma f(M)ds=\int_{\Gamma(AB)}f(M)ds\ : \tag{1.8}$$

(1.7)-ը հասկացվում է հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

---

* $\lambda\to 0\Leftrightarrow\mu\to 0$, $\mu=\max\Delta s_i$:

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon ,$$

անկախ τ_i կետերի ընտրությունից: (1.8) նշանակումներից երկրորդի մեջ պարզ կորերի դեպքում $\Gamma(AB)$-ի փոխարեն հաճախ գրում են (AB) կամ AB: Այդ դեպքում Δs_i-ն՝ $A_i A_{i+1}$ աղեղի երկարությունը, կախված չէ $\Gamma(AB)$-ի γ պարամետրացումից: Ուստի (1.8) ինտեգրալի թե' գոյությունը և թե' նրա արժեքը կախված չեն $\Gamma(AB)$-ի γ պարամետրացումից: Կարող ենք պնդել ավելին՝

$$\int_{AB} f(M)ds = \int_{BA} f(M)ds , \tag{1.9}$$

այսինքն, կորի ուղղությունը փոխելիս՝ ինտեգրալը չի փոխվում: Այդ պատճառով (1.8) նշանակման մեջ $\Gamma(AB)$-ի փոխարեն կարելի է գրել Γ:

Ընդհանուր դեպքում (երբ կորը կարող է լինել նաև ոչ պարզ) (1.9)-ը գրում են հետևյալ տեսքով՝

$$\int_{\gamma} f(M)ds = \int_{\gamma^-} f(M)ds , \tag{1.9'}$$

որտեղ γ^--ը γ կորն է՝ հակառակ ուղղությամբ, այսինքն՝

$$\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t) , \;\; t \in [\alpha, \beta]:$$

Այս համապատասխանությամբ որոշվող կորը կարելի է անվանել նաև γ *կորի հակադիր կոր*:

Թեորեմ 1.1: *Եթե Γ-ն ուղղելի է, γ-ն նրա պարամետրացում է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և*

$$\int_{\gamma} f(M)ds = \int_0^S f(r(s))ds , \tag{1.10}$$

որտեղ $r(s)$-ը Γ-ի բնական պարամետրացումն է:

► Քանի որ $M_i = \gamma(\tau_i)$, $t_i \le \tau_i \le t_{i+1}$, ապա, $t = t(s)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, գոյություն ունի $\overline{s_i} \in [s_i, s_{i+1}]$ կետ, այնպիսին, որ $\tau_i = t(\overline{s}_i)$: Հետևաբար $M_i = \gamma(t(\overline{s}_i)) = r(\overline{s}_i)$: Այսինքն՝ (1.6) ինտեգրալային գումարը կարելի է ներկայացնել

$$\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} f(r(\overline{s}_i))\Delta s_i$$

տեսքով, որը $\int_0^S f(r(s))ds$ Ռիմանի ինտեգրալի ինտեգրալային գումարն է, ընդ որում, $f(r(s)) \in C[0,S]$: Հետևաբար, (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և տեղի ունի (1.10) հավասարությունը: ■

Թեորեմ 1.2: *Եթե Γ-ն ուղղելի է, γ-ն նրա պարամետրացում է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և*

$$\int_\gamma f(M)ds = (S)\int_\alpha^\beta f(\gamma(t))ds(t)\,: \tag{1.11}$$

▶ Քանի որ (1.11) հավասարության աջ և ձախ կողմերում գրված ինտեգրալների ինտեգրալային գումարները համընկնում են, և աջ կողմի Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյություն ունի (XIII, §2, 4) , ապա գոյություն ունի նաև (1.11)-ի ձախ կողմի կորագիծ ինտեգրալը և տեղի ունի պահանջվող հավասարությունը: ■

Թեորեմ 1.3: *Եթե Γ-ն ողորկ է, γ-ն նրա պարամետրացում է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և*

$$\int_\gamma f(M)ds = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + \ldots + [\gamma_n'(t)]^2}\,dt\,: \tag{1.12}$$

▶ Քանի որ γ կորը ողորկ է, ապա (1.3$'$) բանաձևի համաձայն՝

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{[\gamma_1'(\tau)]^2 + \ldots + [\gamma_n'(\tau)]^2}\,d\tau\,,\ t \in [\alpha,\beta]\,:$$

(1.10) հավասարության աջ կողմի ինտեգրալում կատարելով $s = s(t)$ փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք (1.12)-ը: ■

Մասնավոր դեպք: Եթե $n=2$ և γ պարամետրացումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $\gamma(x)=\big(x,y(x)\big)$, $x\in[a,b]$, ընդ որում, $y'\in C[a,b]$, ապա (1.12)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_\gamma f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx: \qquad (1.12')$$

<u>4. Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ:</u> Դիցուք՝ $\gamma\in C\Big([\alpha,\beta],R^n\Big)$, $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ կորն ուղղելի է* և $f:\Gamma\to R$ $\big(\Gamma=\gamma([\alpha,\beta])\big)$:

Վերցնենք $[\alpha,\beta]$ հատվածի կամայական P տրոհում՝

$$P=\{t_0,t_1,...,t_m\},\ \ \alpha=t_0<t_1<...<t_m=\beta:$$

Նշանակենք՝ $\Delta x_i^j=\gamma_j(t_{i+1})-\gamma_j(t_i)$, $0\le i\le m-1$; $1\le j\le n$ և կազմենք հետևյալ *ինտեգրալային գումարը*՝

$$\sigma_j=\sum_{i=0}^{m-1}f(M_i)\Delta x_i^j,\ \ 1\le j\le n, \qquad (1.13)$$

որտեղ $M_i=\gamma(\tau_i)$, $\tau_i\in[t_i,t_{i+1}]$, $0\le i\le m-1$:

Սահմանում: *Դիցուք՝* $\lambda=\max\limits_i(t_{i+1}-t_i)$ *: Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{\lambda\to0}\sigma_j=I_j$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն անվանում են γ *կորով տարածված* f *ֆունկցիայի երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ (ըստ* j *-րդ կոորդինատի) և նշանակում՝*

$$I_j=\int_\gamma f(x)dx^j=\int_\gamma f(x^1,...,x^n)dx^j=\int_{\Gamma(AB)}f(x)dx^j: \qquad (1.14)$$

(1.14) նշանակումներից վերջինում պարզ կորերի դեպքում $\Gamma(AB)$-ի փոխարեն հաճախ գրում են (AB) կամ AB, որտեղ $A=\gamma(\alpha)$, $B=\gamma(\beta)$:

---

* Այսինքն՝ γ_j կոորդինատային ֆունկցիաները վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ են (XIII, §1, 7):

Թեորեմ 1.4: *Եթե γ -ն ուղղելի է և $f\in C(\Gamma)$, ապա (1.14) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և*

$$\int_{\gamma} f(x^1,...,x^n)dx^j=(S)\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t)\right)d\gamma_j(t): \tag{1.15}$$

▶ Քանի որ (1.13) ինտեգրալային գումարը նաև (1.15) հավասարության աջ կողմի Ստիլտեսի ինտեգրալի ինտեգրալային գումարն է, իսկ այդ Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյություն ունի (XIII, §2, 4), ապա գոյություն ունի նաև (1.14) կորագիծ ինտեգրալը և տեղի ունի (1.15) հավասարությունը: ■

Թեորեմ 1.5: *Եթե γ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է և $f\in C(\Gamma)$, ապա (1.14) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և*

$$\int_{\gamma} f(x^1,...,x^n)dx^j=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t)\right)\gamma_j'(t)dt: \tag{1.16}$$

▶ Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$\gamma_j(t)=\gamma_j(\alpha)+\int_{\alpha}^{t}\gamma_j'(t)dt,\ \ t\in[\alpha,\beta]:$$

Ստիլտեսի ինտեգրալը Ռիմանի ինտեգրալով ներկայացնելու բանաձևի համաձայն (XIII, §2, 5)՝

$$(S)\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\gamma(t)\right)d\gamma_j(t)=\int_{\alpha}^{\beta} f\left(\gamma(t)\right)\gamma_j'(t)dt: \tag{1.17}$$

Ստիլտեսի ինտեգրալի (1.17) արժեքը տեղադրելով (1.15)-ի մեջ՝ կստանանք (1.16)-ը: ■

Մասնավոր դեպք: Դիցուք՝ $n=2$ և γ պարամետրացումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $\gamma(x)=\left(x,y(x)\right)$, $x\in[a,b]$, որտեղ $y\in C[a,b]$: Այդ դեպքում, եթե $f\in C(\Gamma)$, ապա (1.14) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int_{\gamma} f(x,y)dx=\int_{a}^{b} f\left(x,y(x)\right)dx: \tag{1.16'}$$

Հատկանշական է, որ կորի ուղղությունը փոխելիս երկրորդ սեռի ինտեգրալի նշանը փոխվում է՝

$$\int_{\gamma^-} f(x^1,...,x^n)dx^j = -\int_{\gamma} f(x^1,...,x^n)dx^j : \qquad (1.18)$$

Դա հետևում է ինտեգրալային գումարների կառուցվածքից:

Առաջիկայում մենք կօգտվենք նաև հետևյալ նշանակումից՝

$$\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy := \int_{\gamma} Pdx + \int_{\gamma} Qdy :$$

$Pdx + Qdy$ տեսքի արտահայտությունը կոչվում է *դիֆերենցիալ ձև**:

Ողորկ կորի դեպքում, հաշվի առնելով (1.5'), (1.10) և (1.16) բանաձևերը, կստանանք առաջին և երկրորդ սեռի ինտեգրալների կապը՝

$$\int_{\gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\gamma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds, \qquad (1.19)$$

որտեղ α, β -ն $r'(s)$ միավոր վեկտորի (շոշափողի դրական ուղղության) և կոորդինատական առանցքների դրական ուղղությունների կազմած անկյուններն են:

Նշենք, որ (1.19) բանաձևը ճիշտ է նաև կտոր առ կտոր ողորկ կորերի համար: Դա ապացուցելու համար (1.19) բանաձևը կգրենք ողորկ կտորների համար և, արդյունքները գումարելով, կստանանք (1.19)-ը:

<u>**5. Գուրսայի լեմման:**</u> Դիցուք տրված են $D \subset R^2$ տիրույթը, $\gamma \in C\big([\alpha,\beta],D\big)$ ուղղելի կորը և $P,Q \in C(D)$ ֆունկցիաները: Վերցնենք $[\alpha,\beta]$ հատվածի որևէ տրոհում՝ $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$, նշանակենք՝ $A_i = \gamma(t_i)$ և դիտարկենք $L = A_0A_1...A_n$ բեկյալը:

Թեորեմ 1.6:

$$\lim_{\mu\to 0}\int_{L} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} Pdx + Qdy, \qquad (1.20)$$

որտեղ $\mu = \max \Delta s_i$, *իսկ* Δs_i *-ն* A_i, A_{i+1} *կետերը միացնող կորի աղեղի երկարությունն է:*

---

* Դիֆերենցիալ ձևերի տեսությունը տե՛ս հաջորդ գլխում:

▶ Քանի որ $\Gamma=\gamma([\alpha,\beta])$-ն կոմպակտ բազմություն է և $\Gamma\subset D$, ապա բաց բազմության կոմպակտ սպառման վերաբերյալ թեորեմի համաձայն (XVII, §5, 6)՝ գոյություն ունի $D_1\subset D$ բաց սահմանափակ տիրույթ, այնպիսին, որ $\Gamma\subset D_1$, $\overline{D}_1\subset D$: Նշանակենք՝ $d=dist\left(\Gamma,D_1^c\right)>0$: Եթե ընտրենք՝ $\mu<d$, ապա $L\subset D_1$:

(1.20)-ը ապացուցենք Pdx գումարելու համար: Գնահատենք ինտեգրալների տարբերությունը՝

$$\left|\int_\gamma Pdx-\int_L Pdx\right|\le\left|\int_\gamma Pdx-\sum_{i=0}^{n-1}P(A_i)\Delta x_i\right|+\left|\sum_{i=0}^{n-1}P(A_i)\Delta x_i-\int_L Pdx\right|=$$
$$=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{A_iA_{i+1}}\left[P(x,y)-P(A_i)\right]dx\right|+\left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{[A_iA_{i+1}]}\left[P(A_i)-P(x,y)\right]dx\right|, \tag{1.21}$$

որտեղ A_iA_{i+1}-ը γ արտապատկերումն է $[t_i,t_{i+1}]$ հատվածում, իսկ $\left[A_i,A_{i+1}\right]$-ը A_i, A_{i+1} կետերը միացնող հատվածն է:

Քանի որ P ֆունկցիան անընդհատ է $\overline{D_1}$ փակ և սահմանափակ տիրույթում, ապա Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\mu<\delta\Rightarrow\left|P(A_i)-P(x,y)\right|<\varepsilon:$$

Այդ դեպքում (1.21)-ից հետևում է[*], որ $\left|\int_\gamma Pdx-\int_L Pdx\right|<2\varepsilon S$, որտեղ S-ը γ կորի երկարությունն է: ■

---

[*] Կորագիծ ինտեգրալը (1.15) բանաձևի միջոցով բերում ենքՍտիլտեսի ինտեգրալի և օգտվում Ստիլտեսի ինտեգրալի գնահատականից (XIII, §2, 6):

§2. ԳՐԻՆԻ ԲԱՆԱՁԵՎԸ

<u>**1. Փակ կորով տարածված ինտեգրալ:**</u> Հիշեցնենք, որ $\gamma \in C\left([\alpha,\beta],R^n\right)$ կորը կամ նրա $\Gamma=\gamma([\alpha,\beta])$ կրիչը կոչվում է փակ կոր, եթե $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$:

Փակ կորը կոչվում է *պարզ կոր*, եթե γ արտապատկերումը $(\alpha,\beta]$ միջակայքում փոխմիարժեք է:

Փակ կորերով տարածված ինտեգրալները ուսումնասիրելիս կարևոր դեր է խաղում *Ժորդանի թեորեմը. եթե Γ-ն պարզ, փակ կոր է R^2-ում, ապա՝*

ա) $R^2\setminus\Gamma$ բաց բազմությունը բաղկացած է կապակցվածության երկու կոմպոնենտներից, որոնցից մեկը սահմանափակ է և կոչվում է Γ կորով սահմանափակված տիրույթ կամ՝ Γ-ի ներքին տիրույթ, իսկ մյուսն անսահմանափակ է և կոչվում է Γ-ի արտաքին տիրույթ,

բ) Այդ կոմպոնենտներից յուրաքանչյուրի եզրը Γ-ն է:

$G\subset R^2$ տիրույթը կոչվում է *միակապ*, եթե ցանկացած $\Gamma\subset G$ պարզ փակ կորի ներքին տիրույթն ընկած է G-ի մեջ:

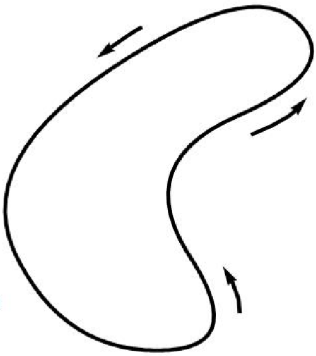
Սահմանենք Γ պարզ փակ կորի *շրջանցման ուղղություն կամ կողմնորոշում* (անկախ նրա γ պարամետրացումից): Այստեղ մենք սահմանումը կտանք նկարագրական լեզվով, իսկ ճշգրիտ սահմանումը կտրվի հաջորդ գլխում:

Ենթադրենք xy-ը հարթության վրա ուղղանկյուն դեկարտյան աջ համակարգ է, այսինքն՝ x-երի դրական կիսաառանցքը կոորդինատների սկզբնակետի շուրջը 90^0 անկյունով ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությանը հակառակ ուղղությամբ պտտելիս՝ համընկնում է y-ների դրական կիսաառանցքի հետ:

Դիտարկենք $O=(0,0)$ կենտրոնով և r շառավղով Γ շրջանագծի պարամետրացումը՝ $\gamma(t)=(r\cos t,r\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$: Երբ t-ն փոփոխվում է 0-ից մինչև 2π, այդ դեպքում նրա պատկեր $\gamma(t)$ կետը Γ

շրջանագծի վրա կատարում է մեկ լրիվ պտույտ՝ պտտվելով ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությանը հակառակ ուղղությամբ: Այս դեպքում կասենք, որ $\gamma(t)$ կետը Γ շրջանագիծը շրջանցում է ժամսլաքի հակառակ ուղղությամբ, կամ՝ $\gamma(t)$ կետը Γ շրջանագիծը շրջանցում է դրական ուղղությամբ: Հակառակ ուղղությամբ շրջանցումը կանվանենք բացասա-կան (կամ բացասական ուղղությամբ) շրջանցում:

Շրջանագծի վրայով պտտվող կետը համարելով դիտորդ՝ այս սահմանումը (նորից նկարագրական լեզվով) կարելի է տալ նաև հետևյալ կերպ. դիտորդը շրջանագծի վրայով դրական ուղղությամբ պտտվելիս՝ (շրջանագիծը դրական ուղղությամբ շրջանցելիս) շրջանագծով սահմանա-փակված տիրույթը (շրջանը) մնում է դիտորդի ձախ կողմում: Այս երկրորդ սահմանումը տարածվում է ցանկացած Γ կտոր առ կտոր ողորկ, պարզ, փակ կորի վրա: Այսպիսի կորը կանվանենք *կոնտուր*:



Γ

Այսպիսով, Γ կոնտուրն ունի շրջանցման երկու ուղղություն՝ դրական ուղղությամբ շրջանցում, որի դեպքում Γ-ով սահմանափակված տիրույթի՝ դիտորդին բավականաչափ մոտ կետերը մնում են նրա ձախ կողմում, և շրջանցման հակառակ ուղղությունը, որը կանվանենք բացասական ուղղությամբ շրջանցում:

Քանի որ կորի ուղղությունը փոխելիս երկրորդ սեռի ինտեգրալի նշանը փոխվում է (տե'ս (1.18))-ը, ապա Γ կոնտուրի դրական ուղղությամբ տարածված ինտեգրալը կնշանակենք $\int\limits_{\Gamma}$ կամ $\int\limits_{\Gamma\uparrow}$ սիմվոլներով, իսկ բացասական ուղղությամբ տարածված ինտեգրալը՝ $-\int\limits_{\Gamma}$ կամ $\int\limits_{\Gamma\downarrow}$:

<u>2. Գրինի բանաձևը:</u>

Թեորեմ 2.1: *Դիցուք* $\Gamma\subset R^2$ *կոնտուրի ներքին տիրույթը* D*-ն է: Այդ դեպքում* D*-ն քառակուսելի է և, եթե* P *և* Q *ֆունկցիաներն անընդհատ* *դիֆերենցելի են*[*] $\bar{D}$ *փակ տիրույթը պարունակող* G *բաց բազմության վրա, ապա*

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy : \qquad (2.1)$$

▶ (2.1) բանաձևն ապացուցելու համար բավական է համոզվել, որ

$$\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\Gamma} Pdx , \qquad (2.1')$$

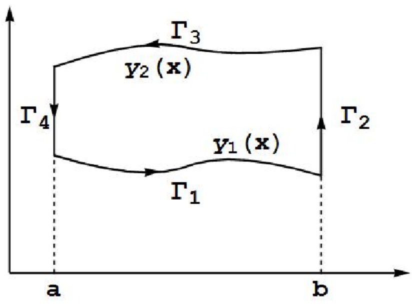
$$\iint_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\Gamma} Qdy : \qquad (2.1'')$$

Ապացուցենք (2.1')-ը, մյուսը կապացուցվի նույն կերպ:

Նախ դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ D-ն կորագիծ սեղան է, որը սահմանափակված է $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ ուղիղներով և $y_1(x) < y_2(x)$, $x \in [a,b]$ անընդհատ կորերով:

Այդ դեպքում կրկնակի ինտեգրալի հաշվման բանաձևի (XVII, §5, 3) համաձայն՝

$$\iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{a}^{b} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_{a}^{b} \left[P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)) \right] dx , \qquad (2.2)$$



որտեղ վերջին հավասարությունը հետևում է Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից:

Այժմ D կորագիծ սեղանի Γ եզրագիծը տրոհենք Γ_i, $1 \le i \le 4$ չորս կողմնորոշված կտորների, ինչպես ցույց է տրված գծագրի վրա:

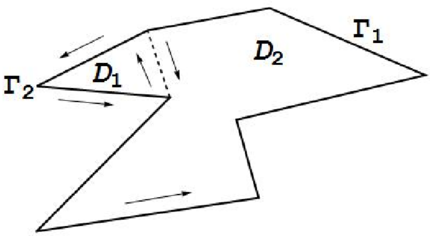
[*] Բավական է, որ անընդհատ լինեն (2.1) բանաձևի մեջ մասնակցող ֆունկցիաները:

Այդ դեպքում կորագիծ ինտեգրալի հաշվման (1.16') բանաձևի համաձայն, (2.2)-ից կստանանք՝

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{\Gamma_3} P(x,y)dx - \int_{\Gamma_1} P(x,y)dx : \qquad (2.3)$$

Բացի դրանից՝ $\int_{\Gamma_i} P(x,y)dx = 0$, $i = 2,4$: Հաշվի առնելով այն, որ Γ կորով տարածված ինտեգրալը հավասար է նրա՝ Γ_i, $1 \le i \le 4$ մասերով տարածված ինտեգրալների գումարին, (2.3)-ից կստանանք (2.1')-ը:

Ընդհանուր դեպքում (2.1')-ը ապացուցելու համար կօգտվենք Գուրսայի լեմմայից: Նախ համոզվենք, որ (2.1')-ը ճիշտ է, երբ Γ-ն պարզ, փակ բեկյալ է՝ $\Gamma = A_0 A_1 ... A_n$, $A_0 = A_n$: $n = 3$ դեպքում ստացվում է եռանկյուն, որն իրենից ներկայացնում է կորագիծ սեղան, հետևաբար այս դեպքում (2.1')-ը ճիշտ է:



$n > 3$ դեպքում կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Ներկայացնելով $D = D_1 \cup D_2$ տեսքով (տե'ս գծագիրը), կունենանք՝

$$\iint_D Pdx = \iint_{D_1} Pdx + \iint_{D_2} Pdx = -\int_{\Gamma_1} Pdx - \int_{\Gamma_2} Pdx = -\int_{\Gamma} Pdx :$$

Կամայական Γ կոնտուրի դեպքում (2.1')-ն ապացուցելու համար Γ-ին ներգծենք $L_n = A_0 A_1 ... A_n$, $A_0 = A_n$ բեկյալ*, որով սահմանափակված տիրույթը կնշանակենք D_n-ով: Այդ դեպքում

$$\iint_{D_n} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_{L_n} Pdx :$$

---

* Պարզության համար ենթադրենք, որ L_n-ը պարզ, փակ բեկյալ է:

Գուրսայի լեմմայի համաձայն՝

$$\lim_{\mu\to 0}\int_{L_n} Pdx = \int_{\Gamma} Pdx\,,\quad \mu = \max \Delta s_i :$$

Հետևաբար, մեզ մնում է ապացուցել, որ

$$\lim_{\mu\to 0}\iint_{D_n} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy\,,\quad \mu = \max \Delta s_i : \tag{2.4}$$

Նախ, օգտվելով G բաց բազմության կոմպակտ սպառումից, ընտրենք $K \subset G$ կոմպակտ բազմություն այնպես, որ $\bar{D} \subset \operatorname{int} K$:

Այնուհետև վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և կառուցենք C բաց բազմություն, այնպիսին, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները՝

$$\text{ա) } \Gamma \subset C\,,\ \text{բ) } C \subset K\,,\ \text{գ) } V(C) < \varepsilon : \tag{2.5}$$

Γ-ի երկարությունը նշանակենք S-ով, $\operatorname{int} K$-ն՝ G_1-ով, իսկ m բնական թիվն ընտրենք այնպես, որ

$$\frac{S}{m} < dist\left(\Gamma, G_1^c\right) \text{ և } \frac{\pi S^2}{m} < \varepsilon :$$

Այնուհետև $M_i \in \Gamma$, $0 \le i \le m-1$ կետերն ընտրենք այնպես, որ $M_i M_{i+1}$ աղեղի երկարությունը լինի* $\dfrac{S}{m}$: Այդ դեպքում $C = \bigcup_{i=0}^{m-1} B\left(M_i, \dfrac{S}{m}\right)$ բաց բազմությունը կընդգրկի Γ-ն, $\bar{C} \subset G_1$ և $V(C) \le m\pi\left(\dfrac{S}{m}\right)^2 = \dfrac{\pi S^2}{m} < \varepsilon$:

(2.5)-ից հետևում է, որ D-ի եզրը 0-մակերեսի է, հետևաբար, D-ն քառակուսելի է:

Այժմ ապացուցենք (2.4)-ը: Նշանակենք՝ $E = D \setminus C$, $f = \dfrac{\partial P}{\partial y}$:

---

* Այդպիսի կետերի գոյությունը կարելի է ապացուցել՝ օգտվելով կորի բնական պարամետրացումից:

Եթե $\mu < \delta := dist\left(\Gamma, C^C\right)$, ապա $L_n \subset C$, ուստի $E \subset D_n$ և $D_n \setminus E \subset C$:

Այդ դեպքում

$$\left|\iint_D f - \iint_{D_n} f\right| = \left|\iint_{D\setminus E} f - \iint_{D_n\setminus E} f\right| \le \iint_{D\setminus E} |f| + \iint_{D_n\setminus E} |f| \le 2M\varepsilon ,$$

որտեղ $M = \max_{x\in K} |f(x)|$: ■

Հետևանք (մակերեսի արտահայտումը կորագիծ ինտեգրալի միջոցով): (2.1$''$)-ի մեջ վերցնելով $Q = x,\ P = 0$, կստանանք

$$S(D) = \int_\Gamma x dy ,$$

որտեղ $S(D)$-ն D տիրույթի մակերեսն է:

<u>3. Գրինի բանաձևը բազմակապ տիրույթների համար:</u> Դիցուք բավարարվում են նախորդ թեորեմի պայմանները և $\Gamma_i \subset D$, $1 \le i \le p$, կոնտուրներով սահմանափակված $\overline{D}_i$ փակ տիրույթները չեն հատվում:

Նշանակենք $\Lambda = D \setminus \bigcup_{i=1}^{p} D_i$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.2:

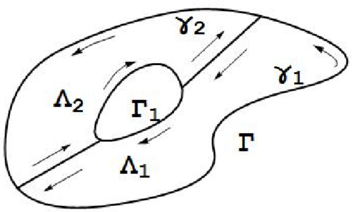
$$\iint_\Lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\Gamma Pdx + Qdy - \sum_{i=1}^{p} \int_{\Gamma_i} Pdx + Qdy : \qquad (2.6)$$

▶ Ինտեգրալի ադիտիվության շնորհիվ ունենք՝

$$\iint_\Lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy - \sum_{i=1}^{p} \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy :$$

Գրինի բանաձևի միջոցով աջ կողմի կրկնակի ինտեգրալները փոխարինելով համապատասխան կորագիծ ինտեգրալներով՝ կստանանք (2.6)-ը: ■

Դժվար չէ համոզվել, որ (2.6) բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են ոչ թե ամբողջ G տիրույթում, այլ $\overline{\Lambda}$ փակ տիրույթը պարունակող որևէ G_1 բաց տիրույթում:



▶ Իրոք, $p=1$ դեպքում, Λ-ն ներկայացնելով $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ տեսքով (տե՛ս գծագիրը), որտեղ Λ_1, Λ_2-ը միակապ տիրույթներ են, ու դրանց եզրագծերը նշանակելով γ_1, γ_2-ով, Գրինի բանաձևից կստանանք՝

$$\iint\limits_{\Lambda}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_{\Lambda_1}\bullet+\iint\limits_{\Lambda_2}\bullet=\int\limits_{\gamma_1}Pdx+Qdy+\int\limits_{\gamma_2}\bullet=$$
$$=\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy-\int\limits_{\Gamma_1}Pdx+Qdy:$$

$p>1$ դեպքում կկիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: ■

§3. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ՃԱՆԱՊԱՐՀԻՑ

1. Կորագիծ ինտեգրալի անկախությունը ճանապարհից: Դիցուք P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ են $D \subset R^2$ տիրույթում:

Սահմանում : *Կասենք, որ D տիրույթում $\omega = Pdx + Qdy$ դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը կախված չէ ճանապարհից (ճանապարհից անկախ է), եթե ցանկացած $A,B \in D$ կետերի զույգի և այդ կետերը միացնող $\Gamma_1(AB) \subset D$ և $\Gamma_2(AB) \subset D$ ուղղելի կորերի համար՝*

$$\int\limits_{\Gamma_1(AB)}\omega=\int\limits_{\Gamma_2(AB)}\omega:$$

Թեորեմ 3.1: *Որպեսզի ω դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը D տիրույթում կախված չլինի ճանապարհից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ D տիրույթում ω դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը՝ տարածված ցանկացած ուղղելի, փակ կորով, լինի զրո:*

▶ *Անհրաժեշտություն:* Դիցուք՝ $\gamma \in C\left([\alpha,\beta],R^2\right)$, $\gamma([\alpha,\beta]) \subset D$, γ -ն ուղղելի, փակ կոր է՝ $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$:

Վերցնենք կամայական $t_0 \in (\alpha,\beta)$ կետ և նշանակենք՝

$$\gamma_1(t)=\gamma(t),\ t\in[\alpha,t_0];\ \ \gamma_2(t)=\gamma(t),\ t\in[t_0,\beta];$$

$$A=\gamma(\alpha)=\gamma_1(\alpha);\ B=\gamma(t_0)=\gamma_2(t_0),\ \Gamma_1(AB)=\gamma_1,\ \ \Gamma_2(AB)=\gamma_2^-:$$

Այդ դեպքում, ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\int\limits_{\gamma_1}\omega=\int\limits_{\gamma_2^-}\omega$:

Հետևաբար,

$$0=\int\limits_{\gamma_1}\omega-\int\limits_{\gamma_2^-}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega+\int\limits_{\gamma_2}\omega=\int\limits_{\gamma}\omega:$$

Բավարարություն: Դիցուք $\gamma_1,\gamma_2\subset D$ կորերը $A,B\in D$ կետերը միացնող ուղղելի կորեր են:

Դիտարկենք[*] $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2^-$ փակ կորը: Այդ դեպքում՝

$$0=\int\limits_{\gamma}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega+\int\limits_{\gamma_2^-}\omega=\int\limits_{\gamma_1}\omega-\int\limits_{\gamma_2}\omega:\ ■$$

2. Դիֆերենցիալ ձևի նախնականի գոյությունը:

Սահմանում: *Եթե գոյություն ունի $D\subset R^2$ տիրույթում դիֆերենցելի F ֆունկցիա, այնպիսին, որ*

$$dF=\omega=Pdx+Qdy, \tag{3.1}$$

ապա այդ F -ը կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի նախնական: Այդ դեպքում ω դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է լրիվ (կամ ճշգրիտ) D -ում:

---

[*] γ -ն այն կետի հետագիծն է, որը A -ից մինչև B գնում է γ_1 ճանապարհով, այնուհետև B -ից մինչև A՝ γ_2^- ճանապարհով:

Թեորեմ 3.2: *Որպեսզի ω դիֆերենցիալ ձևը D տիրույթում ունենա նախնական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ինտեգրալը D տիրույթում ճանապարհից կախված չլինի:*

▶ *Բավարարություն:* Վերցնենք կամայական $(a,b)\in D$ կետ և դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(x,y)=\int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx+Qdy\,,\ (x,y)\in D\,, \tag{3.2}$$

որտեղ ինտեգրալը հասկացվում է որպես (a,b) և (x,y) կետերը միացնող ցանկացած γ ուղղելի կորով տարածված ինտեգրալ: Քանի որ D տիրույթում $\omega=Pdx+Qdy$ դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը ճանապարհից անկախ է, ուստի F -ը γ -ից կախված չէ:

Ապացուցենք, որ $dF=\omega$, այսինքն՝

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P\,,\ \ \frac{\partial F}{\partial y}=Q\,: \tag{3.1'}$$

Վերցնենք կամայական $(x_0,y_0)\in D$ կետ և այդ կետում ապացուցենք (3.1') հավասարություններից առաջինը (մյուսը կապացուցվի նույն կերպ): Այդ նպատակով կազմենք աճերի հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta_x F(x_0,y_0)}{\Delta x}=\frac{F(x_0+\Delta x,y_0)-F(x_0,y_0)}{\Delta x}\,, \tag{3.3}$$

որտեղ

$$F(x_0,y_0)=\int_{(a,b)}^{(x_0,y_0)}\omega\,,\ F(x_0+\Delta x,y_0)=\int_{(a,b)}^{(x_0,y_0)}\omega+\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+\Delta x,y_0)}\omega\,: \tag{3.4}$$

Վերջին ինտեգրալում որպես (x_0,y_0) և $(x_0+\Delta x,y_0)$ կետերը միացնող կոր վերցնենք

$$\left.\begin{aligned} x&=t\\ y&=y_0\end{aligned}\right\}\ x_0\le t\le x_0+\Delta x$$

պարամետրացումով հատվածը: Այդ դեպքում (1.16)-ի համաձայն՝

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+\Delta x,y_0)} \omega = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(t,y_0)dt : \tag{3.4}$$

(3.3)-(3.5)-ից կստանանք՝

$$\frac{\Delta_x F(x_0,y_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} P(t,y_0)dt \to P(x_0,y_0), \text{ երբ } \Delta x \to 0,$$

որտեղ օգտվեցինք փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի ածանցման թեորեմից:

Անհրաժեշտություն: Դիցուք F-ը D տիրույթում ω-ի որևէ նախնական է, իսկ $\gamma(t) = (\varphi(t),\psi(t))$, $t \in [\alpha,\beta]$ արտապատկերումը D-ից արժեքներ ընդունող ողորկ կոր է: (1.16)-ի համաձայն՝

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t) \right] dt :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (3.1')-ը, կստանանք՝

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \left[F(\varphi(t),\psi(t)) \right]' dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) : \tag{3.5}$$

Նշանակելով $\gamma(\alpha) = A$, $\gamma(\beta) = B$, կստանանք՝

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = F(B) - F(A) : \tag{3.5'}$$

Դժվար չէ համոզվել, որ (3.5') բանաձևը ճիշտ է նաև ցանկացած ուղղելի կորի դեպքում: Իրոք, եթե γ-ն կտոր առ կտոր ողորկ կոր է, այսինքն՝ գոյություն ունի $[\alpha,\beta]$ հատվածի տրոհում՝ $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$, այնպիսին, որ γ-ն $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածներում ողորկ է, (3.5)-ի համաձայն՝

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \sum_{i=0}^{n-1} \left[F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i)) \right] = F(B) - F(A) :$$

Ընդհանուր դեպքում, (3.5')-ն ապացուցելու համար կօգտվենք Գուրսայի լեմմայից: ■

3. Փակ դիֆերենցիալ ձև:

Սահմանում: *$\omega = Pdx + Qdy$ դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է փակ $G \subset R^2$ տիրույթում, եթե այդ տիրույթում P և Q ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են և բավարարում են*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3.6}$$

պայմանին:

Թեորեմ 3.3: *Դիցուք P և Q ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են G տիրույթում: Որպեսզի G տիրույթում $\omega = Pdx + Qdy$ դիֆերենցիալ ձևը լինի լրիվ, անհրաժեշտ է, իսկ միակապ տիրույթի դեպքում՝ նաև բավարար, որ այդ տիրույթում ω -ն լինի փակ:*

▶ Անհրաժեշտությունը հետևում է խառն ածանցյալների թեորեմից: Իրոք, եթե ω դիֆերենցիալ ձևը լրիվ է, ապա, ըստ սահմանման, գոյություն ունի G տիրույթում դիֆերենցելի F ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q$: Ուստի խառն ածանցյալների թեորեմի համաձայն՝

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}:$$

Անցնենք բավարարության ապացույցին. նախորդ երկու թեորեմների շնորհիվ, ω -ի լրիվությունն ապացուցելու համար բավական է ապացուցել, որ ω -ի ինտեգրալը՝ ցանկացած փակ, ուղղելի կորով տարածված, զրո է:

Դիցուք ω -ն G միակապ տիրույթում բավարարում է (3.6) պայմանին և Γ -ն G -ում ընկած կոնտուր է: Այդ դեպքում Գրինի բանաձևի համաձայն՝

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0:$$

Ցանկացած փակ բեկյալով տարածված ինտեգրալը հանդիսանում է վերջավոր թվով կոնտուրներով տարածված ինտեգրալների գումար, հետևաբար այն զրո է, իսկ փակ կորի դեպքը Գուրսայի լեմմայի միջոցով բերվում է բեկյալի դեպքին: ■

Վերջում բերենք *փակ դիֆերենցիալ ձևի օրինակ, որը լրիվ չէ*: Որպես G տիրույթ վերցնենք $R^2\setminus\{(0,0)\}$ բազմությունը և ապացուցենք, որ

$$\omega = Pdx + Qdy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

դիֆերենցիալ ձևը G-ում փակ է, բայց լրիվ չէ:

Ունենք՝

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},\ \ (x,y)\in G\ ,$$

ուստի ω-ն G տիրույթում փակ է:

Այնուհետև, նշանակելով $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$, կունենանք՝

$$\int_\gamma Pdx+Qdy = \int_\gamma -ydx+xdy = \iint_{x^2+y^2\le 1} 2dxdy = 2\pi\ ,$$

այսինքն՝ γ միավոր շրջանագծով տարածված ինտեգրալը զրո չէ, հետևաբար, ω-ն G-ում լրիվ չէ:

§4. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ

<u>**1. Հարթ պատկերների արտապատկերումը:**</u> Դիցուք $G\subset R^2$ տիրույթը միակապ է, իսկ $h(\xi,\eta)=\left(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\right):G\leftrightarrow G_1$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի և փոխմիարժեք է, որի յակոբիանը զրո չի դառնում՝

$$J(\xi,\eta)=\begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta \\ y'_\xi & y'_\eta \end{vmatrix}\neq 0,\ (\xi,\eta)\in G: \tag{4.1}$$

Այդ դեպքում, հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն, h^{-1}-ը կլինի անընդհատ դիֆերենցելի G_1 տիրույթում:

Քանի որ նշված պայմաններում $J(\xi,\eta)$ ֆունկցիան G տիրույթում անընդհատ է, ապա (4.1) պայմանից հետևում է, որ $J(\xi,\eta)$ ֆունկցիան G տիրույթում նշանը չի փոխում:

Թեորեմ 4.1: *Նշված պայմաններում ողորկ կորի պատկերը ողորկ կոր է:*

▶ Դիցուք $\gamma(t)=\left(\xi(t),\eta(t)\right)$, $\alpha\le t\le\beta$ կորը ողորկ է, այսինքն՝ $\xi(t)$ և $\eta(t)$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են և նրանց ածանցյալները միաժամանակ զրո չեն դառնում:

Պատկեր կորը կլինի՝

$$h\left(\gamma(t)\right)=\left(x\left(\xi(t),\eta(t)\right),y\left(\xi(t),\eta(t)\right)\right)=:\left(\varphi(t),\psi(t)\right): \qquad (4.2)$$

Հաշվենք պատկեր կորի կոորդինատային ֆունկցիաների ածանցյալները՝

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{\partial x}{\partial\xi}\cdot\xi'(t)+\frac{\partial x}{\partial\eta}\cdot\eta'(t)\\ \psi'(t)&=\frac{\partial y}{\partial\xi}\cdot\xi'(t)+\frac{\partial y}{\partial\eta}\cdot\eta'(t):\end{aligned} \qquad (4.3)$$

Հետևաբար, φ և ψ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են և նրանց ածանցյալները, (4.1) պայմանի շնորհիվ, միաժամանակ զրո չեն դառնում: ■

Հետևանք: *Կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուրի (պարզ, փակ կորի) պատկերը կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուր է:*

▶ Թեորեմ 4.1-ից հետևում է, որ կտոր առ կտոր ողորկ կորի պատկերը կտոր առ կտոր ողորկ կոր է, իսկ արտապատկերման փոխմիարժեքությունից հետևում է, որ պարզ, փակ կորի պատկերը պարզ, փակ կոր է: ■

Թեորեմ 4.2: *Եթե $\Gamma\subset G$ պարզ, փակ կոր է և $h(\Gamma)=\Gamma_1$, ապա $h(D)=D_1$, որտեղ D-ն Γ-ի ներքին տիրույթն է, իսկ D_1-ը՝ Γ_1-ի:*

▶ Քանի որ D-ն կապակցված է, իսկ h-ը՝ անընդհատ, ապա $h(D)$-ն ամբողջությամբ կամ Γ_1-ի ներքին տիրույթում է, կամ՝ արտաքին:

Հակառակ դեպքում կստացվի, որ $h(D)$-ն կապակցված չէ, ինչը հակասում է D-ի կապակցված լինելուն:

Այնուհետև նկատենք, որ $h(D)$-ն Γ_1-ի դրսում լինել չի կարող: Հակառակ դեպքում, նշանակելով Γ_1-ի արտաքին տիրույթը $ext\,\Gamma_1$, կունենանք

$$ext\,\Gamma_1 = h(D) \cup \left[ext\,\Gamma_1 \setminus h(\bar{D}) \right] := U_1 \cup U_2 ,$$

որտեղ U_1, U_2-ը չհատվող, ոչ դատարկ բաց բազմություններ են:

Հետևաբար, $ext\,\Gamma_1$-ը կապակցված չէ, ինչը հակասում է Ժորդանի թեորեմին: Այսպիսով, $h(D)$-ն Γ_1-ի ներսում է: Կրկնելով նախորդ դատողությունը, կհամոզվենք, որ $h(D) = D_1$: ■

Դիտողություն: Թեորեմն ապացուցելիս մենք օգտվեցինք միայն նրանից, որ h-ը և h^{-1}-ը անընդհատ են: Այսպիսի արտապատկերումը կոչվում են հոմեոմորֆիզմ (կամ հոմեոմորֆ արտապատկերում):

Հետևանք: *Հոմեոմորֆ արտապատկերման դեպքում միակապ տիրույթի պատկերը միակապ տիրույթ է:*

2. Մակերեսի արտահայտումը կորագիծ կոորդինատների* միջոցով:

Դիցուք $G \subset R^2$-ը միակապ տիրույթ է, իսկ h-ը՝ $h(\xi,\eta) = \left(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta) \right) : G \leftrightarrow G_1$ անընդհատ դիֆերենցելի, փոխմիարժեք արտապատկերում է, որի յակոբիանը զրո չի դառնում: Բացի դրանից, այստեղ լրացուցիչ կենթադրենք, որ $y(\xi,\eta)$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է, հետևաբար, նրա խառն ածանցյալները հավասար են:

---

* Այդպես են կոչվում (x, y) կետի (ξ, η) կոորդինատները (1 կետում դիտարկված արտապատկերումների ժամանակ):

Թեորեմ 4.3: *Եթե Γ-ն G-ում ընկած կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուր է և $h(\Gamma)=\Gamma_1$, ապա*

ա) $V(D_1)=\iint_D |J(\xi,\eta)|d\xi d\eta$, *որտեղ D-ն Γ-ի ներքին տիրույթն է, իսկ D_1-ը Γ_1-ի;*

բ) եթե $J(\xi,\eta)>0$, $(\xi,\eta)\in G$, ապա Γ-ի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է Γ_1-ի դրական շրջանցումը, իսկ եթե $J(\xi,\eta)<0$, ապա շրջանցման ուղղությունը փոխվում է:

▶ Պարզության համար ենթադրենք, թե Γ-ն ողորկ է և վերցնենք Γ-ի որևէ պարամետրացում՝ $\gamma(t)=(\xi(t),\eta(t))$, $t\in[\alpha,\beta]$, այնպես, որ Γ-ն շրջանցվի դրական ուղղությամբ: Այդ դեպքում (4.2)-ը կլինի Γ_1-ի պարամետրացում, ընդ որում, Γ_1-ի շրջանցումը կարող է կատարվել ինչպես դրական ուղղությամբ, այնպես էլ՝ բացասական:

Այնուհետև, օգտվելով Գրինի բանաձևի հետևանքից, կորագիծ ինտեգրալների հաշվման (1.16) բանաձևից ու (4.3)-ից, կստանանք՝

$$V(D_1)=\int_{\Gamma_1} xdy=\pm\int_{\Gamma} x\frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi+x\frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta, \tag{4.4}$$

ընդ որում, ինտեգրալի դիմաց պետք է վերցնել «+» նշանը, երբ Γ-ի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է Γ_1-ի դրական շրջանցումը, և «-» նշանը՝ հակառակ դեպքում:

Գրինի բանաձևի համաձայն, (4.4)-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} V(D_1)&=\pm\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(x\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)\right]d\xi d\eta=\\ &=\pm\iint_D\left[\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}+x\frac{\partial^2 y}{\partial\eta\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}-x\frac{\partial^2 y}{\partial\xi\partial\eta}\right]d\xi d\eta= \qquad (4.5)\\ &=\pm\iint_D J(\xi,\eta)d\xi d\eta: \end{aligned}$$

Քանի որ $V(D_1)>0$, ապա (4.5) բանաձևի մեջ ինտեգրալի դիմացի նշանը պետք է համընկնի $J(\xi,\eta)$-ի նշանի հետ: ■

§5. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՍԸ

1. Պարամետրացված մակերևույթ:

Սահմանում: *$S \subset R^3$ բազմությունը կոչվում է պարամետրացված ողորկ մակերևույթ, եթե գոյություն ունեն $\Delta \subset R^2$ փակ սահմանափակ տիրույթ, Δ-ն պարունակող $G \subset R^2$ բաց տիրույթ և $r: G \to R^3$ անընդհատ դիֆերենցելի ու փոխմիարժեք արտապատկերում, այնպիսիք, որ $r(\Delta) = S$ և $rank\, r'(t) = 2$, $t \in \Delta$: Այդ դեպքում r արտապատկերումը կոչվում է S մակերևույթի պարամետրացում կամ պարամետրական ներկայացում:*

Եթե r արտապատկերման կոորդինատային ֆունկցիաները նշանակենք $x(u,v)$, $y(u,v)$ և $z(u,v)$, այդ դեպքում՝

$$r(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} : \Delta \leftrightarrow S\,; \quad r'(u,v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}: \tag{5.1}$$

Այնուհետև նշանակենք՝ $A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$:

Այդ դեպքում $rank\, r' = 2$ պայմանը համարժեք է $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ անհավասարությանը:

Մասնավոր դեպքում, երբ S մակերևույթի հավասարումը տրված է բացահայտ տեսքով՝

$$z = f(x,y),\ (x,y) \in D,$$

r պարամետրական ներկայացումն ընդունում է

$$r(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} : D \leftrightarrow S\,, \quad r'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

տեսքը, որտեղ $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$: Այս դեպքում (տես VIII, §1, 4) $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ կետում մակերևույթի շոշափող հարթության հավասարումն է՝

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0): \qquad (5.3^\circ)$$

Այժմ արտածենք $r(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ կետում շոշափող հարթության հավասարումն ընդհանուր դեպքում: Քանի որ $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, ապա (u_0, v_0) կետում A, B, C թվերից որևէ մեկը զրո չէ: Ենթադրենք, որ $C(u_0, v_0) \neq 0$: Այդ դեպքում հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն, $\left(x_0, y_0\right) := \left(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)\right)$ կետի շրջակայքում

$$\left.\begin{aligned} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{aligned}\right\}$$

համակարգից (u,v) -ն արտահայտվում է (x,y) -ի միջոցով՝

$$\left.\begin{aligned} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{aligned}\right\}:$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով $z = z(u,v)$ ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք

$$z = z\left(u(x,y), v(x,y)\right) =: f(x,y)$$

ներկայացումը: Այսպիսով, ստացվեց S մակերևույթի հավասարումը բացահայտ տեսքով ((x_0, y_0) կետի շրջակայքում):

Հաշվենք f ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները: Դիտարկենք

$$f\left(x(u,v), y(u,v)\right) = z(u,v)$$

հավասարությունը, որը (u_0, v_0) կետի շրջակայքում նույնություն է: Այդ դեպքում՝

$$\begin{cases} f'_x x'_u + f'_y y'_u = z'_u \\ f'_x x'_v + f'_y y'_v = z'_v \end{cases}:$$

Լուծելով այս համակարգը՝ կստանանք $f'_x = -\dfrac{A}{C}$, $f'_y = -\dfrac{B}{C}$: Այս արժեքները տեղադրելով (5.3°)-ի մեջ՝ կստանանք շոշափող հարթության հավասարումն ընդհանուր դեպքում.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0: \qquad (5.3)$$

Նշենք նաև, որ $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ կետում մակերևույթի նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են՝

$$\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}: \qquad (5.4)$$

Երբ S մակերևույթի հավասարումը տրված է $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$, բացահայտ տեսքով, (5.2)-ից կստանանք $A=-p$, $B=-q$, $C=1$, որտեղ $p=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial f}{\partial y}$: Հետևաբար՝

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}: \qquad (5.4')$$

2. Երկկողմանի մակերևույթ: $S\subset R^3$ կապակցված բազմությունը կոչվում է *ողորկ մակերևույթ*, եթե յուրաքանչյուր $P\in S$ կետի համար գոյություն ունի $\delta(P)>0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(P,\delta)\cap S$ բազմության համար գոյություն ունի ողորկ պարամետրացում (լոկալ պարամետրացում):

Ողորկ մակերևույթի օրինակ է հանդիսանում գնդային մակերևույթը*:

Դիցուք S-ը ողորկ մակերևույթ է, $P_0\in S$ և Γ-ն S-ում ընկած փակ կոր է, որի սկզբնակետը և վերջնակետը P_0-ն է: P_0 կետում մակերևույթի նորմալի երկու օրթերից որևէ մեկը նշանակենք n_0-ով: Եթե P կետը,

---

* Ամբողջ գնդային մակերևույթի պարամետրացման դեպքում փոխմիարժեքությունը խախտվում է, հետևաբար, այն պարամետրացված ողորկ մակերևույթ չէ:

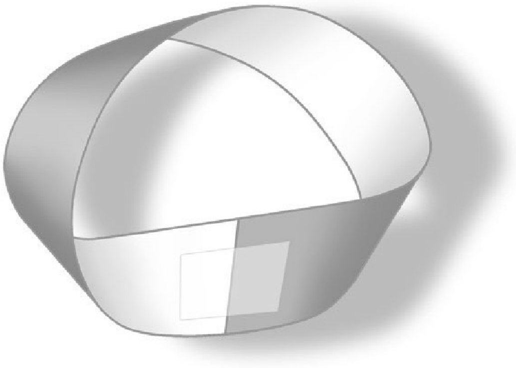
շարժվելով P_0 կետից, շրջանցի Γ փակ կորը և վերադառնա P_0, ապա հնարավոր է երկու դեպք՝ n_0-ն անընդհատ փոփոխվելով

ա) կվերադառնա նույն դիրքին,

բ) ուղղությունը կփոխի:

Սահմանում[**]: *S ողորկ մակերևույթը կոչվում է երկկողմանի, եթե ցանկացած P_0 կետի և ցանկացած Γ փակ կորի դեպքում տեղի ունի ա)-ն:*

Եթե որևէ Γ-ի դեպքում տեղի ունի բ)-ն, ապա մակերևույթը կոչվում է *միակողմանի*: Միակողմանի մակերևույթի օրինակ է Մյոբիուսի թերթը:



Մյոբիուսի թերթը

Երկկողմանի մակերևույթի օրինակներ են պարամետրացված մակերևույթը և գնդային մակերևույթը:

Այժմ սահմանենք երկկողմանի մակերևույթի *կողմի* գաղափարը : Նախ դիտարկենք պարամետրացված մակերևույթի դեպքը: n^+-ով նշանակենք նորմալի այն $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ օրթը, որը ստացվում է (5.4) բանաձևերում վերցնելով “+” նշանը, իսկ n^--ով՝ “-” նշանով օրթը: Այդ դեպքում (S, n^+) և (S, n^-) զույգերը կանվանենք S *մակերևույթի կողմեր:*

[**] Այստեղ մենք տալիս ենք նկարագրական սահմանումներ: Ճշգրիտ (մաթեմատիկական սահմանումները) կտրվեն հաջորդ գլխում:

Եթե S-ի հավասարումը տրված է $z = f(x,y)$ բացահայտ տեսքով, ապա (S,n^+) կողմի համար (5.4')-ից կստանանք՝

$$\cos\lambda = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\ \cos\mu = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}: \qquad (5.4'')$$

Ուստի, $\cos\nu > 0$, այսինքն՝ ν-ն սուր անկյուն է: Հետևաբար, (S,n^+)-ը մակերևույթի վերևի կողմն է:

Ընդհանուր երկկողմանի մակերևույթի դեպքում վերցնենք կամայական $P_0 \in S$ կետ և n_0-ով նշանակենք P_0 կետում մակերևույթի նորմալի երկու օրթերից որևէ մեկը: S մակերևույթի կամայական P կետում նորմալի n օրթը ընտրելու համար P_0 կետը $\Gamma \subset S$ կորով միացնենք P կետին և P_0-ն Γ-ի վրայով շարժենք մինչև P կետը: Այդ դեպքում n_0-ն անընդհատ փոփոխվելով P կետում կընդունի ինչ-որ n դիրք: Ստացված n-ը Γ ճանապարհից կախված չէ, քանի որ S-ը երկկողմանի է: (S,n) զույգը կոչվում է *մակերևույթի կողմ*: Եթե P_0 կետում ընտրենք n_0-ի հակադիր օրթը, ապա կստանանք մակերևույթի *հակառակ կողմը*:

Մակերևույթի նշված կողմի վրա կոնտուրի շրջանցման դրական և բացասական ուղղությունները սահմանվում են այնպես, ինչպես հարթ պատկերների դեպքում: Այն է. S մակերևույթի (S,n) կողմի վրա $\Gamma \subset S$ կոնտուրի շրջանցման ուղղությունը համարվում է դրական, եթե դիտորդը, ոտքից գլուխ n նորմալի ուղղությունն ընդունած Γ կոնտուրը շրջանցելիս, S մակերևույթի Γ կոնտուրով սահմանափակված՝ իրեն բավականաչափ մոտ մասը տեսնում է իր ձախ կողմում: Հեշտ է նկատել, որ մակերևույթի կողմը փոխելիս կոնտուրների շրջանցման ուղղությունը փոխվում է: Այդ պատճառով մակերևույթի կողմի նշելը համարժեք է որևէ կոնտուրի շրջանցման դրական ուղղությունը նշելուն:

Թեորեմ 5.1: *Պարամետրացված մակերևույթի դեպքում* (S,n^+) *-ը մակերևույթի այն կողմն է, որի համար* $\gamma\subset\Delta$ *կոնտուրի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է* $\Gamma=r(\gamma)\subset S$ *կոնտուրի դրական շրջանցումը:*

▶ Վերցնենք կամայական $t_0=(u_0,v_0)\in\Delta$ կետ և, քանի որ A,B,C գործակիցներից որևէ մեկը 0-ից տարբեր է, կենթադրենք, որ $C(u_0,v_0)\neq 0$: Այդ դեպքում հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն՝

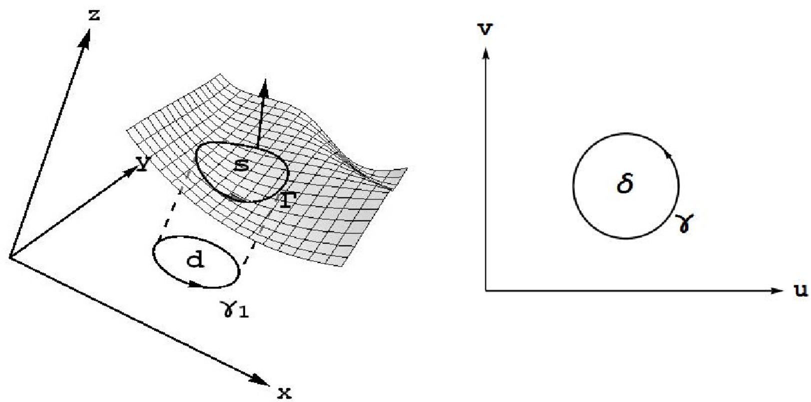
$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,v)\\ y&=y(u,v)\end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

համակարգից, t_0 կետի δ շրջակայքում (u,v)-ն արտահայտվում է (x,y)-ի միջոցով՝

$$\left.\begin{aligned} u&=u(x,y)\\ v&=v(x,y)\end{aligned}\right\} : d\leftrightarrow\delta \ :$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով $z=z(u,v)$ ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք

$$z=z\big(u(x,y),v(x,y)\big)=:f(x,y):d\leftrightarrow s$$ (տե՛ս գծագիրը):



Ունենք՝

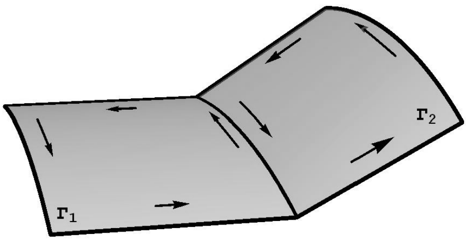
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}:$$

Քննարկենք $C>0$ դեպքը: Այս դեպքում $\cos\gamma>0$, հետևաբար, ընտրվում է s-ի վերևի կողմը: Մյուս կողմից, քանի որ C-ն (5.5) արտապատկերման յակոբիանն է, ապա δ-ի γ եզրի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է d-ի γ_1 եզրի դրական շրջանցումը (§4, 2), որին համապատասխանում է s-ի Γ եզրի այն շրջանցումը, որը դրական է s-ի վերևի կողմի համար: ■

Մակերևույթի կողմնորոշումը կոնտուրների շրջանցման ուղղության միջոցով մեզ հնարավորություն է տալիս ընդլայնել երկկողմանի մակերևույթների դասը:

Դիցուք՝ $S=S_1\cup S_2$, որտեղ S_1-ը և S_2-ը երկկողմանի մակերևույթներ են, որոնք ունեն ընդհանուր եզրամաս կամ եզրամասեր (տե՛ս գծագիրը): Այդ դեպքում S-ը կոչվում է երկկողմանի, եթե հնարավոր է Γ_1 և Γ_2 եզրային կոնտուրների շրջանցումներն ընտրել այնպես, որ ընդհանուր եզրամասերում այդ կոնտուրների շրջանցումները կատարվեն միմյանց հակառակ ուղղություններով:

Այդպիսի S մակերևույթները կոչվում են կտոր առ կտոր ողորկ երկկողմանի մակերևույթներ*:



Կտոր առ կտոր ողորկ երկկողմանի մակերևույթի օրինակ են զուգահեռանիստի եզրը և գլանի լրիվ մակերևույթը:

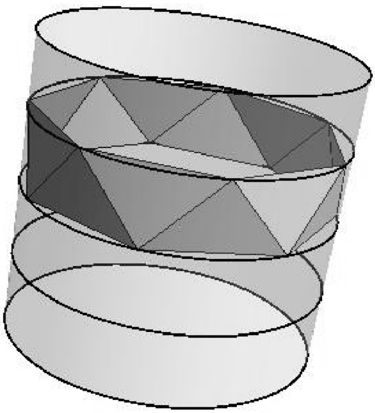
<u>3. Շվարցի օրինակը:</u> Մենք կորի երկարությունը սահմանել ենք որպես ներգծյալ բեկյալի երկարության սահման (VI, §3, 1): Հարց է առաջանում՝ կարելի՞ է արդյոք նման կերպ վարվել մակերևույթի մակերեսի սահմանման դեպքում: Այլ կերպ ասած, կարելի՞ է արդյոք մակերևույթի մակերեսը

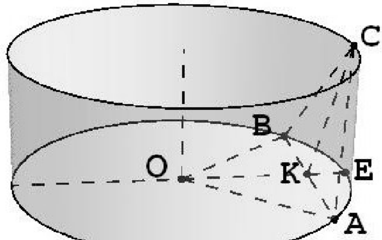
---

* Կտորների քանակը կարող է երկուսից ավելի լինել:

սահմանել որպես ներգծյալ բազմանիստի մակերեսի սահման: Շվարցի օրինակը ցույց է տալիս, որ այդ հարցի պատասխանը բացասական է:

Դիտարկենք ուղիղ շրջանային գլան, որի հիմքի շառավիղը R է, իսկ բարձրությունը՝ H: Այդ գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է՝ $2\pi RH$: Գլանին ներգծենք բազմանիստ հետևյալ կերպ. գլանի բարձրությունը բաժանենք m հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք հարթություններ՝ գլանի հիմքի հարթությանը զուգահեռ: Գլանի մակերևույթի վրա կառաջանան $m+1$ հատ շրջանագծեր (ներառյալ գլանի հիմքերի շրջանագծերը: Այնուհետև այդ շրջանագծերից յուրաքանչյուրը բաժանենք n հավասար մասերի այնպես, որ նախորդ շրջանագծի բաժանման կետերի պրոյեկցիաները համընկնեն հաջորդ շրջանագծի տրոհման աղեղների միջնակետերի հետ, որից հետո շրջանագծերի յուրաքանչյուր բաժանման կետ միացնենք հարևան կետերի հետ (նույն շրջանագծի վրա և հաջորդ շրջանագծի վրա): Կստանանք մի բազմանիստ, որի նիստերը $2mn$ հատ հավասար եռանկյուններ են: Հաշվենք այդ բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը՝ σ_{mn}-ը:





Ունենք՝

$$\sigma_{mn} = 2mn\Delta, \tag{5.6}$$

որտեղ Δ-ն հավասար եռանկյունների մակերեսն է՝ $\Delta = AK \cdot KC$, որտեղ

$$AK = R\sin\frac{\pi}{n}, \ KC = \sqrt{CE^2 + KE^2} = \sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + \left(R - R\cos\frac{\pi}{n}\right)^2} :$$

Ստացված արժեքները տեղադրենք (5.6)-ի մեջ՝

$$\sigma_{mn} = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{H^2 + R^2 4m^2 \sin^4\frac{\pi}{2n}} :$$

Այժմ վերցնենք կամայական $q > 0$ թիվ և m-ն ու n-ը ձգտեցնենք անվերջության այնպես, որ $\frac{m}{n^2} \to q$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\sigma_{mn} \to 2\pi R\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}R^2\pi^4 q^2} :$$

Հետևաբար, σ_{mn}-ի սահմանը հավասար կլինի գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսին միայն այն դեպքում, երբ $q = 0$:

<u>4. **Բացահայտ տեսքով տրված մակերևույթի մակերեսը:**</u> Դիցուք S ողորկ մակերևույթի հավասարումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, որտեղ D-ն կտոր առ կտոր ողորկ եզրագծով փակ տիրույթ է: D-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհենք[*] $D_1, \ldots, D_n$ մասերի: Նշանակենք՝ $S_i = r(D_i)$ (տե՛ս 5.2)-ը, վերցնենք $M_i \in S_i$ կամայական կետերը: D_i-ի պրոյեկցիան (z-երի առանցքին զուգահեռ ուղղությամբ) M_i կետում S մակերևույթի շոշափող հարթության վրա նշանակենք T_i-ով և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} V(T_i), \tag{5.7}$$

որտեղ $V(T_i)$-ն T_i հարթ պատկերի մակերեսն է:

Սահմանում: *Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

---

[*] Օրինակ այնպես, ինչպես վարվել ենք ինտեգրալը ցանցերի միջոցով սահմանելիս:

վերջավոր սահմանը, որտեղ $\lambda = \max_i diam\, D_i$*, ապա այն կանվանենք* S *մակերևույթի մակերես և կնշանակենք* $V(S)$ *-ով: Այդ դեպքում* S *մակերևույթը կոչվում է քառակուսելի:*

Թեորեմ 5.2: *Ողորկ մակերևույթը քառակուսելի է և*

$$V(S) = \iint_D \frac{dxdy}{|\cos\nu|}, \tag{5.8}$$

որտեղ ν *-ն մակերևույթի նորմալի և* z *-երի առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունն է:*

▶ Պրոյեկցիայի մակերեսի հաշվման բանաձևի համաձայն `

$$V(D_i) = V(T_i)|\cos\nu_i|,$$

որտեղ ν_i -ն ν -ի արժեքն է M_i կետում: Հետևաբար

$$V(T_i) = \frac{V(D_i)}{|\cos\nu_i|}:$$

Այս արժեքը տեղադրելով (5.7)-ի մեջ, կստանանք

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\cos\nu_i|} V(D_i)$$

որը (5.8) ինտեգրալի ինտեգրալային գումարն է (XVII, §5, 4):

Քանի որ նշված պայմաններում (տե'ս (5.4$'$)-ը)

$$\frac{1}{|\cos\nu|} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

ֆունկցիան անընդհատ է, ապա նրա σ ինտեգրալային գումարը ձգտում է (5.8) ինտեգրալին, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Տեղադրելով $\dfrac{1}{|\cos\nu|}$ ֆունկցիայի արժեքը (5.8) ինտեգրալի մեջ` $V(S)$ մակերեսի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը`

$$V(S) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy, \tag{5.8$'$}$$

որտեղ $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$:

5. Պարամետրացված մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք S -ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որի պարամետրացումը (5.1)-ն է:

Վերցնենք կամայապես ընտրված $t_0 = (u_0, v_0) \in \Delta$ կետը և ենթադրենք, որ $C(u_0, v_0) \neq 0$: Այդ դեպքում, օգտվելով 2-րդ կետում ներմուծված նշանակումներից և նախորդ թեորեմից, կունենանք՝

$$V(s) = \iint_d \frac{dxdy}{|\cos v|} :$$

Այստեղ կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y) \end{aligned}\right\} : \delta \leftrightarrow d ,$$

կստանանք՝

$$V(s) = \iint_\delta \frac{1}{|\cos v|} \cdot |C| dudv :$$

Այնուհետև, տեղադրելով $\cos v$ -ի (5.4) արժեքը՝ կստանանք

$$V(s) = \iint_\delta \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv : \tag{5.9}$$

Եթե t_0 կետում C -ի փոխարեն զրոյից տարբեր լինեն A -ն կամ B -ն, ապա մակերևույթի s կտորի մակերեսի համար կստացվեր նույն բանաձևը:

Քանի որ Δ փակ, սահմանափակ տիրույթի (կոմպակտ բազմության) յուրաքանչյուր կետում A, B, C թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա օգտվելով Δ -ի կոմպակտությունից, այն կտրոհենք վերջավոր թվով, ընդհանուր ներքին կետ չունեցող, $\delta_1, ..., \delta_p$ տիրույթների, որոնցից յուրաքանչյուրի համար տեղի ունի (5.9)-ը՝

$$V(s_i) = \iint_{\delta_i} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv , \ 1 \leq i \leq p :$$

Գումարելով այդ հավասարությունները՝ կստանանք

$$\sum_{i=1}^{p} V(s_i) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv : \qquad (5.9')$$

Այժմ ամբողջ S մակերևույթի $V(S)$ մակերեսը սահմանենք որպես նրա s_i (ընդհանուր ներքին կետ չունեցող) կտորների մակերեսների գումար: Այդ դեպքում (5.9')-ից կստանանք՝

$$V(S) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, dudv : \qquad (5.10)$$

§6. ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ: Դիցուք S-ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որի պարամետրացումը (5.1)-ն է: Տրված $f : S \to R$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը կազմելու համար Δ-ն տրոհենք (կտոր առ կտոր ողորկ կորերով) $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ տիրույթների: Նշանակենք՝ $S_i = r(\Delta_i)$, վերցնենք $P_i \in S_i$ կետերը և կազմենք

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) V(S_i)$$

ինտեգրալային գումարը:

Սահմանում: *Եթե գոյություն ունի*

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

վերջավոր սահմանը $\left(\lambda = \max_i diam \Delta_i\right)$, *ապա այն անվանում են* f *ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ՝ տարածված* S *մակերևույթով, և նշանակում են՝*

$$\iint_S f(P) dS \text{ կամ } \iint_S f(x, y, z) dS :$$

Թեորեմ 6.1: *Եթե* S*-ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է և* $f \in C(S)$, *ապա* f *ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալը՝ տարածված* S *մակերևույթով, գոյություն ունի և*

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_\Delta f\left(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\right)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv : \quad (6.1)$$

▶ Օգտվելով մակերեսի (5.10) բանաձևից՝ σ ինտեգրալային գումարը կարելի է ներկայացնել

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\iint_{\Delta_i}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

տեսքով, որտեղ

$$P_i = r(t_i) = \left(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i),z(u_i,v_i)\right),\ t_i=(u_i,v_i)\in\Delta_i :$$

Մյուս կողմից, (6.1)-ի աջ կողմի կրկնակի ինտեգրալը նշանակելով I -ով, (որի գոյությունը հետևում է ենթինտեգրալ ֆունկցիայի անընդհատությունից), ինտեգրալի ադիտիվության շնորհիվ կունենանք՝

$$I = \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta_i} f(r(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv :$$

Հետևաբար

$$|\sigma - I| \le \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Delta_i}\left|f(r(t_i)) - f(r(t))\right|\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv : \qquad (6.2)$$

Քանի որ $g(t)=f(r(t))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է Δ փակ սահմանափակ տիրույթում, ապա Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta>0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda<\delta \Rightarrow \omega_{\Delta_i}(g)<\varepsilon :$$

Այդ դեպքում (6.2)-ից կստանանք՝

$$\lambda<\delta \Rightarrow |\sigma - I|<\varepsilon V(S),$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Երբ S մակերևույթի հավասարումը տրված է $z=z(x,y)$, $(x,y)\in D$, բացահայտ տեսքով, (6.1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy :$$

Այստեղ, հաշվի առնելով $\sqrt{1+p^2+q^2} = \dfrac{1}{|\cos\nu|}$ հավասարությունը և f -ի փոխարեն վերցնելով $f|\cos\nu|$ ֆունկցիան, կստանանք՝

$$\iint_S f(x,y,z)\left|\cos\nu\right|dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy: \tag{6.3}$$

<u>2. Երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալ:</u> Դիցուք S մակերևույթի հավասարումը տրված է $z = z(x,y)$, $(x,y)\in D$ բացահայտ տեսքով և $f: S \to R$:

D-ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհենք $D_1,...,D_n$ տիրույթների, նշանակենք՝ $S_i = r(D_i)$, $\left(r(x,y) = \left(x,y,z(x,y)\right)\right)$, վերցնենք $P_i \in S_i$, $1 \le i \le n$ կետեր և կազմենք

$$\text{ա) } \sigma_{\text{վ}} = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)V(D_i), \qquad \text{բ) } \sigma_{\text{ս}} = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)[-V(D_i)]$$

ինտեգրալային գումարները:

Սահմանում: *Եթե λ-ն զրոյի ձգտելիս ($\lambda = \max\limits_i diam D_i$) $\sigma_{\text{վ}}$ և $\sigma_{\text{ս}}$ գումարներն ունեն վերջավոր սահման, ապա այդ սահմանները կոչվում են f ֆունկցիայի երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալներ, տարածված համապատասխանաբար S մակերևույթի վերին և ստորին կողմերով: Դրանք նշանակվում են համապատասխանաբար*

$$\iint_{S_{\text{վ}}} f(x,y,z)dxdy, \iint_{S_{\text{ս}}} f(x,y,z)dxdy$$

սիմվոլներով:

Թեորեմ 6.2: *Եթե S մակերևույթը ողորկ է և $f \in C(S)$, ապա f ֆունկցիայի երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալները գոյություն ունեն և*

$$\text{ա) } \iint_{S_{\text{վ}}} f(x,y,z)dxdy = \iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy,$$

$$\text{բ) } \iint_{S_{\text{ս}}} f(x,y,z)dxdy = -\iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy: \tag{6.4}$$

▶ Ապացուցենք միայն ա)-ն: Դիցուք՝ $P_i = r(x_i,y_i) = \left(x_i,y_i,z(x_i,y_i)\right)$, որտեղ $(x_i,y_i) = M_i \in D_i$: Այդ դեպքում $\sigma_{\text{վ}}$ գումարը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sigma_{\text{կ}} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z(x_i, y_i))V(D_i),$$

որը (6.4) ա) հավասարության աջ կողմում գրված կրկնակի ինտեգրալի Ռիմանի ինտեգրալային գումարն է ($\{D_i\}$ տրոհմանը և $\{M_i\}$ կետերին համապատասխան): Հետևաբար, կրկնակի ինտեգրալի դասական սահմանման համաձայն՝

$$\lim_{\lambda \to 0} \sigma_{\text{կ}} = \iint_D f(x, y, z(x, y))dxdy : ■$$

Օգտվելով (6.3) բանաձևից՝ երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը կարելի է արտահայտել առաջին տիպի ինտեգրալի միջոցով՝

$$\iint_S f(x, y, z)dxdy = \iint_S f(x, y, z)\cos\nu dS, \qquad (6.5.1)$$

ընդ որում, եթե ձախ կողմի երկրորդ տիպի ինտեգրալը տարածված է S մակերևույթի վերին կողմով, ապա ν -ն մակերևույթի վերին կողմի նորմալի և z -երի առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունն է, ուստի $\cos\nu > 0$: Մակերևույթի ստորին կողմի դեպքում՝ $\cos\nu < 0$:

Եթե երկկողմանի S մակերևույթը (ողորկ կամ կտոր առ կտոր ողորկ, տե՛ս §5, 2) բացահայտ տեսքով չի տրվում, բայց այն կարելի է տրոհել վերջավոր թվով այդպիսի կտորների*, ապա այս դեպքում ամբողջ S մակերևույթի որևէ կողմով տարածված երկրորդ տիպի ինտեգրալը սահմանվում է որպես առանձին կտորներով տարածված ինտեգրալների գումար (կտորների կողմերի ընտրությունը սահմանված է (§5, 2)-ում): Այս դեպքում նույնպես տեղի ունի (6.5.1) բանաձևը:

Կոորդինատական առանցքների դերերը փոխելով՝ կստանանք

$$\iint_S f(x, y, z)dydz = \iint_S f(x, y, z)\cos\lambda dS : \qquad (6.5.2)$$

$$\iint_S f(x, y, z)dzdx = \iint_S f(x, y, z)\cos\mu dS : \qquad (6.5.3)$$

---

* Այդ կտորների մեջ կարող են լինել նաև z -երի առանցքին զուգահեռ ծնիչով գլանային մակերևույթներ, որոնցով տարածված ինտեգրալները, ըստ սահմանման, զրո են:

Եթե S կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթը կոորդինատական առանցքների յուրաքանչյուր զույգի համար վերը նշված տիպի է, ապա միաժամանակ տեղի ունեն (6.5.1)-(6.5.3) հավասարությունները: Այդ հավասարությունները գրելով համապատասխանաբար $R,P,Q\in C(S)$ ֆունկցիաների համար և գումարելով ստացված հավասարությունները՝ կստանանք

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_S (P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)dS\,, \quad (6.5)$$

բանաձևը, ընդ որում, եթե ձախ կողմի երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը տարածված է մակերևույթի (S,n) կողմով (տե՛ս §5, 2), ապա $(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)=n$:

Եթե S-ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որը բավարարում է (6.5) բանաձևում ենթադրվող պայմաններին, ապա այդ բանաձևում վերցնելով մակերևույթի (S,n^+) կողմը, այսինքն՝ տեղադրելով

$$\cos\lambda=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,\ \cos\mu=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$

$$\cos\nu=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

արժեքները, և օգտվելով (6.1) բանաձևից, կստանանք՝

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Delta (AP+BQ+CR)dudv\,, \quad (6.6)$$

որտեղ ձախ կողմի ինտեգրալը տարածված է S մակերևույթի այն կողմով*, որի համար $\gamma\subset\Delta$ կոնտուրի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է $\Gamma=r(\gamma)\subset S$ կոնտուրի դրական շրջանցումը:

3. Ստոքսի բանաձևը: Ստոքսի բանաձևը Գրինի բանաձևի ընդհանրացումն է եռաչափ դեպքի համար: Դիցուք S-ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որը բավարարում է (6.6) բանաձևում ենթադրվող պայմաններին, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ ֆունկցիաները կրկնակի դիֆե-

---

* Տե՛ս թեորեմ 5.1-ը:

ընենցելի են Δ-ի վրա (տե՛ս §5, կետ 1): Ենթադրենք նաև, որ Δ-ի եզրը γ կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուրն է: Այդ դեպքում $\Gamma = r(\gamma)$-ն, որը կոչվում է S մակերևույթի եզրագիծ, նույնպես կհանդիսանա կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուր** (R^3-ում):

Թեորեմ 6.3: *Եթե P, Q, R ֆունկցիաները անընդհատ դիֆերենցելի են S մակերևույթը պարունակող որևէ բաց բազմության վրա, ապա*

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \\ = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx, \tag{6.7}$$

ընդ որում, Γ կոնտուրի և S մակերևույթի կողմնորոշումները համաձայնեցված են հետևյալ իմաստով. մակերևութային ինտեգրալը տարածված է S մակերևույթի այն կողմով, որի համար Γ կոնտուրի ընտրված շրջանցումը դրական է:

► (6.7) բանաձևը համարժեք է հետևյալ երեք բանաձևերին

$$\int_\Gamma Pdx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}dzdx - \frac{\partial P}{\partial y}dxdy, \tag{6.7.1}$$

$$\int_\Gamma Qdy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy - \frac{\partial Q}{\partial z}dydz, \tag{6.7.2}$$

$$\int_\Gamma Rdz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}dydz - \frac{\partial R}{\partial x}dzdx: \tag{6.7.3}$$

Ապացուցենք (6.7.1)-ը, մյուսները կստացվեն (6.7.1)-ից, եթե xyz կոորդինատական համակարգի փոխարեն դիտարկենք համապատասխանաբար yzx և zxy համակարգերը:

** Ապացուցվում է թեորեմ 4.1-ի նման:

Պարզության համար ենթադրենք, որ γ -ն ողորկ է և վերցնենք γ -ի պարամետրացում՝ $\gamma(\tau)=(u(\tau),v(\tau))$, $\tau\in[\alpha,\beta]$, այնպիսին, որ γ կոնտուրի շրջանցումը լինի դրական: Այդ դեպքում Γ կոնտուրի պարամետրացումը կլինի՝

$$r(u(\tau),v(\tau))=\left(x(u(\tau),v(\tau)),y(u(\tau),v(\tau)),z(u(\tau),v(\tau))\right):$$

Օգտվելով կորագիծ ինտեգրալների հաշվման (1.16) բանաձևից՝ կստանանք

$$\int_\Gamma Pdx=\int_\gamma P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}du+P\frac{\partial x}{\partial v}dv\,, \tag{6.8}$$

քանզի (1.16) բանաձևի միջոցով այս երկու կորագիծ ինտեգրալները կբերվեն Ռիմանի նույն ինտեգրալին:

Այնուհետև, Գրինի բանաձևի միջոցով (6.8)-ի ձախ կողմում գրված կորագիծ ինտեգրալը փոխարինելով կրկնակի ինտեգրալով, կստանանք՝

$$\int_\Gamma Pdx=\iint_\Delta\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right]dudv:$$

Այստեղ տեղադրելով մասնակի ածանցյալների արժեքները՝

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}+P\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+P\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v},$$

կստանանք՝

$$\int_\Gamma Pdx=\iint_\Delta\left(B\frac{\partial P}{\partial z}-C\frac{\partial P}{\partial y}\right)dudv:$$

Այնուհետև, հաշվի առնելով (6.6) բանաձևը, կստանանք (6.7.1)-ը: ■

Վերջում ավելացնենք, որ (6.7)-ը բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ S-ը կտոր առ կտոր ողորկ երկկողմանի մակերևույթ է (տե՛ս §5, կետ 2): Դրանում համոզվելու համար (6.7) բանաձևը կգրենք առանձին կտորների համար և ստացված հավասարությունները կգումարենք: Այդ դեպքում առանձին կտորների ընդհանուր եզրերով տարածված կորագիծ ինտեգրալները հակառակ ուղղության են, հետևաբար նրանք կկրճատվեն, և արդյունքում կմնա S-ի եզրագծով տարածված ինտեգրալը:

Օգտվելով երկու տիպի մակերևութային ինտեգրալների կապը հաստատող (6.5) բանաձևից, Ստոքսի բանաձևը կարելի է գրել նաև առաջին տիպի ինտեգրալի միջոցով՝

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\nu \right] dS,$$

որը պայմանականորեն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS :$$

4. Գաուս - Օստրոգրադսկիի բանաձևը: Դիցուք V-ն D հիմքով ուղիղ գլանակերպ է՝

$$V = \left\{ (x,y,z) \in R^3 : (x,y) \in D, z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \right\},$$

որտեղ $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$-ը D փակ տիրույթում* անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

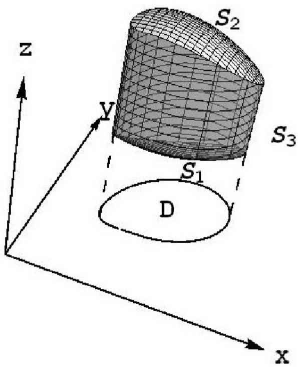
---

* Ենթադրվում է, որ D-ի եզրը կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուր է:

Թեորեմ 6.3: *Եթե* R *և* $\dfrac{\partial R}{\partial z}$ *ֆունկցիաներն անընդհատ են* V *փակ տիրույթում, ապա*

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_S Rdxdy\,, \tag{6.9}$$

որտեղ S*-ը* V*-ի եզրն է և աջ կողմի մակերևութային ինտեգրալը տարածված է* S*-ի արտաքին կողմով:*



▶ Իրոք, օգտվելով նախ գլանակերպով տարածված եռակի ինտեգրալի հաշվման բանաձևից (XVII, §5, 3), ապա՝ Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից, կստանանք՝

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_D \left\{ \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left[R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \right] dxdy :$$

Այնուհետև, օգտվելով (6.4) բանաձևերից, կստանանք՝ (տե՛ս գծագիրը)

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{(S_2)_{\text{վ}}} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{(S_1)_{\text{ն}}} R(x,y,z)dxdy :$$

Այստեղ աջ կողմին գումարելով S_3 գլանային մակերևույթի արտաքին կողմով տարածված ինտեգրալը (որը հավասար է զրոյի)՝ կստանանք (6.9)-ը: ■

Նկատենք, որ (6.9) բանաձևը ճիշտ է նաև այն եռաչափ մարմինների համար, որոնք կարելի է տրոհել վերջավոր թվով դիտարկված տիպի մարմինների: Կարելի է ապացուցել ավելին, որ (6.9) բանաձևը ճիշտ է ցանկացած կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթներով սահմանափակված մարմինների համար:

Կոորդինատական առանցքների դերերը փոխելով՝ կստանանք.

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint_S Pdydz, \tag{6.10}$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint_S Qdzdx: \tag{6.11}$$

Գումարելով (6.9)-(6.11) հավասարությունները՝ կստանանք Գաուս - Օստրոգրադսկիի ընդհանուր բանաձևը.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy:$$

Օգտվելով (6.5) բանաձևից, Գաուս - Օստրոգրադսկիի բանաձևը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S (P\cos\lambda + Q\cos\mu + R\cos\nu)dS:$$

XIX ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ

§1. ԲԱԶՄԱԳԾԱՅԻՆ ՆՇԱՆԱՓՈԽ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

1. Տեղափոխությունների խումբ: Դիտարկենք $N_k = \{1,2,...,k\}$ բազմությունը: N_k-ն ինքն իր վրա արտապատկերող փոխմիարժեք արտապատկերումների (տեղափոխությունների) բազմությունը նշանակենք Σ_k-ով: Երկու արտապատկերումների արտադրյալը սահմանենք որպես այդ արտապատկերումների համադրույթ՝

$$(\sigma\tau)(j) = \sigma(\tau(j)); \quad \sigma,\tau \in \Sigma_k,\ j \in N_k :$$

Σ_k բազմությունը խումբ է՝ նշված գործողության նկատմամբ: Այդ խումբը կոչվում է N_k բազմության *տեղափոխությունների խումբ:*

Թեորեմ 1.1: *Գոյություն ունի միակ* $\varepsilon : \Sigma_k \to \{+1,-1\}$ *արտապատկերում, այնպիսին, որ*

ա) $\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$ *,

բ) $\varepsilon_\sigma = -1$, *եթե* σ *-ն դիրքափոխություն է (տրանսպոզիցիա է)*** :

Երկու տարրերից բաղկացած $\{+1,-1\}$ թվային բազմությունը բազմապատկման գործողության նկատմամբ խումբ է, որտեղ միավորի

---

* Արտապատկերման արգումենտն ընդունված է գրել նաև որպես ինդեքս:

** Այսինքն՝ գոյություն ունեն իրարից տարբեր $j_1, j_2 \in N_k$ թվեր, այնպիսիք, որ $\sigma(j_1) = j_2, \sigma(j_2) = j_1$; $\sigma(j) = j$, երբ $j \neq j_1, j_2$:

դերը կատարում է $+1$-ը: Թեորեմի ա) կետը նշանակում է, որ ε արտապատկերումը *հոմոմորֆիզմ է* (պահպանում է բազմապատկման գործողությունը):

▶ ε արտապատկերման միակությունը հետևում է բ)–ից. ε-ի արժեքները բոլոր դիրքափոխությունների վրա հայտնի են՝ -1, իսկ մյուս կողմից՝ յուրաքանչյուր $\sigma \in \Sigma_k$ տեղափոխություն հանդիսանում է վերջավոր թվով դիրքափոխությունների արտադրյալ: Համաձայն ա)–ի՝ ε-ը միարժեքորեն որոշվում է ամբողջ Σ_k–ի վրա :

ε-ի գոյությունն ապացուցելու համար դիտարկենք հետևյալ արտադրյալը՝

$$P = \prod_{i,j \in N_k,\, i<j} (j-i) \equiv \prod_{i<j} (j-i):$$

Կամայական $\sigma \in \Sigma_k$-ի համար նշանակենք՝

$$\sigma(P) = \prod_{i,j \in N_k,\, i<j} (\sigma(j)-\sigma(i)) \equiv \prod_{i<j} (\sigma_j - \sigma_i):$$

Այդ դեպքում տեղի ունի

$$\sigma(P) = (-1)^{\nu(\sigma)} P \tag{1.1}$$

հավասարությունը, որտեղ $\nu(\sigma)$-ն σ տեղափոխության ինվերսիաների քանակն է, այսինքն՝ այն (i, j) զույգերի քանակն է, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝ $1 \le i < j \le k$, բայց $\sigma_i > \sigma_j$:

(1.1)-ն ապացուցելու համար նկատենք, որ

$$P = \sqrt{\prod_{i \ne j} |j-i|} = \sqrt{\prod_{i \ne j} |\sigma_j - \sigma_i|} = \prod_{i<j} |\sigma_j - \sigma_i| = (-1)^{\nu(\sigma)} \prod_{i<j} (\sigma_j - \sigma_i) =$$
$$= (-1)^{\nu(\sigma)} \sigma(P):$$

Ստացված հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով $(-1)^{\nu(\sigma)}$-ով՝ կստանանք (1.1)-ը:

Հանգունորեն, կամայական $f \in \Sigma_k$ արտապատկերման համար՝

$$\prod_{i<j}\left[f(\sigma_j)-f(\sigma_i)\right]=(-1)^{\nu(\sigma)}\prod_{i<j}\left[f(j)-f(i)\right]: \qquad (1.2)$$

Ապացուցենք, որ $\varepsilon_\sigma=(-1)^{\nu(\sigma)}$ բանաձևով որոշվող արտապատկերումը որոնելին է: Օգտվելով (1.1) և (1.2) հավասարություններից՝ կամայական $\sigma,\tau\in\Sigma_k$ տեղափոխությունների համար ունենք՝

$$\varepsilon_{\sigma\tau}\cdot P=(\sigma\tau)(P)=\prod_{i<j}\left[(\sigma\tau)_j-(\sigma\tau)_i\right]=\prod_{i<j}\left[\sigma(\tau_j)-\sigma(\tau_i)\right]=$$

$$=\varepsilon_\tau\prod_{i<j}\left[\sigma(j)-\sigma(i)\right]=\varepsilon_\tau\sigma(P)=\varepsilon_\tau\varepsilon_\sigma\cdot P,$$

ուստի $\varepsilon_{\sigma\tau}=\varepsilon_\sigma\varepsilon_\tau$: բ)-ն ապացուցելու համար բավական է նկատել, որ եթե σ դիրքափոխությունը տեղափոխում է j_1 և j_2 տարրերը, ապա $\nu(\sigma)=2|j_1-j_2|-1$, հետևաբար $\varepsilon_\sigma=(-1)^{\nu(\sigma)}=-1$: ■

ε_σ -ն կոչվում է σ *տեղափոխության նշան* և այն ընդունված է նշանակել նաև $\operatorname{sgn}\sigma$ սիմվոլով:

<u>2. Բազմագծային ձևեր:</u> Դիցուք V -ն վեկտորական տարածություն է և $V^k=\underbrace{V\times V\times\ldots\times V}_{k}$: $T:V^k\to R$ արտապատկերումը կոչվում է k *աստիճանի գծային ձև (k -գծային, բազմագծային ձև)*, եթե յուրաքանչյուր i -ի համար $(1\le i\le k)$՝

$$T(a_1,\ldots,a_{i-1},\bullet,a_{i+1},\ldots,a_k):V\to R$$

«մասնակի» արտապատկերումները գծային են:

k աստիճանի գծային ձևն անվանում են նաև k *-թենզոր* (V -ի վրա): k -թենզորների բազմությունը նշանակենք $\Im^k(V)$ -ով և այդ բազմության վրա սահմանենք գումարի և թվով (սկալյարով) բազմապատկման գործողությունները հետևյալ կերպ. եթե $S,T\in\Im^k(V)$, իսկ $a\in R$, ապա

$$(S+T)(v_1,\ldots,v_k)=S(v_1,\ldots,v_k)+T(v_1,\ldots,v_k)$$
$$(aS)(v_1,\ldots,v_k)=aS(v_1,\ldots,v_k):$$

Այս գործողություններով $\Im^k(V)$ -ն վերածվում է գծային (վեկտորական) տարածության:

Եթե $S \in \Im^k(V)$, $T \in \Im^l(V)$, ապա նրանց *թենզորական արտադրյալը*՝ $S \otimes T \in \Im^{k+l}(V)$, սահմանվում է

$$(S \otimes T)(v_1,...,v_{k+l}) = S(v_1,...,v_k) \cdot T(v_{k+1},...,v_{k+l})$$

բանաձևով:

Հետևյալ պնդումները անմիջապես բխում են բերված սահմանումներից.

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T; \; S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2;$$

$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T); \; (S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U):$$

Վերջին հավասար արտահայտությունները ուղղակի նշանակում են $S \otimes T \otimes U$ սիմվոլով: Երեքից ավելի քանակով թենզորների թենզորական արտադրյալը սահմանվում է ինդուկտիվ եղանակով:

1-թենզորներին անվանում են *գծային ֆունկցիոնալներ*, իսկ $\Im^1(V)$-ն կոչվում է V տարածության *համալուծ տարածություն*, որը սովորաբար նշանակվում է V^* -ով:

Դիցուք $\{v_1,...,v_n\}$-ը V տարածության բազիս է: Վեկտորների $\{\varphi_1,...,\varphi_n\} \subset V^*$ համակարգը կոչվում է V-ի *դուալ բազիս (կամ երկօրթոգոնալ բազիս)*, եթե $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases}$:

Նկատենք, որ դուալ բազիսի վեկտորները որոշվում են $\varphi_k(x) = a_k, \; k = 1,2,..,n$ բանաձևերով, որտեղ $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$, իսկ $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ համակարգը բազիս է V^* տարածության մեջ:

Թեորեմ 1.2: *Եթե* $\{v_1,...,v_n\}$ *-ը* V *տարածության բազիս է, իսկ* $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *-ը համալուծ տարածության դուալ բազիսն է, ապա*

$$\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes ... \otimes \varphi_{i_k} \quad (1 \leq i_1, i_2, ..., i_k \leq n) \tag{1.3}$$

թենզորական արտադրյալների համակարգը $\Im^k(V)$ տարածության բազիս է:

Ելնելով այս թեորեմից՝ մասնավորապես կարելի է որոշել $\Im^k(V)$ տարածության չափողականությունը՝ $\dim \Im^k(V) = n^k$:

▶ Նախ նկատենք, որ

$$\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}(v_{j_1},\ldots,v_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1}\delta_{i_2 j_2}\ldots\delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1,\ldots, i_k = j_k \\ 0, & \exists r \quad st \quad i_r \neq j_r \end{cases} : \qquad (1.4)$$

Եթե V տարածության $w_1,\ldots,w_k$ վեկտորները $\{v_1,\ldots,v_n\}$ բազիսի միջոցով արտահայտվում են $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ բանաձևերով, ապա կամայական $T \in \Im^k(V)$ թենզորի համար կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը, կստանանք՝

$$T(w_1,\ldots,w_k) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{1j_1}\ldots a_{kj_k} T(v_{j_1},\ldots,v_{j_k}) = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} T(v_{j_1},\ldots,v_{j_k})\varphi_{j_1} \otimes$$
$$\otimes\ldots\otimes \varphi_{j_k}(w_1,\ldots,w_k) :$$

Հետևաբար՝ $T = \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^{n} a_{j_1\cdots j_k}\varphi_{j_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{j_k}$, այսինքն $\Im^k(V)$ տարածության յուրաքանչյուր T վեկտոր հանդիսանում է (1.3) համակարգի վեկտորների գծային կոմբինացիա:

(1.3) համակարգի գծորեն անկախությունը ցույց տալու համար ենթադրենք՝ $\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1\ldots i_k}\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k} = 0$: Այս հավասարությունը կիրառելով $(v_{j_1},\ldots,v_{j_k}) \in V^k$ էլեմենտի վրա, (1.4)-ի շնորհիվ կստանանք՝ $a_{j_1\cdots j_k} = 0$: ■

3. Բազմագծային նշանափոխ ձևեր:

ա) $T \in \Im^2(V)$ 2-թենզորը կոչվում է *նշանափոխ* կամ *հակահամաչափ,* եթե $T(x,y) = -T(y,x)$, երբ $(x,y) \in V^2$:

Եթե $T \in \Im^2(V)$ թենզորը նշանափոխ է, ապա $T(x,x) = 0$, յուրաքանչյուր $x \in V$ տարրի համար: Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

$$0 = T(x+y, x+y) = T(x,x) + T(x,y) + T(y,x) + T(y,y) = T(x,y) + T(y,x):$$

բ) $\omega \in \Im^k(V)$ k-թենզորը $(k \ge 2)$ կոչվում է *նշանափոխ* կամ *հակահամաչափ,* եթե

$$\omega(v_1,\ldots,v_i,\ldots,v_j,\ldots,v_k) = -\omega(v_1,\ldots,v_j,\ldots,v_i,\ldots,v_k),\ v_1,\ldots,v_k \in V: \qquad (1.5)$$

$\omega \in \Im^k(V)$ $(k \ge 2)$ նշանափոխ թենզորների բազմությունը կնշանակենք $\Lambda^k(V)$-ով: Այն $\Im^k(V)$ տարածության ենթատարածություն է: $k=1$ դեպքում սահմանում ենք՝ $\Lambda^1(V) = \Im^1(V)$:

Օրինակ: Դիցուք՝ $V = R^n,\ k \le n$ *

$$v_1 = v_{11}e_1 + \ldots + v_{1n}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_k = v_{k1}e_1 + \ldots + v_{kn}e_n :$$

Վերցնենք $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ հաստատագրված ինդեքսներ և դիտարկենք

$$\omega(v_1,\ldots,v_k) = \begin{vmatrix} v_{1i_1} v_{1i_2} \ldots v_{1i_k} \\ v_{2i_1} v_{2i_2} \ldots v_{2i_k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{ki_1} v_{ki_2} \ldots v_{ki_k} \end{vmatrix}$$

որոշիչը: Այստեղ ω-ի երկու արգումենտները տեղափոխելիս՝ կտեղափոխվեն որոշչի համապատասխան տողերը, որի արդյունքում կփոխվի որոշչի, հետևաբար և՝ ω-ի նշանը, այսինքն՝ $\omega \in \Lambda^k(R^n)$:

---

* Երբ $k > n$, $v_1,\ldots,v_k$ վեկտորներից մեկը գծորեն արտահայտվում է մյուսների միջոցով, հետևաբար, ինչպես ա) կետում, կարելի է ապացուցել, որ $\omega(v_1,\ldots,v_k) \equiv 0$:

(1.5) պայմանին առավել հարմար տեսք տալու նպատակով կամայական $\sigma \in \Sigma_k$ արտապատկերման համար մտցնենք հետևյալ նշանակումը.

$$\sigma\omega(v_1,...,v_k) = \omega(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)}):$$

Դժվար չէ ստուգել, որ ցանկացած $\sigma,\tau \in \Sigma_k$ -ի համար

$$\tau(\sigma\omega) = (\tau\sigma)\omega: \tag{1.6}$$

Թեորեմ 1.3: *Որպեսզի $\omega \in \Im^k(V)$ թենզորը լինի նշանափոխ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\sigma \in \Sigma_k$ արտապատկերման համար*

$$\sigma\omega = \varepsilon_\sigma \cdot \omega: \tag{1.7}$$

► Թեորեմի բավարարությունն ակնհայտ է, իսկ անհրաժեշտությունն ապացուցելու համար նկատենք, որ (1.5) պայմանը նշանակում է, որ (1.7) պայմանը տեղի ունի կամայական σ դիրքափոխության համար: Մյուս կողմից, յուրաքանչյուր $\sigma \in \Sigma_k$ տեղափոխություն հանդիսանում է դիրքափոխությունների վերջավոր արտադրյալ: Այդ պատճառով (1.7)-ը հետևում է (1.5), (1.6)-ից և թեորեմ 1.1-ից: ■

Այժմ սահմանենք թենզորի *ալտերնացիան (alternation - հաջորդում, հերթագայում)* հետևյալ հավասարությամբ.

$$Alt(T) = \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\Sigma_k} \varepsilon_\tau \tau T,\ T \in \Im^k(V): \tag{1.8}$$

Ալտերնացիայի գործողությունը գծային է՝

$$Alt(S+T) = Alt(S) + Alt(T),\ Alt(aT) = a \cdot Alt(T):$$

Թեորեմ 1.4: *Ճշմարիտ են հետևյալ երկու պնդումները.*

1°. *Եթե $T \in \Im^k(V)$, ապա $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$:*

2°. *Եթե $\omega \in \Lambda^k(V)$, ապա $Alt(\omega) = \omega$:*

► 1°. Ցույց տանք, որ $Alt(T)$ -ն բավարարում է (1.7)-ին: Իրոք*.

$$\sigma(Alt(T)) = \frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\Sigma_k} \varepsilon_\tau(\sigma\tau)(T) = \frac{\varepsilon_\sigma}{k!}\sum_{\tau\in\Sigma_k} \varepsilon_{\sigma\tau}(\sigma\tau)T = \varepsilon_\sigma Alt(T):$$

---

* $\sigma : \Im^k(V) \to \Im^k(V)$ արտապատկերումը գծային է:

2°. -ը հետևում է (1.8)-ից և (1.7)-ից՝

$$Alt(\omega)=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\Sigma_k}\varepsilon_\tau\tau\omega=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\Sigma_k}\varepsilon_\tau^2\omega=\frac{1}{k!}\sum_{\tau\in\Sigma_k}\omega=\omega:\blacksquare$$

Հետևանք: $Alt(Alt(T))=Alt(T)$:

4. Նշանափոխ թենզորների արտաքին արտադրյալ: Դիցուք $\omega\in\Lambda^k(V)$ և $\eta\in\Lambda^l(V)$: Այդ դեպքում, ընդհանրապես ասած, $\omega\otimes\eta$ թենզորը $\Lambda^{k+l}(V)$ տարածությանը չի պատկանում: Այս նկատառումով սահմանենք նոր գործողություն՝ $\omega\in\Lambda^k(V)$ և $\eta\in\Lambda^l(V)$ նշանափոխ թենզորների *արտաքին արտադրյալ*.

$$\omega\wedge\eta=\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(\omega\otimes\eta)\in\Lambda^{k+l}(V):$$

Նշենք արտաքին արտադրյալի հետևյալ հատկությունները, որոնց ճշմարտացիությունը կարելի է հեշտությամբ ստուգել.

$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta=\omega_1\wedge\eta+\omega_2\wedge\eta$$

$$\omega\wedge(\eta_1+\eta_2)=\omega\wedge\eta_1+\omega\wedge\eta_2$$

$$(a\omega)\wedge\eta=\omega\wedge(a\eta)=a(\omega\wedge\eta)$$

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega: \tag{1.9}$$

Ապացուցենք նշված հատկություններից վերջինը, որի համար ստուգենք

$$Alt(\omega\otimes\eta)=(-1)^{kl}Alt(\eta\otimes\omega) \tag{1.9'}$$

հավասարությունը: Նշանակենք σ_0 -ով հետևյալ տեղափոխությունը.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2,..., & k, & k+1,...,k+l \\ l+1, & l+2,..., l+k, & & 1,..., \quad l \end{pmatrix}:$$

Այդ դեպքում $\sigma_0(\omega\otimes\eta)=\eta\otimes\omega$ և $\varepsilon_{\sigma_0}=(-1)^{kl}$: Հետևելով (1.7)-ին՝

$$Alt(\omega\otimes\eta)=\varepsilon_{\sigma_0}\cdot\sigma_0 Alt(\omega\otimes\eta)=(-1)^{kl}Alt\sigma_0(\omega\otimes\eta)=$$

$$=(-1)^{kl}Alt(\eta\otimes\omega):$$

Արտաքին արտադրյալի զուգորդականությունն ապացուցվում է հետևյալ թեորեմի միջոցով.

Թեորեմ 1.5:

1°. *Եթե* $S \in \Im^{k}(V)$, $T \in \Im^{l}(V)$ և $Alt(S)=0$, ապա

$$Alt(S \otimes T) = Alt(T \otimes S) = 0:$$

2°. $Alt(Alt(S) \otimes T) = Alt(S \otimes T) = Alt(S \otimes Alt(T))$:

► 1°. Ըստ սահմանման, ունենք՝ $Alt(S \otimes T)(v_1,...,v_{k+l}) =$

$$= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\tau \in \Sigma_{k+l}} \varepsilon_{\tau} S(v_{\tau(1)},...,v_{\tau(k)}) T(v_{\tau(k+1)},...,v_{\tau(k+l)}): \qquad (1.10)$$

Դիտարկենք Σ_{k+l} խմբի

$$G := \{\sigma \in \Sigma_{k+l} : \sigma(k+1)=k+1,...,\sigma(k+l)=k+l\}$$

ենթախումբը: Կունենանք՝

$$\sum_{\sigma \in G} \varepsilon_{\sigma} S(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= T(v_{k+1},...,v_{k+l}) \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_{\tau} S(v_{\tau(1)},...,v_{\tau(k)}) =$$

$$= T(v_{k+1},...,v_{k+l}) k! Alt(S)(v_1,...,v_k) = 0:$$

Այժմ վերցնենք Σ_{k+l} խմբի $\sigma_0 \notin G$ կամայական տարրը և դիտարկենք

$$G\sigma_0 = \{\sigma' \sigma_0 : \sigma' \in G\}$$

հարակից դասը: Նշանակենք՝ $(w_1,...,w_{k+l}) \equiv (v_{\sigma_0(1)},...,v_{\sigma_0(k+l)})$:

Կունենանք՝

$$\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \varepsilon_{\sigma} S(v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)},...,v_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= \varepsilon_{\sigma_0}\left[\sum_{\sigma' \in G} \varepsilon_{\sigma'} S(w_{\sigma'(1)},...,w_{\sigma'(k)})\right] T(w_{k+1},...,w_{k+l}) = 0:$$

Մյուս կողմից, քանի որ (1.10) գումարը հավասար է (միմյանց հետ չհատվող) հարակից դասերի վրա տարածված գումարների գումարին, ուստի այն ևս հավասար է զրոյի:

$Alt(T \otimes S) = 0$ հավասարությունը հետևում է (1.9’) –ից:

2°. Ունենք՝ $Alt(Alt(S)\otimes T)-Alt(S\otimes T)=Alt((AltS-S)\otimes T)=0$, որտեղ վերջին հավասարությունը հետևում է նախորդ թեորեմի հետևանքից և 1°-ից: ■

Հետևանք: *Եթե* $\omega\in\Lambda^k(V),\eta\in\Lambda^l(V)$ *և* $\theta\in\Lambda^m(V)$, *ապա*

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}Alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta)=\omega\wedge(\eta\wedge\theta):$$

▶ $(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\dfrac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}Alt((\omega\wedge\eta)\otimes\theta)=$

$$=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}Alt\left[\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}Alt(\omega\otimes\eta)\right)\otimes\theta\right]=$$

$$=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}Alt((\omega\otimes\eta)\otimes\theta)=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}Alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta):$$

Երկրորդ հավասարությունն ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Ինդուկտիվ կերպով արտաքին արտադրյալ սահմանվում է նաև երեքից ավելի արտադրիչների դեպքում և ապացուցվում է նրա զուգորդականությունը:

<u>5.</u> $\Lambda^k(V)$ **<u>տարածության բազիս:</u>**

Թեորեմ 1.6: *Դիցուք* $\{v_1,\dots,v_n\}$ *-ը* V *տարածության բազիս է, իսկ* $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ *-ը դրա դուալ բազիսն է: Այդ դեպքում*

$$\varphi_{i_1}\wedge\varphi_{i_2}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_k},\ 1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n \qquad (1.11)$$

համակարգը հանդիսանում է $\Lambda^k(V)$ *տարածության բազիս:*

Այս թեորեմից անմիջապես հետևում է, որ $\Lambda^k(V)$ տարածության չափողականությունը C_n^k - է:

▶ Համաձայն թեորեմ 1.2-ի՝ եթե $\omega\in\Lambda^k(V)\subset\Im^k(V)$, ապա $\omega=\sum\limits_{j_1,\dots,j_k=1}^{n}a_{j_1\dots j_k}\varphi_{j_1}\otimes\ldots\otimes\varphi_{j_k}$: Հետևաբար

$$\omega = Alt(\omega) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{j_1\dots j_k} Alt(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k}) : \tag{1.12}$$

Մյուս կողմից, արտաքին արտադրյալի սահմանման համաձայն՝

$$Alt(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k}) = \frac{1}{k!} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k} : \tag{1.13}$$

(1.9) -ից հետևում է, որ $\varphi_{j_p} \wedge \varphi_{j_q} = -\varphi_{j_q} \wedge \varphi_{j_p}$ և, մասնավորապես, $\varphi_{j_p} \wedge \varphi_{j_p} = 0$: Այդ պատճառով, եթե (1.13) արտաքին արտադրյալի երկու արտադրիչներ նույնն են, ապա այդպիսի գումարելիները (1.12)–ում հավասար են 0-ի: Իսկ եթե բոլոր արտադրիչները միմյանցից տարբեր են, ապա արտադրիչների տեղափոխություններով արտադրյալը կարելի է բերել (1.11) տեսքի*: Հետևաբար (1.12) գումարը կներկայացվի որպես (1.11) համակարգի վեկտորների գծային կոմբինացիա՝

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} b_{i_1\dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} : \tag{1.14}$$

(1.11) համակարգի գծորեն անկախությունը ցույց տալու համար ենթադրենք՝

$$\sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1\dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = 0 :$$

Կիրառենք այս հավասարությունը

$$(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) \in V^k,\ 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$$

կետում և կստանանք՝

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1\dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} (v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_k} k! a_{i_1\dots i_k} Alt(\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k})(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1\dots i_k} \sum_{\tau\in\Sigma_k} \varepsilon_\tau (\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k})(v_{j_{\tau(1)}},\dots,v_{j_{\tau(k)}}) = \\
&= \sum_{i_1<\dots<i_k} a_{i_1\dots i_k} \sum_{\tau\in\Sigma_k} \varepsilon_\tau \delta_{i_1 j_{\tau(1)}} \dots \delta_{i_k j_{\tau(k)}} = \varepsilon_I a_{j_1\dots j_k} = a_{j_1\dots j_k},
\end{aligned}$$

---

* Կարելի է ապացուցել $\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k} = \varepsilon_\sigma \varphi_{j_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{\sigma(k)}}$ հավասարությունը:

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Դիտողություն: $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ պայմանից երևում է, որ $k \le n$: Սակայն թեորեմի ապացույցից դժվար չէ նկատել, որ եթե $k > n$, ապա $\Lambda^k(V) = \{0\}$: Իրոք. այդ դեպքում կգտնվեն p և q տարբեր ինդեքսներ, այնպիսիք, որ $i_p = i_q$, ուստի կամայական $(i_1,\ldots,i_k)$ հավաքածուի համար՝ $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} = 0$:

6. <u>Նշանափոխ թենզորի ներկայացումը անցման մատրիցի մինորների միջոցով:</u>

Թեորեմ 1.6-ից հետևում է, որ եթե V տարածության չափողականությունը n է, ապա $\Lambda^n(V)$ տարածության չափողականությունը 1 է: Դա նշանակում է, որ V-ի վրա որոշված բոլոր նշանափոխ n-թենզորները համեմատական են իրենցից ընտրված կամայական ոչ զրոյականին: Այդպիսի թենզորի օրինակ կարող է ծառայել որոշիչը:

Թեորեմ 1.7: *Եթե $\{v_1,\ldots,v_n\}$-ը V տարածության բազիս է, $\omega \in \Lambda^n(V)$ և $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$, $1 \le i \le n$, ապա*

$$\omega(w_1,\ldots,w_n) = \omega(v_1,\ldots,v_n)\det(a_{ij}) :$$

▶ Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել հետևյալ ներկայացումը.

$$\omega(w_1,\ldots,w_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} a_{1i_1}\ldots a_{ni_n}\,\omega(v_{i_1},\ldots,v_{i_n}) : \qquad (1.15)$$

Այստեղ բոլոր գումարելիները զրո են, բացառությամբ այն դեպքերից, երբ $(i_1,\ldots,i_n)$-ը $(1,\ldots,n)$-ի ինչ որ σ տեղափոխություն է՝ $i_k = \sigma(k),\ k = 1,2,\ldots,n$: Այդ դեպքում $\omega(v_{i_1},\ldots,v_{i_n}) = \varepsilon_\sigma \omega(v_1,\ldots,v_n)$, որն էլ տեղադրելով (1.15)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\omega(w_1,\ldots,w_n) = \omega(v_1,\ldots,v_n)\sum_{\sigma\in\Sigma_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)} = \omega(v_1,\ldots,v_n)\det(a_{ij}) : \blacksquare$$

Թեորեմ 1.8: *Եթե* $\{v_1,...,v_n\}$ *-ը* V *տարածության բազիս է,* $k<n$, $\omega\in\Lambda^k(V)$ *և* $w_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}v_j$, $1\le i\le k$ *, ապա տեղի ունի*

$$\omega(w_1,...,w_k)=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}\omega(v_{j_1},...,v_{j_k})\begin{vmatrix}a_{1j_1}...a_{1j_k}\\ ....\\ a_{kj_1}...a_{kj_k}\end{vmatrix}$$

համապատասխանությունը:

▶ Ունենք՝

$$\omega(w_1,...,w_k)=\sum_{i_1,...,i_k=1}^{n}a_{1i_1}...a_{ki_k}\omega(v_{i_1},...,v_{i_k}): \qquad (1.16)$$

Այստեղ բոլոր գումարելիները զրո են, բացառությամբ այն դեպքերի, երբ $(i_1,...,i_k)$-ն մի ինչ-որ $(j_1,...,j_k)$-ի ($1\le j_1<...<j_k\le n$) ինչ որ σ տեղափոխություն է՝ $i_m=j_{\sigma(m)}$, $1\le m\le k$: Այդ դեպքում՝

$$\omega(v_{i_1},...,v_{i_k})=\omega(v_{j_{\sigma(1)}},...,v_{j_{\sigma(k)}})=\varepsilon_\sigma\omega(v_{j_1},...,v_{j_k}):$$

Այս արժեքը տեղադրելով (1.16)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\omega(w_1,...,w_k)=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}\omega(v_{j_1},...,v_{j_k})\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\varepsilon_\sigma a_{1j_{\sigma(1)}}...a_{kj_{\sigma(k)}}=$$

$$=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}\omega(v_{j_1},...,v_{j_k})\begin{vmatrix}a_{1j_1}...a_{1j_k}\\ ....\\ a_{kj_1}...a_{kj_k}\end{vmatrix}: \blacksquare$$

Հետևանք: *Եթե* $\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ *-ը* $\{v_1,...,v_n\}$ *-ի դուալ բազիսն է, ապա*

$$\varphi_{i_1}\wedge\varphi_{i_2}\wedge...\wedge\varphi_{i_k}(w_1,...,w_k)=\begin{vmatrix}a_{1i_1}...a_{1i_k}\\ ....\\ a_{ki_1}...a_{ki_k}\end{vmatrix}:$$

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՁԵՎԵՐ

1. Դիֆերենցիալ ձևի սահմանումը: Դիցուք $p \in R^n$ կետը հաստատագրված է: Նշանակենք՝ $R_p^n = \{(p,v): v \in R^n\}$ և R_p^n բազմության վրա սահմանենք վեկտորական տարածության գործողությունները.

$$(p,v)+(p,w)=(p,v+w);\ a(p,v)=(p,av), a \in R:$$

(p,v)-ի փոխարեն մենք հաճախ կգրենք՝ v_p (կարդացվում է v վեկտորը՝ կիրառած p կետում): Երբ R^n-ը կոորդինատային հարթությունն է ($n=2$) կամ եռաչափ տարածությունը ($n=3$), $v \in R^n$ էլեմենտը պատկերվում է վեկտորի տեսքով, որի սկզբնակետը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետն է, իսկ վերջնակետը՝ v-ն: Այդ դեպքում $v_p \in R_p^n$ տարրը պատկերվում է v-ի հետ նույն երկարության և ուղղության վեկտորի տեսքով, որի սկզբնակետը p-ն է:

Եթե $\{e_1,...,e_n\}$-ը R^n-ի ստանդարտ բազիսն է, ապա $\{(e_1)_p,...,(e_n)_p\}$-ն կլինի բազիս R_p^n-ում: Այն կոչվում է R_p^n-ի ստանդարտ բազիս:

R_p^n-ում սկալյար (ներքին) արտադրյալը սահմանվում է բնական ձևով՝

$$\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle:$$

Այժմ նշանակենք $\{\varphi_1(p),...,\varphi_n(p)\}$-ով R_p^n տարածության $\{(e_1)_p,...,(e_n)_p\}$ բազիսի դուալ բազիսը, որը p-ից անկախ է հետևյալ իմաստով՝ $\varphi_i(p)(v_p)=\varphi_i(v)$:

Դիցուք ունենք $\omega(p) \in \Lambda^k(R_p^n)$, $1 \le k \le n$ բազմագծային նշանափոխ արտապատկերումը: Այդ դեպքում, համաձայն (1.14)-ի, այն կներկայացվի հետևյալ տեսքով.

$$\omega(p) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \omega_{i_1 ... i_k}(p)\left[\varphi_{i_1}(p) \wedge ... \wedge \varphi_{i_k}(p)\right]: \qquad (2.1)$$

Նկատենք, որ p կետը փոփոխելիս փոխվում են ոչ միայն $\omega_{i_1 \dots i_k}(p)$ գործակիցները, այլ նաև՝ $\omega(p)$-ի փոփոխման տիրույթը՝ $\Lambda^k(R_p^n)$ տարածությունը:

(2.1) տեսքի արտահայտությունը կոչվում է R^n-ի վրա որոշված k-*աստիճանի դիֆերենցիալ ձև*: $\omega(p)$ դիֆերենցիալ ձևը կարող է նաև (ամբողջ R^n-ի փոխարեն) որոշված լինել կամայական $G \subset R^n$ տիրույթում: Այդ դեպքում կասենք, որ $\omega(p)$ դիֆերենցիալ ձևը G տիրույթում *անընդհատ է կամ դիֆերենցելի*, եթե այդպիսին են $\omega_{i_1 \dots i_k}(p)$ գործակիցները:

$f : R^n \to R$ (կամ $f : G \to R$) ֆունկցիան կոչվում է *0 աստիճանի դիֆերենցիալ ձև* և $f\omega$ արտադրյալը հաճախ գրվում է $f \wedge \omega$ տեսքով:

2. Դիֆերենցիալ ձևի (արտաքին) դիֆերենցիալ: Նախ դիտարկենք $\omega = f : R^n \to R$ զրո աստիճանի դիֆերենցիալ ձևը*: Ենթադրենք, որ f ֆունկցիան դիֆերենցելի է: Այդ դեպքում f-ի $df \in \Lambda^1(R_p^n)$ *դիֆերենցիալը* սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$d\omega(p)(v_p) = df(p)(v_p) = Df(p)(v),$$

որտեղ $Df(p)$-ն f արտապատկերման Յակոբիի մատրիցն է (գրադիենտը)՝ $Df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right)$: Երբեմն $df(p)(v_p)$ գրելու փոխարեն գրում են $df(p;v)$:

Մասնավորապես, եթե f-ը i-րդ պրոյեկտող արտապատկերումն է՝

$$f(x) = x^i \equiv \pi^i(x), \ x = (x^1, \dots, x^n),$$

ապա

---

* Առաջիկայում, եթե անհրաժեշտություն չլինի կոնկրետացնելու դիֆերենցիալ ձևի որոշման տիրույթը, մենք կենթադրենք, որ այն որոշված է ամբողջ R^n-ի վրա:

$$dx^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = \pi^i(v) = v^i :$$

Ուստի $dx^i(p)\big((e_j)_p\big) = \delta_{ij}$, որը նշանակում է, որ $\left\{dx^1(p),...,dx^n(p)\right\}$-ն $\left\{(e_1)_p,...,(e_n)_p\right\}$ ստանդարտ բազիսի դուալ բազիսն է: Այլ կերպ ասած՝ $\varphi_i(p) = dx^i(p),\ 1 \le i \le n$: Տեղադրելով այս արժեքները (2.1)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\omega = \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} \omega_{i_1...i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \ , \qquad (2.1')$$

որը կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի կանոնական ներկայացում:

Առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում $f : R^n \to R$ զրո աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալի կանոնական ներկայացումը.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n := D_1 f dx^1 + ... + D_n f dx^n :$$

Այժմ սահմանենք կամայական k-աստիճանի $(k \ge 1)$ ω դիֆերենցելի *դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալ*: Ելակետ է ընդունվում (2.1’) կանոնական ներկայացումը և դիֆերենցիալը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$d\omega = \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} (d\omega_{i_1...i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{1\le i_1<...<i_k\le n} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \omega_{i_1...i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} :$$

Նկատենք, որ k-աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալը $k+1$ աստիճանի դիֆերենցիալ ձև է:

Թեորեմ 2.1: *Դիցուք R^n-ի վրա որոշված ω և η դիֆերենցիալ ձևերը դիֆերենցելի են: Այդ դեպքում*

1°. $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$,

2°. *Եթե ω-ն k-աստիճանի է, ապա*

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta ,$$

3°. $d(d\omega) = 0$ *(կամ՝ $d^2\omega = 0$)*:

▶ 1°.-ն անմիջապես բխում է դիֆերենցիալի սահմանումից:

2°. Հաշվի առնելով 1°.-ը և արտաքին արտադրյալի բաշխական հատկությունը՝ բավական է դիտարկել այն դեպքը, երբ

$$\omega = f_1 dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},\ \eta = f_2 dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l},$$

որտեղ $k + l \le n$, իսկ $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$ և $1 \le j_1 < \ldots < j_l \le n$ ինդեքսների բազմությունները չեն հատվում ու $f_1, f_2 : R^n \to R$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Այդ դեպքում

$$d(\omega \wedge \eta) = d(f_1 f_2 dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l}) =$$

$$= \left[(df_1) f_2 + f_1 df_2\right] \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} = (d\omega) \wedge \eta +$$

$$+(-1)^k f_1 \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge df_2 \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_l} = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta :$$

3°. Քանի որ $d\omega = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \sum_{\alpha=1}^{n} D_\alpha \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, ուստի

$$d(d\omega) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha\beta} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} :$$

Սակայն՝

$$D_{\alpha\beta} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = -D_{\beta\alpha} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k},$$

հետևաբար՝ $\sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} D_{\alpha\beta} \omega_{i_1 \ldots i_k} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} = 0$: ■

3. <u>Փոփոխականի փոխարինում դիֆերենցիալ ձևերում:</u> Դիցուք ունենք $f : R^n \to R^m$ դիֆերենցելի արտապատկերումը: Սահմանենք մի նոր արտապատկերում՝

$$f_* : R_p^n \to R_{f(p)}^m,$$

որը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f_*(v_p) = \left(Df(p)(v)\right)_{f(p)} :$$

Այնուհետև, R^m-ում որոշված յուրաքանչյուր k-աստիճանի ω դիֆե-րենցիալ ձևի համապատասխանության մեջ դնենք R^n-ում որոշված $f^*\omega$ դիֆերենցիալ ձևը հետևյալ կերպ.

$$f^*\omega(p;v_1,...,v_k) = \omega(f(p);f_*(v_1),...,f_*(v_k))\,^*, \qquad (2.2)$$

որտեղ $v_i \in R_p^n$, $1 \le i \le k$:

Եթե ω-ն զրո աստիճանի է, ապա $f^*\omega := \omega \circ f$: Այսպիսով, յուրաքանչյուր հաստատագրված $p \in R^n$ արժեքի դեպքում՝

$$f^* : \Lambda^k(R_{f(p)}^m) \to \Lambda^k(R_p^n):$$

$f^*\omega$-ն կոչվում է ω *դիֆերենցիալ ձևի նախապատկեր* f արտապատկերման միջոցով: Կիրառելի է նաև $f^*(\omega)$ նշանակումը:

Թեորեմ 2.2: *Դիցուք ունենք* $y = f(x): R^n \to R^m$ *դիֆերենցելի արտապատկերումը: Այդ դեպքում*

1°. $f^*(dy^i) = \sum_{j=1}^n D_j f^i dx^j = df^i$,

2°. $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2$, $f^* a\omega = af^*\omega$,

3°. *Եթե* $g: R^m \to R$ *արտապատկերումը դիֆերենցելի է, ապա*

$$f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*\omega,$$

4°. $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$,

5°. *Եթե* f *-ը կրկնակի դիֆերենցելի է, ապա* $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$: (2.3)

▶ Ապացուցենք նախ $1°$-ը.

$$f^*(dy^i)(p,v) = dy^i\left(f(p)\right)\left(f_*(v_p)\right) = dy^i\left(f(p)\right)\left(Df(p)(v)\right)_{f(p)} =$$

$$= dy^i\left(\sum_{j=1}^n D_j f^1(p)v^j,...,\sum_{j=1}^n D_j f^m(p)v^j\right)_{f(p)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n D_j f^i(p)v^j = \sum_{j=1}^n D_j f^i(p)dx^j(v_p):$$

$2°$-ը և $3°$-ը ակնհայտ են, ապացուցենք $4°$-ը: Ենթադրենք, թե ω-ն k աստիճանի է, իսկ η-ն՝ ℓ: Այդ դեպքում, եթե $v_i \in R_p^n$, $1 \le i \le k+\ell$, ապա

---

[*] Նույնն է, ինչ $f^*\omega(p)\,(v_1,...,v_k) = \omega(f(p))\,(f_*(v_1),...,f_*(v_k))$:

$$f^*(\omega\wedge\eta)(p;v_1,...,v_{k+\ell})=(\omega\wedge\eta)\big(f(p);f_*(v_1),...,f_*(v_{k+\ell})\big)=$$
$$=\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}Alt(\omega\otimes\eta)\big(f(p);f_*(v_1),...,f_*(v_{k+\ell})\big)=$$
$$=\frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in\Sigma_{k+\ell}}\varepsilon_\sigma\omega\Big(f(p);f_*(v_{\sigma(1)}),...,f_*(v_{\sigma(k)})\Big)\times$$
$$\times\eta\Big(f(p);f_*(v_{\sigma(k+1)}),...,f_*(v_{\sigma(k+\ell)})\Big)=$$
$$=\frac{1}{k!\ell!}\sum_{\sigma\in\Sigma_{k+\ell}}\varepsilon_\sigma\left(f^*\omega\otimes f^*\eta\right)\Big(p;f_*(v_{\sigma(1)}),...,f_*(v_{\sigma(k+\ell)})\Big)=$$
$$=\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}Alt\Big(f^*\omega\otimes f^*\eta\Big)\big(p;v_1,...,v_{k+\ell}\big)=\Big(f^*\omega\wedge f^*\eta\Big)\big(p;v_1,...,v_{k+\ell}\big):$$

5° -ի ապացույցը. նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ ω-ն 0 աստիճանի է՝ $\omega: R^m\to R$ ։ Դիֆերենցիալի ձևի ինվարիանտության շնորհիվ ունենք՝

$$d(f^*\omega(x))=d\omega(f(x))=\sum_{\alpha=1}^m\frac{\partial\omega}{\partial y^\alpha}(f(x))df^\alpha=\sum_{\alpha=1}^m\frac{\partial\omega}{\partial y^\alpha}(f(x))f^*dy^\alpha=$$
$$=\sum_{\alpha=1}^m f^*\left(\frac{\partial\omega}{\partial y^\alpha}(y)dy^\alpha\right)=f^*\sum_{\alpha=1}^m\frac{\partial\omega}{\partial y^\alpha}(y)dy^\alpha=f^*\big(d\omega(y)\big):$$

Ընդհանուր դեպքում 5° -ն ապացուցելու համար կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Ենթադրենք 5° -ը ճիշտ է բոլոր k աստիճանի դիֆերենցիալ ձևերի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $(k+1)$ աստիճանի դիֆերենցիալ ձևերի համար: Բավական է դիտարկել $\omega\wedge dy^i$ տեսքի ձևերը: Ունենք՝*

$$f^*\left(d(\omega\wedge dy^i)\right)=f^*\left(d\omega\wedge dy^i\right)=f^*\left(d\omega\right)\wedge f^*dy^i=$$
$$=d\left(f^*\omega\right)\wedge f^*dy^i=d\left(f^*\omega\wedge f^*dy^i\right)=d\left(f^*(\omega\wedge y^i)\right): \blacksquare$$

---

* Երբ $\eta=g(y)$ -ը 0-աստիճանի է, $g\omega=g\wedge\omega$ ։

Հետևանք: *Եթե* $y=f(x):R^n\to R^m$, $y^i=f^i(x^1,...,x^n)$, $i=1,...,m$ *և*

$$\omega=\sum_{1\le i_1<...<i_k\le m}\omega_{i_1...i_k}(y)dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k}\ ,$$

ապա

$$f^*\omega=\sum_{\substack{1\le i_1<...<i_k\le m\\ 1\le j_1<...<j_k\le n}}\omega_{i_1...i_k}(f(x))\frac{D(f^{i_1},...,f^{i_k})}{D(x^{j_1},...,x^{j_k})}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\ :$$

▶ Թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝

$$f^*\omega=\sum_{i_1<...<i_k}\omega_{i_1...i_k}(f(x))df^{i_1}\wedge\cdots\wedge df^{i_k}\ :$$

Հաշվենք դիֆերենցիալների արտաքին արտադրյալը: Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ կստանանք

$$df^{i_1}\wedge\cdots\wedge df^{i_k}=$$

$$=\left(\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^1}dx^1+...+\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^n}dx^n\right)\wedge...\wedge\left(\frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^1}dx^1+...+\frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^n}dx^n\right)=$$

$$=\sum_{j_1,...,j_k=1}^{n}\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\frac{\partial f^{i_2}}{\partial x^{j_2}}...\frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^{j_k}}dx^{j_1}\wedge...\wedge dx^{j_k}=$$

$$=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n}\left(\sum_{\sigma\in\Sigma_k}\varepsilon_\sigma\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}}\cdot\frac{\partial f^{i_2}}{\partial x^{j_{\sigma(2)}}}...\frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^{j_{\sigma(k)}}}\right)dx^{j_1}\wedge...\wedge dx^{j_k}=$$

$$=\sum_{j_1<...<j_k}\frac{D(f^{i_1},...,f^{i_k})}{D(x^{j_1},...,x^{j_k})}dx^{j_1}\wedge...\wedge dx^{j_k}:$$

Պնդումն ապացուցված է: ■

<u>4. Տրանզիտիվություն (տարանցիկություն):</u>

Թեորեմ 2.3: *Եթե* $f:R^n\to R^m$ *և* $g:R^m\to R^\ell$ *արտապատկերումները դիֆերենցելի են, ապա*

$$1^0.\ (g\circ f)_*=g_*\circ f_*,\qquad\qquad 2^0.\ (g\circ f)^*=g^*\circ f^*:$$

▶ Ապացուցենք նախ 1^0 -ը.

$$(g\circ f)_*(v_p)=\big(D(g\circ f)(p)(v)\big)_{(g\circ f)(p)}=$$
$$=\Big(\big(Dg(f(p))\circ Df(p)(v)\big)\Big)_{g(f(p))}=$$
$$=g_*\Big(\big(D(f(p)(v)\big)_{f(p)}\Big)=g_*\big(f_*(v_p)\big)=\big(g_*\circ f_*\big)(v_p):$$

2^0 . Դիցուք $p\in R^n$ և $v_1,...,v_k\in R_p^n$, իսկ $\omega\in\Lambda^k\Big(R^{\ell}_{g(f(p))}\Big)$: Այդ դեպքում՝

$$\Big[\big(f^*\circ g^*\big)\omega\Big](p;v_1,...,v_k)=f^*(g^*\omega)(p;v_1,...,v_k)=$$
$$=g^*\omega\big(f(p);f_*(v_1),...,f_*(v_k)\big)=\omega\big(g(f(p));g_*(f_*(v_1)),...,g_*(f_*(v_k))\big)=$$
$$=\omega\big((g\circ f)(p);(g\circ f)_*(v_1),...,(g\circ f)_*(v_k)\big)=(g\circ f)^*\omega(p;v_1,...,v_k):$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

<u>5. Պուանկարեի լեմման:</u> ω դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է *փակ* $A\subset R^n$ տիրույթում, եթե A տիրույթում տեղի ունի $d\omega=0$ հավասարությունը, և կոչվում է *ճշգրիտ* A տիրույթում, եթե գոյություն ունի η դիֆերենցիալ ձև, այնպիսին, որ այդ տիրույթում $\omega=d\eta$: Այս դեպքում η դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է ω-ի *նախնական*: Թեորեմ 2.1-ի համաձայն (կետ 3°), յուրաքանչյուր ճշգրիտ ձև փակ է: Բնական հարց է առաջանում. ճի՞շտ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ պատասխանը բացասական է:

Դիտարկենք

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=:Pdx+Qdy$$

առաջին աստիճանի դիֆերենցիալ ձևը: Կորագիծ ինտեգրալներն ուսումնասիրելիս՝ ապացուցվել է, որ կոորդինատների սկզբնակետը դեն նետած հարթության վրա $d\omega=0$, բայց այդ դիֆերենցիալ ձևը նախնական չունի, այսինքն՝ ω-ն ճշգրիտ չէ:

Սահմանում: *$A\subset R^n$ տիրույթը կոչվում է աստղաձև 0 կետի նկատմամբ, եթե յուրաքանչյուր $x\in A$ կետի համար $[0,x]$ հատվածը պատկանում է A-ին:*

Լեմմա 2.1: *Եթե $A \subset R^n$ տիրույթը աստղաձև է 0 կետի նկատմամբ և ω դիֆերենցիալ ձևը փակ է A տիրույթում, ապա ω-ն այդ տիրույթում ճշգրիտ է:*

▶ Նախ քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ ω-ն 0 աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալ է՝

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = df :$$

f-ը արտահայտենք ω-ի միջոցով: Վերցնենք $(x^1, x^2, ..., x^n) \in A$: Ենթադրենք $f(0) = 0$ և նշանակենք՝ $F(t) = f(tx^1, ..., tx^n)$: Այս ֆունկցիան որոշված է կամայական $t \in [0,1]$-ի համար, քանի որ A որոշման տիրույթն աստղաձև է 0-ի նկատմամբ: Այդ դեպքում Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$f(x^1, ..., x^n) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_0^1 \omega_i(tx)dt \right) x^i :$$

Անցնենք ընդհանուր դեպքի ապացույցին: Դիցուք՝

$$\omega = \sum_{i_1 < ... < i_k} \omega_{i_1 ... i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} :$$

Նշանակենք՝

$$(I\omega)(x) := \sum_{i_1 < ... < i_k} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 ... i_k}(tx)dt \right) x^{i_1} dx^{i_1} \wedge \cdots \overset{\wedge}{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} ,$$

որտեղ ^ նշանը dx^{i_α}-ի գլխին նշանակում է, որ dx^{i_α}-ն բացակայում է: Ցույց տանք, որ

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \omega : \tag{2.4}$$

Քանի որ ω-ն փակ է՝ $d\omega = 0$, ապա $I(d\omega) = 0$: Հետևաբար, (2.4)-ից հետևում է, որ $d(I\omega) = \omega$, այսինքն՝ $I\omega := \eta$-ն փնտրվող դիֆերենցիալ ձևն է: Ունենք՝

$$d(I\omega) = k \sum_{i_1<\ldots<i_k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1\ldots i_k}(tx)dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} +$$

$$+ \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{\alpha=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \left(D_j \omega_{i_1\ldots i_k} \right)(tx)dt \right) \times$$

$$\times\, x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} :$$

Այնուհետև գրենք ω-ի դիֆերենցիալը՝

$$d\omega(x) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_{i_1\ldots i_k}(x)) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} :$$

Հետևաբար,

$$I(d\omega) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k D_j \omega_{i_1\ldots i_k}(tx)dt \right) x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} -$$

$$- \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \left(D_j \omega_{i_1\ldots i_k} \right)(tx)dt \right) \times$$

$$\times\, x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_\alpha}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} :$$

Գումարելով $d(I\omega)$-ի և $I(d\omega)$-ի արժեքները՝ կստանանք

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \sum_{i_1<\ldots<i_k} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1\ldots i_k}(tx)dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} +$$

$$+ \sum_{i_1<\ldots<i_k} \sum_{j=1}^{n} \left(\int_0^1 t^k x^j D_j \omega_{i_1\ldots i_k}(tx)dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t^k \omega_{i_1\ldots i_k}(tx) \right) dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_k} \omega_{i_1\ldots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \omega :$$

Ապացույցն ավարտվեց: ■

§3. ՍՏՈՔՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ ՇՂԹԱՆԵՐՈՎ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

1. Սինգուլյար խորանարդ և շղթա: Նշանակենք՝

$$[0,1]^k = \underbrace{[0,1]\times\cdots\times[0,1]}_{k}:$$

Սահմանում: *Դիցուք՝* $k \le n$ *:* $c:[0,1]^k \to R^n$ *անընդհատ ֆունկցիան կոչվում է սինգուլյար* k *չափանի խորանարդ:*

$I^k(x) = x$ *,* $x \in [0,1]^k$ *ֆունկցիան կոչվում է ստանդարտ սինգուլյար* k *- խորանարդ:*

Կդիտարկենք հետևյալ ֆորմալ գումարները.

$$a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_sc_s\,, \tag{3.1}$$

որտեղ $c_1,\ldots,c_s$ -երը սինգուլյար k չափանի խորանարդներ են, իսկ $a_1,\ldots,a_s \in \mathbb{Z}$: Այս գումարները կանվանենք *սինգուլյար* k *չափանի շղթաներ*: Սինգուլյար k չափանի c խորանարդը կարելի է դիտարկել որպես սինգուլյար k չափանի շղթա՝ $c = 1\cdot c$:

C -ով նշանակենք բոլոր սինգուլյար k չափանի խորանարդների բազմությունը: Այդ դեպքում (3.1) ֆորմալ գումարին կարելի է վերագրել հետևյալ իմաստը. դիտարկենք այն $f: C \to \mathbb{Z}$ արտապատկերումները, որոնք 0-ից տարբեր արժեք են ընդունում միայն վերջավոր թվով «կետերում»: Եվ եթե $f(c_i) = a_i$, $1 \le i \le s$, իսկ $f(c) = 0$, երբ $c \ne c_i$, ապա այդ ֆունկցիային կհամապատասխանեցնենք (3.1) շղթան: Այդ դեպքում $c = 1\cdot c$ պայմանավորվածությունը նշանակում է, որ մենք c սինգուլյար խորանարդը նույնացնում ենք այն f ֆունկցիայի հետ, որը բավարարում է

$$f(c) = 1 \text{ և } f(c') = 0\,, \text{ երբ } c' \ne c$$

պայմանին:

Սինգուլյար շղթաների համար $f+g$ և mf, $m \in \mathbb{Z}$ գործողությունները սահմանվում են բնական ձևով, այն է՝

$$(f+g)(c) = f(c) + g(c)\,,\ (mf)(c) = mf(c):$$

Այժմ սահմանենք սինգուլյար *շղթայի եզր*: Դրա համար նախ պետք է ընդունենք ստանդարտ սինգուլյար խորանարդը: Նշանակենք՝

$$I^k_{(i,\alpha)}(t) := I^k(t^1,\dots,t^{i-1},\alpha,t^i,\dots,t^{k-1}) = (t^1,\dots,t^{i-1},\alpha,t^i,\dots,t^{k-1}),$$

որտեղ $t\in[0,1]^{k-1}$, $\alpha=0$ կամ 1 և $1\le i\le k$:

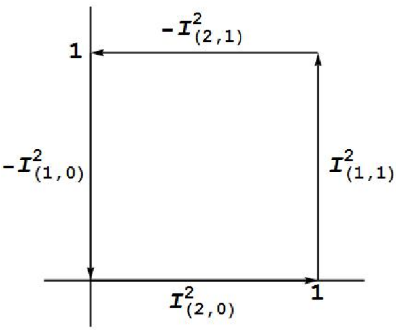
$I^k_{(i,\alpha)}$-ն սինգուլյար $(k-1)$ չափանի խորանարդ է: Այն կոչվում է I^k *ստանդարտ խորանարդի* (i,α) *նիստ*:

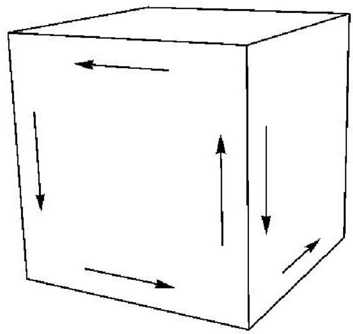
Այնուհետև նշանակենք՝

$$\partial I^k := \sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha} I^k_{(i,\alpha)} :$$

∂I^k -ն սինգուլյար $(k-1)$ չափանի շղթա է: Այն կոչվում է I^k *-ի եզր*:

I^2 և I^3 ստանդարտ խորանարդների եզրերը երկրաչափորեն կարելի է պատկերել հետևյալ տեսքով՝





Կամայական c սինգուլյար k-չափանի խորանարդի (i,α) նիստը և ∂c եզրը սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$c_{(i,\alpha)}(t) = c\left(I^k_{(i,\alpha)}(t)\right),\ \alpha=0,1;\ \ \partial c = \sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)} :$$

Այնուհետև $c = a_1c_1+\dots+a_sc_s$ շղթայի ∂c եզրը սահմանենք հետևյալ բանաձևով՝

$$\partial c = \sum_{j=1}^{s} a_j \partial c_j :$$

Թեորեմ 3.1: *Յուրաքանչյուր* c *սինգուլյար* k *-չափանի շղթայի համար* $\partial(\partial c)=0$ *:*

▶ Նախ ցույց տանք, որ

$$\left(I^k_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}=\left(I^k_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)},\ \text{երբ}\ \alpha,\beta=0,1\ \text{և}\ i\le j: \qquad (3.2)$$

Դիցուք՝ $x\in[0,1]^{k-2}$: Այդ դեպքում ունենք՝

$$\left(I^k_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}(x)=I^k_{(i,\alpha)}\left(I^{k-1}_{(j,\beta)}(x)\right)=I^k_{(i,\alpha)}(x^1,...,x^{j-1},\beta,x^j,...,x^{k-2})=$$

$$=(x^1,...,x^{i-1},\alpha,x^i,...,x^{j-1},\beta,x^j,...,x^{k-2}),$$

$$\left(I^k_{(j+1,\beta)}(x)\right)_{(i,\alpha)}(x)=I^k_{(j+1,\beta)}(x^1,...,x^{i-1},\alpha,x^i,...,x^{k-2})=$$

$$=(x^1,...,x^{i-1},\alpha,x^i,...,x^{j-1},\beta,x^j,...,x^{k-2}):$$

(3.2)-ն ապացուցվեց:

Նման դատողություններով կհամոզվենք, որ յուրաքանչյուր c սինգուլյար k -չափանի խորանարդի համար՝

$$\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}=\left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)},\ 1\le i\le j\le k-1,\ \alpha,\beta=0,1:$$

Մյուս կողմից,

$$\partial(\partial c)=\partial\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}c_{(i,\alpha)}\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{\beta=0}^{1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}=0,$$

քանի որ ստացված գումարի մեջ $\left(c_{(i,\alpha)}\right)_{(j,\beta)}$ -ն և $\left(c_{(j+1,\beta)}\right)_{(i,\alpha)}$ -ն մտնում են հակադիր նշաններով և

$$\{(p;q):\ 1\le p\le k,\ 1\le q\le k-1\}=\{(i,j),\ (j+1,i):1\le i\le j\le k-1\}:$$

Քանի որ թեորեմը ճիշտ է կամայական սինգուլյար k -չափանի խորանարդի համար, ապա այն ճիշտ է նաև կամայական սինգուլյար k -չափանի շղթայի համար: ■

<u>2. Ստոքսի թեորեմը:</u> Դիցուք D -ն J -չափելի բազմություն է R^k -ում և $f\in\Re(D)$: Այդ դեպքում $\omega=f(x^1,...,x^k)dx^1\wedge...\wedge dx^k$ դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\int_D \omega := \int_D f = \int_D f(x^1,...,x^k)dx^1...dx^k \ :$$

Եթե ω-ն k-աստիճանի դիֆերենցիալ ձև է $D \subset R^n$ տիրույթում, c-ն սինգուլյար k-չափանի դիֆերենցելի խորանարդ է՝ $c:[0,1]^k \to D$, ապա

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^k} c^*\omega, \quad \left(c^*\omega = f(c(x))dc^1 \wedge ... \wedge dc^n\right),$$

որտեղ ենթադրվում է, որ c-ն որոշված է $[0,1]^k$ խորանարդը պարունակող որևէ տիրույթում և անընդհատ դիֆերենցելի է այդ տիրույթում:

$c = I^k$ մասնավոր դեպքում ունենք՝

$$\int_{I^k} \omega = \int_{[0,1]^k} (I^k)^*\omega = \int_{[0,1]^k} \omega :$$

Վերջապես, ω-ի ինտեգրալը՝ տարածված $C = \sum a_i c_i$ շղթայով, սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\int_C \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega :$$

Թեորեմ 3.2 (Ստոքս): *Եթե ω-ն $(k-1)$-աստիճանի անընդհատ դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է $D \subset R^n$ բաց բազմության վրա ($n \geq k$), և c-ն սինգուլյար k-չափանի շղթա է, որն արժեքներ է ընդունում D-ից, ապա*

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega :$$

► Նախ ապացուցենք այն դեպքում, երբ $c = I^k$, իսկ ω-ն $[0,1]^k$-ը պարունակող տիրույթում $(k-1)$-աստիճանի անընդհատ դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է: Բավական է քննարկել

$$\omega = f(x^1,...,x^k)dx^1 \wedge ... \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge ... \wedge dx^k \qquad (3.3)$$

դեպքը, քանի որ յուրաքանչյուր $(k-1)$-աստիճանի դիֆերենցիալ ձև հանդիսանում է (3.3) տեսքի դիֆերենցիալ ձևերի գումար: Ունենք՝

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} D_j f\, dx^j \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k = (-1)^{i-1} D_i f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k \text{ :}$$

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} (-1)^{i-1} D_i f\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left\{ \int_0^1 D_i f(x^1, \ldots, x^k) dx^i \right\} dx^1 \ldots \hat{dx^i} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left[f(x^1, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, x^k) - f(x^1, \ldots, \overset{i}{0}, \ldots, x^k) \right] dx^1 \ldots \hat{dx^i} \ldots dx^k =$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, 1, \ldots, x^k) dx^1 \ldots \hat{dx^i} \ldots dx^k -$$

$$-(-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \ldots, 0, \ldots, x^k) dx^1 \ldots \hat{dx^i} \ldots dx^k \text{ :}$$

Այժմ հաշվենք $\int_{\partial c} \omega$ ինտեգրալը: Քանի որ $\partial I^k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} I_{(j,\alpha)}^k$, $c = I^k$, ուստի

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I_{(j,\alpha)}^k} f(x^1, \ldots, x^k) dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(I_{(j,\alpha)}^k \right)^* \left(f(x^1, \ldots, x^k) dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k \right) \text{:} \tag{3.4}$$

Քանի որ $x = I_{(j,\alpha)}^k(t) = (t^1, \ldots, t^{j-1}, \alpha, t^j, \ldots, t^{k-1})$, ապա $x^1 = t^1$, ... , $x^{j-1} = t^{j-1}$, $x^j = \alpha$, $x^{j+1} = t^j$, ... , $x^k = t^{k-1}$: Հետևաբար,

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge \hat{dx^i} \wedge \ldots \wedge dx^k = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^{k-1}, & i = j \end{cases} \text{ :}$$

Տեղադրելով այդ արժեքները (3.4)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\int_{\partial c}\omega=\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}\int_{[0,1]^{k-1}}f(t^1,...,t^{i-1},\alpha,t^i,...,t^{k-1})dt^1...dt^{k-1}=$$

$$=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^{k-1}}f(t^1,...,1,...,t^{k-1})dt^1...dt^{k-1}-$$

$$-(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^{k-1}}f(t^1,...,0,...,t^{k-1})dt^1...dt^{k-1}=\int_c d\omega:$$

Այսպիսով, թեորեմն այս դեպքում ապացուցվեց: Հիմա թեորեմն ապացուցենք այն դեպքում, երբ c-ն կրկնակի դիֆերենցելի կամայական սինգուլյար խորանարդ է: Այս դեպքում թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝ $c^*(d\omega)=d(c^*\omega)$: Հետևաբար,

$$\int_c d\omega=\int_{[0,1]^k}c^*(d\omega)=\int_{I^k}c^*(d\omega)=\int_{I^k}d(c^*\omega)=\int_{\partial I^k}c^*\omega,$$

$$\int_{\partial c}\omega=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{j+\alpha}\int_{c_{(j,\alpha)}}\omega=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{j+\alpha}\int_{[0,1]^{k-1}}c_{(j,\alpha)}^*\omega=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{j+\alpha}\int_{I^{k-1}}\left(c\circ I_{(j,\alpha)}^k\right)^*\omega=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{j+\alpha}\int_{I^{k-1}}\left(I_{(j,\alpha)}^k\right)^*\circ c^*\omega=$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{j+\alpha}\int_{I_{(j,\alpha)}^k}c^*\omega=\int_{\partial I^k}c^*\omega=\int_c d\omega:$$

Վերջապես, կամայական $c=\sum a_ic_i$ շղթայի համար ունենք՝

$$\int_c d\omega=\sum a_i\int_{c_i}d\omega=\sum a_i\int_{\partial c_i}\omega=\int_{\partial c}\omega:$$

c-ի կրկնակի դիֆերենցելիության լրացուցիչ պայմանից ազատվելու համար կօգտվենք ողորկ մոտարկումների վերաբերյալ հետևյալ լեմմայից. *եթե c սինգուլյար խորանարդն անընդհատ դիֆերենցելի է $[0,1]^k$ խորանարդը պարունակող բաց բազմության վրա, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար գոյություն ունի c_ε անվերջ դիֆերենցելի սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ*

$$c_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} c(x) \text{ և } D_i c_\varepsilon^j(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} D_i c^j(x),\ 1\le i\le k,\ 1\le j\le n,\ x\in[0,1]^k: \quad (3.5)$$

Նկատենք, որ c-ի կրկնակի դիֆերենցելիությունից մենք օգտվել ենք միայն

$$\int_{[0,1]^k} c^* d\omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega \qquad (3.6)$$

հավասարությունն ապացուցելիս: Ուստի մեզ մնում է (3.6) հավասարությունն ապացուցել անընդհատ դիֆերենցելի c-ի համար: Դրա համար (3.6) հավասարությունը կգրենք c_ε-ի համար և, ε-ը ձգտեցնելով զրոյի, կստանանք (3.6)-ը:

Վերջում նշենք լեմմայի ապացույցի սխեման:

Նախ ընտրենք $\varphi\in C^\infty(R)$ ֆունկցիա, այնպես, որ $\varphi(s)>0$, $s\in(0,1)$; $\varphi(s)=0$, $s\notin(0,1)$ (տես XVII, §8, 1): Այնուհետև նշանակենք՝

$$a=\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(|y|^2\right)dy^1...dy^k\right\}^{-1}:$$

Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $\varepsilon>0$ թվի համար

$$a\varepsilon^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\varepsilon^{-2}|y|^2\right)dy^1...dy^k=1:$$

Այնուհետև c սինգուլյար խորանարդը ներկայացնենք կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝ $c(x)=\left(c^1(x^1,...,x^k),...,c^n(x^1,...,x^k)\right)$ և նշանակենք՝

$$c_\varepsilon^j(x)=a\varepsilon^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}c^j(y)\varphi\left(\varepsilon^{-2}|x-y|^2\right)dy^1...dy^k=$$

$$=a\varepsilon^{-k}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}c^j(x-y)\varphi\left(\varepsilon^{-2}|y|^2\right)dy^1...dy^k:$$

Այդ դեպքում $c_\varepsilon(x)=\left(c_\varepsilon^1(x),...,c_\varepsilon^n(x)\right)$ ֆունկցիան կլինի անվերջ դիֆերենցելի և կբավարարի (3.5) պայմանին: ■

§4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Դիֆերենցելի բազմաձևություն: Դիցուք $U,V\subset R^n$ բազմությունները բաց են: $h:U\leftrightarrow V$ փոխմիարժեք արտապատկերումը կոչվում է *դիֆեոմորֆիզմ*, եթե h և h^{-1} ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են:

Եթե h-ը դիֆեոմորֆիզմ է, ապա օգտվելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման թեորեմից և որոշիչների բազմապատկման թեորեմից՝

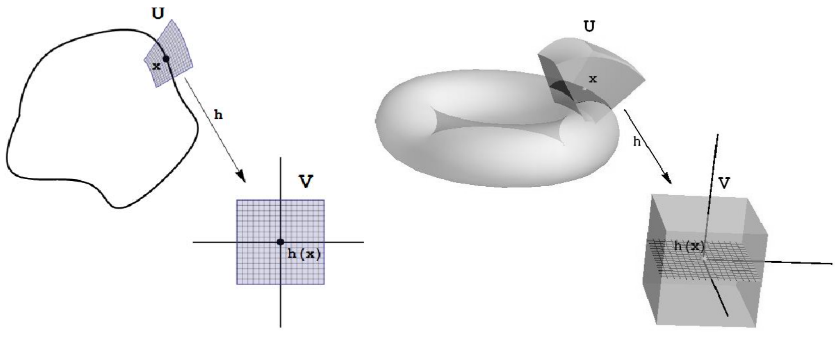
$$1=\det(h^{-1}\circ h)'(a)=\det\left[(h^{-1})'(h(a))\circ h'(a)\right]=\det(h^{-1})'(h(a))\det h'(a),$$

հետևաբար, $\det h'(a)\neq 0$, $a\in U$:

Սահմանում: *$M\subset R^n$ բազմությունը կոչվում է k-չափանի ($0<k\le n$) դիֆերենցելի բազմաձևություն կամ ուղղակի՝ բազմաձևություն, եթե յուրաքանչյուր $a\in M$ կետի համար բավարարվում է հետևյալ պայմանը.*

(ա) Գոյություն ունեն a կետը պարունակող $U\subset R^n$ բաց բազմություն, $V\subset R^n$ բաց բազմություն[*] և $h:U\leftrightarrow V$ դիֆեոմորֆիզմ, այնպիսիք, որ

$$h(U\cap M)=V\cap\left(R^k\times\{0\}\right)=\left\{y\in V: y^{k+1}=\ldots=y^n=0\right\}:$$



Միաչափ բազմաձևություն R^2 –ում և երկչափ բազմաձևություն R^3 –ում:

[*] Որպես V կարող ենք վերցնել $h(a)$ կենտրոնով բաց խորանարդ:

Նշենք, որ R^n-ի յուրաքանչյուր բաց ենթաբազմություն հանդիսանում է n-չափանի բազմաձևություն, իսկ կետը R^n-ում համարվում է 0-չափանի բազմաձևություն:

Երբ $0<k<n$, հետևյալ թեորեմը բազմաձևությունների օրինակներ կառուցելու լայն հնարավորություն է տալիս:

Թեորեմ 4.1: *$a \in M$ կետի համար (ա) պայմանը համարժեք է հետևյալ երկու պայմաններից յուրաքանչյուրին.*

(բ) Եթե $a=(a^1,...,a^k,a^{k+1},...,a^n)$, ապա գոյություն ունեն $(a^1,...,a^k)\in R^k$ կետի շրջակայքում որոշված $x^i=\varphi^i(x^1,...,x^k)$, $k+1\le i\le n$ անընդհատ դիֆերենցելի թվային ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ $x=(x^1,...,x^n)\in M$ կետի կոորդինատները a կետի որևէ U շրջակայքում բավարարում են $x^i=\varphi^i(x^1,...,x^k)$, $k+1\le i\le n$ հավասարումներին:*

(գ) Գոյություն ունեն a կետը պարունակող U բաց բազմություն, $W\subset R^k$ բաց բազմություն և $f:W\leftrightarrow U\cap M$ փոխմիարժեք ու անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերում, այնպես, որ $rank\, f'(t)=k$, $t\in W$: Այս դեպքում ասում են, որ f-ը M բազմաձևության լոկալ (a կետի շրջակայքում) պարամետրացում է, կամ՝ բազմաձևության լոկալ պարամետրական ներկայացում:

▶ Ապացույցը կատարենք (գ) $\Rightarrow$ (բ) $\Rightarrow$ (ա)$\Rightarrow$ (գ) գծապատկերով:

(գ) $\Rightarrow$ (բ): Եթե բավարարվում է (գ) պայմանը և $x=f(t)$, ապա կարելի է $x^1,...,x^n$ կոորդինատներն այնպես տեղափոխել, որ $rank\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial t^j}\right)_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le k}}=k$:

Հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն,

---

* (բ) պայմանը հասկացվում է R^n տարածության կոորդինատների տեղափոխության ճշտությամբ:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= f^1(t^1,\ldots,t^k) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^k &= f^k(t^1,\ldots,t^k) \end{aligned}\right\},\ (t^1,\ldots,t^k)\in W$$

համակարգից $t^1,\ldots,t^k$ փոփոխականները կարտահայտվեն $x^1,\ldots,x^n$ փոփոխականների միջոցով՝ $t^i = g^i(x^1,\ldots,x^k)$, $1\le i\le k$ (լոկալ), ընդ որում, g^i ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են: Եթե այդ արժեքները տեղադրենք $x^i = f^i(t^1,\ldots,t^k)$, $k+1\le i\le n$ հավասարությունների մեջ, ապա կստանանք

$$x^i = f^i\left(g^1(x^1,\ldots,x^k),\ldots,g^k(x^1,\ldots,x^k)\right) =: \varphi^i(x^1,\ldots,x^k),\ k+1\le i\le n:$$

Ստացվեց (բ) պայմանը:

(բ) $\Rightarrow$ *(ա):* Դիցուք տեղի ունի (բ) պայմանը: Սահմանենք $y=h(x)$ արտապատկերումը հետևյալ կերպ.

$$y^i = x^i,\ 1\le i\le k,$$

$$y^j = x^j - \varphi^j(x^1,\ldots,x^k),\ k+1\le j\le n:$$

Այս արտապատկերումն a կետի U շրջակայքը փոխմիարժեք արտապատկերում է V բաց բազմության վրա: Հակադարձ արտապատկերումը տրվում է

$$x^i = y^i,\ 1\le i\le k,$$

$$x^j = y^j + \varphi^j(y^1,\ldots,y^k),\ k+1\le j\le n$$

հավասարումներով: Ընդ որում, $U\cap M$ բազմությունն արտապատկերվում է V բազմության այն կետերի ենթաբազմության վրա, որոնց համար՝ $y^{k+1}=\ldots=y^n=0$: Հետևաբար, բավարարվում է (ա) պայմանը:

(ա) $\Rightarrow$ *(գ):* Նշանակենք՝ $W=\left\{y\in R^k : (y,0)\in h(U\cap M)\right\}$,

$$f(y)=h^{-1}(y,0): W\leftrightarrow U\cap M\ ;\ H(x)=\left(h^1(x),\ldots,h^k(x)\right):$$

Այդ դեպքում $H(f(y))=y$, $y\in W$: Ուստի $H'(f(y))\circ f'(y)=I$: Հետևաբար $rank\, f'(y)=k$: Իրոք, մի կողմից՝ $rank\, f'(y)\le k$ (f-ի որոշման տիրույթը k-չափանի է), մյուս կողմից՝ $k=rank\, I\le rank\, f'(y)$, որովհետև մատրիցների արտադրյալի ռանգը չի գերազանցում արտադրիչների ռանգերը:

Այսուհետ որպես f-ի հակադարձ կվերցնենք H-ը, որը որոշված է ոչ միայն M-ի կետերում, այլ նաև U-ի վրա: f^{-1}-ը կլինի անընդհատ դիֆերենցելի U-ի վրա: ■

<u>**2. Շոշափող տարածություն:**</u> Դիցուք M-ը R^n-ում ընկած k-չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է, իսկ $f:W_f\to R^n$, $W_f\subset R^k$ արտապատկերումը $x=f(a)\in M$ կետի շրջակայքում M-ի լոկալ պարամետրացում է: Այդ դեպքում $rank\, f'(a)=k$:

Դիտարկենք

$$f_*(v_a)=\left(Df(a)(v)\right)_{f(a)}:R_a^k\to R_{f(a)}^n$$

գծային ձևափոխությունը: Ունենք՝ $rank\, f_*=rank\, Df(a)=rank\, f'(a)=k$:

f_* արտապատկերումը փոխմիարժեք է (տարբեր կետերի պատկերները տարբեր են), հետևաբար $f_*(R_a^k)$-ն $R_{f(a)}^n$ տարածության k-չափանի ենթատարածություն է, որը կոչվում է M *բազմաձևության շոշափող տարածություն* x կետում և նշանակվում է M_x-ով:

Ցույց տանք, որ այս սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն՝ շոշափող տարածությունը պարամետրացումից կախված չէ:

Դիցուք $g:W_g\to R^n$ ֆունկցիան $x=g(b)$ կետում (կետի շրջակայքում) մեկ այլ լոկալ պարամետրացում է: Ցույց տանք, որ $g_*(R_b^k)=f_*(R_a^k)$:

Նշանակենք՝ $\varphi=f^{-1}\circ g$ և g-ն ներկայացնենք $g=f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ\varphi$ տեսքով: Այդ դեպքում

$$g_*=f_*\circ\varphi_*, \tag{4.1}$$

որտեղ $\varphi_*: R_b^k \to R_a^k$ արտապատկերումը գծային ձևափոխություն է: Դժվար չէ տեսնել, որ $\varphi_*(R_b^k) = R_a^k$: Հակառակ դեպքում (4.1)-ից կհետևի, որ $g_*(R_b^k)$ տարածության չափողականությունը k -ից փոքր է:

Այսպիսով,

$$g_*(R_b^k) = f_*\left(\varphi_*(R_b^k)\right) = f_*(R_a^k): \tag{4.2}$$

Լրացում: $rank\,(f^{-1}\circ g)'(b) = k$:

Ապացուցենք, որ $n = 3$, $k = 2$ դեպքում, եթե որպես M բազմաձևություն վերցնենք $r(u,v): \Delta \leftrightarrow S$ պարամետրացումով S մակերևույթը (տես XVIII, §5, 1), ապա նրա շոշափող տարածությունը $p = (x_0, y_0, z_0)$ կետում XVIII գլխի (5.3) հավասարմանը բավարարող հարթությունն է*:

(5.3)-ը գրենք սկալյար արտադրյալի միջոցով: Նշանակենք՝ $v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ և $\ell = (A, B, C)$: Այդ դեպքում (5.3)-ը կգրվի հետևյալ տեսքով՝ $< \ell, v >= 0$, ինչը համարժեք է

$$< \ell_p, v_p >= 0$$

պայմանին: Այլ կերպ ասած, (x, y, z) կետը պատկանում է շոշափող հարթությանը այն և միայն այն դեպքում, երբ $v_p = (p; x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in R_p^3$ վեկտորն օրթոգոնալ է $\ell_p = (p; A, B, C)$ վեկտորին:

Մյուս կողմից, եթե $\{e_1, e_2\}$-ը R^2-ի ստանդարտ բազիսն է, ապա ըստ ենթադրության

$$r'(e_1) = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} = \left(x'_u, y'_u, z'_u\right) = r'_u \quad \text{և} \quad r'(e_2) = \left(x'_v, y'_v, z'_v\right) = r'_v$$

վեկտորները գծորեն անկախ են, ուստի $r_*(R_t^2)$, $p = r(t)$ շոշափող տարածությունը $r_*(e_i)(t)$, $i = 1,2$ վեկտորների գծային թաղանթն է, ինչն էլ իր հերթին այդ վեկտորների վեկտորական արտադրյալին (տես §7, 1)

* Եթե R_p^3 տարածության վեկտորը նույնացնենք R^3 -ում նրա վերջնակետի հետ:

ուղղահայաց ենթատարածությունն է: Մնում է նկատել, որ $(r_u')_p$ և $(r_v')_p$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը ℓ_p վեկտորն է (§7, 1):

<u>**3. Եզրով դիֆերենցելի բազմաձևություններ:**</u> $H^k=\left\{x\in R^k, x^k\geq 0\right\}$ ($x=(x^1,...,x^k)$) բազմությունը կոչվում է *կիսատարածություն* R^k-ում: ∂H^k-ն R^k-ի $(k-1)$-չափանի ենթատարածություն է՝

$$\partial H^k=\left\{x\in R^k, x^k=0\right\}:$$

$M\subset R^n$ բազմությունը կոչվում է *եզրով* k*-չափանի բազմաձևություն*, եթե յուրաքանչյուր $a\in M$ կետի համար բավարարվում է կամ (ա) պայմանը կամ հետևյալ պայմանը.

(ա') գոյություն ունեն a *կետը պարունակող* $U\subset R^n$ *բաց բազմություն,* $V\subset R^n$ *բաց բազմություն և* $h:U\leftrightarrow V$ *դիֆեոմորֆիզմ այնպիսիք, որ* $h(a)\in\partial H^k$ *և*

$$h(U\cap M)=V\cap\left(H^k\times\{0\}\right)=\left\{y\in V: y^k\geq 0, y^{k+1}=...=y^n=0\right\}:$$

Կարևոր է նշել, որ միևնույն $a\in M$ կետի համար (ա) և (ա') պայմանները միաժամանակ տեղի ունենալ չեն կարող: Իրոք, եթե $h_1:U_1\leftrightarrow V_1$ և $h_2:U_2\leftrightarrow V_2$ բավարարում են համապատասխանաբար (ա) և (ա') պայմաններին, ապա $\varphi=h_2\circ h_1^{-1}$ արտապատկերումը կհանդիսանա R^k-ում դիֆերենցելի արտապատկերում, որը $h_1(a)\in R^k$ կետի շրջակայքը (R^k-ում) արտապատկերում է H^k-ի ենթաբազմության վրա, որը R^k-ում բաց բազմություն չէ, ինչը հակասում է հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմին, քանի որ (4.2)-ի համաձայն՝ $\det(h_2\circ h_1^{-1})'\neq 0$:

(ա') պայմանին բավարարող բոլոր $a\in M$ կետերի բազմությունը կոչվում է M *բազմաձևության եզր* և նշանակվում է՝ ∂M: Նկատենք, որ $k=n$ դեպքում բազմաձևության եզրը կարող է չհամընկնել M բազմության տոպոլոգիական եզրի հետ:

Օրինակ, R^2-ում վերցնենք՝ $M=\left\{x\in R^2 : 0<|x|\le 1\right\}$: Սա երկչափ բազմաձևություն է, որի տոպոլոգիական եզրը $S=\left\{x\in R^2 : |x|=1\right\}$ միավոր շրջանագիծն է՝ միավորած 0 կետը, իսկ $\partial M=S$:

Դժվար չէ նկատել, որ եթե M-ը եզրով k-չափանի բազմաձևություն է, ապա ∂M եզրը $(k-1)$-չափանի բազմաձևություն է: Ավելին, եթե $a\in\partial M$ և f-ը M-ի լոկալ պարամետրացումն է a կետի շրջակայքում՝ ծնված (ա')-ում մասնակցող h-ից (ինչպես թեորեմ 4.1, (ա)$\Rightarrow$(գ)-ում), ապա $f(y^1,...,y^{k-1},0)$ ֆունկցիան կհանդիսանա ∂M-ի լոկալ պարամետրացում a կետի շրջակայքում:

§5. ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄ

<u>**1. Վեկտորական տարածության կողմնորոշումը:**</u> Դիցուք $\{e_1,...,e_n\}$-ը R^n տարածության ստանդարտ բազիսն է, իսկ $\{e_1',...,e_n'\}$-ը մեկ այլ օրթոնորմալ բազիս է և (a_{ij})-ն անցման մատրիցն է՝

$$e_1'=a_{11}e_1+...+a_{1n}e_n$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$e_n'=a_{n1}e_1+...+a_{nn}e_n:$$

Այդ դեպքում $\det(a_{ij})=\pm 1$:

Եթե $\det(a_{ij})=1$, ապա կասենք, որ $\{e_1',...,e_n'\}$ բազիսը ունի նույն կողմնորոշումը, ինչ - որ ստանդարտ բազիսը կամ՝ այդ երկու բազիսները R^n-ում տալիս են նույն կողմնորոշումը և կգրենք՝

$$[e_1,...,e_n]=[e_1',...,e_n']:$$

Այժմ ենթադրենք V-ն կամայական n-չափանի գծային տարածություն է և $\{v_1,...,v_n\}$-ը V-ում բազիս է: $[v_1,...,v_n]$ սիմվոլով նշանակենք այն բոլոր բազիսների ընտանիքը, որոնց անցման մատրիցի ($\{v_1,...,v_n\}$ բազիսից) որոշիչը դրական է, իսկ մնացած բազիսների ընտանիքը՝ $-[v_1,...,v_n]$-ով:

Այսպիսով, առաջանում են բազիսների երկու ընտանիքներ*, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է V տարածության կողմնորոշում:

Նշենք կողմնորոշումների պարզագույն հատկությունները: Դրանք հետևում են որոշիչների հատկություններից:

1^0. $[v_1,...,v_i,...,v_j,...,v_n] = -[v_1,...,v_j,...,v_i,...,v_n]$:

2^0. $[v_1,...,\alpha v_i,...,v_n] = \operatorname{sgn}\alpha[v_1,...,v_n];\ \alpha \neq 0$:

3^0. $[v_1,...,v_{n-1},\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n] = \operatorname{sgn}\alpha_n[v_1,...,v_n];\ \alpha_n \neq 0$:

4^0. Եթե V-ն և W-ն n-չափանի գծային տարածություններ են, $A: V \to W$ արտապատկերումը հակադարձելի գծային ձևափոխություն է և $[v_1,...,v_n] = [v_1',...,v_n']$, ապա $[Av_1,..., Av_n] = [Av_1',..., Av_n']$:

Հավասարությունը հետևում է նրանից, որ անցման մատրիցները նույնն են:

5^0. Եթե $\varphi: R^k \to R^k$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $a \in R^k$ կետում, ապա հետևյալ երեք պնդումները համարժեք են՝

ա) $\det\varphi'(a) > 0$,

բ) $[\varphi'(a)e_1,...,\varphi'(a)e_k] = [e_1,...,e_k]$,

գ) $[\varphi_*(e_1)_a,...,\varphi_*(e_k)_a] = [(e_1)_{\varphi(a)},...,(e_k)_{\varphi(a)}]$:

Իրոք, $\{e_1,...,e_k\}$ բազիսից՝ $\{\varphi'(a)e_1,...,\varphi'(a)e_k\}$ բազիսին անցման մատրիցը $\varphi'(a)$ մատրիցի տրանսպոնացված մատրիցն է, որի որոշիչը հավասար է $\det\varphi'(a)$, իսկ գ)-ում անցման մատրիցը նույնն է, ինչ՝ բ)-ում:

<u>**2. Դիֆերենցելի բազմաձևության կողմնորոշում:**</u> Դիցուք M-ը R^n-ում ընկած k-չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է և յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում M_x-ը M բազմաձևության շոշափող տարածությունն է:

---
* Հիմնավորել համարժեքության դասերի միջոցով:

Յուրաքանչյուր M_x տարածությունում ընտրենք μ_x կողմնորոշում (երկու հնարավորներից՝ մեկը): Կասենք, որ այդ կողմնորոշումները *համաձայնեցված են*, եթե յուրաքանչյուր $f:W_f \to M$ լոկալ պարամետրացման և ամեն մի $a,b \in W_f$ կետերի զույգի համար՝

$$[f_*(e_1)_a,...,f_*(e_k)_a] = \mu_{f(a)} \Leftrightarrow [f_*(e_1)_b,...,f_*(e_k)_b] = \mu_{f(b)} \qquad (5.1)$$

(կամ W_f-ի բոլոր կետերում տեղի ունի հավասարություն, կամ ոչ մի կետում տեղի չունի):

Ենթադրենք μ_x-երը համաձայնեցված են: Եթե որևէ $a \in W_f$ կետում (հետևաբար, նաև՝ W_f-ի բոլոր կետերում) տեղի ունի հավասարություն, ապա կասենք, որ f լոկալ պարամետրացումը պահպանում է կողմնորոշումը, հակառակ դեպքում կասենք, որ f-ը կողմնորոշումը փոխում է:

Եթե f-ը չի պահպանում կողմնորոշումը և $T: R^k \leftrightarrow R^k$-ն այնպիսի գծային արտապատկերում է, որ $\det T = -1$, ապա կողմնորոշումների 4^0 հատկության համաձայն, $f \circ T$-ն պահպանում է կողմնորոշումը: Հետևաբար, յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում գոյություն ունի կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում:

Թեորեմ 5.1: *Դիցուք f-ը և g-ն M-ի լոկալ պարամետրացումներ են $x = f(a) = g(b)$ կետի շրջակայքում: Որպեսզի*

ա) $[f_*(e_1)_a,...,f_*(e_k)_a] = [g_*(e_1)_b,...,g_*(e_k)_b]$,

անհրաժեշտ է և բավարար, որ

բ) $\det(g^{-1} \circ f)'(a) > 0$ *:*

▶ Կողմնորոշումների 4^0 հատկության և թեորեմ 2.3-ի համաձայն, ա) պայմանը համարժեք է

$$[(g^{-1} \circ f)_*(e_1)_a,...,(g^{-1} \circ f)_*(e_k)_a] = [(e_1)_b,...,(e_k)_b]$$

պայմանին: Մնում է օգտվել կողմնորոշումների 5^0 հատկությունից: ■

Սահմանում: *M -ը կոչվում է կողմնորոշելի, եթե գոյություն ունեն համաձայնեցված μ_x -եր: Համաձայնեցված μ_x -երի բազմությունը կնշանակենք μ -ով: Այդ դեպքում (M,μ) զույգը կոչվում է կողմնորոշված բազմաձևություն, իսկ $\mu = \{\mu_x\}$ -ը՝ M -ի կողմնորոշում:*

Յուրաքանչյուր կողմնորոշելի բազմաձևություն ունի երկու կողմնորոշում՝ $\{\mu_x\}$ -ը և $\{-\mu_x\}$ -ը:

Թեորեմ 5.2: *Դիցուր M բազմաձևության վրա տրված է $g: W_g \to M$ լոկալ պարամետրացումների $C = \{(g, W_g)\}$ ընտանիք, այնպիսին, որ*

1) յուրաքանչյուր $x \in M$ կետի համար գոյություն ունի $g \in C$, որը x -ի շրջակայքում լոկալ պարամետրացում է՝ $\bigcup_{g \in C} g(W_g) = M$,

2) եթե $g_1(W_{g_1}) \cap g_2(W_{g_2}) \neq \varnothing$, ապա $\det(g_1^{-1} \circ g_2)' > 0$:

Այդ դեպքում գոյություն ունի M -ի միակ կողմնորոշում, որը բոլոր g -երի համար պահպանվում է:

▶ Յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում նշանակենք՝

$$\mu_x = [g_*(e_1)_t, \ldots, g_*(e_k)_t], \text{ որտեղ } x = g(t):$$

Նախորդ թեորեմի շնորհիվ, 2)-ից հետևում է, որ μ_x -ը g -ի ընտրությունից կախված չէ: Մեզ մնում է ապացուցել, որ այդպես ընտրված μ_x -երը համաձայնեցված են: Դրա համար վերցնենք $x \in M$ կետում M -ի կամայական պարամետրացում՝ $f: W_f \to M$, և ապացուցենք, որ այն բավարարում է (5.1) պայմանին:

Նշանակենք՝

$$s(t) = \det(g^{-1} \circ f)'(t), \ g \in C, \ t \in W_f:$$

2)-ից հետևում է, որ $s(t)$ -ն g -ի ընտրությունից կախված չէ, քանի որ

$$\det(g_1^{-1} \circ f)' = \det(g_1^{-1} \circ g_2)' \det(g_2^{-1} \circ f)', \ g_1, g_2 \in C:$$

Քանի որ $s(t)$-ն W_f կապակցված բազմության վրա 0-ից տարբեր արժեքներ ընդունող (տե'ս (4.2)-ը) անընդհատ ֆունկցիա է, ապա նրա ընդունած արժեքների բազմությունը R-ի 0 կետը չպարունակող կապակցված ենթաբազմություն է (VII, §5, 4): Հետևաբար, $s(t)$-ն ամբողջ W_f-ի վրա նշանը պահպանում է: Մնում է կիրառել թեորեմ 5.1-ը:

Այն դեպքում, երբ $s(t) > 0$, $t \in W_f$, թեորեմ 5.1-ի համաձայն, f-ը կողմնորոշումը պահպանում է, իսկ երբ $s(t) < 0$, f-ը կողմնորոշումը փոխում է: ■

<u>3. Արտաքին նորմալի օրթ:</u> Ենթադրենք $M \subset R^n$-ը k չափանի եզրով դիֆերենցելի բազմաձևություն է, այդ դեպքում ∂M-ը $(k-1)$ չափանի բազմաձևություն է (§4, 3): $x \in \partial M$ դեպքում $(\partial M)_x$-ը կլինի M_x-ի $(k-1)$ չափանի ենթատարածություն, հետևաբար, $M_x = (\partial M)_x \oplus E$, որտեղ E-ն $(\partial M)_x$-ի օրթոգոնալ լրացումն է M_x-ում, որը կլինի մեկ չափանի ենթատարածություն: Հետևաբար, գոյություն ունեն $n_1(x) = -n_2(x)$ միավոր վեկտորներ, այնպիսիք, որ $n_1(x), n_2(x) \in E$, $n_1(x), n_2(x) \perp (\partial M)_x$: Դիցուք $f: W \to R^n$, $W \subset R^k$ արտապատկերումը $x \in \partial M$ կետում M-ի լոկալ պարամետրացում է: Նշանակենք $n(x)$-ով $n_1(x)$ և $n_2(x)$ վեկտորներից այն, որի համար $f_*^{-1}(n_i(x)) =: v_a$-ի k-րդ կոորդինատը բացասական է: $n(x)$-ը կոչվում է *արտաքին նորմալի օրթ*:

Մյուս կողմից, v_a-ի k-րդ կոորդինատը բացասական է, նշանակում է, որ $v_a = \alpha_1(e_1)_a + ... + \alpha_k(e_k)_a$, $\alpha_k < 0$: Այսինքն՝

$$v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k = (\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_k),\ \alpha_k < 0:$$

Հետևաբար, $v \in R^k \setminus H^k$:

Կարելի է ապացուցել, որ արտաքին նորմալի օրթը f լոկալ պարամետրացումից կախված չէ:

Իրոք, ենթադրենք հակառակը՝ $v_a = f_*^{-1}(n(x))$-ի k-րդ կոորդինատը բացասական է, իսկ $v'_b = g_*^{-1}(n(x))$-ի k-րդ կոորդինատը՝ դրական: Նշանակենք՝ $\varphi = g^{-1} \circ f$: Այդ դեպքում

$$\varphi_*(v_a) = g_*^{-1}(f_*(v_a)) = g_*^{-1}(n(x)) = v'_b:$$

Հետևաբար, $\varphi_*(v_a)$-ի k-րդ կոորդինատը դրական է:

Մյուս կողմից, $\varphi_*(v_a) = \left(D\varphi(a)(v)\right)_b$, $b = \varphi(a)$: Այսպիսով, v-ի k-րդ կոորդինատը բացասական է, իսկ $D\varphi(a)(v)$-ինը՝ դրական, ինչը հակասություն է, քանի որ

$$D\varphi(a)(v) = \lim_{t \to 0+} \frac{\varphi(a+tv) - \varphi(a)}{t},$$

որտեղ $a, \varphi(a) \in \partial H^k$ (որովհետև $x = f(a) \in \partial M$): Սակայն այս դեպքում $\dfrac{\varphi(a+tv) - \varphi(a)}{t}$, $t > 0$ վեկտորի, հետևաբար, նաև՝ $D\varphi(a)(v)$ վեկտորի k-րդ կոորդինատը դրական չէ:

<u>4. Մակածված կողմնորոշում:</u> Դիցուք (M, μ)-ն եզրով, կողմնորոշված k չափանի բազմաձևություն է: Այդ դեպքում ∂M-ը $(k-1)$ չափանի բազմաձևություն է և $(\partial M)_x$-ը M_x-ի $(k-1)$ չափանի ենթատարածություն է (§4, 3):

Ելնելով μ կողմնորոշումից՝ $(\partial M)_x$-ում ընտրենք $(\partial \mu)_x$ կողմնորոշում հետևյալ կերպ. $(\partial M)_x$ տարածության $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ բազիսը կընդգրկենք $(\partial \mu)_x$-ի մեջ, եթե $[n(x), v_1, \ldots, v_{k-1}] = \mu_x$:

$(\partial \mu)_x$ կողմնորոշումը կոչվում է μ_x կողմնորոշումից *մակածված կողմնորոշում*:

Թեորեմ 5.3: *Եթե f-ը $x = f(a) \in \partial M$ կետում M-ի կողմնորոշումը պահպանող լոկալ պարամետրացում է, ապա*

$$(\partial \mu)_x = (-1)^k [f_*(e_1)_a, \ldots, f_*(e_{k-1})_a]:$$

Այլ կերպ ասած, եթե k -ն զույգ է, ապա f -ը պահպանում է նաև ∂M եզրի կողմնորոշումը, իսկ եթե k -ն կենտ է, ապա f -ը եզրի կողմնորոշումը փոխում է:

▶ α -ով նշանակենք 1 կամ -1 թվերից այն, որի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը[*]`

$$[f_*(e_1)_a,\dots,f_*(e_k)_a]=\mu_x=\alpha[n(x),f_*(e_1)_a,\dots,f_*(e_{k-1})_a]=$$
$$=\alpha[f_*(v_a),f_*(e_1)_a,\dots,f_*(e_{k-1})_a]=$$
$$=-\alpha[f_*(e_k)_a,f_*(e_1)_a,\dots,f_*(e_{k-1})_a]=\alpha(-1)^k[f_*(e_1)_a,\dots,f_*(e_k)_a],$$

որտեղ $v_a=f_*^{-1}(n(x))$:

Հետևաբար, $\alpha(-1)^k=1$, այսինքն` $\alpha=(-1)^k$: ■

Հետևանք: $(\partial\mu)_x$ *-երը համաձայնեցված են:*

Այսպիսով, ∂M -ը կողմնորոշելի է և $\partial\mu:=\{(\partial\mu)_x : x\in\partial M\}$ -ը ∂M -ի կողմնորոշում է, որը կոչվում է μ կողմնորոշումից մակածված կողմնորոշում:

Այժմ $k=n-1$ դեպքի համար տանք արտաքին նորմալի օրթի մեկ այլ սահմանում:

Եթե (M,μ) -ն R^n -ում $(n-1)$ -չափանի կողմնորոշված բազմաձևություն է և $[v_1,\dots,v_{n-1}]=\mu_x$ ($v_1,\dots,v_{n-1}\in M_x$), ապա $n(x)$ -ով նշանակենք R^n_x -ի այն միակ միավոր վեկտորը, որը օրթոգոնալ է M_x -ին և բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$[n(x),v_1,\dots,v_{n-1}]=[(e_1)_x,\dots,(e_n)_x],$$

որտեղ $\{(e_1)_x,\dots,(e_n)_x\}$ -ը R^n_x -ի ստանդարտ բազիսն է:

Եթե M -ը որևէ n -չափանի բազմաձևության եզր է, և այդ բազմաձևությունը կողմնորոշված է ստանդարտ կողմնորոշմամբ, ապա $n(x)$ -ի նախկին սահմանումը և այս նոր սահմանումը համընկնում են (որպես f լոկալ պարամետրացում կվերցնենք նույնական արտապատկերումը):

---

[*] Այստեղ մենք օգտվում ենք կողմնորոշումների պարզագույն հատկություններից և նրանից, որ v_a -ի k -րդ կոորդինատը բացասական է:

§6. ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

1. Դիֆերենցիալ ձևեր բազմաձևությունների վրա: Դիցուք M-ը k-չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է: ω-ն կոչվում է p-աստիճանի* դիֆերենցիալ ձև M-ի վրա, եթե յուրաքանչյուր $x \in M$ կետի համար՝ $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$: Այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \ : \qquad (6.1)$$

Իրոք, եթե $\{e_1, \ldots, e_n\}$-ը R_x^n-ի ստանդարտ բազիսն է և $\{e_1', \ldots, e_k'\}$-ը օրթոնորմալ բազիս է M_x-ում, ապա

$$\left.\begin{aligned} e_1' &= a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n \\ &\ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ e_k' &= a_{k1}e_1 + \ldots + a_{kn}e_n \end{aligned}\right\},$$

որտեղ $a_{ij} = (e_i', e_j) = (e_j, e_i')$:

Այնուհետև համապատասխան դուալ բազիսները նշանակենք՝ $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ և $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$: Այդ դեպքում ամեն մի $v \in M_x$ վեկտորի համար ունենք՝

$$v = \psi_1(v)e_1' + \ldots + \psi_k(v)e_k' = \varphi_1(v)e_1 + \ldots + \varphi_n(v)e_n \ :$$

Այս հավասարությունը սկալյարորեն բազմապատկելով e_i'-ով՝ կստանանք.

$$\psi_i(v) = (e_1, e_i')\varphi_1(v) + \ldots + (e_n, e_i')\varphi_n(v) = a_{i1}\varphi_1(v) + \ldots + a_{in}\varphi_n(v) \ :$$

Այս արժեքները տեղադրելով ω-ի բազիսային ներկայացման մեջ՝

$$\omega(x) = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} c_{j_1 \ldots j_p}(x) \psi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \psi_{j_p} \ ,$$

կստանանք՝

$$\omega(x) = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} c_{j_1 \ldots j_p}(a_{j_1 1}\varphi_1 + \ldots + a_{j_1 n}\varphi_n) \wedge \ldots \wedge (a_{j_p 1}\varphi_1 + \ldots + a_{j_p n}\varphi_n) \ :$$

---

* Եթե $p > k$, ապա $\omega = 0$:

Այստեղից կստացվի (6.1)-ը:

Այժմ սահմանենք M-ի վրա որոշված ω դիֆերենցիալ ձևի նախապատկերը: Եթե $f:W\to M$, $W\subset R^k$ արտապատկերումը M-ի լոկալ պարամետրացում է, ապա $f^*\omega$ նախապատկերը (f արտապատկերման միջոցով) սահմանվում է ինչպես (§2, 3)-ում՝

$$f^*\omega(t;v_1,...,v_p)=\omega\left(f(t);f_*(v_1),...,f_*(v_p)\right),$$

որտեղ $t\in W$, $v_1,...,v_p\in R_t^k$:

(§2, 3)-ում ապացուցված թեորեմի 1^0-4^0 պնդումները ճիշտ են նաև այս դեպքում:

Այնուհետև, նախապատկերի միջոցով կարող ենք սահմանել M-ի վրա որոշված դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալը: (6.1) բանաձևով տրված ω դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է դիֆերենցելի, եթե դիֆերենցելի է

$$f^*\omega(t)=\sum\omega_{i_1...i_p}\left(f(t)\right)df^{i_1}\wedge...\wedge df^{i_p}$$

դիֆերենցիալ ձևը: Այս սահմանումն իմաստ ունի այն դեպքում, երբ f լոկալ պարամետրացման կոորդինատային ֆունկցիաները կրկնակի դիֆերենցելի են:

Առաջիկայում մենք կօգտվենք հետևյալ սահմանումից. կասենք M դիֆերենցելի բազմաձևությունը C^r ($r\ge 1$) դասից է, եթե յուրաքանչյուր f լոկալ պարամետրացման կոորդինատային ֆունկցիաների r-րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են:

Թեորեմ 6.1: *Եթե ω-ն M-ի վրա p-աստիճանի ($p\le k$) դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է, իսկ f-ը M-ի լոկալ պարամետրացում է, ապա գոյություն ունի M-ի վրա որոշված միակ $p+1$ աստիճանի η դիֆերենցիալ ձև, այնպիսին, որ*

$$f^*\eta=df^*\omega\text{ :}\qquad(6.2)$$

Այդ η-ն կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալ և նշանակվում է՝ $\eta=d\omega$:

▶ Եթե $x=f(a)\in M$, ապա $f_*:R_a^k\to M_x$ արտապատկերումը հակադարձելի է: Կամայական $v_1,...,v_{p+1}\in M_x$ վեկտորների համար նշանակենք՝ $\varpi_i=f_*^{-1}(v_i)$, $1\le i\le p+1$ և

$$\eta(x,v_1,...,v_{p+1}):=df^*\omega\left(a;\varpi_1,...,\varpi_{p+1}\right):$$

Այդ դեպքում

$$f^*\eta\left(a;\varpi_1,...,\varpi_{p+1}\right)=\eta\left(f(a);f_*(\varpi_1),...,f_*(\varpi_{p+1})\right)=$$
$$=\eta(x;v_1,...,v_{p+1})=df^*\omega\left(a;\varpi_1,...,\varpi_{p+1}\right):$$

(6.2)-ն ապացուցվեց:

η -ի միակությունն ապացուցելու համար ենթադրենք՝ $f^*\eta_1=df^*\omega$ և $f^*\eta_2=df^*\omega$: Այդ դեպքում $f^*(\eta_1-\eta_2)=0$, հետևաբար, $\eta_1-\eta_2=0$: Ցույց տանք, որ $d\omega$ -ն f -ի ընտրությունից կախված չէ:

Եթե g -ն մեկ այլ պարամետրական ներկայացում է $g(b)=f(a)=x$ կետի շրջակայքում, ապա $g=f\circ(f^{-1}\circ g)=f\circ\varphi$, որտեղ $\varphi=f^{-1}\circ g$ և $\varphi(b)=a$: Այդ դեպքում $g_*=f_*\circ\varphi_*$, $g^*=\varphi^*\circ f^*$ և $g_*^{-1}=\varphi_*^{-1}\circ f_*^{-1}$: Հետևաբար,

$$dg^*\omega=d(\varphi^*\circ f^*)\omega=d\varphi^*(f^*\omega)=\varphi^*df^*\omega:$$

Այնուհետև կամայական $v_1,...,v_{p+1}\in M_x$ վեկտորների համար կստանանք՝

$$dg^*\omega\left(b;g_*^{-1}(v_1),...,g_*^{-1}(v_{p+1})\right)=\varphi^*(df^*\omega)\left(b;g_*^{-1}(v_1),...,g_*^{-1}(v_{p+1})\right)=$$
$$=(df^*\omega)\left(a;\varphi_*\left(g_*^{-1}(v_1)\right),...,\varphi_*\left(g_*^{-1}(v_{p+1})\right)\right)=df^*\omega\left(a;f_*^{-1}(v_1),...,f_*^{-1}(v_{p+1})\right):$$

Այսինքն՝ $dg^*\omega=df^*\omega$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

<u>2. Բազմաձևությամբ տարածված ինտեգրալ:</u> Հիշեցնենք (§3, 2), որ եթե $D\subset R^k$ բազմությունը J -չափելի է և $f\in\Re(D)$, ապա, ըստ սահմանման,

$$\int_D f(x^1,...,x^k)dx^1\wedge...\wedge dx^k=\int_D f(x^1,...,x^k)dx^1...dx^k :$$

Դիցուք $M\subset R^n$ -ը k -չափանի ($k\le n$) դիֆերենցելի բազմաձևություն է, ω -ն M -ի վրա որոշված p -աստիճանի ($p\le k$) դիֆերենցիալ ձև է, c -ն M -ից արժեքներ ընդունող անընդհատ դիֆերենցելի p -չափանի սինգուլյար խորանարդ է: Այդ դեպքում c -ով տարածված ω -ի ինտեգրալը սահմանվում է (§3, 2) հետևյալ կերպ՝

$$\int_c \omega=\int_{[0,1]^p} c^*\omega :$$

$c=\sum a_i c_i$ սինգուլյար շղթայով տարածված ինտեգրալը նույնպես սահմանվում է նախկին ձևով՝

$$\int_c \omega=\sum a_i\int_{c_i}\omega :$$

Երբ M -ը կողմնորոշված է և $p=k$, այդ դեպքում c -ն կոչվում է M -ի հետ *համակողմնորոշված*, եթե գոյություն ունի կողմնորոշումը պահպանող $f:W\to M$ լոկալ պարամետրացում, այնպիսին*, որ

$$[0,1]^k\subset W ;\; c(x)=f(x),\; x\in[0,1]^k :$$

c -ն կոչվում է M -ի հետ *հակակողմնորոշված*, եթե f -ը կողմնորոշումը փոխում է:

Թեորեմ 6.2*: Եթե c_1 -ը և c_2 -ը M -ի հետ համակողմնորոշված են և*

$$\omega(y)=0\text{ , երբ } y\in\left\{c_1\left([0,1]^k\right)\cap c_2\left([0,1]^k\right)\right\}^c , \tag{6.3}$$

ապա

$$\int_{c_1}\omega=\int_{c_2}\omega :$$

► Նշանակենք՝ $c_i\left([0,1]^k\right)=D_i$, $i=1,2$; $D=D_1\cap D_2$ և դիտարկենք $g(t)=c_2^{-1}\left(c_1(t)\right)$, $t\in c_1^{-1}(D)$ ֆունկցիան: Այդ դեպքում g ֆունկցիան

---

* Այդ բանին կարելի է հասնել՝ $f(t)$ պարամետրացման փոխարեն վերցնելով $f(a+\varepsilon t)$ ֆունկցիան:

անընդհատ դիֆերենցելի ու փոխմիարժեք արտապատկերում է և $g\left(c_1^{-1}(D)\right)=c_2^{-1}(D)$: Բացի դրանից՝ $\det g'(t)>0$ (§5, 2):

Մյուս կողմից, $c_i^{-1}(D)$, $i=1,2$ բազմությունները J-չափելի են և

$$\int_{c_1}\omega=\int_{[0,1]^k}c_1^*\omega=\int_{c_1^{-1}(D)}c_1^*\omega,\quad \int_{c_2}\omega=\int_{[0,1]^k}c_2^*\omega=\int_{c_2^{-1}(D)}c_2^*\omega,$$

քանի որ, (6.3)-ի համաձայն, ω-ն D-ից դուրս զրո է:

Հետևաբար, մեզ մնում է ապացուցել, որ

$$\int_{c_1^{-1}(D)}c_1^*\omega=\int_{c_2^{-1}(D)}c_2^*\omega:$$

Այդ նպատակով c_1-ը ներկայացնենք $c_1=c_2\circ(c_2^{-1}\circ c_1)=:c_2\circ g$ տեսքով, իսկ $c_2^*\omega$-ն՝ $c_2^*\omega=h(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k$ տեսքով: Այդ դեպքում՝

$$\int_{c_1^{-1}(D)}c_1^*\omega=\int_{c_1^{-1}(D)}(g^*\circ c_2^*)\omega=\int_{c_1^{-1}(D)}g^*\left[h(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k\right]=$$

$$=\int_{c_1^{-1}(D)}h(g(t))\det g'(t)dt^1\wedge\ldots\wedge dt^k:$$

Հաշվի առնելով $\det g'(t)>0$ պայմանը և կատարելով $x=g(t)$ փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք

$$\int_{c_1^{-1}(D)}c_1^*\omega=\int_{g\left(c_1^{-1}(D)\right)}h(x)dx=\int_{c_2^{-1}(D)}h(x)dx^1\wedge\ldots\wedge dx^k=\int_{c_2^{-1}(D)}c_2^*\omega: \blacksquare$$

Այժմ սահմանենք M-ով տարածված ω դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը: Դիտարկենք դեպքեր.

I դեպք: Գոյություն ունի k-չափանի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ այնպես, որ $c\left([0,1]^k\right)$-ից դուրս՝ $\omega=0$:

Այս դեպքում՝

$$\int_M\omega:=\int_c\omega,$$

իսկ եթե c-ն հակակողմնորոշված է, ապա

$$\int_M \omega := -\int_c \omega :$$

Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ $\int_M \omega$ ինտեգրալը c-ի ընտրությունից կախված չէ:

II դեպք: Ենթադրենք M-ը կոմպակտ է և O-ն M-ի վերջավոր բաց ծածկույթ է, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

յուրաքանչյուր $U \in O$ բաց բազմության համար գոյություն ունի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$M \cap U \subset c\left([0,1]^k\right) \subset M :$$

Φ-ով նշանակենք այդ ծածկույթին ենթարկված որևէ միավորի տրոհում և M-ով տարածված ինտեգրալը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi\omega : \tag{6.4}$$

Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ այսպես սահմանված ինտեգրալը O-ի և Φ-ի ընտրությունից կախված չէ:

Իրոք, եթե $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ և $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_s\}$ ընտանիքները միավորի տրոհումներ են, ապա

$$\sum_{i=1}^{r} \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{c_i} \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{c_i} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^{s} \psi_j \right) \omega =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \int_{c_i} \varphi_i \psi_j \omega = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{r} \int_{c'_j} \psi_j \varphi_i \omega = \sum_{j=1}^{s} \int_{c'_j} \psi_j \omega = \sum_{j=1}^{s} \int_M \psi_j \omega,$$

որտեղ c_i-ն և c'_i-ը այն խորանարդներն են, որոնց համար $c_i\left([0,1]^k\right)$-ից դուրս՝ $\varphi_i = 0$ և $c'_i\left([0,1]^k\right)$-ից դուրս՝ $\psi_i = 0$:

Ապացուցենք նաև, որ եթե M-ը f-ով պարամետրացված բազմաձևություն է, իսկ

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} \omega_{i_1 ... i_k}(x) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$$

դիֆերենցիալ ձևը որոշված է M-ի վրա, ապա M-ով տարածված ինտեգրալը արտահայտվում է Ռիմանի ինտեգրալի միջոցով՝

$$\int_M \omega = \int_\Delta f^* \omega \,:$$

Բավական է այս պնդումն ապացուցել մեկ գումարելիի համար՝

$$\omega = \omega(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k} \,,$$

$$f^* \omega = \omega(f(t)) df^{i_1} \wedge \ldots \wedge df^{i_k} =: h(t) dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^k \,:$$

Յուրաքանչյուր $t_0 \in \Delta$ կետի համար վերցնենք $\delta_{t_0} > 0$ թիվն այնպես, որ t_0 կենտրոնով և δ_{t_0} կողմի երկարությամբ Δ_{t_0} փակ խորանարդն ընկած լինի W-ի մեջ: Դիտարկենք $t = T_{t_0}(\tau) = t_0 + \delta_{t_0}(\tau - \tau_0)$ գծային ձևափոխությունը, որտեղ $\tau_0 = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2} \right)$: T_{t_0}-ն $[0,1]^k$ խորանարդը արտապատկերում է Δ_{t_0}-ի վրա՝ $T_{t_0}\left([0,1]^k \right) = \Delta_{t_0}$:

Յուրաքանչյուր t_0-ի համար վերցնենք $x_0 = f(t_0) \in M$ կետի U_{x_0} բաց շրջակայք, այնպիսին, որ $M \cap U_{x_0} \subset f\left(\Delta_{t_0} \right)$:

Քանի որ M կոմպակտ բազմությունը ծածկված է $\left\{ U_{x_0} \right\}$ բաց բազմությունների ընտանիքով, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $O = \left\{ U_{x_1}, \ldots, U_{x_p} \right\}$: Դիցուք $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_p\}$-ն O ծածկույթին ենթարկված միավորի տրոհում է: Այդ դեպքում

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{p} \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^{p} \int_{[0,1]^k} c_i^*(\varphi_i \omega) \,,$$

որտեղ $c_i(\tau)=f\left(T_{t_i}(\tau)\right)$, $c_i^*=T_{t_i}^*\circ f^*$, $t_i=f^{-1}(x_i)$: Ուստի

$$\int_M \omega=\sum_{i=1}^{p}\int_{[0,1]^k}\varphi_i\left(f\left(T_{t_i}(\tau)\right)\right)T_{t_i}^*\left(h(t)dt^1\wedge...\wedge dt^k\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\int_{[0,1]^k}\varphi_i\left(f\left(T_{t_i}(\tau)\right)\right)h\left(T_i(\tau)\right)\frac{D(T_{t_i}^1,...,T_{t_i}^k)}{D(\tau^1,...,\tau^k)}d\tau^1...d\tau^k=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\int_{T_{t_i}\left([0,1]^k\right)}\varphi_i\left(f(t)\right)h(t)dt^1...dt^k=\sum_{i=1}^{p}\int_{\Delta_{t_i}}\varphi_i\left(f(t)\right)h(t)dt^1...dt^k=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\int_{\Delta}\varphi_i\left(f(t)\right)h(t)dt^1...dt^k=\int_{\Delta}h(t)dt^1...dt^k:$$

Լեմմա 6.1: *Դիցուք*

ա) M-ը եզրով դիֆերենցելի բազմաձևություն է և c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդն այնպիսին է, որ $c_{(k,0)}\subset\partial M$, իսկ մնացած նիստերը ∂M-ի վրա ներքին կետ[*] չունեն,

բ) ω-ն M-ի վրա որոշված $(k-1)$-աստիճանի դիֆերենցիալ ձև է և $c\left([0,1]^k\right)$-ից դուրս՝ $\omega=0$:

Այդ դեպքում

$$\int_{\partial M}\omega=\int_{\partial c}\omega,$$

որտեղ ∂M եզրում վերցրված է մակածված կողմնորոշումը:

▶ Շղթայով տարածված ինտեգրալի սահմանման համաձայն՝

$$\int_{\partial c}\omega=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{i+\alpha}\int_{c_{(i,\alpha)}}\omega=(-1)^k\int_{c_{(k,0)}}\omega,$$

քանի որ մյուս նիստերի վրա՝ $\omega=0$:

Մյուս կողմից, ապացուցել ենք (թեորեմ 5.3), որ երբ k-ն զույգ է, ապա $c_{(k,0)}$-ն ∂M-ում համակողմնորոշված է, իսկ երբ k-ն կենտ է, ապա $c_{(k,0)}$-ն հակակողմնորոշված է: ■

---

[*] Բազմաձևության այն կետերը, որոնք եզրին չեն պատկանում, կոչվում են այդ բազմաձևության ներքին կետեր:

3. Ստոքսի թեորեմը բազմաձևությունների վրա:

Թեորեմ 6.3 (Ստոքս): *Դիցուք* M *-ը* C^2 *դասի* k *-չափանի, եզրով, կողմնորոշված, կոմպակտ դիֆերենցելի բազմաձևություն է, իսկ* ω *-ն* M *-ի վրա* $(k-1)$ *-աստիճանի անընդհատ դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է: Այդ դեպքում*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \tag{6.5}$$

որտեղ եզրում վերցրված է մակածված կողմնորոշումը:

▶ Նախ թեորեմն ապացուցենք M -ից արժեքներ ընդունող շղթայի համար*: Դրա համար բավական է թեորեմն ապացուցել խորանարդի դեպքում: Եթե c -ն M -ից արժեքներ ընդունող համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ է, ապա

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^* d\omega = \int_{I^k} dc^*\omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega : \tag{6.6}$$

Վերջին հավասարությունն ապացուցվում է այնպես, ինչպես սովորական սինգուլյար խորանարդների դեպքում:

Այժմ անցնենք (6.5)-ի ապացույցին: Դիտարկենք դեպքեր.

I դեպք: Գոյություն ունի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$c\left([0,1]^k\right) \subset M \setminus \partial M \text{ և } \omega(x) = 0, \text{ երբ } x \notin c\left([0,1]^k\right):$$

Այս դեպքում $d\omega(x) = 0$, $x \notin c\left([0,1]^k\right)$: Մասնավորաբար, $d\omega(x) = 0$, երբ $x \in \partial c$: Հետևաբար,

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0 \text{ և } \int_{\partial M} \omega = 0,$$

քանի որ ω -ն ∂M -ի վրա 0 է:

II դեպք: ω -ն այնպիսին է, որ գոյություն ունի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ $c_{(k,0)} \subset \partial M$, և այն միակ նիստն է,

---

* Այս դեպքում շղթայով տարածված ինտեգրալը սահմանվում է այնպես, ինչպես սովորական շղթայի դեպքում:

որ ∂M -ի վրա ունի ներքին կետ, ու $\omega = 0$՝ $c\left([0,1]^k\right)$-ից դուրս: Այս դեպքում, լեմմա 6.1-ի համաձայն,

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{c} d\omega = \int_{M} d\omega ,$$

մանի որ $d\omega$ -ն $c\left([0,1]^k\right)$-ից դուրս 0 է (տես նախորդ կետի I դեպքը):

III դեպք: ω -ն կամայական դիֆերենցիալ ձև է: Կառուցենք M -ի O բաց ծածկույթ այնպես, որ յուրաքանչյուր $U \in O$ բաց բազմության համար գոյություն ունենա c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$U \cap M \subset c\left([0,1]^k\right),$$

ընդ որում[*], կամ՝ $c\left([0,1]^k\right) \subset M \setminus \partial M$, կամ՝ $c_{(k,0)} \subset \partial M$ և այն միակ նիստն է, որ ∂M -ի վրա ունի ներքին կետ:

Քանի որ M -ը կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի նրա վերջավոր ենթածածկույթ: Այդ ենթածածկույթին ենթարկված որևէ միավորի տրոհում նշանակենք $\Phi = \{\varphi_1, ..., \varphi_r\}$ -ով: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i(x) = 1 \text{, երբ } x \in M :$$

Ուստի

$$\sum_{i=1}^{r} d\varphi_i = d\sum_{i=1}^{r} \varphi_i = 0 ; \quad \sum_{i=1}^{r} (d\varphi_i \wedge \omega) = \left(\sum_{i=1}^{r} d\varphi_i \right) \wedge \omega = 0 :$$

Ինտեգրալի սահմանման համաձայն՝[*]

$$\int_{M} d\omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{M} \varphi_i d\omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{M} \varphi_i d\omega + \sum_{i=1}^{r} \int_{M} (d\varphi_i \wedge \omega) = \sum_{i=1}^{r} \int_{M} d\varphi_i \omega : \qquad (6.7)$$

---

[*] Այդ բանին հասնելու համար U բաց բազմությունները և համապատասխան c -երը կառուցում ենք ∂M -ի և $M \setminus \partial M$ -ի բոլոր կետերի համար:

[*] Ինտեգրալը գծային ֆունկցիոնալ է՝ $\int_M (a_1\omega_1 + a_2\omega_2) = a_1 \int_M \omega_1 + a_2 \int_M \omega_2$:

Քանի որ $d\varphi_i\omega$ դիֆերենցիալ ձևերը նախորդ դեպքերում դիտարկված տեսքի են, ապա

$$\int_M d\varphi_i\omega = \int_{\partial M} \varphi_i\omega,\ 1 \le i \le r:$$

Տեղադրելով այս արժեքները (6.7)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\partial M} \varphi_i\omega = \int_{\partial M} \omega:$$

Վերջին հավասարությունը ստացվում է նրանից, որ Φ ընտանիքը միավորի տրոհում է նաև ∂M -ի համար: ■

Լրացում: Եթե ω-ն անընդհատ դիֆերենցելի է M-ը պարունակող $D \subset R^n$ բաց բազմության վրա, ապա Ստոքսի թեորեմը ճիշտ է նաև C^1 դասի բազմաձևության համար:

Իրոք, M -ը C^2 դասին պատկանելու պայմանը օգտագործել ենք միայն $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$ (6.6) հավասարությունն ապացուցելիս:

Սակայն (§3, 2)-ում ապացուցվել է, որ երբ ω-ն բավարարում է նշված պայմանին, ապա (6.6)-ը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ c-ն անընդհատ դիֆերենցելի է:

§7. ԲԱԶՄԱՁԵՎՈՒԹՅԱՆ ԾԱՎԱԼ

<u>1. Արտաքին նորմալի օրքը որպես վեկտորական արտադրյալ:</u> R^3-ում $v_1 = (v_1^1, v_1^2, v_1^3)$ և $v_2 = (v_2^1, v_2^2, v_2^3)$ վեկտորների $v_1 \times v_2$ վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^2 & v_2^3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} v_1^3 & v_1^1 \\ v_2^3 & v_2^1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix} e_3, \tag{7.1}$$

որտեղ $\{e_1, e_2, e_3\}$ -ը R^3-ի ստանդարտ բազիսն է:

(7.1) վեկտորական արտադրյալը սիմվոլիկ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{vmatrix} : \qquad (7.1)$$

R^n -ում $v_i = (v_i^1, ..., v_i^n)$, $1 \le i \le n-1$ վեկտորների $v_1 \times ... \times v_{n-1}$ վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$v_1 \times ... \times v_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & ... & e_n \\ v_1^1 & ... & v_1^n \\ ... & ... & ... \\ v_{n-1}^1 & ... & v_{n-1}^n \end{vmatrix} = A_1 e_1 + ... + A_n e_n, \qquad (7.2)$$

որտեղ $\{e_1, ..., e_n\}$ -ը R^n -ի ստանդարտ բազիսն է, իսկ A_i -ն e_i էլեմենտի հանրահաշվական լրացումն է՝

$$A_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & ... & \hat{v_1^i} & ... & v_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ v_{n-1}^1 & ... & v_{n-1}^i & ... & v_{n-1}^n \end{vmatrix},$$

որտեղ i -րդ սյան վրայի «^» նշանը ցույց է տալիս, որ i -րդ սյունը բացակայում է:

Եթե $\varpi = (\varpi^1, ..., \varpi^n)$, ապա (7.2) վեկտորական արտադրյալի և ϖ վեկտորի սկալյար արտադրյալը կլինի՝

$$< v_1 \times ... \times v_{n-1}, \varpi > = \varpi^1 A_1 + ... + \varpi^n A_n = \begin{vmatrix} \varpi^1 & ... & \varpi^n \\ v_1^1 & ... & v_1^n \\ ... & ... & ... \\ v_{n-1}^1 & ... & v_{n-1}^n \end{vmatrix} =: \det \begin{pmatrix} \varpi \\ v_1 \\ ... \\ v_{n-1} \end{pmatrix} : \qquad (7.3)$$

Հետևաբար, $v_1 \times ... \times v_{n-1} \perp v_1, ..., v_{n-1}$:

R_p^n -ում վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է այսպես՝

$$(p, v_1) \times ... \times (p, v_{n-1}) = (p, v_1 \times ... \times v_{n-1}) :$$

Թեորեմ 7.1: *Եթե* (M,μ) *-ն* R^n *-ում կողմնորոշված* $(n-1)$ *-չափանի բազմաձևություն է,* $v_1,\ldots,v_{n-1}\in M_x$ *և* $[v_1,\ldots,v_{n-1}]=\mu_x$*, ապա*

$$n(x)=\frac{v_1\times\ldots\times v_{n-1}}{\left|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\right|}, \tag{7.4}$$

որտեղ $n(x)$ *-ը* M *բազմաձևության արտաքին նորմալի օրթն է* $x\in M$ *կետում:*

▶ Նշանակենք՝ $n_0=\dfrac{v_1\times\ldots\times v_{n-1}}{\left|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\right|}$: (7.3)-ի համաձայն՝

$$\det\begin{pmatrix} n_0\\ v_1\\ \ldots\\ v_{n-1}\end{pmatrix}=<v_1\times\ldots\times v_{n-1},\frac{v_1\times\ldots\times v_{n-1}}{\left|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\right|}>=\left|v_1\times\ldots\times v_{n-1}\right|>0,$$

այսինքն՝ $[n_0,v_1,\ldots,v_{n-1}]=[(e_1)_x,\ldots,(e_n)_x]$: Արտաքին նորմալի օրթի երկրորդ սահմանման համաձայն՝ $n(x)=n_0$: ■

Եթե $\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$ -ը M_x -ում օրթոնորմալ բազիս է, ապա

$$\det\begin{pmatrix} n(x)\\ v_1\\ \ldots\\ v_{n-1}\end{pmatrix}=1: \tag{7.5}$$

Այժմ, եթե $f:W_f\to M$ արտապատկերումը $x=f(t)$ կետում կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում է, ապա (7.4)-ի համաձայն՝

$$n(x)=\frac{f_*(e_1)_t\times\ldots\times f_*(e_{n-1})_t}{\left|f_*(e_1)_t\times\ldots\times f_*(e_{n-1})_t\right|},\ t\in W_f,\ x=f(t),$$

ուստի $n(x)$ -ը x կետում անընդհատ է: Այսինքն՝ $n(x)$ -ը M բազմության վրա որոշված *անընդհատ վեկտորական դաշտ է*:

Ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. եթե R^n -ում $(n-1)$ -չափանի M բազմաձևությունն այնպիսին է, որ գոյություն ունի M_x շոշափող տարածության օրթոգոնալ, միավոր վեկտորներից կազմված $n(x)$ անընդհատ վեկտորական դաշտ, ապա M -ը կողմնորոշելի է:

Ապացուցենք սա: M_x տարածության $\{v_1,...,v_{n-1}\}$ բազիսը կընդգրկենք μ_x -ի մեջ, եթե $[n(x),v_1,...,v_{n-1}]=[(e_1)_x,...,(e_n)_x]$: Ցույց տանք, որ այդպես սահմանված μ_x -երը համաձայնեցված են: Դրա համար պետք է ապացուցել, որ եթե $f:W_f \to M$ արտապատկերումը լոկալ պարամետրացում է, $a,b \in W_f$ և $[f_*(e_1)_a,...,f_*(e_{n-1})_a]=\mu_{f(a)}$, ապա $[f_*(e_1)_b,...,f_*(e_{n-1})_b]=\mu_{f(b)}$:

Ունենք՝

$$[n(x),f_*(e_1)_a,...,f_*(e_{n-1})_a]=[(e_1)_x,...,(e_n)_x],\ x=f(a):$$

Նշանակենք՝

$$v(t)=\frac{f_*(e_1)_t\times...\times f_*(e_{n-1})_t}{\left|f_*(e_1)_t\times...\times f_*(e_{n-1})_t\right|},\ t\in W_f:$$

Այդ դեպքում $v(t)$ -ն անընդհատ է և $v(a)=n(x)=n(f(a))$:

Մյուս կողմից, $v(t)$ -ն $M_{f(t)}$ -ին օրթոգոնալ միավոր վեկտոր է, ուստի այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$v(t)=\alpha(t)n(f(t)),\ t\in W_f,$$

որտեղ $\alpha(t)=\pm 1$:

Բացի դրանից, $\alpha(t)\in C(W_f)$, քանի որ $\alpha(t)=<v(t),n(f(t))>$: Ուստի α -ն հաստատուն է, քանզի W_f -ը կապակցված է:

Մնում է նկատել, որ $\left[n(f(t)),f_*(e_1)_t,...,f_*(e_{n-1})_t\right]=\mu_{f(t)}$ պայմանը նշանակում է, որ

$$\left[n(f(t)),f_*(e_1)_t,...,f_*(e_{n-1})_t\right]=\left[(e_1)_{f(t)},...,(e_{n-1})_{f(t)}\right],$$

կամ, որ նույնն է՝

$$0 < \det \begin{pmatrix} n(f(t)) \\ f_*(e_1)_t \\ \dots\ \dots\ \dots \\ f_*(e_{n-1})_t \end{pmatrix} = < n(f(t)), f_*(e_1)_t \times \ldots \times f_*(e_{n-1})_t > ,$$

այսինքն՝ $\alpha(t) = 1$ ։

2. <u>Ծավալի էլեմենտ և ծավալ:</u> Դիցուք (V, μ) -ն k -չափանի կողմնորոշված գծային տարածություն է, որում սահմանված է $T(v, \varpi)$ սկալյար արտադրյալ: Այսինքն՝ T -ն երկգծային արտապատկերում է, որը սիմետրիկ է և դրական որոշյալ՝

$$T(v, \varpi) = T(\varpi, v)\ ;\ \ T(v, v) > 0 \text{, երբ } v \neq 0 \text{ ։}$$

Այսպիսի տարածությունում *ծավալի թենզոր կամ ծավալի էլեմենտ* է կոչվում է այն միակ k -աստիճանի հակահամաչափ ω թենզորը, որը $[v_1, \ldots, v_k] = \mu$ պայմանին բավարարող օրթոնորմալ բազիսների վրա ընդունում է 1 արժեքը՝ $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 1$ (ω -ն միակն է, քանի որ այս դեպքում $\Lambda^k(V)$ -ն մեկ չափանի է):

Ծավալի թենզորը կախված է կողմնորոշումից և սկալյար արտադրյալից: Այս պատճառով էլ երբեմն ասում են՝ տրված կողմնորոշումից և տրված սկալյար արտադրյալից ծնված ծավալի թենզոր:

Դիցուք (M, μ) -ն k -չափանի (եզրով կամ առանց եզրի) կողմնորոշված բազմաձևություն է R^n -ում, և M_x -ը x կետում շոշափող տարածությունն է, որը k -չափանի գծային տարածություն է: T_x -ով նշանակենք M_x -ում ստանդարտ սկալյար արտադրյալը՝

$$T_x(v_x, \varpi_x) = < v, \varpi > \ ;\ \ v_x, \varpi_x \in M_x,\ v, \varpi \in R^n \text{ ։}$$

$x \in M$ կետում ծավալի թենզոր է կոչվում M_x -ում՝ T_x -ից և μ_x -ից ծնված $\omega(v_1, \ldots, v_k)$ ծավալի թենզորը և նշանակվում է՝

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) = dV \text{ ։}$$

(Դասական նշանակումներով՝ dV, երբ $n = k = 3$; dS, երբ $n = 3$, $k = 2$; ds, երբ $k = 1$):

Այդ դեպքում

$$\int_M dV =: V_k(M) \quad (\text{կամ` } \; S(M))$$

ինտեգրալը կոչվում է M *բազմաձևության ծավալ*:

Նկատենք, որ եթե $M \subset R^n$ -ը n-չափանի, ստանդարտ կողմնորոշմամբ, կոմպակտ բազմաձևություն է, ապա $dV = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$: Հետևաբար, այս նոր սահմանված ծավալը համընկնում է Ռիմանի ինտեգրալի միջոցով սահմանված ծավալի հետ:

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր:

ա) Երբ $k = n-1$, (7.5)-ի համաձայն,

$$\omega(x, v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} n(x) \\ v_1 \\ \ldots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$(n-1)$ -աստիճանի հակահամաչափ թենզորը M_x -ում ծավալի էլեմենտն է: Բացի դրանից, եթե $[v_1, \ldots, v_{n-1}] = \mu_x$, ապա (7.4)-ի համաձայն, կստանանք`

$$dV(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} n(x) \\ v_1 \\ \ldots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = < n(x), v_1 \times \ldots \times v_{n-1} > = \left| v_1 \times \ldots \times v_{n-1} \right| :$$

Մյուս կողմից, եթե $f : W_f \to M$, $W_f \subset R^{n-1}$ արտապատկերումը $x = f(a) \in M$ կետի շրջակայքում կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում է, ապա $[f_*(e_1)_a, \ldots, f_*(e_{n-1})_a] = \mu_x$: Հետևաբար,

$$\begin{aligned} f^* dV(a, (e_1)_a, \ldots, (e_{n-1})_a) &= \left| f_*(e_1)_a \times \ldots \times f_*(e_{n-1})_a \right| = \\ &= \left| Df(a)(e_1) \times \ldots \times Df(a)(e_{n-1}) \right| : \end{aligned} \tag{7.6}$$

բ) Եթե $n = 3$, $k = 2$ և մակերևույթի պարամետրական ներկայացումն է`

$$r=\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \text{ ուստի և } \quad r'=\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix},$$

ապա

$$r^*dS=\left|r_*(e_1)\times r_*(e_2)\right|=\left|(x'_u,y'_u,z'_u)\times(x'_v,y'_v,z'_v)\right|=\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

որտեղ

$$A=\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}:$$

գ) $k=1$: Եթե $M\subset R^n$-ը 1-չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է, ապա այն նաև կոչվում է ողորկ կոր: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $x\in M$ կետում M_x-ը R_x^n-ի 1-չափանի ենթատարածություն է: Եթե* $T\in M_x$, $[T]=\mu_x$ և $|T|=1$, ապա ըստ սահմանման՝

$$dV(T)=ds(T)=1:$$

Եթե $v\in M_x$, $[v]=\mu_x$, ապա $v=|v|T$ (անցման մատրիցի որոշիչը պետք է լինի դրական՝ $v=aT$, $|v|=a$): Հետևաբար՝ $ds(v)=|v|$:

Եթե $\gamma(t)=\left(\gamma_1(t),...,\gamma_n(t)\right)$-ն M-ի կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում է, ապա

$$\gamma^*ds(e_1)_t=\left|\gamma_*(e_1)_t\right|=\left|\left(\gamma'(t)(e_1)\right)_{\gamma(t)}\right|=\left|\gamma'(t)(e_1)\right|=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left[\gamma'_i(t)\right]^2}:$$

<u>3. Բացահայտ տեսքով տրված մակերևույթի մակերեսը:</u> Ենթադրենք, թե R^n-ում $(n-1)$-չափանի M բազմաձևության պարամետրացումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $x^n=\varphi(x^1,...,x^{n-1})$, ինչը կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով կընդունի հետևյալ տեսքը՝

---

* Այս դեպքում ասում են, որ T վեկտորն ուղղված է շոշափողի դրական ուղղությամբ (XVIII, §1, 2):

$$f(x^1,\dots,x^{n-1})=\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^{n-1} \\ \varphi(x^1,\dots,x^{n-1}) \end{pmatrix},\ f'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1} & \dots & \dots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix}:$$

Այդ դեպքում՝

$$f_*(e_1)\times\dots\times f_*(e_{n-1})=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & \dots & e_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{n-1}} \end{vmatrix}=A_1e_1+\dots+A_{n-1}e_{n-1}+A_ne_n,$$

որտեղ $|A_i|=\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^i}\right|$, $1\le i\le n-1$, $|A_n|=1$:

Հետևաբար՝

$$|f_*(e_1)\times\dots\times f_*(e_{n-1})|=\sqrt{1+A_1^2+\dots+A_{n-1}^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n-1}}\right)^2}:$$

Այս արժեքը տեղադրելով (6.12)-ի մեջ՝ կստանանք

$$f^*dV(x)=\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^1}\right)^2+\dots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^{n-1}}\right)^2}\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^{n-1}:$$

<u>4. Ծավալի էլեմենտի կանոնական ներկայացումը:</u>

ա) $k=n-1$: Ունենք՝

$dV(x,v_1,\dots,v_{n-1})=$

$$=\begin{vmatrix} n^1(x) & \dots & n^n(x) \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}n^i(x)\begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & \hat{v}_1^i & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^i & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}: \quad (7.7)$$

Քանի որ R^n -ում $\{dx^1,...,dx^n\}$ -ը $\{e_1,...,e_n\}$ ստանդարտ բազիսի դուալ բազիսն է, ապա (տես §1, 6)

$$dx^1 \wedge ... \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n (v_1,...,v_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_1^1 & ... & \overset{\wedge}{v_1^i} & ... & v_1^n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ v_{n-1}^1 & ... & v_{n-1}^i & ... & v_{n-1}^n \end{vmatrix} :$$

Այս արժեքները տեղադրելով (7.7)-ի մեջ, կստանանք.

$$dV(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} n^i(x) dx^1 \wedge ... \wedge \overset{\wedge}{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n : \qquad (7.8)$$

բ) Երբ $n = 3$, $k = 2$, կստանանք՝

1^0. $dS = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy$:

Ապացուցենք նաև հետևյալ բանաձևերը՝

$$2^0.\ dy \wedge dz = n^1 dS, \quad 3^0.\ dz \wedge dx = n^2 dS, \quad 4^0.\ dx \wedge dy = n^3 dS : \qquad (7.9)$$

Նշանակենք՝ $v \times \varpi = \alpha n(x)$, որտեղ $v, \varpi \in M_x$ և $\alpha = 0$, երբ v, ϖ -ն գծորեն կախված են, $\alpha > 0$, երբ $[v, \varpi] = \mu_x$ ու $\alpha < 0$, երբ $[v, \varpi] = -\mu_x$:

Այնուհետև վերցնենք կամայական $z \in R_x^3$ վեկտոր: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$< z, n(x) > \cdot < v \times \varpi, n(x) > = < z, \alpha n(x) > = < z, v \times \varpi >,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$< z, v \times \varpi > = < z, n(x) > dS(v, \varpi) :$$

Այժմ, վերցնելով $z = (e_1)_x, (e_2)_x, (e_3)_x$, կստանանք 2^0-4^0-ը:

գ) $n = 3$, $k = 1$: Ունենք (նախորդ կետի գ)-ն).

եթե $T = (T^1, T^2, T^3) \in M_x$, $[T] = \mu_x$, $|T| = 1$ և $v \in M_x$, $[v] = \mu_x$, ապա $v = |v| T$: Հետևաբար,

$$ds(v) = |v| = < T, v > = T^1 v^1 + T^2 v^2 + T^3 v^3 = T^1 dx(v) + T^2 dy(v) + T^3 dz(v),$$

այսինքն՝

$$1^0.\ ds = T^1dx + T^2dy + T^3dz:$$

Ճիշտ են նաև հետևյալ բանաձևերը՝

$2^0.\ dx = T^1ds$, $3^0.\ dy = T^2ds$, $4^0.\ dz = T^3ds$: (7.10)

Իրոք, եթե $[v]=[T]$ (հակառակ դեպքում կապացուցենք $-v$ -ի համար և կբազմապատկենք -1-ով), ապա

$$v = |v|T = \left(|v|T^1, |v|T^2, |v|T^3\right),$$

հետևաբար,

$$dx(v) = T^1|v| = T^1ds(v), dy(v) = T^2|v| = T^2ds(v), dz(v) = T^3|v| = T^3ds(v):$$

<u>5. Անբացահայտ տեսքով տրված մակերևույթի մակերեսը:</u> Դիցուք $F: R^n \to R$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, $M = F^{-1}(0)$ բազմաձևությունը դատարկ չէ և $rank\, F'(x) = 1$, $x \in M$:

Այդ դեպքում անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $a \in M$ կետում բավարարվում է թեորեմ 4.1-ի (բ) պայմանը, ընդ որում, $k = n-1$: Ուստի M -ը $(n-1)$ չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է:

Նշանակենք՝ $g = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)$ (որը կոչվում է F ֆունկցիայի գրադիենտ) և ապացուցենք

$$n(x) = \frac{1}{|g|}\cdot g_x \tag{7.10}$$

հավասարությունը:

Քանի որ M -ը $F(x)=0$ հավասարման լուծումների բազմությունն է, ապա $x = f(t): W \to M$ լոկալ պարամետրացման համար կունենանք՝ $F(f(t)) = 0$, $t \in W$ կամ, որ նույնն է՝

$$F\left(f^1(t^1, ..., t^{n-1}), ..., f^n(t^1, ..., t^{n-1})\right)(f(t)) \equiv 0,\ t \in W:$$

Հաշվելով մասնակի ածանցյալը ըստ t^i -ի՝ կստանանք.

$$\frac{\partial F}{\partial x^1}\frac{\partial f^1}{\partial t^i}+\frac{\partial F}{\partial x^2}\frac{\partial f^2}{\partial x^i}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t^i}=0,\ 1\le i\le n-1$$

այսինքն՝

$$<g_x, f_*(e_i)>=0,\ 1\le i\le n-1:$$

Այսպիսով, $g_x \perp M_x$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

(7.10) բանաձևից հետևում է, որ $n(x)$-ը նորմալի օրթերից կազմված անընդհատ վեկտորական դաշտ է, հետևաբար, M-ը կողմնորոշելի է: M-ի ծավալը հաշվելու համար $n(x)$-ի (7.10) արժեքը կտեղադրենք (7.8)-ի մեջ և կհաշվենք $\int_M dV$ ինտեգրալը:

Որպես օրինակ, հաշվենք r շառավղով գնդային մակերևույթի մակերեսը R^n-ում, որը կնշանակենք $S_n(r)$-ով: Այս դեպքում՝ $F(x)=x_1^2+\ldots+x_n^2-r^2$: Ուստի $g=2(x_1,\ldots,x_n)$, հետևաբար, $n(x)=\frac{1}{r}x_x$: (7.8)-ի համաձայն՝

$$S_n(r)=\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2=r^2} dV=\frac{1}{R}\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2=r^2}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x^i dx^1\wedge\ldots\wedge\hat{dx^i}\wedge\ldots\wedge dx^n\ :$$

Այնուհետև, կիրառելով Ստոքսի թեորեմը, կստանանք՝

$$S_n(r)=\frac{1}{r}\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2\le r^2}\sum_{i=1}^{n}dx^1\wedge\ldots\wedge dx^n=\frac{n}{r}V_n(r),$$

որտեղ $V_n(R)$-ը n-չափանի գնդի ծավալն է:

<u>6. Դաշտի տեսության տարրերը:</u>

ա) Գաուս - Օստրոգրադսկու բանաձևը: Դիցուք M-ը R^3-ում ընկած եռաչափ, եզրով,ստանդարտ կողմնորոշմամբ կոմպակտ բազմաձևություն է, n-ը դրա արտաքին նորմալի օրթն է և $F=\big(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\big)$-ը M-ի վրա դիֆերենցելի վեկտորական դաշտ է: Այդ դեպքում, Ստոքսի թեորեմի մեջ վերցնելով $\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$, կստանանք՝

$$\int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial M} \left(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \right) : \quad (7.11)$$

Հաշվի առնելով (7.9) բանաձևերը՝ (7.11)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\int_M div\, F dV = \int_{\partial M} < F, n > dS ,$$

որտեղ $div\, F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, որը կոչվում է F վեկտորական դաշտի *դիվերգենցիա*:

բ) Ստոքսի բանաձևը: Դիցուք M-ը R^3-ում ընկած երկչափ, եզրով, ստանդարտ կողմնորոշմամբ կոմպակտ բազմաձևություն է, n-ը դրա արտաքին նորմալի օրթն է: Այնուհետև ենթադրենք, որ $T \in (\partial M)_x$-ը այն վեկտորական դաշտն է, որը բավարարում է $ds(T) = 1$ պայմանին, և $F = (P, Q, R)$-ը M-ը պարունակող բաց բազմության վրա դիֆերենցելի վեկտորական դաշտ է: Այդ դեպքում, Ստոքսի թեորեմի մեջ վերցնելով $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, կստանանք՝

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx : \quad (7.12)$$

Հաշվի առնելով (7.9) և (7.10) բանաձևերը՝ (7.12)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\int_{\partial M} < F, T > dS = \int_M < (\nabla \times F), n > dS ,$$

որտեղ

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} , \quad < (\nabla \times F), n > = \begin{vmatrix} n^1 & n^2 & n^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} :$$

$\nabla \times F$-ը կոչվում է F վեկտորական դաշտի *ռոտոր* և նշանակվում է՝ $rot\, F$ կամ $curl\, F$:

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

XIV ԳԼՈՒԽ, ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԵՐ

XV ԳԼՈՒԽ, ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

XVI ԳԼՈՒԽ, ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

XVIII ԳԼՈՒԽ, ԿՈՐԱԳԻԾ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ
(Դասական մոտեցումը)