

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

Երկրորդ մաս

ԵՐԵՎԱՆ 2012

Խմբագիրներ՝

Ա. Ա. Սահակյան

ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դեկան,
ՀՀ ԳԱԱ բղթակից անդամ

Մ. Մ. Մարտիրոսյան

ԵՊՀ մաթեմատիկական անալիզի և ֆունկցիաների տեսության
ամբիոնի դոցենտ,
Քիո.-մաթ. գիտությունների թեկնածու

Դասագիրքը նպաստեսված է բուհերի ֆիզիկանարենասիլական, բնագիտական և տեխնիկական մասնագիտությունների համար: Տեսական հարուստ նյութից զատ, այն աչքի է ընկնում նաև լուծված օրինակների բազմազանությամբ, ինչը հնարավորություն է տալիս դասագրքից օգտվելու նշված մասնագիտությունների առկա և հեռակա բաժիններում սովորող բոլոր ուսանողներին:

ԽՄՔԱԳԻՐՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ

Վ. Խ. Մուսոյանի հեղինակած մաթեմատիկական անալիզի դասագրքի առաջին մասը, որը լույս տեսավ 2009 թվականին, անմիջապես գտավ իր ընթերցողին: Այդ ընթերցողն առաջին հերթին հայ ուսանողն էր, որին ընծայվեց մայրենիով զրկած ու մաթեմատիկական անալիզի ժամանակակից պահանջներին բավարարող մի դասագիրք:

Առաջին մասի հրատարակումից կարճ ժամանակ անց պրոֆեսոր Մուսոյանի անսպասելի վախճանը մեզ միայնակ թողեց դասագրքի երկրորդ մասի ձեռագրերի հետ: Դրանք խմբագրելիս փորձել ենք առավելագույնս պահպանել հեղինակի շարադրման ոճը:

Հատուկ երախտագիտություն ենք հայտնում մեր գործընկերոջ՝ Սիքայել Պողոսյանին, ով զգալի ավանդ ունի ինչպես գրքում տեղ գտած գծագրերի ձևավորման, այնպես էլ վերջնական խմբագրման գործում:

X ԳԼՈՒԽ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԾԱՐՔԵՐ

§1. ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻԹՅՈՒՆ

1. Կետային գուգամիտություն և հավասարաչափ գուգամիտություն:

Դիցուք $\{f_n\}$ -ը $X \subset R$ բազմության վրա որոշված ֆունկցիաների հաջորդականությունն է՝

$$f_n : X \rightarrow R, \quad n = 1, 2, \dots,$$

կամ, այլ կերպ սասած, $f_n(x)$ -ը $X \times N$ դեկարտյան արտադրյալի վրա որոշված երկու փոփոխականն ֆունկցիա է, որտեղ $x \in X, \quad n \in N$: Այդպիսի հաջորդականությունը կոչվում է X բազմության վրա որոշված ֆունկցիոնալ հաջորդականություն:

Կասենք f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $x_0 \in X$ կետում ճգնաժամ է A -ի (A -ն կարող է լինել նաև $\pm \infty$), կամ՝ f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականության սահմանը x_0 կետում A -ն է, եթե $f_n(x_0)$ թվային հաջորդականության սահմանը A -ն է՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = A :$$

Կասենք f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա կետորեն գուգամիտում է f ֆունկցիային, եթե X բազմության յուրաքանչյուր x կետում տեղի ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \tag{1.1}$$

առնչությունը: Այդ դեպքում f -ը կոչվում է f_n հաջորդականության սահմանային ֆունկցիա կամ սահման:

Թվային հաջորդականության սահմանի սահմանման համաձայն, (1.1) սահմանային առնչությունը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր $x \in X$ կետի և

յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի x -ից և ε -ից կախված $n_0(x, \varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(x, \varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon : \quad (1.1')$$

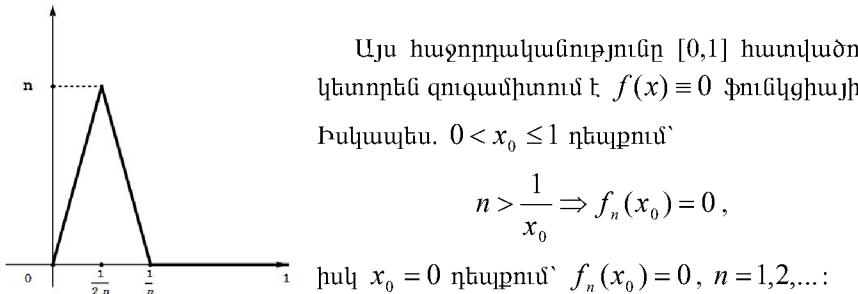
Օրինակ 1: $f_n(x) = x^n$ հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում կետորեն զուգամիտում է

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Փունկցիային:

Օրինակ 2: $f_n(x)$ հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում որոշենք հետևյալ կերպ. $f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ և $f_n(1) = 0$, իսկ

$\left[0, \frac{1}{2n}\right]$, $\left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right]$ և $\left[\frac{1}{n}, 1\right]$ հատվածների վրա ֆունկցիան գծային է:



Սահմանում: Կասենք f_n ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f ֆունկցիային, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ (կախված միայն ε -ից), այնպիսին, որ $n > n_0(\varepsilon)$ դեպքում $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի ունի X բազմությանը պատկանող բոլոր x կետերի համար՝

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X : \quad (1.2)$$

Պարզ է, որ հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականությունը զուգամիտում է նաև կետորեն (նույն սահմանին): Այսուհետև այդ երկու զուգամիտությունները զանազանելու համար կետորեն զուգամիտության դեպքում կգրենք

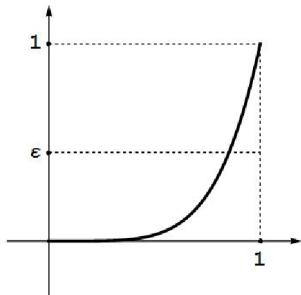
$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad x \in X,$$

իսկ հավասարաչափ զուգամիտության դեպքում՝

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in X:$$

Օրինակ 3: $f_n(x) = x^n$ հաջորդականությունը $[0,1)$ միջակայքում զուգամիտում է $f(x) \equiv 0$ ֆունկցիային, սակայն զուգամիտությունը հավասարաչափ չէ:

Իրոք, եթե վերցնենք $0 < \varepsilon < 1$, այդ դեպքում (1.2) պայմանը չի բավարարվի: Ավելին,



$$x^n < \varepsilon, \quad x \in [0,1)$$

պայմանը չի բավարարվի ոչ մի n -ի դեպքում, որովհետև

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1:$$

Մյուս կողմից, ցանկացած $[0, a]$ հատվածում ($0 < a < 1$) զուգամիտությունը հավասարաչափ է, որովհետև

$$x \in [0, a] \Rightarrow x^n \leq a^n < \varepsilon, \quad n > n_0:$$

Օրինակ 4: Օրինակ 2-ում կառուցած f_n հաջորդականությունը $[0,1]$ հատվածում զրոյին զուգամիտում է ոչ հավասարաչափ, որովհետև $f_n\left(\frac{1}{2n}\right) = n$, որի պատճառով (1.2) պայմանը չի բավարարվում:

Մյուս կողմից, ցանկացած $[\delta, 1]$ հատվածում ($0 < \delta < 1$) զուգամիտությունը հավասարաչափ է, որովհետև

$$n > \frac{1}{\delta} \Rightarrow f_n(x) = 0, \quad x \in [\delta, 1]:$$

Դիցուք $\{u_n(x)\}$ -ը X բազմության վրա որոշված ֆունկցիոնալ հաջորդականություն է: Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad (1.3)$$

շարքը կոչվում է ֆունկցիոնալ շարք, իսկ $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ ֆունկցիոնալ

հաջորդականությունը կոչվում է (1.3) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականություն:

Ֆունկցիոնալ շարքի կետորեն գուգամիտությունը և հավասարաչափ զուգամիտությունը սահմանվում են այդ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության միջոցով:

Սահմանում: Կասենք (1.3) ֆունկցիոնալ շարքը X բազմության վրա կետորեն կամ հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային, եթե

$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ հաջորդականությունը X -ի վրա համապատասխանաւոր կետորեն կամ հավասարաչափ զուգամիտում է $f(x)$ -ին:

Թե՛ կետային և թե՛ հավասարաչափ զուգամիտության դեպքում $f(x)$ -ն անվանում են (1.3) շարքի գումար և երկու դեպքում էլ գրում են՝

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X,$$

իսկ զուգամիտության տեսակը (կետորեն կամ հավասարաչափ) լրացնիչ նշում են:

Եթե f_n -ը նախօրոք տրված կամայական ֆունկցիոնալ հաջորդականություն է, ապա

$$f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + \cdots + (f_n(x) - f_{n-1}(x)) + \cdots \quad (1.4)$$

շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը f_n -ն է: Ուստի, օգտվելով կետորեն կամ հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականությունների օրինակներից, (1.4)-ի միջոցով կարող ենք կառուցել համապատասխան շարքերի օրինակներ:

2. Հավասարաշափ զուգամիտության Կոչիի սկզբունքը:

Թեորեմ 1.1 (Հավասարաշափ զուգամիտության Կոչիի սկզբունքը հաջորդականությունների համար): Որպեսզի f_n հաջորդականությունը X բազմության վրա լինի հավասարաշափ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունենա $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ (կախված միայն ε -ից), այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X, \quad m = 1, 2, \dots : \quad (1.5)$$

► (1.5) պայմանի անհրաժեշտությունն անմիջապես բխում է (1.2)-ից:

Բավարարություն: Նախ նկատենք, որ (1.5)-ից հետևում է f_n հաջորդականության կետորեն զուգամիտությունը (X -ի վրա): Իրոք, եթք $x \in X$ կետը ֆիքսված է, (1.5)-ը դառնում է $f_n(x)$ թվային հաջորդականության զուգամիտության Կոչիի պայմանը: Ուստի, Կոչիի պայմանի բավարարության շնորհիվ, $f_n(x)$ թվային հաջորդականությունը զուգամետ է: Այդ հաջորդականության սահմանը նշանակելով $f(x)$ -ով՝ կստանանք

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in X$$

առնչությունը: Այսուհետև, (1.5)-ում x -ը և n -ը ֆիքսենք, իսկ m -ը ձգտեցնենք անվերջի: Կստանանք՝

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X : \blacksquare$$

Թեորեմ 1.1' (Հավասարաշափ զուգամիտության Կոչիի սկզբունքը շարքերի համար): Որպեսզի (1.3) ֆունկցիոնալ շարքը X բազմության վրա հավասարաշափ զուգամիտի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունենա $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X, \quad m = 1, 2, \dots : \quad (1.6)$$

► Քանի որ (1.3) շարքի հավասարաշափ զուգամիտությունը նրա մասնակի զումարների հաջորդականության հավասարաշափ զուգամիտությունն է, (1.5)-ի մեջ տեղադրելով $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, կստանանք (1.6)-ը:

■

§2. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԾԱՐՁԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՎԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻԾՆԵՐ

1. Վայերշտրասի (մաժորանտով) հայտանիշը:

Թեորեմ 2.1: Եթե գոյություն ունի $\lambda_n > 0$ թվային հաջորդականություններ, այնպիսին, որ

$$a) |u_n(x)| \leq \lambda_n, \quad x \in X, \quad n \in N,$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

ապա $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը X -ի վրա հավասարաշափ զուգամետ է:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \quad \text{թվային} \quad \text{շարքը} \quad \text{կոչվում} \quad \text{է} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{ֆունկցիոնալ} \quad \text{շարքի}$$

մաժորանուն:

► Թվային շարքերի վերաբերյալ Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, բ) ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{n+m} < \varepsilon, \quad \forall m \in N : \tag{2.1}$$

Մյուս կողմից, ա) ից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| &\leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+m}(x)| \leq \\ &\leq \lambda_{n+1} + \dots + \lambda_{n+m}, \quad \forall x \in X : \end{aligned} \tag{2.2}$$

Քանի որ (2.1)-ից և (2.2)-ից հետևում է (1.6)-ը, ուստի հավասարաշափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը հավասարաշափ զուգամետ է X բազմության վրա: ■

Օրինակ: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{1+n^2}$ շարքը հավասարաշափ զուգամետ է R -ի վրա, քանի որ $\left| \frac{\sin nx}{1+n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ և $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$:

Լրացում: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը կոչվում է նորմալ զուգամետ X բազմության

վրա, եթե $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է այդ բազմության

վրա: Կոչիի սկզբունքից հետևում է, որ նորմալ զուգամետ շարքը նաև բացարձակ և հավասարաչափ զուգամետ է: Հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ (սեւ §4):

Վայերշտրասի հայտանիշն ապացուցելիս մենք ապացուցեցինք նաև, որ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ շարքը նորմալ զուգամետ է X -ի վրա:

2. Արելի և Դիրիխլեի հայտանիշները:

Սահմանում: $\{f_n\}$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը կոչվում է հավասարաչափ սահմանափակ X բազմության վրա, եթե գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|f_n(x)| \leq M, \quad x \in X, \quad n \in N:$$

Արելի և Դիրիխլեի հայտանիշները վերաբերում են

$$\sum a_n(x) b_n(x) \tag{2.3}$$

տեսքի շարքերին, որտեղ $b_n(x)$ հաջորդականությունը նվազող է՝ $b_{n+1}(x) \leq b_n(x), \quad x \in X, \quad n \in N$:

Թեորեմ 2.2 (Արելի հայտանիշը): Եթե $\sum a_n(x)$ շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է, իսկ $b_n(x)$ հաջորդականությունը նվազող է և հավասարաչափ սահմանափակ X բազմության վրա, ապա (2.3) շարքը X բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Թեորեմ 2.3 (Դիրիխլեի հայտանիշը): Եթե $\sum a_n(x)$ շարքի մասմակի զումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է X բազմության վրա, իսկ $b_n(x)$ հաջորդականությունը նվազող է և հավասարաչափ ձգություն է զրոյի X -ի վրա, ապա (2.3) շարքը X բազմության վրա զուգամիտում է հավասարաչափ:

Ինչպես թվային շարքերի դեպքում, այնպես և այստեղ, Աբելի և Դիրիխլեի հայտանիշներն ապացուցվում են Աբելի ձևափոխության միջոցով (կիրառելով Կոշիի սկզբունքը):

Աբելի ձևափոխության համաձայն, ունենք

$$\sum_{n=p}^q a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=p}^{q-1} A_n^{(p)}(x) (b_n(x) - b_{n+1}(x)) + A_q^{(p)}(x) b_q(x), \quad (2.4)$$

որտեղ $A_n^{(p)}(x) = a_p(x) + \dots + a_n(x)$, $p \leq n \leq q$, $x \in X$:

► (Աբելի հայտանիշի ապացույցը) Քանի որ $\sum a_n(x)$ շարքը գուգամիտում է հավասարաչափ, ապա Կոշիի սկզբունքի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ թվական թիվ, այնպիսին, որ

$$p > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |A_n^{(p)}(x)| < \varepsilon, \quad x \in X : \quad (2.5)$$

Քանի որ $b_n(x)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|b_n(x)| \leq M, \quad x \in X, \quad n \in N : \quad (2.6)$$

Հաշվի առնելով (2.5)-ը և (2.6)-ը՝ (2.4)-ից կստանանք.

$$p > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^q a_n(x) b_n(x) \right| \leq 3M\varepsilon, \quad x \in X :$$

Կոշիի սկզբունքի համաձայն, (2.3) շարքը X -ի վրա գուգամիտում է հավասարաչափ: ■

► (Դիրիխլեի հայտանիշի ապացույցը) Քանի որ $\sum a_n(x)$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|A_n^{(p)}(x)| \leq M, \quad p \leq n \leq q, \quad x \in X : \quad (2.7)$$

Քանի որ $b_n(x)$ -ը նվազող է և $b_n(x) \rightarrow 0$, $x \in X$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon)$ թվական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq b_n(x) < \varepsilon, \quad x \in X : \quad (2.8)$$

Հաշվի առնելով (2.7)-ը և (2.8)-ը՝ (2.4)-ից կստանանք

$$p > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^q a_n(x) b_n(x) \right| \leq M\varepsilon, \quad x \in X :$$

Կոչի սկզբունքի համաձայն, (2.3) շարքը X -ի վրա հավասարաչափ գուգամետ է: ■

Բերենք Դիրիխլի հայտանիշի կիրառության մի օրինակ:

Թեորեմ 2.4: Եթե $b_n \downarrow 0$, ապա $R \setminus \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$ բազմության կոմպակտ ենթարազմությունների վրա

$$\sum b_n \sin nx \quad \text{և} \quad \sum b_n \cos nx$$

շարքերը գուգամիտում են հավասարաչափ:

► Ապացուենք այդ շարքերից միայն առաջինի հավասարաչափ գուգամիտությունը: Ունենք (տե՛ս IX.3.4)`

$$|\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx| \leq \frac{1}{|\sin x/2|}, \quad x \neq 2\pi n :$$

$$\text{Քանի որ } \frac{1}{\sin x/2} \text{ ֆունկցիան անընդհատ է } R \setminus \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$$

բազմության վրա, ապա, Վայերշտրասի առաջին թեորեմի համաձայն, այդ բազմության կոմպակտ ենթարազմությունների վրա այն սահմանափակ է: Այսինքն՝ $\sum \sin nx$ շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հավասարաչափ սահմանափակ է նշված բազմությունների վրա:

Մյուս կողմից, b_n -ը x -ից կախված չէ, ուստի նրա համար գուգամիտությունը և հավասարաչափ գուգամիտությունը նույնն են: Մնում է կիրառել Դիրիխլի հայտանիշը: ■

§3. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԸԱՐՁԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ինչպես գիտենք, ֆունկցիաների վերջավոր գումարների համար ճիշտ են հետևյալ հատկությունները.

1⁰. Անդադիաս ֆունկցիաների գումարն անդադիաս է:

2⁰. Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների գումարը նոյնպես ունի վերջավոր սահման, և գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին:

3⁰. Ինտեգրելի ֆունկցիաների գումարը նոյնպես ինտեգրելի է, և գումարի ինտեգրալը հավասար է գումարելիների ինտեգրալների գումարին:

4⁰. Դիֆերենցելի ֆունկցիաների գումարը նոյնպես դիֆերենցելի է, և գումարի ածանցյալը հավասար է գումարելիների ածանցյալների գումարին:

Մեր նպատակն է նման թեորեմներ ապացուցել աճվերջ գումարների՝ ֆունկցիոնալ շարքերի համար: Նշենք, որ առանց լրացուցիչ պայմանների այդ հատկությունները ֆունկցիոնալ շարքերի համար ճիշտ չեն: Համապատասխան հակաօրինակները կրերվեն կոնկրետ հարցի ուսումնասիրման ժամանակ:

1. Ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհանուր յունը: Ակսենը հակաօրինակից, այսինքն՝ բերենք ֆունկցիոնալ շարքի օրինակ, որի գումարելիներն (անդամներն) անընդհատ են, բայց գումարն անընդհատ չէ:

$$x + (x^2 - x) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots, \quad x \in [0,1] \quad (3.1)$$

շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը՝ $f_n(x) = x^n$, ձգտում է

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad (3.2)$$

ֆունկցիային, եթե $n \rightarrow \infty$: Հետևաբար, (3.1) շարքի գումարը (3.2) ֆունկցիան է, որը $x=1$ կետում խզվում է:

Թեորեմ 3.1: Եթե

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in X \quad (3.3)$$

շարքի $u_n(x)$ անդամներն անընդհատ են X բազմության վրա և շարքը X -ի վրա զուգամիտում է հավասարաշափ, ապա շարքի գումարը՝ $f(x)$ ֆունկցիան, նոյնպես անընդհատ է X -ի վրա:

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար այս թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 3.1: Եթե

$$a) \ f_n \in C(X), \ n \in N, \quad p) \ f_n(x) \rightarrow f(x), \ x \in X,$$

ապա $f \in C(X)$:

► Վերցնենք կամայական $x_0 \in X$ կետ և ապացուցենք \int ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում: Ուսեն՝

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + \\ &+ |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|: \end{aligned} \quad (3.4)$$

p)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| < \varepsilon, \ x \in X: \quad (3.5)$$

a)-ից հետևում է, որ գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x - x_0| &< \delta \\ x \in X \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(x_0)| < \varepsilon: \quad (3.6)$$

Հաշվի առնելով (3.5)-ը և (3.6)-ը՝ (3.4)-ի մեջ կվերցնենք $n = n_1$ և կստանանք՝

$$\left. \begin{aligned} |x - x_0| &< \delta \\ x \in X \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon:$$

Թեորեմ 3.1'-ն ապացուցված է: ■

Թեորեմ 3.1-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.1'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$:

Թեորեմ 3.1-ը հակադարձնի է հետևյալ իմաստով.

Թեորեմ 3.2 (Դիճի): Եթե

a) $K \subset R$ կոմպակտ բազմություն է,

p) $u_n(x) \geq 0$, $u_n \in C(K)$ և

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in K \quad (3.7)$$

շարքը կետորեն զուգամես է,

q) $f \in C(K)$,

ապա (3.7) շարքը K -ի վրա հավասարաչափ զուգամես է:

Ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների համար Դինիի թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Թեորեմ 3.2': Եթե

a) $K \subset R$ կոմպակտ բազմություն է,

p) $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, $x \in K$, $n \in N$; $f_n \in C(K)$ և $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in K$,

q) $f \in C(K)$,

ապա

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in K : \quad (3.8)$$

► Աշանակենք $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$ և ապացուցենք, որ

$$\varphi_n(x) \rightarrow 0, \quad x \in K, \quad (3.9)$$

ինչը համարժեք է (3.8)-ին:

p)-ից հետևում է, որ $\varphi_n(x)$ -ը նվազելով K -ի վրա կետորեն ձգտում է 0-ի: Հետևաբար, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի և $x \in K$ կետի համար գոյություն ունի $n_x \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\varphi_{n_x}(x) < \varepsilon : \quad (3.10)$$

Քանի որ φ_{n_x} -ը անընդհատ ֆունկցիա է, ապա գոյություն ունի x կետի Δ_x շրջակայք, այնպիսին, որ (3.10) անհավասարությունը բավարարվի $\Delta_x \cap K$ բազմության վրա՝

$$t \in \Delta_x \cap K \Rightarrow \varphi_{n_x}(t) < \varepsilon :$$

$\{\Delta_x\}$ բաց միջակայքերի ընտանիքը ծածկում է K կոմպակտ բազմությունը, հետևաբար, Բորելի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի K -ի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $\Delta_{x_1}, \dots, \Delta_{x_p} : \quad \text{Նշանակենք}$

$n_0 = \max(n_{x_1}, \dots, n_{x_p})$: Այդ դեպքում, φ_n հաջորդականության նվազելու հաշվին, կստանանք՝

$$n > n_0 \Rightarrow \varphi_n(t) < \varepsilon, \quad t \in K,$$

ինչը համարժեք է (3.9)-ին: ■

Թեորեմ 3.2-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.2'-ի մեջ կվերցնենք

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) :$$

§1, կետ 1-ում բերված օրինակները ցույց են տալիս, որ եթե $\{u_k\}$ թեորեմի պայմաններից որևէ մեկը խախտվում է, ապա թեորեմի եզրակացությունը ճիշտ չէ:

2. Անդամ առ անդամ սահմանային անցում:

Թեորեմ 3.3: Դիցուք a -ն X բազմության կոտակման կետ է (որը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ $\pm \infty$): Եթե

$$a) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad շարքը հավասարաշափ զուգամետ է X -ի վրա,$$

$$b) \quad \text{գոյություն ունեն} \quad \lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = c_k, \quad k \in N \quad \text{վերջավոր սահմանները,}$$

ապա

$$1^0. \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k =: C \quad շարքը զուգամետ է,$$

$$2^0. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C,$$

կամ, որ նույնին է՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_k(x),$$

այսինքն՝ զումարի սահմանը հավասար է զումարելիների սահմանների զումարին:

Հաջորդականությունների լեզվով քեռեմ 3.3-ը վերաձևակերպվում է այսպիս.

Թեորեմ 3.3': $\text{Եթե } f_n(x) \rightarrow f(x), \quad x \in X,$

$$a) \quad f_n(x) \rightarrow f(x), \quad x \in X,$$

p) գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = C_n$ վերջավոր սահմանները, ապա

1^o. գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$ վերջավոր սահմանը,

2^o. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C,$

կամ, որ նոյնն է՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x):$$

► 1^o-ի ապացույցը: Կոչիի սկզբունքի համաձայն, a)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_{n+m}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in X, \quad m \in N:$$

Այստեղ n -ը և m -ը ֆիքսելով, իսկ x -ը ճշտեցնելով a -ի՝ թիվ $n_0(\varepsilon)$ շնորհիվ կստանանք

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |C_{n+m} - C_n| \leq \varepsilon, \quad m \in N$$

պայմանը: Այժմ, օգտվելով թվային հաջորդականությունների համար Կոչիի սկզբունքից, կստանանք 1^o-ը:

2^o-ի ապացույցը: Ունենք, որ

$$|f(x) - C| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - C_n| + |C_n - C|: \quad (3.11)$$

ա)-ից և 1^o-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| < \varepsilon, \quad x \in X \quad \text{և} \quad |C_{n_1} - C| < \varepsilon: \quad (3.12)$$

թիւից հետևում է, որ գոյություն ունի a -ի U շրջակայք այնպիսին, որ

* Այս քեռեմն անվանում են նաև հաջորդական սահմանների քեռեմ:

$$x \in X \cap U, \quad x \neq a \Rightarrow |f_{n_i}(x) - C_{n_i}| < \varepsilon : \quad (3.13)$$

(3.11)-ի մեջ վերցնելով $n = n_1$ և հաշվի առնելով (3.12), (3.13)-ը՝ կստանանք.

$$x \in X \cap U, \quad x \neq a \Rightarrow |f(x) - C| < 3\varepsilon : \blacksquare$$

Թեորեմ 3.3-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.3'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$: Այս դեպքում $C_n = \sum_{k=1}^n c_k$:

3. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ իմտեզրումը:

Թեորեմ 3.4: Եթե

ա) $u_n \in C[a, b]$, $n \in N$,

$$p) f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad շարքը \quad [a, b] \quad հասուլածի վրա \quad հավասարաշափ$$

զուգամետ է, ապա

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx : \quad (3.14)$$

Թեորեմ 3.4': Եթե

ա) $f_n \in C[a, b]$, $n \in N$, բ) $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$, ապա

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx , \quad (3.14')$$

կամ, որ նոյն է՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx :$$

Այս դեպքում ասում են, որ կարելի է սահմանային անցում կատարել իմտեզրալի նշանի տակ:

► (3.14')-ը ապացուցելու համար գնահատենք իմտեզրալների տարրերությունը: Նախ նկատենք, որ սահմանային ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն՝ $f \in C[a, b]$,

հետևաբար, (3.14)'-ի ձախս կողմի ինտեգրալը գոյություն ունի: Բացի դրանից, թ-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]:$$

Այդ դեպքում՝

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx \right| \leq \varepsilon(b-a): \blacksquare$$

Թեորեմ 3.4-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.4'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$: Այդ դեպքում

$$\int_a^b f_n(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx,$$

հետևաբար (3.14')-ը կընդունի (3.14) տեսքը:

Հակաօրինակ: §1, կետ 1-ում թերված օրինակ 2-ը ցույց է տալիս, որ այս թեորեմները կետորեն զուգամիտության դեպքում ճիշտ չեն:

Լրացում: Այս թեորեմներում ֆունկցիաների անընդհատության պայմանը կարելի է փոխարինել նրանց ինտեգրելի լինելու պայմանով: Դրանում համոզվելու համար բավական է ապացուցել հետևյալ պնդումը.

Լեմմա 3.1: Եթե ա) $f_n \in \mathfrak{R}[a, b]$, թ) $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$, ապա $f \in \mathfrak{R}[a, b]$:

► Դարբուի թեորեմի հետևանք 2-ի շնորհիվ բավական է ապացուցել, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $[a, b]$ հատվածի տրոհում՝ $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f) \Delta x_i < \varepsilon : \tag{3.15}$$

թ-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon_1 > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1 \in N$, այնպիսին, որ

$$\left|f_{n_1}(x) - f(x)\right| < \varepsilon_1, \quad x \in [a, b]: \quad (3.16)$$

այսից հետևում է, որ գոյություն ունի $[a, b]$ -ի սրբում՝
 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$, այնպիսին, որ

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f_{n_1}) \Delta x_i < \varepsilon_1: \quad (3.17)$$

(3.16)-ից հետևում է, որ եթե $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$, ապա

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x) - f_{n_1}(y)| + \\ &+ |f_{n_1}(y) - f(y)| \leq 2\varepsilon_1 + \omega_i(f_{n_1}), \end{aligned}$$

որտեղից էլ՝ $\omega_i(f) \leq 2\varepsilon_1 + \omega_i(f_{n_1})$: Այժմ, հաշվի առնելով (3.17)-ը,
կստանանք՝

$$\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f) \Delta x_i < 2\varepsilon_1(b-a) + \varepsilon_1:$$

Մնում է ε_1 -ն ընտրել այնպիս, որ բավարարվի $2\varepsilon_1(b-a) + \varepsilon_1 < \varepsilon$
անհավասարությունը: ■

4. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցումը:

Թեորեմ 3.5: Եթե

ա) $u_n(x)$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են՝ $u'_n \in C[a, b]$,

$$p) \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), \quad x \in [a, b] \text{ շարքը կետորեն զուգամետ է,}$$

$$q) \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \quad x \in [a, b] \text{ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է,}$$

ապա f ֆունկցիան դիֆերենցելի է և $f'(x) = g(x)$, $x \in [a, b]$ կամ, որ
նույնն է՝

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \quad x \in [a, b]:$$

Զեակերպենք այս թեորեմը հաջորդականությունների լեզվով.

Թեորեմ 3.5': Եթե

- w) $f'_n \in C[a, b]$,
- p) $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$,
- q) $f'_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [a, b]$,

ապա f -ը դիմերենցելի է և $f'(x) = g(x)$, $x \in [a, b]$ կամ, որ նոյնին է՝

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) :$$

► Դիցուք՝ $x \in [a, b]$: Օգտվելով նախ Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից, այնուհետև կատարելով սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ*, կստանանք.

$$f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f'_n(t) dt \rightarrow \int_a^x g(t) dt, \quad n \rightarrow \infty :$$

Մյուս կողմից՝ $f_n(x) - f_n(a) \rightarrow f(x) - f(a)$, $n \rightarrow \infty$: Հետևաբար, սահմանի միակության համաձայն,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b] :$$

Քանի որ թեորեմ 3.1'-ի համաձայն, $g \in C[a, b]$, ապա լսու փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի հատկության, f -ը դիմերենցելի է և $f'(x) = g(x)$, $x \in [a, b]$: ■

Թեորեմ 3.5-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.5'-ի մեջ կվերցնենք $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$:

Հակաօրինակ: Ուսենք՝ $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} \rightrightarrows 0 =: f(x)$, $x \in R$: Ուստի,

$f'(x) = 0$, $x \in R$: Սակայն $f'_n(x) = \sqrt{n} \cos nx$, որը չի ճգնառում $f'(x)$ -ին, օրինակ՝ $x_0 = 0$ կետում:

* Օգտվում ենք թեորեմ 3.4'-ից:

Ստորև ներկայացվող թեորեմները նախորդ երկու թեորեմների համապատասխան ընդհանրացումներն են:

Թեորեմ 3.6: Եթե

ա) u_k ֆունկցիաները դիֆերենցելի են X միջակայքում,

$$p) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ շարքը զուգամետ է մի որևէ } a \in X \text{ կետում,}$$

$$q) \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x) \text{ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է } X\text{-ում,}$$

ապա

$$1^0. f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \text{ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է յուրաքանչյուր } E \subset X \text{ սահմանափակ բազմության վրա,}$$

$$2^0. f -ը դիֆերենցելի է X -ում և $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \quad x \in X :$$$

Թեորեմ 3.6': Եթե

ա) f_n ֆունկցիաները դիֆերենցելի են X միջակայքում,

բ) Գոյություն ունի $a \in X$ կետ, այնպիսին, որ $f_n(a)$ հաջորդականությունը զուգամետ է,

գ) $f'_n(x)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է X միջակայքում,

ապա

1'. $f_n(x)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է յուրաքանչյուր $E \subset X$ սահմանափակ բազմության վրա՝

$$f_n(x) \rightharpoonup f(x), \quad x \in E,$$

$$2'. f -ը դիֆերենցելի է X միջակայքում և $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) :$$$

► 1'-ի ապացույցը: Նախ ապացույցինք, որ կամայական $x_0 \in X$ կետի համար

$$g_n(x) := \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \quad (3.18)$$

հաջորդականությունը հավասարաշափ զուգամետ է $X \setminus \{x_0\}$ բազմության վրա:

Կոչիի սկզբունքի համաձայն, q -ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0(\varepsilon) \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f'_{n+m}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in X, \quad m \in N: \quad (3.19)$$

Լազրանմի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն, գոյություն ունի $c \in X$ կետ, այնպիսին, որ

$$\begin{aligned} g_{n+m}(x) - g_n(x) &= \frac{f_{n+m}(x) - f_n(x) - [f_{n+m}(x_0) - f_n(x_0)]}{x - x_0} = \\ &= f'_{n+m}(c) - f'_n(c): \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով (3.19)-ը՝ կստանանք

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |g_{n+m}(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in X \setminus \{x_0\}, \quad m \in N,$$

հետևաբար, Կոչիի սկզբունքի համաձայն, g_n հաջորդականությունը հավասարաշափ զուգամետ է $X \setminus \{x_0\}$ բազմության վրա:

Այժմ, (3.18)-ի մեջ վերցնելով $x_0 = a$, կստանանք, որ $\left\{ \frac{f_n(x) - f_n(a)}{x - a} \right\}$

հաջորդականությունը հավասարաշափ զուգամետ է $X \setminus \{a\}$ բազմության վրա: Այդ հաջորդականության անդամները բազմապատկելով $x - a$ ֆունկցիայով (որը E -ի վրա սահմանափակ է), կստանանք E -ի վրա հավասարաշափ զուգամետ հաջորդականություն՝ $f'_n(x) - f'_n(a)$: Հաշվի առնելով բ) պայմանը՝ կստանանք 1^0 -ը:

2^0 -ի պացուցյալ: Թեորեմ 3.3-ի համաձայն, ամեն մի $x_0 \in X$ կետի համար ունենք՝

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0), \end{aligned}$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Թեորեմ 3.6-ն ապացուցելու համար թեորեմ 3.6'-ի մեջ կվերցնենք

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) :$$

Հակաօրինակ: 'Կիցոր' $f_n(x) = e^{-\frac{n}{x}}$, $x \in (0, \infty)$: Այդ դեպքում

$$f'_n(x) = \frac{n}{x^2} e^{-\frac{n}{x}} = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{x} \right)^2 e^{-\frac{n}{x}} \rightarrow 0, \quad x \in (0, \infty),$$

որովհետև $0 < t^2 e^{-t} \leq M$, $t \in (0, \infty)$:

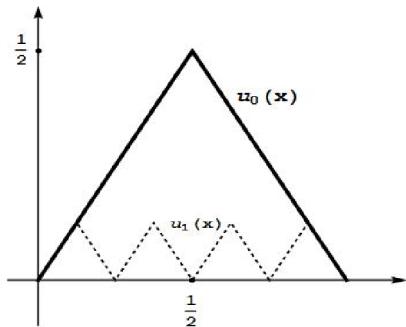
Սակայն $f_n(x) \rightarrow 0$, $x \in (0, \infty)$ զուգամիտությունը հավասարաչափ չէ, որովհետև $f_n(n) = e^{-1}$: Այսպիսով, E բազմության սահմանափակ լինելու պայմանն էական է:

Ընթերցողին առաջարկում ենք ինքնուրույն ստուգել նաև բ) պայմանի անհրաժեշտությունը:

5. Վաճ դեր Վարդենի օրինակը: Կառուցենք ֆունկցիայի օրինակ, որը անընդհատ է R -ում, բայց ոչ մի կետում դիֆերենցելի չէ: Յուրաքանչյուր $x \in R$ կետի համար նշանակենք՝

$$u_0(x) = d(x, \mathbb{Z}),$$

որը x կետի հեռավորությունն է ամբողջ թվերի բազմությունից: $u_0(x)$ -ը 1 պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է, որի գրաֆիկն ունի հետևյալ տեսքը.



Այնուհետև նշանակենք՝

$$u_k(x) = \frac{u_0(4^k x)}{4^k} \quad \text{և} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) :$$

Վայերշտրասի հայտանիշի համաձայն, այս շարքը հավասարաչափ զուգամետ է R -ի վրա, հետևաբար, $f \in C(R)$:

Վերցնենք կամայական $x_0 \in R$ կետ և ապացուցենք, որ այդ կետում f -ը դիֆերենցելի չէ: Նախ նկատենք, որ յուրաքանչյուր n -ի համար գոյություն ունի միակ $s_n \in \mathbb{Z}$ կետ, այնպիսին, որ

$$x_0 \in \left[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n} \right] =: \Delta_n :$$

Այսուհետև, $x_n \in \Delta_n$ կետն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի

$$|x_n - x_0| = \frac{1}{4^{n+1}}$$

հավասարությունը: Քանի որ $\frac{1}{4^k}$ թիվը u_k -ի պարբերություն է, ապա

$$k > n \Rightarrow u_k(x_n) = u_k(x_0) :$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=1}^n (\pm 1) =: z_n :$$

Քանի որ զոյլ n -ի դեպքում z_n -ը զոյլ է, իսկ կենտ n -ի դեպքում՝ կենտ, ապա z_n -ը զուգամետ չէ: Դա նշանակում է, որ f ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի չէ (վերջավոր ածանցյալ չունի), ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

§4. ԱՍՏԻճԱՆԱՅԻՆ ՇԱՐՔԵՐ

Ֆունկցիոնալ շարքի պարզագույն օրինակ է հանդիսանում

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

աստիճանային շարքը: Այդպիսի շարքի կետորեն զուգամիտությունը մենք ուսումնասիրել ենք նախորդ գլխում և ստացել ենք այդ շարքի զուգամիտության շառավղի հաշվման Կոշի – Հաղամարի բանաձևը՝

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}:$$

Ասպարուցել ենք, որ (IX, թեորեմ 5.1) $|x| < R$ պայմանին բավարարող

կետերում $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ $|x| > R$ պայմանին բավարարող կետերում այն տարամետ է:

Ստորև մենք կուսումնասիրենք $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքի հավասարաչափ

զուգամիտությունը և նրա զումարի ֆունկցիոնալ հատկությունները՝ անընդհատությունը, դիֆերենցիալությունը և այլն:

1. Արելի թեորեմները:

Թեորեմ 4.1 (Արելի առաջին թեորեմ): Եթե $R > 0$ և

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (4.1)$$

ապա $f \in C(-R, R)$:

Այս թեորեմը բխում է հետևյալ լեմմայից.

Լեմմա 4.1 (Արել): Եթե $R > 0$ և $0 < r < R$, ապա (4.1) շարքը $[-r, r]$ հասվածում նորմալ զուգամետ է, այսինքն՝ շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքը հավասարաչափ զուգամետ է*:

► Նախ նկատենք, որ

$$|x| \leq r \Rightarrow |a_n x^n| \leq |a_n| r^n : \quad (4.2)$$

Քանի որ $\sum |a_n r^n|$ շարքը զուգամետ է, ապա Վայերշտրասի մաժորանուվ հայտանիշի լրացման համաձայն, $[-r, r]$ -ում (4.1) շարքը նորմալ զուգամետ է: ■

* Կոշիի սկզբունքի համաձայն, այն կլինի նաև հավասարաչափ զուգամետ:

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► **Վերջնենք կամայական $x_0 \in (-R, R)$ կետ և ապացույցենք, որ \int -ը x_0 կետում անընդհատ է:** Այդ նպատակով ընտրենք $|x_0| < r < R$ պայմանին բավարարող որևէ r թիվ: Լեմմայի համաձայն, (4.1)-ը $[-r, r]$ -ում հավասարաչափ գուգամետ է, ուստի նրա գումարը՝ $f(x)$ -ը, անընդհատ է $[-r, r]$ -ում, որովհետև այդ հատվածում շարքի անդամներն անընդհատ են: ■

Թեորեմ 4.2 (Արելի երկրորդ թեորեմ): Եթե $0 < R < \infty$ և (4.1) շարքը $x = R$ կետում գուգամետ է, ապա այն $[0, R]$ հատվածում գուգամիտում է հավասարաչափ, և նրա \int գումարը R կետում ձախից անընդհատ է՝

$$\lim_{x \rightarrow R^-} f(x) = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n : \quad (4.3)$$

► Ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհատության մասին թեորեմի համաձայն, բավական է ապացույցել, որ (4.1)-ը $[0, R]$ հատվածում գուգամիտում է հավասարաչափ:

Ունենք՝

$$a_n x^n = a_n R^n \left(\frac{x}{R} \right)^n, \quad x \in [0, R]:$$

Քանի որ (4.3) շարքը գուգամետ է, իսկ $b_n(x) = \left(\frac{x}{R} \right)^n$ հաջորդականությունը յուրաքանչյուր $x \in [0, R]$ կետի համար ըստ n -ի նվազող է և հավասարաչափ սահմանափակ է $[0, R]$ հատվածում, ապա, Արելի հայտանիշի համաձայն, (4.1) շարքը $[0, R]$ -ում գուգամիտում է հավասարաչափ: ■

Օրինակ: Արելի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ շարքը $[0, 1]$

հատվածում գուգամիտում է հավասարաչափ: Բացի դրանից, Կոշի – Հա-

դամարի բանաձևի համաձայն, այդ շարքը $[0,1)$ միջակայքում բացարձակ գուգամետ է: Ուստի, այդ շարքը $[0,1)$ միջակայքում բացարձակ և հավասարաչափ գուգամետ է, քայլ նորմալ գուգամետ չէ: Իսկապես՝

$$\sum \frac{x^n}{n} \text{ շարքը } [0,1) \text{ միջակայքում հավասարաչափ գուգամետ չէ:}$$

Հակառակ դեպքում, անդամ առ անդամ սահմանային անցման թեորեմի համաձայն, կստացվեր, որ $\sum \frac{1}{n}$ շարքը գուգամետ է, ինչը հակասություն է:

Թեորեմ 4.3 (Արելի թեորեմը շարքերի Կոշիի արտադրյալի վերաբերյալ):

$$\text{Եթե } \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A, \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B \text{ և } \sum_{n=0}^{\infty} c_n = C \text{ շարքերը գուգամետ են, որտեղ}$$

երրորդ շարքը նախորդ երկուսի Կոշիի արտադրյալն է, ապա

$$C = AB : \quad (4.4)$$

► Դիտարկենք

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad g(x) = \sum b_n x^n, \quad h(x) = \sum c_n x^n$$

աստիճանային շարքերը: Եթե դրանց գուգամիտության շառավիղները նշանակենք համապատասխանաբար R_1, R_2 և R_3 , ապա Կոշի - Հարամարի բանաձևի համաձայն, $R_i \geq 1$ և այդ շարքերը $|x| < 1$ պայմանին բավարարող կետերում բացարձակ գուգամետ են: Հետևաբար, Կոշիի թեորեմի համաձայն (IX, թեորեմ 4.5)՝

$$h(x) = f(x)g(x), \quad |x| < 1: \quad (4.5)$$

Մյուս կողմից, Արելի երկրորդ թեորեմի համաձայն՝

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = B, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = C,$$

ուստի, (4.5) հավասարությունում անցնելով սահմանի, երբ $x \rightarrow 1^-$, կստանանք (4.4)-ը: ■

2. Տառիքերի թեորեմը:

Թեորեմ 4.4: Եթե

$$a) na_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$p) f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \rightarrow A, \text{ if } x \rightarrow 1-, \text{ and}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A :$$

► Վերցնենք՝ $0 \leq x < 1$ և $N = \left\lceil \frac{1}{1-x} \right\rceil$: Բավական է ապացուցել, որ

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n \rightarrow 0, \text{ if } x \rightarrow 1-$$

այսինքն՝

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^N a_n (1-x^n) \rightarrow 0, \text{ if } x \rightarrow 1-$$

Այդ գումարները նշանակենք S_1 և S_2 : ա)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի N_1 բնական թիվ, այնպիսին, որ $n > N_1 \Rightarrow |na_n| < \varepsilon$: Այդ դեպքում, վերցնելով $N = N_1$, կստանանք

$$|S_1| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} na_n \frac{x^n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} x^n < \frac{\varepsilon}{(N+1)(1-x)} < \varepsilon :$$

S_2 -ը զնահատելու համար օգտագործենք

$$1 - x^n = (1-x)(1+x + \cdots + x^{n-1}) < n(1-x),$$

անհավասարությունը, որտեղից՝

$$|S_2| < (1-x) \sum_{n=0}^N n |a_n| \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n |a_n| :$$

Կոչին թերեմի համաձայն (II, հետևանք թերեմ 2.2-ից)`
 $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N n |a_n| \rightarrow 0$, եթե $N \rightarrow \infty$, ուստի, եթե N -ը բավականաշափ մեծ է,

այսինքն՝ x -ը ճախից բավականաշափ մոտ է 1-ին, ապա $|S_2| < \varepsilon$, որի արդյունքում էլ՝ $|S_1 - S_2| < 2\varepsilon$: Թերեմն ապացուցված է: ■

Առանց ա) պայմանի Տառրերի թեորեմը ճիշտ չէ:

$$\text{Օրինակ: } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \rightarrow \frac{1}{2}, \text{ եթե } x \rightarrow 1, \text{ բայց } \sum (-1)^n$$

շարքը տարամետ է:

3. Աստիճանային շարքի ինտեգրումը և ածանցումը:

Թեորեմ 4.5: Եթե

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը դրական է՝ $R > 0$, և $|x| < R$, ապա $[0, x]$ հատվածում այդ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել՝

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \\ &= x \left(a_0 + \frac{a_1}{2} x + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^n + \cdots \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ապացույցը հետևում է Արելի առաջին թեորեմից և ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրման թեորեմից:

Լրացում 1: Եթե աստիճանային շարքը զուգամիտում է նաև զուգամիտության միջակայքի R ծայրակետում, ապա Արելի երկրորդ թեորեմից հետևում է, որ այդ շարքը կարելի է անդամ առ անդամ ինտեգրել նաև $[0, R]$ -ում:

Լրացում 2: Քանի որ $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, ապա, Կոշի - Հադամարի բանաձևի համաձայն, (4.6) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը նույնականացնելու հավասար է R -ի:

Թեորեմ 4.6: Եթե (4.1) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը դրական է՝ $0 < R \leq \infty$, ապա $(-R, R)$ միջակայքում f -ը դիմումային է և

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots, \quad x \in (-R, R): \quad (4.7)$$

► Քանի որ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|na_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

ապա, Կոչի – Հադամարի բանաձևի համաձայն*, (4.7) աստիճանային շարքի զուգամիտության շառավիղը նույնպես R -ն է:

Վերցնենք կամայական $x_0 \in (-R, R)$ և (4.7)-ը ապացուցենք x_0 կետում: Դրա համար վերցնենք՝ $r \in (|x_0|, R)$: Արելի լեմմայի համաձայն, (4.7)-ը $[-r, r]$ հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ: Ուստի, ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցման թեորեմի համաձայն, f -ը $[-r, r]$ հատվածում դիֆերենցելի է և այդ հատվածում տեղի ունի (4.7)-ը: ■

Դիտողություն: $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ շարքը զուգամիտության միջակայ-

քի $x=1$ ծայրակետում զուգամիտում է, բայց այդ կետում (4.7)-ը ճիշտ չէ, որովհետև ածանցված շարքը $x=1$ կետում տարամիտում է:

Օրինակներ:

$$1^0. \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \cdots, \quad |x| < 1 \quad \text{շարքն ինտեգրելով}$$

$[0, x]$ հատվածում՝ կստանանք.

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots : \quad (4.8)$$

Քանի որ (4.8)-ը $x=1$ կետում նույնպես զուգամիտում է և $\ln(1+x)$ ֆունկցիան անընդհատ է 1 կետում, ապա, Արելի երկրորդ թեորեմի համաձայն, կստանանք

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]:$$

* $a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{x} (a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + n a_n x^n + \cdots)$:

$$2^0. \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^{n-1} x^{2(n-1)} + \cdots, \quad |x| < 1, \quad \text{շարքն}$$

ինտեգրելով, կստանանք

$$\arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, \quad |x| < 1: \quad (4.9)$$

Քանի որ ստացված շարքը զուգամիտում է նաև $x = \pm 1$ կետերում, և \arctgx ֆունկցիան անընդհատ է այդ կետերում, ապա, Արելի երկրորդ թեորեմի համաձայն, (4.9) վերլուծությունը տեղի ճիշտ կլինի նաև այդ կետերում:

$$3^0. \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n, \quad |x| < 1,$$

բինոմական շարքի մեջ x -ը փոխարինելով $-x^2$ -ով՝ կստանանք.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad |x| < 1:$$

Այս շարքը $[0, x]$ հասվածում ինտեգրենք.

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}:$$

Քանի որ շարքը զուգամիտում է նաև $x = \pm 1$ կետերում (ըստ Ռաբեի հայտանիշի), ապա վերլուծությունը ճիշտ է նաև այդ կետերում:

4. Աստիճանային շարք՝ որպես Թեյլորի շարք: Դիտարկենք

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

աստիճանային շարքը, որի զուգամիտության շառավիղը դրական է՝ $0 < R \leq \infty$:

Քանի որ աստիճանային շարքը անդամ առ անդամ ածանցելիս զուգամիտության շառավիղը չի փոխվում, ապա, կիրառելով նախորդ թեորեմը և մաքեմատիկական ինդուկցիա, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ շարքը $(-R, R)$

միջակայքում կարող ենք ածանցել k անգամ: Արդյունքում կստանանք

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (x^n)^{(k)}, \quad x \in (-R, R), \quad k \in N, \quad (4.10)$$

որովհետև $n < k \Rightarrow (x^n)^{(k)} = 0$:

Այնուհետև, (4.10)-ի մեջ տեղադրելով $x = 0$, և հաշվի առնելով

$$(x^n)^{(k)} \Big|_{x=0} = \begin{cases} k!, & n = k \\ 0, & n > k \end{cases}$$

հավասարությունը, կստանանք

$$f^{(k)}(0) = a_k k!,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots :$$

Այսպիսով, ապացուցվեց հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 4.7: Աստիճանային շարքի գումարը $(-R, R)$ միջակայքում անվերջ դիֆերենցելի է, և աստիճանային շարքն իր գումարի Թեյլորի շարքն է:

§5. ՎԱՅԵՐԸՏՐԱՍԻ ԹԵՈՐԵՄԸ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ՍՈՏԱՐԿՍԱՆ ՍԱՄԲՆ

Թեորեմ 5.1: Եթե f ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում, ապա գոյություն ունի P_n բազմանդամների հաջորդականություն, որը $[a, b]$ հատվածում հավասարաչափ գուգամիտում է f ֆունկցիային:

1. Լանդաուի ապացույցը: Լրացուցիչ ենթադրություններ՝

ա) Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք համարել, որ $[a, b] = [0, 1]$:

Իրոք, եթե թեորեմը $[0, 1]$ հատվածի համար ճիշտ է և

$$P_n(y) \rightarrow f(a + (b - a)y), \quad y \in [0, 1],$$

ապա

$$P_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \rightarrow f(x), \quad x \in [a, b]:$$

բ) Բավական է թեորեմն ապացուցել

$$f(0)=f(1)=0 \quad (5.1)$$

լրացուցիչ պայմանի դեպքում:

Իրոք, եթե (5.1) պայմանի առկայության դեպքում թեորեմը ճիշտ է, ապա գոյություն ունի P_n բազմանդամների հաջորդականություն, որը $[0,1]$ հատվածում հավասարաչափ գուգամիտում է

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)]$$

ֆունկցիային՝ $P_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $x \in [0,1]$:

Այդ դեպքում $P_n(x)+f(0)+x[f(1)-f(0)] \rightrightarrows f(x)$, $x \in [0,1]$:

գ) Ենթադրենք, որ (5.1) պայմանը բավարարվում է: $[0,1]$ հատվածից դուրս $f(x)$ -ը համարենք զրո՞ն՝ $f(x)=0$, $x \in R \setminus [0,1]$: Այսպես շարունակված f ֆունկցիան ամբողջ թվային առանցքի վրա կլինի հավասարաչափ անընդհատ:

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► Նշանակենք՝

$$Q_n(t)=c_n(1-t^2)^n, \quad n=1,2,\dots,$$

$$\text{որտեղ } c_n=\left\{\int_{-1}^1(1-t^2)^ndt\right\}^{-1}, \quad n=1,2,\dots:$$

Նկատենք, որ $c_n < \sqrt{n}$: Իսկապես, թեորեմովի անհավասարության համաձայն, ունենք՝

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1(1-t^2)^ndt &= 2\int_0^1(1-t^2)^ndt \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-t^2)^ndt \geq \\ &\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}(1-nt^2)dt = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}: \end{aligned}$$

Այսպիսով, Q_n -ը օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1⁰. $Q_n(t) \geq 0$, $t \in [-1,1]$, $n \in N$:

$$2^0. \int_{-1}^1 Q_n(t) dt = 1, \quad n \in N:$$

3⁰. Յուրաքանչյուր $0 < \delta < 1$ թվի համար $Q_n(t) \rightarrow 0$, եթե $\delta \leq |t| \leq 1$:

Վերջին հատկությունը հետևում է $Q_n(t) \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n$, $\delta \leq |t| \leq 1$, անհավասարությունից:

Այժմ նշանակենք՝

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad (5.2)$$

գ)-ի համաձայն,

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t) dt,$$

որտեղից էլ, կատարելով փոփոխականի փոխարինում, կստանանք

$$P_n(x) = \int_0^1 f(t) Q_n(t-x) dt, \quad x \in [0,1]$$

ներկայացումը, ինչից երևում է, որ P_n -ը բազմանդամ է: Ապացուցենք, որ

$$P_n(x) \rightarrow f(x), \quad x \in [0,1]:$$

2⁰-ից և (5.2)-ից կստանանք՝

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^1 [f(x+t) - f(x)] Q_n(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1: \quad (5.3)$$

գ)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|t| \leq \delta \Rightarrow |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon:$$

Այդ դեպքում, (5.3)-ից կունենանք՝

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\leq \int_{|t| \leq \delta} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt + \\ &+ \int_{\delta \leq |t| \leq 1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t) dt \leq \varepsilon \int_{|t| \leq \delta} Q_n(t) dt + 4M \max_{\delta \leq |t| \leq 1} Q_n(t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

որտեղ $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$:

3^0 -ի համաձայն, ֆիքսված δ -ի համար գոյություն ունի n_0 , այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow \max_{\delta \leq |t| \leq 1} Q_n(t) < \varepsilon : \quad (5.5)$$

2^0 -ից, (5.4)-ից և (5.5)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բարեկայի համար գոյություն ունի n_0 բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| < \varepsilon + 4M\varepsilon, \quad x \in [0,1] :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

2. Բեռնշտեյնի ապացույցը:

Նախ ապացուցենք հետևյալ նույնությունները.

$$\sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (5.6)$$

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) : \quad (5.7)$$

Այդ նպատակով դիտարկենք Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը՝

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n : \quad (5.8)$$

Այստեղ տեղադրենք $p = x$, $q = (1-x)$, կստանանք (5.6)-ը:

Այնուհետև, (5.8)-ի երկու կողմք ածանցենով ըստ p -ի, կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k p^{k-1} q^{n-k} = n(p+q)^{n-1} :$$

Այս հավասարության երկու կողմքը բազմապատկելով p -ով՝ կստանանք

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} : \quad (5.9)$$

հավասարությունը: Այստեղ տեղադրենք $p = x$, $q = (1-x)$, կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^n k C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx : \quad (5.10)$$

Այժմ, (5.9)-ի երկու կողմը ածանցենով ըստ p -ի, կստանանք՝

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k p^{k-1} q^{n-k} = n \left[(p+q)^{n-1} + p(n-1)(p+q)^{n-2} \right]:$$

Այս հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով p -ով և ստացված հավասարության մեջ տեղադրելով $p = x$, $q = 1 - x$ ՝ կստանանք.

$$\sum_{k=0}^n k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx \left[1 + (n-1)x \right]: \quad (5.11)$$

Այժմ, եթե (5.6)-ի երկու կողմը բազմապատկենք $n^2 x^2$ -ով, իսկ (5.10)-ինը՝ $-2nx$ -ով, և ստացված հավասարությունները գումարենք (5.11)-ին, կստանանք (5.7)-ը:

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► Նշանակենք՝

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]: \quad (5.12)$$

B_n -ը բազմանդամ է, որի աստիճանը չի գերազանցում n -ը:
Ապացույցենք, որ B_n -ը $[0,1]$ -ում հավասարաչափ ճշտում է f -ին*: Այդ նպատակով (5.6)-ի երկու կողմը բազմապատկենք $f(x)$ -ով և ստացվածից հանենք (5.12)-ը՝

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0,1]: \quad (5.13)$$

Քանի որ $f \in C[0,1]$, այս, Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left| x - y \right| < \delta \quad \left. \Rightarrow \left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon : \quad (5.14) \right. \\ x, y \in [0,1]$$

* Այստեղ ևս գործում ենք նախորդ կետի ա) լրացուցիչ ենթադրությամբ:

Վերցնելով (5.14) պայմանին քավարարող ֆիքսած δ ՝ (5.13)-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} + \\ &+ \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

որտեղ $M = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$:

Մյուս կողմից ունենք՝

$$\begin{aligned} \sum_{\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &\leq \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{(k-nx)^2 \geq \delta^2 n^2} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leq \\ &\leq \frac{1}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{nx(1-x)}{\delta^2 n^2}: \end{aligned} \quad (5.16)$$

որտեղ վերջին քայլում օգտվեցինք (5.7)-ից: Քանի որ $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$,

$x \in [0,1]$, ապա թեորեմի պնդումը հետևում է (5.15)-ից և (5.16)-ից: ■

XII ԳԼՈՒԽ

ԱՆԻՄԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐՈՎ ԱՆԻՄԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Անվերջ սահմաններով ինտեգրալների սահմանումը:

Դիցուք՝ $f : [a, \infty) \rightarrow R$ և յուրաքանչյուր $A > a$ թվի համար f -ն ինտեգրելի է $[a, A]$ հատվածում՝ $f \in \mathfrak{R}[a, A] : \int_a^A f(x) dx$ Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx \quad (1.1)$$

սահմանը, ապա այն կոչվում է $\int_a^\infty f(x) dx$ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ a -ից ∞ (կամ $[a, \infty)$ -ում) և նշանակվում է

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad (1.2)$$

սխմվողվ: Ընդ որում, եթե (1.1) սահմանը վերջավոր է, ապա $\int_a^\infty f(x) dx$ կոչվում է ինտեգրելի $[a, \infty)$ -ում և (1.2) անիսկական ինտեգրալը կոչվում է $զուգամետ$, իսկ եթե (1.1) սահմանը գոյություն չունի կամ $\pm \infty$ է, ապա (1.2) ինտեգրալը կոչվում է **տարածետ**:

Օրինակ: $\int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^A = \arctg A \rightarrow \frac{\pi}{2}$, եթե $A \rightarrow \infty$, հետևաբար,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} :$$

Նման ձևով է սահմանվում $\int_a^\infty f(x) dx$ ֆունկցիայի ինտեգրալը $(-\infty, a]$ և $(-\infty, \infty)$ միջակայքերում՝

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x) dx \quad (A' < a), \quad (1.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A' \rightarrow -\infty \\ A' \rightarrow +\infty}} \int_{A'}^A f(x)dx : \quad (1.4)$$

(1.2) ինտեգրալի վերաբերյալ ընդունված տերմինները օգտագործվում են նաև (1.3) և (1.4) ինտեգրալների համար:

Քանի որ

$$\int_{A'}^A f(x)dx = \int_{A'}^a f(x)dx + \int_a^A f(x)dx , \quad A' < a < A ,$$

ապա (1.4) սահմանի գոյությունը համարժեք է (1.1) և (1.3) սահմանների միաժամանակյա գոյությանը* :

Հետևաբար, ինտեգրալը $(-\infty, \infty)$ միջակայքում կարելի է սահմանել նաև

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

հավասարության միջոցով, ընդունին, ազ կողմի գումարը a -ի ընտրությունից կախված չէ:

$$\text{Օրինակներ: } \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A' \rightarrow -\infty} (-\arctg A') = \frac{\pi}{2} :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi :$$

2. Ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձև: Եթե f ֆունկցիան անընդհատ է $[a, \infty)$ միջակայքում և F -ը նրա որևէ նախնական է, ապա ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևի համաձայն՝

$$\int_a^A f(x)dx = F(A) - F(a) = F(x)|_a^A :$$

Հետևաբար, (1.2) անիսկական ինտեգրալը գուգամետ է այն և միայն դեպքում, եթե գոյություն ունի

* Բացառություն է կազմում միայն այն դեպքը, եթե այդ սահմանները տարբեր նշանի անվերջներ են:

$$\lim_{A \rightarrow \infty} F(A) = F(\infty)$$

Վերջավոր սահմանը: Այդ դեպքում

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{\infty} :$$

$$\text{Հանգունորեն՝ } \int_{-\infty}^a f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} :$$

Օրինակ: Հաշվենք $\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx$ ինտեգրալը ($a > 0$): Այս դեպքում

$$(\text{տե՛ս V, §1, կետ 4}): F(x) = -\frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} : \text{ Պահի որ } F(\infty) = 0,$$

$$F(0) = -\frac{b}{a^2 + b^2}, \text{ ուստի}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2} :$$

Հանգունորեն՝

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx - a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \Big|_0^{\infty} = \frac{a}{a^2 + b^2} :$$

3. Անիսկական ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները:

Սուածիկայում մենք կսահմանափակենք (1.2) տեսքի ինտեգրալների դիտարկումով: Այդ տեսքի ինտեգրալների մասին ասված ամեն ինչ հեշտությամբ կարելի է տարածել մյուս դեպքերի վրա:

Անիսկական ինտեգրալների տեսությունը նման է թվային շարքերի տեսությանը, ուստի այստեղ մենք կօգտագործենք թվային շարքերի տեսության մեջ ընդունված տերմինները.

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx \quad (a < A) \tag{1.5}$$

ինտեգրալը կանվանենք (1.2) անիսկական ինտեգրալի մասնակի ինտեգրալ, իսկ

$$\int\limits_A^{\infty} f(x)dx \quad (a < A) \quad (1.6)$$

ինտեգրալը՝ (1.2) անիսկական ինտեգրալի մնացորդ կամ պոչ:

Թվարկենք անիսկական ինտեգրալների պարզագույն հատկությունները՝ ապացույցները թողնելով ընթերցողին*:

1^{0.}. Որպեսզի $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ անիսկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անիրաժեշտ է և բավարար, որ որևէ A -ի համար զուգամիտի (1.6) անիսկական ինտեգրալը (պոչը), ընդունի:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \int\limits_a^A f(x)dx + \int\limits_A^{\infty} f(x)dx :$$

2^{0.}. Եթե $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը զուգամետ է, ապա $\lim_{A \rightarrow \infty} \int\limits_A^{\infty} f(x)dx = 0$:

Դիտողություն: $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտության դեպքում f ֆունկցիան կարող է չձգնել զրոյի, եթե $A \rightarrow \infty$: Օրինակ՝

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in N \\ 0, & x \notin N \end{cases} :$$

3^{0.}. Եթե $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ -ը զուգամետ է, ապա $\int\limits_a^{\infty} cf(x)dx$ ինտեգրալը ($c = const$) նույնպես զուգամետ է և

$$\int\limits_a^{\infty} cf(x)dx = c \int\limits_a^{\infty} f(x)dx :$$

4^{0.}. Եթե $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի հետ մեկտեղ զուգամետ է նաև $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ ինտեգրալը, ապա $\int\limits_a^{\infty} [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)dx \pm \int\limits_a^{\infty} g(x)dx$:

* Ապացույցները նման են թվային շարքերի համապատասխան հատկությունների ապացույցներին:

4. Դրական ֆունկցիայի ինտեգրալի զուգամիտությունը*: Եթե $f(x) \geq 0$,

ապա

$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$

ֆունկցիան $[a, \infty)$ միջակայքում աճող է (լայն իմաստով), ուստի այդ ֆունկցիայի սահմանի հարցը, եթե $A \rightarrow \infty$, այսինքն՝ (1.2) ինտեգրալի զուգամիտության հարցը, լուծվում է մոնուռն ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թերեմի միջոցով: Վերածնակերպելով այդ թերեմը (1.2) անխսկական ինտեգրալի համար՝ կստանանք հետևյալ արդյունքը:

Թեորեմ 1.1: Եթե $f(x) \geq 0$, ապա $\int_a^\infty f(x) dx$ անխսկական ինտեգրալի

զուգամիտության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ F ֆունկցիան լինի վերևից սահմանափակ: Եթե F ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ, (1.2) անխսկական ինտեգրալը $+\infty$ է:

Այս թերեմի միջոցով ապացուցվում են անխսկական ինտեգրալների բաղդատման հայտանիշները:

I հայտանիշ: Եթե զոյտրյուն ունի $A > a$ թիվ, այնպիսին, որ $x > A \Rightarrow f(x) \leq g(x)$, ապա $\int_a^\infty g(x) dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից

հետևում է $\int_a^\infty f(x) dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը:

II հայտանիշ: Եթե զոյտրյուն ունի

* Այս կետում դիտարկվող բոլոր ենթիմտեգրալ ֆունկցիաները ոչ բացասական են և ՈՒմանի իմաստով ինտեգրելի են յուրաքանչյուր $[a, A]$, $A > a$ հատվածում:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad 0 \leq K \leq \infty$$

սահմանը, ապա $K < \infty$ դեպքում $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտու-

թյունից հետևում է $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունը, իսկ $K > 0$

դեպքում $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալի զուգամիտությունից հետևում է $\int_a^{\infty} g(x)dx$

ինտեգրալի զուգամիտությունը:

Այսպիսով, $0 < K < \infty$ դեպքում երկու ինտեգրալները զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:

Այս հայտանիշների ապացույցները նման են թվային շարքերի վերաբերյալ համանման հայտանիշների ապացույցներին (և բողնվում են ընթերցողին):

Դիտարկենք համեմատումը $\frac{1}{x^{\lambda}}$ ֆունկցիայի հետ: Հեշտ է ստուգել, որ

$a > 0$ դեպքում այս ֆունկցիայի ինտեգրալը $[a, \infty)$ միջակայքում զուգամետ է, եթե $\lambda > 1$, և տարամետ է, եթե $\lambda \leq 1$: Ելնելով բաղդատման հայտանիշներից՝ ստացվում են հետևյալ պնդումները.

1⁰. Դիցուք $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^{\lambda}}$: Այդ դեպքում,

ա) եթե $\lambda > 1$ և $0 \leq \varphi(x) \leq c < \infty$, ապա $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը տարամետ է:

զուգամետ է,

բ) եթե $\lambda \leq 1$ և $\varphi(x) \geq c > 0$, ապա $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ինտեգրալը տարամետ է:

Որպես բաղդատման Ա հայտանիշի հետևանք, կստանանք հետևյալը.

2⁰. Եթե $f(x) \sim \frac{c}{x^\lambda}$, $x \rightarrow \infty$, որտեղ $c > 0$ ^{*}, ապա $\lambda > 1$

դեպքում $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ($a > 0$) ինտեգրալը զուգամետ է, իսկ $\lambda \leq 1$ դեպքում այն տարածեալ է:

Օրինակներ: 1) Դիտարկենք $\int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{1+x^2} dx$ և $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ ինտեգրալները:

Եթե $x \rightarrow \infty$, ենթիմտեգրալ ֆունկցիաները համապատասխանաբար $\lambda = \frac{1}{2}$ և $\lambda = 2$ կարգի անվերջ փոքրեր են, ուստի այդ ինտեգրալներից

առաջինը տարածետ է, իսկ երկրորդը՝ զուգամետ:

2) Դիտարկենք ռացիոնալ ֆունկցիայի անխւկական ինտեգրալը՝ $\int_a^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, որտեղ $P(x)$ -ը m աստիճանի բազմանդամ է, իսկ $Q(x)$ -ը

$n > m$ աստիճանի է, որը $[a, \infty)$ միջակայքում արմատ չունի:

Եթե $x \rightarrow \infty$, ենթիմտեգրալ ֆունկցիան $\lambda = n - m$ կարգի անվերջ փոքր է, հետևաբար, $n = m + 1$ դեպքում այդ ինտեգրալը տարածետ է, իսկ $n \geq m + 2$ դեպքում՝ զուգամետ:

5. Ինտեգրալի զուգամիտուրյունն ընդհանուր դեպքում:

Թեորեմ 1.2 (Կոչիի զուգամիտուրյան սկզբունքը): Որպեսզի

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

անխւկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար զոյլություն ունենա $E > a$ թիվ, այնպիսին, որ

$$A, A' > E \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon : \quad (1.7)$$

* Այլ կերպ ասած, f -ը $1/x$ -ի նկատմամբ λ կարգի անվերջ փոքր է:

► Քանի որ $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ մասնակի իմտեզրալի համար ճշմարիտ է

$$F(A') - F(A) = \int_A^{A'} f(x)dx$$

հավասարությունը, ուստի, կիրառելով F ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու վերաբերյալ Կոչիի սկզբունքը (II, §5, կետ 9), կստանանք (1.7)-ը:

■

Սառը ներկայացվող թեորեմները վերաբերում են

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx \quad (1.8)$$

տեսքի իմտեզրալներին:

Թեորեմ 1.3 (Արելի հայտանիշը): Եթե $\int_a^\infty f(x)dx$ իմտեզրալը գուգամետ է, իսկ g ֆունկցիան $[a, \infty)$ միջակայրում մոնոտոն է և սահմանափակ, ապա (1.8) իմտեզրալը գուգամետ է:

Թեորեմ 1.4 (Գիրիխսկի հայտանիշը): Եթե $F(A) = \int_a^A f(x)dx$ ֆունկցիան

սահմանափակ $[a, \infty)$ միջակայրում և $g(x) \downarrow 0$, եթե $x \rightarrow \infty$, ապա (1.8) իմտեզրալը գուգամետ է:

► Այս հայտանիշներն անմիջապես բխում են Կոչիի գուգամիտության սկզբունքից և միջին արժեքի երկրորդ թեորեմից (V, §7):

$$\int_A^{A'} f(x)g(x)dx = g(A) \int_A^\xi f(x)dx + g(A') \int_\xi^{A'} f(x)dx \quad (A \leq \xi \leq A'): \quad (1.9)$$

Երկու հայտանիշների պայմաններում էլ A -ն և A' -ը բավականաչափ մեծ ընտրելու դեպքում աջ կողմում գրված գումարելիները ցանկացած չափով փոքր են դառնում: Իրոք, Արելի հայտանիշի դեպքում (1.2) իմտեզրալը գուգամետ է, ուստի Կոչիի սկզբունքի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $E > a$ թիվ, այնպիսին, որ

$$A > E \Rightarrow \left| \int_A^{\xi} f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{\xi}^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon : \quad (1.10)$$

Բացի դրանից, g ֆունկցիան $[a, \infty)$ միջակայքում սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|g(x)| \leq M, \quad x \in [a, \infty) : \quad (1.11)$$

(1.9) - (1.11) առնչություններից հետևում է, որ

$$A, A' > E \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x) g(x) dx \right| < 2M\varepsilon ,$$

ինտեգրալ, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, (1.8) ինտեգրալը զուգամետ է:

Դիրիխլեի հայտանիշի դեպքում (1.9)-ի աջ կողմի գումարելիների մեջ առաջին արտադրիչներն են ծգողում գրոյի, իսկ երկրորդ արտադրիչները սահմանափակ են: ■

Օրինակ: Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն $\int_1^{\infty} \frac{\sin ax}{x^\lambda} dx$ և $\int_1^{\infty} \frac{\cos ax}{x^\lambda} dx$

ինտեգրալները $\lambda > 0$ և $a \neq 0$ պայմանների դեպքում զուգամետ են:

Իսկապես, $g(x) = \frac{1}{x^\lambda} \downarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$), իսկ

$$F(A) = \int_1^A \sin ax dx \text{ և } G(A) = \int_1^A \cos ax dx$$

ֆունկցիաները սահմանափակ են (սոուզեք ինքնուրույն):

6. Բացարձակ և պայմանական զուգամետ ինտեգրալներ:

Սահմանում: $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ինտեգրալը կոչվում է բացարձակ զուգամետ,

եթե $g(x)$ զուգամետ է

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx \quad (1.12)$$

իմտեգրալ:

Թեորեմ 1.5: Բացարձակ զուգամես իմտեգրալը նաև զուգամես է:

► Ապացույցը հետևում է իմտեգրալի անհավասարությունից՝

$$\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| \leq \int_A^{A'} |f(x)| dx \quad (A \leq A')$$

և Կոչիի զուգամիտության սկզբունքից: ■

Սահմանում: $\int_a^{\infty} f(x) dx$ իմտեգրալը կոչվում է պայմանական զուգամես, եթե a յա զուգամես է, իսկ $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ իմտեգրալը՝ տարամես:

Օրինակ: Դիտարկենք $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}} dx$, $0 < \lambda \leq 1$ իմտեգրալը: Ապացույցինք, որ այն պայմանական զուգամես է: Բաղդատման I հայտանիշի համաձայն, բավական է ապացույցել

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$$

իմտեգրալի տարամիտությունը:

Ապացույցինք հակասող ենթադրությամբ՝ $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx < \infty$: Քանի որ $\sin^2 x \leq |\sin x|$, ապա բաղդատման I հայտանիշի համաձայն՝

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx < \infty: \tag{1.12}$$

Մյուս կողմից՝ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, հետևաբար՝ $\frac{1}{2x} = \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos 2x}{2x}$:

Քանի որ աջ կողմում զրկած գումարելիների իմտեգրալները զուգամես են $[1, \infty)$ միջակայքում, որեմն $\frac{1}{2x}$ ֆունկցիայի իմտեգրալը նույնպես զուգամես է, ինչը հակասություն է:

Ինտեգրալների բացարձակ զուգամիտությունը ստուգելու համար օգտվում են բաղդատման հայտանիշներից:

Օրինակ: $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2} dx, a \in R$ ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է, քանի որ

$$\left| \frac{\sin ax}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2},$$

իսկ $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ ինտեգրալը զուգամետ է:

§2. ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՎԻԱԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Անսահմանավակ ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $[a,b)$ վերջավոր միջակայքում, անսահմանավակ է b կետի շրջակայքում և յուրաքանչյուր $\eta \in (a,b)$ թվի համար ինտեգրելի է $[a,\eta]$ հատվածում՝

$$f \in \mathfrak{R}[a,\eta] : \text{Նշանակենք } F(\eta) = \int_a^{\eta} f(x) dx : \text{Եթե } \lim_{\eta \rightarrow b^-} F(\eta) \quad (2.1)$$

սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալ $[a,b)$ միջակայքում և նշանակվում է

$$\int_a^b f(x) dx \quad (2.2)$$

սիմվոլով: Ըստ որում, եթե (2.1) սահմանը վերջավոր է, ապա (2.2) ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ* և f -ը կոչվում է ինտեգրելի $[a,b)$ -ում:

* Եթե f -ը սահմանավակ է $[a,b)$ -ում, ապա այդ սահմանը գոյություն ունի և հավասար է f -ի որոշյալ ինտեգրալին (տես V, §3): Նոր իրավիճակ կլինի միայն այն դեպքում, եթե f -ը $[a,b)$ -ում լինի անսահմանավակ:

Իսկ եթե (2.1) սահմանը գոյություն չունի կամ $\pm \infty$ է, ապա (2.2) ինտեգրալը կոչվում է **տարամետ:**

$$\text{Օրինակ: } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 1} \int_0^\eta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 1} \arcsin \eta = \frac{\pi}{2} :$$

Հանգունորեն սահմանվում է նաև f ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալը $(a, b]$ միջակայքում, եթե f ֆունկցիան անսահմանափակ է a կետի շրջակայքում: Այս դեպքում նույնպես անիսկական ինտեգրալը նշանակվում է (2.2) սիմվոլով: Այդ երկու դեպքերը տարբերելու համար առաջին դեպքում ասում են, որ (2.2) ինտեգրալի **եզակիության կետը** b -ն է,

$$\text{իսկ երկրորդ դեպքում՝ } a\text{-ն:} \text{ Այս տերմինը օգտագործվում է նաև } \int_a^\infty \text{ և } \int_{-\infty}^a$$

ինտեգրալների համար՝ առաջին դեպքում ասում են, որ ինտեգրալի **եզակիության կետը** ∞ -ն է, իսկ երկրորդ դեպքում՝ $-\infty$ -ը:

Այսպիսով,

$$\int_a^\omega f(x) dx$$

ինտեգրալում ω վերին սահմանը ($|\omega| < \infty$) կոչվում է այդ ինտեգրալի **եզակիություն կամ եզակիության կետ**, եթե f ֆունկցիան ω -ի շրջակայքում անսահմանափակ է: Հանգունորեն,

$$\int_\omega^b f(x) dx$$

ինտեգրալում ω ստորին սահմանը կոչվում է այդ ինտեգրալի **եզակիություն**, եթե ω -ի շրջակայքում f ֆունկցիան անսահմանափակ է: Եթե $|\omega| = \infty$, ապա ω -ն կանվանենք **եզակիություն՝ անկախ f -ի վարքից**:

$$\text{Օրինակներ: } \text{ա) } \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow -1} \int_{\eta}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow -1} (-\arcsin \eta) = \frac{\pi}{2},$$

թ) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ինտեգրալում առկա է երկու եզակիության կետ՝ -1-ը և 1-ը.

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 + \int_0^1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi :$$

զ) Եխտարկենք

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}, \quad a < b, \lambda > 0 \quad (2.3)$$

ինտեգրալը և պարզենք, թե λ -ի ո՞ր արժեքների դեպքում է այս ինտեգրալը զուգամետ:

$$\lambda = 1 \text{ դեպքում } (a < \eta < b)$$

$$\int_{\eta}^b \frac{dx}{x-a} = \ln(b-a) - \ln(\eta-a) \rightarrow +\infty, \text{ եթե } \eta \rightarrow a+ :$$

$$\lambda \neq 1 \text{ դեպքում}$$

$$\int_{\eta}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{(\eta-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \rightarrow \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda < 1 \\ +\infty, & \lambda > 1 \end{cases} :$$

Հետևաբար, (2.3) ինտեգրալը զուգամետ է, եթե $\lambda < 1$, և տարամետ է, եթե $\lambda \geq 1$: Մասնավոր դեպքում՝ $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ ինտեգրալը* զուգամետ է, եթե $\lambda < 1$

և տարամետ է, եթե $\lambda \geq 1$:

$$\text{Համանմանորեն՝ } \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} \text{ ինտեգրալը զուգամետ է, եթե } \lambda < 1 \text{ և}$$

տարամետ է, եթե $\lambda \geq 1$:

Անսահմանափակ ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալի պարզագույն հաստիքությունները և դրական ֆունկցիաների դեպքում դրանց բարդատման

* Զշփոթնք սա ַ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ ինտեգրալի հնա, որը զուգամետ է, եթե $\lambda > 1$, և տարամետ է, եթե $\lambda \leq 1$:

հայտանիշները նույնն են, ինչ որ անվերջ սահմաններով անխսկական իմտեգրալներինը, այդ պատճառով էլ մենք դրանք մանրամասն չենք շարադրի:

Բաղդատման հայտանիշների հետևանքներն այս դեպքում ձևակերպվում են հետևյալ կերպ.

$$1^0. \text{ Դիցուք } f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda}, \quad \lambda > 0 : \text{Այդ դեպքում}$$

ա) եթե $\lambda < 1$ և $0 \leq \varphi(x) \leq c$, ապա $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda} dx$ իմտեգրալը զուգամետ է,

$$\text{բ) եթե } \lambda \geq 1 \text{ և } \varphi(x) \geq c > 0, \quad \text{ապա } \int_a^b \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda} dx \text{ իմտեգրալը}$$

տարամետ է:

$$2^0. \text{ Եթե } f(x) \sim \frac{c}{(b-x)^\lambda}, \text{ եթե } x \rightarrow b, \text{ ապա } \lambda < 1 \text{ դեպքում իմտեգրալը}$$

զուգամետ է, իսկ $\lambda \geq 1$ դեպքում՝ տարամետ:

Այս հայտանիշների անալոգները ձևակերպվում են նաև այն դեպքում, եթե եզակիության կետը a -ն է:

Որպես օրինակ ուսումնասիրենը

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx := B(a,b) \tag{2.4}$$

իմտեգրալը, որը կոչվում է *Էյլերի (կամ էյլերյան) «քետուա» ֆունկցիա*: Եզակիության կետերը երկուսն են՝ 0-ն և 1-ը:

Եթե $x \rightarrow 0$, ապա $f(x) \sim \frac{1}{x^{1-a}}$, հետևաբար՝ 0 կետում* (կամ 0 կետի շրջակայրում) (2.4) իմտեգրալը զուգամետ է, եթե $1-a < 1$, այսինքն՝ եթե

* Այսինքն՝ $\int_0^c f(x) dx$, $0 < c < 1$ իմտեգրալը:

$a > 0$: Եթիւ $x \rightarrow 1$, ապա $f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{1-b}}$, հետևաբար՝ 1 կետում (2.4)

ինտեգրալը զուգամետ է, եթիւ $b > 0$:

Այսպիսով, (2.4) ինտեգրալը զուգամետ է, եթիւ $a > 0$ և $b > 0$:

Այժմ դիտարկենք

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx := \Gamma(a) \quad (2.5)$$

ինտեգրալը, որը կոչվում է Էյլերյան «զամմա» ֆունկցիա:

Այս դեպքում եզակիության կետերն են 0-ն և ∞ -ը:

Եթիւ $x \rightarrow 0$, ապա $f(x) \sim \frac{1}{x^{1-a}}$, հետևաբար 0 կետում (2.5)-ը

զուգամիտում է, եթիւ $a > 0$:

$$\text{Մյուս կողմից, բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, } \int_1^\infty x^A e^{-x} dx$$

ինտեգրալը զուգամիտում է A -ի ցանկացած արժեքի դեպքում, քանի որ

$$x^{A+2} e^{-x} \rightarrow 0, \text{ եթիւ } x \rightarrow \infty, \text{ ուստի } x^A e^{-x} < \frac{1}{x^2}, \text{ եթիւ } x > x_0;$$

Այսպիսով, (2.5) ինտեգրալը զուգամետ է, եթիւ $a > 0$:

2. Ֆրուլյանիի ինտեգրալ: Ֆրուլյանիի ինտեգրալ են անվանում

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad 0 < a < b,$$

ինտեգրալը, որտեղ $f \in C[0, \infty)$:

Թեորեմ 2.1: Եթիւ զոյուրյուն ունի $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: f(\infty)$ վերջավոր

սահմանը, ապա

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a} : \quad (2.6)$$

► Եթիւ $0 < \delta < \Delta < \infty$, ապա

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\delta, \Delta) &:= \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(bx)}{x} dx = \\ &= \int_{a\delta}^{a\Delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{a\delta}^{b\delta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt: \end{aligned} \quad (2.7)$$

Այս ինտեգրալների համար կիրառելով միջին արժեքի ընդհանրացված թեորեմը (V, §4, կետ 4)` կստանանք

$$\mathcal{I}(\delta, \Delta) = [f(\xi) - f(\eta)] \ln \frac{b}{a} \quad (2.7)$$

հավասարությունը, որտեղ $a\delta < \xi < b\delta$, $a\Delta < \eta < b\Delta$:

(2.7)-ում անցնենք սահմանի, եթե $\delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$: Այդ դեպքում՝ $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$: Ուստի

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\xi) = f(0), \quad \lim_{\Delta \rightarrow \infty} f(\eta) = f(\infty),$$

որտեղից կստանանք (2.6)-ը: ■

Թեորեմ 2.2: Եթե

$$\mathcal{I} = \int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t} dt \quad (2.8)$$

ինտեգրալը զուգամետ է, ապա

$$\mathcal{I} = f(0) \ln \frac{b}{a} : \quad (2.9)$$

► Այս դեպքում ունեն՝

$$\mathcal{I}(\delta, \Delta) = f(\xi) \ln \frac{b}{a} - \int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt, \quad a\delta < \xi < b\delta : \quad (2.10)$$

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից հետևում է, որ

$$\int_{a\Delta}^{b\Delta} \frac{f(t)}{t} dt \rightarrow 0, \quad \text{եթե } \Delta \rightarrow \infty,$$

ուստի, (2.10)-ում անցնելով սահմանի, եթե $\delta \rightarrow 0$, $\Delta \rightarrow \infty$, կստանանք (2.9)-ը: ■

Օրինակներ: Թեորեմ 2.1-ի համաձայն՝ $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$:

Թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝ $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \frac{b}{a}$:

Թեորեմ 2.1-ի համաձայն՝ $\int_0^{\infty} \frac{\arctg ax - \arctg bx}{x} dx = -\frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$:

3. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը բնոհանուր դեպքում:

Թեորեմ 2.3: *Որպեսզի*

$$\int_a^{\omega} f(x)dx , \quad a < \omega \leq \infty$$

անխկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենալ E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x)dx \right| < \varepsilon : \quad (2.11)$$

► $\omega = +\infty$ դեպքը արդեն քննարկել ենք (§1, կետ 5): $\omega < \infty$ դեպքում (2.11)-ը

$$F(A) = \int_a^A f(x)dx , \quad a \leq A < \omega$$

ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու վերաբերյալ Կոշիի պայմանն է (II, §5, կետ 9): ■

Այս դեպքում, եթե անխկական ինտեգրալի եզակիությունը ինտեգրալի ստորին սահմանն է (վերջավոր կամ $-\infty$), Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

Որպեսզի

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx , \quad -\infty \leq \omega < b ,$$

անխկական ինտեգրալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենալ E թիվ, այնպիսին, որ

$$\omega < A < A' < E \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon :$$

§3. ՍԱՍԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԵՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ

1. Մասերով ինտեգրում: Դիցուք u և v ֆունկցիաներն անընդհատ դիմերենցելի են* $[a, b]$ միջակայքում, $a < b \leq +\infty$: Այդ դեպքում կամայական $\eta \in (a, b)$ թվի համար ճշշտ է մասերով ինտեգրման բանաձևը՝

$$\int_a^{\eta} u dv = uv \Big|_a^{\eta} - \int_a^{\eta} v du, \quad a < \eta < b:$$

Այստեղ առկա է փոփոխական վերին սահմանով երեք արտահայտություն: Եթե այդ երեքից կամայական երկուսը ունենան վերջավոր սահման, եթե $\eta \rightarrow b$, ապա երրորդը նույնական կունենա վերջավոր սահման և կստանանք՝

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

որտեղ

$$uv \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b} u(x)v(x) - u(a)v(a):$$

Մենք դիտարկեցինք այն դեպքը, երբ b -ն միակ եզակիության կետն է: Մնացած դեպքերում դատողությունները նույնն են:

Օրինակներ: 1) $\int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \ln x = -1$: Այստեղ եզակիության կետը 0-ն է:

2) $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = x \ln \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \frac{\cos x}{\sin x} dx = - \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\tan x} dx$:

* Ունեն անընդհատ ածանցյալ:

Ստացված ինտեգրալն իսկական ինտեգրալ է, որովհետև ենթինտեգրալ ֆունկցիան եզակիության կետի (որը 0-ն է) շրջակայքում սահմանափակ է:

Այսպիսով, մասերով ինտեգրման միջոցով ապացուցվեց, որ $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$

ինտեգրալը զուգամեռ է:

$$\begin{aligned} 3) \quad I_n &= \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = - \int_0^\infty t^n d(e^{-t}) = -t^n e^{-t} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} dt^n = \\ &= n \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} dt = n I_{n-1} : \text{Կիրառելով մաքեմատիկական ինդուկցիայի} \end{aligned}$$

մեթոդ՝ կստանանք

$$I_n = n!$$

հավասարությունը:

2. Փոփոխականի փոխարինում: Ենթադրենք f ֆունկցիան անընդհատ է $[a, b)$ միջակայքում, $a < b \leq \infty$: Քննարկենք

$$\int_a^b f(x) dx$$

անիսկական ինտեգրալում փոփոխականի փոխարինման հարցը:

Եթե $\varphi(t)$ -ն խիստ մոնուոն է և $\varphi'(t)$ -ն անընդհատ է $[\alpha, \beta)$ ($\beta \leq \infty$) (կամ $(\beta, \alpha]$ ($\beta \geq -\infty$)) միջակայքում, ընդ որում $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$,

ապա տեղի ունի փոփոխականի փոխարինման բանաձևը՝

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (3.1)$$

պայմանով, որ այս ինտեգրալներից մեկը զոյություն ունի (այդ դեպքում մյուսը նույնական գոյություն ունի): Նկատենք նաև, որ եթե β -ն վերջավոր է, ազ կողմի ինտեգրալը կարող է լինել նաև իսկական ինտեգրալ:

(3.1)-ն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $t_0 \in (\alpha, \beta)$ կետ և նշանակենք $x_0 = \varphi(t_0)$: Այդ դեպքում՝

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \int_{\alpha}^{t_0} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt : \quad (3.2)$$

Եթե գոյություն ունի (3.1)-ի ինտեգրալներից մեկը, ապա (3.2)-ում անցնելով սահմանի, եթե $t_0 \rightarrow \beta$ կամ, որ նույն է, $x_0 \rightarrow b$, կստանանք (3.1)-ը:

Օրինակներ: ա) Հաշվենք $\mathcal{I} = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ ինտեգրալը:

Նշանակենք $x = a \cos^2 \varphi + b \sin^2 \varphi$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$: Այդ դեպքում՝

$$dx = (b-a) \sin 2\varphi d\varphi, \text{ ուստի}$$

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \frac{(b-a) \sin 2\varphi d\varphi}{\sqrt{(b-a) \sin^2 \varphi (b-a) \cos^2 \varphi}} = \int_0^{\pi/2} 2d\varphi = \pi :$$

բ) Ցույց տանք, որ $\int_0^\infty \sin x^2 dx$ և $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ ինտեգրալները զուգամետ

են: Դրանք կոչվում են Յերեսելի ինտեգրալներ:

Նշանակելով՝ $x^2 = t$, կստանանք՝ $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$, ուստի

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt + \int_1^\infty \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt :$$

Ստացված ինտեգրալներից առաջինը զուգամետ է, քանի որ $\frac{\sin t}{\sqrt{t}} \rightarrow 0$,

եթե $t \rightarrow 0$, իսկ երկրորդը զուգամետ է Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն:

XII ԳԼՈՒԽ

ՊԱՐԱՍԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ընդհանուր հավասարաչափ գուգամիտության Կոչիի սահմանումը:

Դիցուք X -ը և Y -ը թվային բազմություններ են, $f(x, y)$ ֆունկցիան որոշված է $X \times Y$ դեկարտյան արտադրյալի վրա, ըստ որում, y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է (y_0 -ն կարող է լինել թե՛ վերջավոր, թե՛ անվերջ):

Սահմանում:

1) Դիցուք y_0 -ն վերջավոր է: Կասենք, որ y -ը y_0 -ին ճգնալիս $f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ճգնում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա և կգրենք՝

$$f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x), \text{ եթե } y \rightarrow y_0, x \in X,$$

կամ՝

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \quad x \in X,$$

եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $0 < |y - y_0| < \delta$ պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր $y \in Y$ -ի համար $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ անհավասարությունը տեղի ունի X բազմությանը պատկանող բոլոր x կետերի համար՝

$$0 < |y - y_0| < \delta, \quad y \in Y \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad x \in X : \quad (1.1)$$

2) Կասենք, որ y -ը $y_0 = +\infty$ -ին ճգնալիս $f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ճգնում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա՝ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, եթե $y \rightarrow +\infty$, $x \in X$, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$y > E, y \in Y \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, x \in X : \quad (1.2)$$

2) Կասեմք, որ $y - p = y_0 = -\infty$ -ին ճգտելիս $f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ճգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա՝ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, եթե $y \rightarrow -\infty$, $x \in X$, եթե y յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$y < E, y \in Y \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, x \in X : \quad (1.2')$$

Մասնավորաբար, եթե Y բազմությունը համընկնում է N բնական թվերի բազմության հետ, 2) սահմանումը վերածվում է ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության սահմանմանը: Այսինքն՝ ընդհանուր հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարը ֆունկցիոնալ հաջորդականության հավասարաչափ զուգամիտության գաղափարի ընդհանրացումն է:

Կարևոր օրինակ: Եթե $f \in C([a, b] \times [c, d])$, ապա կամայական $y_0 \in [c, d]$ կետի համար

$$f(x, y) \rightrightarrows f(x, y_0), \text{ եթե } y \rightarrow y_0, x \in [a, b]:$$

► Կանութիւնը թերուեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta, x', x'' \in [a, b] \\ |y' - y''| &< \delta, y', y'' \in [c, d] \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon :$$

Այսուեղ վերցնելով $y'' = y_0$, $y' = y$, $x' = x'' = x$ ՝ կստանանք (1.1)-ը: ■

Լրացում: Միավորելով վերջավոր և անվերջ կուտակման կետերի դեպքերը՝ հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սահմանումը կարելի է ձևակերպել y_0 կուտակման կետի շրջակայթերի լեզվով.

Կասեմք, որ $y - p = y_0$ -ին ճգտելիս $f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ճգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա, եթե y յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունի y_0 -ի U շրջակայթ, այնպիսին, որ

$$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, x \in X : \quad (1.3)$$

2. Ընդհանուր հավասարաշափ գուգամիսության Կոչիի սկզբունքը:

Թեորեմ 1.1: *Որպեսզի*

$$f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x), y \rightarrow y_0, x \in X,$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենալու y_0 -ի U շրջակայր, այնպիսին, որ

$$y, y' \in U \cap Y, y, y' \neq y_0 \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon, x \in X : \quad (1.4)$$

► (1.4)-ի անհրաժեշտությունն անմիջապես հետևում է (1.3)-ից: Ապացուցենք (1.4)-ի բավարարությունը:

Վերցնենք կամայական $x \in X$ հաստատագրված կետ: Այդ դեպքում $f(x, y)$ -ը կդառնա y -ից կախված մեկ փոփոխականի ֆունկցիա, իսկ (1.4)-ը կդառնա այդ ֆունկցիայի համար վերջավոր սահմանի գոյության Կոչիի պայմանը (II, §5, 9): Ուստի՝ հաստատագրված x -ի դեպքում $f(x, y)$ մեկ փոփոխականի ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, եթե $y \rightarrow y_0$: Այդ սահմանը նշանակենք $\varphi(x)$ -ով: Այնուհետև (1.4)-ում x -ը և y -ը հաստատագրենք, իսկ y' -ը ձգտեցնենք y_0 -ի: Անցնելով սահմանի՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի y_0 -ի U շրջակայր, այնպիսին, որ

$$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| \leq \varepsilon, x \in X,$$

այսինքն՝ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, եթե $y \rightarrow y_0, x \in X$: ■

3. Ընդհանուր հավասարաշափ գուգամիսության Հայնեի սահմանումը:

Դիցուք՝ $f : X \times Y \rightarrow R$, y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է:

Կասենք, որ y -ը y_0 -ին ձգտելիս $f(x, y)$ ֆունկցիան հավասարաշափ ձգտում է $\varphi(x)$ ֆունկցիային X բազմության վրա, եթե յուրաքանչյուր $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$, $y_n \rightarrow y_0$ հաջորդականության համար՝

$$f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x), \text{ եթե } n \rightarrow \infty, x \in X :$$

Ապացուցենք, որ ψ_{η} և ζ_{η} սահմանումները համարժեք են:

► Սահմանափակվենք այն դեպքով, եթե y_0 -ն վերջավոր է:

Նախ ապացուցենք, որ ψ_{η} պայմանից բխում է ζ_{η} պայմանը: Եթոր, $f(x, y)$ -ը բավարարում է ψ_{η} պայմանին, նշանակում է, որ $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = L$ թիվին: Եթե $\varepsilon > 0$, ապա $\delta > 0$ թիվ է, որի համար $|y - y_0| < \delta$ թիվի դեպքում $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ լինի: Այս դեպքում $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ լինելու համար պահանջվում է $|y - y_0| < \delta$, որի համար $|y - y_0| < \delta$ լինելու համար պահանջվում է $|f(x, y) - L| < \varepsilon$:

Վերցնենք որևէ $y_n \rightarrow y_0$ հաջորդականություն, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$: Այդ դեպքում $|y_n - y_0| < \delta$ լինելու համար պահանջվում է $|f(x, y_n) - L| < \varepsilon$:

$$n > N(\delta) \Rightarrow |y_n - y_0| < \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - L| < \varepsilon:$$

Իսկ դա նշանակում է, որ $f(x, y_n) \rightarrow L$, $x \in X$:

Այժմ ցույց տանք, որ ζ_{η} պայմանից բխում է ψ_{η} պայմանը: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Կոչին ψ_{η} պայմանը չի բավարարվում՝ նշանակում է, որ մի որևէ $\varepsilon_0 > 0$ թիվ համար ինչպիսի $\delta > 0$ թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա (x_δ, y_δ) կետ, այնպիսին, որ $|f(x_\delta, y_\delta) - L| < \varepsilon_0$, $x_\delta \in X$:

$$|f(x_\delta, y_\delta) - L| < \varepsilon_0, x_\delta \in X:$$

Վերցնելով $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ և համապատասխան կետը նշանակելով (x_n, y_n) , կատանանք, որ $y_0 \neq y_n \in Y$, $y_n \rightarrow y_0$, բայց

$$|f(x_n, y_n) - L| < \varepsilon_0, x_n \in X:$$

Սա հակասում է ζ_{η} պայմանին: ■

Կիրառություն 1 (Սահմանային ֆունկցիայի անընդհատությունը):

Դիցուք՝ $f: X \times Y \rightarrow R$, իսկ y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է:

Թեորեմ 1.2: Դիցուք՝

ա) $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = L$ արժեքի համար $f(x, y)$ -ը որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիա անընդհատ է X բազմության վրա,

p) $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, եթիւ $y \rightarrow y_0$, $x \in X$:

Այդ դեպքում՝ $\varphi \in C(X)$:

► Վերցնենք որևէ $y_n \rightarrow y_0$ հաջորդականություն, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$: Այդ դեպքում՝ $f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$, $n \rightarrow \infty$, $x \in X$:

Մնում է կիրառել ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմը (X, §3, 1, թեորեմ 3.1): ■

Կիրառություն 2 (Գինիի ընդհանուր թեորեմը): Դիցուք՝ $f : K \times Y \rightarrow R$, y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է և $y < y_0$, $\forall y \in Y$:

Թեորեմ 1.3: ‘Հիցուք’

a) K -ն կոմպակտ բազմություն է,

p) y յուրաքանչյուր $y \in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում $f(x, y) \in C(K)$ և $f(x, y)$ -ը աճելով ձգուում է $\varphi(x)$ -ին, եթիւ y -ը աճելով ձգուում է y_0 -ին,

q) $\varphi \in C(K)$:

Այդ դեպքում՝ $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \rightarrow y_0$, $x \in X$:

► Վերցնենք որևէ $y_n \uparrow y_0$ հաջորդականություն, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$: Այդ դեպքում՝ $f(x, y_n)$ հաջորդականությունը կրավարարի ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների վերաբերյալ Դինիի թեորեմի պայմաններին (X, §3, 1, թեորեմ 3.2), ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն կունենա $n_0(\varepsilon)$ բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$0 \leq \varphi(x) - f(x, y_{n_0}) < \varepsilon, \quad x \in X:$$

Այդ դեպքում՝

$$y_{n_0} < y < y_0 \Rightarrow |\varphi(x) - f(x, y)| < \varepsilon, \quad x \in X,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

4. Հաջորդական սահմանների թեորեմը: Դիցուք՝ $f(x, y) : X \times Y \rightarrow R$, a -ն X -ի կուտակման կետ է, b -ն՝ Y -ի:

Թեորեմ 1.4: 'Հիցոր'

w) $f(x, y) \rightarrow \varphi(x)$, $y \rightarrow b$, $x \in X$,

p) յուրաքանչյուր $y \in Y$ կետի համար՝ $f(x, y) \rightarrow \psi(y)$, եթե $x \rightarrow a$:

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ և $\lim_{y \rightarrow b} \psi(y)$ վերջավոր

սահմանները և միմյանց հավասար են՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) :$$

► Ապացուցենք այն դեպքում, եթե a -ն և b -ն վերջավոր են:

Նախ ցույց տանք, որ $\lim_{y \rightarrow b} \psi(y)$ սահմանը գոյություն ունի ու վերջավոր

է: Հավասարաշափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, ա)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} 0 < |y - b| < \delta \\ 0 < |y' - b| < \delta \\ y, y' \in Y \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x, y) - f(x, y')| < \varepsilon, \quad x \in X :$$

y -ը և y' -ը ֆիքսելով, իսկ x -ը ճգնեցնելով a -ի՝ կստանանք

$$\left. \begin{array}{l} 0 < |y - b| < \delta \\ 0 < |y' - b| < \delta \\ y, y' \in Y \end{array} \right\} \Rightarrow |\psi(y) - \psi(y')| \leq \varepsilon,$$

ինչը b կետում ψ ֆունկցիայի վերջավոր սահման ունենալու Կոշիի սլայմանն է: Ուստի գոյություն ունի

$$\lim_{y \rightarrow b} \psi(y) = A \tag{1.5}$$

Վերջավոր սահմանը:

Ցույց տանք, որ $\varphi(x) \rightarrow A$, եթե $x \rightarrow a$: Ուստե՞ղ՝

$$|\varphi(x) - A| \leq |\varphi(x) - f(x, y)| + |f(x, y) - \psi(y)| + |\psi(y) - A|: \tag{1.6}$$

ա)-ից և (1.5)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի մի $y_0 \in Y$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|\varphi(x) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in X \quad \text{և} \quad |\psi(y_0) - A| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (1.7)$$

բ)-ի համաձայն, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x, y_0) - \psi(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3}; \quad (1.8)$$

(1.6)-ի մեջ տեղադրելով $y = y_0$ և հաշվի առնելով (1.7)-(1.8)-ը՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - A| < \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Դիտողություն: Այս թեորեմի ապացույցը կարելի է հանգեցնել ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմին (X , §3, 2, թեորեմ 3.3): Ուշադիր ընթերցողը կնկատի, որ այստեղ մենք կրկնեցինք հաջորդականությունների դեպքում կատարված դատողությունները: Բացի դրանից, դժվար չէ նկատել, որ թեորեմ 1.4-ի պայմաններում գոյություն ունի նաև $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$ կրկնակի սահմանը:

§2. ՊԱՐԱՍԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

Դիցուք՝ $f : [a, b] \times Y \rightarrow R$ և յուրաքանչյուր $y \in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում $f(x, y)$ -ը, որպես x փոփոխականից կախված ֆունկցիա, իմտեզը է $[a, b]$ հաստվածում: Այս պայմանն այսուհետ կզբանը $f(\cdot, y) \in \mathfrak{R}[a, b]$, $y \in Y$ տեսքով: Դիտարկենք y -ից կախված հետևյալ ֆունկցիան (իմտեզը ալլը):

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad y \in Y:$$

Այն կանվանենք պարամետրից կախված ինտեգրալ, որտեղ յ փոփոխականը կոչվում է պարամետր: Այս պարագրաֆում մեր նյատակն է ուսումնաժողով:

1. Սահմանային անցում պարամետրից կախված ինտեգրալի նշանի սակագիր: Դիցուք՝ $f : [a, b] \times Y \rightarrow R$, y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է:

Թեորեմ 2.1: Դիցուք՝ 1) $f(\cdot, y) \in \mathfrak{R}[a, b]$, $y \in Y$,

2) $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, $y \rightarrow y_0$, $x \in [a, b]$:

Այդ դեպքում՝ ա) $\varphi \in \mathfrak{R}[a, b]$,

$$p) \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx :$$

Այս դեպքում ասում են, որ կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ:

► Վերցնենք որևէ $y_n \rightarrow y_0$ հաջորդականություն, $y_n \in Y$, $y_n \neq y_0$: Այդ դեպքում՝ $f(x, y_n) \rightrightarrows \varphi(x)$, $x \in [a, b]$, ուստի $\varphi \in \mathfrak{R}[a, b]$ (X, §3, 3, լեմմա 3.1):

բ)-ն ապացուցելու համար գնահատենք ինտեգրալների տարբերությունը: Ուսնենք՝

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| dx :$$

Մյուս կողմից, 2) պայմանի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ քանի համար գոյություն ունի y_0 -ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $x \in [a, b]$:

Հետևաբար՝

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \varepsilon(b - a),$$

ինչից էլ հետևում է բ)-ն: ■

Թեորեմ 2.2 (պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատությունը):
Եթե $f \in C([a, b] \times [c, d])$, ապա $I \in C[c, d]$:

► Վերցնենք կամայական $y_0 \in [c, d]$ և ապացուենք, որ I ֆունկցիան y_0 կետում անընդհատ է: Կանոնի թեորեմի համաձայն (տե՛ս կարեռ օրինակը)` $f(x, y) \rightarrow f(x, y_0)$, $y \rightarrow y_0$, $x \in [a, b]$, ուստի թեորեմ 2.1-ի համաձայն՝ $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0)$: ■

2. Պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցումը:

Դիցուք՝ $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow R$:

Թեորեմ 2.3: Եթե

1) $f(\cdot, y) \in C[a, b]$, $y \in [c, d]$,

2) $f'_y \in C([a, b] \times [c, d])$,

ապա $I(y)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի $t^* [c, d]$ հատվածում և

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx, \quad y \in [c, d]: \quad (2.1)$$

Այս դեպքում ասում են, որ կարելի է ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ:

Ածանցման (2.1) բանաձևը կոչվում է *Lայպնիցի կանոն*:

► Վերցնենք կամայական $y_0 \in [c, d]$ կետ և (2.1) բանաձևն ապացուենք այդ կետում: Ունենք, որ

$$\begin{aligned} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} &= \int_a^b \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} dx = \\ &= \int_a^b f'_y(x, y_0 + \theta \Delta y) dx, \quad 0 < \theta = \theta(x, y) < 1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

որտեղ վերջին քայլում օգտվել ենք *Lազրանժի* վերջավոր աճերի բանաձևից:

Մյուս կողմից, թեորեմի 2) պայմանի և Կանոնի թեորեմի համաձայն՝

* Նախորդ թեորեմից ելնելով՝ այն կլինի նույնիսկ անընդհատ դիֆերենցելի:

$f'_y(x, y_0 + \theta\Delta y) \rightarrow f'_y(x, y_0)$, եթիւ $\Delta y \rightarrow 0$, $x \in [a, b]$:

Ուստի, (2.2) ինտեգրալի համար կիրառելով ինտեգրալի նշանի տակ սահմանային անցման քերեմը, կստանանք պահանջվող հավասարությունը.

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{I(y_0 + \Delta y) - I(y_0)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y_0) dx = I'(y_0) : \blacksquare$$

Դիտողություն:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \int_{y_0}^y f'_y(x, t) dt + [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

հավասարությունից հետևում է, որ եթե բավարարվում են քերեմ 2.3-ի սլայմանները, ապա $f \in C([a, b] \times [c, d])$:

3. Պարամետրից կախված ինտեգրալի ինտեգրումը:

Թեորեմ 2.4: Եթե $f \in C([a, b] \times [c, d])$, ապա

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx : \quad (2.3)$$

► Թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝ (2.3)-ի ինտեգրալները գոյություն ունեն: Ապացուցեմք դրանց հավասարությունը: Նշանակենք՝

$$\Phi(\eta) = \int_c^n I(y) dy, \quad \eta \in [c, d], \quad (2.4)$$

$$\Psi(\eta) = \int_a^b \left\{ \int_c^\eta f(x, y) dy \right\} dx, \quad \eta \in [c, d], \quad (2.5)$$

և ցույց տանք, որ $\Phi(\eta) = \Psi(\eta)$, $\eta \in [c, d]$ (այստեղ տեղադրելով $\eta = d$ ՝ կստանանք (2.3)-ը):

Քանի որ $\Phi(c) = \Psi(c) = 0$, ապա բավական է ապացուցել, որ

$$\Phi'(\eta) = \Psi'(\eta), \quad \eta \in [c, d]: \quad (2.6)$$

Նախ նկատենք, որ $\Phi'(\eta) = I(\eta)$ ՝ որպես փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի ածանցյալ: Մնում է ցույց տալ, որ

$$\Psi'(\eta) = I(\eta), \quad \eta \in [c, d]: \quad (2.7)$$

Այդ նպատակով դիտարկենք $F(x, \eta) := \int_c^{\eta} f(x, y) dy$ ֆունկցիան: Քանի

որ

$$F'_\eta(x, \eta) = f(x, \eta), \quad (2.8)$$

հետևաբար, (2.7)-ը ապացուցելու համար մեզ մնում է համոզվել, որ (2.5) ինտեգրալի համար Լայբնիցի կանոնը կիրառելի է, այսիքան՝ պեսոք է ցոյց տալ, որ F ֆունկցիան բավարարում է թեորեմ 2.3-ի պայմաններին.

$$1) F(\cdot, \eta) \in C[a, b], \quad 2) F'_\eta \in C([a, b] \times [c, d]):$$

Իսկապես. առաջին պայմանը հետևում է թեորեմ 2.2-ից, իսկ երկրորդը՝ (2.8) հավասարությունից: ■

4. Սիայն x -ից կախված արտադրիչի ներմուծումը: Դիտարկենք

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) g(x) dx, \quad (2.9)$$

ինտեգրալը, որտեղ $g \in \mathfrak{R}[a, b]$ կամ g -ն բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական իմաստով:

Թեորեմ 2.1': Դիցուք՝ $f : [a, b] \times Y \rightarrow R$, y_0 -ն Y -ի կուտակման կետ է:

Եթե 1) $f(\cdot, y) \in \mathfrak{R}[a, b]$, $y \in Y$, 2) $f(x, y) \rightrightarrows \varphi(x)$, եթե $y \rightarrow y_0$,

$$x \in [a, b], \text{ ապա } \text{ այս } \text{ այս } \varphi \in \mathfrak{R}[a, b], p) \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) g(x) dx = \int_a^b \varphi(x) g(x) dx :$$

► ա)-ն ապացուցվել է թեորեմ 2.1-ում, ապացուցենք բ)-ն: Այդ նպատակով զնահատենք ինտեգրալների տարրերությունը՝

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x, y) g(x) dx - \int_a^b \varphi(x) g(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x, y) - \varphi(x)] g(x) dx \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |f(x, y) - \varphi(x)| |g(x)| dx : \end{aligned} \quad (2.10)$$

2) պայմանի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} 0 < |y - y_0| < \delta \\ y \in Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b]: \quad (2.11)$$

(2.10) - (2.11)-ից կստանանք՝

$$\left. \begin{aligned} |y - y_0| < \delta \\ y \in Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left| \int_a^b f(x, y) g(x) dx - \int_a^b \varphi(x) g(x) dx \right| < \varepsilon \int_a^b |g(x)| dx :$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

2.2-2.4 թեորեմների նմանակները (2.9) իմտեզրալի համար ձևակերպվում և ապացուցվում են նոյն ձևով, ինչպես $g(x)$ արտադրիչի բացակայության դեպքում: Միակ տարբերությունն այն է, որ թեորեմ 2.1-ի փոխարեն օգտագործվում է թեորեմ 2.1-ը:

§3. ՊԱՐԱՍԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՆԻՄԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՎԱՓ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Առաջիկայում կօգտագործենք ՊԿԱԻ հապավումը, որը նշանակում է սպառամետրից կախված անիսկական ինտեգրալ:

1. ՊԿԱԻ-ի հավասարաշափ գուգամիտությունը:

Դիցուք՝ $f : [a, \omega) \times Y \rightarrow R$, որտեղ ω -ն կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես և՝ $+\infty$: Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր $y \in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում

$$I(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx, \quad y \in Y, \quad (3.1)$$

անիսկական ինտեգրալը* գուգամետ է: Այսինքն՝ $f(\cdot, y) \in \mathfrak{R}[a, A]$, $A \in (a, \omega)$ և

$$F(y, A) = \int_a^A f(x, y) dx, \quad a \leq A < \omega$$

* Վերջավոր ω -ի դեպքում կենթադրենք, որ առկա է անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ:

ֆունկցիան, որը որոշված է $Y \times [a, \omega)$ դեկարտյան արտադրյալի վրա, Y բազմության վրա կետորեն գուգամիտում է $I(y)$ ֆունկցիային՝

$$\lim_{A \rightarrow \omega} F(y, A) = I(y), \quad y \in Y:$$

Սահմանում: Կասեմը, որ (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա գուգամիտում է հավասարաչափ, եթե

$$F(y, A) \rightrightarrows I(y), \quad A \rightarrow \omega, \quad y \in Y:$$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < \omega \Rightarrow |F(y, A) - I(y)| < \varepsilon, \quad y \in Y:$$

Այս դեպքում, եթե անհսկական ինտեգրալի եզակիության կետը ինտեգրալի ստորին սահմանն է, ՊԿԱԻ-ի գուգամիտությունը սահմանվում է նման ձևով: Եսկ այս դեպքում, եթե անհսկական ինտեգրալի թե՛ վերին և թե՛ ստորին սահմանները եզակիություններ են,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x, y) dx, \quad -\infty \leq \omega_1 < \omega_2 \leq +\infty, \quad (3.1')$$

ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ գուգամիտությունը սահմանելու համար վերցնում են կամայական $a \in (\omega_1, \omega_2)$ թիվ և (3.1') ինտեգրալը ներկայացնում են երկու ինտեգրալների գումարի տեսքով՝

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x, y) dx = \int_{\omega_1}^a f(x, y) dx + \int_a^{\omega_2} f(x, y) dx: \quad (3.1'')$$

Այս դեպքում (3.1') ինտեգրալը կոչվում է հավասարաչափ գուգամետ Y բազմության վրա, եթե Y բազմության վրա հավասարաչափ գուգամետ են (3.1'') հավասարության աջ կողմի երկու ինտեգրալները: Դժվար չէ համոզվել, որ այս սահմանումը a -ի ընտրությունից կախված չէ:

2. ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ գուգամիտության Կոչի սկզբունքը:

Թեորեմ 3.1: Որպեսզի (3.1) ինտեգրալը լինի հավասարաչափ գուգամետ Y բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենաւ մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad y \in Y : \quad (3.2)$$

► Համի որ

$$F(y, A') - F(y, A) = \int_A^{A'} f(x, y) dx,$$

ապա η նդիանուր հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի պայմանը $F(y, A)$ ֆունկցիայի համար կրնդունի (3.2) տեսքը: ■

3. ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության հայտանիշներ:

1⁰. Մաժորանտով հայտանիշը: Եթե զոյտություն ունի $\varphi(x)$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$a) |f(x, y)| \leq \varphi(x), \quad x \in [a, \omega], \quad y \in Y,$$

$$b) \varphi \text{ ֆունկցիայի անհսկական ինտեգրալը զուգամետ է:}$$

$$\int_a^\omega \varphi(x) dx < \infty,$$

ապա (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է:

Այս դեպքում φ ֆունկցիան կոչվում է f ֆունկցիայի կամ (3.1) ինտեգրալի մաժորան:

► Անհսկական ինտեգրալի վերաբերյալ Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, բ) պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար զոյտություն ունի մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \int_A^{A'} \varphi(x) dx < \varepsilon :$$

Մյուս կողմից, ա) պայմանից հետևում է, որ

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| \leq \int_A^{A'} \varphi(x) dx, \quad y \in Y :$$

Այս երկու անհավասարություններից հետևում է (3.2)-ը, ուստի ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա հավասարաչափ զուգամետ է: ■

Օրինակ: $\int_1^\infty \frac{\sin xy}{x^\alpha} dx$ ինտեգրալը $\alpha > 1$ դեպքում ամբողջ թվային

առանցքի վրա ($y \in R$) հավասարաչափ զուգամետ է: Այս դեպքում մաժորանուն է $1/x^\alpha$ ֆունկցիան:

2⁰. Աքելի և Դիրիխլեի հայտանիշները: Աքելի և Դիրիխլեի հայտանիշները վերաբերում են

$$\int_a^\omega f(x, y)g(x, y)dx, \quad y \in Y \quad (3.3)$$

տեսքի ինտեգրալներին:

Աքելի հայտանիշը: Եթե՝ ա) $\int_a^\omega f(x, y)dx$ ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետն է Y բազմության վրա, բ) $g(\cdot, y)$ ֆունկցիան մոնունն է և հավասարաչափ սահմանափակ, այսինքն՝ գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ $|g(x, y)| \leq M$, $x \in [a, \omega]$, $y \in Y$, ապա (3.3) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետն է Y բազմության վրա:

Դիրիխլեի հայտանիշը: Եթե՝ ա) գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ

$$\left| \int_a^A f(x, y)dx \right| \leq M, \quad A \in (a, \omega), \quad y \in Y,$$

բ) $g(\cdot, y)$ ֆունկցիան նվազող է և $g(x, y) \rightarrow 0$, եթե $x \rightarrow \omega$, $y \in Y$,

ապա (3.3) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետն է Y -ի վրա:

Այս հայտանիշները հետևում են **ՊԿԱԻ-ի** հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից և միջին արժեքի երկրորդ թեորեմից, համաձայն որի, յուրաքանչյուր $y \in Y$ հաստատագրված արժեքի դեպքում գոյություն ունի ξ կետ՝ $A \leq \xi \leq A'$, այնպիսին, որ

$$\int_A^{A'} f(x, y)g(x, y)dx = g(A, y) \int_A^\xi f(x, y)dx + g(A', y) \int_\xi^{A'} f(x, y)dx: \quad (3.4)$$

Արելի հայտանիշի ապացույցը:

► ՊԿԱԻ-ի հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքի համաձայն, ա) պայմանից հետևում է, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{\xi} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_{\xi}^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon, \quad y \in Y;$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով բ) պայմանը, (3.4)-ից կստանանք՝

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x, y) g(x, y) dx \right| < 2M\varepsilon, \quad y \in Y,$$

ուստի (3.3) ինտեգրալը բավարարում է ՊԿԱԻ հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի պայմանին: Դա նշանակում է, որ Y բազմության վրա այն հավասարաչափ զուգամետ է: ■

Դիրիխլեի հայտանիշի պայմաններում (3.4)-ի աջ կողմի գումարելիների մեջ առաջին արտադրիչներն են հավասարաչափ ճգոտում գրոյի, իսկ երկրորդ արտադրիչները հավասարաչափ սահմանափակ են Y բազմության վրա:

Դիտողություն: f և g ֆունկցիաներից մեկը կարող է կախված լինել միայն x -ից: Այդպիսի դեպքերում Արելի և Դիրիխլեի հայտանիշները ձևակերպելիս միայն x -ից կախված ֆունկցիային վերաբերվող պայմանի մեջ «հավասարաչափ» բառը պետք է բաց թողնել:

Օրինակներ: 1) Արելի հայտանիշի համաձայն,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx$$

ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $a \in [0, \infty)$ միջակայքում: Իրոք,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad f(0) = 1 \quad \text{ֆունկցիայի ինտեգրալը } [0, \infty) \text{ միջակայքում}$$

զուգամետ է (տես XI, §1, 5), իսկ $g(x, a) = e^{-ax}$ ֆունկցիան ըստ x -ի մոնուն է և $|g(x, a)| \leq 1$, եթե $x, a \in [0, \infty)$:

2) Դիրիխլեի հայտանիշի համաձայն,

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin x dx$$

ինտեգրալը յուրաքանչյուր $a_0 > 0$ թվի համար հավասարաշափ զուգամետ է $[a_0, \infty)$ միջակայքում: Իբրոք,

$$\left| \int_0^A \sin x dx \right| \leq 2, \text{ եթե } 0 < A < \infty,$$

իսկ $g(x, a) = e^{-ax}$ ֆունկցիան ըստ x -ի մոնոտոն է և $[a_0, \infty)$ միջակայքում հավասարաշափ ձգուում է զրոյի, քանի որ $a \geq a_0$ դեպքում

$$|e^{-ax}| \leq e^{-a_0 x} \rightarrow 0, \text{ եթե } x \rightarrow +\infty:$$

3⁰. Դինիի հայտանիշը: Եթե

ա) $f(x, y) \geq 0$ և $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$,

$$p) I(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx, \quad y \in [c, d] \quad (3.5)$$

ինտեգրալը կետորեն զուգամետ է $[c, d]$ հատվածում,

զ) $I(y) \in C[c, d]$,

ապա (3.5) ինտեգրալը $[c, d]$ հատվածում հավասարաշափ զուգամետ է:

► Այս հայտանիշն անմիջապես հետևում է Դինիի ընդհանուր թեորեմից (թեորեմ 1.3): Իբրոք, պարամետրից կախված ինտեգրալի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, ա) պայմանից հետևում է, որ $A \in (a, \omega)$ հաստատագրված արժեքի դեպքում

$$F(y, A) = \int_a^A f(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

ֆունկցիան անընդհատ է $[c, d]$ հատվածում և $F(y, A)$ -ն աճելով ձգուում է $I(y)$ անընդհատ ֆունկցիային, եթե A -ն աճելով ձգուում է ω -ին: Ուստի Դինիի ընդհանուր թեորեմի համաձայն՝

$$F(y, A) \rightrightarrows I(y), \quad A \rightarrow \omega, \quad y \in [c, d]: \blacksquare$$

4. ՊԿԱԲ-ի բերումը ֆունկցիոնալ հաջորդականության կամ շարքի:

(3.1) ինտեգրալը որպես ֆունկցիոնալ հաջորդականության ներկայացնելու համար վերցնենք՝

$$A_0 = a, \quad A_n \in [a, \omega), \quad A_n \rightarrow \omega$$

պայմաններին բավարարող A_n թվային հաջորդականություն և նշանակենք՝

$$g_n(y) = \int_a^{A_n} f(x, y) dx, \quad y \in Y: \quad (3.6)$$

Այդ դեպքում, ընդհանուր հավասարաշափ զուգամիտության Կոշիի և Հայնեի սահմանումների համարժեքության համաձայն, որպեսզի (3.1) ինտեգրալը Y բազմության վրա լինի հավասարաշափ զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $A_n \in [a, \omega)$, $A_n \rightarrow \omega$ հաջորդականության համար՝

$$g_n(y) \rightrightarrows I(y), \quad \text{եթե } n \rightarrow \infty, \quad y \in Y:$$

Այսուհետև, քանի որ (3.6) հաջորդականության հավասարաշափ զուգամիտությունը համարժեք է.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx, \quad y \in Y \quad (3.7)$$

ֆունկցիոնալ շարքի հավասարաշափ զուգամիտությանը, ուստի (3.1) ինտեգրալի հավասարաշափ զուգամիտությունը համարժեք է (3.7) շարքի հավասարաշափ զուգամիտությանը:

§4. ՊԿԱԲ-Ի ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Այս պարագրաֆում կապացուցենք §2-ում ապացուցված թեորեմների նմանակները անհակական ինտեգրալների համար: Այս դեպքում §2-ում ձևակերպված թեորեմների պայմաններին ավելանում են լրացուցիչ

պայմաններ՝ համապատասխան անխսկական ինտեգրալների հավասարաչափ զուգամիտության պայմանները:

1. ՊԿԱԻ-ի անընդհատությունը:

Թեորեմ 4.1: *Դիցուք՝*

1) $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$,

$$2) \quad I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx \quad \text{անխսկական ինտեգրալը } [c, d] \text{ հատվածում}$$

հավասարաչափ զուգամեն է:

Այդ դեպքում՝ $I \in C[c, d]$:

► Թեորեմ 2.2-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $A \in (a, \omega)$ հաստատագրված արժեքի դեպքում

$$F(y, A) = \int_a^A f(x, y) dx$$

ֆունկցիան անընդհատ է $[c, d]$ հատվածում և 2)-ի համաձայն՝

$$F(y, A) \rightarrow I(y), \quad A \rightarrow \omega, \quad y \in [c, d]:$$

Սահմանային ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թեորեմի համաձայն՝ $I \in C[c, d]$: ■

2. Սահմանային անցում ՊԿԱԻ-ի նշանի տակ:

Դիցուք՝ $a < \omega \leq \infty$, $f : [a, \omega) \times Y \rightarrow R$ և y_0 -ն Y -ի կոտակման կետ է: Դիտարկենք

$$I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx, \quad y \in Y \tag{4.1}$$

անխսկական ինտեգրալը:

Թեորեմ 4.2: *Դիցուք՝*

1) $f(\cdot, y) \in C[a, \omega)$, $y \in Y$,

2) Յուրաքանչյուր $A \in [a, \omega)$ թվի դեպքում՝ $f(x, y) \rightarrow \varphi(x)$, եթե

$y \rightarrow y_0$, $x \in [a, A]$,

3) Y բազմության վրա (4.1) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է:
Այդ դեպքում՝

$$w) \int_a^\omega \varphi(x)dx \text{ ինտեգրալը զուգամետ է,}$$

$$p) \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y)dx = \int_a^\omega \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)dx :$$

► Նախ ապացուցենք ա)-ն: 3)-ից հետևում է (թեորեմ 3.1), որ
յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} f(x, y)dx \right| < \varepsilon, \quad y \in Y :$$

Անցնելով սահմանի, եթե $y \rightarrow y_0$, համաձայն թեորեմ 2.1-ի կստանան՝

$$E < A < A' < \omega \Rightarrow \left| \int_A^{A'} \varphi(x)dx \right| \leq \varepsilon : \quad (4.2)$$

Անիսկական ինտեգրալների զուգամիտության վերաբերյալ Կոշիի
սկզբունքի համաձայն, (4.2)-ից հետևում է ա)-ն:

բ)-ն ապացուցելու համար գնահատենք ինտեգրալների տարրերու-
թյունը: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \left| I(y) - \int_a^\omega \varphi(x)dx \right| &\leq \left| I(y) - \int_a^A f(x, y)dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^A f(x, y)dx - \int_a^A \varphi(x)dx \right| + \left| \int_A^\omega \varphi(x)dx \right| : \end{aligned} \quad (4.3)$$

3)-ից և ա)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն
ունի $A \in (a, \omega)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left| I(y) - \int_a^A f(x, y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad y \in Y \quad \text{և} \quad \left| \int_A^\omega \varphi(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} : \quad (4.4)$$

2)-ից հետևում է, որ (թեորեմ 2.1)

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A \varphi(x) dx :$$

Ուստի գոյություն ունի y_0 -ի U շրջակայք, այնպիսին, որ

$$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow \left| \int_a^A f(x, y) dx - \int_a^A \varphi(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3} : \quad (4.5)$$

Այսպիսով, (4.3)-(4.5) զնահատականներից հետևում է, որ

$$y \in U \cap Y, y \neq y_0 \Rightarrow \left| I(y) - \int_a^\omega \varphi(x) dx \right| < \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Առաջադրանք: Համոզվել, որ $F(y, A) = \int_a^A f(x, y) dx$ ֆունկցիան բավարարում է հաջորդական սահմանների վերաբերյալ թեորեմ 1.4-ին և թեորեմ 4.2-ը բխեցնել այդ թեորեմից:

Այժմ բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ առանց երրորդ պայմանի թեորեմ 4.2-ի եզրակացությունը ճիշտ չէ: Դրա համար կառուցենք $f_n(x)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը հետևյալ կերպ՝

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0, n] \\ 0, & x \in [n+1, \infty) \end{cases},$$

իսկ $[n, n+1]$ հատվածում f_n ֆունկցիան գծային է: Այդ դեպքում

$$f_n(x) \geq 0 = \varphi(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad x \in [0, \infty), \quad \text{սակայն} \quad \int_0^\infty f_n(x) dx \geq 1, \quad \text{իսկ}$$

$$\int_0^\infty \varphi(x) dx = 0 :$$

Թեորեմ 4.3 (Սոնտան զուգամիտության թեորեմը): Դիցուք y_0 -ն Y բազմության կոտակման կետ է և յուրաքանչյուր $y \in Y$ տարրի համար՝ $y < y_0$: Եթե

- 1) $0 \leq f(\cdot, y) \in C[a, \omega)$, $y \in Y$,
- 2) $f(x, y)$ -ը աճեղով ձգուում է $\varphi(x)$ անրնդիստ ֆունկցիային, եթիւ յ -ը աճեղով ձգուում է y_0 -ին,

3) Y բազմության վրա (4.1) ինտեգրալը կետորեն զուգամետ է, ասսա

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx = \int_a^\omega \varphi(x) dx : \quad (4.6)$$

Այսուեղ աջ կողմի ինտեգրալը կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ $+\infty$:

► Նախ դիտարկենք այն դեպքը, եթիւ

$$\int_a^\omega \varphi(x) dx < \infty, \quad (4.7)$$

և համոզվենք, որ այդ դեպքում բավարարվում են թեորեմ 4.2-ի պայմանները: Իբրու, Դինիի ընդհանուր թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $A \in (a, \omega)$ թվի համար՝

$$f(x, y) \rightharpoonup \varphi(x), \text{ եթիւ } y \rightarrow y_0, [a, A], \quad (4.8)$$

այսինքն՝ թեորեմ 4.2-ի երկրորդ պայմանը բավարարված է: Եթրորդ պայմանը հետևում է ՊԿԱԲ-ի հավասարաշափ զուգամիտության մաժորանուով հայտանիշից, քանի որ $0 \leq f(x, y) \leq \varphi(x)$ և φ -ի ինտեգրալը զուգամետ է: Այսպիսով, թեորեմ 4.2-ի համաձայն, (4.6)-ը տեղի ունի:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, եթիւ

$$\int_a^\omega \varphi(x) dx = \infty : \quad (4.9)$$

Պետք է ապացուցենք, որ

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^\omega f(x, y) dx = \infty :$$

(4.9)-ից հետևում է, որ կամայական E թվի համար գոյություն ունի $A \in (a, \omega)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^A \varphi(x) dx > E :$$

Մյուս կողմից, (4.8)-ից հետևում է (թեորեմ 2.1), որ

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A \varphi(x) dx > E :$$

Ուստի գոյություն ունի $E_1 < y_0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$E_1 < y < y_0 \Rightarrow \int_a^A f(x, y) dx > E :$$

Հետևաբար՝

$$E_1 < y < y_0 \Rightarrow \int_a^\omega f(x, y) dx \geq \int_a^A f(x, y) dx > E ,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Հետևանք (որպական շարքերի ինտեգրալում): ‘Դիցուք’

1) $0 \leq u_k(x) \in C[a, \omega)$, $\omega \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$,

2) $\int_a^\omega u_k(x) dx$ ինտեգրալները զուգամետ են, $k = 1, 2, \dots$,

3) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ շարքը $[a, \omega)$ միջակայրում կետորեն զուգամիտում

է $\varphi(x)$ անընդհատ ֆունկցիային:

Այդ դեպքում

$$\int_a^\omega \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^\omega u_k(x) dx ,$$

որտեղ շարքը կարող է լինել ինչպես զուգամետ, այնպես էլ՝ տարածելու:

► Նշանակենք՝ $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$: Այդ դեպքում $f_n(x) := f(x, n)$

ֆունկցիայի համար բավարարվում են թեորեմ 4.3-ի պայմանները, ուստի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\omega \sum_{k=1}^n u_k(x) dx = \int_a^\omega \varphi(x) dx , \text{ այսինքն՝ } \int_a^\omega \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^\omega u_k(x) dx : ■$$

3. ՊԿԱԻ-ի ածանցում:

Թեորեմ 4.4: Դիցուք՝

- 1) $f(\cdot, y) \in C[a, \omega)$, $y \in [c, d]$,
- 2) $f'_y \in C([a, \omega) \times [c, d])$,

3) $\int_a^{\omega} f(x, y) dx$ անհսկական ինտեգրալը զուգամիտում է զոնե մեկ կետում,

4) $\int_a^{\omega} f'_y(x, y) dx$ ինտեգրալը $[c, d]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է:

Այդ դեպքում

ա) $I(y) = \int_a^{\omega} f(x, y) dx$ ինտեգրալը $[c, d]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է,

բ) $I(y)$ ֆունկցիան $[c, d]$ հատվածում դիֆերենցելի է և

$$I'(y) = \int_a^{\omega} f'_y(x, y) dx, \quad y \in [c, d]$$

(այլ կերպ ասած՝ I ֆունկցիայի ածանցյալը կարելի է հաշվել L այբնիցի կանոնով):

► Վերցնենք կամայական $A_n \uparrow \omega$ հաջորդականություն և նշանակենք՝

$$g_n(y) = \int_a^{A_n} f(x, y) dx :$$

Այդ դեպքում $g_n(y)$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը կբավարարի ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների ածանցման վերաբերյալ թեորեմ 3.5-ի (X, §3, 4) պայմաններին: Իրոք, պարամետրից կախված իսկական ինտեգրալի ածանցման թեորեմ 2.3-ի համաձայն, g_n ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են $[c, d]$ հատվածում և

$$g'_n(y) = \int_a^{A_n} f'_y(x, y) dx :$$

Բացի դրանից, 4)-ից հետևում է, որ $g'_n(y)$ հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամետ է $[c, d]$ հատվածում: Հետևաբար, նշված թերեւմ 3.5'-ի համաձայն, կստանանք՝

Ա) $g_n(y) \rightarrow I(y), \quad y \in [c, d],$

Բ) I -ն $[c, d]$ -ում դիֆերենցելի է և $g'_n(y) \rightarrow I'(y):$

Վերջապես, հավասարաչափ զուգամիտության Հայնեի սահմանման համաձայն, Ա)-ից հետևում է ա)-ն, իսկ Բ)-ից՝ բ)-ն: ■

Ապացուցված թերեւմի օգնությամբ հաշվենք Դիրիխլեի ինտեգրալը՝

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx :$$

Նշանակենք՝

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx, \quad a \in [0, \infty): \quad (4.10)$$

Ինչպես գիտենք ($\S 3, \quad 3, \quad 2^0$), (4.10) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի $\mathcal{D}\mathcal{I}\mathcal{A}\mathcal{B}$ -ի անընդհատության վերաբերյալ թերեւմի համաձայն, $I(a)$ ֆունկցիան անընդհատ է $[0, \infty)$ միջակայքում: Հետևաբար՝

$$I = I(0) = \lim_{a \rightarrow 0^+} I(a): \quad (4.11)$$

$I(a)$ -ն հաշվելու համար նախ Լայբնիցի կանոնով հաշվենք $I'(a)$ -ն՝

$$I'(a) = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx, \quad a > 0 : \quad (4.12)$$

Այսուղեա Լայբնիցի կանոնը կիրառելի է, քանի որ յուրաքանչյուր $a > 0$ թվի համար (4.12) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է $\left[\frac{a}{2}, \infty \right)$

միջակայքում, հետևաբար, a կետում (4.12) հավասարությունը ճիշտ է:

(4.12)-ի մեջ տեղադրելով աջ կողմի ինտեգրալի արժեքը (XI, §1, 2)` կստանանք, որ $I'(a) = -\frac{1}{1+a^2}$, $a > 0$: Հետևաբար՝

$$I(a) = -arctga + C : \quad (4.13)$$

C հաստատունը հաշվելու համար (4.13) հավասարության մեջ a -ն ձգտեցնենք $+\infty$ -ի: Քանի որ $a > 0$ դեպքում

$$|I(a)| \leq \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \rightarrow 0, \quad a \rightarrow +\infty,$$

ապա (4.13)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք $C = \frac{\pi}{2}$: Հետևաբար,

$$I(a) = \frac{\pi}{2} - arctga \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad a \rightarrow 0 : \quad (4.11)-ի համաձայն՝ I = \frac{\pi}{2} :$$

4. ՊԿԱԲ-ի ինտեգրումը:

Թեորեմ 4.5: Եթե

1) $f \in C([a, \omega) \times [c, d])$,

2) $I(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx$ սահմանական ինտեգրալը $[c, d]$ հատվածում

հավասարաշափ զուգամետ է, ապա

$$\int_c^d \left\{ \int_a^\omega f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^\omega \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx : \quad (4.14)$$

► Վերցնենք կամայական $A \in (a, \omega)$ թիվ: Այդ դեպքում պարամետրից կխալված իսկական ինտեգրալի ինտեգրման թեորեմ 2.4-ի համաձայն կստանանք՝

$$\int_c^d \left\{ \int_a^A f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^A \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx : \quad (4.15)$$

Այսուղ Ա-ն ձգտեցնենք ω -ի և համոզվենք, որ ճախ կողմի ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ: Նշանակենք՝

$$F(y, A) = \int_a^A f(x, y) dx, \quad y \in [c, d] :$$

Այդ դեպքում՝

1⁰) $F(\cdot, A) \in C[c, d]$ (ըստ թեորեմ 2.2-ի),

2⁰) $F(y, A) \rightarrow I(y), \quad A \rightarrow \omega, \quad y \in [c, d]$ (ըստ այս թեորեմի 2)

պայմանի):

Այժմ կիրառելով թեորեմ 2.1-ը՝ (4.15)-ի ձախ կողմի իմտեզրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել իմտեզրալի նշանի տակ և, (4.15)-ում անցնելով սահմանի*, երբ $A \rightarrow \omega$, կստանանք (4.14)-ը: ■

Հետևանք: Եթե

$$1) \quad 0 \leq f(x, y) \in C([a, \omega) \times [c, d]), \quad 2) \quad I(y) = \int_a^\omega f(x, y) dx \quad \text{իմտեզրալը}$$

կետորեն զուգամետ է $[c, d]$ հատվածում, 3) $I \in C[c, d]$, ապա տեղի ունի (4.14)-ը:

► **ՊԿԱԲ-ի** հավասարաչափ զուգամիտության Դինիի հայտանիշի համաձայն, նշված պայմաններում $\int_a^\omega f(x, y) dx \quad \text{իմտեզրալը} \quad [c, d]$

հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է, ուստի բավարարվում են թեորեմ 4.5-ի պայմանները, հետևաբար տեղի ունի (4.14)-ը: ■

5. ՊԿԱԲ-ի անխական իմտեզրալ:

Թեորեմ 4.6: ‘*Hgntip’*

1) $f(x, y) \in C([a, \omega) \times [c, \omega_1)), \quad a < \omega \leq \infty ; \quad c < \omega_1 \leq \infty,$

2) $\omega) \quad \int_a^\omega f(x, y) dx \quad \text{իմտեզրալը} \quad \text{հավասարաչափ} \quad \text{զուգամետ} \quad \text{է}$

յորաքանչյոր $[c, d]$ հատվածում, $d \in (c, \omega_1)$,

* Հստ ամիսկական իմտեզրալի սահմանման, (4.15)-ի աջ կողմի իմտեզրալը կճզուի (4.14)-ի աջ կողմի իմտեզրալին:

$$p) \quad \int_c^{\omega_1} f(x, y) dy \quad \text{ինտեգրալը} \quad \text{հավասարաշափ} \quad \text{զուգամետ} \quad t$$

յուրաքանչյուր $[a, b]$ հասկածում, $b \in (a, \omega)$,

$$3) \quad \int_a^{\omega} \left\{ \int_c^{\omega_1} |f(x, y)| dy \right\} dx \quad \text{ինտեգրալը} \quad (\text{կամ} \quad \text{մյուս} \quad \text{հաջորդական})$$

ինտեգրալը զուգամետ է:

$$\text{Այդ} \quad \eta \text{եպքում} \quad \int_c^{\omega} \left\{ \int_a^{\omega} f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^{\omega} \left\{ \int_c^{\omega_1} f(x, y) dy \right\} dx \quad \text{ինտեգրալները}$$

զուգամետ են ու

$$\int_c^{\omega} \left\{ \int_a^{\omega} f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^{\omega} \left\{ \int_c^{\omega_1} f(x, y) dy \right\} dx : \quad (4.16)$$

► Վերցնենք կամայական $C \in [c, \omega_1]$ թիվ: Այդ դեպքում ա)-ի և նախորդ թեորեմի համաձայն՝

$$\int_c^C \left\{ \int_a^{\omega} f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^{\omega} \left\{ \int_c^C f(x, y) dy \right\} dx : \quad (4.17)$$

Այսուել C -ն ճգնեցնենք ω_1 -ի և համոզվենք, որ աջ կողմի ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ: Նշանակելով

$$F(x, C) = \int_c^C f(x, y) dy, \quad x \in [a, \omega)$$

ու օգտվելով բ)-ից՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $A \in (a, \omega)$ թվի համար

$$1^0) \quad F(x, C) \Rightarrow \int_c^{\omega_1} f(x, y) dy, \quad C \rightarrow \omega_1, \quad x \in [a, A]:$$

Բացի այդ՝

$$|F(x, C)| \leq \int_c^C |f(x, y)| dy \leq \int_c^{\omega_1} |f(x, y)| dy, \quad C \in [c, \omega_1],$$

ուստի 3) պայմանի և մաժորանուն հայտանիշի համաձայն կստանանք, որ

2⁰) $F(x, C)$ ֆունկցիայի ինտեգրալն ըստ x -ի $[a, \omega)$ միջակայքում հավասարաչափ զուգամետ է:

Թեորեմ 4.2-ի համաձայն, 1⁰) -2⁰)-ից հետևում է, որ (4.17)-ի աջ կողմից ինտեգրալում կարելի է սահմանային անցում կատարել ինտեգրալի նշանի տակ, եթե $C \rightarrow \omega_1 : \text{Արդյունքում կստացվի} (4.16)\text{-ը: } \blacksquare$

Հակաօրինակ: Բերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ առանց երրորդ պայմանի այս թեորեմի եզրակացությունը ճիշտ չէ: Դիտարկենք

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \in C([a, \infty) \times [a, \infty)), \quad a > 0$$

ֆունկցիան: Դժվար չեն սոուզել, որ թեորեմ 4.6-ի առաջին երկու պայմանները բավարարվում են: Իբրոք, $A \geq a$ դեպքում՝

$$\int_A^\infty f(x, y) dx = -\frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_{x=A}^\infty = \frac{A}{A^2 + y^2} < \frac{1}{A},$$

ինչը ցույց է տալիս, որ ա) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է ամբողջ թվային առանցքի վրա (քանի որ ինտեգրալի պոչը հավասարաչափ ձգուում է զրոյի): Նույնը ճիշտ է նաև բ) ինտեգրալի համար:

Մյուս կողմից՝

$$\int_a^\infty dx \int_a^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4} = \int_a^\infty dy \int_a^\infty \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx :$$

Հետևանք (Դրական ֆունկցիայի դեպքը): Եթե

1) $0 \leq f(x, y) \in C([a, \omega) \times [c, \omega_1))$,

$$2) \text{ա) } \int_a^\omega f(x, y) dx = I(y) \in C[c, \omega_1), \quad \text{բ) } \int_c^{\omega_1} f(x, y) dy = J(x) \in C[a, \omega),$$

ապա*

$$\int_c^{\omega_1} \left\{ \int_a^\omega f(x, y) dx \right\} dy = \int_a^{\omega_1} \left\{ \int_c^{\omega_1} f(x, y) dy \right\} dx : \tag{4.16}$$

* Այս երկու հաջորդական ինտեգրալները զուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:

► **ՊԿԱԻ-ի** հավասարաչափ զուգամիտության Դինիի հայտանիշի համաձայն, թեորեմ 4.6-ի 2) պայմանի ա) և բ) կետերը բավարարված են:

Այժմ, եթե (4.16) հաջորդական ինտեգրալներից որևէ մեկը զուգամեռ է, ապա բավարարված կլինի նաև թեորեմ 4.6-ի 3) պայմանը, հետևաբար, տեղի կունենա (4.16) հավասարությունը: Իսկ եթե (4.16) հաջորդական ինտեգրալները երկուսն էլ տարամետ են, ապա նրանց երկուսի արժեքներն ել $+\infty$ -ն է, հետևաբար, նորից տեղի ունի (4.16) հավասարությունը: ■

Դիտողություն: Այս պարագափում մենք դիտարկեցինք այն անխական ինտեգրալները, որոնցում միակ եզակիությունը ինտեգրալի վերին սահմանն էր: Դժվար չէ համոզվել, որ 4.1-4.6 թեորեմները ճիշտ են նաև այն դեպքում, եթե անխական ինտեգրալի եզակիությունը ինտեգրալի ստորին սահմանն է: Իսկ եթե ինտեգրալի թե՛ վերին և թե՛ ստորին սահմանները եզակիություններ են՝

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(x, y) dx, \quad (4.18)$$

վերցնելով կամայական $a \in (\omega_1, \omega_2)$ կետ, (4.18) ինտեգրալը կներկայացնենք

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \cdot = \int_{\omega_1}^a \cdot + \int_a^{\omega_2} \cdot.$$

զումարի տեսքով և, եթե ենթադրենք, որ $\int_{\omega_1}^a \cdot$ և $\int_a^{\omega_2} \cdot$ ինտեգրալների համար

4.1-4.6 թեորեմները ճիշտ են, ապա նրանք ճիշտ կլինեն նաև (4.18) ինտեգրալի համար:

Բացի դրանց, նոյն դատողությունների միջոցով կհամոզվենք, որ թեորեմ 4.6-ի և նրա հետևանքի մեջ ոչ միայն a -ն կարող է լինել եզակիության կետ*, այլ նաև c -ն: Այս դեպքում հետևանքը կձևակերպվի հետևյալ կերպ:

Հետևանք: Եթե

$$I) \quad 0 \leq f(x, y) \in C((a, \omega) \times (c, \omega_1)),$$

* Ինտեգրալների վերին սահմաններից բացի:

$$2) \text{ у) } \int\limits_a^{\omega} f(x, y) dx \in C(c, \omega_1), \text{ п) } \int\limits_c^{\omega} f(x, y) dy \in C(a, \omega),$$

ապա տեղի ունի (4.16)-ը:

Օգտվելով այս դիտողությունից՝ հաշվենք E_{JL} -ը - Պուասոնի ինտեգրալը.

$$I := \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx :$$

Վերցնենք կամայական $t > 0$ թիվ և կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = ty$: Կատանանք՝

$$I = \int\limits_0^{\infty} te^{-t^2 y^2} dy :$$

Այս հավասարության երկու կողմբ բազմապատկենք e^{-t^2} ֆունկցիայով և ստացված հավասարությունն ինտեգրենք $(0, \infty)$ բաց միջակայքում.

$$\begin{aligned} I^2 &= \int\limits_0^{\infty} Ie^{-t^2} dt = \int\limits_0^{\infty} \left\{ \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2} te^{-t^2 y^2} dy \right\} dt = \\ &= \int\limits_0^{\infty} \left\{ \int\limits_0^{\infty} e^{-t^2(1+y^2)} t dt \right\} dy = \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{\pi}{4}; \\ \zeta_{\text{ետևարար}} I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}: \end{aligned}$$

6. Միայն x -ից կախված արտադրիչի ներմուծումը: Այստեղ մենք կապացուենք մի թեորեմ, որը մեզ պետք կգա Ֆուրիեի ինտեգրալն ուսումնասիրելիս (XIV գլուխում):

Թեորեմ 4.7: Եթե

- 1) $f(x, y) \in C([a, \infty) \times [c, d])$ և $|f(x, y)| \leq M$, $x \in [a, \infty)$, $y \in [c, d]$,
- 2) $g(x)$ -ը բացարձակ ինտեգրելի է $[a, \infty)$ միջակայքում, ապա

$$\text{ա) } I(y) = \int\limits_a^{\infty} f(x, y) g(x) dx, \quad y \in [c, d], \tag{4.19}$$

ինտեգրալը հավասարաշափ զուգամետ է $[c, d]$ -ում,

p) $I \in C[c, d]$,

$$q) \int_c^d \left\{ \int_a^\infty f(x, y)g(x)dx \right\} dy = \int_a^\infty \left\{ \int_c^d f(x, y)g(x)dy \right\} dx : \quad (4.20)$$

► ա) Քանի որ

$$|f(x, y)g(x)| \leq M|g(x)|, \quad y \in [c, d],$$

ապա 2) պայմանից և մաժորանուն հայտանիշից հետևում է, որ (4.19) ինտեգրալը հավասարաշափ զուգամետ է $[c, d]$ հատվածում:

թ) Քանի որ

$$F(y, A) = \int_a^A f(x, y)g(x)dx$$

ֆունկցիան յուրաքանչյուր հաստատագրված $A \in (a, \infty)$ արժեքի դեպքում անընդհատ է ըստ y -ի $[c, d]$ -ում (թեորեմ 2.1'), և

$$F(y, A) \rightrightarrows I(y), \quad A \rightarrow \infty, \quad y \in [c, d], \quad (4.21)$$

ապա $I \in C[c, d]$:

զ) Ունենք, որ (ըստ §2, 4-ի վերջում նշված թեորեմ 2.4-ի նմանակի)

$$\int_c^d \left\{ \int_a^A f(x, y)g(x)dx \right\} dy = \int_a^A \left\{ \int_c^d f(x, y)g(x)dy \right\} dx, \quad A \in (a, \infty): \quad (4.22)$$

Այսուղ անցնելով սահմանի*, եթե $A \rightarrow \infty$, կստանանք (4.20)-ը: ■

§5. ԵՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Առաջին սերի էլլերյան ինտեգրալ: Մենք ցույց ենք տվել (XII, §2, 1), որ

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \quad (5.1)$$

ինտեգրալը զուգամիտում է a և b պարամետրերի դրական արժեքների դեպքում:

* (4.21)-ի համաձայն, (4.22)-ում կարելի է կատարել սահմանային անցում ինտեգրալի նշանի տակ:

Այստեղ մենք կապացուցենք B ֆունկցիայի մի քանի պարզագույն հատկություններ:

$$1^0. \quad B(a, b) = B(b, a) :$$

► Այս հատկությունն ապացուցելու համար (5.1)-ում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = 1 - t$: Կստանանք՝

$$B(a, b) = - \int_1^0 (1-t)^{a-1} t^{b-1} dt = \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{a-1} dt = B(b, a) : \blacksquare$$

$$2^0. \text{Եթե } b > 1, \text{ ապա}$$

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1) : \quad (5.2)$$

► (5.1)-ում կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$\begin{aligned} B(a, b) &= \frac{1}{a} \int_0^1 (1-x)^{b-1} dx^a = \frac{1}{a} x^a (1-x)^{b-1} \Big|_0^1 - \\ &- \frac{1}{a} \int_0^1 x^a d(1-x)^{b-1} = \frac{b-1}{a} \int_0^1 x^a (1-x)^{b-2} dx : \end{aligned}$$

Այսուհետև, օգտվելով

$$x^a (1-x)^{b-2} = x^{a-1} (1-x)^{b-2} - x^{a-1} (1-x)^{b-1}$$

նույնությունից, կստանանք

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a} B(a, b-1) - \frac{b-1}{a} B(a, b)$$

հավասարությունը: Այստեղից հաշվելով $B(a, b)$ -ն՝ կհանգենք (5.2)-ին: ■

Հետևանք:

$$B(a, n) = \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} : \quad (5.3)$$

► Ապացուցենք մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ դեպքում ունենք՝

$$B(a, 1) = \int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a},$$

Այսինքն՝ (5.3)-ը $n = 1$ դեպքում ճիշտ է:

Այսուհետև, եթե (5.3)-ը n բնական թվի համար ճիշտ է, ապա (5.2)-ի շնորհիվ այն ճիշտ կլինի նաև $(n + 1)$ -ի համար: ■

Մասնավոր դեպքում, եթե a -ն էլ է բնական թիվ՝ $a = m$, կստանանք՝

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} :$$

$$3^0. B(a, b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy : \quad (5.4)$$

► Ապացուցենու համար (5.1)-ում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝

$$x = \frac{y}{1+y}, \quad y \in [0, \infty) :$$

$$\text{Այդ դեպքում } 1-x = \frac{1}{1+y} \text{ և } dx = \frac{dy}{(1+y)^2} :$$

Տեղադրելով այս արժեքները (5.1)-ի մեջ՝ կստանանք (5.4)-ը: ■

2. Երկրորդ սեռի ելեկուան ինտեգրալ: Մենք ցույց ենք տվել (X1, §2, 1), որ

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \quad (5.5)$$

ինտեգրալը զուգամիտում է $a > 0$ դեպքում:

Այստեղ մենք հանգամանորեն կուսումնասիրենք Γ ֆունկցիայի հատկությունները:

$$1^0. \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) : \quad (5.6)$$

► (5.5)-ում կատարելով մասերով ինտեգրում՝ կստանանք

$$\Gamma(a) = \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-x} dx^a = \frac{1}{a} e^{-x} x^a \Big|_0^\infty + \frac{1}{a} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx = \frac{1}{a} \Gamma(a+1) : ■$$

$$\text{Հետևանք: } \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (5.7)$$

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$

դեպքում՝ $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$: Այսինքն՝ (5.7)-ը $n = 1$ դեպքում ճիշտ է:

Այնուհետև, եթե (5.7)-ը n բնական թվի համար ճիշտ է, ապա (5.6)-ի շնորհիվ այն ճիշտ կլինի նաև $(n+1)$ -ի համար: ■

2⁰. Γ -ա ($0, \infty$) միջակայքում անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա է և

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^\infty x^{a-1} (\ln x)^n e^{-x} dx, \quad a \in (0, \infty), \quad n = 1, 2, \dots : \quad (5.8)$$

► Այս բանաձևը կապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով՝ օգտվելով **ՊԿԱՀ**-ի ածանցման Լայբնիցի կանոնից: Դրա համար պետք է ցույց տանք, որ յուրաքանչյուր $a \in (0, \infty)$ կետում (կետի շրջակայքում) (5.8) ինտեգրալների համար Լայբնիցի կանոնը կիրառելի է: Այսինքն՝ պետք է ապացուցենք, որ յուրաքանչյուր հաստատված $n \in N$ բնական թվի համար (5.8) ինտեգրալը կամայական $a \in (0, \infty)$ կետի շրջակայքում ըստ a պարամետրի զուգամիտում է հավասարաչափ: Իսկ դրա համար բավական է ապացուցենք, որ (5.8) ինտեգրալը հավասարաչափ զուգամետ է կամայական $[c, d] \subset (0, \infty)$ փակ հատվածում:

Քանի որ (5.8) անխվական ինտեգրալի եզակիությունները $x=0$ և $x=\infty$ կետերն են, ուստի պետք է ապացուցենք ($\S 3, 1$), որ

$$\int_0^1 x^{a-1} (\ln x)^n e^{-x} dx \text{ և } \int_1^\infty x^{a-1} (\ln x)^n e^{-x} dx$$

ինտեգրալները հավասարաչափ զուգամետ են $[c, d]$ հատվածում: Դա հետևում է մաժորանուով հայտանիշից, քանի որ այդ ինտեգրալներից առաջնի համար մաժորանու է հանդիսանում $g(x) = x^{c-1} |\ln x|^n$ ֆունկցիան, իսկ երկրորդի համար՝ $h(x) = Mx^d e^{-x}$ ֆունկցիան, որտեղ $M = \max_{x \in [1, \infty)} \frac{(\ln x)^n}{x}$: Համոզվելու համար, որ g և h ֆունկցիաների ինտեգրալները համապատասխանաբար $(0, 1]$ և $[1, \infty)$ միջակայքերում զուգամետ են, g և h ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը ներկայացնենք երկու ֆունկցիաների արտադրյալի տեսքով՝

$$g(x) = x^{\frac{c}{2}-1} \cdot \left(x^{\frac{c}{2}} |\ln x|^n \right), \quad h(x) = \frac{M}{x^2} \cdot (x^{d+2} e^{-x}),$$

որտեղ առաջին արտադրիչների իմտեգրալները համապատասխան միջակայքերում զուգամետ են, իսկ երկրորդ արտադրիչները սահմանափակ են: Բաղդատման առաջին հայտաճիշի համաձայն, g և h ֆունկցիաների իմտեգրալները համապատասխանաբար $(0,1]$ և $[1,\infty)$ միջակայքերում զուգամետ են: ■

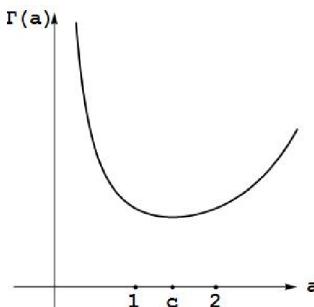
3⁰. Γ ֆունկցիայի գրաֆիկի տեսքը պարզելու համար (5.8)-ը դիտարկենք $n=2$ դեպքում: Կատանաճը $\Gamma''(a) > 0$, $a \in (0, \infty)$, ուստի $\Gamma'(a)$ ֆունկցիան $(0, \infty)$ միջակայքում աճում է:

Մյուս կողմից, (5.6)-ի համաձայն, $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$: Հետևաբար, Ո՞ղիքերինի համաձայն, զոյտթյուն ունի $c \in (1, 2)$ կետ, այնպիսին, որ $\Gamma'(c) = 0$: Ուստի $\Gamma'(a) < 0$, եթե $a \in (0, c)$ և $\Gamma'(a) > 0$, եթե $a \in (c, \infty)$:

Այսինքն՝ Γ ֆունկցիան $(0, c]$ միջակայքում նվազում է, իսկ $[c, \infty)$ միջակայքում՝ աճում:

Բացի դրանից, (5.6)-ի համաձայն, $\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a} \sim \frac{1}{a}$, եթե $a \rightarrow 0$:

Այսպիսով, Γ ֆունկցիայի գրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը՝



3. Էլլեր - Գառափ բանաձև: Ապացույցինք, որ

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} : \quad (5.9)$$

► Այս բանաձևն ապացուցելու համար (5.5) իմտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝

$$e^{-x} = z, \quad x = \ln \frac{1}{z}, \quad dx = -\frac{dz}{z}, \quad z \in (0,1):$$

Տեղադրելով այս արժեքները (5.5)-ում՝ կստանանք

$$\Gamma(a) = \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{z} \right)^{a-1} dz \quad (5.10)$$

ներկայացումը: Եթեք հիմնական սահմաններից երկրորդի համաձայն՝

$$n \left(1 - z^{\frac{1}{n}} \right) \rightarrow \ln \frac{1}{z}, \text{ եթե } n \rightarrow \infty:$$

Ապացուցենք, որ $n(1 - z^{1/n})$ ֆունկցիոնալ հաջորդականությունը $(0,1)$ միջակայքին պատկանող z -երի դեպքում աճող է՝

$$n(1 - z^{1/n}) \uparrow \ln \frac{1}{z}, \quad z \in (0,1): \quad (5.11)$$

Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր հաստատագրված $z \in (0,1)$ արժեքի դեպքում $\varphi(t) = \frac{1 - z^t}{t}$ ֆունկցիան $(0,1)$

միջակայքում նվազող է, այսինքն՝ $\varphi'(t) \leq 0$: Քանի որ

$$\varphi'(t) = \frac{-tz^t \ln z - (1 - z^t)}{t^2} = \frac{z^t - z^t \ln z^t - 1}{t^2},$$

ապա, նշանակելով $z^t = x$, պետք է ապացուցենք

$$\psi(x) := x - x \ln x \leq 1, \quad x \in (0,1)$$

անհավասարությունը: Դա իր հերթին հետևում է նրանից, որ ψ ֆունկցիան $(0,1]$ միջակայքում աճող է* և $\psi(1) = 1$:

Վերադառնանք (5.9)-ի ապացույցին: Նախ քննարկենք $a > 1$ դեպքը: Այդ դեպքում թերեւմ 4.3-ի համաձայն, (5.10)-ից և (5.11)-ից հետևում է, որ

* Քանի որ $\psi'(x) = -\ln x > 0$, $x \in (0,1)$:

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-1} \int_0^1 (1 - z^{1/n})^{a-1} dz :$$

Այս ինտեգրալում կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$$1 - z^{1/n} = y, \quad z = (1 - y)^n, \quad dz = -n(1 - y)^{n-1} dy,$$

կստանանք՝

$$\Gamma(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \int_0^1 y^{a-1} (1 - y)^{n-1} dy = \lim_{n \rightarrow \infty} n^a B(a, n) :$$

Հաշվի առնելով (5.3)-ը՝ այսուեղից կստանանք (5.9)-ը:

Մնաց քննարկելու $a \in (0, 1)$ դեպքը: Այս դեպքում էլ, (5.6)-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} \Gamma(a) &= \frac{1}{a} \Gamma(a+1) = \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a+1} \frac{(n-1)!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+1+n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^a \frac{(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}, \end{aligned}$$

ինչ պահանջվում էր ապացուցել: ■

4. B և Γ ֆունկցիաների կապը: Ապացուցենք հետևյալ բանաձևը՝

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} : \quad (5.12)$$

► Վերցնենք կամայական $t > 0$ թիվ և (5.5) ինտեգրալում կատարենք փոփոխականի փոխարինում՝ $x = ty$: Կստանանք՝

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1} e^{-ty} dy : \quad (5.12')$$

Այսուղի առ փոխարինելով $(a+b)$ -ով, իսկ t -ն՝ $(1+t)$ -ով՝ կստանանք

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy$$

հավասարությունը, որի երկու կողմքը բազմապատկելով t^{a-1} -ով՝ կստանանք

$$\Gamma(a+b) \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} = \int_0^\infty t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(t+1)y} dy \quad (5.13)$$

բանաձևը: Հավասարության երկու կողմը ինտեգրելով ըստ t -ի $(0, \infty)$ միջակայքում և հաշվի առնելով (5.4)-ը՝ կստանանք

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(t+1)y} dy \right\} dt : \quad (5.14)$$

Ցույց տանք, որ այստեղ կարելի է ինտեգրման հերթականությունը փոխել: Կրա համար համոզվենք, որ

$$f(t,y) := t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(t+1)y} \in C((0,\infty) \times (0,\infty))$$

դրական ֆունկցիան բավարարում է §4, կետ 5-ի հետևանք՝ ա) և բ) պայմաններին:

Հաշվի առնելով (5.12)-ը՝ կստանանք

$$ա) \int_0^\infty f(t,y) dt = y^{a+b-1} \cdot e^{-y} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt = y^{b-1} e^{-y} \Gamma(a) \in C(0,\infty) : \quad (5.15)$$

(5.13)-ի համաձայն՝

$$բ) \int_0^\infty f(t,y) dy = \Gamma(a+b) \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} \in C(0,\infty) :$$

Փոխելով (5.14)-ում ինտեգրման հերթականությունը և հաշվի առնելով (5.15)-ը՝ կստանանք

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty f(t,y) dt \right\} dy = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

ինչը համարժեք է (5.12)-ին: ■

5. Γ ֆունկցիայի լրացման բանաձև: Ապացուցենք, որ եթե $0 < a < 1$, ապա

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi} : \quad (5.16)$$

► Այս բանաձևը հետևում է Եյլեր - Գաուսի բանաձևից և Եյլերի հետևյալ բանաձևից (XIV, §3, 4).

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right);$$

Այստեղ տեղադրենք $x = a\pi$ ՝

$$\sin a\pi = a\pi \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{k^2} \right); \quad (5.17)$$

Էյլեր - Գաուսի բանաձևի համաձայն՝

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(1-a) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a(n-1)!}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} \cdot \frac{n^{1-a} \cdot (n-1)!}{(1-a)(1-a+1)\cdots(1-a+n-1)} = \\ &= \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a}{n-1}\right)} \cdot \frac{n}{\left(1-\frac{a}{1}\right)\left(1-\frac{a}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{n-1}\right)(n-a)} = \\ &= \frac{1}{a} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{a^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{a \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{k^2}\right)}; \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով (5.17)-ը՝ այստեղից կստանանք (5.16)-ը: ■

Կրկին հաշվենք Էյլեր - Պուասոնի ինտեգրալը՝ այս անգամ օգտվելով Γ ֆունկցիայի լրացման բանաձևից: (5.16)-ում տեղադրենք $a = \frac{1}{2}$:

Կստանանք՝ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ՝ հետևաբար՝

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

XIII ԳԼՈՒԽ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ, ՍՏԻԼՏԵՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

§1. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1. Ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանումը. վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ: Դիցուք՝ $f : [a, b] \rightarrow R$: Վերցնենք $[a, b]$ հատվածի որևէ P տրոհում՝ $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ և նշանակենք՝

$$V(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| :$$

Այս գումարը կոչվում է f ֆունկցիայի վարիացիոն գումար (P տրոհմանը համապատասխանող): Եռանկյան անհավասարությունից հետևում է, որ տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս (տրոհումը մանրատելիս) վարիացիոն գումարը կարող է միայն մննանալ:

Բոլոր տրոհումներին համապատասխանող վարիացիոն գումարների ճշգրիտ վերին եզրը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է $[a, b]$ հատվածում

$$f \text{ ֆունկցիայի լրիվ վարիացիա և նշանակվում՝ } \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) :$$

Եթե $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) < \infty$, ապա f -ն անվանում են վերջավոր (սահմանափակ) վարիացիայի ֆունկցիա $[a, b]$ հատվածում: $[a, b]$ հատվածում վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների բազմությունը նշանակվում է $BV[a, b]$ սիմվոլով:

Սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիան սահմանափակ է: Իսկապես, եթե $a \leq x \leq b$, ապա $|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$, որտեղից էլ՝

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + |f(a)| :$$

Նշենք վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների մի քանի դասեր:

1^o. Հատվածում մոնուռն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի t , ընդունում՝

$$\underset{a}{\overset{b}{V}}(f) = |f(b) - f(a)| :$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանումից:

2^o. Սահմանում: Կասենք, որ f -ը $[a, b]$ հատվածում բավարարում է L լիազիցի պայմանին, եթե գոյություն ունի $L > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|,$$

կամայական $x, y \in [a, b]$ կետերի համար:

L լիազիցի պայմանին բավարարող ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $Lip[a, b]$ սիմվոլով:

Ապացույցներ, որ տեղի ունի հետևյալ ներառումը՝

$$Lip[a, b] \subset BV[a, b]:$$

► Իբր, $[a, b]$ հատվածի $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ տրոհման համար՝

$$V(f, P) \leq \sum_{i=0}^{n-1} L[x_{i+1} - x_i] = L(b - a) : \blacksquare$$

3^o. Եթե f -ը $[a, b]$ դիմումում և $|f'(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, ապա $f \in BV[a, b]$:

► Լազրանմի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն՝

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| \leq M|x - y|, \quad x, y \in [a, b]:$$

Ուստի՝ $f \in Lip[a, b] \subset BV[a, b]$: ■

Ներկայացնենք ոչ վերջավոր (անվերջ) վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիայի օրինակ՝

$$f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}, \quad x \in (0, 1] \text{ և } f(0) = 0 :$$

Վերցնենք $[0, 1]$ հատվածի

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

տրոհումը: Քանի որ

$$\cos 2k \frac{\pi}{2} = (-1)^k, \quad \cos(2k-1) \frac{\pi}{2} = 0,$$

ապա

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^n 2 \left| \frac{1}{2k} (-1)^k \right| = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow \infty, \text{ եթե } n \rightarrow \infty:$$

2. Փոխուսական վերին սահմանով ինտեղրալի վարիացիան:

Թեորեմ 1.1: Եթե $\varphi \in \mathfrak{R}[a, b]$ և $f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$, ապա $f \in BV[a, b]$ և

$$V_a^b(f) = \int_a^b |\varphi(t)| dt :$$

► Դիցուք՝ $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$: Քանի որ

$$V(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |\varphi(t)| dt = \int_a^b |\varphi(t)| dt ,$$

ուստի

$$V_a^b(f) \leq \int_a^b |\varphi(t)| dt :$$

Ապացույնը հակառակ անհավասարությունը: Ունենք՝

$$\begin{aligned} V_a^b(f) &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(t) dt \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x_i) dt - \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi(x_i) - \varphi(t)] dt \right| \geq \\ &\geq \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi(x_i) dt \right| - \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [\varphi(x_i) - \varphi(t)] dt \right| \right\} \geq \sum_{i=0}^{n-1} |\varphi(x_i) \Delta x_i| - \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi) \Delta x_i , \end{aligned}$$

որտեղ $\omega_i(\varphi)$ -ն φ ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում:
Այսինքն անցնենք սահմանի, եթե տրոհման տրամագիծը ձգողությունը:

$\varphi \in \mathfrak{R}[a, b]$ պայմանի շնորհիվ $\sum \omega_i(\varphi) \Delta x_i$ գումարը կճշտի զրոյի, իսկ $\sum |\varphi(x_i)| \Delta x_i$ գումարը կճշտի $|\varphi|$ ֆունկցիայի ինտեգրալին: Կատանանք՝

$$\int_a^b V(f) \geq \int_a^b |\varphi(t)| dt :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

3. $BV[a, b]$ դասի կառուցվածքը:

Թեորեմ 1.2: Յանկացած $f, g \in BV[a, b]$ ֆունկցիաների համար՝

ա) $\alpha f + \beta g \in BV[a, b]$ ($\alpha, \beta \in R$), բայց որում,

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) \leq |\alpha| \int_a^b f + |\beta| \int_a^b g,$$

բ) $|f| \in BV[a, b]$, բայց որում $\int_a^b |f| \leq \int_a^b f$,

գ) $fg \in BV[a, b]$, բայց որում $\int_a^b (fg) \leq \sup_{[a, b]} |g(x)| \int_a^b f + \sup_{[a, b]} |f(x)| \int_a^b g$,

դ) եթե $|g(x)| \geq m > 0$, $x \in [a, b]$, ապա $\frac{1}{g} \in BV[a, b]$, բայց որում,

$$\int_a^b \left(\frac{1}{g} \right) \leq \frac{1}{m^2} \int_a^b g :$$

► Այս պնդումներն անմիջապես հետևում են ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանումից: Ապացուենք, օրինակ, զ)-ն: Նշանակելով $h = fg$,

$$M_f = \sup_{[a, b]} |f(x)|, M_g = \sup_{[a, b]} |g(x)|, \text{կատանանք՝}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} |h(x_{i+1}) - h(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})g(x_{i+1}) - f(x_i)g(x_i)| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1})[g(x_{i+1}) - g(x_i)] + g(x_i)[f(x_{i+1}) - f(x_i)]| \leq$$

$$\leq M_f \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| + M_g \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq$$

$$\leq M_f \int_a^b g + M_g \int_a^b f :$$

Հետևաբար

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(h) \leq M_g \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + M_f \overset{b}{\underset{a}{V}}(g): \blacksquare$$

4. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկտիվների հիմնական հատկությունը:

Թեորեմ 1.3: Որպեսզի $f \in BV[a, b]$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $c \in (a, b)$ կետի համար $[a, c]$ և $[c, b]$ միջակայքերից յուրաքանչյուրում f -ը լինի վերջավոր վարիացիայի, ընդ որում,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f): \quad (1.1)$$

► **Անհրաժեշտություն:** Վերցնենք $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածների կամայական տրոհումներ՝ P_1 և P_2 , և նշանակենք՝ $P = P_1 \cup P_2$: Կատանանք՝

$$V(f, P_1) \leq V(f, P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \quad V(f, P_2) \leq V(f, P) \leq \overset{b}{\underset{a}{V}}(f),$$

հետևաբար, $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածներից յուրաքանչյուրում f -ը վերջավոր վարիացիայի է:

(1.1) հավասարությունն ապացուցենք՝ ցույց տալով, որ

$$\text{ա) } \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f), \quad \text{բ) } \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \geq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f):$$

ա)-ն ապացուցելու համար վերցնենք $[a, b]$ հատվածի կամայական P տրոհում և նշանակենք $P' = P \cup \{c\}$: Այնուհետև, $P_{[a, c]}$ -ով նշանակենք P' տրոհման այն կետերի (կարգավորված) բազմությունը, որոնք պատկանում են $[a, c]$ հատվածին, իսկ $P_{[c, b]}$ -ով՝ P' տրոհման այն կետերի բազմությունը, որոնք պատկանում են $[c, b]$ հատվածին: Այդ դեպքում կունենանք^{*}

$$V(f, P) \leq V(f, P') = V(f, P_{[a, c]}) + V(f, P_{[c, b]}) \leq \overset{c}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(f),$$

ինչից էլ հետևում է ա)-ն:

* Տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս վարիացիոն գումարը կարող է միայն մեծանալ:

թ)-ն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն $[a, c]$ և $[c, b]$ հատվածների $P_{[a, c]}$ և $P_{[c, b]}$ տրոհումներ, այնպիսիք, որ

$$\underset{a}{\overset{c}{V}}(f) < V(f, P_{[a, c]}) + \varepsilon, \quad \underset{c}{\overset{b}{V}}(f) < V(f, P_{[c, b]}) + \varepsilon:$$

Նշանակելով $P_{[a, b]} = P_{[a, c]} \cup P_{[c, b]}$, կստանանք

$$\begin{aligned} \underset{a}{\overset{c}{V}}(f) + \underset{c}{\overset{b}{V}}(f) &\leq V(f, P_{[a, c]}) + V(f, P_{[c, b]}) + 2\varepsilon = V(f, P_{[a, b]}) + 2\varepsilon \leq \\ &\leq \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) + 2\varepsilon: \end{aligned}$$

Քանի որ $\varepsilon > 0$ թիվը կամայական էր, ապա այսուեղից հետևում է թ)-ն:

Բավարարություն: Բավարարությունը հետևում է ա) անհավասարությունից և բնորենի անհրաժեշտությունից: ■

Հետևանք: $\underset{a}{\overset{c}{V}}(f) - V(f, P_{[a, c]}) \leq \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_{[a, b]})$:

► (1.1)-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} \underset{a}{\overset{c}{V}}(f) - V(f, P_{[a, c]}) &= \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - \underset{c}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_{[a, c]}) = \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_{[a, b]}) - \\ &- \left(\underset{c}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_{[c, b]}) \right) \leq \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_{[a, b]}), \end{aligned}$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Դիտողություն: Մաքենատիկական ինդուկցիայի միջոցով կարելի է ապացուցել բնորեն 1.3-ի հետևյալ ընդհանրացումը. որպեսզի $f \in BV[a, b]$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $[a, b]$ հատվածի կամայական $a = c_0 < c_1 < \dots < c_m = b$ տրոհման համար՝ $f \in BV[c_i, c_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, ընդունակ է:

$$\underset{a}{\overset{b}{V}}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \underset{c_i}{\overset{c_{i+1}}{V}}(f):$$

5. Ժորդանի վերլուծություն:

Թեորեմ 1.4: Որպեսզի $f \in BV[a, b]$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն ներկայացվի երկու աճող (լայն իմաստով) ֆունկցիաների տարրերության տեսքով:

► Այս թեորեմի բավարարությունը հետևում է թեորեմ 1.2-ի ա) կետից և այն փաստից, որ մոնուոն ֆունկցիան վերջավոր վարիացիայի է:

Ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Նշանակենք՝

$$V(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f), \quad x \in (a, b], \quad V(a) = 0:$$

Այս ֆունկցիան կոչվում է f -ի վարիացիոն ֆունկցիա:

(1.1)-ից հետևում է, որ $V(x)$ -ը աճող է: Իրոք, եթե $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, ապա

$$V(x_2) = V(x_1) + \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) \geq V(x_1): \text{Այնուհետև } f \text{-ը ներկայացնենք} \\ f(x) = V(x) - [V(x) - f(x)]$$

տեսքով և ապացուցենք, որ $g(x) := V(x) - f(x)$ ֆունկցիան աճող է: Իրոք, եթե $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, ապա (1.1)-ի համաձայն,

$$g(x_2) - g(x_1) = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) - f(x_2) - \left\{ \overset{x_1}{\underset{a}{V}}(f) - f(x_1) \right\} = \\ = \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f) - [f(x_2) - f(x_1)] \geq 0:$$

Վերջին քայլում գրված անհավասարությունը հետևում է

$$f(x_2) - f(x_1) \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{V}}(f)$$

գնահատականից: ■

6. Վերջավոր վարիացիայի անընդհատ ֆունկիաներ:

Թեորեմ 1.5: Եթե $f \in BV[a, b] \cap C[a, b]$, ապա

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} V(f, P) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f), \quad (1.2)$$

որտեղ λ -ն P տրոհման տրամագիծն է:

► Այս թեորեմն ապացուցում է Դարբուի թեորեմի (V, թեորեմ 2.3) սխեմայով: Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $[a, b]$ հատվածի $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ տրոհում, այնպիսին, որ

$$\underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_1) < \varepsilon : \quad (1.3)$$

Մյուս կողմից, Կանոնը թեորեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $[a, b]$ հատվածի $\lambda < \delta$ տրամագծով կամայական $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ տրոհման համար՝

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{2m}, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad (1.4)$$

որտեղ $\omega_i(f)$ -ը f ֆունկցիայի տատանումն է $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածում:

Այժմ վերցնենք մի $P : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ տրոհում, որի տրամագիծը փոքր է δ -ից և նշանակենք՝ $P_2 = P \cup P_1$: Այդ դեպքում (1.3)-ի և (1.4)-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P) &= \left\{ \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P_2) \right\} + \\ &+ \{V(f, P_2) - V(f, P)\} \leq \varepsilon + m \cdot 2 \frac{\varepsilon}{2m} = 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.5)$$

քանի որ P տրոհմանը $x_k \in (t_i, t_{i+1})$ կետն ավելացնելիս $V(f, P)$ վարիացիոն գումարը կմեծանա ամենաշատը $2\omega_i(f)$ չափով՝

$$|f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq |f(t_{i+1}) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(t_i)| \leq 2\omega_i(f):$$

Ստացվեց, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow 0 \leq \underset{a}{\overset{b}{V}}(f) - V(f, P) < 2\varepsilon,$$

ինչը համարժեք է (1.2)-ին: ■

Թեորեմ 1.6: Եթե $f \in BV[a, b] \cap C[a, b]$, ապա $V(x) = \frac{x}{a} V(f)$

վարիացիոն ֆունկցիան նույնագույն անընդհատ է $[a, b]$ հատվածում:

► Վերցնենք կամայական $x_0 \in [a, b)$ կետ և ապացուցենք V ֆունկցիայի անընդհատությունը x_0 կետում աջից: Քանի որ V ֆունկցիան աճող է, ապա բավական է ցույց տալ, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $t \in [x_0, b]$ թվ, այնալիսին, որ $V(t) - V(x_0) < \varepsilon$ կամ, որ նույնն է՝ $\frac{t}{x_0} V(f) < \varepsilon$:

Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հիմնական հատկության համաձայն՝ $f \in BV[x_0, b]$, ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $[x_0, b]$ հատվածի $P : x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ տրհում, այնալիսին, որ

$$\frac{b}{x_0} V(f) - V(f, P) < \varepsilon / 2: \quad (1.6)$$

Մյուս կողմից, f -ը x_0 կետում անընդհատ է, հետևաբար գոյություն ունի $t \in (x_0, x_1)$ կետ, այնալիսին, որ

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon / 2: \quad (1.7)$$

Նշանակենք՝ $P_1 = P \cup \{t\}$: Այդ դեպքում կատանանք՝

$$\begin{aligned} \frac{t}{x_0} V(f) - |f(t) - f(x_0)| &\leq \frac{t}{x_0} V(f) - |f(t) - f(x_0)| + \frac{b}{t} V(f) - V(f, P_{[t, b]}) = \\ &= \frac{b}{x_0} V(f) - V(f, P_1) \leq \frac{b}{x_0} V(f) - V(f, P) < \varepsilon / 2: \end{aligned}$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (1.7)-ը, կատանանք՝ $\frac{t}{x_0} V(f) < \varepsilon$:

V ֆունկցիայի անընդհատությունը ճախից ապացուցվում է նման դատողությունների միջոցով: ■

7. Վեկտորարժեք ֆունկցիաներ, ուղղելի կորեք:

Դիցուք՝ $f : [\alpha, \beta] \rightarrow R^k$ ($\alpha, \beta \in R$): Վերցնենք $[\alpha, \beta]$ հատվածի կամայական P տրոհում՝

$$P : \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$$

և նշանակենք՝

$$V(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|, \quad (1.8)$$

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f) = \sup_P V(f, P) :$$

f վեկտորարժեք ֆունկցիան կանվանենք վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիա, եթե $\overset{\beta}{\underset{\alpha}{V}}(f) < \infty$:

$[\alpha, \beta]$ հատվածում վերջավոր վարիացիայի վեկտորարժեք (R^k -արժեք) ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $BV([\alpha, \beta], R^k)$ սխմալով:

Վերջավոր վարիացիայի վեկտորարժեք ֆունկցիաների ուսումնասիրությունը կոռորդինատային ֆունկցիաների միջոցով բերվում է թվային ֆունկցիաների դեպքին: Եթե f վեկտորարժեք ֆունկցիան ներկայացնենք կոռորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^k(x)), f^j : [\alpha, \beta] \rightarrow R, \quad 1 \leq j \leq k,$$

ապա տեղի ունի հետևյալ բերեմք.

Թեորեմ 1.7: Որպեսզի $f \in BV([\alpha, \beta], R^k)$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$f^j \in BV[\alpha, \beta], \quad 1 \leq j \leq k : \quad (1.9)$$

► Այս բերեմքը բխում է $z = (z^1, \dots, z^k) \in R^k$ վեկտորի նորմի հետևյալ գնահատականներից՝

$$|z^j| \leq |z| \leq |z^1| + \dots + |z^k|, \quad 1 \leq j \leq k : \quad (1.10)$$

Իրոք, (1.10) անհավասարությունները գրենք $f(t_{i+1}) - f(t_i)$ վեկտորի համար՝

$$|f^j(t_{i+1}) - f^j(t_i)| \leq |f(t_{i+1}) - f(t_i)| \leq \sum_{m=1}^k |f^m(t_{i+1}) - f^m(t_i)| :$$

Այժմ, i -ին տալով $0, 1, \dots, n-1$ արժեքները և գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$V(f^j, P) \leq V(f, P) \leq \sum_{m=1}^k V(f^m, P), \quad 1 \leq j \leq k \quad (1.11)$$

անհավասարությունները: (1.9) պայմանի անհրաժեշտությունը հետևում է (1.11)-ի ձախ անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ աջ: ■

Այժմ ենթադրենք, որ $f \in C([\alpha, \beta], R^k)$: Այդ դեպքում f -ը ներկայացնում է կոր* (կամ կորի պարամետրացում): Ընդ որում, եթե նշանակենք $M_i = f(t_i) = (f^1(t_i), \dots, f^k(t_i))$, $0 \leq i \leq n$, ապա $V(f, P)$ վարիացիոն գումարը կհանդիսանա այդ կորին ներգծված $L = M_0 M_1 \cdots M_n$ բեկյալի երկարությունը՝

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} |M_{i+1} - M_i| = V(f, P): \quad (1.12)$$

Կորի երկարության երկրորդ սահմանման համաձայն**, որպես կորի S երկարություն ընդունվում է

$$S = \sup \{p\}$$

մեծությունը, որը կարող է լինել նաև $+\infty$:

Մյուս կողմից, (1.12)-ի համաձայն՝

$$S = \sup \{p\} = \sup V(f, P) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt:$$

Այսպիսով, f կորի երկարությունը f ֆունկցիայի վարիացիան է: Բայց դրանից, թեորեմ 1.7-ը կորի տերմիններով կձևակերպվի հետևյալ կերպ.

* Այստեղ մենք օգտվում ենք (VI, §3)-ում և (VII, §3)-ում ընդունված տերմիններից:

** (VI, §3)-ում մենք քննարկել ենք $k = 2$ մասնավոր դեպքը:

Թեորեմ 1.7' (Ժորդան): Որպեսզի f ֆունկցիայով տրված կորը լինի ուղղելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ f ֆունկցիայի կոորդինատային ֆունկցիաները լինեն վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ:

Ընթերցողին առաջարկվում է ապացուցել հետևյալ թեորեմը.

Եթե f^j , $1 \leq j \leq k$, ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են $[\alpha, \beta]$ -ում, ապա f ֆունկցիայով տրված կորն ուղղելի է, և դրա երկարությունը հավասար է

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\sum_{j=1}^k \left[(f^j(t))' \right]^2} dt :$$

§2. ԱՄԻԼՏԵՍԻ ԻՆՏԵԳՐԱԾԻ

1. Ատիլտեսի ինտեգրայի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները: Ատիլտեսի ինտեգրալը ՈՒմանի ինտեգրալի ընդհանրացումն է, ուստի այստեղ մենք կօգտվենք V գլխում ներմուծված տերմիններից: ‘Դիցուր’ $f, g : [a, b] \rightarrow R$: Վերցնենք $[a, b]$ հատվածի կամայական P տրհում՝

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \lambda = \max_i (x_{i+1} - x_i),$$

և կազմենք *Ատիլտեսի ինտեգրալային գումարը*

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)], \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]: \quad (2.1)$$

Սահմանում*: Եթե գոյություն ունի $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի *Ատիլտեսի ինտեգրալը* ըստ g ֆունկցիայի և նշանակվում է՝

$$\int_a^b f(x) dg(x) \text{ կամ } (S) \int_a^b f(x) dg(x) \text{ կամ } \int_a^b f dg :$$

Այս դեպքում f -ն անվանում են ինտեգրելի ըստ g -ի: $[a, b]$ հատվածում ըստ g -ի ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $\mathfrak{R}_g[a, b]$ սիմվոլով:

* $g(x) = x$, $x \in [a, b]$, դեպքում Ատիլտեսի ինտեգրալը համընկնում է ՈՒմանի ինտեգրալին:

Հետևյալ պնդումներն (Ստիլտեսի ինտեգրալի պարզագույն հետկությունները) անմիջապես հետևում են սահմանումից.

1⁰. Եթե $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}_g[a, b]$, ապա $f_1 + f_2 \in \mathfrak{R}_g[a, b]$ և

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)] dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) + \int_a^b f_2(x) dg(x) :$$

2⁰. Եթե $f \in \mathfrak{R}_{g_1}[a, b]$ և $f \in \mathfrak{R}_{g_2}[a, b]$, ապա $f \in \mathfrak{R}_{g_1 \pm g_2}[a, b]$ և

$$\int_a^b f(x) d[g_1(x) \pm g_2(x)] = \int_a^b f(x) dg_1(x) \pm \int_a^b f(x) dg_2(x) :$$

3⁰. Եթե $f \in \mathfrak{R}_g[a, b]$ և $\alpha, \beta \in R$, ապա $\alpha f \in \mathfrak{R}_{\beta g}[a, b]$ և

$$\int_a^b \alpha f(x) d\beta g(x) = \alpha \beta \int_a^b f(x) dg(x) :$$

4⁰. Եթե $a < c < b$ և գոյություն ունեն բոլոր երեք ինտեգրալները, ապա

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x) :$$

Այսուղի կարելի է ապացուցել, որ ձախ կողմի ինտեգրալի գոյությունից հետևում է աջ կողմի ինտեգրալների գոյությունը: Սակայն աջ կողմի ինտեգրալների գոյությունից չի հետևում ձախ կողմի ինտեգրալի գոյությունը: Օրինակ՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ֆունկցիաների համար $[-1, 0]$ և $[0, 1]$ հատվածներում ինտեգրալները գոյություն ունեն, սակայն $[-1, 1]$ հատվածում՝ ոչ: Այս պարբերության մեջ բերված պնդումների ապացույցները թողնում ենք ընթերցողին:

2. Մասերով ինտեգրում: Ապացուցենք

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x), \quad (2.2)$$

բանաձեռ, նախապես ենթադրելով, որ գրված ինտեգրալներից որևէ մեկը գոյություն ունի:

► Դիցուք գոյություն ունի աջ կողմի ինտեգրալը: Այդ դեպքում $[a, b]$ հատվածի P տրոհման և $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ կետերի ընտրությունից հետո դիտարկենք $[a, b]$ հատվածի մի նոր տրոհում՝ $Q = \{a, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}, b\}$: Զևսի կողմէն (2.1) ինտեգրալային գումարը.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(x_i) = \\ &= - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) [f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + f(\xi_{n-1}) g(x_n) - f(\xi_0) g(x_0) = \\ &= f(x) g(x) \Big|_a^b - \left\{ g(a) [f(\xi_0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) [f(\xi_k) - f(\xi_{k-1})] + \right. \\ &\quad \left. + g(b) [f(b) - f(\xi_{n-1})] \right\} = f(x) g(x) \Big|_a^b - \sigma', \end{aligned} \quad (2.3)$$

որտեղ σ' -ը Q տրոհմանը համապատասխանող $\int_a^b g df$ ինտեգրալի համար կազմված ինտեգրալային գումար է:

Քանի որ, ըստ ենթադրության, այդ ինտեգրալը գոյություն ունի, ուստի*

$$\sigma' \rightarrow \int_a^b g df, \quad \lambda \rightarrow 0:$$

Հետևաբար, (2.3) հավասարությունից հետևում է, որ λ -ն 0-ի ճգնելիս, σ -ն ունի վերջավոր սահման և այդ սահմանը հավասար է (2.2)-ի աջ կողմում գրված արտահայտությամբ: ■

3. Ըստ աճող ֆունկցիայի Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյության պայմանը:

Դիցուք g ֆունկցիան աճող է, իսկ f -ը սահմանափակ է՝ $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$: Այս դեպքում Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյության ուսումնասիրությունը կատարվում է նույն մեթոդով, ինչ որ ՈՒմանի ինտեգրալի դեպքում:

Դիցուք տրված է $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ տրոհումը: Նշանակենք՝

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad \Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$$

* Եթե Q տրոհման տրամագիծը λ' -ն է, ապա $\lambda' \leq 2\lambda$, հետևաբար, $(\lambda \rightarrow 0) \Rightarrow (\lambda' \rightarrow 0)$:

և կազմենք Դարբուի (Դարբու - Ստիլտեսի) գումարները՝

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i);$$

Այդ դեպքում կունենանք, որ նույն տրոհման դեպքում՝

$$s \leq \sigma \leq S,$$

$$\text{ընդ } \text{որում}, \quad s - \underline{\sigma} \quad \text{և} \quad S - \overline{\sigma} = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)], \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

գումարների ճշգրիտ եզրերն են: Բացի այդ, Դարբու - Ստիլտեսի գումարներն օժտված են $g(x) = x$ դեպքում ապացուցած (V, §2) երկու հիմնական հատկություններով:

Առաջին հատկություն: Տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս (տրոհումը մանրատելիս) Դարբուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ փորձանալ:

Երկրորդ հատկություն: Դարբուի յուրաքանչյուր ստորին գումարը չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը:

Այսուհետև, ներմուծելով Դարբուի ստորին և վերին իմտեզրալները՝

$$I_* = \sup \{s\}, \quad I^* = \inf \{S\},$$

կստանանք՝

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S:$$

Այժմ ձևակերպենք Ստիլտեսի իմտեզրալի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը, որն ապացուցվում է ճիշտ նույն դասողություններով*, ինչ որ $g(x) = x$ պարզագույն դեպքում (V, §2):

Թեորեմ 2.1: Եթե g ֆունկցիան աճող է, իսկ f -ը՝ սահմանափակ ապա լսու $g \circ h$ ֆունկցիայի Ստիլտեսի իմտեզրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0,$$

կամ, որ նոյնն է՝

* Ընթերցողին առաջարկվում է վերականգնել այդ դասողությունները:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta g(x_i) = 0, \quad (2.4)$$

որտեղ $\omega_i(f)$ -ը f ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում:

4. Ստիլտսի իմտեզրայի գոյությունն ընդհանուր դեպքում:

Թեորեմ 2.2: Եթե՝ ա) $f \in C[a, b]$, բ) $g \in BV[a, b]$, ապա

$$\int_a^b f dg \quad (2.5)$$

Ստիլտսի իմտեզրայի գոյություն ունի:

► Նախ ապացուցենք թեորեմն այն դեպքում, եթե g -ն խիստ աճող է: Ասու Կանոնը թեորեմի հետևանքի, ա) պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $\lambda < \delta$ տրամագծով կամայական $P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ տրոհման համար՝

$$\omega_i(f) < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a)},$$

ինչի արդյունքում է՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta g(x_i) < \varepsilon:$$

Հետևաբար, թեորեմ 2.1-ի համաձայն, (2.5) իմտեզրայի գոյություն ունի:

Այս դեպքում, եթե $g \in BV[a, b]$ ֆունկցիան աճող չէ, ժորդանի վերլուծության համաձայն, g -ն կարելի է ներկայացնել երկու խիստ աճող ֆունկցիաների տարրերության տեսքով՝

$$g(x) = \varphi(x) - \psi(x), \quad x \in [a, b]:$$

Այդ դեպքում

$$\int_a^b f d\varphi \text{ և } \int_a^b f d\psi$$

իմտեզրալները գոյություն ունեն, հետևաբար, Ստիլտսի իմտեզրայի պարզագույն հատկությունների համաձայն, գոյություն ունի նաև (2.5) իմտեզրալը: ■

Դիսոլություն: Մասերով ինտեգրման (2.2) բանաձևի համաձայն, թեորեմ 2.2-ի պայմաններում գոյություն ունի նաև

$$\int_a^b g df$$

ինտեգրալը:

Թեորեմ 2.3: Եթե՝ ա) $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, բ) $g \in Lip[a,b]$, ապա $\int_a^b f dg$

ինտեգրալը գոյություն ունի:

► Նախ դիտարկենք այն դեպքը, եթե g -ն աճող է: բ) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $L > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$(x, y \in [a, b]) \Rightarrow (|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|): \quad (2.6)$$

(2.6)-ից և ա) պայմանից հետևում է, որ

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta g(x_i) \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0:$$

Հետևաբար, թեորեմ 2.1-ի համաձայն, $\int_a^b f dg$ ինտեգրալը գոյություն ունի:

Անդհանուր դեպքում g -ն ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$g(x) = Lx - [Lx - g(x)] =: g_1(x) - g_2(x),$$

որտեղ $g_1(x) = Lx$ և $g_2(x) = Lx - g(x)$ ֆունկցիաներն աճող են ու բավարարում են Լիալշիցի պայմանին: Եթոք, եթե $a \leq x < y \leq b$, ապա

$$\begin{aligned} g_2(y) - g_2(x) &= Ly - g(y) - L(x) + g(x) = \\ &= L(y - x) - [g(y) - g(x)] \geq 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

որտեղ վերջին անհավասարությունը հետևում է (2.6) պայմանից: Այսպիսով, g_2 ֆունկցիան աճող է: Ապացուցենք, որ այն բավարարում է Լիալշիցի պայմանին: (2.7)-ից և (2.6)-ից հետևում է, որ

$$|g_2(y) - g_2(x)| \leq L(y - x) + |g(y) - g(x)| \leq 2L(y - x):$$

Այսինքն՝ g_2 ֆունկցիան բավարարում է Լիալիցի պայմանին: Հետևաբար, f -ը ինտեգրելի է թե՛ ըստ g_1 -ի, թե՛ ըստ g_2 -ի:

Ուստի, Ստիլտեսի ինտեգրալի պարզագույն հատկությունների համաձայն, f -ն ինտեգրելի է ըստ g -ի: ■

5. Ստիլտեսի ինտեգրալի ներկայացումը Ուիմանի ինտեգրալով:

Թեորեմ 2.4: Եթե՝ ա) $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, բ) $g(x) = c + \int_a^x \varphi(t)dt$, որտեղ

$\varphi \in \mathfrak{R}[a,b]$, ապա

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx, \quad (2.7)$$

որտեղ աջ կողմի ինտեգրալը Ուիմանի ինտեգրալ է:

► (2.1) ինտեգրալային գումարը ներկայացնենք

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\xi_i) \varphi(x) dx$$

տեսքով, իսկ (2.7)-ի աջ կողմի ինտեգրալ՝

$$I := \int_a^b f(x) \varphi(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi(x) dx :$$

Գնահատենք դրանց տարրերությունը՝

$$|\sigma - I| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(\xi_i) - f(x)| |\varphi(x)| dx :$$

Քանի որ φ -ն ինտեգրելի է Ուիմանի իմաստով, ապա այն սահմանափակ է՝ $|\varphi(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$: Հետևաբար,

$$|\sigma - I| \leq M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \rightarrow 0, \text{ եթե } \lambda \rightarrow 0,$$

քանի որ $f \in \mathfrak{R}[a, b]$:

Այսպիսով, λ -ն 0-ի ճգնելիս, σ -ն ճգնում է I սահմանին: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Թեորեմ 2.5: Եթե՝ ա) $f \in \mathfrak{R}[a,b]$, բ) $g \in C[a,b]$ և $g' \in \mathfrak{R}[a,b]^*$, ապա

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx :$$

► Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի վերաբերյալ երկրորդ թեորեմի համաձայն (V , §6)՝

$$g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t) dt :$$

Մնում է կիրառել նախորդ թեորեմը: ■

6. Ստիլտեսի ինտեգրայի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները:

Թեորեմ 2.6: Հիշոր գ -ն աճող է $[a,b]$ հատվածում: Այդ դեպքում՝

ա) եթե $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$ և $f \in \mathfrak{R}_g[a,b]$, ապա $\int_a^b f dg \geq 0$,

բ) եթե $f_1(x) \leq f_2(x)$, $x \in [a,b]$ և $f_1, f_2 \in \mathfrak{R}_g[a,b]$, ապա

$$\int_a^b f_1 dg \leq \int_a^b f_2 dg ,$$

գ) եթե $f \in \mathfrak{R}_g[a,b]$ և $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$, ապա

$$m[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq M[g(b) - g(a)],$$

դ) եթե $f \in \mathfrak{R}_g[a,b]$, ապա $|f| \in \mathfrak{R}_g[a,b]$ և

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg :$$

Թեորեմն ապացուցվում է նույն դասողություններով, ինչ ՈՒմանի ինտեգրալի դեպքում:

* Վերջապոր թվով կետերում g' -ը կարող է գոյություն չունենալ:

Թեորեմ 2.7: Եթե $f \in C[a, b]$, $g \in BV[a, b]$, ապա

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dV, \quad (2.8)$$

որտեղ V -ն g ֆունկցիայի վարիացիոն ֆունկցիան է՝

$$V(x) = \int_a^x g, \quad x \in (a, b], \quad V(a) = 0 :$$

► Համի որ

$$|\sigma| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| |g(x_{i+1}) - g(x_i)|$$

և

$$|g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} V(g) = V(x_{i+1}) - V(x_i),$$

ապա

$$|\sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| [V(x_{i+1}) - V(x_i)]:$$

Անցնելով սահմանի, եթե $\lambda \rightarrow 0$, կստանանք (2.8)-ը: ■

Հետևանք: Եթե՝ $f \in C[a, b]$, $|f(x)| \leq M$, $x \in [a, b]$, ապա

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq M \int_a^b V(g) : \quad (2.8')$$

Ապացույցը հետևում է (2.8)-ից և նախորդ թեորեմի զ) կետից:

7. Միջին արժեքի թեորեմները:

Թեորեմ 2.8: Եթե *a)* $f \in C[a, b]$, *b)* g -ն աճող է, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a, b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f dg = f(\xi) [g(b) - g(a)]:$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ Ուխմանի ինտեգրալի դեսպրում:

Թեորեմ 2.9: Եթե՝ *a)* f -ը աճող է $[a, b]$ հատվածում, *b)* $g \in C[a, b]$, ապա գոյություն ունի $\xi \in [a, b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(a)[g(\xi) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(\xi)]: \quad (2.9)$$

► Կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևը, այնուհետև՝ նախորդ թեորեմը՝ կստանանք

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g df = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \\ &- g(\xi)[f(b) - f(a)], \end{aligned}$$

ինչը համարժեք է (2.9)-ին: ■

Հետևանք*: Եթե ա) f -ը աճող է $[a, b]$ -ում, բ) $\varphi \in \mathfrak{R}[a, b]$, ապա
գոյություն ունի $\xi \in [a, b]$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^\xi \varphi(x)dx + f(b)\int_\xi^b \varphi(x)dx: \quad (2.10)$$

► Նշանակենք՝ $g(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$, $x \in [a, b]$: Այդ դեպքում, կիրառելով
նախ (2.7)-ը, այնուհետև՝ թեորեմ 2.9-ը, կստանանք (2.10)-ը: ■

8. Փոփոխականի փոխարինում:

Թեորեմ 2.10: Եթե ա) g -ն իստ աճող է և $g \in C[\alpha, \beta]$, բ)
 $h \in C[g(\alpha), g(\beta)]$, ապա

$$\int_\alpha^\beta h(g(t))dg(t) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} h(x)dx: \quad (2.11)$$

► $[\alpha, \beta]$ հատվածի $P: \alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta$ տրուման (որի տրամագիծը λ -ն է) և $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ կետերի ընտրությունից հետո նշանակենք՝ $t_i = g(x_i)$, $\eta_i = g(\xi_i)$ և դիտարկենք $[g(\alpha), g(\beta)]$ հատվածի

$$Q: g(\alpha) = t_0 < t_1 < \dots < t_n = g(\beta)$$

* Միջին արժեքի երկրորդ թեորեմն է Ոլմանի ինտեգրալի համար (V, § 7):

տրոհումը, որի տրամագիծը նշանակենք λ^* -ով: Այդ դեպքում՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} h(g(\xi_i)) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} h(\eta_i) \Delta t_i : \quad (2.12)$$

Այժմ, եթե $\lambda \rightarrow 0$, ապա g ֆունկցիայի հավասարաշափ անընդհատության շնորհիվ՝ $\lambda^* \rightarrow 0$: (2.12)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք (2.11)-ը: ■

9. Ստիլտեսի իմստեղորակի երկրաչափական մեկնարանումը:

Դիցուք ուսնենք պարամետրական տեսքով տրված կոր՝

$$\left. \begin{aligned} x &= g(t) \\ y &= f(t) \end{aligned} \right\}, \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (2.13)$$

որտեղ g -ն և f -ը անընդհատ են, ընդ որում, g -ն իսկաւ աճող է, իսկ f -ը՝ դրական: Նշված պայմաններում գոյություն ունի $x = g(t)$ ֆունկցիայի հակառակը՝ $t = g^{-1}(x)$, $x \in [g(\alpha), g(\beta)]$, որը նոյնական անընդհատ է: Հետևաբար, (2.13) կորը կարելի է ներկայացնել բացահայտ տեսքով՝

$$y = f(g^{-1}(x)) = h(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.14)$$

որտեղ $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$:

Այժմ դիտարկենք կորագիծ սեղանը, որը սահմանափակված է արսցիս-ների առանցքով, $x = a$, $x = b$ ուղիղներով և $y = h(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկով: Եթե այդ պատկերի մակերեսը նշանակենք P -ով, ապա

$$P = \int_a^b h(x) dx :$$

Այուս կողմից, (2.11) բանաձևի համաձայն՝*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dg(t) = \int_{\alpha}^{\beta} h(g(t)) dg(t) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} h(x) dx = \int_a^b h(x) dx = P :$$

* (2.13)-ից հետևում է, որ $f(t) = h(g(t))$:

Այսպիսով, նշված պայմաններում $\int_{\alpha}^{\beta} f dg$ Ստիլտեսի ինտեգրալը հանդիսանում է (2.13) կորու սահմանափակված կորագիծ սեղանի մակերեսը:

10. Սահմանային անցում Ստիլտեսի ինտեգրալի նշանի տակ:

Թեորեմ 2.11: Եթե w $f_n \in C[a, b]$ և $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in [a, b]$,

p) $g \in BV[a, b]$, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x) : \quad (2.15)$$

► ա) պայմանի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b] :$$

Այդ դեպքում, (2.8')-ի համաձայն, կունենանք՝

$$\left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dg(x) \right| \leq \varepsilon V_a^b(g),$$

ինչից էլ հետևում է (2.15)-ը: ■

Թեորեմ 2.12: Եթե՝ ա) $f \in C[a, b]$, p) $V_a^b(g_n) \leq M$ և $g_n(x) \rightarrow g(x)$,

$x \in [a, b]$ (կետորեն), ապա

1⁰. $g \in BV[a, b]$ և $V_a^b(g) \leq M$:

2⁰. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x) :$

► 1⁰. $[a, b]$ հատվածի կամայական

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$$

տրոհման համար ունենք՝

$$\sum_{i=0}^{m-1} |g_n(x_{i+1}) - g_n(x_i)| \leq V_a^b(g_n) \leq M :$$

n-ը ձգտեցնելով անվերջության և ը) պայմանից օգտվելով՝ կստանանք

$$\sum_{i=0}^{m-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \leq M$$

անհավասարությունը, որից էլ՝ 1^0 -ը:

2⁰. Աշանակենը՝

$$I_n := \int_a^b f dg_n, \quad I := \int_a^b f dg, \quad \sigma_n = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \Delta g_n(x_i), \quad \sigma = \sum_{i=0}^{m-1} f(x_i) \Delta g(x_i):$$

Այդ դեպքում եռանկյան անհավասարության շնորհիվ կունենանք՝

$$|I - I_n| \leq |I - \sigma| + |\sigma - \sigma_n| + |\sigma_n - I_n|: \quad (2.16)$$

Գնահատենք ազ կողմի գումարելիները. Ըստ Կանտորի թեորեմի հետևանքի՝ ա) պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon,$$

որտեղ λ -ն P տրոհման տրամագիծն է, իսկ $\omega_i(f)$ -ը՝ f ֆունկցիայի տատանումն է. $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում:

(2.8)-ի համաձայն՝

$$\begin{aligned} |\sigma_n - I_n| &= \left| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] dg_n(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x_i) - f(x)] dg_n(x) \right| \leq \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f) \cdot \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta g_n} \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta g_n} = \varepsilon \cdot \frac{b-a}{\Delta g_n} \leq \varepsilon M: \end{aligned} \quad (2.17)$$

Նոյն դատողություններով կստանանք նաև, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon M: \quad (2.18)$$

Այժմ P տրոհումը ֆիքսենք ($\lambda < \delta$ պայմանի առկայությամբ): Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma,$$

ուստի գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |\sigma - \sigma_n| < \varepsilon : \quad (2.19)$$

(2.16)-(2.19) առնչություններից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |I - I_n| < 2M\varepsilon + \varepsilon ,$$

ինչից էլ հետևում է 2^0 -ը: ■

ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՔԵՐ

§1. ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՔ, ԴԻԲԻԽՆԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ

1. Եռանկյունաչափական շարքի գործակիցների հաշվումը Էյլեր -

Ֆուրիեի մեթոդ: $T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$ տեսքի ֆունկցիան՝^{*}

կոչվում է եռանկյունաչափական բազմանդամ, ընդ որում, բազմանդամը կոչվում է n -րդ աստիճանի, եթե $a_n^2 + b_n^2 > 0$: a_k , $0 \leq k \leq n$ և b_k , $1 \leq k \leq n$ թվերը կոչվում են T բազմանդամի գործակիցներ (a_0 -ն կոչվում է նաև բազմանդամի ազատ անդամ):

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1.1)$$

տեսքի շարքերը կոչվում են եռանկյունաչափական շարքեր, իսկ a_k , b_k թվերը կոչվում են (1.1) շարքի գործակիցներ: Մեր առաջիկա նպատակն է (1.1) շարքի գումարի միջոցով հաշվել a_k , b_k գործակիցները: Դրա համար մեզ պետք կգան հետևյալ բանաձևերը՝

ա) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0$, $m \in Z$,

բ) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = \begin{cases} 0, & m \neq 0 \\ 2\pi, & m = 0 \end{cases}$, $m \in Z$,

գ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos kx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+k)x + \sin(m-k)x] dx = 0$, $m, k \in N$,

* Ընդունված է $a_0 + \sum_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ տեսքի գումարները (վերջավոր կամ անվերջ) գրել առանց փակագծերի:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-k)x - \cos(m+k)x] dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \pi, & m = k \end{cases} \\ \text{η)} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-k)x + \cos(m+k)x] dx = \begin{cases} 0, & m \neq k \\ \pi, & m = k \end{cases} \\ &\quad m, k \in N : \end{aligned}$$

Թեորեմ 1.1: Եթե (1.1) շարքը $[-\pi, \pi]$ հատվածում զուգամիտում է հավասարաչափ, ապա

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1.2}$$

► (1.1) շարքը անդամ առ անդամ ինտեգրելով և հաշվի առնելով ա)-ն ու բ)-ն՝ կստանանք

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = a_0 \pi ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) dx :$$

a_m գործակիցը հաշվելու համար (1.1) շարքը բազմապատկենը $\cos mx$ ֆունկցիայով՝

$$T(x) \cos mx = \frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx : \tag{1.3}$$

Քանի որ հավասարաչափ զուգամետ շարքը սահմանափակ ֆունկցիայով բազմապատկելիս հավասարաչափ զուգամիտությունը պահպանվում է*, ապա (1.3) շարքը կարող ենք անդամ առ անդամ ինտեգրել: Հաշվի առնելով ա)-դ) բանաձերը՝ կստանանք

* Հետևում է հավասարաչափ զուգամիտության Կոշիի սկզբունքից:

$$\int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos mx dx = a_m \pi ,$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \cos mx dx , \quad m \in N :$$

Նման դատողություններով կհաշվենք նաև b_m -ը: ■

2. Ֆուրիեի շարք: Դիցուք f -ը 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է և $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$ կամ f -ը $[-\pi, \pi]$ հատվածում բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական ինտեգրալի իմաստով: Նշանակենք՝

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt , \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt , \quad k = 0, 1, 2, \dots : \quad (1.4)$$

a_k , b_k թվերը կոչվում են f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներ:

Այդ դեպքում

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

եռանկյունաչափական շարքը կոչվում է f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք: Ֆուրիեի շարք լինելը ցույց են տալիս հետևյալ կերպ՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx : \quad (1.4')$$

Այսինքն՝ (1.4') բանաձևը նշանակում է, որ a_k , b_k թվերը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցներն են: Նախորդ թեորեմը կվերաձևակերպվի հետևյալ կերպ.

Եթե եռանկյունաչափական շարքը $[-\pi, \pi]$ հատվածում հավասարաշափ զուգամտում է f ֆունկցիային, ապա այդ շարքը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն է:

Առաջիկայում մենք կուտումնասիրենք հակառակ հարցը՝ ի՞նչ պայմանների դեպքում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը այս կամ այն իմաստով կզուգամիտի իրեն:

3. Դիրիխլեի իմունգալը: f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարը x_0 կետում նշանակեմք $S_n(x_0)$ -ով.

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx_0 + b_k \sin kx_0 : \quad (1.5)$$

Մեր նպատակն այդ մասնակի գումարի իմունգալային ներկայացում ստանալն է: Դրա համար կօգտվենք Ֆուրիեի գործակիցների (1.4) բանաձևերից և հետևյալ լեմմայից.

Լեմմա: Եթե $\alpha \notin \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, ապա

$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} : \quad (1.6)$$



$$\frac{1}{2} + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha =$$

$$= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \cos 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2} + \cdots + 2 \cos n\alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \left[\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(1 - \frac{1}{2}\right)\alpha \right] + \cdots + \left[\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha \right]}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} :$$



Հետևյալ թեորեմում Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարը x_0 կետում ներկայացված է Դիրիխլեի իմունգալով:

Թեորեմ 1.2: Շշմարիստ է հետևյալ բանաձևը.

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt : \quad (1.7)$$

► (1.5)-ի մեջ տեղադրելով a_k, b_k գործակիցների (1.4) արժեքները և հաշվի առնելով (1.6)-ը՝ կատանանք, որ

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cos kx_0 + \sin kt \sin kx_0] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - x_0) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x_0)}{2 \sin \frac{t - x_0}{2}} dt : \end{aligned}$$

Այստեղ ենթիմտեգրալ ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն, ուստի ինտեգրման $[-\pi, \pi]$ հատվածը կարող ենք փոխարինել $[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ հատվածով.*

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(t - x_0)}{2 \sin \frac{t - x_0}{2}} dt :$$

Այստեղ ինտեգրալում կատարենք $t - x_0 = u$ փոփոխականի

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u + x_0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)u}{2 \sin \frac{u}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cdot + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cdot :$$

* Եթե F -ն ունի 2π պարբերություն և ինտեգրելի է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ապա կամայական

ա բվի համար ճշմարիտ է $\int_a^{a+2\pi} F(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt$ հավասարությունը:

Այս ինտեգրալներից առաջինում կատարելով $u = -t$ փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք (1.7)-ը: ■

4. ՈՒԽԱԾԻ ԼԵՄՄԱՆ:

Թեորեմ 1.3: Եթե $g \in \mathfrak{R}[a,b]$, ապա

$$a) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin \lambda t dt = 0, \quad b) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos \lambda t dt = 0 :$$

► Ապացուցենք միայն ա)-ն: Վերցնենք $[a,b]$ հատվածի կամայական

$$P: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

տրոհում և նշանակենք՝ $m_i = \inf_{[t_i, t_{i+1}]} g(t)$: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(t) \sin \lambda t dt \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [g(t) - m_i] \sin \lambda t dt + \sum_{i=0}^{n-1} m_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sin \lambda t dt \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(g) \Delta t_i + \frac{2}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i|, \end{aligned} \quad (1.8)$$

որտեղ $\omega_i(g)$ -ն g ֆունկցիայի տաստանումն է $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածում:

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Նախ՝ P տրոհումն ընտրենք այնպիս, որ բավարարվի

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(g) \Delta t_i < \varepsilon / 2 \quad (1.9)$$

ալայմանը, այնուհետև՝ հաստատագրենք այդ P տրոհումը և $E \in R$ թիվն ընտրենք այնպիս, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \frac{2}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} |m_i| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad (1.10)$$

ա)-ն հետևում է (1.8)-(1.10) առնչություններից: ■

Լրացում: Լեմման ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե g -ն բացարձակ ինտեգրելի է անիսկական ինտեգրալի հմաստով:

► Ապացուցենք այն դեպքում, եթե եզակիության կետը b -ն է:

Վերցնենք $\eta \in (a, b)$ թիվն այնպիս, որ

$$\int\limits_{\eta}^b |g(t)| dt < \frac{\varepsilon}{2}; \quad (1.11)$$

Այդ դեպքում՝

$$\left| \int_a^b g(t) \sin \lambda t dt \right| \leq \left| \int_a^{\eta} g(t) \sin \lambda t dt \right| + \left| \int_{\eta}^b g(t) \sin \lambda t dt \right|; \quad (1.12)$$

Ուժմանի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \left| \int_a^{\eta} g(t) \sin \lambda t dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad (1.13)$$

(1.11)-(1.13) առնչություններից հետևում է, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \left| \int_a^b g(t) \sin \lambda t dt \right| < \varepsilon,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Հետևանք: Եթե $\int -a$ ինտեգրելի $t \in [-\pi, \pi]$ հատվածում, կամ բացառակ ինտեգրելի t անինկանան ինտեգրալի իմաստով, ապա նրա ֆուրիեի գործակիցները ճգնում են 0-ի՝

$$a_k \rightarrow 0, \quad b_k \rightarrow 0, \quad kpp \quad k \rightarrow \infty;$$

5. Տեղայնացման (յոկալիզացիայի) սկզբունքը:

Թեորեմ 1.4: x_0 կետում f ֆունկցիայի ֆուրիեի շարքի վարքը* կախված է x_0 կետի կամայակես փոքր շրջակայքում f -ի ընդունած արժեքներից:

► Վերցնենք որևէ $\delta \in (0, \pi)$ թիվ և Դիրիխլեի ինտեգրալը տրոհենք երկու գումարելիների՝

* Այսինքն՝ գուգամիտուրյունը կամ տարամիտուրյունը:

$$\begin{aligned}
S_n(x_0) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \\
& + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt : \tag{1.14}
\end{aligned}$$

Քանի որ ըստ Ռիմանի լեմմայի (1.14)-ի երկրորդ գումարելին ձգուում է զրոյի, եթք $n \rightarrow \infty$, ապա $S_n(x_0)$ -ի վարքը կախված է առաջին գումարելիից, որի մեջ մասնակցում են միայն $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ միջակայքում f -ի ընդունած արժեքները (δ -ն կարող ենք վերցնել որքան կամենանք փոքր): ■

Հետևանք: Եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $f(x) = g(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, ապա այդ ֆունկցիաների ֆուրիեի շարքերը x_0 կետում ունեն առյն վարքը*:

► Եթե (1.14) հավասարությունը գրենք f և g ֆունկցիաների համար, ապա առաջին գումարելիները կհամընկնեն, իսկ երկրորդ գումարելիները կձգտեն զրոյի: ■

§2. ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻԾՆԵՐ

Այսուղե մենք կուսումնասիրենք f ֆունկցիայի ֆուրիեի շարքի կետային գուգամիտության հարցը: Ենթադրենք, որ f ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ՝ $f(x_0 -)$ և $f(x_0 +)$: Նշանակենք՝

$$S_0 = \frac{f(x_0 -) + f(x_0 +)}{2} :$$

* Եթե այդ շարքերից մեկը գուգամիտում է S թիմ, ապա մյուսը գուգամիտում է նոյն S -ին:

Եթե f ֆունկցիան x_0 կետում անընդհատ է, ապա $f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$, ուստի այս դեպքում $S_0 = f(x_0)$:

Մենք կապացուցենք, որ որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը x_0 կետում զուգամիտում է S_0 թվին:

1. Դիմի հայտանիշը: Դիտարկենք f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի մասնակի զումարի ներկայացումը Դիրիխլեի ինտեգրալի միջոցով՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt : \quad (2.1)$$

Այս բանաձևի մեջ տեղադրելով $f(x) \equiv 1$ ՝ կստանանք

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}} dt :$$

Այս հավասարությունը բազմապատկերով $-S_0$ -ով և ստացվածը զումարելով (2.1)-ին՝ կստանանք

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2S_0] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt : \quad (2.2)$$

Կամացակենք՝ $\varphi(t) = f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2S_0$ և ճշակերպենք Դիմի հայտանիշը.

Թեորեմ 2.1: Եթե զոյուրյուն ունի $\delta \in (0, \pi)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < +\infty, \quad (2.3)$$

ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը x_0 կետում զուգամիտում է S_0 թվին:

► (2.2)-ից ուսնենք, որ

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t dt : \quad (2.4)$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, f -ը 2π պարբերությամբ ֆունկցիա է, որը բացարձակ ինտեգրելի է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ուստի φ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $[0, \pi]$ հատվածում: Հետևաբար, (2.3) պայմանից հետևում է, որ $\frac{\varphi(t)}{t}$ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է $(0, \pi]$ միջակայքում:

Մյուս կողմից, $\frac{t/2}{\sin \frac{t}{2}}$ ֆունկցիան $(0, \pi]$ միջակայքում անընդհատ է և

սահմանափակ, հետևաբար,

$$g(t) := \frac{\varphi(t)}{t} \cdot \frac{t/2}{\sin t/2}$$

ֆունկցիան $(0, \pi]$ միջակայքում բացարձակ ինտեգրելի է: Ուժանի լեմմայի լրացման համաձայն, (2.4)-ի աջ կողմի ինտեգրալը ձգտում է զրոյի, եթե $n \rightarrow \infty$: Այսպիսով՝ $\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(x_0) - S_0] = 0$ կամ, որ նույնն է՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S_0 : \blacksquare$$

2. Լիպշիցի հայտանիշը:

Քանի որ

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - [f(x_0 -) + f(x_0 +)] = \\ &= [f(x_0 - t) - f(x_0 -)] + [f(x_0 + t) - f(x_0 +)], \end{aligned}$$

ապա $|\varphi(t)| \leq |f(x_0 - t) - f(x_0 -)| + |f(x_0 + t) - f(x_0 +)|$: Հետևաբար, եթե

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 -)|}{t} dt < +\infty \quad \text{և} \quad \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 +)|}{t} dt < +\infty, \quad (2.5)$$

ապա Դինիի (2.3) պայմանը տեղի կունենա:

Սահմանում: Կասենք, որ f ֆունկցիան x_0 կետում բավարարում է L -ի պաշիցի պայմանին L գործակով և $\alpha \in (0,1]$ ցորդիով, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < t < \delta \Rightarrow |f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm)| \leq L t^\alpha : \quad (2.6)$$

Այն մասնավոր դեպքում, եթե f -ն անընդհատ է x_0 կետում, L -ի պաշիցի (2.6) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$|t| < \delta \Rightarrow |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq L |t|^\alpha : \quad (2.6)$$

Այժմ ձևակերպենք L -ի պաշիցի հայտանիշը:

Թեորեմ 2.2: Եթե x_0 կետում f ֆունկցիան բավարարում է L -ի պաշիցի (2.6) պայմանին, ապա x_0 կետում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է S_0 թվին:

► Բավական է ցույց տալ, որ L -ի պաշիցի պայմանից հետևում է (2.5)-ը: Ասկապես՝

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm)|}{t} dt \leq \int_0^\delta \frac{L t^\alpha}{t} dt = L \int_0^\delta \frac{dt}{t^{1-\alpha}}$$

ու, քանի որ $\alpha \in (0,1]$, ապա վերջին ինտեգրալը զուգամետ է: ■

3. Կտոր առ կտոր դիֆերենցիալ ֆունկցիայի դեպքը:

Սահմանում: $f : [a, b] \rightarrow R$ ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր դիֆերենցելի, եթե գոյություն ունեն $[a, b]$ հատվածի P տրոհում՝ $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$ և $g_i : [x_i, x_{i+1}] \rightarrow R$, $0 \leq i \leq m-1$ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$f(x) = g_i(x), \quad x \in (x_i, x_{i+1}):$$

Հեշտ է նկատել, որ կտոր առ կտոր դիֆերենցելի f ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով ($0 \leq i \leq m-1$):

ա) (x_i, x_{i+1}) բաց միջակայքում f -ը դիֆերենցելի է,

բ) գոյություն ունեն

$$f(x_i+) = g_i(x_i), \quad f(x_{i+1}-) = g_i(x_{i+1}),$$

վերջավոր միակողմանի սահմանները,

զ) գոյություն ունեն

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_i + t) - f(x_i +)}{t} = g'_i(x_i), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_{i+1} - t) - f(x_{i+1} -)}{t} = -g'_i(x_{i+1})$$

վերջավոր միակողմանի սահմանները:

Ուստի կտոր առ կտոր դիֆերենցիալ ֆունկցիան յուրաքանչյուր $x_0 \in [a, b]$ կետում բավարարում է 1 ցուցիչով Լիպշիցի պայմանին: Հետևաբար, Լիպշիցի հայտանիշից հետևում է հետևյալ հայտանիշը.

Թեորեմ 2.3: Եթե f ֆունկցիան ունի 2π պարբերություն և կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ապա յուրաքանչյուր $x_0 \in R$ կետում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը գուգամիտում է S_0 թվին:

4. Դիրիխլեի լեմման:

$$\text{Լեմմա 2.1:} \text{ Եթե } g \in BV[0, \delta], \text{ ապա } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\delta g(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \frac{\pi}{2} g(0+) :$$

► Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիայի ժորդանի վերլուծության համաձայն, կարող ենք ենթադրել, որ g -ն աճող է: Այդ դեպքում $g(0+)$ սահմանը գոյություն ունի, իսկ $h(t) := g(t) - g(0+)$ ֆունկցիան աճող է և ոչ բացասական, ըստ որում, $h(0+) = 0$: Ունենք՝

$$\int_0^\delta g(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = g(0+) \int_0^\delta \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \int_0^\delta h(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt : \quad (2.7)$$

Այսուղեա աջ կողմի առաջին գումարելիի սահմանը կհաշվենք՝ Դիրիխլեի անհական ինտեգրալի միջոցով (XII, §4, 3):

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\delta \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{\lambda \delta} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} :$$

Լեմման ապացուցելու համար մեզ մնում է ցույց տալ, որ (2.7)-ի աջ կողմի երկրորդ գումարելին ձգուում է զրոյի՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\delta h(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = 0 : \quad (2.8)$$

Քանի որ $h(0+) = 0$, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\eta \in (0, \delta)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < t \leq \eta \Rightarrow h(t) < \varepsilon : \quad (2.9)$$

Այսուհետև օգտվենք հետևյալ հավասարությունից՝

$$\int_0^\delta h(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \int_0^\eta h(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt + \int_\eta^\delta h(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt =: I_1(\lambda) + I_2(\lambda) \quad (2.10)$$

և զնահատենք $I_1(\lambda)$ -ն ու $I_2(\lambda)$ -ն:

Միշին արժեքի երկրորդ թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի $\xi \in [0, \eta]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$I_1(\lambda) = h(\eta) \int_{\xi}^{\eta} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = h(\eta) \int_{\lambda \xi}^{\lambda \eta} \frac{\sin x}{x} dx : \quad (2.11)$$

$$\text{Քանի } \text{որ } F(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ֆունկցիան} \quad \text{ամընդհատ} \quad \text{է} \quad [0, \infty)$$

միջակայքում (V, §5) և $F(y) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, եթե $y \rightarrow +\infty$, ապա այն

սահմանափակ է՝ $|F(y)| \leq K$: Ուստի (2.9)-ից և (2.11)-ից հետևում է, որ

$$|I_1(\lambda)| \leq 2\varepsilon K : \quad (2.12)$$

$I_2(\lambda)$ -ն զնահատելու համար նկատենք, որ Ռիմանի լեմմայի համաձայն, $I_2(\lambda) \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow \infty$: Հետևաբար, գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda > E \Rightarrow |I_2(\lambda)| < \varepsilon : \quad (2.13)$$

Համապելով (2.10), (2.12) և (2.13) առնչությունները՝ կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda > E \Rightarrow \left| \int_0^\delta h(t) \frac{\sin \lambda t}{t} dt \right| < \varepsilon(2K+1),$$

ինչը համարժեք է (2.8)-ին: Լեմման ապացուցված է: ■

5. Դիրիխլե - Շորդանի հայտանիշը:

Թեորեմ 2.4: Եթե $q\eta\pi\rho\eta\pi\delta$ ունի $\delta > 0$ րիվ, այնպիսին, որ $f \in BV[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ապա x_0 կետում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը զուգամիտում է S_{x_0} բվին:

► Ունենք (կարող ենք ենթադրել, որ $\delta \in (0, \pi)$)՝

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)] \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} dt + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \cdot :$$

Ոիմանի լեմմայի համաձայն, երկրորդ գումարելին ճգնում է զրոյի, եթե $\lambda \rightarrow \infty$: Քանի որ $\varphi(x) = \frac{x}{\sin x}$, $\varphi(0) = 1$ ֆունկցիան $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ հատվածում աճող I^* , ապա **

$$g(t) := [f(x_0 - t) + f(x_0 + t)] \frac{\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \in BV[0, \delta]:$$

Ուստի, Դիրիխլեի լեմմայի համաձայն,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} g(0+) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi} [f(x_0 -) + f(x_0 +)] \frac{\pi}{2} = S_{x_0}: ■$$

Վերջում բերենք երկու օրինակ, որոնք ցույց են տալիս, որ Դիմիի և Դիրիխլե - Շորդանի հայտանիշները միմյանցից անկախ են, այսինքն՝ մեկը մյուսից չի հետևում:

* $\varphi'(x) = \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \cos x \frac{tx - x}{\sin^2 x} > 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

** Վերջապոր վարիացիայի ֆունկցիաների արտադրյալը վերջապոր վարիացիայի է:

$$1^0. \text{ Դիցուք՝ } f(x) = \frac{1}{\ln \frac{|x|}{2\pi}}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \quad f(0) = 0$$

և թվային առանցքի մնացած կետերում f ֆունկցիան շարունակվում է այնպիս, որ ունենալ 2π պարբերություն՝ $f(x + 2\pi) = f(x)$:

Այս ֆունկցիան $[-\pi, 0]$ և $[0, \pi]$ միջակայքերում մոնուռն է, հետևաբար՝ $f \in BV[-\pi, \pi]$: Սակայն $x_0 = 0$ կետում f -ը չի բավարարում Դինիի պայմանին, որովհետև

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)|}{t} dt = \int_0^\delta \frac{|f(t) + f(-t) - 2f(0)|}{t} dt = 2 \int_0^\delta \frac{dt}{t \left| \ln \frac{t}{2\pi} \right|} = \infty:$$

$$2^0. \text{ Նկատենք, որ } f(x) = x \cos \frac{\pi}{2x}, \quad x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}, \quad f(0) = 0$$

ֆունկցիան $x_0 = 0$ կետում բավարարում է Լիպշչի պայմանին՝

$$|f(x) - f(0)| \leq |x|,$$

հետևաբար, այն բավարարում է նաև Դինիի պայմանին: Սակայն կամայական $[0, \delta]$ հատվածում f -ի վարիացիան անվերջ է (XII, §1, 1), այսինքն՝ $x_0 = 0$ կետում f -ը չի բավարարում Դիրիխլե - Շորդանի պայմանին:

§3. ՈՉ ՊԱՐՔԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ ՖՈՒՐԿԵՐԻ ՇԱՐՁԲԻ

Նախորդ պարագրաֆներում ենթադրվում էր, որ f ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և ունի 2π պարբերություն: Այս պարագրաֆում մեր նպատակն է նախորդ պարագրաֆում ապացուցված հայտանիշները կիրառել այն դեպքերի համար, երբ f ֆունկցիան պարբերական չէ, կամ ուղղակի որոշված է, վերջավոր միջակայքում:

1. $(-\pi, \pi]$ միջակայքի դեպք: Դիցուք f -ը որոշված է $(-\pi, \pi]$ միջակայքում (կամ $(-\pi, \pi]$ միջակայքը պարունակող ցանկացած բազմության վրա) և այդ միջակայքում ինտեգրելի է. Ուժանի իմաստով: Դիտարկենք այն միակ $f^*: R \rightarrow R$ ֆունկցիան, որն ունի 2π պարբերություն և բավարարում է $f^*(x) = f(x)$, $x \in (-\pi, \pi]$ պայմանին: Մասնավորաբար՝ $f^*(-\pi) = f(\pi)$:

Այս դեպքում f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք ասելով կհասկանանք f^* ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (3.1)$$

որտեղ

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) \sin kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \end{aligned} :$$

Եթե $x_0 \in (-\pi, \pi)$ ներքին կետում f^* ֆունկցիան (կամ որ նույնին է՝ f ֆունկցիան) բավարարում է նախորդ հայտանիշներից որևէ մեկի պայմանին, ապա (3.1) շարքը x_0 կետում զուգամիտում է:

$$S_0 = \frac{f^*(x_0-) + f^*(x_0+)}{2} = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2}$$

Թվին: Մասնավորաբար, եթե f ֆունկցիան x_0 կետում նաև անընդհատ է, ապա (3.1) շարքը $x_0 \in (-\pi, \pi)$ կետում զուգամիտում է $f(x_0)$ -ին:

Այլ է վիճակը $x_0 = \pi$ կետում: Եթե $x_0 = \pi$ կետում f^* ֆունկցիան բավարարում է հայտանիշներից որևէ մեկի պայմանին, ապա (3.1) շարքը $x = \pi$ կետում զուգամիտում է

$$S_0 = \frac{f^*(\pi-) + f^*(\pi+)}{2} = \frac{f(\pi-) + f(-\pi+)}{2}$$

թվին: (3.1) շարքը նույն S_0 թվին կզուգամիտի նաև $x = -\pi$ կետում: Մասնավորաբար, եթե f ֆունկցիան դիֆերենցելի է $[-\pi, \pi]$ հատվածում, ապա $-\pi$ և π կետերում (3.1) շարքը կզուգամիտի այդ կետերում ֆունկցիայի արժեքների միջին թվաբանականին՝

$$\frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2}$$

թվին (և ոչ ֆունկցիայի արժեքներին այդ կետերում), իսկ $(-\pi, \pi)$ թաց միջակայքում (3.1) շարքը կզուգամիտի $f(x)$ ֆունկցիային:

Նշենք նաև, որ $(-\pi, \pi]$ միջակայքի վիճակը կարելի է վերցնել 2π երկարությամբ ցանկացած միջակայք՝ $(\alpha, \alpha + 2\pi]$:

2. Կամայական հատվածի դեպք: Դիցուք՝ $f \in C(-\ell, \ell]$, որտեղ ℓ -ը կամայական դրական թիվ է: Նշանակենք՝ $\varphi(x) = f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right)$: Այդ դեպքում $\varphi \in C(-\pi, \pi]$, ուստի նախորդ կետում շարադրվածը կիրառելի է Փ ֆունկցիայի համար, հետևաբար, որոշակի պայմանների դեպքում այն վերածվում է Ֆուրիեի շարքի՝

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad (3.2)$$

որտեղ

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) \cos kt dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \cos \frac{k\pi}{\ell} y dy,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}t\right) \sin kt dt = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(y) \sin \frac{k\pi}{\ell} y dy$$

(3.2)-ում նշանակելով $\frac{\ell}{\pi}x = y \in (-\ell, \ell)$ ՝ կստանանք

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\pi k}{\ell} y + b_k \sin \frac{\pi k}{\ell} y, \quad y \in (-\ell, \ell):$$

Նախորդ կետում հասովածի ծայրակետերի վերաբերյալ արված դիտողությունը մնում է ուժի մեջ նաև այս դեպքում:

Նշենք նաև, որ $(-\ell, \ell]$ միջակայքի փոխարեն կարելի է վերցնել կամայական 2ℓ երկարության միջակայք՝ $(\alpha, \alpha + 2\ell]$:

3. Միայն ըստ կոսինոսների (սինուսների) վերլուծություններ:

Այստեղ մենք օգտվելու ենք հետևյալ երկու փաստերից, որոնք հետևում են ինտեգրալի հատկություններից.

$$a) եթե \ F \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi] \ ֆունկցիան կենտ է, ապա \ \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = 0,$$

$$p) եթե \ F \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi] \ ֆունկցիան զույգ է, ապա \ \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = 2 \int_0^{\pi} F(t) dt :$$

Դիցուք $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$ ֆունկցիան զույգ է: Այդ դեպքում $f(t) \cos kt$ ֆունկցիաները զույգ են, իսկ $f(t) \sin kt$ ֆունկցիաները՝ կենտ: Ուստի

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

$$b_k = 0, \quad k = 1, 2, \dots :$$

Հետևաբար, f ֆունկցիայի ֆուրիեի շարքը կպարունակի միայն կոսինոսները՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

որտեղ a_k զործակիցները որոշվում են (3.3) բանաձևերով:

Իսկ եթե f ֆունկցիան կենտ է, ապա $f(t) \cos kt$ ֆունկցիաները կենտ են, իսկ $f(t) \sin kt$ ֆունկցիաները՝ զույգ: Ուստի այս դեպքում՝

$$a_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k = 1, 2, \dots : \quad (3.4)$$

Հետևաբար, կենտ ֆունկցիայի ֆուրիեի շարքը կպարունակի միայն սինուսները՝

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

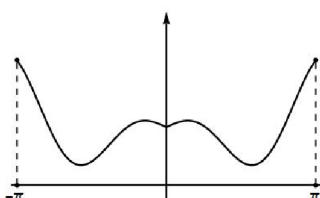
որտեղ b_k գործակիցները հաշվվում են (3.4) բանաձևերով:

Այժմ ենթադրենք, թե f ֆունկցիան որոշված է միայն $(0, \pi]$ միջակայքում և անընդհատ է: Այս դեպքում f ֆունկցիան կարելի է վերլուծել թե՛ միայն ըստ կոսինուսների, և թե՛ միայն ըստ սինուսների: Իրոք, ներմուծելով

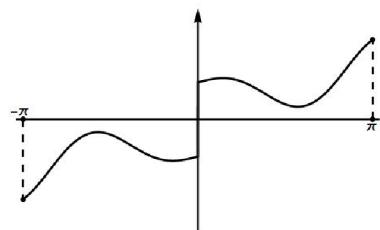
$$\text{ա) } g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi] \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}, \text{ և բ) } h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

ֆունկցիաները, որոնցից g -ն զույգ է, իսկ h -ը՝ կենտ, հարցը կրերվի նախորդ դեպքերին: Ընդ որում, ա) դեպքում f -ը կվերլուծվի միայն ըստ կոսինուսների շարքի, որի գործակիցները որոշվում են (3.3) բանաձևերով, իսկ բ) դեպքում՝ միայն ըստ սինուսների շարքի, որի գործակիցները որոշվում են (3.4) բանաձևերով: Ընդամենը, $(0, \pi)$ բաց միջակայքում

ա)



բ)



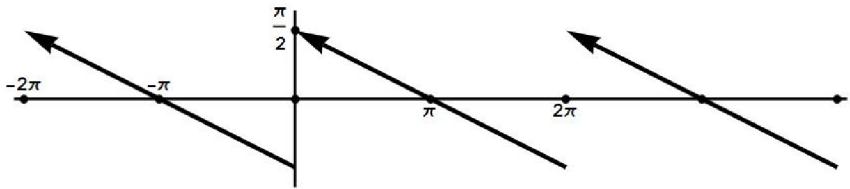
շարքերը կզուգամիտեն ֿ $f(x)$ -ին (որոշակի պայմանների դեպքում), իսկ $x=0$ և $x=\pi$ կետերում այդ շարքերի վարքերը կլինեն տարրեր:

Օրինակներ:

$$1) \quad f(x) = \frac{\pi - x}{2} \quad \text{ֆունկցիան վերլուծենք Ֆուրիեի շարքի } (0, 2\pi]$$

միջակայքում:

Դիցուք f^* -ը այն ֆունկցիան է, որն ունի 2π պարբերություն, $f(0) = 0$ և $f^*(x) = f(x)$, $x \in (0, 2\pi)$:



Քանի որ f^* -ը կենտ է, ապա

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^*(t) \cos kt dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2} \sin kx dx = -\frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} (\pi-x) d \cos kx = \\ &= -\frac{1}{2\pi k} (\pi-x) \cos kx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos kx d(\pi-x) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k}, \quad k \in N: \end{aligned}$$

Այժմ, ելնելով f^* -ի սահմանումից և թերիմ 2.3-ից, կստանանք, որ (3.5) շարքն ամբողջ թվային առանցքի վրա գուգամիտում է $f^*(x)$ -ին։ Մասնավորաբար՝

$$\frac{\pi-x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx, \quad x \in (0, 2\pi): \quad (3.5)$$

Ելնելով (3.5) վերլուծությունից, կարելի է ստանալ նոր վերլուծություններ։ (3.5)-ի մեջ x -ը փոխարինելով $2x$ -ով՝ կստանանք

$$\frac{\pi}{2} - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{k}, \quad x \in (0, \pi),$$

կամ, որ նույնն է՝

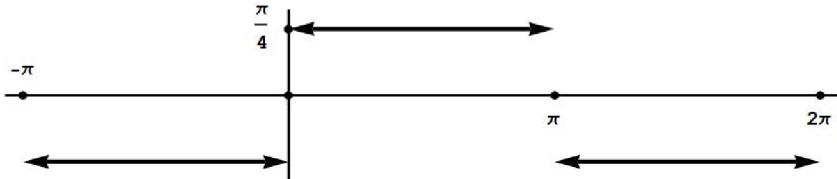
$$\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}, \quad x \in (0, \pi): \quad (3.6)$$

(3.5)-ից համելով* (3.6)-ը՝ կստանանք

* Առաջին շարքի անդամները նախապես գույզ առ գույզ խմբավորելուց հետո։

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \quad x \in (0, \pi) : \quad (3.7)$$

Քանի որ (3.7) շարքի անդամները 2π պարբերությամբ կենտ ֆունկցիաներ են, ապա այդ շարքը ամբողջ թվային առանցքի վրա կզուգամիտի հետևյալ ֆունկցիային՝



(3.7)-ից համելով (3.6)-ը՝ կստանանք

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, \pi),$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2 \sin nx}{n}, \quad x \in (0, \pi) : \quad (3.8)$$

Քանի որ (3.8) հավասարության երկու կողմի ֆունկցիաները կենտ են և 0 կետում ընդունում են 0 արժեքը, ապա (3.8) հավասարությունը տեղի կունենա $(-\pi, \pi)$ միջակայքում:

Եթե (3.8) շարքը դիտարկենք ամբողջ թվային առանցքի վրա, ապա $x = pk$ կետերում այն կզուգամիտի զրոյի, իսկ մնացած կետերում կզուգամիտի այն 2π պարբերություն ունեցող $g(x)$ ֆունկցիային, որը $(-\pi, \pi)$ միջակայքում համընկնում է x -ի հետ (իսկ π կետում 0 է):

2) $f(x) = x^2$ ֆունկցիան վերլուծենք $[-\pi, \pi]$ հատվածում:

$$\text{Քանի որ } f \text{ ֆունկցիան զույգ է, ապա } b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos kx dx :$$

$$\text{Ուստի } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{1}{3\pi} x^3 \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}, \quad \text{իսկ } k = 1, 2, \dots \text{ դեպքում}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi x^2 d \sin kx = \frac{2}{\pi k} x^2 \sin kx \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi k} \int_0^\pi \sin kx \cdot 2x dx = \\ = \frac{4}{\pi k^2} \int_0^\pi x d \cos kx = \frac{4}{\pi k^2} x \cos kx \Big|_0^\pi = \frac{4}{\pi k^2} \cdot \pi \cos \pi k = (-1)^k \frac{4}{k^2} :$$

Հետևաբար՝ $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos kx$, $x \in [-\pi, \pi]$: Այսուղի

տեղադրելով $x = \pi$ ՝ կստանանք $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$ կամ, որ նոյնին է՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} :$$

3) $f(x) = \cos ax$ ֆունկցիան վերլուծենք $[-\pi, \pi]$ հատվածում, որտեղ $a \in R \setminus Z$:

Քանի որ f ֆունկցիան զույգ է, ապա $b_k = 0$, իսկ

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(a+k)x + \cos(a-k)x] dx = \\ = \frac{1}{\pi(a+k)} \sin(a+k)x \Big|_0^\pi + \frac{1}{\pi(a-k)} \sin(a-k)x \Big|_0^\pi = \\ = \frac{1}{\pi(a+k)} \sin \pi(a+k) + \frac{1}{\pi(a-k)} \sin(a-k)\pi = \\ = \frac{1}{\pi(a+k)} \sin a\pi \cos k\pi + \frac{1}{\pi(a-k)} \sin a\pi \cos k\pi = \\ = \frac{(-1)^k}{\pi} \sin a\pi \left(\frac{1}{a+k} + \frac{1}{a-k} \right) = \frac{(-1)^k 2a}{\pi(a^2 - k^2)} \sin a\pi, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos ax dx = \frac{\sin a\pi}{a\pi} :$$

Հետևաբար՝

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2a}{\pi(a^2 - k^2)} \sin a\pi \cos kx,$$

կամ, որ նոյնին է՝

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \sin a\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2a}{\pi(a^2 - k^2)} \cos kx, \quad x \in [-\pi, \pi]:$$

Այստեղ տեղադրելով $x = \pi$ և նշանակելով $a\pi = z$ ՝ կստանանք

$$ctgz = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}, \quad z \in R \setminus \{k\pi\}: \quad (3.9)$$

4. $\sin x$ ֆունկիայի վերուժությունն անվերջ արտադրյալի (Եյլեր):

(3.9)-ից ունենք՝

$$ctgz - \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}, \quad z \in R, \quad z \neq \pi k: \quad (3.10)$$

Քանի որ յուրաքանչյուր հաստատագրված $x \in (0, \pi)$ բվի համար (3.10) շարքը $[0, x]$ հատվածում հավասարաչափ զուգամետ է, ապա այդ շարքն անդամ առ անդամ ինտեգրելով, կստանանք

$$\int_0^x \left(ctgz - \frac{1}{z} \right) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \left(\frac{1}{z + \pi k} + \frac{1}{z - \pi k} \right) dz,$$

ուստի

$$\ln \frac{\sin x}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \ln |(z + \pi k)(z - \pi k)| \Big|_{z=0}^x = \sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right): \quad (3.11)$$

Անվերջ արտադրյալների 4^0 պարզագույն հատկության համաձայն (IX, §6, 2), (3.11)-ից կստանանք՝ $\frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$, կամ, որ նոյնին է՝

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right), \quad x \in [0, \pi]: \quad (3.12)$$

► Ապացուցենք, որ (3.12) հավասարությունը տեղի ունի ամբողջ թվային առանցքի վրա: Նշանակենք՝ $f(x) = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right)$ և ապացուցենք, որ

$$f(x + \pi) = -f(x), \quad \text{ինչից և կհետևի (3.12)-ը: Ունենք՝}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \prod_{k=1}^n \frac{\pi^2 k^2 - x^2}{\pi^2 k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \prod_{k=-n}^n (x + \pi k) \prod_{k=1}^n \frac{1}{\pi^2 k^2}, \quad \text{ուստի}$$

$$f(x + \pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \prod_{k=-n}^n [x + \pi(k+1)] \prod_{k=1}^n \frac{1}{\pi^2 k^2} =$$

$$= -\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n-1} \prod_{m=-(n-1)}^{n-1} (x + \pi m) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\pi^2 k^2} \frac{(x + \pi n)[x + \pi(n+1)]}{\pi^2 n^2} = -f(x): \blacksquare$$

Վերջում նշենք, որ օգտվելով $\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$ հավասարությունից և (3.12)-ից, կարելի է ստանալ $\cos x$ ֆունկցիայի վերլուծությունն անվերջ արտադրյալի:

§4. ՖԵՇԵՐԻ ԹԵՌՈՒԵՄԸ

1. ՖԵՇԵՐԻ ԹԵՆՐԵՄԸ: Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է ամբողջ թվային առանցքի վրա և ունի 2π պարբերություն: Նշանակենք՝*

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}, \quad n \in N,$$

որտեղ $S_k(x)$ -ը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի k -րդ մասնակի գումարն է: σ_n հաջորդականությունն անվանում են f ֆունկցիայի Ֆեշերի միջիններ:

Թեորեմ 4.1 (Ֆեշեր): Եթե $f \in C(R)$ և ունի 2π պարբերություն, ապա

$$\sigma_n(x) \rightharpoonup f(x), \quad x \in R: \tag{4.1}$$

► Օգտվելով $S_k(x)$ -ի (1.7) ինտեգրալային ներկայացումից՝ կստանանք

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi [f(x-t) + f(x+t)] \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt: \tag{4.2}$$

Այսուհետև, գումարելով

* Ենթադրվում է, որ f ֆունկցիան $[-\pi, \pi]$ հատվածում ինտեգրելի է:

$$2 \sin \frac{t}{2} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = \cos kt - \cos(k+1)t, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

նույնությունները, կստանանք՝

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) t = 1 - \cos nt = 2 \sin^2 \frac{nt}{2} :$$

Հաշվի առնելով այս հավասարությունը՝ (4.2)-ից հանգում ենք

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi [f(x-t) + f(x+t)] \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt, \quad (4.3)$$

հավասարությանը, որի աջ մասը կոչվում է ֆեյերի իմտեզրալ:

(4.3) բանաձևի մեջ տեղադրելով $f(x) \equiv 1$ ՝ կստանանք

$$1 = \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt : \quad (4.4)$$

Նշանակենք՝

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{\pi n} \frac{\sin^2 \frac{nt}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}},$$

որը կոչվում է ֆեյերի կորիզ: Հեշտ է սոսուցել, որ այն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$$1^0. \quad \Phi_n(t) \geq 0, \quad 2^0. \quad \int_0^\pi \Phi_n(t) dt = 1 :$$

3⁰. Կամայական $\delta > 0$ թվի համար՝ $\Phi_n(t) \rightarrow 0$, եթե $t \in [\delta, \pi]$:

Ֆեյերի թեորեմը հետևում է (4.3)-ից և 1⁰-3⁰ հատկություններից:

Եթոք, (4.4)-ը բազմապատկելով $-f(x)$ -ով և ստացվածը զումարելով (4.3)-ին՝ կստանանք

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)] \Phi_n(t) dt : \quad (4.5)$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ Կանտորի թեորեմից հետևում է, որ f -ը հավասարաչափ անընդհատ է, ապա գոյություն ունի $\delta \in (0, \pi)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$0 \leq t \leq \delta \Rightarrow |f(x \pm t) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in R : \quad (4.6)$$

Այդ դեպքում, համաձայն (4.5)-ի և 1^0 -ի, կստանանք՝

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta |f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)| \Phi_n(t) dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_\delta^\pi |f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)| \Phi_n(t) dt :$$

Այսուհետև, նշանակելով $M = \max_{x \in R} |f(x)|$ և հաշվի առնելով (4.6)-ը, կստանանք՝

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_0^\delta |\Phi_n(t)| dt + 2M\pi \max_{t \in [\delta, \pi]} |\Phi_n(t)|, \quad x \in R : \quad (4.7)$$

$\Phi_n(t)$ ֆունկցիայի 1^0 - 3^0 հատկությունների շնորհիվ, (4.7)-ից հետևում է (4.1)-ը: ■

Հետևանք: Եթե 2π պարբերություն ունեցող f ֆունկցիան անընդհատ է և f -ի Ֆուրիեի գործակիցները հավասար են զրոյի՝ $a_k, b_k = 0$, ապա $f(x) \equiv 0$, $x \in R$:

► Այս դեպքում՝ $S_k(x)$ -երը, $k = 0, 1, 2, \dots$, հետևաբար նաև՝ $\sigma_n(x)$ -երը, $n \in N$, նույնաբար 0 են, ուստի $f(x)$ -ը նույնպես նույնաբար զրո է: ■

Թեորեմ 4.1: Եթե 2π պարբերություն ունեցող f ֆունկցիան x_0 կետում ունի վերջավոր միակողմանի սահմաններ՝ $f(x_0-) \neq f(x_0+)$, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x_0) = S_0 = \frac{f(x_0-) + f(x_0+)}{2} :$$

Ապացուցվում է նոյն դատողություններով, ինչ որ նախորդ դեպքում: Այս թեորեմը համադրելով միջին թվաբանականների վերաբերյալ Կոշիի թեորեմի (II, §2, 4) հետ՝ կստանանք, որ եթե x_0 կետում f ֆունկցիայի ֆուրիեի շարքը զուգամետ է, ապա մրա զումարը S_0 -ն է:

Դիսոլորթյուն: Ֆեյերի թեորեմը $[0,2\pi]$ հատվածում որոշված ֆունկցիայի համար կճևակերպվի հետևյալ կերպ. եթե $f \in C[0,2\pi]$ և $f(0)=f(2\pi)$, ապա

$$\sigma_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [0,2\pi]: \quad (4.1)$$

► Դիտարկենք այն $f^*: R \rightarrow R$ ֆունկցիան, որն ունի 2π պարբերություն և $f^*(x) = f(x)$, $x \in (0,2\pi]$: Այդ դեպքում $f^* \in C(R)$ և ունի 2π պարբերություն: Հետևաբար, (4.1)-ը հետևում է (4.1)-ից: ■

2. Վայերշտրասի թեորեմները: Դիցուք $E \subset R$ և $f: E \rightarrow R$: Ապացուցենք, որ հետևյալ պնդումները համարժեք են.

ա) Գոյություն ունի P_n բազմանդամների հաջորդականություն, որը E բազմության վրա հավասարաչափ զուգամիտում է f -ին՝

$$P_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in E:$$

բ) Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի Q_ε բազմանդամ, այնպիսին, որ

$$|Q_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in E:$$

► Իրոք, ա) \Rightarrow բ) առնչությունը հետևում է հավասարաչափ զուգամիտության սահմանումից: Իսկ բ) \Rightarrow ա) առնչությունն ապացուցելու համար վերցնենք՝ $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in N$ և նշանակենք՝ $P_n = Q_{\frac{1}{n}}$: Այդ դեպքում բ)-ի համաձայն՝

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n}, \quad x \in E, \quad n \in N,$$

այսինքն՝ $P_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in E$: ■

Եթե f -ը բավարարում է ա) կամ բ) համարժեք պայմաններից որևէ մեկին, ապա ասում են, որ E բազմության վրա f ֆունկցիան կարելի է հավասարաշափ մոտարկել բազմանդամներով:

$P(E)$ -ով կնշանակենք այն $f : E \rightarrow R$ ֆունկցիաների դասը, որոնք կարելի են E բազմության վրա հավասարաշափ մոտարկել բազմանդամներով:

Թեորեմ 4.2 (Վայերշտրասի առաջին թեորեմ): Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան կարելի է հավասարաշափ մոտարկել բազմանդամներով՝

$$P([a, b]) = C([a, b]):$$

Թեորեմ 4.3 (Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմ): Եթե $f \in C[0, 2\pi]$ և $f(0) = f(2\pi)$, ապա գոյություն ունի T_n եռանկյունաչափական բազմանդամների հաջորդականություն, որը $[0, 2\pi]$ հատվածում հավասարաշափ գուգամիտում է f -ին՝

$$T_n(x) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [0, 2\pi]: \quad (4.8)$$

► Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը հետևում է Ֆեյերի թեորեմից, իսկ առաջին թեորեմը՝ երկրորդ թեորեմից:

Իրոք, քանի որ $\sigma_n(x)$ ֆունկցիաները եռանկյունաչափական բազմանդամներ են, ապա (4.1)-ից հետևում է (4.8)-ը:

Վայերշտրասի առաջին թեորեմն ապացուցելու համար ենթադրենք*, որ $[a, b] = [0, 1]$ և ցույց տանք, որ $f \in C[0, 1]$ ֆունկցիան կարելի է $[0, 1]$ հատվածում հավասարաշափ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամներով:

Դիտարկենք հետևյալ պայմաններին բավարարող $g \in C[0, 2\pi]$ օժանդակ ֆունկցիան.

* Ընդհանուր դեպքը փոփոխականի փոխարինման միջոցով բերվում է այս դեպքին:

$g(x) = f(x)$, եթք $x \in [0,1]$,

$g(2\pi) = g(0)$,

$[1,2\pi]$ հաստվածում g -ն գծային է:

Այսպես կառուցված g ֆունկցիան բավարարում է Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի ապայմաններին, ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $T_\varepsilon(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամ՝

$$T_\varepsilon(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

այնպիսին, որ

$$|g(x) - T_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in [0, 2\pi]: \quad (4.9)$$

Այնուհետև նկատենք, որ $a_k \cos kx$ և $b_k \sin kx$, $1 \leq k \leq n$ ֆունկցիաներն իրենց հերթին կարելի է հավասարաչափ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամներով, ուստի գոյություն ունեն $P_k(x)$ և $Q_k(x)$, $1 \leq k \leq n$ բազմանդամներ, այնպիսիք, որ

$$|a_k \cos kx - P_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4n}, \quad |b_k \sin kx - Q_k(x)| < \frac{\varepsilon}{4n}, \quad (4.10)$$

$$x \in [0, 2\pi], \quad k = 1, \dots, n$$

(որպես P_k և Q_k բազմանդամներ կարելի է վերցնել $a_k \cos kx$ և $b_k \sin kx$ ֆունկցիաների Թեյլորի շարքերի մասմակի գումարները):

Նշանակելով

$$R(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n [P_k(x) + Q_k(x)],$$

և հաշվի առնելով (4.9)-(4.10)-ը՝ կստանանք

$$|g(x) - R(x)| \leq |g(x) - T_\varepsilon(x)| + |T_\varepsilon(x) - R(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 2n \cdot \frac{\varepsilon}{4n} = \varepsilon, \quad (4.11)$$

$$x \in [0, 2\pi]:$$

Քանի որ $[0,1]$ հաստվածում $g(x)$ -ը համընկնում է $f(x)$ -ին, ասաւ (4.11)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - R(x)| < \varepsilon, \quad x \in [0,1],$$

այսինքն՝ f ֆունկցիան $[0,1]$ հատվածում կարելի է հավասարաչափ մոտարկել հանրահաշվական բազմանդամներով: ■

§5. ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔ ԸՍՏ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՍԱԿԱՐԳԻ

1. Իրական վոփիոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաներ: Դիցուք՝ $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$, որտեղ $[a,b] \subset R$, իսկ \mathbb{C} -ն կոմպլեքս թվերի դաշտն է: Այդպիսի ֆունկցիան կոչվում է *իրական վոփիոխականի կոմպլեքս (կոմպլեքսարժեք)* ֆունկցիա: Յուրաքանչյուր $t \in [a,b]$ արժեքի դեպքում $f(t)$ կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել

$$f(t) = (\varphi(t), \psi(t)) = \varphi(t) + i\psi(t), \quad t \in [a,b] \quad (5.1)$$

տեսքով, որտեղ $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow R$: Այսպիսով, (5.1) բանաձևի օգնությամբ f կոմպլեքս ֆունկցիան ներկայացվում է φ և ψ իրական (իրականարժեք) ֆունկցիաների միջոցով, որոնք համապատասխանաբար կոչվում են f -ի իրական և կեղծ մասեր:

f կոմպլեքս ֆունկցիայի սահմանը $t_0 \in [a,b]$ կետում սահմանվում է ճիշտ նույն ձևով, ինչ որ իրական ֆունկցիայի դեպքում*: Այն է՝ $z_0 = x_0 + iy_0$ կոմպլեքս թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի սահման t_0 կետում և նշանակվում է՝ $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = z_0$, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} 0 < |t - t_0| < \delta \\ t \in [a,b] \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(t) - z_0| < \varepsilon :$$

Թեորեմ 5.1: Որպեսզի $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = z_0$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) = y_0 :$$

* Տե՛ս նաև վեկտոր - ֆունկցիայի սահմանը (VII, §2, 6):

Ապացույցը հետևում է:

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - x_0| &\leq |f(t) - z_0| \leq |\varphi(t) - x_0| + |\psi(t) - y_0|, \\ |\psi(t) - x_0| &\leq |f(t) - z_0| \leq |\varphi(t) - x_0| + |\psi(t) - y_0| \end{aligned}$$

անհավասարություններից փնջան կոորդինատային զուգամիտության վերաբերյալ թեորեմի դեպքում (VII, §1, 3)):

Այս թեորեմը կարելի է ձևակերպել նաև հետևյալ կերպ.

Որպեսզի $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ կոմպլեքս ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ φ և ψ ֆունկցիաներն ունենան վերջավոր սահմաններ, ընդ որում,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} \psi(t) :$$

Կոմպլեքս ֆունկցիայի անընդհատությունը, ածանցյալը և ինտեգրալը կրկին սահմանվում են ճիշտ նույն ձևով, ինչ որ իրական ֆունկցիաների դեպքում, ընդ որում ճիշտ են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 5.2: Որպեսզի f ֆունկցիան $t_0 \in [a, b]$ կետում լինի դիֆերենցելի (ունենա ածանցյալ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ φ և ψ ֆունկցիաները t_0 կետում լինեն դիֆերենցելի, ընդ որում,

$$f'(t_0) = \varphi'(t_0) + i\psi'(t_0) :$$

Թեորեմ 5.3: Որպեսզի f ֆունկցիան $[a, b]$ հատվածում լինի ինտեգրելի (Դիմանի իմաստով), անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\varphi, \psi \in \Re[a, b]$, ընդ որում,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \varphi(t) dt + i \int_a^b \psi(t) dt :$$

Ուժանի իմաստով ինտեգրելի կոմպլեքս ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $\Re([a, b], \mathbb{C})$ սիմվոլով:

Դժվար չէ ստուգել, որ ինտեգրալի հավասարությունը արտահայտվող այն հատկությունները, որոնք չեն առնչվում իրական թվերի բազմության

կարգավորվածությանը*, պահպանվում են նաև կոմպլեքս ֆունկցիաների համար: Այլ կերպ ասած, բացի միջին արժեքի թեորեմներից և անհավասարություններով արտահայտվող հատկություններից, մնացած բոլոր հատկությունները պահպանվում են:

Ցույց տանք, որ միջին արժեքի թեորեմը չի պահպանվում: Օրինակ,

$$e^{int} = \cos nt + i \sin nt$$

ֆունկցիայի համար ունենք՝

$$\int_0^{2\pi} e^{int} dt = \int_0^{2\pi} \cos nt dt + i \int_0^{2\pi} \sin nt dt = \begin{cases} 2\pi, & n=0 \\ 0, & n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \end{cases}, \quad (5.2)$$

սակայն $|e^{int}| = 1 \neq 0$, $n \in N$:

Կոմպլեքս ֆունկցիաների համար ավելանում է ինտեգրալի համալուծի մասին հետևյալ հատկությունը՝

$$\overline{\int_a^b f(t) dt} = \int_a^b \overline{f(t)} dt, \quad (5.3)$$

որը հետևում է թեորեմ 5.3-ից:

Ինտեգրալի անհավասարությունով արտահայտվող հատկություններից պահպանվում է ինտեգրալի մոդուլի գնահատականը՝

$$\text{եթե } \Re([a,b], \mathbb{C}), \text{ ապա } |f| \in \Re[a,b] \text{ և } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt :$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ իրական ֆունկցիաների դեպքում:

Այսպիսով, $\Re([a,b], \mathbb{C})$ -ն կոմպլեքս գծային տարածություն է, որն ընդգրկում է $C([a,b], \mathbb{C})$ -ն՝ $[a,b]$ հատվածում անընդհատ կոմպլեքս ֆունկցիաների տարածությունը: $C([a,b], \mathbb{C})$ -ն հանդիսանում է $\Re([a,b], \mathbb{C})$ -ի ենթատարածություն:

* Կոմպլեքս թվերի բազմությունը կարգավորված չէ:

2. Սկալյար արտադրյալ, նորմ և հեռավորություն: Դիցուք E -ն կոմպլեքս գծային (վեկտորական) տարածություն է, այսինքն՝ E -ի վրա սահմանված են գումարման և կոմպլեքս թվով բազմապատկման գործողություններ:

Ենթադրենք E տարածության յուրաքանչյուր x և y տարրերի գույգին համապատասխանեցված է մի $\langle x, y \rangle$ կոմպլեքս թիվ, որը կոչվում է այդ տարրերի սկալյար արտադրյալ, այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ աքսիոմները՝

$$1) \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$2) \langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,$$

$$3) \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,$$

$$4) \text{ա) } \langle x, x \rangle \geq 0, \quad \text{բ) } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0 :$$

2) և 3) աքսիոմները համապելով 1)-ի հետ՝ կստանանք

$$2') \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle,$$

$$3') \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle :$$

Կոմպլեքս գծային տարածությունը, որում սահմանված է սկալյար արտադրյալ, կոչվում է *ունիտար տարածություն*: Այդ դեպքում

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

թիվը կոչվում է x վեկտորի նորմ: Նորմի հատկություններն ապացուցելու համար մեզ անհրաժեշտ է *Ըստացի անհավասարությունը*:

Եթե բավարարվում են 1)-3) և 4)-ի ա) աքսիոմները, ապա

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|: \tag{5.4}$$

► Կամայական $\lambda \in \mathbb{C}$ թվի համար ունենք՝

$$0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x\|^2 - \bar{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + |\lambda|^2 \|y\|^2: \tag{5.5}$$

$$\text{Եթե } \|y\| \neq 0, \text{ այստեղ տեղադրելով } \lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}, \text{ կստանանք՝}$$

$$0 \leq \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2},$$

ինչը համարժեք է (5.4)-ին:

Եթք $\|y\|=0$, բայց $\|x\|\neq 0$, (5.4)-ը կապացուցվի նույն կերպ: Իսկ եթք $\|x\|=\|y\|=0$, ապա (5.5)-ում տեղադրելով $\lambda=< x, y >$, կստանանք $0\leq -2|< x, y >|^2$, այսինքն՝ $< x, y >=0$: Ինչպես տեսնում ենք, այս դեպքում (5.4)-ը կրկին տեղի ունի: ■

Ապացուցենք, որ նորմն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$$\text{ա) } \|x\|\geq 0, \text{ ընդունում, } \|x\|=0 \Leftrightarrow x=0,$$

$$\text{բ) }^* \|x+y\|\leq \|x\|+\|y\|,$$

$$\text{գ) } \|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|, \lambda\in\mathbb{C}:$$

► ա)-ն ու զ)-ն անմիջապես հետևում են նորմի սահմանումից (և սկայար արտադրյալի հատկություններից), իսկ բ)-ն՝ Ըլարցի անհավասարությունից: Ի՞րոք՝

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &=< x+y, x+y > = \|x\|^2 + < x, y > + < x, y > + \|y\|^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\operatorname{Re} < x, y > + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|< x, y >| + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

ինչից և հետևում է բ)-ն: ■

Ունիտար տարածությունում x և y տարրերի $\rho(x, y)$ հեռավորությունը սահմանվում է նորմի միջոցով՝

$$\rho(x, y)=\|x-y\|:$$

Նորմի ա)-զ) հատկություններից հետևում են հեռավորության հետևյալ հատկությունները՝

$$1^0. \rho(x, y)\geq 0, \text{ ընդունում, } \rho(x, y)=0 \Leftrightarrow x=y,$$

$$2^0. \rho(x, y)=\rho(y, x),$$

$$3^0. \rho(x, y)\leq\rho(x, z)+\rho(z, y):$$

Ունիտար տարածությունում x և y վեկտորները կոչվում են *օրորդունակ*, եթե $< x, y >=0$:

* Եթե տեղի ունի հավասարություն, ապա $x=ty$, $t\geq 0$ (կամ $y=0$):

3. Ֆունկցիոնալ տարածություններ: Օրթոգոնալ համակարգեր:

$C([a,b], \mathbb{C})$ և $\mathfrak{R}([a,b], \mathbb{C})$ տարածություններում f և g ֆունկցիաների սկայար արտադրյալը սահմանվում է:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

բանաձևի միջոցով: (5.3)-ի շնորհիվ, սկայար արտադրյալի 1)-3) և 4)-ի ա) հատկությունները տեղի ունեն թե՛ $C([a,b], \mathbb{C})$ -ում, և թե՛ $\mathfrak{R}([a,b], \mathbb{C})$ -ում: Ինչ վերաբերում է 4)-ի բ) հատկությանը, ապա այն $C([a,b], \mathbb{C})$ -ում տեղի ունի, իսկ $\mathfrak{R}([a,b], \mathbb{C})$ -ում՝ ոչ: Իրոք, եթե $f \in C([a,b], \mathbb{C})$ և $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$, ապա $f(t) \equiv 0$, $t \in [a,b]$ (ապացուցվում է հակասող ենթադրության մեթոդով): Այս պնդումն ինտեգրելի ֆունկցիաների համար ճիշտ չէ:

Այդուհանդեռն, $\mathfrak{R}([a,b], \mathbb{C})$ -ում նորմի հետ կապված այս անհարթությունն անտեսելով*, երկու տարածություններում էլ դիտարկվում է f ֆունկցիայի $\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ նորմը:

Ըստացի անհավասարությունն է՝

$$\left| \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b |g(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

որը նաև կոչվում է Կոշի - Բունյակովսկիի անհավասարություն:

Այս տարածություններում երկու ֆունկցիաների հեռավորությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\rho(f, g) = \left\{ \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

* Իրականում 4)-ի բ) պայմանն ըմկալվում է այլ՝ համարյա ամենորեք իմաստով (տե՛ս XVII, § 2, կետ 3):

որը կոչվում է՝ միջին քառակուսային հեռավորություն:

Սահմանում: $\{\varphi_i\} \subset \mathfrak{R}([a,b], \mathbb{C})$ ֆունկցիաների համակարգը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է օրթոգոնալ համակարգ, եթե

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i(t) \overline{\varphi_j(t)} dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i > 0, & i = j \end{cases}$$

$\{\varphi_i\}$ օրթոգոնալ համակարգը կոչվում է օրթոնորմալ (օրթոգոնալ և նորմավորված), եթե $\lambda_i = 1$:

Յանկացած օրթոգոնալ համակարգ կարելի է նորմավորել: Խսկապիս, եթե $\{\varphi_i\}$ -ն օրթոգոնալ համակարգ է, ապա $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \varphi_i \right\}$ -ն օրթոնորմալ համակարգ է, որը կոչվում է $\{\varphi_i\}$ համակարգի նորմավորված համակարգ:

Օրինակներ: 1) $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ համակարգը, որը կոչվում է եռանկյունաչափական համակարգ, $[0, 2\pi]$ հատվածում օրթոգոնալ համակարգ է, իսկ նրա նորմավորվածը^{*} կլինի՝

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}:$$

2) $\{e^{ikx}, k \in Z\}$ համակարգը, որը կոչվում է կոմպլեքս եռանկյունաչափական համակարգ, $[0, 2\pi]$ հատվածում օրթոգոնալ է (տե՛ս (5.2)-ը):

$$\langle e^{ikx}, e^{imx} \rangle = \int_0^{2\pi} e^{ix(k-m)} dx = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ 2\pi, & k = m \end{cases}, \quad k, m \in Z, \quad (5.6)$$

նորմավորվածը կլինի՝ $\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, k \in Z \right\}$:

4. Եռանկյունաչափական շարքի կոմպլեքս գրելաձև: Դիտարկենք

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (5.7)$$

կոմպլեքս եռանկյունաչափական բազմանդամը՝ $a_k, b_k \in \mathbb{C}$:

*Տե՛ս (§1, 1):

Տեղադրելով*

$$\cos kx = \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}, \quad \sin kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i},$$

կստանան՝

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{ikx} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-ikx} \right];$$

$$\zeta \text{աշըլի առնելով } \frac{1}{i} = -i \text{ հավասարությունը՝ կստանան՝}$$

$$T(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad (5.8)$$

որտեղ

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 1, \dots, n, \quad c_0 = a_0; \quad (5.8')$$

Այսպիսով, (5.7) բազմանդամը կարելի է գրել նաև (5.8) տեսքով, որը կոչվում է *եռանկյունաչափական բազմանդամի կոմպլեքս գրելաձև*:

(5.8) հավասարության երկու կողմը բազմապատկելով e^{-imx} -ով և ինտեգրելով ստացված հավասարությունը՝ (5.6)-ի շնորհիվ կստանանք

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(x) e^{-imx} dx, \quad |m| \leq n: \quad (5.9)$$

Եթե $|m| > n$, ապա (5.9) ինտեգրալը հավասար է 0-ի:

(5.8) և (5.9) հավասարություններից հետևում է **, որ որպեսզի $T(x)$ եռանկյունաչափական բազմանդամը լինի իրական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $c_{-k} = \overline{c_k}$, $k = 0, 1, \dots, n$:

Անուհետև դիտարկենք հետևյալ սխմվողը՝

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad (5.10)$$

* Եյլերի բանաձևերն են:

** (5.3)-ի շնորհիվ:

որը կոչվում է կոմպլեքս տեսքով գրված եռանկյունաչափական շարք: Այդ շարքի n -րդ մասնակի գումարը է կոչվում

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Եռանկյունաչափական բազմանդամը: Ուստի (5.10) շարքի մասնակի գումարները համընկնում են

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (5.11)$$

շարքի մասնակի գումարներին, եթե c_k գործակիցները a_k և b_k գործակիցներից ստացվում են (5.8) բանաձևերի միջոցով: Դրա շնորհիվ մենք կարող ենք համարել, որ (5.10) շարքը դա (5.11) շարքն է՝ գրված մեկ այլ տեսքով, որը կոչվում է (5.11) եռանկյունաչափական շարքի կոմպլեքս գրելաձև:

5. Ֆուրիեի շարք ըստ օրթոգոնալ համակարգի: Դիցուք $\{\varphi_k\}$ ($k \in N$ կամ $k \in Z$) համակարգը $[a, b]$ հատվածում օրթոգոնալ է՝

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_a^b \varphi_i(t) \overline{\varphi_j(t)} dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \lambda_i > 0, & i = j \end{cases} :$$

$f \in \mathfrak{R}([a, b], \mathbb{C})$ ֆունկցիայի համար նշանակենք՝

$$c_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b f(t) \overline{\varphi_k(t)} dt, \quad (5.12)$$

որը կոչվում է f ֆունկցիայի Ֆուրիեի k -րդ գործակից ըստ $\{\varphi_k\}$ համակարգի: Այդ դեպքում մենք կգրենք

$$f(x) \sim \sum c_k \varphi_k(x),$$

և այդ շարքը կանվանենք f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարք (ըստ $\{\varphi_k\}$ համակարգի):

Նկատենք, որ f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն ըստ $\{\varphi_k\}$ օրթոգոնալ համակարգի նույնն է, ինչ որ f -ի Ֆուրիեի շարքն ըստ $\left\{ \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\}$

նորմավորված համակարգի: Այլ կերպ ասած՝ օքտողոնալ համակարգը նորմավորելիս Ֆուրիեի շարքը չի փոխվում:

$$\text{Իրոք, քանի որ } c_k \varphi_k = \sqrt{\lambda_k} c_k \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \text{ իսկ (5.12)-ի շնորհիվ՝}$$

$$\sqrt{\lambda_k} c_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_a^b f(t) \overline{\varphi_k(t)} dt = \int_a^b f(t) \left[\overline{\frac{\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}}} \right] dt,$$

ապա $\sqrt{\lambda_k} c_k$ -ն f ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցն է ըստ նորմավորված համակարգի:

Մենք ուսումնասիրելու ենք $f \in \mathfrak{R}([a,b], \mathbb{C})$ ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքն ըստ եռանկյունաչափական համակարգի՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx ,$$

որտեղ

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt$$

և ըստ կոմպլեքս եռանկյունաչափական համակարգի՝

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} ,$$

որտեղ

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt : \quad (5.12)$$

Ինչպես տեսանք 4-րդ կետում, այդ երկու շարքերն ըստ էության նոյն շարքերն են:

Նախ ասպացուցենք ընդհանուր բնույթի մի թեորեմ:

6. Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքսպրեմալ հատկությունը:

Թեորեմ 5.4: Եթե $\{\varphi_k\}$ համակարգն օրթոգոնալ է $[a, b]$ հատվածում, ապա

$$I_n(z_1, \dots, z_n) = \int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(t) \right|^2 dt, \quad z_k \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

ֆունկցիան (հաստատագրված n -ի դեպքում) փորրագոյն արժեքը է ընդունում այն և միայն այն դեպքում, եթե $z_k = c_k$, $k = 1, \dots, n$, որտեղ c_k -ն է ֆունկցիայի ֆուրիեի գործակիցն է:

► Քանի որ օրթոգոնալ համակարգը նորմավորելիս Ֆուրիեի շարքը չի փոխվում, ապա կարող ենք ենթադրել, որ $\{\varphi_k\}$ համակարգը օրթոնորմալ է $[a, b]$ հատվածում: Այդ դեպքում ունենք՝

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(t) \right] \overline{\left[f(t) - \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(t) \right]} dt = \\ &= \int_a^b \left[f(t) - \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(t) \right] \overline{\left[f(t) - \sum_{k=1}^n z_k \varphi_k(t) \right]} dt = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{z_k} c_k - \sum_{k=1}^n z_k \overline{c_k} + \sum_{k=1}^n |z_k|^2 : \end{aligned} \quad (5.14)$$

Քանի որ

$$|z_k - c_k|^2 = (z_k - c_k)(\overline{z_k} - \overline{c_k}) = |z_k|^2 - z_k \overline{c_k} - \overline{z_k} c_k + |c_k|^2,$$

ապա (5.14)-ից կստանանք՝

$$I_n = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \quad (5.15)$$

ինչից և հետևում է թեորեմի պնդումը: ■

(5.15)-ի մեջ տեղադրելով $z_k = c_k$, $k = 1, \dots, n$ և հաշվի առնելով (5.13)-ը՝ կստանանք

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2, \quad (5.16)$$

որը կոչվում է **Բեսսելի նոյնություն**:

Հետևանք (Բեսսելի անհավասարություն): Եթե $\{\varphi_k\}$ համակարգը օրբոնորմալ է, ապա

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2, \quad (5.17)$$

որտեղ c_k -ն f ֆունկցիայի Ֆուրիեի k -րդ գործակիցն է:

► (5.16)-ից ունենք՝ $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2$: Այստեղ n -ը ձգտեցնելով

անվերջության՝ կստանանք (5.17)-ը: ■

Չնորմավորված համակարգի համար (5.16)-ը և (5.17)-ը համապատասխանաբար կը նորունեն հետևյալ տեսքերը.

$$\int_a^b \left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t) \right|^2 dt = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n \lambda_k |c_k|^2, \quad (5.16')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |c_k|^2 \leq \|f\|^2 : \quad (5.17')$$

7. Եռանկյունաչափական համակարգի փակությունը և լրիվությունը:

Թեորեմ 5.5: Դիցուք՝ $f, g \in \mathcal{R}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ և

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, \dots; \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \cos kt dt, \quad k = 0, 1, \dots; \quad d_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t) \sin kt dt$$

$$S_n(t, f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} :$$

Այդ դեպքում՝

$$u) \int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t, f)|^2 dt \rightarrow 0, \text{ bapp } n \rightarrow \infty,$$

$$p) \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt,$$

$$p) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \overline{d_k} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt :$$

► ա) ն համարժեք է հետևյալին՝*

$$\|f - S_n(f)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty : \quad (5.18)$$

Բավական է (5.18)-ը ապացուցել իրական ֆունկցիաների համար: Իբրոք, եթե $f = \varphi + i\psi$ ($\varphi, \psi \in \mathfrak{R}[0, 2\pi]$), ապա $S_n(f) = S_n(\varphi) + iS_n(\psi)$ և

$$\|f - S_n(f)\| \leq \|\varphi - S_n(\varphi)\| + \|\psi - S_n(\psi)\| :$$

Հետևաբար, եթե (5.18)-ը ճիշտ է φ և ψ իրական ֆունկցիաների համար, ապա այն ճիշտ է նաև f կոմպլեքս ֆունկցիայի համար:

Այս մասնավոր դեպքում, եթե $f \in C[0, 2\pi]$ և $f(0) = f(2\pi)$, ա)-ն հետևում է Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի եքստրեմալ հատկությունից և Ֆեյերի թեորեմից (դիտողությունից): Իսկապես, քանի որ σ_n -ը եռանկյունաչափական բազմանդամ է, որի աստիճանը n -ը չի գերազանցում, ապա Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի եքստրեմալ հատկության համաձայն՝

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t, f)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f(t) - \sigma_n(t)|^2 dt : \quad (5.19)$$

Մյուս կողմից, Ֆեյերի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |f(t) - \sigma_n(t)| < \sqrt{\varepsilon / 2\pi}, \quad t \in [0, 2\pi] : \quad (5.20)$$

* Այս դեպքում ասում են, որ $S_n(f)$ հաջորդականությունը միջին քառակուսային իմաստով գուգամիտում է f -ին:

Համադրելով (5.19)-ը և (5.20)-ը՝ կստանանք, որ $n > n_0$ դեպքում՝

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(t, f)|^2 \leq \varepsilon :$$

Այժմ ապացուենք (5.18)-ը կամայական $f \in \mathfrak{R}[0, 2\pi]$ ֆունկցիայի համար: Կարող ենք ենթադրել, որ $f(0) = f(2\pi)$, քանի որ մի կետում ֆունկցիայի արժեքի փոփոխությունը չի ազդում ինտեգրալի արժեքի վրա:

Վերցնենք $[0, 2\pi]$ հատվածի կամայական

$$P : 0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2\pi, \lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta x_i,$$

տրհում և կառուցենք $g \in C[0, 2\pi]$, $g(0) = g(2\pi)$ կտոր առ կտոր գծային ֆունկցիա հետևյալ կերպ. $g(x_i) = f(x_i), 0 \leq i \leq n$, իսկ $[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ հատվածներում g -ն գծային է (g ֆունկցիայի գրաֆիկը բեկյալ է, որի գագաթները $(x_i, f(x_i))$ կետերն են): Այդ դեպքում ամեն մի $t \in [x_i, x_{i+1}]$ կետի համար կունենանք՝

$$|f(t) - g(t)| \leq \max(|f(t) - f(x_i)|, |f(t) - f(x_{i+1})|) \leq \omega_i(f),$$

որտեղ $\omega_i(f)$ -ը f ֆունկցիայի տատանումն է $[x_i, x_{i+1}]$ հատվածում, և

$$|g(t)| \leq \max(|f(x_i)|, |f(x_{i+1})|) \leq \sup_{[0, 2\pi]} |f(t)| = M :$$

Ուստի $|f(t) - g(t)| \leq 2M$, $t \in [0, 2\pi]$ և, հետևաբար,

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq 2M \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)| dt = \\ &= 2M \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(t) - g(t)| dt \leq 2M \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \rightarrow 0, \lambda \rightarrow 0 : \end{aligned}$$

Այսպիսով, ամեն մի $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի P տրհում, այնպիսին, որ

$$\|f - g\| < \varepsilon / 2 : \tag{5.21}$$

Մյուս կողմից, Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքստրեմալ հատկության և եռանկյան անհավասարության համաձայն՝

$$\|f - S_n(f)\| \leq \|f - S_n(g)\| \leq \|f - g\| + \|g - S_n(g)\|, \quad (5.22)$$

որտեղ $\|g - S_n(g)\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$: Ուստի զոյտություն ունի $n_0 \in N$, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow \|g - S_n(g)\| < \frac{\varepsilon}{2}: \quad (5.23)$$

Համադրելով (5.21)-(5.23)-ը՝ կստանանք

$$n > n_0 \Rightarrow \|f - S_n(f)\| < \varepsilon:$$

Թեորեմի բ) կետն ապացուցելու համար պետք է ցույց տալ, որ

$$\frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}) \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt, \text{ եթե } n \rightarrow \infty: \quad (5.24)$$

Դրա համար նախ նկատենք, որ

$$\frac{1}{\pi} \langle S_n(t, f), g \rangle \rightarrow \frac{1}{\pi} \langle f, g \rangle, \text{ եթե } n \rightarrow \infty: \quad (5.25)$$

Իրք, օգտվելով սկալյար արտադրյալի հատկություններից և Շվարցի անհավասարությունից՝ կարող ենք գնահատել նշված սկալյար արտադրյալների տարրելությունը.

$$\begin{aligned} |\langle S_n(t, f), g \rangle - \langle f, g \rangle| &= |\langle S_n(t, f) - f, g \rangle| \leq \\ &\leq \|S_n(t, f) - f\| \cdot \|g\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

որից և հետևում է (5.25)-ը:

Մյուս կողմից՝

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \langle S_n(t, f), g \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_n(t, f) \overline{g(t)} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) \overline{g(t)} dt = \\ &= \frac{a_0 \overline{\alpha_0}}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \overline{\alpha_k} + b_k \overline{\beta_k}): \end{aligned} \quad (5.26)$$

Համադրելով (5.25)-ը և (5.26)-ը, կստանանք (5.24)-ը:

թ) ապացուցվում է նոյն կերպ: ■

Այս թեորեմի ա) պնդումն անվանում են **Եռանկյունաչափական համակարգի փակություն**, բ) պնդումը՝ **Պարսևալի ընդհանրացված հավասարություն**:

բ) և թ) հավասարությունների մեջ վերցնելով $g = f \cdot$ կստանանք

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt, \quad (5.27)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt, \quad (5.27')$$

որոնք կոչվում են **Պարսևալի հավասարություններ**:

Ետևանիք: Եթե $f \in C[0, 2\pi]$ և $a_k = b_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, ապա

$$f(x) \equiv 0, \quad x \in [0, 2\pi]:$$

այլ կերպ ասած, նոյնարար զրոյից բացի, որիշ ամրնութառ ֆունկցիա չկա, որն օրբողման լինի եռանկյունաչափական համակարգի բոլոր ֆունկցիաներին:

Այս հատկությունը կոչվում է **եռանկյունաչափական համակարգի լինիություն**:

Ապացույցն անմիջապես հետևում է (5.27)-ից:

8. Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումը:

Թեորեմ 5.6: Եթե $f \in \mathcal{R}[0, 2\pi]$ և

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

ապա կամայական $x_0 \in (0, 2\pi]$ կետի համար՝

$$\int_0^{x_0} f(x) dx = \int_0^{x_0} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{x_0} \cos kx dx + b_k \int_0^{x_0} \sin kx dx: \quad (5.28)$$

► **Պարսևալի բ)** հավասարության մեջ վերցնենք՝

$$g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq x_0 \\ 0, & x_0 < x \leq 2\pi \end{cases} :$$

Այդ դեպքում՝

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} dx;$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} \sin kx dx$$

Ուստի p -ն կը նդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} \cos kx dx + b_k \frac{1}{\pi} \int_0^{x_0} \sin kx dx \right];$$

Այս հավասարության երկու կողմից բազմապատկելով π -ով՝ կստանանք (5.28)-ը: ■

Օրինակ: Ուսնենք (տես §3, 4), որ $\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx$: Կիրառելով

(5.28)-ը՝ կստանանք

$$\frac{\pi}{2} x - \frac{1}{4} x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos kx}{k^2}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

հետևաբար,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2} x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}, \quad x \in [0, 2\pi]: \quad (5.29)$$

Այսուղի տեղադրելով $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (տես §3, 4)^{*}, կստանանք՝

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2} x + \frac{\pi^2}{6}, \quad x \in [0, 2\pi]:$$

* Այս շարքի գումարը կարելի է հաշվել նաև (5.29)-ը ինտեգրելու միջոցով:

§6. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՖՈՒՐԻԵԻ ՇԱՐՔԸ

1. Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի գործակիցների նվազման արագությունը:

Սահմանում: $f : [a, b] \rightarrow R(\mathbb{C})$ ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ դիֆերենցելի, եթե $f' \in C[a, b]$ ($f' \in C([a, b], \mathbb{C})$): Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասը նշանակվում է $C^1[a, b]$ ($C^1([a, b], \mathbb{C})$) սիմվոլով:
 $C^m[a, b]$ ($C^m([a, b], \mathbb{C})$) սիմվոլով նշանակվում է այն ֆունկցիաների դասը, որոնք ունեն m -րդ կարգի անընդհատ ածանցյալ:

$f : [a, b] \rightarrow R(\mathbb{C})$ ֆունկցիան կոչվում է կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի, եթե գոյուրյուն ունեն $[a, b]$ հատվածի

$$P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

սրբում և $g_i \in C^1[x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$ ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$f(x) = g_i(x), \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad 0 \leq i \leq n-1:$$

Լեմմա 6.1: Եթե $f \in C([-\pi, \pi], \mathbb{C})$, $f(-\pi) = f(\pi)$, և f -ը $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա

$$c_k(f') = ikc_k(f), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{6.1}$$

որտեղ $c_k(f)$ -ը և $c_k(f')$ -ը համապատասխանաբար f և f' ֆունկցիաների Ֆուրիեի գործակիցներն են՝

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt, \tag{6.2}$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikx}, \quad f' \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f') e^{ikx};$$

(6.1)-ը նշանակում է, որ f' -ի Ֆուրիեի շարքը ստացվում է f -ի Ֆուրիեի շարքից՝ անդամ առ անդամ ածանցման միջոցով:

► Նախ քննարկենք այն դեպքը, եթե f ֆունկցիան անընդհատ դիմերենցելի է ամբողջ $[-\pi, \pi]$ հատվածում: Այդ դեպքում, (6.2)-ում կիրառելով մասերով ինտեգրման բանաձևեր, կստանանք՝

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} df(t) = \\ &= \frac{1}{2\pi} f(t) e^{-ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = ikc_k(f), \end{aligned}$$

$$\text{քանի որ } f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0:$$

Ընդհանուր դեպքում (եթե f -ը $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիմերենցելի է և անընդհատ), գոյություն ունի $[-\pi, \pi]$ հատվածի $-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \pi$ տրոհում, այնպիսին, որ $[x_j, x_{j+1}]$, $0 \leq j \leq n-1$ հատվածներից յուրաքանչյուրում f -ն անընդհատ դիմերենցելի է: Այս դեպքում $[-\pi, \pi]$ հատվածով տարածված ինտեգրալը կտրոհենք $[x_j, x_{j+1}]$ հատվածներով տարածված ինտեգրալների գումարի և յուրաքանչյուր գումարելու համար կիրառենք մասերով ինտեգրման բանաձևը:

Քանի որ

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(t) e^{-ikt} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} = f(\pi)e^{-ik\pi} - f(-\pi)e^{ik\pi} = 0,$$

ապա արդյունքում կստանանք (6.1)-ը: ■

Թեորեմ 6.1: Դիմոք՝ $f \in C^{m-1}([- \pi, \pi], \mathbb{C})$ և $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$: Եթե $f^{(m-1)}$ -ը $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր անընդհատ դիմերենցելի է, ապա

$$c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k(f), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{6.3}$$

և

$$|c_k(f)| = \frac{\gamma_k}{|k|^m}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{6.4}$$

որտեղ $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k^2 < \infty$:

► Օգտվելով (6.1)-ից և կիրառելով մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ՝ կստանանք (6.3)-ը:

Այսուհետև, ճշանակելով $\gamma_k = |c_k(f^{(m)})|$ և հաշվի առնելով (5.27) Պարսկալի հավասարությունը՝

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k(f^{(m)})|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f^{(m)}(t)|^2 dt,$$

(6.3)-ից կստանանք (6.4)-ը: ■

Դիսոլուրյուն 1: $f \in C^{m-1}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ և $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ պայմանների փոխարեն կարելի է ենթադրել, որ f -ը ամբողջ թվային առանցքի վրա որոշված 2π պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է և $f \in C^{m-1}(R, \mathbb{C})$:

Դիսոլուրյուն 2: Եթե f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը գրված է եռանկյունաչափական համակարգով՝

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx ,$$

ապա Եյլերի բանաձևի շնորհիվ ուսինը՝ $a_k = c_k - c_{-k}$, $b_k = i(c_k - c_{-k})$, ուստի (6.4)-ից կստանանք՝

$$a_k = \frac{\alpha_k}{k^m}, \quad b_k = \frac{\beta_k}{k^m}, \quad k \in N, \quad (6.4)$$

որտեղ $\sum \alpha_k^2 < \infty$, $\sum \beta_k^2 < \infty$:

2. Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի զուգամիտության արագությունը:

Թեորեմ 6.2: Դիցուք $f \in C^{(m-1)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ և $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$, $0 \leq j \leq m-1$: Եթե $f^{(m-1)}$ -ը $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կտոր

անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը $[-\pi, \pi]$ հաստվածում նորմալ^{*} զուգամիտում է f ֆունկցիային: Ընդ որում,

$$|f(x) - S_n(x)| \leq \frac{\varepsilon_n}{n^{m-1/2}}, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \quad (6.5)$$

որտեղ $S_n(x)$ -ը f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքի n -րդ մասնակի գումարն է:

► (6.4')-ում վերցնելով $m = 1$, կստանանք՝

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq \frac{\alpha_k + \beta_k}{k}, \quad k \in N,$$

ընդ որում, $\frac{\alpha_k + \beta_k}{k}$ թվերից կազմած շարքը զուգամետ է^{**}, ուստի

Վայերշտրասի (մաժորանտով) հայտանիշի լրացման համաձայն,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (6.6)$$

շարքը նորմալ զուգամետ է: Քանի որ f -ը կտոր առ կտոր դիֆերենցելի է և անընդհատ, ընդ որում, $f(-\pi) = f(\pi)$, ապա (§3, 1) f -ի Ֆուրիեի շարքը՝ (6.6)-ը, $[-\pi, \pi]$ հաստվածում զուգամիտում է f ֆունկցիային՝

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad x \in [-\pi, \pi]: \quad (6.6')$$

Այժմ ապացուցենք (6.5)-ը: (6.4')-ի համաձայն, ունենք՝

$$\begin{aligned} |f(x) - S_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k)^2 \right\}^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right)^{1/2}: \end{aligned} \quad (6.7)$$

Սյուս կողմից (IX, §2)՝

^{*} Շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքը հավասարաշափ զուգամետ է:

^{**} $\frac{\alpha_k + \beta_k}{k} \leq \frac{1}{2} \left[(\alpha_k + \beta_k)^2 + \frac{1}{k^2} \right] \leq \alpha_k^2 + \beta_k^2 + \frac{1}{2k^2} :$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq \frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}; \quad (6.8)$$

Համարելով (6.7)-ը և (6.8)-ը՝ կստանանք (6.5)-ը: ■

3. Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ածանցումը:

Թեորեմ 6.3: Դիցուք $f \in C^{(m)}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ և $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$,

$0 \leq j \leq m-1$, $m \in N$: Եթե $f^{(m-1)}$ -ը $[-\pi, \pi]$ հատվածում կտոր առ կոռու անընդհատ դիֆերենցելի է, ապա f ֆունկցիայի Ֆուրիեի շարքը $[-\pi, \pi]$ հատվածում կարելի է անդամ առ անդամ ածանցել $m-1$ անգամ՝

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^{(s)}, \quad x \in [-\pi, \pi], \quad 1 \leq s \leq m-1: \quad (6.9)$$

► f ֆունկցիայի (6.6) Ֆուրիեի շարքը s անգամ անդամ առ անդամ ածանցման արդյունքում կստացվի

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^s \left\{ a_k \cos \left(kx + s \frac{\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + s \frac{\pi}{2} \right) \right\} \quad (6.10)$$

շարքը, որի համար մաժորանուն է հանդիսանում $\sum \frac{\alpha_k + \beta_k}{k}$ շարքը, քանի որ (6.4)-ի համաձայն, π ները՝

$$\begin{aligned} & \left| k^s \left\{ a_k \cos \left(kx + s \frac{\pi}{2} \right) + b_k \sin \left(kx + s \frac{\pi}{2} \right) \right\} \right| \leq k^s (|a_k| + |b_k|) \leq \\ & \leq k^s \frac{\alpha_k + \beta_k}{k^m} \leq \frac{\alpha_k + \beta_k}{k} \quad (\text{քանի որ } m-s \geq 1): \end{aligned}$$

Ուստի, Վայերշտրասի մաժորանունը հայտանիշի համաձայն, (6.9) շարքը զուգամիտում է հավասարաչափ: Հետևաբար, ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցման թեորեմի համաձայն (X, §3, 4), տեղի ունի (6.9)-ը: ■

§7. ՖՈՒՐԻԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Նախնական դասողություններ: Դիցուք f -ը թվային առանցքի վրա անընդհատ ֆունկցիա է, որը x կետում բավարարում է. Դինիի պայմանին (§2, 1): Վերցնենք $\ell > |x|$ և գրենք f ֆունկցիայի վերլուծությունը Ֆուրիեի շարքի $(-\ell, \ell)$ միջակայքում (§3, 2):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{\ell} x + b_k \sin \frac{k\pi}{\ell} x, \quad (7.1)$$

որտեղ

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt, \quad k = 0, 1, \dots :$$

(7.1)-ի մեջ տեղադրելով a_k, b_k գործակիցների արժեքները և նշանակելով $\frac{k\pi}{\ell} = z_k$ ՝ կստանանք

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \\ &+ \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\cos \frac{k\pi x}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos \frac{k\pi}{\ell} t dt + \sin \frac{k\pi x}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \sin \frac{k\pi}{\ell} t dt \right) = \quad (7.2) \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_{-\ell}^{\ell} f(t) \cos z_k (x-t) dt \right] \Delta z_k : \end{aligned}$$

Այսուհետև ℓ -ը ճգնեցնենք անվերջության: Եթե (7.2)-ի առաջին գումարելին ճգնի զրոյի, իսկ երկրորդ գումարելին ճգնի

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(x-t) dt \right\} dz$$

ինտեգրալին, որը կոչվում է f ֆունկցիայի ինտեգրալ, ապա արդյունքում կստանանք՝

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(x-t) dt \right\} dz : \quad (7.3)$$

2. Դիմիի հայտանիշը:

Թեորեմ 7.1: Եթե w) f -ը բացարձակ ինտեգրելի է $(-\infty, \infty)$ միջակայքում՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty,$$

p) Գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \infty,$$

ապա x կետում տեղի ունի (7.3) հավասարությունը:

թ) պայմանը կոչվում է Դինիի պայման: Այն կարելի է փոխարինել Դինիի (2.3) ընդհանուր պայմանով, որի դեպքում (7.3) հավասարության ձախ կողմի $f(x)$ թիվը պետք է փոխարինել $S_0 = \frac{f(x-) + f(x+)}{2}$ թվով:

► Նշանակենք (x -ը ֆիքսված է):

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt :$$

Այս ինտեգրալը բավարարում է պարամետրից կախված անիսկական ինտեգրալի ինտեգրման վերաբերյալ (XII, թեորեմ 4.5) թեորեմի պայմաններին (կամայական $[c, d] = [0, A]$, $A > 1$ հատվածում): Ուստի, փոխելով ինտեգրման հերթականությունը, կստանանք՝

$$\begin{aligned} f_A(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^A \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt \right\} dz &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_0^A \cos z(t-x) dz \right\} dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin A(t-x)}{t-x} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+x) \frac{\sin Au}{u} du : \end{aligned}$$

Այստեղից կստանանք՝

$$f_A(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x-t) + f(x+t)] \frac{\sin At}{t} dt : \quad (7.4)$$

(7.3) հավասարությունն ապացուցելու համար (անիսկական ինտեգրալի սահմանման համաձայն) պետք է համոզվել, որ $f_A(x) \rightarrow f(x)$, եթե $A \rightarrow \infty$: Օգտվենք Դիրիխլեի ինտեգրալից (XII, §4, 3):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin At}{t} dt = \frac{1}{2} :$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $-2f(x)$ -ով և ստացվածը գումարելով (7.4)-ին՝ կստանանք

$$f_A(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)}{t} \sin At dt : \quad (7.5)$$

Այնուհետև վերցնենք որևէ $T > 1$ թիվ և (7.5) ինտեգրալը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} f_A(x) - f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)}{t} \sin At dt + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_T^\infty \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2f(x)}{t} \sin At dt - 2f(x) \frac{1}{\pi} \int_T^\infty \frac{\sin At}{t} dt =: \\ &=: I_1 + I_2 + I_3 : \end{aligned} \quad (7.6)$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և զնահատենք I_1, I_2 և I_3 ինտեգրալները:

ա) պայմանից հետևում է, որ ($T > 1$, x -ը ֆիքսված է) գոյություն ունի $T_0 > 1$ թիվ, այնպիսին, որ

$$T > T_0 \Rightarrow |I_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_T^\infty [|f(x-t)| + |f(x+t)|] dt < \frac{\varepsilon}{3} : \quad (7.7)$$

Քանի որ $A > 1$, ապա գոյություն ունի $T_1 > T_0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$T > T_1 \Rightarrow 2|f(x)| \frac{1}{\pi} \left| \int_T^\infty \frac{\sin At}{t} dt \right| < \frac{\varepsilon}{3} : \quad (7.8)$$

Այնուհետև ֆիքսելով T -ը՝ I_1 ինտեգրալի համար կիրառենք ՈՒմանի լինման. $I_1 \rightarrow 0$, եթե $A \rightarrow \infty$: Ուստի գոյություն ունի մի E թիվ, այնպիսին, որ

$$A > E \Rightarrow |I_1| < \frac{\varepsilon}{3} : \quad (7.9)$$

Համադրելով (7.6)-(7.9)-ը՝ կստանանք

$$A > E \Rightarrow |f_A(x) - f(x)| < \varepsilon : \blacksquare$$

3. Միայն ըստ կոսինուսների (սինուսների) վերլուծություններ:

Ֆուրիեի (7.3) ինտեգրալը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt \right\} dz = \int_0^\infty [a(z) \cos zx + b(z) \sin zx] dz,$$

որտեղ

$$a(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos zt dt, \quad b(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin zt dt :$$

$$1^0. \text{Եթե } f \text{ ֆունկցիան զույգ է, ապա } b(z) = 0, \quad a(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos zt dt :$$

Հետևաբար, այս դեպքում՝

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(z) \cos zx dz : \tag{7.10}$$

$$2^0. \text{Եթե } f \text{ -ը կենտ է, ապա } a(z) = 0, \quad b(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin zt dt \text{ և}$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(z) \sin zx dz : \tag{7.11}$$

Եթե f ֆունկցիան որոշված է միայն $(0, \infty)$ միջակայքում, ապա նրա համար կիրառելի են թե՛ (7.10)-ը, և թե՛ (7.11)-ը: Իրոք, ներմուծելով

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \infty) \\ f(-x), & x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (0, \infty) \\ -f(-x), & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

ֆունկցիաները՝ որոնցից g -ն զույգ է, իսկ h -ը՝ կենտ, հարցը կրերվի նախորդ դեպքերին:

Օրինակ (Լապլասի ինտեգրալները): Դիտարկենք $f(x) = e^{-ax}$ ֆունկցիան $x \in (0, \infty)$ միջակայքում, որտեղ $a > 0$:

Ինչպես գիտենք (X1, §1),

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \cos zt dt = \frac{a}{a^2 + z^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-at} \sin zt dt = \frac{z}{a^2 + z^2} :$$

Ուստի 1⁰ դեպքում կունենանք՝

$$a(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) \cos zt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-at} \cos zt dt = \frac{2}{\pi} \frac{a}{a^2 + z^2},$$

և (7.10)-ի համաձայն՝

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty a(z) \cos zx dz = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} dz,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\int_0^\infty \frac{\cos zx}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2a} e^{-ax}; \quad (7.12)$$

2^0 դեպքում կունենանք՝

$$b(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-at} \sin zt dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{z}{a^2 + z^2},$$

և (7.11)-ի համաձայն՝

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} dz,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\int_0^\infty \frac{z \sin zx}{a^2 + z^2} dz = \frac{\pi}{2} e^{-ax}; \quad (7.13)$$

(7.12) և (7.13) ինտեգրալները կոչում են Լապլասի անունով:

4. Ֆուրիեի ինտեգրալի կոմպլեքս գրելաձևը: Ֆուրիեի ձևափոխություն:
Քանի որ

$$I(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt$$

ֆունկցիան զույգ է, ապա Ֆուրիեի (7.3) ինտեգրալը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos z(t-x) dt \right\} dz; \quad (7.14)$$

Մյուս կողմից (ապացույցը հաջորդիվ)՝

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin z(x-t) dt \right\} dz; \quad (7.15)$$

(7.15)-ը բազմապատկելով i -ով, ստացվածը գումարելով (7.14)-ին և հաշվի առնելով Էյլերի բանաձևը կստանանք՝

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iz(x-t)} dt \right\} dz, \quad (7.16)$$

որը ճշշտ է Դիմի հայտանիշի պայմաններում:

Այս ինտեգրալը կոչվում է Ֆուրիեի ինտեգրալ՝ գրված կոմպլեքս տեսքով: Մինչ այժմ մենք ենթադրել ենք, որ f ֆունկցիան իրական է, սակայն դժվար չէ համոզվել, որ (7.16) բանաձևը ճշշտ է նաև կոմպլեքս ֆունկցիաների համար:

(7.16) բանաձևը կարելի է գրել նաև այլ տեսքով՝

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixz} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz} dt \right\} dz : \quad (7.17)$$

Այսուհետև նշանակենք՝

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itz} dt,$$

որը կոչվում է f ֆունկցիայի Ֆուրիեի ձևափոխություն: Այդ դեպքում (7.17)-ը կգրվի

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(z) e^{izx} dz$$

տեսքով:

► Այժմ ասլացուցենք (7.15)-ը: Նշանակենք՝

$$\begin{aligned} I_{pq} &:= \int_{-p}^q \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin z(x-t) dt \right\} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left\{ \int_{-p}^q \sin z(x-t) dz \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\cos z(t-x)}{t-x} \Big|_{z=-p}^q dt : \end{aligned} \quad (7.18)$$

(7.15)-ն ասլացուցելու համար մենք պետք է ցույց տանք, որ

$$I_{pq} \rightarrow 0, \text{ եթե } p, q \rightarrow +\infty : \quad (7.19)$$

Այդ նպատակով (7.18) ինտեգրալը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$I_{pq} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt : \quad (7.20)$$

Մյուս կողմից, քանի որ $\frac{\cos qt - \cos pt}{t}$ ֆունկցիան կենտ է և նրա ինտեգրալը զուգամետ է*, ապա

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt :$$

Այս հավասարությունը բազմապատկելով $-f(x)$ -ով և ստացվածը գումարելով (7.20)-ին՝ կստանանք

$$\begin{aligned} I_{pq} &= \int_{-\infty}^{\infty} [f(x+t) - f(x)] \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt = \\ &= \int_{|t| \leq T} [f(x+t) - f(x)] \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt + \\ &\quad + \int_{|t| \geq T} f(x+t) \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt - f(x) \int_{|t| \geq T} \frac{\cos qt - \cos pt}{t} dt : \end{aligned} \quad (7.21)$$

Քանի որ վերջին ինտեգրալը զրո է, ապա վերցնելով $T > 1$, (7.21)-ից կստանանք՝

$$\left| I_{pq} \right| \leq \left| \int_{|t| \leq T} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} (\cos qt - \cos pt) dt \right| + 2 \int_{|t| \geq T} |f(x+t)| dt : \quad (7.22)$$

Այժմ վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և T -ն ընտրենք այնպես, որ (7.22)-ի երկրորդ գումարելին փոքր լինի ε -ից (դա կարելի է անել համաձայն Դինիի հայտանիշի ա) պայմանի): Եսկ (7.22)-ի առաջին գումարելին, Դինիի պայմանի շնորհիվ, բավարարում է Ռիմանի լեմմայի պայմանին, ուստի այն ճգնում է զրոյի, եթե $p, q \rightarrow +\infty$: Հետևաբար, գոյություն ունի E թիվ, այնպիսին, որ $p, q > E \Rightarrow \left| I_{pq} \right| < 2\varepsilon$, ինչը համարժեք է (7.19)-ին: ■

* Օ կետի շրջակայրում ֆունկցիան սահմանավակ է, իսկ ∞ -ի շրջակայրում զուգամիտությունը հետևում է Դիրիխլի հայտանիշից:

XV ԳԼՈՒԽ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

§1. ՖՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՍԻՇԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐ

1. Հավասարաստիճան անընդհատություն: Դիցուք $K \subset R^k$ բազմությունը կոմպակտ է*: Ենչափես ընդունված է, $C(K)$ -ով նշանակենք K բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների դասը:

Սահմանում: $\mathcal{F} \subset C(K)$ ֆունկցիաների ընտանիքը կոչվում է հավասարաստիճան անընդհատ, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ բոլոր $f \in \mathcal{F}$ ֆունկցիաների համար տեղի ունի

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad (1.1)$$

պայմանը:

Թեորեմ 1.1: Յանկացած $\{f_1, \dots, f_m\} \subset C(K)$ վերջավոր ընտանիք հավասարաստիճան անընդհատ է:

► Կանոնի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր f_i , $1 \leq i \leq m$ ֆունկցիա հավասարաչափ անընդհատ է, այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_i > 0$ թվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta_i \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m :$$

Նշանակելով $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, կունենանք՝

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq m :$$

Այսինքն՝ բավարարվում է (1.1) պայմանը: ■

* Ընդհանուր դեսպրում K -ը կարող է լինել ցանկացած մետրիկական տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն:

Թեորեմ 1.2: Եթե՝ $\{f_n, n \in N\} \subset C(K)$ և

$$f_n(x) \rightarrow f(x), \quad x \in K, \quad (1.2)$$

ապա $\{f_n, n \in N\}$ ընտանիքը հավասարաստիճան անընդհատ է:

► Ինչպես զիտենք, անընդհատ ֆունկցիաների հաջորդականության հավասարաչափ սահմանը անընդհատ ֆունկցիա է՝ $f \in C(K)$: Կանոնի թեորեմի համաձայն, f -ը հավասարաչափ անընդհատ է, ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_1 > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta_1 \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}: \quad (1.3)$$

Այսուհետև, եռանկյան անհավասարության համաձայն ունեն՝

$$\begin{aligned} |f_n(x') - f_n(x'')| &\leq |f_n(x') - f(x')| + \\ &+ |f(x') - f(x'')| + |f(x'') - f_n(x'')|: \end{aligned} \quad (1.4)$$

(1.2)-ի համաձայն գոյություն ունի $n_0 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(x'') - f_n(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}: \quad (1.5)$$

Համարենով (1.3)-(1.5)-ը՝ կստանանք

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta_1 \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \quad \text{եթե } n > n_0: \quad (1.6)$$

Բացի այդ, թեորեմ 1.1-ի համաձայն, գոյություն ունի $\delta_0 > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta_0 \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_i(x') - f_i(x'')| < \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq n_0: \quad (1.6')$$

Համարենով (1.6)-(1.6')-ը՝ կստանանք

$$\left. \begin{aligned} |x' - x''| &< \delta \\ x', x'' &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots,$$

որտեղ $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$: ■

2. Հավասարաշախ սահմանափակություն:

Սահմանում: $\mathcal{F} \subset C(K)$ ընտանիքը կոչվում է հավասարաշախ սահմանափակ, եթե գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in K, \quad f \in \mathcal{F},$$

և այդ ընտանիքը կոչվում է կետորեն սահմանափակ, եթե յուրաքանչյուր $x \in K$ կետի համար գոյություն ունի M_x թիվ, այնպիսին, որ

$$|f(x)| \leq M_x, \quad f \in \mathcal{F} :$$

Թեորեմ 1.3: Եթե $\mathcal{F} \subset C(K)$ հավասարաստիճան անընդհատ ֆունկցիաների ընտանիքը կետորեն սահմանափակ է, ապա այն նաև հավասարաշախ սահմանափակ է:

► Նշանակենք՝

$$\varphi(x) = \sup_{f \in \mathcal{F}} |f(x)|, \quad x \in K :$$

Քանի որ \mathcal{F} ընտանիքը կետորեն սահմանափակ է, ապա $\varphi(x)$ -ը վերջավոր է (յուրաքանչյուր $x \in K$ կետում):

Ապացուցենք, որ $\varphi \in C(K)$: Այդ նպատակով վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Քանի որ \mathcal{F} ընտանիքը հավասարաստիճան անընդհատ է, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x - y| &< \delta \\ x, y &\in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad f \in \mathcal{F} :$$

$$\text{Հետևաբար՝ } |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad f \in \mathcal{F}, \text{ ուստի՝}$$

$$|f(x)| < |f(y)| + \varepsilon \leq \varphi(y) + \varepsilon, \quad f \in \mathcal{F} : \tag{1.7}$$

Քանի որ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը այդ բազմության վերին եզրերից փոքրագույնն է, ապա (1.7)-ից հետևում է, որ

$$\varphi(x) \leq \varphi(y) + \varepsilon,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\varphi(x) - \varphi(y) \leq \varepsilon : \quad (1.8)$$

x և y տառերի դերերը փոխելով՝ կստանանք

$$\varphi(y) - \varphi(x) \leq \varepsilon : \quad (1.8')$$

(1.8) և (1.8')-ից հետևում է, որ

$$\left| x - y \right| < \delta \quad \begin{cases} x, y \in K \end{cases} \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon : \quad (1.8'')$$

Այսպիսով ստացանք, որ $\varphi \in C(K)$: Վայերշտրասի առաջին թեորեմի համաձայն, φ -ն սահմանափակ է՝ գոյություն ունի M թիվ, այնպիսին, որ

$$\varphi(x) \leq M, \quad x \in K,$$

ինչից և հետևում է, որ \mathcal{F} ընտանիքը հավասարաշափ սահմանափակ է՝ $|f(x)| \leq M, \quad x \in K, \quad f \in \mathcal{F}$: ■

3. Արցելայի թեորեմը:

Թեորեմ 1.4: Եթե $\mathcal{F} = \{f_n, n \in N\} \subset C(K)$ հավասարաստիճան անընդհատ ընտանիքը կետորեն սահմանափակ է, ապա $\{f_n\}$ հաջորդականությունը պարունակում է K -ի վրա հավասարաշափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման:

Լեմմա 1.1: Գոյություն ունի $\{x_n\} \subset K$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ յուրաքանչյուր $\delta > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_0 = n_0(\delta)$ թիվ, այնպիսին, որ

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} B(x_i, \delta), \quad (1.9)$$

որտեղ $B(x_i, \delta)$ -ն x_i կենտրոնով և δ շառավղով բաց գունդն է: Այլ կերպ ասսե՛, ամեն մի $\delta > 0$ թվի համար K -ն ծածկվում է $\{B(x_i, \delta)\}$ գնդերի բազմության վերջավոր ենթարազմությամբ:

► Կամայական $r > 0$ թվի դեպքում $\{B(z, r), z \in K\}$ բաց գնդերի ընտանիքը ծածկվում է K կոմպակտ բազմությունը, հետևաբար, գոյություն

ունի վերջավոր ենթածածկույթ, այսինքն՝ գոյություն ունի $\{z_1, \dots, z_n\} \subset K$

կետերի բազմություն, այնպիսին, որ $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(z_i, r)$:

Վերցնենք $r = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$ և համապատասխան կետերի բազմությունները նշանակենք

$$\{z_{11}, \dots, z_{1n_1}\}, \{z_{21}, \dots, z_{2n_2}\}, \dots, \{z_{k1}, \dots, z_{kn_k}\}, \dots;$$

Ստացված կետերի հաջորդականությունը համարակալելով գրված հերթականությամբ՝ կստանանք պահանջվող $\{x_n\}$ հաջորդականությունը.

$$x_1 = z_{11}, \dots, x_{n_1} = z_{1n_1}; x_{n_1+1} = z_{21}, \dots, x_{n_1+n_2} = z_{2n_2}; \dots : \blacksquare$$

Անցնենք թեորեմի ապացույցին:

► Վերցնենք $\{x_n\}$ -ն ինչպես լեմմա 1.1-ում և ցույց տանք, որ գոյություն ունի $\{f_n\}$ հաջորդականության $\{g_k\}$ ենթահաջորդականություն, որը կետորեն գուգամիտում է $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր կետերում:

Քանի որ $\{f_n\}$ հաջորդականությունը կետորեն սահմանափակ է, ապա $\{f_n(x_1)\}$ թվային հաջորդականությունը սահմանափակ է, ուստի թույլանությունը կայերածածկ լեմմայի համաձայն, այն պարունակում է գուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$f_1^1(x_1), f_2^1(x_1), \dots, f_k^1(x_1), \dots;$$

Այնուհետև դիտարկենք $\{f_n^1(x_2)\}$ թվային հաջորդականությունը, որը նույնպես սահմանափակ է, ուստի այն պարունակում է գուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$f_1^2(x_2), f_2^2(x_2), \dots, f_k^2(x_2), \dots;$$

Այս գործընթացն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք հաշվելի թվով զուգամետ հաջորդականություններ.

$$\begin{aligned} & f_1^1(x_1), f_2^1(x_1), \dots, f_k^1(x_1), \dots \\ & f_1^2(x_2), f_2^2(x_2), \dots, f_k^2(x_2), \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & f_1^k(x_k), f_2^k(x_k), \dots, f_k^k(x_k), \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ընդ որում, ֆունկցիաների յուրաքանչյուր $\{f_n^k, n \in N\}$ հաջորդականություն հանդիսանում է նախորդ՝ $\{f_n^{k-1}\}$ հաջորդականության ենթահաջորդականություն: Ուստի, եթե նշանակենք՝ $g_k = f_k^k$, $k \in N$, ապա ֆունկցիաների $\{g_k\}$ հաջորդականությունը կզուգամիտի $\{x_n\}$ հաջորդականության բոլոր կետերում, քանի որ $g_n(x_n), g_{n+1}(x_n), \dots$ հաջորդականությունը $f_1^n(x_n), f_2^n(x_n), \dots, f_n^n(x_n), \dots$ զուգամետ հաջորդականության ենթահաջորդականություն է:

Այսուհետև ապացուցենք, որ $\{g_k\}$ հաջորդականությունը K բազմության վրա զուգամիտում է հավասարաշափ: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ $\{g_k\}$ հաջորդականությունը բավարարում է հավասարաշափ զուգամիտության Կոչիի պայմանին (X , թեորեմ 1.1): յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $n_1(\varepsilon) \in N$, այնպիսին, որ

$$n > n_1(\varepsilon) \Rightarrow |g_{n+m}(x) - g_n(x)| < \varepsilon, \quad x \in K, \quad m = 1, 2, \dots : \quad (1.10)$$

Քանի որ $\{f_n\}$ հաջորդականությունը, իետևաբար նաև՝ նրա $\{g_k\}$ ենթահաջորդականությունը, հավասարաստիճան անընդհատ է, ապա տրված $\varepsilon > 0$ թվի համար կարող ենք ընտրել $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} & |x - y| < \delta \\ & x, y \in K \end{aligned} \right\} \Rightarrow |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \in N : \quad (1.11)$$

Այժմ $n_0(\delta) \in N$ թիվն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի (1.9) պայմանը, որից հետո ամեն մի $x \in K$ կետի համար $i = i(x)$, $1 \leq i \leq n_0$ ինդեքսն ընտրենք այնպես, որ $x \in B(x_i, \delta)$: Օգտվենք

$$\begin{aligned} |g_{n+m}(x) - g_n(x)| &\leq |g_{n+m}(x) - g_{n+m}(x_i)| + \\ &+ |g_{n+m}(x_i) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_n(x)| \end{aligned} \quad (1.12)$$

անհավասարությունից, որտեղ (1.11)-ի համաձայն՝

$$|g_{n+m}(x) - g_{n+m}(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |g_n(x_i) - g_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}: \quad (1.13)$$

Քանի որ $\{g_n(x_i), n \in N\}$, $1 \leq i \leq n_0$ վերջավոր թվով հաջորդականությունները զուգամետ են, ապա թվային հաջորդականությունների զուգամիտության Կոչիի սկզբունքի համաձայն, գոյություն ունի $n_1 \in N$ թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_1 \Rightarrow |g_{n+m}(x_i) - g_n(x_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad m = 1, 2, \dots, 1 \leq i \leq n_0: \quad (1.14)$$

Համադրելով (1.12)-(1.14)-ը՝ կստանանք (1.10)-ը: ■

Վերջում ներկայացնենք հավասարաստիճան անընդհատ և հավասարաչափ սահմանափակ $\{f_n\}$ հաջորդականության օրինակ, որը չի պարունակում հավասարաչափ զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Վերցնենք՝ $K = R$ և

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \in R \setminus [-1, 1] \end{cases}, \quad f_n(x) = f_0(x + n), \quad n \in N:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այս հաջորդականությունը բավարարում է նշված պայմաններին:

Ընթերցողին առաջարկում է ապացուցել, որ Արցելայի թեորեմը ճիշտ է նաև կամայական սահմանափակ K բազմության դեպքում:

Ցուցում: Նախ ցույց տվեք, որ $\{f_n\}$ հաջորդականության ֆունկցիաները կարելի են շարունակել այնպես, որ նրանք լինեն անընդհատ \bar{K} -ի վրա, այնուհետև օգտվեք թեորեմ 1.3-ից:

§2. ՍԹՈՈՒՆ - ՎԱՅԵՐԸՏՐԱՍԻ ԹԵՌՈՐԵՄԸ

1. Սթուն - Վայերշտրասի թեորեմի ձևակերպումը: Դիցուք $K \subset R^k$ բազմությունը կոմպակտ է* և $C(K)$ -ն K բազմության վրա անընդհատ իրականարժեք ֆունկցիաների դաս է:

$C(K)$ -ն իրական գծային տարածություն է: Ավելին, $C(K)$ -ն հանրահաշիվ է, այսինքն՝ եթե $f, g \in C(K)$; $\alpha, \beta \in R$, ապա (VII, թեորեմ 3.5)

$$\text{ա) } \alpha f + \beta g \in C(K); \quad \text{բ) } fg \in C(K);$$

Սահմանենք $f \in C(K)$ ֆունկցիայի հավասարաչափ նորմը՝

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|:$$

Քանի որ $|f| \in C(K)$, ապա Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $|f|$ -ը K կոմպակտ բազմության վրա ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, ուստի

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|:$$

Ընթերցողին առաջարկում է ստուգել, որ հավասարաչափ նորմը բավարարում է հետևյալ արժիտմանը՝

$$1^0. \|f\| \geq 0, \text{ ընդ որում } \|f\| = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0, x \in K,$$

$$2^0. \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

$$3^0. \|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|, \alpha \in R:$$

Սահմանում: Կասենք, որ $f_n \in C(K)$ հաջորդականությունն ըստ նորմի զուգամիտում է $f \in C(K)$ ֆունկցիային և կզրենք՝ $f_n \rightarrow f$, եթե $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, եռու $n \rightarrow \infty$:

Ակնհայտ է, որ ըստ նորմի զուգամիտությունը համարժեք է հավասարաչափ զուգամիտությանը՝

$$f_n(x) \rightharpoonup f(x), x \in K:$$

* Ընդհանուր դեպքում K -ն կարող է լինել ցանկացած մետրիկական տարածության կոմպակտ ենթաբազմություն:

Սահմանում: Դիցուք՝ $E \subset C(K)$: Կասեմը, որ $f \in C(K)$ տարրը կարելի է մոտարկել E -ի տարրերով, եթե գոյություն ունի $f_n \in E$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in K$:

E -ի տարրերով մոտարկելի տարրերի բազմությունը կնշանակենք \bar{E} -ով և կանվանենք E -ի փակույթ:

Որպեսզի $f \in \bar{E}$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունենա $f_\varepsilon \in E$, այնպիսին, որ $\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$:

Ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանումներից:

Սահմանում: $E \subset C(K)$ բազմությունը կոչվում է փակ բազմություն, եթե $\bar{E} = E$:

Դժվար չէ համոզվել, որ \bar{E} -ը փակ բազմություն է՝

$$\overline{(\bar{E})} = \bar{E}: \quad (2.1)$$

Սահմանում: $A \subset C(K)$ բազմությունը կոչվում է $C(K)$ հանրահաշվի ենթահանրահաշիվ, եթե կամայական $f, g \in A$ տարրերի և $\alpha, \beta \in R$ թվերի համար՝ $\alpha f + \beta g, fg \in A$, այսինքն՝ A -ն նոյնպես հանրահաշիվ է (A -ն փակ է $C(K)$ -ում սահմանված գործողությունների նկատմամբ>):

Օրինակ: Վերցնենք՝ $K = [a, b] \subset R$ և որպես A վերցնենք հանրահաշվական բազմանդամների բազմություն՝

$$A = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_0, a_1, \dots, a_n \in R, n \in N \right\}:$$

Այդ դեպքում A -ն $C[a, b]$ -ի ենթահանրահաշիվ է:

Սահմանում: Կասեմը $A \subset C(K)$ հանրահաշիվը տարրերում է K -ի կետերը, եթե յուրաքանչյուր $x_1, x_2 \in K$ ($x_1 \neq x_2$) կետերի գույզի համար գոյություն ունի $f \in A$ տարր, այնպիսին, որ $f(x_1) \neq f(x_2)$:

Եթե բոլոր $f \in A$ տարրերի համար՝ $f(x_0) = 0$, ապա կասեմը, որ A հանրահաշիվը x_0 կետում անհետանում է:

Թեորեմ 2.1 (Սրության-Վայերշտրաս): Եթե 1) $A \subset C(K)$ -ն համրահաշիվ է, 2) A -ն սարքերում է K -ի կետերը, 3) A -ն K -ի n մի կետում չի անհետանում, ապա $\bar{A} = C(K)$:

2. Նախապատրաստական լեմմաներ:

Լեմմա 2.1: ‘*Högner*’

$$u_1(t) \equiv 0, \quad u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2} [t - u_n^2(t)], \quad n \in N, \quad t \in [0,1]: \quad (2.2)$$

Այդ դեպքում $u_n(t)$ բազմանդամների հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

$$a) \quad 0 \leq u_n(t) \leq \sqrt{t}, \quad t \in [0,1],$$

$$b) \quad u_n(t) \rightarrow \sqrt{t}, \quad t \in [0,1]:$$

► a)-ն ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: $n = 1$ դեպքում ունենք՝ $0 = u_1(t) \leq \sqrt{t}, \quad t \in [0,1]$: Այնուհետև ենթադրենք, թե $0 \leq u_n(t) \leq \sqrt{t}$ և ապացուցենք, որ ^{*} $0 \leq u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$: Ունենք՝

$$\begin{aligned} \sqrt{t} - u_{n+1}(t) &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2} [t - u_n^2(t)] = \\ &= \sqrt{t} - u_n(t) - \frac{1}{2} [\sqrt{t} - u_n(t)][\sqrt{t} + u_n(t)] = \\ &= [\sqrt{t} - u_n(t)] \left\{ 1 - \frac{1}{2} [\sqrt{t} + u_n(t)] \right\} \geq 0, \quad t \in [0,1], \end{aligned}$$

$$\text{քանի որ } \left. \begin{array}{l} t \in [0,1] \\ u_n(t) \leq \sqrt{t} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} [\sqrt{t} + u_n(t)] \leq 1:$$

^{*} Բավական է ապացուցել $u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ անհավասարությունը, մյուսը հետևում է (2.2)-ից:

p -ի ապացույցը: (2.2)-ից և ա) ից հետևում է, որ $u_n(t) \leq u_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$: Ուստի, յուրաքանչյուր $t \in [0,1]$ կետում $u_n(t)$ թվային հաջորդականությունն աճող է և սահմանափակ, հետևաբար այն ունի կետորեն զուգամետ է՝ $u_n(t) \rightarrow u(t)$, $t \in [0,1]$:

(2.2) հավասարությունում անցնելով սահմանի, եթե $n \rightarrow \infty$ ՝ կստանանք, որ $t - u^2(t) = 0$, այսինքն՝ $u(t) = \sqrt{t}$: Այժմ հավասարաշափ զուգամիտությունը հետևում է Դինիի թեորեմից (X , թեորեմ 3.2): ■

Հետևանք: Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն a_1, \dots, a_k իրական թվեր, այնպիսիք, որ

$$\left| a_1x^2 + \dots + a_kx^{2k} - |x| \right| < \varepsilon, \quad x \in [-1,1]: \quad (2.3)$$

► Լեմմա 2.1-ի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն $a_1, \dots, a_k \in R$ թվեր, այնպիսիք, որ

$$\left| a_1t + \dots + a_kt^k - \sqrt{t} \right| < \varepsilon, \quad t \in [0,1]:$$

Այսուղե տեղադրելով $t = x^2$, $x \in [-1,1]$ ՝ կստանանք (2.3)-ը: ■

Սահմանում: $\mathcal{F} \subset C(K)$ ընտանիքը կոչվում է փակ՝ ստրոկուրային գործողությունների նկատմամբ, եթե $f, g \in \mathcal{F}$ պայմանից հետևում է, որ $\max(f, g) \in \mathcal{F}$ և $\min(f, g) \in \mathcal{F}$, որտեղ

$$\max(f, g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{եթե } f(x) \geq g(x) \\ g(x), & \text{եթե } f(x) < g(x) \end{cases}, \quad \min(f, g)(x) = \begin{cases} f(x), & \text{եթե } f(x) < g(x) \\ g(x), & \text{եթե } f(x) \geq g(x) \end{cases}.$$

Լեմմա 2.2: Փակ հանրահաշիվը փակ է ստրոկուրային գործողությունների նկատմամբ:

► Քանի որ $\max(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}$, $\min(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}$,

ապա լիմման ապացույցն համար բավական է ցույց տալ, որ

$$\varphi \in A \Rightarrow |\varphi| \in A, \quad (2.4)$$

որտեղ A -ն փակ հանրահաշիվ է:

Եթե $\|\varphi\| \leq 1$, ապա (2.3)-ի մեջ տեղադրելով $x = \varphi(t)$, կստանանք

$$\left| a_1 \varphi^2(t) + \cdots + a_k \varphi^{2k}(t) - |\varphi(t)| \right| < \varepsilon, \quad t \in K : \quad (2.5)$$

Քանի որ A -ն հանրահաշիվ է, ապա $a_1 \varphi^2(t) + \cdots + a_k \varphi^{2k}(t) \in A$ և (2.5)-ը ճշանակում է, որ $|\varphi|$ -ն կարելի է հավասարաշափ մոտարկել A -ի տարրերով: Քանի որ A -ն փակ հանրահաշիվ է, ուստի $|\varphi| \in A$:

Իսկ եթե $\|\varphi\| > 1$, այդ դեպքում՝ $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{\|\varphi\|} \in A$ և $\|\psi\| = 1$, ուստի

$$|\psi| \in A, \text{ հետևաբար, } |\varphi| \in A : \blacksquare$$

3. Հիմնական լեմմա:

Լեմմա 2.3: Դիցուք $\mathcal{F} \subset C(K)$ ընտանիքը փակ է ստրոկուրային գործողությունների նկատմամբ և $f \in C(K)$ ֆունկցիան այնպիսին է, որ կամայական $p, q \in K$ կետերի $q \neq p$ և $\varepsilon > 0$ քանի համար գոյություն ունի

$$f_{pq} \in \mathcal{F} \text{ ֆունկցիա, այնպիսին, որ}$$

$$|f(x) - f_{pq}(x)| < \varepsilon, \quad x = p, q : \quad (2.6)$$

Այդ դեպքում $f \in \bar{\mathcal{F}}$:

► Նշանակենք՝

$$E_{pq} = \{x \in K : f_{pq}(x) - \varepsilon < f(x)\}, \quad F_{pq} = \{x \in K : f(x) < f_{pq}(x) + \varepsilon\} :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունեն U_{pq} և V_{pq} ($\subset R^k$) բաց բազմություններ (VII, թեորեմ 5.2), այնպիսիք, որ

$$E_{pq} = U_{pq} \cap K, \quad F_{pq} = V_{pq} \cap K :$$

Պարզ է, որ $p, q \in U_{pq} \cap V_{pq}$: Այժմ, եթե $p \in K$ կետը ֆիքսենք, իսկ q -ն փոփոխենք ամբողջ K -ի վրա, ապա $\{V_{pq}, q \in K\}$ բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի K կոմպակտ բազմությունը, ուստի գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $V_{pq_1}, \dots, V_{pq_s}$: Նշանակենք՝

$$f_p = \max(f_{pq_1}, \dots, f_{pq_s}); \quad U_p = \bigcap_{i=1}^s U_{pq_i};$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$f_p(x) - \varepsilon < f(x), \quad x \in U_p; \quad f(x) < f_p(x) + \varepsilon, \quad x \in K, \quad (2.7)$$

ընդ որում, $f_p \in \mathcal{F}$:

Այսուհետև, եթե p -ն փոփոխենք ամբողջ K -ի վրա, ապա $\{U_p, p \in K\}$ բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի K -ն, ուստի գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ U_{p_1}, \dots, U_{p_r} :

Նշանակենք՝ $f_\varepsilon = \min(f_{p_1}, \dots, f_{p_r}) \in \mathcal{F}$: Այդ դեպքում (2.7)-ի շնորհիվ կունենանք՝

$$f_\varepsilon(x) - \varepsilon < f(x) < f_\varepsilon(x) + \varepsilon, \quad x \in K, \quad f_\varepsilon \in \mathcal{F},$$

այսինքն՝ f ֆունկցիան K բազմության վրա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել \mathcal{F} -ի էլեմենտներով, ուստի $f \in \bar{\mathcal{F}}$: ■

4. Սրութի - Վայերշտրասի թեորեմի ապացույցը: Պետք է ապացուցենք, որ եթե A հանրահաշիվը բավարարում է թեորեմի պայմաններին, ապա $\overline{A} = C(K)$: (2.1)-ի շնորհիվ, բավական է ապացուցել, որ $\overline{(\overline{A})} = C(K)$: Եթե նշանակենք՝ $B := \overline{A}$, ապա պետք է ապացուցենք, որ $\overline{B} = C(K)$, որտեղ B -ն բավարարում է թեորեմի պայմաններին և B -ն փակ հանրահաշիվ է*:

► 2.2 և 2.3 լեմմաների շնորհիվ, բավական է ապացուցել, որ ցանկացած $f \in C(K)$ ֆունկցիայի համար բավարարվում է (2.6)-ը (\mathcal{F} -ի դերում

* Դժվար չէ ստուգել, որ հանրահաշվի փակույթը նույնական է հանրահաշիվ է:

հանդես է գալիս B -ն): Մենք կապացուցենք ավելին. $x_1, x_2 \in K$ կետերի յուրաքանչյուր գույզի և $\alpha = f(x_1)$, $\beta = f(x_2)$ իրական թվերի գույզի համար գոյություն ունի $g \in B$, այնպիսին, որ

$$g(x_1) = \alpha, \quad g(x_2) = \beta : \quad (2.8)$$

Նախ ցույց տանք, որ գոյություն ունի $u \in B$, այնպիսին, որ

$$0 \neq u(x_1) \neq u(x_2) : \quad (2.9)$$

Իրոք, թեորեմի 2) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $u \in B$, այնպիսին, որ $u(x_1) \neq u(x_2)$: Եթե $u(x_1) \neq 0$, ապա տեղի ունի (2.9)-ը, իսկ եթե $u(x_1) = 0$, ապա թեորեմի 3) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի $h \in B$, այնպիսին, որ $h(x_1) \neq 0$: Այդ դեպքում $\lambda \in R$, $\lambda \neq 0$, թիվը կընտրենք այնպես, որ $v = \lambda h + u$ ֆունկցիան բավարարի (2.9) պայմանին:

Այսուհետև նշանակենք՝

$$\varphi_1(x) = \frac{[u(x) - u(x_2)]u(x)}{[u(x_1) - u(x_2)]u(x_1)} :$$

Այդ դեպքում $\varphi_1 \in B$, $\varphi_1(x_1) = 1$, $\varphi_1(x_2) = 0$:

Նման ձևով կկառուցենք $\varphi_2 \in B$ ֆունկցիան, այնպես, որ $\varphi_2(x_1) = 0$, $\varphi_2(x_2) = 1$:

Եթե նշանակենք $g = \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2$, ապա կրավարարվի (2.8)-ը և թեորեմի պապույցը կավարտվի: ■

Օրինակներ:

1⁰. Դիցուք $K \subset R^m$ -ը կոմպակտ բազմություն է:

Որպես $C(K)$ -ի ենթահանրահաշիվ վերցնենք R^m -ում m փոփոխականի բոլոր բազմանդամների (VII, §3, 5) բազմությունը: Այդ դեպքում A -ն բաժանում է K -ի կետերը, քանի որ, եթե $x_1 = (x_1^1, \dots, x_m^1) \neq (x_1^2, \dots, x_m^2) = x_2$, ապա գոնե մեկ i -ի համար՝ $x_i^1 \neq x_i^2$, ուստի $P(x_1, \dots, x_m) = x_i$ բազմանդամը բավարարում է $P(x_1) \neq P(x_2)$ պայմանին: Բացի այդ, A -ն K -ի ոչ մի կետում չի անհետանում, քանի որ

A -ն իր մեջ պարունակում է նաև հաստատութեարը (զրո աստիճանի բազմանդամները):

Սթորև - Վայերշտրասի թեորեմի համաձայն, $\overline{A} = C(K)$: Այլ կերպ ասած, K -ի վրա յուրաքանչյուր ամընդհատ ֆունկցիա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով (համեմատեք Վայերշտրասի առաջին թեորեմի հետ՝ XIV, թեորեմ 4.2):

2⁰. Դիցուք $\varphi \in C[a, b]$ ֆունկցիան խիստ աճող է և $\varphi(x) > 0$, $x \in [a, b]$: A -ով նշանակենք φ -ով ծնված հանրահաշիվը՝

$$A = \left\{ a_1 \varphi + a_2 \varphi^2 + \cdots + a_n \varphi^n; n \in N, a_i \in R \right\}:$$

Այդ դեպքում $A \subset C[a, b]$ հանրահաշիվը բավարարում է Սթորև - Վայերշտրասի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, $\overline{A} = C[a, b]$:

5. Սթորև - Վայերշտրասի թեորեմն առանց երրորդ պայմանի:

Դիցուք $A \subset C(K)$ հանրահաշիվը բավարարում է Սթորև - Վայերշտրասի թեորեմի 2) պայմանին, բայց 3) պայմանին չի բավարարում: Այդ դեպքում գոյություն ունի միակ $x_0 \in K$ կետ, այնպիսին, որ

$$f \in A \Rightarrow f(x_0) = 0:$$

Նշանակենք՝ $C_0(K) = \{f \in C(K): f(x_0) = 0\}$ և ապացուենք հետևյալը.

Թեորեմ 2.2: $\overline{A} = C_0(K)$:

► Դիտարկենք

$$B = \{c + f: f \in A, c \in R\}$$

հանրահաշիվը, որն արդեն կրավարարի Սթորև - Վայերշտրասի թեորեմի բոլոր պայմաններին: Ուստի, յուրաքանչյուր $f \in C_0(K)$ ֆունկցիայի և $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն կունենա $P \in B$ ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in K,$$

որտեղ $P = Q + c$, $Q \in A$, $c \in R$: Հետևաբար,

$$|f(x) - Q(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad x \in K : \quad (2.10)$$

Այսուեղանքի հետևում է, որ

$$|c| < \frac{\varepsilon}{2} : \quad (2.11)$$

(2.10)-(2.11)-ից հետևում է, որ

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon, \quad x \in K, \quad Q \in A :$$

Այսինքն՝ $f \in C_0(K) \Rightarrow f \in \bar{A}$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

6. Սրության-Վայերշտրասի թեորեմը կոմպլեքս հանրահաշիվների համար:

Թերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ թեորեմ 2.1-ը կոմպլեքս հանրահաշիվների համար ճիշտ չէ:

Որպես K կոմպակտ* բազմություն վերցնենք

$$K = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

բազմությունը, իսկ որպես $A \subset C(K, \mathbb{C})$ հանրահաշիվ վերցնենք

$$P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad n \in N, \quad z \in K,$$

բազմանդամներից կազմված հանրահաշիվը: Այդ դեպքում $\bar{A} \neq C(K, \mathbb{C})$, այսինքն՝ K -ի վրա ոչ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաները կարելի են հավասարաչափ մոտարկել բազմանդամներով: Իրոք, $P_n \in A$ բազմանդամը բավարարում է

$$\int_0^{2\pi} P_n(e^{it}) e^{imt} dt = 0, \quad m \in N \quad (2.12)$$

* \mathbb{C} տարածության տոպոլոգիան համընկնում է R^2 տարածության տոպոլոգիայի հետ, որովհետև $z = x + iy = (x, y)$:

պայմանին, հետևաբար, եթե $P_n(z) \rightrightarrows f(z)$, $z \in K$, ապա (2.12)-ում անցնելով սահմանի, եթե $n \rightarrow \infty$, կստանանք՝

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{int} dt = 0, \quad m \in N : \quad (2.12')$$

Այսինքն՝ եթե $f \in \bar{A}$, ապա f -ը բավարարում է (2.12') պայմանին: Իսկ այդ պայմանին բավարարում են ոչ բոլոր անընդհատ ֆունկցիաները. որպես օրինակ կարող ենք վերցնել $f(z) = \bar{z}$ ֆունկցիան: Այս դեպքում՝

$$\int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-it} e^{it} dt = 2\pi \neq 0 :$$

Սահմանում: $A \subset C(K, \mathbb{C})$ հանրահաշիվը կոչվում է ինքնահամալուծ, եթե $f = u + iv \in A$ սայմանից հետևում է, որ $\bar{f} = u - iv \in A$:

Զևակերպենք Սրուն - Վայերշտրասի թեորեմը կոմպլեքս հանրահաշիվների համար:

Թեորեմ 2.3: Եթե 1) $A \subset C(K, \mathbb{C})$ ինքնահամալուծ հանրահաշիվ է, 2) A -ն տարրերում է K -ի կետերը, 3) A -ն K -ի ոչ մի կետում չի անհետանում, ապա $\bar{A} = C(K, \mathbb{C})$:

$$\blacktriangleright \quad \text{Եթե } f = u + iv \in A, \quad \text{ապա} \quad u = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \quad \text{և} \quad v = \frac{1}{2i}(f - \bar{f})$$

ֆունկցիաները նույնականացնեն A -ից են: Ուստի, եթե A_R -ով նշանակենք A հանրահաշիվին պատկանող իրական ֆունկցիաների դասը, ապա A_R -ը կհանդիսանա $C(K)$ հանրահաշիվի ենթահանրահաշիվ, որը բավարարում է Սրուն - Վայերշտրասի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, կսմայսկան $g = \varphi + i\psi \in C(K, \mathbb{C})$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունեն $\varphi_n \in A_R$ և $\psi_n \in A_R$ ֆունկցիաների հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$\varphi_n(x) \rightrightarrows \varphi(x), \quad x \in K; \quad \psi_n(x) \rightrightarrows \psi(x), \quad x \in K :$$

Այսպիսով, $\varphi_n + i\psi_n \in A$ և $\varphi_n(x) + i\psi_n(x) \rightrightarrows g(x)$, $x \in K$, այսինքն՝ $g \in \bar{A}$: Հետևաբար, $\bar{A} = C(K, \mathbb{C})$: ■

Վերադառնանք սկզբում թերված օրինակին: Եթե $|z|=1$ ($z \in K$), ապա
 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ և $\overline{(z^k)} = \frac{1}{\bar{z}^k}$, $k \in N$: Ուստի, եթե A -ով նշանակենք

$$R(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad n \in N, \quad z \in K \quad (2.13)$$

տեսքի ֆունկցիաների բազմությունը, ապա $A \subset C(K, \mathbb{C})$ բազմությունը կհանդիսանա իմբիսահանալուծ հանրահաշիվ:

Թեորեմ 2.3-ի համաձայն՝ $\bar{A} = C(K, \mathbb{C})$: Այսինքն՝ K -ի վրա յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա կարելի է հավասարաչափ մոտարկել (2.13) տեսքի ֆունկցիաներով:

$$\text{Հետևաբար, եթե } f \in C(K, \mathbb{C}), \text{ ապա գոյություն ունի } R_n(z) = \sum_{k=-n}^n a_k z^k$$

ֆունկցիաների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$R_n(z) \rightrightarrows f(z), \quad z \in K:$$

z -ը ներկայացնելով $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ տեսքով, կստանանք՝

$$\sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt} \rightrightarrows f(e^{it}), \quad t \in [0, 2\pi]: \quad (2.14)$$

Մյուս կողմից, եթե նշանակենք՝

$$F(t) = f(e^{it}), \quad f \in C(K, \mathbb{C}), \quad (2.15)$$

ապա՝

$$F \in C([0, 2\pi], \mathbb{C}), \quad F(0) = F(2\pi) \quad (2.16)$$

և կարելի է ասացուցել նաև հակադարձը. (2.16) պայմաններին բավարարող յուրաքանչյուր F ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել (2.15) տեսքով և (2.14)-ից ստանալ Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմը (XIV, թեորեմ 4.3):

XVI ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

§1. ԳԾԱՅԲՆ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ներածություն: Ենթադրվում է, որ ընթերցողը տիրապետում է վերջապահ չափանի գծային տարածություններում գծային ձևափոխությունների պարզագույն հատկություններին:

$A: R^n \rightarrow R^m$ ֆունկցիան կոչվում է *գծային ձևափոխություն (գծային օպերատոր, գծային արտապատկերում)*, եթե ցանկացած $x_1, x_2 \in R^n$ վեկտորների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար՝

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 :$$

$A: R^n \rightarrow R^m$ գծային ձևափոխությունների բազմությունը նշանակվում է $L(R^n, R^m)$ -ով, իսկ եթե $m = n$, այդ բազմությունը նշանակվում է ուղղակի $L(R^n)$ -ով:

$L(R^n, R^m)$ -ը գծային տարածություն է. ցանկացած $A_1, A_2 \in L(R^n, R^m)$ արտապատկերումների և $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ թվերի համար՝

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in L(R^n, R^m) :$$

Վեկտորների $\{e_1, \dots, e_n\} \subset R^n$ համակարգը, որում յուրաքանչյուր e_i վեկտորի բոլոր կոորդինատները 0 են, բացառությամբ i -րդի, որը 1 է, կոչվում է R^n -ում *ստանդարտ բազի:*

$A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխությանը համապատասխանեցվում է $m \times n$ կարգի $[A] = [a_{ij}]$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) մատրիցը, որի j -րդ սյունը կազմված է

$$Ae_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$$

Վերլուծության գործակիցներից:

Եթե $A \in L(R^n, R^m)$ և $B \in L(R^m, R^p)$, ապա $[BA] = [B][A]$:

$y = Ax$ հավասարությունը $[A]$ մատրիցի միջոցով գրվում է այսպես.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

$A \in L(R^n)$ արտապատկերման համար հետևյալ պնդումները համարժեք են՝

ա) $Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

բ) $x \neq y \Leftrightarrow Ax \neq Ay$,

գ) $AR^n = R^n$:

Եթե $A \in L(R^n)$ արտապատկերումը բավարարում է այդ երեք պայմաններից որևէ մեկին, հետևաբար նաև մյուս երկուսին, ապա այն հակադարձնի է: $A \in L(R^n)$ ճևափոխության հակադարձը նշանակվում է A^{-1} -ով, իսկ հակադարձնի գծային ճևափոխությունների բազմությունը՝ Ω -ով:

Որպեսզի $A \in \Omega$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ
 $\det[A] \neq 0$:

2. Գծային ճևափոխության նորմ: Այցուր՝ $A \in L(R^n, R^m)$:

Նշանակենք՝

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax|,$$

ինչը կանվանենք A գծային ճևափոխության օպերատորային նորմ կամ ուղղակի A գծային ճևափոխության նորմ:

Թվարկենք նորմի պարզագույն հատկությունները.

1^o. Եթե $A \in L(R^n, R^m)$, ապա $\|A\| < +\infty$:

► Իրոք, եթե $x = (x_1, \dots, x_n) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ վեկտորը բավարարում է $|x| \leq 1$ պայմանին, ապա $|x_i| \leq |x| \leq 1$: Հետևաբար՝

$$|Ax| = |x_1Ae_1 + \dots + x_nAe_n| \leq |Ae_1| + \dots + |Ae_n|,$$

այսինքն՝ $\|A\| \leq \|Ae_1\| + \dots + \|Ae_n\|$: ■

2^o. Եթե $A \in L(R^n, R^m)$, ապա $|Ax| \leq \|A\||x|$, $x \in R^n$:

► Իրոք, եթե $x = 0$, անհավասարության թե՛ ճախ, և թե՛ ազ կողմերում գրված արտահայտությունները դառնում են 0, իսկ եթե $x \neq 0$, այդ անհավասարությունը համարժեք է հետևյալին՝

$$\left| A \frac{x}{|x|} \right| \leq \|A\|: \quad (1.1)$$

Քանի որ $\left| \frac{x}{|x|} \right| = 1$, ապա (1.1) անհավասարությունը հետևում է $\|A\|$ -ի

սահմանումից: ■

Հետևանք: Եթե $A \in L(R^n, R^m)$, ապա

$$|Ax - Ay| = |A(x - y)| \leq \|A\| \cdot |x - y|, \quad x, y \in R^n,$$

ինչը նշանակում է, որ գծային ձևափոխությունը հավասարաչափ անընդհատ է ամբողջ R^n տարածության վրա:

3^o. Եթե $A \in L(R^n, R^m)$ և $\lambda > 0$ թիվն այնպիսին է, որ

$$|Ax| \leq \lambda|x|, \quad x \in R^n, \quad (1.2)$$

ապա $\|A\| \leq \lambda$:

► Իրոք, եթե $|x| \leq 1$, (1.2)-ից հետևում է, որ $|Ax| \leq \lambda$: Ստացվեց, որ λ -ն $\{|Ax| : |x| \leq 1\}$ բազմության վերին եզր է, իսկ $\|A\|$ -ն՝ ճշգրիտ վերին եզրն է, հետևաբար, $\|A\| \leq \lambda$: ■

4^o. $\|A\|$ -ն բավարարում է նորմի հատկություններին (արսիոմներին).

w) $\|A\| \geq 0$, բնդ որում, $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$,

p) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, $\lambda \in R$,

q) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $A, B \in L(R^n, R^m)$:

► Եթոք, w)-ն անմիջապես բխում է $\|A\|$ -ի սահմանումից, p)-ն հետևում է այն փաստից, որ դրական հաստատումը կարելի է սոր -ի նշանի տակից դուրս հանել:

q)-ն ցոյց տալու համար վերցնենք $|x| \leq 1$ պայմանին բավարարող որևէ $x \in R^n$ վեկտոր: Այդ դեպքում՝

$$|(A + B)x| = |Ax + Bx| \leq |Ax| + |Bx| \leq \|A\| + \|B\|,$$

ինչից էլ բխում է q)-ն: ■

5'. Եթե $A \in L(R^n, R^m)$, $B \in L(R^m, R^p)$, ապա $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$:

► Եթոք, եթե $|x| \leq 1$, ապա

$$|(AB)x| = |A(Bx)| \leq \|A\| \cdot |Bx| \leq \|A\| \cdot \|B\|: ■$$

3. Հակառարձելի գծային ձևափոխությունների թեորեմ: Քանի որ $L(R^n, R^m)$ -ը գծային նորմավորված տարածություն է, ապա այդ տարածությունում նորմի միջոցով կարելի է սահմանել երկու կետերի հեռավորության, կետի շրջակայքի և բաց բազմության գաղափարները (այնպես, ինչպես արվել R^n -ում): Այս դեպքում $|x|$ -ի դերը կատարում է $\|A\|$ -ն: Այնուհետև կարելի է դիտարկել $L(R^n, R^m)$ -ի վրա որոշված կամ այդ տարածությունից արժեքները ընդունող արտապատկերումները և սահմանել այդպիսի արտապատկերումների սահմանը և անընդհատությունն, այնպես, ինչպես R^n -ի դեպքում:

Թեորեմ 1.1: 1) Հակառարձելի գծային ձևափոխությունների $\Omega \subset L(R^n)$ բազմությունը բաց բազմություն է:

2) $f(A) := A^{-1} : \Omega \rightarrow \Omega$ արտապատկերումն անընդհատ է Ω -ի վրա:

► 1) Նշանակենք՝ $\|A^{-1}\| = 1/\alpha$ և ապացուենք, որ A կետի α շառավղով շրջակայթի բոլոր կետերը պատկանում են Ω -ին, այսինքն՝ եթե $\|B - A\| =: \beta < \alpha$, ապա B -ն հակադարձելի է:

Իրոք, ուսինք՝

$$|x| = |A^{-1}(Ax)| \leq \frac{1}{\alpha} |Ax| \Rightarrow \alpha|x| \leq |Ax|$$

և

$$|(A - B)x| \leq \beta|x| \Rightarrow -\beta|x| \leq -|Ax - Bx| :$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$(\alpha - \beta)|x| \leq |Ax| - |Ax - Bx| \leq |Bx| : \quad (1.3)$$

Վերջին քայլում օգտվեցինք R^n -ում նորմի հետևյալ հատկությունից՝

$$|y_1| - |y_2| \leq |y_1 - y_2| \Leftrightarrow |y_1| \leq |y_1 - y_2| + |y_2|,$$

որը բխում է եռանկյան անհավասարությունից:

(1.3)-ից արդեն հետևում է, որ B -ն հակադարձելի է, որովհետև B -ն 0 արժեքն ընդունում է միայն 0 կետում:

Թերեմի 2) պնդումն ապացուելու համար (1.3)-ում տեղադրենք՝ $x = B^{-1}y$: Կատանանք՝ $|B^{-1}y| \leq \frac{1}{\alpha - \beta}|y|$, $y \in R^n$, որտեղից էլ, զծային

ձևափոխության նորմի 3^0 հատկության համաձայն՝ $\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta}$: Քանի

որ

$$B^{-1} - A^{-1} = B^{-1}(A - B)A^{-1},$$

ապա նորմի 5^0 հատկության համաձայն՝

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \|A - B\| \|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot \beta \cdot \frac{1}{\alpha} \rightarrow 0, \text{ եթե } \beta \rightarrow 0:$$

Այլ կերպ ասած՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\|B - A\| < \delta \Rightarrow \|B^{-1} - A^{-1}\| < \varepsilon,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

1. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:

Դիցուք f ֆունկցիան որոշված է $x_0 \in R^n$ կետի շրջակայքում և արժեքներ է ընդունում R^m -ից:

Սահմանում: f ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի x_0 կետում, եթե գոյություն ունի $A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխություն, այնպիսին, որ

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0 : \quad (2.1)$$

Նշանակելով $x - x_0 = h$ ՝ (2.1) սահմանը կարելի է գրել նաև

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah|}{|h|} = 0 \quad (2.1')$$

տեսքով:

Այնուհետև նշանակելով

$$\alpha = \alpha(x) = \frac{1}{|x - x_0|} [f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)] \in R^m, \quad \alpha(x_0) = 0,$$

կստանանք ֆունկցիայի աճի բանաձևը.

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + |x - x_0| \alpha, \quad \text{որտեղ } \alpha \rightarrow 0, \text{ եթե } x \rightarrow x_0; \quad (2.2)$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + o(|h|), \quad \text{եթե } h \rightarrow 0 : \quad (2.2')$$

Ճիշտ է նաև հակառակ՝ ֆունկցիայի աճի (2.2) բանաձևից հետևում է (2.1)-ը:

A գծային ձևափոխությունը կոչվում է f ֆունկցիայի ածանցյալ կամ դիֆերենցիալ (x_0 կետում) և նշանակվում է $f'(x_0)$ կամ $Df(x_0)$:

$m=1$ դեպքում՝ եթե $A \in L(R^n, R)$, նշանակելով $Ae_j = a_j \in R$,

$$1 \leq j \leq n, \text{ կունենանք՝ } Ah = a_1 h^1 + \cdots + a_n h^n, \quad h = \begin{pmatrix} h^1 \\ \vdots \\ h^n \end{pmatrix} \in R^n, \text{ այսինքն՝}$$

$f : R^n \rightarrow R$ բվային ֆունկցիայի դիֆերենցելիության և դիֆերենցիալի նախկին սահմանումը և նոր սահմանումը համարժեք են, ընդ որում,
 $[f'(x_0)] = \left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \right)$:

2. Պարզագույն թեորեմներ:

1^o. Եթե f ֆունկցիան x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա $(2.2')$ պայմանին բավարարող A գծային ձևափոխությունը միակն է:

► Իրոք, եթե B -ն նույնայն բավարարում է $(2.2')$ պայմանին՝

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Bh + \beta|h|, \quad \beta \underset{h \rightarrow 0}{\rightarrow} 0,$$

ապա $(2.2')$ -ից համելով վերջինը, կստանանք՝

$$0 = (A - B)h + (\alpha - \beta)|h|: \quad (2.3)$$

Այժմ վերցնենք կամայական $y \in R^n$ և (2.3) -ի մեջ տեղադրենք $h = ty$, $t > 0$: Կստանանք՝

$$(A - B)ty = (\beta - \alpha)t|y|, \quad \beta - \alpha \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0:$$

Բաժանելով t -ի՝ կստանանք, որ կամայական $y \in R^n$ վեկտորի համար՝

$$(A - B)y = (\beta - \alpha)|y| \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0,$$

կամ, որ նոյնն է՝ $(A - B)y = 0$: Այսպիսով՝ $A = B$: ■

2^o. Եթե f -ը և g -ն դիֆերենցելի են x_0 կետում, ապա $(f + g)$ -ն և $af - p$ ($a \in R$) նոյնպես դիֆերենցելի են x_0 կետում և

$$D(f + g)(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) \quad \text{և} \quad Daf(x_0) = aDf(x_0):$$

Ապացույցն անմիջապես բխում է դիֆերենցելիության սահմանումից:

3⁰. Եթե $f \in L(R^n, R^m)$, ապա f -ը կամայական $x_0 \in R^n$ կետում դիֆերենցելի է և $Df(x_0) = f$:

Այս հատկությունը բխում է դիֆերենցելիության սահմանումից և դիֆերենցիալի միակությունից:

4⁰. Եթե f -ը x_0 կետում դիֆերենցելի է, ապա զոյությունը L և δ դրական բվեր, այնպիսիք, որ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0|. \quad (2.4)$$

► Օգտվելով ֆունկցիայի աճի (2.2) բանաձևից և գծային ձևափոխության նորմի 2⁰ հատկությունից՝ կստանանք

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \|A\| |x - x_0| + |\alpha| |x - x_0| = (\|A\| + |\alpha|) |x - x_0|,$$

ինչից էլ հետևում է 4⁰-ը: ■

Հետևանք: Դիֆերենցելի ֆունկցիան անընդհատ է:

5⁰. **Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը:** Եթե w) $f : R^n \rightarrow R^m$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում և $f'(x_0) = A$, p) $g : R^m \rightarrow R^p$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $y_0 = f(x_0)$ կետում և $g'(y_0) = B$, ապա $h(x) = g(f(x))$ բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է x_0 կետում և

$$h'(x_0) = BA = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)^*: \quad (2.5)$$

► g -ի աճի բանաձևից և 4⁰ պարզագույն հատկությունից հետևում է, որ

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= g(f(x)) - g(f(x_0)) = \\ &= B(f(x) - f(x_0)) + \beta |f(x) - f(x_0)|, \quad \beta \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0: \end{aligned}$$

Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0) &= \\ &= B[f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)] + \beta |f(x) - f(x_0)|: \end{aligned}$$

Օգտվելով գծային ձևափոխության նորմի 2⁰ հատկությունից և (2.4) անհավասարությունից՝ կստանանք

* (2.5) հավասարությունը գրում են նաև $Dh(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$ տեսքով:

$$\frac{|h(x) - h(x_0) - BA(x - x_0)|}{|x - x_0|} \leq \|B\| \frac{|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)|}{|x - x_0|} + L|\beta|, \quad \beta \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} 0,$$

ինչից և հետևում է (2.5)-ը: ■

3. Դիֆերենցիալու կոորդինատային ֆունկցիաների խզում:

$f : R^n \rightarrow R^m$ ֆունկցիան ներկայացնենք կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝

$$f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_m(x)e_m = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}, \quad f_i : R^n \rightarrow R, \quad 1 \leq i \leq m :$$

Նախ նկատենք, որ որպեսզի $A : R^n \rightarrow R^m$ արտապատկերումը լինի գծային, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա կոորդինատային ֆունկցիաները լինեն գծային: Իսկապես, դա հետևում է բազիսային վերլուծություններից՝ եթե $x, y \in R^n, \alpha, \beta \in R$, ապա

$$A(\alpha x + \beta y) = A_1(\alpha x + \beta y)e_1 + \cdots + A_m(\alpha x + \beta y)e_m ;$$

$$\alpha Ax + \beta Ay = (\alpha A_1 x + \beta A_1 y)e_1 + \cdots + (\alpha A_m x + \beta A_m y)e_m :$$

Բացի դրանից, եթե $A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխության մատրիցը $[a_{ij}]$ -ն է, ապա

$$\begin{pmatrix} A_1 e_j \\ \vdots \\ A_m e_j \end{pmatrix} = A e_j = a_{1j} e_1 + \cdots + a_{mj} e_m = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq n :$$

Հետևաբար, $A_i e_j = a_{ij}$, $1 \leq j \leq n$ ($1 \leq i \leq m$):

Այսինքն՝ $A_i \in L(R^n, R)$ կոորդինատային ձևափոխության մատրիցը $[a_{ij}]$ մատրիցի i -րդ տողն է:

Թեորեմ 2.1: Որպեսզի $x_0 \in R^n$ կետում f ֆունկցիան լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ կետում նրա կոորդինատային ֆունկցիաները լինեն դիֆերենցելի, ընդ որում

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f'_1(x_0) \\ \vdots \\ f'_m(x_0) \end{pmatrix}; \quad (2.6)$$

► Նշանակենք $A = f'(x_0)$ և $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$, այնուհետև օգտվենք հետևյալ

անհավասարություններից՝

$$\begin{aligned} \frac{|f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) - A_i h|}{|h|} &\leq \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah|}{|h|} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \frac{|f_i(x_0 + h) - f_i(x_0) - A_i h|}{|h|}. \end{aligned}$$

Անհրաժեշտությունը հետևում է առաջին անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ երկրորդից: ■

Քանի որ $[f'_i(x_0)] = \left(\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_n} \right)$, ապա (2.6) բանաձևի համաձայն՝

$$[f'(x_0)] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}:$$

Այս մատրիցը կոչվում է **Յակորիի մատրից**, իսկ $m = n$ դեպքում Յակորիի մատրիցի որոշիչը կոչվում է f' արտապատկերման **յակորիան**:

Հաճախ $A \in L(R^n, R^m)$ գծային ձևափոխությունը նույնացվում է ստանդարտ բազուսում իր մատրիցի հետ: Այդ պայմանակորվածության դեպքում Յակորիի մատրիցը նշանակվում է $f'(x_0)$, իսկ յակորիանը՝ $\det f'(x_0)$ կամ $\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ սիմվոլներով:

4. Անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերումներ: Եթեուք $D \subset R^n$ բազմությունը բաց է: $f: D \rightarrow R^m$ արտապատկերումը կոչվում է **անընդհատ դիֆերենցելի** D բազմության վրա, եթե f -ը դիֆերենցելի է D -ի բոլոր կետերում (D -ի վրա) և $f': D \rightarrow L(R^n, R^m)$ արտապատկերումն անընդհատ է D -ի վրա (D -ի բոլոր կետերում):

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $x_0 \in D$ կետի և յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f'(x) - f'(x_0)\| < \varepsilon :$$

Թեորեմ 2.2: Որպեսզի f -ը լինի անընդհատ դիֆերենցելի D բաց բազմության վրա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ բազմության վրա f -ի կոորդինատային ֆունկցիաներն ունենան անընդհատ մասնակի ածանցյալներ:

Նախ ապացուցենք հետևյալ լեմման.

Լեմմա 2.1: Եթե $A \in L(R^n, R^m)$ և $[A] = [a_{ij}]$, ապա

$$|a_{ij}| \leq \|A\| \leq \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2} : \quad (2.7)$$

► Քանի որ $a_{ij} = A_i e_j$, ապա

$$|a_{ij}| = |A_i e_j| \leq |A e_j| \leq \|A\| :$$

Սյուս կողմից, $y = Ax$ հավասարությունը գրենք A ձևափոխության մատրիցի միջոցով՝

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ; \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

$$\text{Ուստի } |Ax|^2 = \sum_{i=1}^m y_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \right), \text{ հետևաբար}$$

$$|Ax| \leq \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}^2 \right\}^{1/2} \cdot |x|, \quad x \in R^n:$$

Հաշվի առնելով գծային ձևափոխության նորմի 3^0 հատկությունը՝ կստանանք (2.7)-ը: ■

► Թեորեմն ապացուցելու համար (2.7) անհավասարությունը գրենք $A = f'(x) - f'(x_0)$ գծային ձևափոխության համար՝

$$\left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right| \leq \|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \left\{ \sum_{i,j} \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right]^2 \right\}^{1/2}:$$

Թեորեմի անհրաժեշտությունը հետևում է առաջին անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ երկրորդ անհավասարությունից*: ■

§3. ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԹԵՌՈՒԵՍԸ

1. Նախապատրաստական լեմմա:

Լեմմա 3.1: Դիցուք $D \subset R^n$ բազմությունն ուղղակի տիրույթ է և $f : D \rightarrow R^n$ դիֆերենցելի արտապատկերման կողորդինատային ֆունկցիաները բավարարում են

$$\left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq M, \quad x \in D, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (3.1)$$

Այսպահանջներին: Այդ դեպքում՝

$$|f(x) - f(y)| \leq Mn^2|x - y|, \quad x, y \in D: \quad (3.2)$$

► Ունենք՝

$$|f(x) - f(y)| \leq \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(y)|: \quad (3.3)$$

* Նախքան երկրորդ անհավասարության գրելը մենք պետք է համոզվենք, որ f -ը դիֆերենցելի է, ինչը բխում է նախորդ թեորեմից և բվային ֆունկցիաների աճի բանաձևից:

Մյուս կողմից, Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն,

$$f_i(y) - f_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x + \theta(y-x))(y_j - x_j), \quad 0 < \theta < 1:$$

Հետևաբար, (3.1)-ի համաձայն,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq nM|x - y|:$$

Այս գնահատականը տեղադրելով (3.3)-ի մեջ՝ կստանանք (3.2)-ը: ■

2. Հակառարձ ֆունկցիայի թեորեմ:

Թեորեմ 3.1: Եթե $f : R^n \rightarrow R^n$ արտապատկերումն անընդհատ դիմերենցելի է: $a \in R^n$ կետի շրջակայրում և

$$\det f'(a) \neq 0, \quad (3.4)$$

ապա գոյություն ունեն a -ն պարունակող U բաց բազմություն և $f(a)$ -ն պարունակող V բաց բազմություն, այնպիսիք, որ

1⁰. $f : U \rightarrow V$ արտապատկերումը փոխարժելի λ^* ,

2⁰. $f^{-1} : V \rightarrow U$ արտապատկերումն անընդհատ դիմերենցելի է,

3⁰. $(f^{-1})' (y) = (f'(x))^{-1}$, որտեղ $x \in U$, $y = f(x)$:

► Ասպարույցը տրնենք երեք քայլերի:

I քայլ: Ցույց տանք, որ գոյություն ունեն δ և L դրական թվեր, այնպիսիք, որ

$$x', x'' \in B(a, \delta) \Rightarrow |x' - x''| \leq L |f(x') - f(x'')|: \quad (3.5)$$

► Առաջի ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $f'(a)$ -ն նույնական ձևափոխությունն է: Հակառակ դեպքում (3.4)-ից հետևում է, որ $\lambda = f'(a)$ գծային ձևափոխությունը հակադարձելի է և $F(x) = \lambda^{-1}(f(x))$ ֆունկցիան բավարարում է նշված պայմանին՝

$$F'(a) = (\lambda^{-1})'(f(a)) \cdot f'(a) = \lambda^{-1} \cdot f'(a) = \lambda^{-1} \cdot \lambda = I:$$

* Այսինքն՝ հակառարձելի է:

Եթե (3.5)-ը ճիշտ է F -ի համար, ապա այն ճիշտ է նաև $f(x)$ ֆունկցիայի համար. այս դեպքում L -ի դերում համրես կզանալ $L\|\lambda^{-1}\|$ գործակիցը:

Ընտրենք $\delta > 0$ թիվն, այնպես, որ $B(a, \delta)$ գնդում բավարարվեն հետևյալ պայմանները՝

ա) $\det f'(x) \neq 0$, $x \in B(a, \delta)$ (այդպիսի δ -ի գոյությունը հետևում է $\det f'(x)$ ֆունկցիայի անընդհատությունից),

$$\text{բ) } \left| \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{1}{2n^2}, \quad x \in B(a, \delta), \quad \text{ինչը հետևում է } \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

ֆունկցիաների անընդհատությունից:

Այսուհետև լեմման կիրառենք $g(x) = f(x) - x$ ֆունկցիայի համար: Քանի որ, ըստ ենթադրության, $f'(a)x = x$, ապա

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}.$$

$$\zeta_{\text{աշխատավոր}} \text{ պ)-ն՝ կստանանք } |g(x') - g(x'')| \leq \frac{1}{2n^2} \cdot n^2 |x' - x''|$$

անհավասարությունը, այսինքն՝

$$|(f(x') - x') - (f(x'') - x'')| \leq \frac{1}{2} |x' - x''| :$$

Սյուս կողմից՝

$$\begin{aligned} |x'' - x'| - |f(x'') - f(x')| &\leq |(x'' - x') - (f(x'') - f(x'))| = \\ &= |(f(x') - x') - (f(x'') - x'')| : \end{aligned}$$

Այդ երկու անհավասարություններից կստանանք՝

$$|x' - x''| \leq 2 |f(x') - f(x'')|, \quad x', x'' \in B(a, \delta) : \blacksquare$$

II բայլ: Գոյություն ունի $r > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$B(f(a), r) \subset f(B(a, \delta)), \tag{3.6}$$

այլ կերպ ասած՝ $f(a)$ կենտրոնով և r շառավղով գնդի բոլոր կետերը f ֆունկցիայի արժեքներ են:

► Վերցնենք $0 < \eta < \delta$ պայմանին բավարարող որևէ η թիվ և նշանակենք՝

$$K = \{x \in R^n : |x - a| \leq \eta\} \text{ և } d = \inf_{|x-a|=\eta} |f(x) - f(a)|:$$

$$(3.5) \text{ անհավասարության շնորհիվ՝ } d \geq \frac{\eta}{L} > 0:$$

Նշանակենք $r = \frac{d}{2}$ և ապացուենք, որ բավարարվում է (3.6) պայմանը:

Վերցնենք որևէ $y \in B(f(a), r)$ և ցոյց տանք, որ այն f ֆունկցիայի արժեք է: Դիտարկենք $h(x) = |f(x) - y|$ բանաձևով որոշվող $h: K \rightarrow R$ ֆունկցիան: Քանի որ h -ը K կոմպակտ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիա է, ապա գոյություն ունի $x_0 \in K$ կետ, որում h -ն ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը: Այդ x_0 -ն K -ի եզրային կետ չէ, որովհետև, եթե $x \in \partial K$, այսինքն՝ $|x - a| = \eta$, ապա

$$|f(a) - y| < \frac{d}{2} < |f(x) - y|: \quad (3.7)$$

Վերջին անհավասարությունը ստացվում է եռանկյան անհավասարությունից՝

$$d \leq |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - y| + |y - f(a)| < |f(x) - y| + \frac{d}{2}:$$

$$\text{Այսպիսով, } h^2(x) = |f(x) - y|^2 = \sum_{i=1}^n (f_i(x) - y_i)^2 \text{ ֆունկցիան } x_0 \in K$$

ներքին կետում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը: Եքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանի համաձայն՝ $\frac{\partial h^2(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n$ կամ, որ նույնին է՝

$$2 \sum_{i=1}^n (f_i(x_0) - y_i) \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j=1, \dots, n:$$

Քանի որ $\det \left[\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \right] = \det f'(x_0) \neq 0$ (I քայլ, ա) պայման), ապա

$$f_i(x_0) - y_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{կամ, որ նույնն է՝ } f(x_0) = y: \blacksquare$$

III քայլ: Նշանակենք՝ $V = B(f(a), r)$, $U = f^{-1}(V) \cap B(a, \delta)$ և ավարտենք թեորեմի ապացույցը:

► Քանի որ $f : B(a, \delta) \rightarrow R^n$ արտապատկերումն անընդհատ է, ապա y -ի բարքանչյուր բաց բազմության նախապատկեր բաց է, հետևաբար, U -ն բաց է:

Այնուհետև, (3.5)-ի համաձայն, f արտապատկերումը $B(a, \delta)$ -ի վրա հակադարձելի է և $f^{-1} : V \rightarrow U$ արտապատկերումն անընդհատ է:

Այժմ վերցնենք կամայական $x_0 \in U$ կետ և ապացույցն թեորեմի 3⁰ պնդումն այդ կետում: Եթե $f'(x_0) = A$, ապա

$$f(x) - f(x_0) = A(x - x_0) + \alpha|x - x_0|, \quad \alpha \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0: \quad (3.8)$$

Քանի որ $\det[A] = \det f'(x_0) \neq 0$ (I քայլ, ա) պայման), ապա A գծային ձևափոխությունը հակադարձելի է:

(3.8)-ում նշանակենք՝ $f(x) = y$, $f(x_0) = y_0$ (այդ դեպքում՝ $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$) և հավասարության երկու մասերում կիրառենք A^{-1} -ը՝

$$f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - A^{-1}\alpha|x - x_0|:$$

Օգտվելով գծային ձևափոխության նորմի 2⁰ հատկությունից և (3.5) անհավասարությունից՝ կստանանք

$$\frac{|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) - A^{-1}(y - y_0)|}{|y - y_0|} \leq \|A^{-1}\| \cdot |\alpha| \cdot L$$

գնահատականը, որի աջ մասը ձգտում է զրոյի, եթե $y \rightarrow y_0$: Իսկապես. եթե $y \rightarrow y_0$, ապա $x \rightarrow x_0$, հետևաբար՝ $\alpha \rightarrow 0$: Ատացվեց, որ f^{-1} արտապատկերումը y_0 կետում դիֆերենցելի է և

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}:$$

Մեզ մնում է ապացուցել թերեմի 2^0 պնդումը, այն է՝ յուրաքանչյուր $y_0 \in V$ տարրի համար՝

$$\left(f^{-1}\right)'(y) \rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y_0), \text{ եթե } y \rightarrow y_0,$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$(f'(x))^{-1} \rightarrow (f'(x_0))^{-1}, \text{ եթե } x \rightarrow x_0,$$

ինչը հետևում է հակադարձելի գծային ձևափոխությունների թերեմից և $f(x)$ ֆունկցիայի անընդհատ դիֆերենցելիությունից:

Հակադարձ ֆունկցիայի թերեմն ապացուցված է: ■

Այժմ թերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ հակադարձ ֆունկցիայի թերեմը լուսաբարելի է: Նշանակենք՝

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y), (x, y) \in R^2:$$

Այս արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է R^2 -ում և

$$\det f'(x, y) = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0,$$

սակայն արտապատկերումն ամբողջ R^2 -ում հակադարձելի չէ:

3. Անրագահայտ ֆունկցիաներ: Հակադարձ ֆունկցիայի գոյության խնդիրը դիտարկենք մի նոր տեսանկյունից: Եթե $x = g(y): R^n \rightarrow R^n$ ֆունկցիան որոշված է $y = b \in R^n$ կետի շրջակայքում և $a = g(b) \in R^n$, ապա որոշ լրացուցիչ պայմանների դեպքում գոյություն ունեն a կետի A շրջակայք և b կետի B շրջակայք, այնպիսիք, որ յուրաքանչյուր $x \in A$ կետի համար գոյություն ունի միակ $y \in B$ կետ, այնպիսին, որ $x = g(y)$, եթե $x \in A$ կամ, որ նոյնն է՝ $x - g(y) = 0$, եթե $x \in A$: Այս դեպքում կասենք, որ $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^*$ կետի շրջակայքում

* $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$:

$$x - g(y) = 0 \quad (3.9)$$

հավասարումից y -ը որոշվում է որպես x -ից կախված միարժեք ֆունկցիա: Եթե (3.9)-ում վեկտորների փոխարեն տեղադրենք իրենց կոորդինատները՝ $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$, ապա կստանանք՝

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - g_1(y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n - g_n(y_1, \dots, y_m) = 0 \end{array} \right\} : \quad (3.9)$$

Այժմ (3.9)-ի փոխարեն դիտարկենք ընդհանուր համակարգ.

$$\left. \begin{array}{l} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{array} \right\}, \quad (3.10)$$

որտեղ $F_i : R^{n+m} \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$: Այս համակարգը կարելի է գրել նաև վեկտորական տեսքով՝

$$F(x, y) = 0, \quad (3.10)$$

որտեղ $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $F = (F_1, \dots, F_m)$, $F : R^{n+m} \rightarrow R^m$:

Խնդիր է դրվում ստանալ բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում (3.10) հավասարումից y -ը որոշվում է որպես x -ից կախված միարժեք ֆունկցիա (վերը նշված իմաստով):

Թեորեմ 3.2: ‘Իցուր’ $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in R^m$,

$F : R^{n+m} \rightarrow R^m$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է $(a, b) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) \in R^{n+m}$ կետի շրջակայրում, $F(a, b) = 0$ և

$$D := \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}_{(a, b)} \neq 0 \quad :$$

Այդ դեպքում գոյություն ունեն $a \in R^n$ կետի A շրջակայր և $b \in R^m$ կետի B շրջակայր, այնպիսիք, որ յուրաքանչյուր $x \in A$ կետի համար գոյություն ունի միակ $y \in B$, որը կնշանակենք $y = f(x)$, այնպիսին, որ

$F(x, f(x)) = 0$, եթր $x \in A^*$: Ընդունում, f արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է A -ում:

$$\blacktriangleright \text{Դիտարկենք } H(x, y) = (x, F(x, y)) =$$

$= (x_1, \dots, x_n, F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m), \dots, F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m))$ բանաձևով որոշվող $H : R^{n+m} \rightarrow R^{n+m}$ արտապատկերումը: H արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է $(a, b) \in R^{n+m}$ կետի շրջակայքում, քանզի նրա կոորդինատային ֆունկցիաներն ունեն անընդհատ մասնակի ածանցյալներ: Կիրառելով հանրահաշվի դասընթացից մեզ հայտնի Լապլասի թեորեմը՝ համոզվում ենք, որ $\det H'(a, b) = D : \Omega$ որ $D \neq 0$, կարող ենք կիրառել հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմը. գոյություն ունեն (a, b) կետը պարունակող U բաց բազմություն և $H(a, b) = (a, 0)$ կետը պարունակող V բաց բազմություն, այնպիսիք, որ $H : U \leftrightarrow V$ արտապատկերումը լինի փոխմիարժեք: Կարող ենք համարել, որ $U = A_1 \times B$, որտեղ $A_1 \subset R^n$ և $B \subset R^m$ բազմությունները համապատասխանաբար a և b կետերը պարունակող բաց բազմություններ են:

Դիտարկենք H ֆունկցիայի հակադարձը՝ $H^{-1}(x, z) = (x, K(x, z))$: Քանի որ H -ի հակադարձն անընդհատ դիֆերենցելի է, ուստի $K : V \rightarrow B$ արտապատկերումը նույնպես անընդհատ դիֆերենցելի է:

Այժմ դիտարկենք $\pi(x, y) = y$ բանաձևով որոշվող $\pi : R^{n+m} \rightarrow R^m$ գծային ձևափոխությունը: Քանի որ $\pi \circ H = F$, ուստի, եթե $(x, z) \in V$, ապա $F(x, K(x, z)) = F \circ H^{-1}(x, z) = (\pi \circ H) \circ H^{-1}(x, z) = \pi(x, z) = z$:

Այժմ $A \subset A_1$ բազմությունն ընտրենք այնպես, որ $a \in A$ և $A \times \{0\} \subset V$: Քանի որ $(a, 0) \in V$ և V -ում բաց է, ապա դա հնարավոր է: Նշանակենք՝

$$f(x) = K(x, 0), \text{ եթե } x \in A:$$

* Այս դեպքում ասում են, որ (3.10) հավասարումից (կամ (3.10)' համակարգից) (a, b) կետի շրջակայքում y -ը որոշվում է որպես x -ից կախված անքացահայտ ֆունկցիա:

Կատանանք՝

$$F(x, f(x)) = F(x, K(x, 0)) = 0, \quad x \in A$$

Ն, որպեսզի համոզվենք, որ կառուցված $f : A \rightarrow B$ ֆունկցիան որոնելին է, մնում է նկատել, որ այն միակն է և անընդհատ դիֆերենցելի է: Խսկապես, առաջինը հետևում է H ֆունկցիայի փոխմիարժեքությունից, իսկ երկրորդը՝ K ֆունկցիայի անընդհատ դիֆերենցելիությունից: ■

§4. ՀԱՐԱՔԵՐԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ

1. Հարաքերական էքստրեմումներ: Դիցուք $F : R^3 \rightarrow R$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, իսկ $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված է

$$F(x, y, z) = 0 \tag{4.1}$$

հավասարմանը բավարարող կետերի S բազմության շրջակայքում: Այլ կերպ ասած՝ $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիան որոշված է (4.1) հավասարմանը որոշվող S մակերևույթի ընդգրկող մի ինչ որ բաց բազմության վրա:
Խնդիր է դրվում հետազոտել f ֆունկցիայի էքստրեմումները S մակերևույթի վրա:

Սահմանում: $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ կետը կոչվում է f ֆունկցիայի հարաքերական մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $|M - M_0| < \delta$ պայմանին բավարարող կամայական $M \in S$ կետի համար տեղի ունի $f(M) \leq f(M_0)$ ($f(M) \geq f(M_0)$) անհավասարությունը:

Այս դեպքում, եթե $\frac{\partial F}{\partial z}(M_0) \neq 0$, անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության թերեւմի համաձայն, գոյություն ունեն $P_0 = (x_0, y_0)$ կետի A շրջակայք և z_0 կետի B շրջակայք, այնպիսիք, որ M_0 կետի $A \times B$ շրջակայքում (4.1)-ով համարժեք է

$$z = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in A \tag{4.2}$$

հավասարմանը: Այսինքն՝ այս դեպքում S մակերևույթի հավասարումը (M_0 կետի շրջակայրում) արվում է բացահայտ տեսքով: (4.2) հավասարումից տեղադրելով z -ի արժեքը $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի z արգումենտի փոխարեն՝ կստանանք $u = f(x, y, \varphi(x, y))$, $(x, y) \in A$:

Այսինքն՝ $u = f(x, y, z)$ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների հետազոտման խնդիրը $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ կետում հանգում է $u = f(x, y, \varphi(x, y))$ բարդ ֆունկցիայի բացարձակ (սովորական) էքստրեմումների հետազոտմանը $P_0 = (x_0, y_0) \in A$ կետում:

(4.1) հավասարումը կոչվում է կապի հավասարում:

Ընդհանուր դեպքում (4.1)-ի փոխարեն կարող են լինել մի քանի կապի հավասարումներ՝

$$S : \begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \\ \dots , \\ F_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = 0 \end{cases}, \quad (4.3)$$

որտեղ $F_i : R^{n+m} \rightarrow R$, $1 \leq i \leq m$: Խնդիր է դրվում հետազոտել $u = f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ ֆունկցիայի հարաբերական* էքստրեմումները (4.3) համակարգին բավարարող $M = (x_1, \dots, x_{n+m})$ կետերի Տ բազմության վրա:

Ենթադրենք F_i , $1 \leq i \leq m$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են $M_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+m}^0)$ կետի շրջակայրում և

$$\left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})} \right|_{M_0} \neq 0 :$$

Անբացահայտ ֆունկցիայի գոյության քերեմի համաձայն, գոյություն ունեն $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ կետի A շրջակայր և $Q_0 = (x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$ կետի B շրջակայր, այնպիսիք, որ M_0 կետի $A \times B$ շրջակայրում (4.3)-ը համարժեք է հետևյալին՝

* Նախորդ տերմինները պահպանվում են:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ x_{n+m} = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \quad P = (x_1, \dots, x_n) \in A, \quad (4.4)$$

ընդունում, φ_i , $1 \leq i \leq m$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիմումների են:

$u = f(x_1, \dots, x_{n+m})$ ֆունկցիայի x_{n+1}, \dots, x_{n+m} արգումենտների փոխարեն տեղադրենք $x_{n+i} = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq i \leq m$ արժեքները. Կստանանք՝

$$u = f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) =: g(x_1, \dots, x_n): \quad (4.5)$$

Այսպիսով՝ $u = f(x_1, \dots, x_{n+m})$ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների հետազոտման խնդիրը հանդում է (4.5) բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումների հետազոտմանը:

2. Անհրաժեշտ պայմաններ: Եթե $M_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+m}^0) \in S$ կետը հարաբերական էքստրեմումի կետ է և $u = f(x_1, \dots, x_{n+m})$ ֆունկցիան դիմումների է M_0 կետում, ապա (4.5) բարդ ֆունկցիան դիմումների է $P_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ կետում և P_0 -ն (4.5) բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումի կետ է՝

$$dg(P_0) = 0:$$

Օգտվելով դիմումների ձևի ինվարիանտությունից՝ կստանանք

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} \right|_{P_0} = 0 \quad (4.6)$$

հավասարությունը: Այնուհետև, (4.4)-ը տեղադրելով (4.3)-ի մեջ, կստանանք հետևյալ նույնությունները՝

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ F_m(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0 \end{cases}, \quad P = (x_1, \dots, x_n) \in A:$$

Դիմումներում այս նույնությունները և օգտվելով դիմումների ձևի ինվարիանտությունից՝ կստանանք՝

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n} dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} dx_{n+1} + \cdots + \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Ալայմանները: Այժմ (4.7)-ը դիտարկենք որպես գծային հավասարումների համակարգ $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ փոփոխականների նկատմամբ, որի որոշիչն է՝

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} \end{array} \right| :$$

Ըստ ենթադրության, այդ որոշիչը M_0 կետում զրո չէ, հետևաբար, (4.7) համակարգից $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ դիֆերենցիալներն M_0 կետում արտահայտվում են dx_1, \dots, dx_n դիֆերենցիալների միջոցով (գծորեն, ըստ Կրամերի բանաձևերի):

$dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ դիֆերենցիալների ստացված արժեքները տեղադրելով (4.6)-ի մեջ և կատարելով նման անդամների միացում՝ հանգում ենք

$$A_1 dx_1 + \cdots + A_n dx_n = 0$$

հավասարությանը, որտեղ dx_1, \dots, dx_n դիֆերենցիալներն արդեն անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալներն են: Հետևաբար, նրանց գործակիցները զրո են՝ $A_i = 0, 1 \leq i \leq n$:

Այսպիսով, $M_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+m}^0) \in S$ հարաբերական էքստրեմումի կետում պետք է բավարարվեն հետևյալ $n+m$ հատ պայմանները՝

$$\begin{cases} A_i = 0, i = 1, 2, \dots, n \\ F_j = 0, j = 1, 2, \dots, m \end{cases} : \quad (4.8)$$

3. Լագրանժի անորոշ գործակիցների մեքոդ: (4.7) համակարգի i -րդ հավասարումը բազմապատկենք λ_i -ով* ($1 \leq i \leq m$) և ստացված հավասարությունները գումարենք (4.6)-ին՝

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \right) dx_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \right) dx_n + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} \right) dx_{n+1} + \cdots + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} \right) dx_{n+m} = 0: \end{aligned} \quad (4.9)$$

Այսուհետև, λ_i թվերն ընտրենք այնպես, որ $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ կախյալ դիֆերենցիալների գործակիցները դառնան զրոն՝

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+1}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+1}} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_{n+m}} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_{n+m}} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_{n+m}} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ անհայտների նկատմամբ գծային հավասարումների (4.10) համակարգի որոշիչը զրո չէ, ուստի այն ունի միակ լուծում: Ստացված λ_i արժեքները տեղադրենք (4.9)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} \right) dx_1 + \cdots + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \right) dx_n = 0 \end{aligned}$$

հավասարությունը, որտեղ dx_1, \dots, dx_n դիֆերենցիալներն անկախ փոփոխականների դիֆերենցիալներն են: Հետևաբար, գծային կոմբինացիայի գործակիցները զրոնեն են՝

* λ_i թվերն առաջմ անորոշ գործակիցներ են:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

Արյունքում $M_0 = (x_1^0, \dots, x_{n+m}^0) \in S$ էքստրեմումի կետի կոռորդինատները և $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ անորոշ գործակիցները պետք է բավարարեն հետևյալ հավասարումներին՝

$$\begin{cases} F_i(x_1, \dots, x_{n+m}) = 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_j} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial F_m}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq n+m: \end{cases} \quad (4.11)$$

Այսպիսով, ստացանք $n+2m$ անհայտով նոյնքան հավասարումներ:

(4.11) համակարգին ամփոփ տեսք տալու համար նշանակենք՝ $\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_m F_m$, որը կոչվում է *Lagrangeամժի ֆունկցիա*: Այդ դեպքում (4.11)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{cases} F_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = 0, \quad 1 \leq j \leq n+m: \end{cases} \quad (4.11')$$

4. Բավարար պայմաններ: Դիցուք $M_0 \in S$ կետում բավարարվում են հարաբերական էքստրեմումի համար անհրաժեշտ (4.11) պայմանները: Ենթադրենք նաև, որ $u = f(x_1, \dots, x_{n+m})$ և F_i , $1 \leq i \leq m$ ֆունկցիաները M_0 կետում կրկնակի (երկու անգամ) դիմերենցելի են:

Լագրանժի Φ ֆունկցիայի կառուցվածքից երևում է, որ (4.3) կապի հավասարումների առկայության դեպքում $\int \Phi$ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումները համընկնում են Φ ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների հետ^{*} կամ, որ նույն է՝

* Քանի որ $\Phi(M) - \Phi(M_0) = f(M) - f(M_0)$, $M \in S$:

$$\Phi = f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) + \\ + \sum_{i=1}^m \lambda_i F_i(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$$

բարդ ֆունկցիայի բացարձակ էքստրեմումների հետ:

Հետևաբար, (4.3) կապի հավասարումների առկայության դեպքում f ֆունկցիայի հարաբերական էքստրեմումների ուսումնասիրման հարցը (M_0 կետում) հանգում է $d^2\Phi(M_0)$ քառակուսային ձևի ուսումնասիրմանը: Այն է. եթե այդ քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, ապա M_0 -ն մինիմումի կետ է, իսկ եթե բացասական որոշյալ է, ապա M_0 -ն մաքսիմումի կետ է:

Մյուս կողմից՝

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} \right)^2 \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+1}} d^2 x_{n+1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_{n+m}} d^2 x_{n+m}:^* \\ (4.11') \quad \text{անիրաժեշտ} \quad \text{պայմանների} \quad \text{համաձայն}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_j}(M_0) = 0,$$

$1 \leq j \leq n+m$, ուստի

$$d^2\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_{n+m}} dx_{n+m} \right)^2 \Phi = \sum_{i,j=1}^{n+m} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j: \quad (4.12)$$

Այսինքն՝ Φ ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալը պետք է հաշվել նոյն բանաձևով, ինչ որ այն դեպքում, եթե բոլոր x_1, \dots, x_{n+m} փոփոխականներն անկախ են: Միայն թե այս դեպքում (4.12)-ի մեջ $dx_{n+1}, \dots, dx_{n+m}$ դիֆերենցիալների փոփոխեն պետք է տեղադրել նրանց այն արժեքները, որոնք ստացվում են (4.7) համակարգը լուծելիս:

Օրինակներ: ա) Գտնել $u = x_1^2 + \dots + x_m^2$ ֆունկցիայի էքստրեմումները $x_1 + \dots + x_m - 1 = 0$ կապի առկայությամբ:

* $d^2x_{n+1}, \dots, d^2x_{n+m}$ երկրորդ կարգի դիֆերենցիալների գոյությունը հետևում է (4.7) համակարգի լուծման բանաձևերից:

Կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\Phi = x_1^2 + \cdots + x_m^2 - \lambda(x_1 + \cdots + x_m - 1) :$$

Եքստրեմումի անհրաժեշտ (4.11*) պայմանները կլինեն՝

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_m - 1 = 0 \\ 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 2x_i - \lambda, \quad 1 \leq i \leq m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{\lambda}{2} - 1 = 0 \\ x_1 = \cdots = x_m = \frac{\lambda}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{2}{m} \\ x_i = \frac{1}{m}, \quad 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Սիակ ստացիոնար կետն է՝ $M_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right)$, իսկ այդ կետում

$$d^2\Phi = 2 \left[dx_1^2 + \cdots + dx_m^2 \right],$$

որը դրական որոշյալ է, հետևաբար, M_0 -ն մինիմումի կետ է:

բ) Ապացուցենք միջինների անհավասարությունը՝

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}; \quad x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n : \quad (4.13)$$

Դիցուք՝ $c > 0$ ։ Դիտարկենք $S_c = \{x \in R^n : x_1 + \cdots + x_n = c, \quad x_i \geq 0\}$

կոմպակտ բազմության վրա որոշված $u = x_1 \cdots x_n$ անընդհատ ֆունկցիան։ Եթե u -ն $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S_c$ կետում ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, ապա $x_i^0 > 0, \quad 1 \leq i \leq n$ ^{*}։ Հետևաբար, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ M_0 կետի δ շրջակայրում բավարարվում են $x_i > 0$ պայմանները։ Ուստի M_0 -ն u ֆունկցիայի հարաբերական մաքսիմումի կետ է՝ $F(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n - c = 0$ կապի հավասարման առկայությամբ։

M_0 կետը գտնելու համար կազմենք Լագրանժի ֆունկցիան՝

$$\Phi = x_1 \cdots x_n - \lambda(x_1 + \cdots + x_n - c)$$

և գրենք եքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանները՝

* Քանի որ $x_i = 0$ պայմանին բավարարող կետերում u -ն ընդունում է 0 արժեքը։

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = c \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}{x_i} - \lambda = 0 \end{cases}$$

Այս համակարգն ունի մեկ լուծում՝ $x_1 = \cdots = x_n = \frac{c}{n}$, ինչը նշանակում է,

որ $M_0 = \left(\frac{c}{n}, \dots, \frac{c}{n} \right) \in S_c$ կետում n -ն ընդունում է իր մեջազոյն արժեքը:

Հետևաբար, $x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{c}{n} \right)^n$, եթե $(x_1, \dots, x_n) \in S_c$: Այսինքն $c = x_1 + \cdots + x_n$ ՝ կստանանք (4.13)-ը:

XVII ԳԼՈՒԽ

ԲԱԶԱՐԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԶՈՒԳԱՀԵռանիստի ՄԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Զուգահեռանիստի ՄԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ: $A \subset R^k$ բազմությունը կոչվում է կոորդինատային զուգահեռանիստ կամ զուգահեռանիստ, եթե այն հետևյալ տեսքի դեկարտյան արտադրյալ է՝

$$A = [a^1, b^1] \times [a^2, b^2] \times \cdots \times [a^k, b^k], \quad a^j < b^j, \quad 1 \leq j \leq k :$$

Զուգահեռանիստի զագաքներ կոչվում են այն (c^1, \dots, c^k) կետերը, որոնց համար $c^i = a^i$ կամ $c^i = b^i$, $1 \leq i \leq k$:

A զուգահեռանիստի $V(A)$ ծավալը սահմանվում է

$$V(A) = \prod_{j=1}^k (b^j - a^j)$$

բանաձևով:

A զուգահեռանիստն անվանում են նաև փակ զուգահեռանիստ: $\text{int } A := \overset{\circ}{A}$ բազմությունը կանվանենք *բաց զուգահեռանիստ*: Բաց զուգահեռանիստի ծավալը սահմանվում է նոյն բանաձևով:

$k = 2$ դեպքում կոորդինատային զուգահեռանիստը ուղանկյուն է, որի կողմերը գուգահեռ են կոորդինատական առանցքներին, իսկ նրա ծավալը այդ ուղղանկյան մակերեսն է:

$k = 3$ դեպքում կոորդինատային զուգահեռանիստը ուղղանկյուն զուգահեռանիստ է, որի նիստերը զուգահեռ են կոորդինատական հարթություններին:

Դիցուք $P_j = \{x_0^j, \dots, x_{n_j}^j\}$ -ն է՝ $[a^j, b^j]$ հատվածի տրոհում է՝ $a^j = x_0^j < x_1^j < \cdots < x_{n_j}^j = b^j$: P_1, \dots, P_k տրոհումներով ծնվում է զույգ առ զույգ ընդհանուր ներքին կետ չունեցող «մամը» զուգահեռանիստերի

ընտանիք, որոնցից յուրաքանչյուրը տրոհման հատվածների դեկարտյան արտադրյալ է՝

$$A_{i_1 \dots i_k} = [x_{i_1}^1, x_{i_1+1}^1] \times \cdots \times [x_{i_k}^k, x_{i_k+1}^k], \quad 0 \leq i_j \leq n_j - 1, \quad (j = 1, 2, \dots, k);$$

Տրված P_1, \dots, P_k տրոհումներից ծնված $\{A_{i_1 \dots i_k}\}$ զուգահեռանիստերի ընտանիքը, իսկ երբեմն նաև $P = (P_1, \dots, P_k)$ հավաքածուն, անվանում են A զուգահեռանիստի կանոնական տրոհում: $\lambda(P) = \max \text{diam } A_{i_1 \dots i_k}$ -ն կոչվում է P տրոհման տրամագիծ:

Նշենք ծավալի մի քանի հատկություններ:

1^o. Զուգահեռանիստի կանոնական տրոհման դեպքում ամբողջ զուգահեռանիստի ծավալը հավասար է տրոհման զուգահեռանիստերի ծավալների գումարին՝

$$V(A) = \sum_{i_1, \dots, i_k} V(A_{i_1 \dots i_k});$$

► Նշանակենք՝ $\Delta x_i^j = x_{i+1}^j - x_i^j$, $1 \leq j \leq k$, $0 \leq i \leq n_j - 1$: Այդ դեպքում $b^j - a^j = \Delta x_0^j + \cdots + \Delta x_{n_j-1}^j$, հետևաբար,

$$\begin{aligned} V(A) &= (\Delta x_0^1 + \cdots + \Delta x_{n_1-1}^1)(\Delta x_0^2 + \cdots + \Delta x_{n_2-1}^2) \cdots (\Delta x_0^k + \cdots + \Delta x_{n_k-1}^k) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \Delta x_{i_1}^1 \Delta x_{i_2}^2 \cdots \Delta x_{i_k}^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} V(A_{i_1 \dots i_k}); \end{aligned}$$

Երկրորդ հավասարությունն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: ■

Այսուհետ տրոհման զուգահեռանիստերը կհամարակալենք պարզ ձևով՝ A_1, A_2, \dots, A_r , որտեղ $r = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$: Հետագայում համարակալման հերթականությունը դեր չի խաղում:

2^o. Եթե C_1, \dots, C_s զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ

$$a) \quad A = \bigcup_{i=1}^s C_i, \quad b) \quad \overset{0}{C}_i \cap \overset{0}{C}_k = \emptyset, \quad i \neq k,$$

ապա $\{C_i\}_1^s$ ընտանիքը կոչվում է A -ի տրոհում*:

Այս ընդհանուր տրոհման դեպքում նոյնպես տեղի ունի

$$V(A) = \sum_{i=1}^s V(C_i)$$

հավասարությունը:

► Դիցուք՝ $C_i = [a_i^1, b_i^1] \times \cdots \times [a_i^k, b_i^k]$, $1 \leq i \leq s$: Կառուցենք A զուգահեռանիստի $\mathcal{F} = \{A_1, \dots, A_r\}$ կանոնական տրոհում հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր j -ի, $1 \leq j \leq k$, դեպքում որպես $[a^j, b^j]$ հատվածի P_j տրոհման կետեր վերցնենք A, C_1, \dots, C_s զուգահեռանիստերի j -րդ պրոյեկցիաների ծայրակետերը՝ a^j, b^j, a_i^j, b_i^j , $1 \leq i \leq s$ և համարակալենք աճման կարգով:

Այսուհետև նշանակենք՝ $\mathcal{F}_i = \{A_p \in \mathcal{F} : A_p \subset C_i\}$, $1 \leq i \leq s$: Այդ դեպքում կրավարարվեն հետևյալ պայմանները.

1) \mathcal{F}_i ընտանիքը հանդիսանում է C_i զուգահեռանիստի կանոնական տրոհում, $1 \leq i \leq s$:

$$2) \quad \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^s \mathcal{F}_i, \quad \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset, \quad i \neq j :$$

Հետևաբար

$$V(A) = \sum_{i=1}^r V(A_i) = \sum_{i=1}^s \sum_{A_p \in \mathcal{F}_i} V(A_p) = \sum_{i=1}^s V(C_i) : \blacksquare \quad (1.1)$$

Լրացում 1: Եթե \mathfrak{p} պայմանը չբավարարվի, ապա

$$V(A) < \sum_{i=1}^s V(C_i) :$$

► Իբրև, այս դեպքում (1.1) հավասարություններից երկրորդը կփոխարինվի $<$ անհավասարությամբ: ■

* Ոչ կանոնական տրոհում (մասնավոր դեպքում կարող է լինել կանոնական):

Լրացում 2: Եթե A զուգահեռանիստը ծածկված է U_1, \dots, U_s զուգահեռանիստերի լրացանիքով, ապա

$$V(A) \leq \sum_{i=1}^s V(U_i) :$$

► Նշանակենք՝ $C_i = A \cap U_i$: Այդ դեպքում C_i զուգահեռանիստերը կրավարարեն ա) պայմանին, հետևաբար

$$V(A) \leq \sum_{i=1}^s V(C_i) \leq \sum_{i=1}^s V(U_i) : \blacksquare$$

3⁰. Եթե C_1, \dots, C_p զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ

$$a) C_i \subset A, 1 \leq i \leq p, \quad b) \overset{0}{C_i} \cap \overset{0}{C_j} = \emptyset, i \neq j,$$

ապա

$$\sum_{i=1}^p V(C_i) \leq V(A) :$$

Ապացուցվում է 2⁰ հատկության պիսակ:

2. Ինտեգրալ սահմանումը և գոյության անհրաժեշտ պայմանը:

Դիցուք տրված է $f: A \rightarrow R$ թվային ֆունկցիան: Վերցնենք A զուգահեռանիստի A_1, \dots, A_r կանոնական տրոհում և դիտարկենք

$$\sigma = \sum_{i=1}^r f(\xi_i) V(A_i), \quad \xi_i \in A_i$$

գումարը: Այն կոչվում է f ֆունկցիայի (P տրոհմանը և ξ_1, \dots, ξ_r կետերին համապատասխանող) ինտեգրալային գումար (Ուհմանի):

Սահմանում*: Լ թիվը կոչվում է f ֆունկցիայի ինտեգրալ, կամ Ω -իմանի ինտեգրալ, եթե յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թիվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda(P) < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon \quad (1.2)$$

* Այդ I թիվը կոչվում է նաև σ ինտեգրալային գումարի սահման և գրվում է՝ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I$: Սահմանի պարզագույն հատկությունները պահպանվում են նաև այս դեպքում:

(անկախ P տրոհման և ξ_i կետերի ընտրությունից):

Այդ դեպքում f ֆունկցիան կոչվում է ինտեգրելի (Ω -իմանի իմաստով):
 f ֆունկցիայի ինտեգրալը գրվում է հետևյալ կերպ՝*

$$\mathcal{I} = \int_A f(x) dx \text{ կամ } \mathcal{I} = \overbrace{\cdots \int_A}^{k \text{ հան}} f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k :$$

Ինտեգրելի ֆունկցիաների դասը կմշանակենք $\mathfrak{R}(A)$ -ով:

$n = 2$ կամ $n = 3$ դեպքերում համապատասխանաբար գրում են՝

$$\mathcal{I} = \iint_A f(x, y) dx dy \text{ կամ } \mathcal{I} = \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz :$$

Այդ ինտեգրալներից առաջինը կոչվում է կրկնակի ինտեգրալ, իսկ երկրորդը՝ եռակի ինտեգրալ:

Թեորեմ 1.1: Ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանափակ է:

► Ապացուցում է ինչպես մեկ փոփոխականի դեպքում: Այն է. եթե f -ը A զուգահեռանիատի վրա անսահմանափակ է, ապա այն անսահմանափակ է տրոհման զուգահեռանիատերից գոնե մեկի վրա՝ բոլոր դաշտում A_1 -ը: Այդ դեպքում, հաստատագրելով ξ_2, \dots, ξ_r կետերը, ξ_1 -ը փոփոխելով, $|\sigma|$ -ն կարող ենք որքան կամենանք մեծ դարձնել, ինչը հակասում է (1.2)-ին: ■

3. Դարրուի գումարները: Դիցուք $f : A \rightarrow R$ ֆունկցիան սահմանափակ է: Նշանակենք՝

$$m_i = \inf_{A_i} f(x), M_i = \sup_{A_i} f(x), 1 \leq i \leq r;$$

$$s := \sum_{i=1}^r m_i V(A_i), S := \sum_{i=1}^r M_i V(A_i);$$

Այս գումարները համապատասխանաբար կոչվում են Դարրուի ստորին և վերին գումարներ (P տրոհման համար):

* Հաճախ dx -ը չի գրվում՝ $\int_A f :$

Քանի որ $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$, $1 \leq i \leq r$, ապա, այս անհավասարությունները բազմապատկելով $V(A_i)$ -ով և իրար գումարելով, կստանանք՝

$$s \leq \sigma \leq S :$$

Հաստատագրված տրոհման դեպքում s և S գումարները անփոփոխ են, իսկ σ գումարը կարող է փոփոխվել (ξ_i կետերի փոփոխման շնորհիվ): Ընդ որում, եթե $\xi_i \in A_i$ կետը փոփոխվում է, $f(\xi_i)$ -ն փոփոխվելով՝ կարող է կամայապես մոտենալ ինչպես m_i -ին, այնպես էլ՝ M_i -ին: Այդ պատճառով σ գումարը կարող է կամայական չափով մոտ լինել թե' s -ին, և թե' S -ին: Այսինքն՝ հաստատագրված տրոհման դեպքում s -ը և S -ը հանդիսանում են σ իմտեզրալային գումարների բազմության ճշգրիտ եզրերը:

I հատկություն: $S_{\text{րոհման}} x_i^s$, $0 \leq i \leq n_i$, $1 \leq s \leq k$ կետերին նոր կետեր ավելացնելիս (տրոհմը մանրատելիս): Դարձուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ փոքրանալ:

► Ապացուցենք վերին գումարի դեպքը:

Ենթադրենք տրոհման կետերին ավելացնում ենք մեկ կետ՝ $x' \in (x_i^{s_0}, x_{i+1}^{s_0})$: Եթե այդ դեպքում A_j զուգահեռանիստը տրոհմի A'_j և A''_j երկու զուգահեռանիստերի, ապա S գումարի մեջ մասնակցող $M_j V(A_j)$ գումարելին կփոխարինվի $M'_j V(A'_j) + M''_j V(A''_j)$ գումարով, որտեղ

$$M'_j = \sup_{A'_j} f(x), \quad M''_j = \sup_{A''_j} f(x):$$

Նկատենք, որ $M'_j \leq M_j$, $M''_j \leq M_j$: Այս անհավասարություններից առաջնը բազմապատկենք $V(A'_j)$ -ով, իսկ երկրորդը՝ $V(A''_j)$ -ով և գումարենք ստացված անհավասարությունները: Կատանանք՝

$$M'_j V(A'_j) + M''_j V(A''_j) \leq M_j (V(A'_j) + V(A''_j)) = M_j V(A_j),$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Լրացում: Քանի որ $M_j - M'_j$ և $M_j - M''_j$ տարբերությունները չեն գերազանցում $\int f$ ֆունկցիայի տատանումն ամբողջ A զուգահեռամիասի վրա, որը կնշանակենք Ω -ով, ապա $M_j V(A_j)$ գումարելու փոքրացման չափը չի գերազանցի $\Omega V(A_j)$ թիվը:

Փոքրացման ամբողջ չափը գնահատելու համար պետք է հաշվել բոլոր տրոհված A_j զուգահեռամիասների ծավալների գումարը, որը կլինի

$$(x_{i+1}^{s_0} - x_i^{s_0}) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq s_0}}^k (b^s - a^s):$$

Հետևաբար, տրոհման կետերին մեկ կետ ավելացնելիս, Դարրուի վերին գումարի փոքրացման չափը չի գերազանցի

$$\text{թիվը, որտեղ } d = \max_s (b^s - a^s):$$

II հատկություն: Դարրուի յուրաքանչյուր ստորին գումարը չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը:

Այս և հաջորդ պնդումներն ապացուցվում են այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում:

$$\text{Այնուհետև, նշանակելով } \mathcal{I}_* = \sup \{s\}, \mathcal{I}^* = \inf \{S\}, \text{կոնենանք՝}$$

$$s \leq \mathcal{I}_* \leq \mathcal{I}^* \leq S:$$

\mathcal{I}_* և \mathcal{I}^* թվերը կոչվում են Դարրուի ստորին և վերին ինտեգրալներ և համապատասխանաբար նշանակում են նաև

$$\int_A f(x) dx \text{ և } \bar{\int}_A f(x) dx$$

սիմվոլներով:

Թեորեմ 1.2: Ինտեգրալի գոյության հսմար անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0 :$$

Թեորեմ 1.3 (Դարբուի թեորեմը): Յուրաքանչյուր $f : A \rightarrow R$ սահմանափակ ֆունկցիայի համար՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = \mathcal{I}_*, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \mathcal{I}^* :$$

Հետևանք 1: Որպեսզի սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\mathcal{I}_* = \mathcal{I}^*$:

Հետևանք 2: Որպեսզի սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունենա A զուգահեռանիստի P տրհում, այնպիսին, որ

$$S - s < \varepsilon :$$

§2. ԼԵԲԵԳԻ ԹԵՌԵՄԸ

1. Ֆունկցիայի տատանում կետում: ‘Դիցու’ $E \subset R^n$, $f : E \rightarrow R$ ֆունկցիան սահմանափակ է, և $a \in E \cup E' = \bar{E}$: Յուրաքանչյուր $\delta > 0$ բվի համար նշանակենք՝

$$o(f, a, \delta) = \sup_{\substack{|x-a|<\delta \\ |y-a|<\delta}} |f(x) - f(y)| :$$

Քանի որ $0 < \delta_1 < \delta_2$ պայմանից հետևում է, որ $o(f, a, \delta_1) \leq o(f, a, \delta_2)$, որեմն $o(f, a, \delta)$ -ն, որպես δ -ի ֆունկցիա, աճող է և ներքևից սահմանափակ է (0 -ով): Հետևաբար, գոյություն ունի

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} o(f, a, \delta)$$

Վերջավոր սահմանը, որն էլ կոչվում է f ֆունկցիայի տատանում a կետում և նշանակվում է $o(f, a)$ սիմվոլով:

Թեորեմ 2.1: Որպեսզի f ֆունկցիան $a \in E$ կետում լինի անընդհատ*, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $o(f, a) = 0$:

* $a \in E' \setminus E$ դեպքում թեորեմը կձևակերպվի այսպես. որպեսզի գոյություն ունենա $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ վերջավոր սահմանը, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $o(f, a) = 0$:

► Անհրաժեշտություն: f ֆունկցիան անընդհատ է $a \in E$ կետում, նշանակում է՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$, որի արդյունքում՝

$$\left. \begin{aligned} |x - a| &< \delta \\ |y - a| &< \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon :$$

Հետևաբար՝ $o(f, a, \delta) < \varepsilon$, ուստի կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար՝ $0 \leq o(f, a) \leq \varepsilon$: Այստեղից հետևում է, որ $o(f, a) = 0$:

Բավարարություն: $o(f, a) = 0$ պայմանից հետևում է, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta_0 > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $o(f, a, \delta_0) < \varepsilon$: Հետևաբար՝

$$\left. \begin{aligned} |x - a| &< \delta_0 \\ |y - a| &< \delta_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon :$$

Վերցնելով $y = a$ ՝ կստանանք.

$$|x - a| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ինչը նշանակում է, որ f ֆունկցիան անընդհատ է a կետում: ■

$$\text{Նշանակենք՝ } B_\varepsilon = \{x \in \bar{E} : o(f, x) \geq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0:$$

Թեորեմ 2.2: B_ε -ը փակ բազմություն է՝ $B'_\varepsilon \subset B_\varepsilon$:

► Ապացուցենք, որ եթե $x \notin B_\varepsilon$ ($x \in \bar{E}$), ապա $x \notin B'_\varepsilon$: $x \notin B_\varepsilon$ պայմանը նշանակում է, որ $o(f, x) < \varepsilon$, հետևաբար, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $o(f, x, \delta) < \varepsilon$:

Ցոյց տանք, որ $B(x, \delta)$ գնդում B_ε -ի կետ չկա: Եթե $|x_1 - x| = \delta_1 < \delta$, ապա $B(x, \delta - \delta_1) \subset B(x, \delta)$, հետևաբար

$$o(f, x_1, \delta - \delta_1) \leq o(f, x, \delta) < \varepsilon:$$

Այսինքն՝ $o(f, x_1) < \varepsilon$: Ուրեմն՝ $x_1 \notin B_\varepsilon$: ■

Թեորեմ 2.3 (Կանոնի ընդհանրացված թեորեմը): Եթե $K \subset R^n$ բազմությունը կոմպակտ է և $f: K \rightarrow R$ սահմանափակ ֆունկցիան այնպիսին է, որ $|f(x)| < \varepsilon_0$, $x \in K$, որտեղ ε_0 -ն հաստատված դրական թիվ է, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon_0 :$$

Ապացուցվում է նոյն կերպ, ինչպես Կանոնի դասական թեորեմը:

Հետևանք: Եթե $|f(x)| < \varepsilon_0$, $x \in K$, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} E \subset K \\ diam E < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_E(f) \leq \varepsilon_0,$$

որտեղ $\omega_E(f)$ -ը f -ի տատանումն է E -ի վրա:

2. Զրո չափի և զրո ծավալի բազմություններ:

Սահմանում: $E \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է 0 չափի բազմություն, եթե $\exists \varepsilon > 0$ թիվի համար գոյություն ունի U_1, U_2, \dots զուգահեռանիստերի^{*} վերջավոր կամ հաշվելի ընտանիք, այնպիսին, որ

$$a) E \subset \bigcup_i U_i, \quad b) \sum_i V(U_i) < \varepsilon : \tag{2.1}$$

Եթե E -ն 0 չափի է, ապա կզրենք՝ $m(E) = 0$:

Թեորեմ 2.4: Վերջավոր կամ հաշվելի բազմությունը 0 չափի է:

► Ապացուցենք թեորեմն այն դեպքում, եթե E -ն հաշվելի է՝

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\} :$$

Կամայական $\varepsilon > 0$ թիվի համար վերցնենք x_i կետը պարունակող U_i

զուգահեռանիստ, այնպիսին, որ $V(U_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$, $i = 1, 2, \dots$: Այդ դեպքում կրավարարվեն (2.1) պայմանները: ■

Թեորեմ 2.5: Հաշվելի թվով 0 չափի բազմությունների միավորումը 0 չափի է՝

* Փակ կամ բաց:

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad m(E_i) = 0 \Rightarrow m(E) = 0:$$

► Քանի որ $m(E_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots$, ապա ամեն մի $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի U_{i_1}, U_{i_2}, \dots զուգահեռանիստերի հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\text{ա) } E_i \subset \bigcup_j U_{ij}, \text{ ք) } \sum_j V(U_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2^i}:$$

Այդ դեպքում $\{U_{ij}\}$ հաշվելի ընտանիքը ծածկում է E -ն և $\sum_{i,j} V(U_{ij}) < \varepsilon$: ■

Սահմանում: $E \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է 0 ծավալի, եթե μ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի U_1, \dots, U_m զուգահեռանիստերի վերջավոր ընտանիք, այնպիսին, որ

$$\text{ա) } E \subset \bigcup_{i=1}^m U_i, \text{ ք) } \sum_{i=1}^m V(U_i) < \varepsilon: \quad (2.2)$$

Եթե E բազմությունը 0 ծավալի է, ապա $\lambda(E) = 0$:

0 ծավալի բազմությունը նաև 0 չափի է: Հակադարձ պարունակությունը չէ: Օրինակ, վերցնենք՝ $n = 1$ և E -ով նշանակենք $[0,1]$ հատվածի ուղիղնակ կետերի բազմությունը: Այդ դեպքում E -ն հաշվելի է և, հետևաբար, 0 չափի է:

Այժմ, եթե $U_i = [\alpha_i, \beta_i]$, $i = 1, \dots, m$ հատվածները ծածկում են E -ն, ապա նրանք կծածկեն* ամբողջ $[0,1]$ -ը, քանի որ $\bar{E} = [0,1]$: Հետևաբար՝

$$\chi_{[0,1]}(x) \leq \sum_{i=1}^m \chi_{[\alpha_i, \beta_i]}(x): \text{Այս եղանակով կստանանք՝}$$

$$1 = \int_0^1 \chi_{[0,1]}(x) dx \leq \int_0^1 \sum_i \chi_{[\alpha_i, \beta_i]}(x) dx = \sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^m V(U_i),$$

* $\sum_{i=1}^m U_i$ -ն փակ բազմություն է և $E \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$, հետևաբար, $\bar{E} \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$:

ինչը հակասում է (2.2)-ին:

Թեորեմ 2.6: 0 չափի կոմպակտ բազմությունը նաև 0 ծավալի է:

► Այս թեորեմը բխում է Բորելի լեմմայից: Իբրև, եթե U_1, U_2, \dots բաց զուգահեռանիստերը բավարարում են (2.1) պայմաններին, ընդ որում, E -ն կոմպակտ է, ասաւ գոյություն ունի մերժակոր ենթածածկույթ՝

$$E \subset \bigcup_{i=1}^m U_{n_i} :$$

Բացի դրանից, $\sum_{i=1}^m V(U_{n_i}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} V(U_i) < \varepsilon$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

3. Լերեզի թեորեմը:

Սահմանում: Դիցուք՝ $X_0 \subset X \subset R^n$: Եթե $f: X \rightarrow R$ ֆունկցիան $X \setminus X_0$ բազմության վրա բավարարում է որոշակի պայմանի և $m(X_0) = 0$, ապա ասում են, որ f -ը նշված պայմանին բավարարում է X -ի վրա համարյա ամենուրեք:

Թեորեմ 2.7 (Լերեզ): Դիցուք A -ն R^n -ում ընկած փակ զուգահեռանիստ է: Որպեսզի $f: A \rightarrow R$ սահմանափակ ֆունկցիան լինի ինտեգրելի A -ի վրա, ամերաժեշտ է և բավարար, որ f -ը A -ի վրա լինի համարյա ամենուրեք անընդհատ:

► **Բավարարություն:** f -ի խզման կետերի բազմությունը նշանակենք B -ով: Այն զրո չափի է՝ $m(B) = 0$: Նշանակենք՝ $B_\varepsilon = \{x \in A : o(f, x) \geq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$: B_ε -ը ևս 0-չափի է՝ $m(B_\varepsilon) = 0$:

Մյուս կողմից, B_ε -ը փակ և սահմանափակ բազմություն է, այսինքն՝ կոմպակտ բազմություն է, ինտեգրար, այն 0-ծավալի է՝ $V(B_\varepsilon) = 0$: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար գոյություն ունեն U_1, \dots, U_m բաց զուգահեռանիստեր, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } B_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^m U_i, \quad \text{բ) } \sum_{i=1}^m V(U_i) < \varepsilon : \tag{2.3}$$

$$\text{Եշտնակենք՝ } K = A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m U_i \right) = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^m U_i \right)^c :$$

Քանի որ $\bigcup_{i=1}^m U_i$ բազմությունը բաց է, ապա նրա լրացումը փակ է:

Հետևաբար, K -ն փակ է և սահմանափակ, այսինքն՝ կոմպակտ է:

Բացի դրանից, $o(f, x) < \varepsilon$, $x \in K$: Կանորդի թեորեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} E \subset K \\ diam E < \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_E(f) < \varepsilon : \quad (2.4)$$

Այժմ կառուցենք A զուգահեռանիստի A_1, \dots, A_r տրոհումն այնպես, որ $diam A_i < \delta$, $i = 1, \dots, r$ և բավարարվի* հետևյալ պայմանը.

$$\text{կամ՝ } A_i \subset \overline{U}_j, \text{ որևէ } j\text{-ի դեպքում, կամ՝ } A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m U_j \right) = \emptyset \text{ (} A_i \subset K \text{:)}$$

Առաջին խմբի տրոհման զուգահեռանիստերի բազմությունը նշանակենք \mathcal{F}_1 -ով, իսկ երկրորդ խմբին՝ \mathcal{F}_2 -ով:

Այսպես կառուցված P տրոհման համար կունենանք՝

$$S - s = \sum_{i=1}^r (M_i - m_i)V(A_i) = \sum_{A_i \in \mathcal{F}_1} \omega_{A_i}(f)V(A_i) + \sum_{A_i \in \mathcal{F}_2} \omega_{A_i}(f)V(A_i) :$$

Այստեղ առաջին գումարը կգնահատենք (2.3)-ի օգնությամբ, իսկ երկրորդը՝ (2.4)-ի: (2.3)-ի համաձայն, առաջին գումարը չի գերազանցի $\Omega\varepsilon$ -ը, որտեղ Ω -ն f -ի տատանումն է ամբողջ A -ի վրա: Իսկ երկրորդ գումարը, (2.4)-ի համաձայն, չի գերազանցի $\varepsilon \cdot V(A)$ -ն: Հետևաբար, P տրոհման համար՝

$$S - s \leq \varepsilon[\Omega + V(A)]:$$

* Գրա համար բավական է, որ U_j զուգահեռանիստերի գագաթների կոորդինատները ընդգրկվեն տրոհման կետերի բազմության մեջ:

Դարբուի թեորեմի երկրորդ հետևանքի համաձայն (§1, թեորեմ 1.3),
 $f \in \mathfrak{R}(A)$: Բավարարության ապացույցն ավարտվեց:

Անհրաժեշտություն: Ցույց տանք, որ եթե $f \in \mathfrak{R}(A)$, ապա f -ի խզման
 կետերի B բազմությունը 0-չափի է:

Քանի որ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$, ապա բավական է ապացույցել, որ

$$m(B_{1/n}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots :$$

Վերցնենք՝ $n = n_0$ և կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ: Այդ դեպքում $f \in \mathfrak{R}(A)$
 պայմանից հետևում է, որ գոյություն ունի A_1, \dots, A_r տրոհում, այնպիսին, որ

$$S - s = \sum_{i=1}^r \omega_{A_i}(f) V(A_i) < \frac{\varepsilon}{n_0} :$$

Նշանակենք \mathcal{F} -ով այն A_i -երի բազմությունը, որոնք բավարարում են
 $\text{int } A_i \cap B_{1/n_0} \neq \emptyset$ պայմանին: Այդ դեպքում՝ $A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \omega_{A_i}(f) \geq \frac{1}{n_0} :$

Հետևաբար՝ $\frac{1}{n_0} \sum_{A_i \in \mathcal{F}} V(A_i) \leq \sum_{A_i \in \mathcal{F}} \omega_{A_i}(f) V(A_i) < \frac{\varepsilon}{n_0}$, այսինքն՝
 $\sum_{A_i \in \mathcal{F}} V(A_i) < \varepsilon :$ (2.5)

Քանի որ $\bigcup_{A_i \in \mathcal{F}} A_i$ բազմությունից դուրս ընկած B_{1/n_0} -ի կետերը A_i -երի
 եզրային կետեր են, իսկ A_i -երի բոլոր եզրային կետերի բազմությունը
 0-չափի է, ապա (2.5)-ից հետևում է, որ $m(B_{1/n_0}) = 0$: Թեորեմն ապացույցած է: ■

§3. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

1. Ինտեգրալ՝ հավասարությունով արտահայտվող հատկությունները:
Թեորեմ 3.1: Եթե $f, g \in \mathfrak{R}(A)$, ապա

$$a) f \pm g, af, f \cdot g, |f| \in \mathfrak{R}(A),$$

$$p) \int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g \text{ և } \int_A \alpha f = \alpha \int_A f :$$

Ապացուցվում է այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում (ա) պնդումը բխում է նաև Լեբեզի թեորեմից:

Թեորեմ 3.2: Եթե C_1, \dots, C_s զուգահեռանիստերն այնպիսին են, որ

$$A = \bigcup_{j=1}^s C_j \text{ և } \overset{0}{C_j} \cap \overset{0}{C_i} = \emptyset, \quad j \neq i^* \text{ և } f \in \mathfrak{R}(A), \text{ ապա}$$

$$w) \quad f \in \mathfrak{R}(C_j), \quad j = 1, \dots, s,$$

$$p) \int_A f = \sum_{j=1}^s \int_{C_j} f :$$

► ա) պնդումը բխում է Լեբեզի թեորեմից: բ) պնդումն ապացուցելու համար A զուգահեռանիստը տրոհենք այնպես, որ յուրաքանչյուր A_i , $1 \leq i \leq r$ տրոհման զուգահեռանիստ պատկանի C_1, \dots, C_s զուգահեռանիստերից որևէ մեկին: Այնուհետև այդ P տրոհմանը համապատասխանող ինտեգրալային զումարը տրոհենք հետևյալ կերպ՝

$$\sigma(f, P) = \sum_{A_i \subset C_1} f(\xi_i) V(A_i) + \dots + \sum_{A_i \subset C_s} f(\xi_i) V(A_i) : \quad (3.1)$$

$$\text{Եթե } \lambda(P) \rightarrow 0, \text{ ապա } \sigma \rightarrow \int_A f, \text{ իսկ (3.1) հավասարության աջ կողմի}$$

զումարները կձգտեն բ) հավասարության աջ կողմի ինտեգրալներին, և կստանանք բ) հավասարությունը: ■

Թեորեմ 3.3: Եթե $f, g \in \mathfrak{R}(A)$ և $f(x) = g(x) \quad A$ -ի վրա համարյա ամենուրեք, ապա

$$\int_A f = \int_A g : \quad (3.2)$$

► Քանի որ A_i , $1 \leq i \leq r$ տրոհման (փակ) զուգահեռանիստերը 0 ծավալի (հետևաբար, 0 չափի) չեն, ապա $\xi_i \in A_i$ կետերը կարող ենք ընտրել

* Այս դեպքում նոյնպես ասում են, որ $\{C_j\}$ զուգահեռանիստերը կազմում են A զուգահեռանիստի տրոհում:

այնպես, որ $f(\xi_i) = g(\xi_i)$, $1 \leq i \leq r$: Այդ դեպքում $\sigma(f, P) = \sigma(g, P)$: λ -ն ձգտեցնելով 0-ի, կստանանք (3.2)-ը: ■

2. Ինտեղրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները:

Թեորեմ 3.4: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A)$ և $f(x) \geq 0$, $x \in A$, ապա $\int_A f \geq 0$:

► Այս դեպքում $\sigma(f, P) \geq 0$: Անցնելով սահմանի՝ կստանանք պահանջվող անհավասարությունը: ■

Հետևանք: Եթե $f, g \in \mathfrak{R}(A)$ և $f(x) \leq g(x)$, $x \in A$, ապա

$$\int_A f \leq \int_A g :$$

► Քանի որ $g(x) - f(x) \geq 0$, ապա թեորեմ 3.4-ի համաձայն,

$$0 \leq \int_A (g - f) = \int_A g - \int_A f : ■$$

Թեորեմ 3.5: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A)$, $f(x) \geq 0$, $x \in A$ և $\int_A f = 0$, ապա

$f(x) = 0$ A -ի վրա համարյա ամենուրեք:

► Նշանակենք՝ $E_n = \left\{ x \in A : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$, $E = \{x \in A : f(x) > 0\}$: Այդ

դեպքում $E = \bigcup_n E_n$, ուստի բավական է ապացուցել, որ E_n -ը 0 չափի է:

Քանի որ ըստ Դարրուի թեորեմի՝ $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S = \int_A f = 0$, ապա յուրաքանչյուր

$\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի P տրոհում, այնպիսին, որ $S < \frac{\varepsilon}{n}$:

Նշանակենք F -ով այն i ինդեքսների բազմությունը, որոնց համար՝

$A_i \cap E_n \neq \emptyset$: Այդ դեպքում՝ $\frac{1}{n} \sum_{i \in F} V(A_i) \leq \sum_{i \in F} M_i V(A_i) \leq S < \frac{\varepsilon}{n}$,

հետևաբար $\sum_{i \in F} V(A_i) < \varepsilon$: ■

Թեորեմ 3.6: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A)$ և $m \leq f(x) \leq M$, $x \in A$, ապա

$$mV(A) \leq \int_A f \leq MV(A) :$$

► Հստ թեորեմ 3.4-ի հետևանքի՝

$$mV(A) = \int_A m \leq \int_A f(x) \leq \int_A M = MV(A) : \blacksquare$$

Թեորեմ 3.7: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A)$, ապա այս $|f| \in \mathfrak{R}(A)$, ու $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$:

► ա) պնդումը հետևում է Լեբեզի թեորեմից: թ)՝ի համար ուսեն՝

$$\left| \sum_{i=1}^r f(\xi_i) V(A_i) \right| \leq \sum_{i=1}^r |f(\xi_i)| V(A_i) :$$

Անցնելով սահմանի, եթե $\lambda \rightarrow 0$, կստանանք թ)՝ն: ■

Հետևանք: Եթե $|f(x)| \leq L$, $x \in A$, ապա $\left| \int_A f \right| \leq LV(A) :$

3. Միջին արժեքի թեորեմները:

Թեորեմ 3.8: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A)$, իսկ m -ը և M -ը f -ի ճշգրիտ եղբերն են A զուգահեռականիւթի վրա, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m, M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_A f = \mu \cdot V(A) :$$

► Թեորեմ 3.6-ի համաձայն՝ $mV(A) \leq \int_A f \leq MV(A) :$ Զանի որ

$V(A) > 0$, ապա $m \leq \frac{1}{V(A)} \int_A f \leq M$: Նշանակելով $\mu := \frac{1}{V(A)} \int_A f$,

կստանանք պահանջվող արդյունքը: ■

Լրացում: Եթե $f \in C(A)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in A$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_A f = f(\xi) V(A) :$$

► Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, m -ը և M -ը ֆունկցիայի արժեքներ են: Այնուհետև, Բոլցան - Կոշիի երկրորդ թեորեմի համաձայն, $\mu \in [m, M]$ թիվը ևս ֆունկցիայի արժեք է, այսինքն՝ գոյություն ունի $\xi \in A$, այնպիսին, որ $f(\xi) = \mu$: ■

Թեորեմ 3.9: Եթե $f, g \in \mathfrak{N}(A)$, m -ը և M -ը f -ի ճշգրիտ եզրերն են, իսկ g -ն իր նշանը չի փոխում, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m, M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_A f g = \mu \int_A g : \quad (3.3)$$

► Ապացուցենք $g(x) \geq 0$, $x \in A$ դեպքում:

$$m \leq f(x) \leq M$$

անհավասարությունը բազմապատկելով $g(x)$ -ով՝ կստանանք

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) :$$

Թեորեմ 3.4-ի հետևանքի համաձայն՝

$$m \int_A g(x) \leq \int_A f(x)g(x) \leq M \int_A g(x) : \quad (3.4)$$

Այստեղ դիտարկենք երկու դեպք՝ ա) $\int_A g = 0$, բ) $\int_A g > 0$:

ա) դեպքում (3.4)-ից հետևում է, որ $\int_A fg = 0$, հետևաբար, այս դեպքում

(3.3)-ը ճշշտ է ցանկացած $\mu \in [m, M]$ թվի համար:

բ) դեպքում (3.4)-ը բաժանելով $\int_A g$ -ի վրա՝ կստանանք

$$m \leq \frac{\int_A fg}{\int_A g} \leq M$$

անհավասարությունները: Ստացված կոտորակը նշանակելով μ -ով՝ կհանգենիք պահանջվող արդյունքին: ■

Լրացում: Եթե $f \in C(A)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in A$ կետ, այնպիսին,
որ

$$\int_A f g = f(\xi) \int_A g :$$

Ապացուցվում է նախորդ լրացման պես:

§4. ՖՈՒԹԻՆԻԻ ԹԵՇՈՐԵՍԸ

Նախ քերենք ձևակերպենք մասնավոր դեպքերում:

Դիցուք ունենք $A = [a, b]$ և $B = [c, d]$ թվային առանցքի հատվածները
ու $f \in C(A \times B)$: Այդ դեպքում՝

$$\iint_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \left\{ \int_B f(x, y) dy \right\} dx = \int_B \left\{ \int_A f(x, y) dx \right\} dy :$$

Եթե f -ը անընդհատ չէ, այլ ընդամենը՝ $f \in \mathfrak{R}(A \times B)$, ձևավոր
փակագծերի մեջ գրված ինտեգրալների գոյությունը հավաստի չէ: Այս
դեպքում այդ ինտեգրալները փոխարինվում են Դարբուի ստորին կամ
վերին ինտեգրալներով: Դրանք նշանակենք հետևյալ սիմվոլներով՝

$$\mathcal{I}_*(x) = \int_{\bar{B}} f(x, y) dy ; \quad \mathcal{I}^*(x) = \int_B f(x, y) dy :$$

Թեորեմ 4.1: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A \times B)$, ապա $\mathcal{I}_*, \mathcal{I}^* \in \mathfrak{R}(A)$ և

$$\iint_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A \mathcal{I}_*(x) dx = \int_A \mathcal{I}^*(x) dx ,$$

ըստ որում, A -ի և B -ի դերերը կարելի է փոխել:

Հիմա քերենք ձևակերպենք ընդհանուր դեպքում:

Դիցուք տրված են $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ զուգահեռանիստերը և

$$\mathcal{I}_*(x) = \int_{\bar{B}} f(x, y) dy , \quad \mathcal{I}^*(x) = \int_B f(x, y) dy :$$

Թեորեմ 4.2 (Ֆուրինի): Դիցուք՝

$f \in \mathfrak{R}(A \times B)$ և $\mathcal{I}_*(x) \leq F(x) \leq \mathcal{I}^*(x)$, $x \in A$: Այդ դեպքում $F \in \mathfrak{R}(A)$ և

$$\int\limits_{A \times B} f = \int\limits_A F :$$

► Վերցնենք A զուգահեռանիստի որևէ P_A տրոհում, որի համապատասխան տրոհման զուգահեռանիստերն են՝ A_1, \dots, A_ℓ և B զուգահեռանիստի P_B տրոհում, որի համապատասխան զուգահեռանիստերն են՝ B_1, \dots, B_k : Այդ դեպքում $A \times B \subset R^{n+m}$ զուգահեռանիստի $P = (P_A, P_B)$ տրոհման զուգահեռանիստերը կլինեն $A_i \times B_j$, $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq k$ զուգահեռանիստերը:

Նախ ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը

$$s(f, P) \leq \sum_{i=1}^{\ell} I_*(\xi_i) V(A_i) =: \sigma(I_*, P_A, \xi), \quad (4.1)$$

որտեղ $s(f, P)$ -ն f ֆունկցիայի Դարբուի ստորին գումարն է ըստ P տրոհման, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\ell)$, $\xi_i \in A_i$, $1 \leq i \leq \ell$:

Նշանակենք՝ $m_{ij} = \inf_{A_i \times B_j} f$:

Քանի որ $V(A_i \times B_j) = V(A_i)V(B_j)$, ապա

$$\begin{aligned} s(f, P) &= \sum_{i,j} m_{ij} V(A_i \times B_j) \leq \sum_{i=1}^{\ell} \left\{ \sum_{j=1}^k \inf_{y \in B_j} f(\xi_i, y) V(B_j) \right\} V(A_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \{s(f(\xi_i, y), P_B)\} V(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\ell} I_*(\xi_i) V(A_i): \end{aligned}$$

Քանի որ $s(I_*, P_A) = \inf_{\xi} \sigma(I_*, P_A, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_\ell)$, ապա (4.1)-ից

հետևում է $s(f, P) \leq s(I_*, P_A)$ անհավասարությունը (քանի որ (4.1)-ը ճիշտ է ξ_i կետերի կամայական ընտրության դեպքում):

Այսուհետև գրենք անհավասարությունների հետևյալ շղթան՝

$$s(f, P) \leq s(I_*, P_A) \leq s(F, P_A) \leq S(F, P_A) \leq S(I^*, P_A) \leq S(f, P),$$

որտեղ վերջին անհավասարությունն ապացուցվում է (4.1)-ի պես:

Այստեղից կստանանք՝

$$s(f, P) \leq s(F, P_A) \leq \int\limits_A F \leq \bar{\int\limits_A} F \leq S(F, P_A) \leq S(f, P) :$$

Մյուս կողմից, $\int\limits_{A \times B} f$ -ը միակ թիվն է, որը բավարարում է

$$s(f, P) \leq \int\limits_{A \times B} f \leq S(f, P)$$

անհավասարություններին (բոլոր տրոհումների դեպքում), ուստի $F \in \mathfrak{R}(A)$ և

$$\int\limits_{A \times B} f = \int\limits_A F : \blacksquare$$

Հետևանք 1: Եթե $f \in \mathfrak{R}(A \times B)$, ապա $\mathcal{I}_*(x) = \mathcal{I}^*(x)$ A -ի վրա համարյա ամենուրեք*:

► Ֆուրինիի թեորեմի մեջ որպես F վերցնելով մի դեպքում \mathcal{I}_* -ը, մյուս դեպքում՝ \mathcal{I}^* -ը, կստանանք $\int\limits_A \mathcal{I}_*(x) dx = \int\limits_A \mathcal{I}^*(x) dx$ հավասարությունը:

Հետևաբար,

$$\int\limits_A (\mathcal{I}^* - \mathcal{I}_*) = 0 :$$

Թեորեմ 3.5-ի համաձայն, $\mathcal{I}^*(x) - \mathcal{I}_*(x) = 0$, A -ի վրա համարյա ամենուրեք: ■

Ֆուրինիի թեորեմի եզրակացությունը կարելի է գրել նաև այլ տեսքով՝

$$\iint\limits_{A \times B} f = \int\limits_A \left\{ \int\limits_B f(x, y) dy \right\} dx :$$

Հետևանք 2: Եթե A -ը R^n -ում ընկած զուգահեռանիստ է և $f \in \mathfrak{R}(A)$, ապա

* Աս մշանակում է, որ $\int\limits_B f(x, y) dy$ իմաստգրալը գոյուրյուն ունի A -ի վրա համարյա ամենուրեք:

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n \text{ հան}}_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n ,$$

Եթե միայն բոլոր իմտեզրակաները գոյություն ունեն:

Սա ապացուցվում է մաքենատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

§5. ՉԱՓԵԼԻ ԲԱԶՈՒԹՅԱՄՔ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Ժորդանի իմաստով չափելի բազմություններ:

Սահմանում: $C \subset R^n$ սահմանափակ բազմությունը կոչվում է ժորդանի իմաստով չափելի բազմություն, կամ կարծ՝ J -չափելի, եթե նրա եզրը՝ ∂C -ն, օ ծավալի է: Ժորդանի իմաստով չափելի բազմությունների դասը կնշանակենք J -ով *:

Դիտարկենք C բազմության բնութագրիչ ֆունկցիան՝

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1, & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases} : R^n \rightarrow \{0,1\} :$$

Թեորեմ 5.1: χ_C ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը ∂C -ն է:

► Եթե $x_0 \in \overset{0}{C}$, ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(x_0, \delta) \subset C$: Հետևաբար χ_C ֆունկցիան x_0 կետի շրջակայքում հաստատում է, ուստի այն x_0 կետում անընդհատ է:

Եթե $x_0 \in \partial C$, ապա կամայական $\delta > 0$ թիվ համար $B(x_0, \delta)$ գնդում կան կետեր թե՛ C -ից, և թե՛ C -ի լրացումից: Այսինքն՝ գոյություն ունեն $x_1, x_2 \in B(x_0, \delta)$ կետեր, այնպիսիք, որ $\chi_C(x_1) = 1, \chi_C(x_2) = 0$: Հետևաբար, χ_C ֆունկցիան x_0 կետում խզվում է:

Եթե x_0 -ն C բազմության արտաքին կետ է (C -ի լրացման ներքին կետ է), ապա գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(x_0, \delta) \subset R^n \setminus C$:

* Ապացուցեք, որ J -ն օղակ է՝ $C_1, C_2 \in J \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in J, C_1 \setminus C_2 \in J$:

Հետևաբար, $\chi_C(x) = 0$, $x \in B(x_0, \delta)$, ուրեմն x_0 կետում χ_C ֆունկցիան անընդհատ է: ■

Այժմ սահմանենք J -չափելի բազմության ծավալը: Եթե $C \in J$ և $A \subset R^n$ զուգահեռանիստը իր մեջ ընդգրկում է C -ն՝ $C \subset A$, ապա χ_C ֆունկցիայի նեղացումը A բազմության վրա՝ $\chi_C : A \rightarrow R$ ֆունկցիան, Լերեզի թեորեմի համաձայն A զուգահեռանիստի վրա ինտեգրելի է՝ $\chi_C \in R(A)$: Իսկապես, այդ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը ընկած է՝ ∂C բազմության մեջ, որը 0 չափի է: Այսպիսով, $\int_A \chi_C(x) dx$ ինտեգրալը գոյություն ունի: Այն կանվանենք $C \in J$ բազմության ծավալ և կնշանակենք $V(C)$ -ով*:

$$V(C) = \int_A \chi_C(x) dx, \quad C \subset A:$$

Ցոյց տանք, որ $V(C)$ -ն A զուգահեռանիստի ընտրությունից կախված չէ:

Եթե $C \subset A_1$ և $C \subset A_2$, ապա $C \subset A_1 \cap A_2 := A$, որը նույնապես զուգահեռանիստ է: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում

$$\int_{A_1} \chi_C(x) dx = \int_A \chi_C(x) dx = \int_{A_2} \chi_C(x) dx:$$

Այդ հավասարություններից առաջինն ապացուցելու համար (երկրորդը կապացուցվի նույն կերպ) կառուցենք A_1 զուգահեռանիստի այնպիսի տրիհում, որի տրոհման զուգահեռանիստերից մեկը A -ն է: Այդ դեպքում χ_C ֆունկցիան, A -ից զատ մնացած տրոհման զուգահեռանիստերի վրա համարյա ամենուրեք 0 է: Հետևաբար, χ_C ֆունկցիայի ինտեգրալը այդ մնացած զուգահեռանիստերի վրա 0 է: Քանի որ $\int_{A_1} \chi_C$ ինտեգրալը

* Ապացուցեք, որ C -ն կլինի 0 ծավալի այն և միայն այն դեպքում, եթե $C \in J$ և $V(C) = 0$:

հավասար է տրոհման զուգահեռանիստերով տարածված ինտեգրալների գումարին, ապա

$$\int_{A_1} \chi_C = \int_A \chi_C :$$

2. J -շափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալ: Դիցուք՝ $C \in J$ և $f : C \rightarrow R : \cup_{x \in C} \text{կամայական} \Rightarrow$

$$f_C^*(x) := \begin{cases} f(x), & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases},$$

և C բազմությամբ տարածված f -ի ինտեգրալը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\int_C f = \int_A f_C^*, \quad (5.1)$$

որտեղ A -ն C բազմությունը պարունակող կամայական զուգահեռանիստ է:

f_C^* -ի փոխարեն կարելի է կիրառել նաև $f\chi_C$ սիմվոլը. Լերեզի թեորեմի համաձայն, որպեսզի (5.1) ինտեգրալը գոյություն ունենա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f\chi_C$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը՝ $B(f\chi_C)$ -ն, լինի 0-չափի:

Մյուս կողմից,

$$B(f\chi_C) \subset B(f) \cup B(\chi_C), \quad B(f) \subset B(f\chi_C),$$

առնչություններից հետևում է, որ $B(f\chi_C)$ -ն 0 չափի է այն և միայն այն դեպքում, եթե $B(f)$ -ն էլ 0 չափի:

Այսպիսով, (5.1) ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ f ֆունկցիան լինի համարյա ամենութեք անընդհատ C -ի վրա: Կենթաղենք, որ այդ պայմանը բավարարվում է և այդ ֆունկցիաների դասը կնշանակենք $\mathfrak{R}(C)$ -ով:

Կիրառելով նախորդ կետի դասողությունները, կհամոզվենք, որ (5.1) ինտեգրալը C բազմությունը պարունակող A զուգահեռանիստի ընտրությունից կախված չէ:

Չուզահեռանիստով տարածված ինտեգրալի հատկությունները մնում են ուժի մեջ նաև այս ընդհանուր ինտեգրալների համար: Նշենք դրանցից մի քանիսը:

$$1^0. \text{Եթե } w) C = \bigcup_{i=1}^m C_i, \quad C_i \in J; \quad \stackrel{0}{C}_i \cap \stackrel{0}{C}_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

p) $f \in \mathfrak{R}(C),$

ապա

$$1) \quad f \in \mathfrak{R}(C_i), \quad 1 \leq i \leq m,$$

$$2) \int_C f = \sum_{i=1}^m \int_{C_i} f :$$

Այս հատկությանն անվանում են ինտեգրալի աղիտիվություն:

► 1)-ը հետևում է այն բանից, որ 0 չափի բազմության կամայական ենթարազմություն նույնակա 0 չափի է:

$$2)-ն ապացուցելու համար նկատենք, որ \(\chi_C(x) = \sum_{i=1}^m \chi_{C_i}(x)\)$$

հավասարությունը տեղի ունի համարյա ամենուրեք R^n -ում (հավասարությունը կարող է խախտվել եզրային կետերում, իսկ այդ կետերի բազմությունը 0-չափի է): Հետևարար,

$$f\chi_C(x) = \sum_{i=1}^m f\chi_{C_i}(x) \text{ համարյա ամենուրեք } R^n \text{-ում:}$$

Մնում է օգտվել չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանումից և զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալների համապատասխան հատկություններից: ■

Հետևանք (չափի աղիտիվությունը): Նշված պայմաններում վերցնելով

$$f(x) \equiv 1, \text{կստանանք՝ } V(C) = \sum_{i=1}^m V(C_i):$$

2⁰. Եթե $C \in J, \quad f, g \in \mathfrak{R}(C) \quad \text{և} \quad f(x) = g(x), \quad \text{համարյա ամենուրեք } C \text{-ում, ապա}$

$$\int_C f = \int_C g :$$

► Երոք, $f(x)\chi_C(x) = g(x)\chi_C(x)$, համարյա ամենուրեք A -ում: Մնում է օգտվել չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանումից և զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալի համապատասխան հատկությունից: ■

$$3^0. \text{ Եթե } C \in J, \quad f \in \mathfrak{R}(C), \quad f(x) \geq 0 \quad \text{և} \quad \int_C f = 0, \quad \text{ապա} \quad f(x) = 0,$$

համարյա ամենուրեք C -ում:

► Այս դեպքում $f(x)\chi_C(x) \geq 0$: Մնում է օգտվել չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանումից և զուգահեռանիստով տարածված ինտեգրալի համապատասխան հատկությունից: ■

4⁰. **Սիզին արժեքի քերեմը.** Եթե $C \in J$, $f \in \mathfrak{R}(C)$, m -ը և M -ը f -ի ճշգրիտ եղուրն են, ապա գոյություն ունի $\mu \in [m, M]$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_C f = \mu V(C) :$$

Ապացույցը նույնն է, ինչ որ զուգահեռանիստի դեպքում:

Լրացում: Եթե C -ն կապակցված է և $f \in C(C)$, ապա գոյություն ունի $\xi \in C$ կետ, այնպիսին, որ

$$\int_C f = f(\xi)V(C) :$$

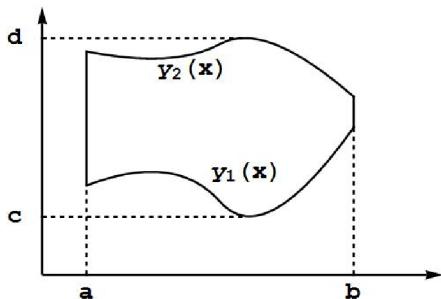
Ապացույցը նույնն է, ինչ որ զուգահեռանիստի դեպքում:

3. Կրկնակի և եռակի ինտեգրալների հաշվում:

a) Կորագիծ սեղանով տարածված ինտեգրալ: Դիցու $C \subset R^2$ կորագիծ սեղանը սահմանափակված է $x = a$, $x = b$ ($a < b$) ուղիղներով և $y_1(x) < y_2(x)$, $x \in [a, b]$ անընդհատ կորերով: Այդ դեպքում

w) $C \in J$,

$$p) \iint_C f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy, \text{ tipp } f \in C(C):$$



պնդումը, մենք պետք է ապացուցենք, որ C -ի եզրը 0-մակերեսի է: Այդ եզրը բաղկացած է $x=a$ և $x=b$ ուղիղների հատվածներից, որոնք ակնհայտորեն 0-մակերեսի են, և $y_1(x)$ ու $y_2(x)$ անընդհատ ֆունկցիաների գրաֆիկներից, որոնց 0-մակերեսի լինելը հետևում է Կանոնի թեորեմից*:

p) պնդումն ապացուցելու համար նշանակենք՝ $c = \min_{[a,b]} y_1(x)$,

$d = \max_{[a,b]} y_2(x)$: Այդ դեպքում՝ $C \subset [a,b] \times [c,d] =: A$: Ըստ J -չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալի սահմանման ունենք՝

$$\iint_C f(x,y) dx dy = \iint_A f^*(x,y) dx dy,$$

որտեղ

$$f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & x \in C \\ 0, & x \notin C \end{cases} :$$

Կիրառելով Ֆուրիեիի թեորեմը՝ կստանանք

► Հարթության վրա J -չափելի բազմությունները կոչվում են նաև բառակուսելի բազմություններ (մասնավոր դեպքում, երբ ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ՝ բառակուսելի պատկերներ), իսկ 0-ծավալի բազմությունները՝ 0-մակերեսի բազմություններ: Որպեսզի ապացուցենք այս

* Ste'v I հասող, VI գլուխ:

$$\iint_A f^*(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) dy : \quad (5.2)$$

Սակայն, եթե $x \in [a, b]$ կետը հաստատագրված է, այդ դեպքում՝

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & y \in [y_1(x), y_2(x)] \\ 0, & y \notin [y_1(x), y_2(x)] \end{cases},$$

ուստի

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy :$$

Ստացված արժեքը տեղադրելով (5.2)-ի մեջ՝ կստանանք բ)-ի: ■

բ) Եռաչափ տիրույթով տարածված ինտեգրալ: R^3 -ում J -չափելի բազմությունները կոչվում են նաև խորանարդելի բազմություններ, (իսկ այն մասնավոր դեպքում, եթե բազմության ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ՝ խորանարդելի մարմիններ):

Ենթադրենք, որ $D \subset R^3$ բազմությունը խորանարդելի մարմին է, որի ընկած է $x=a$ և $x=b$ ($a < b$) հարթությունների միջև և յուրաքանչյուր $x_0 \in [a, b]$ հաստատագրված արժեքի համար $x=x_0$ հարթության և D -ի հատման պրյեկցիան Oyz հարթության վրա՝

$$E_{x_0} = \{(y, z) \in R^2 : (x_0, y, z) \in D\}$$

բազմությունը, քառակուսելի է: Այդ դեպքում

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{E_x} f(x, y, z) dy dz, \quad f \in C(D) : \quad (5.3)$$

► Քանի որ $D \in J$, ապա այն սահմանափակ է: Հետևաբար, գոյություն ունի $[c, d] \times [e, h]$ ուղղանկյուն, այնպիսին, որ

$$D \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h] =: A \times B,$$

որտեղ $A = [a, b]$, $B = [c, d] \times [e, h]$:

Հստ սահմանման՝

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{A \times B} f^*(x, y, z) dx dy dz, \quad (5.4)$$

որտեղ

$$f^*(x, y, z) := \begin{cases} f(x, y, z), & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

Ֆուրինի թեորեմի համաձայն՝

$$\iiint_{A \times B} f^*(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_B f^*(x, y, z) dy dz : \quad (5.5)$$

Սակայն $x \in [a, b]$ հաստատագրված արժեքի դեպքում՝

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (y, z) \in E_x \\ 0, & (y, z) \notin E_x \end{cases},$$

ուստի

$$\iint_B f^*(x, y, z) dy dz = \iint_{E_x} f(x, y, z) dy dz :$$

Տեղադրելով այս արժեքը (5.5)-ի մեջ, այնուհետև, ստացված արժեքը՝ (5.4)-ի մեջ՝ կստանանք (5.3)-ը: ■

Որոշ հեղինակների մոտ R^3 -ում տիրույթը նշանակվում է (D) սիմվոլով, իսկ նրա ծավալը՝ D -ով: Նման ձևով R^2 -ում տիրույթը նշանակվում է (P) սիմվոլով, իսկ նրա մակերեսը՝ P -ով:

Հաշվի առնելով այդ պայմանավորվածությունը՝ (5.3) բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\iint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \iint_{(P(x))} f(x, y, z) dy dz , \quad (5.3)$$

որտեղ

$$(P(x)) = \{(y, z) \in R^2 : (x, y, z) \in (D)\} :$$

Կավաերիի սկզբունքը: Եթե (V_1) և (V_2) եռաչափ տիրույթներն այնպիսին են, որ $P_1(x) = P_2(x)$, $x \in [a, b]$, ապա $V_1 = V_2$:

► Ըստ ծավալի սահմանման՝

$$V_1 = \iint_{(V_1)} dx dy dz :$$

Այստեղ կիրառելով (5.3)-ը՝ կստանանք

$$V_1 = \int_a^b \left\{ \iint_{(P_1(x))} dy dz \right\} :$$

Մակերեսի սահմանման համաձայն՝

$$\iint_{(P_1(x))} dy dz = P_1(x) :$$

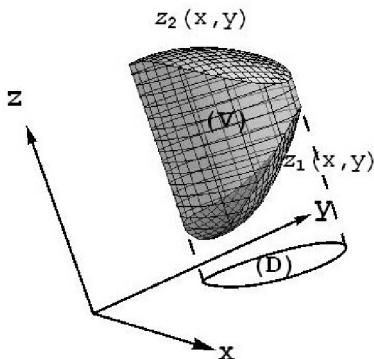
Տեղադրելով նախորդի մեջ՝ կստանանք

$$V_1 = \int_a^b P_1(x) dx ^* :$$

Քանի որ $P_1(x) = P_2(x)$, $x \in [a, b]$, ապա V_2 -ը կարտահայտվի նույն բանաձևով: ■

c) **Գլանակերպով տարածված ինտեգրալ:** Դիցուք (V) -ն (D) քառակուսելի հիմքով ուղիղ զլանակերպ է, որի ծնիչը զուգահեռ z -երի առանցքին, և որը ներքեւից ու վերևից սահմանափակված է (D) տիրույթում անընդհատ $z_1(x, y)$ և $z_2(x, y)$ ֆունկցիաների գործիքներով՝ $(V) = \{(x, y, z) \in R^3 : (x, y) \in (D), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$: Այդ դեպքում՝

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dxdydz = \iint_{(D)} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dxdy, \text{ եթե } f \in C((V)): \quad (5.4)$$



Այս պնդումը կրկին ապացուցվում է Ֆուրինիի թեորեմի օգնությամբ: Օգտվելով Կանտորի թեորեմից՝ կարելի է ապացուցել, որ $(V) \in J$ (ենթադրվում է, որ (D) -ն փակ է):

* Ծավալների հաշվման բաժնում (I հ., VI գլուխ) այս բանաձևն ապացուցվել էր լրացուցիչ ենթադրությունների դեպքում:

Դիցուք՝ $(V) \subset [a, b] \times [c, d] \times [e, h] =: A \times B : \text{Այդ դեպքում՝}$

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{A \times B} f^*(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iint_A \left\{ \int_e^h f^*(x, y, z) dz \right\} dx dy : \end{aligned}$$

Սակայն, եթե $(x, y) \notin (D)$, ապա $f^*(x, y, z) = 0$, հետևաբար՝

$$\iint_A \left\{ \int_e^h f^*(x, y, z) dz \right\} dx dy = \iint_{(D)} \left\{ \int_e^h f^*(x, y, z) dz \right\} dx dy :$$

Եթե $(x, y) \in (D)$, ապա՝

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & z \in [z_1(x, y), z_2(x, y)] \\ 0, & z \notin [z_1(x, y), z_2(x, y)] \end{cases} :$$

Հետևաբար՝ $\iint_{(D)} \left\{ \int_e^h f^*(x, y, z) dz \right\} dx dy = \iint_{(D)} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} dx dy :$

Տեղադրելով սա ճախորդների մեջ՝ կստանանք պահանջվող բանաձևը: ■

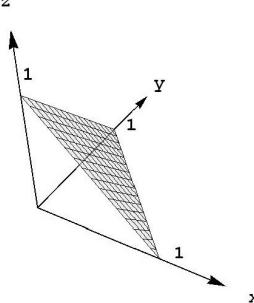
Լրացում: Եթե (D) -ն կորագիծ սեղան է, որը բննարկվել է a -ում, ապա

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz : \quad (5.6)$$

Օրինակ: Հաշվել $I = \iiint_{(V)} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ ինտեգրալը, որտեղ (V) -ն

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{և} \quad x + y + z = 1$$

հարքություններով սահմանափակված բուրգն է:



(5.6) բանաձևի համաձայն՝

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} :$$

Հաջորդաբար հաշվենք ինտեգրալները.

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right];$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right);$$

Վերջապես՝

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \left(\ln 2 - \frac{5}{8} \right);$$

4. Բազմակի ինտեգրալի դասական սահմանում: Դիցուք D -ն J -չափելի փակ բազմություն է R^n -ում և D_1, \dots, D_m J -չափելի բազմություններն այնպիսիք են, որ

$$\text{ա) } D = \bigcup_{i=1}^m D_i, \quad \text{բ) } \overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \emptyset, \quad i \neq j;$$

Այս դեպքում կասենք, որ D_1, \dots, D_m բազմությունները կազմում են D -ի տրոհում (կամ՝ D -ն տրոհված է D_1, \dots, D_m բազմությունների):

Եթե $f : D \rightarrow R$, ապա

$$\sigma' = \sum_{i=1}^m f(M_i) V(D_i), \quad M_i \in D_i$$

գումարը կոչվում է f ֆունկցիայի $\{D_i\}_1^m$ տրոհմանը և $\{M_i\}_1^m$ կետերին համապատասխանող Ռիմանի ինտեգրալային գումար: Նշանակենք՝

$$\lambda = \max_i \operatorname{diam} D_i;$$

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma' = I'$ վերջավոր սահմանը*, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի ինտեգրալ՝ տարածված D բազմությամբ:

Թեորեմ 5.2: Եթե f սահմանափակ ֆունկցիան անընդհատ է D -ում և սամարյա ամենութեք, ապա I' վերջավոր սահմանը գոյություն ունի և

* Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ $\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma' - s'| < \varepsilon$:

$$\mathcal{I}' = \int_D f :$$

► Ուսենք՝

$$\int_D f = \sum_{i=1}^m \int_{D_i} f dx \text{ և } \sigma' = \sum_{i=1}^m \int_{D_i} f(M_i) dx :$$

Հետևաբար՝

$$\left| \sigma' - \int_D f \right| \leq \sum_{i=1}^m \int_{D_i} |f(M_i) - f(x)| dx \leq \sum_{i=1}^m \int_{D_i} \omega_{D_i}(f) \cdot V(D_i) :$$

Ուստի թեորեմն ապացուցելու համար մեզ մնում է համոզվել, որ

$$\sum_{i=1}^m \int_{D_i} \omega_{D_i}(f) V(D_i) \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} 0 : \quad (5.7)$$

Օգտվենք Լեբեզի թեորեմի (թեորեմ 2.7) ապացուցի ընթացքում ներմուծված նշանակումներից: Յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունեն U_1, \dots, U_k բաց զուգահեռանիստեր, այնպիսիք, որ

$$ա) \quad B_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^k U_i, \quad \text{պ} \quad \sum_{i=1}^k V(U_i) < \varepsilon :$$

$U_i(\alpha)$ -ով նշանակենք այն զուգահեռանիստը, որի կենտրոնը համընկնում է U_i -ի կենտրոնին, իսկ կողմերի երկարությունները բազմապատկած են $(1 + \alpha)$ -ով ($\alpha > 0$): Այնուհետև նշանակենք՝

$$U = \bigcup_{i=1}^m U_i, \quad U(\alpha) = \bigcup_{i=1}^m U_i(\alpha), \quad K = D \setminus U = D \cap U^C :$$

Այդ դեպքում՝

$$V(U(\alpha)) \leq \sum_{i=1}^m V(U_i(\alpha)) = (1 + \alpha)^n \sum_{i=1}^m V(U_i) < (1 + \alpha)^n \varepsilon :$$

Քանի որ U -ն բաց է, ապա U^C -ն փակ է, հետևաբար K -ն կոմպակտ բազմություն է:

Բացի դրանից, $\sigma(f, x) < \varepsilon$, $x \in K$: Թեորեմ 2.3-ի համաձայն, գոյություն ունի $\delta_1 > 0$ թվի, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{c} E \subset K \\ diam E < \delta_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_E(f) < \varepsilon :$$

\mathcal{F}_1 -ով նշանակենք այն D_i -երի բազմությունը, որոնք U -ի հետ ունեն ընդհանուր կետ, \mathcal{F}_2 -ով՝ մնացածը:

Մյուս կողմից, քանի որ \bar{U} բազմությունը կոմպակտ է, իսկ $U^C(\alpha)$ -ն՝ փակ, և $\bar{U} \cap U^C(\alpha) = \emptyset$, ապա նրանց հեռավորությունը դրական է՝ $d := d(\bar{U}, U^C(\alpha)) > 0$: Հետևաբար, եթե $\lambda < d$, ապա

$$(D_1 \in \mathcal{F}_1) \Rightarrow (D_i \subset U(\alpha)) \Rightarrow V\left(\bigcup_{D_i \in \mathcal{F}_1} D_i\right) \leq V(U(\alpha)):$$

Այժմ վերցնենք $\lambda < \min(\delta_1, d) =: \delta$ և գնահատենք (5.7) գումարը.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \omega_{D_i}(f) V(D_i) &= \sum_{D_i \in \mathcal{F}_1} \omega_{D_i}(f) V(D_i) + \sum_{D_i \in \mathcal{F}_2} \omega_{D_i}(f) V(D_i) \leq \\ &\leq \Omega \sum_{D_i \in \mathcal{F}_1} V(D_i) + \varepsilon \sum_{D_i \in \mathcal{F}_2} V(D_i) \leq \Omega V(U(\alpha)) + \varepsilon V(D) \leq \\ &\leq \Omega(1 + \alpha)^n \varepsilon + \varepsilon V(D): \end{aligned}$$

(5.7) առնչությունը հետևում է այս գնահատականից: ■

5. Ինտեղրալի սահմանումը զանցերի միջոցով: Յուրաքանչյուր $h > 0$ թվի համար դիտարկենք R^n -ում ընկած խորանարդների հետևյալ ընտանիքը՝

$$[m_1 h, (m_1 + 1)h] \times \cdots \times [m_n h, (m_n + 1)h], \quad (5.8)$$

որտեղ m_1, \dots, m_n թվերը փոփոխվում են ամբողջ թվերի բազմության վրա: Այդ խորանարդները միմյանց հետ ընդհանուր ներքին կետ չունեն և ծածկում են ամբողջ R^n -ը: Խորանարդների այդ ընտանիքը կոչվում է h -ցանց R^n -ում:

Դիցուք C -ն R^n -ում ընկած J -չափելի փակ բազմություն է և $f: C \rightarrow R$ ֆունկցիան սահմանափակ է:

Թող, որ $C_1, \dots, C_{m(h)}$ -ը (5.8) ընտանիքին պատկանող այն խորանարդներն են, որոնք ամբողջությամբ լված են C -ի մեջ՝ $C_i \subset C$, $1 \leq i \leq m(h)$:

Վերցնենք $M_i \in C_i$, $1 \leq i \leq m(h)$ կամայական կետերը և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{m(h)} f(M_i)V(C_i):$$

Թեորեմ 5.3: Եթե f սահմանափակ ֆունկցիան անդիհատ է C -ի վրա համարյա ամենուրեք, ապա

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tilde{\sigma} = \int_C f :$$

► Դիցուք $C_1, \dots, C_{m(h)}, C_{m(h)+1}, \dots, C_{p(h)}$ -ը (5.8) ընտանիքին պատկանող այն խորանարդներն են, որոնք C -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն և

$$\sigma' = \sum_{i=1}^{m(h)} f(M_i)V(C_i) + \sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} f(M_i)V(C'_i),$$

որտեղ $C'_i = C_i \cap C$ և $M_i \in C'_i$, $m(h) + 1 \leq i \leq p(h)$: Նախորդ թեորեմի համաձայն՝

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma' = \int_C f :$$

Մեզ մնում է ապացուցել, որ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} f(M_i)V(C'_i) = 0 :$$

Քանի որ f -ը սահմանափակ է՝ $|f(x)| \leq L$, $x \in C$, ապա

$$\left| \sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} f(M_i)V(C'_i) \right| \leq L \sum_{i=m(h)+1}^{p(h)} V(C_i) :$$

Այսինքն՝ մեզ մնում է ապացուցել, որ C -ի եզրի հետ ընդհանուր կետ ունեցող (5.8) ընտանիքին պատկանող խորանարդների ծավալների գումարը ձգտում է 0-ի, եթե $h \rightarrow 0$:

Իրոք, եթե U_1, \dots, U_k բաց զուգահեռանիստերո այնպիսին են, որ*

$$\text{ա) } \partial C \subset \bigcup_{i=1}^k U_i, \quad \text{բ) } \sum_{i=1}^k V(U_i) < \varepsilon,$$

ապա բավականաչափ փոքր h -ի դեպքում ∂C -ի հետ ընդհանուր կետ ունեցող խորանարդները կպատկանեն $U = \bigcup_{i=1}^k U_i$ միավորմանը, իետևաբար, նրանց ծավալների գումարը փոքր կլինի ε -ից: ■

Լրացում: Թեորեմը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե $\tilde{\sigma}$ գումարի մեջ ընդգրկվում են միայն այն C_i խորանարդները, որոնք բավարարում են $C_i \subset \text{int } C$ պայմանին: Հետևաբար, թեորեմը ճիշտ է նաև ոչ փակ $C \in J$ բազմությունների համար:

Հետևանքներ: 1) Եթե $C \in J$ և $C_1, \dots, C_{m(h)}$ -ը (5.8) ընտանիքի այն խորանարդներն են, որոնք բավարարում են $C_i \subset \text{int } C$ պայմանին ու

$$G_h = \bigcup_{i=1}^{m(h)} C_i, \text{ ապա}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} V(G_h) = V(C): \quad (5.9')$$

Ապացուցելու համար նախորդ լրացման մեջ կվերցնենք՝ $f(x) = 1$, $x \in C$:

2) Եթե $C_1, \dots, C_{m(h)}, C_{m(h)+1}, \dots, C_{p(h)}$ -ը (5.8) ընտանիքի այն խորանարդներն են, որոնք C -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն և $G^h = \bigcup_{i=1}^{p(h)} C_i$, ապա

$$\lim_{h \rightarrow 0} V(G^h) = V(C): \quad (5.9)$$

► Քանի որ

$$G^h = G_h \cup \left(\bigcup_{i=m(h)+1}^{p(h)} C_i \right),$$

* ∂C -ն 0-ծավալի բազմություն է, քանի որ $C \in J$:

ապա չափի աղյուսվության շնորհիվ՝

$$V(G^h) = V(G_h) + V\left(\bigcup_{i=m(h)+1}^{p(h)} C_i\right): \quad (5.10)$$

Մյուս կողմից, (5.10)-ի երկրորդ գումարելին ձգտում է 0-ի, եթե $h \rightarrow 0$: Հետևաբար, (5.9)-ը հետևում է (5.9')-ից և (5.10)-ից: ■

6. Բաց բազմության կոմպակտ սպառում: Դիցուք G -ն R^m -ում ընկած բաց բազմություն է:

Թեորեմ 5.4: Գոյություն ունի $K_n \subset G$ կոմպակտ չափելի բազմությունների հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$a) K_n \subset \text{int } K_{n+1}, \quad p) G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n :$$

Այսպիսի K_n հաջորդականությունը կոչվում է G -ի կոմպակտ սպառում:

► Աշանակենք՝

$$F_n = \left\{ x \in G : d(x, G^C) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \{x \in R^m : |x| \leq n\}:$$

F_n բազմությունները կոմպակտ են և բավարարում են ա) և բ) պայմաններին: Իսկապես, նախ նկատենք, որ $\rho(x) = d(x, G^C)$ ֆունկցիան անընդհատ է՝ շնորհիվ $|\rho(x) - \rho(y)| \leq |x - y|$ անհավասարության: Ուրեմն

$$E_n = \left\{ x : \rho(x) \geq \frac{1}{n} \right\} \quad \text{բազմությունը} \quad \text{փակ} \quad \text{է,} \quad \text{իսկ} \quad \left\{ x : \rho(x) > \frac{1}{n} \right\}$$

բազմությունը՝ բաց: Հետևաբար, եթե $a \in E_n$, ապա $\rho(a) \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$:

Այսինքն՝ a -ն F_{n+1} -ի ներքին կետ է, ուստի $F_n \subset \text{int } F_{n+1}$:

Այսուհետև նշանակենք՝ $\delta_n = d(F_n, \partial F_{n+1})$: $\delta_n > 0$, քանի որ F_n -ը կոմպակտ է և $F_n \cap \partial F_{n+1} = \emptyset$:

Ընտրենք R^m -ի մի այնպիսի h -ցանց, որի խորանարդի անկյունագիծը (տրամագիծը) փոքր է δ_n -ից: Այդ ցանցը նշանակենք Ω_n -ով:

Որպես K_n վերցնենք Ω_n -ին պատկանող այն (փակ) խորանարդների միավորումը, որոնք F_n -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն: Այս K_n բազմությունները կրավարարեն նշված պայմաններին^{*}: ■

§6. ՓՈՓՈԽԱՎԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ

1. J -չափելի բազմության պատկեր: J -չափելի բազմության պատկերն ուսումնասիրելու համար նպատակահարմար է սահմանել վեկտորի և մատրիցի նորմեր:

$x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ վեկտորի նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\|x\| := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|:$$

Այդ դեպքում $\|x - a\| \leq r$ գնդի դերում հանդես է գալիս $a = (a_1, \dots, a_n)$ կենտրոնով $[a_1 - r, a_1 + r] \times \dots \times [a_n - r, a_n + r]$ խորանարդը:

$A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ մատրիցի նորմը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\|A\| := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|:$$

Դժվար չէ ստուգել, որ այսպես սահմանված նորմերը բավարարում են նորմի երեք արսիոմներին (VII, §1):

Լեննա 6.1: Դիցուք D -ա R^n -ում ընկած բաց բազմություն է, իսկ $\psi : D \rightarrow R^n$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է, փոխմիարժեք է և $\det \psi'(x) \neq 0$, $x \in D$: Այդ դեպքում՝

a) եթե C -ա D -ում ընկած x^0 կենտրոնով և $2s$ երկարությամբ կողմով փակ խորանարդ է, ապա $\psi(C)$ -ա ընկած է $y^0 = \psi(x^0)$ կենտրոնով և $2s \max_{x \in C} \|\psi'(x)\|$ կողմի երկարությամբ C' խորանարդի մեջ, որի ծավալն է՝

$$V(C') = \left[\max_{x \in C} \|\psi'(x)\| \right]^n V(C):$$

* Եթե G -ա կապակցված է, K_n -ը կարելի է նույնպես կապակցված կառուցել:

b) Եթե $E \subset D$ և $m(E) = 0$, ապա $m(\psi(E)) = 0$:

c) Եթե F -ը D -ում լոկած J -չափելի կոմպակտ բազմություն է, ապա $\psi(F)$ -ը նույնպես J -չափելի է:

► a)-ն բխում է Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից: ‘Դրանում համոզվելու համար նշանակենք՝ $\psi(x) = (\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $x \in C$ կետի համար ունենք՝

$$\begin{aligned} |y_i - y_i^0| &= |\psi_i(x) - \psi_i(x^0)| = \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x^0 + \theta(x - x^0))(x_i - x_i^0) \right| \\ &\leq \|x - x^0\| \max_{x \in C} \|\psi'(x)\| \leq s \max_{x \in C} \|\psi'(x)\|: \end{aligned}$$

b)-ն ապացուցելու համար դիտարկենք D բազմության մի որևէ $\{K_n\}_1^\infty$ կոմպակտ սպառում՝

$$ս) K_m \subset \text{int } K_{m+1}, \quad թ) D = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m:$$

Այդ դեպքում՝

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \cap K_m), \quad \psi(E) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \psi(E \cap K_m):$$

Ուստի բավական է ապացուցել, որ $\psi(E \cap K_m)$ -ը 0 չափի է, որովհետև հաշվելի թվով 0-չափի բազմությունների միավորումը 0 չափի է: Հանդիսանալով 0 չափի բազմության ենթաբազմություն՝ $E \cap K_m$ -ը 0 չափի է: Ուստի յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\{U_i\}$ զուգահեռանիստերի վերջավոր կամ հաշվելի ընտանիք, այնպիսին, որ

$$ս) E \cap K_m \subset \bigcup_i U_i, \quad թ) \sum_i V(U_i) < \varepsilon:$$

Նշանակենք $U'_i = U_i \cap K_m$: Այդ դեպքում $U'_i \subset K_m$ բազմությունները չափելի են և $E \cap K_m \subset \bigcup_i U'_i$:

(5.9)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր U'_i -ի համար գոյություն ունեն $C_{i1}, \dots, C_{iq_i} \subset K_{m+1}$ (m -ը հաստատագրված է) խորանարդներ, այնպիսիք, որ

$$U'_i \subset \bigcup_{j=1}^{q_i} C'_{ij} \text{ և } \sum_{j=1}^{q_i} V(C'_{ij}) < 2V(U_i) :$$

a)-ի համաձայն, $\psi(C_{ij})$ -ն ընկած է C'_{ij} խորանարդի մեջ, որի ծավալն է՝

$$V(C'_{ij}) = \left[\max_{x \in C_{ij}} \|\psi'(x)\| \right]^n V(C_{ij}) : \text{Այսպիսով,}$$

$$\psi(E \cap K_m) \subset \bigcup_i \psi(U'_i) \subset \bigcup_i \left(\bigcup_{j=1}^{q_i} \psi(C_{ij}) \right) \subset \bigcup_i \left(\bigcup_{j=1}^{q_i} C'_{ij} \right)$$

և

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} V(C'_{ij}) &\leq \sum_i \sum_{j=1}^{q_i} \left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\| \right]^n V(C_{ij}) < \\ &< 2 \left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\| \right]^n \sum_i V(U_i) < 2\varepsilon \left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\| \right]^n : \end{aligned}$$

Հետևաբար, $\psi(E \cap K_m)$ բազմությունը ծածկվել է վերջավոր կամ հաշվելի թվով խորանարդներով, որոնց ծավալների գումարը որքան կամենաճք փոքր է*: Այսինքն՝ $\psi(E \cap K_m)$ -ը 0-չափի է:

c)-ի ապացույցը. որպեսզի ապացույցինք, որ $\psi(F)$ -ը J -չափելի է, պետք է ապացույցինք, որ $\psi(F)$ -ը սահմանափակ է և $\partial\psi(F)$ -ը 0-չափի է: Քանի որ F -ը կոմպակտ է, ապա $\psi(F)$ -ը նույնպես կոմպակտ է (տե՛ս VII, թերեմ 5.3), հետևաբար, այն սահմանափակ է:

Հակադարձ ֆունկցիայի թերեմը կիրառելով ψ և ψ^- արտապատկերումների համար, կհամոզվենք, որ $\partial\psi(F) = \psi(\partial F)$:

Քանի որ F -ը J -չափելի է, ապա ∂F -ը 0-չափի է, ուստի b)-ի համաձայն, $\psi(\partial F)$ -ը նույնպես 0-չափի է: ■

2. J -չափելի բազմության գծային պատկերը:

Լեմմա 6.2: Եթե $T : R^n \rightarrow R^n$ արտապատկերումը չվերասերվող գծային ձևափոխություն է և $G \subset R^n$ բազմությունը J -չափելի է, ապա

* Քանի որ m -ը հաստատագրված է:

$$V(TG) = |\det T| V(G) : \quad (6.1)$$

► Նախ (6.1)-ը ապացուցենք ստորև ներկայացված ա) և բ) պարզագույն գծային ձևափոխությունների համար՝

ա) $y = T_{ij}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n)$. այստեղ՝ $y_k = x_k$, եթե $k \neq i$ և $y_i = x_i + x_j$: Այս դեպքում՝

$$\det T_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & & & & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & & \vdots & & \vdots & & 1 \\ & & & & & i & j \end{vmatrix} = 1 :$$

բ) $y = T_i^\lambda(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n)$. այստեղ՝ $y_k = x_k$, եթե $k \neq i$ և $y_i = \lambda x_i$: Այս մի դեպքում էլ՝

$$\det T_i^\lambda = \begin{vmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & \vdots & 1 \\ 0 & & \vdots & & \ddots \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = \lambda :$$

Սկզբում (6.1)-ը սուրգենը $C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ զուգահեռանիստի համար:

ա) դեպքում՝

$$T_{ij} C \subset [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i + a_j, b_i + b_j] \times \cdots \times [a_n, b_n] =: A :$$

Ըստ սահմանման՝

$$V(T_{ij} C) = \int_A \chi_{T_{ij} C}(y) dy :$$

$$\text{Եշտանակենք՝ } A_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] ,$$

$$A_2 = [a_i + a_j, b_i + b_j] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

$$A_3 = [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

և երկու անգամ կիրառելով ֆուրինիի թեորեմը, կստանանք՝

$$V(T_{ij}C) = \int_{A_1} \left\{ \int_{A_2} \chi_{T_{ij}C}(y) dy \right\} = \int_{A_1} \left\{ \int_{A_3} \left[\int_{[a_i + a_j, b_i + b_j]} \chi_{T_{ij}C}(y) dy_i \right] \right\}: \quad (6.2)$$

Եթե $y_k \in [a_k, b_k]$, $k \neq i$ կոորդինատները ֆիքսված են, այդ դեպքում՝

$$\chi_{T_{ij}C}(y) = \begin{cases} 1, & y_i \in [a_i + y_j, b_i + y_j] \\ 0, & y_i \notin [a_i + y_j, b_i + y_j] \end{cases}:$$

Ուստի

$$\int_{[a_i + a_j, b_i + b_j]} \chi_{T_{ij}C}(y) dy_i = \int_{a_i + y_j}^{b_i + y_j} dy_i = b_i - a_i:$$

Տեղադրելով (6.2)-ի մեջ՝ կստանանք $V(T_{ij}C) = V(C)$ հավասարությունը, այսինքն՝ այս դեպքում (6.1)-ը ճշմարիտ է:

բ) դեպքում $T_i^\lambda C$ -ն զուգահեռանիստ է, ընդ որում,

$$\lambda \geq 0 \text{ դեպքում՝ } T_i^\lambda C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [\lambda a_i, \lambda b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

$$\lambda < 0 \text{ դեպքում՝ } T_i^\lambda C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [-\lambda b_i, -\lambda a_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]:$$

Հետևաբար,

$$VT_i^\lambda C = |\lambda| \cdot V(C),$$

այսինքն բ) դեպքում նույնպես (6.1)-ը ճշմարիտ է:

Այժմ, եթե G -ն կամայական J -չափելի բազմություն է, նշանակենք

$C_1, \dots, C_{m(h)}$ -ով h -ցանցի այն խորանարդները, որոնք պատկանում են $\overset{\circ}{G}$ -ին և $G_h := \bigcup_{k=1}^{m(h)} C_k$:

$$V(TC_k) = |\det T| \cdot V(C_k), \quad k = 1, \dots, m(h),$$

Եթե $T = T_{ij}$ կամ $T = T_i^\lambda$ ՝

Ժորդանի չափի աղիտիվության համաձայն՝

$$V(TG_h) = |\det T| \cdot V(G_h) : \quad (6.3)$$

(5.9')-ի համաձայն՝

$$V(G_h) \rightarrow V(G), \text{եթե } h \rightarrow 0 : \quad (6.4)$$

Ցույց տանք, որ

$$V(TG_h) \rightarrow V(TG), \text{եթե } h \rightarrow 0 : \quad (6.5)$$

Նշանակենք $C_{m(h)+1}, \dots, C_{p(h)}$ -ով h -ցանցի այն խորանարդները, որոնք

$$\partial G - h \text{ հետ ընդհանուր կետ ունեն } \text{ և } G^h := \bigcup_{k=1}^{p(h)} C_k : \text{Այդ դեպքում}$$

$$TG_h \subset TG \subset TG^h,$$

ուստի

$$V(TG_h) \leq V(TG) \leq V(TG^h) :$$

Հետևաբար, (6.5)-ը հետևում է

$$V(TG^h) - V(TG_h) \rightarrow 0, \text{ } h \rightarrow 0$$

առնչությունից, ինչն իր հերթին հետևում է

$$V(TG^h) - V(TG_h) = |\det T| [V(G^h) - V(G_h)]$$

հավասարությունից և (5.9'), (5.9) առնչություններից:

Հաջողի առնելով (6.4)-ը և (6.5)-ը՝ (6.3)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք (6.1)-ը:

Այսպիսով, (6.1)-ն ապացուցվեց ա) և բ) տիպի պարզագույն ձևափոխությունների համար:

Եթե $T : R^n \rightarrow R^n$ կամայական չվերասերվող գծային ձևափոխություն է, ապա* $T = T_1 \dots T_p$, որտեղ T_k -երը քննարկված տիպի են, ընդ որում, $\det T = \det T_1 \dots \det T_p : \text{Այդ դեպքում}$

$$V(T_1 T_2 G) = |\det T_1| V(T_2 G) = |\det T_1 T_2| V(G) :$$

* Գոյություն ունեն A_1, \dots, A_ℓ և B_1, \dots, B_s ա) կամ բ) տիպի պարզագույն ձևափոխություններ, այնպիսիք, որ (I-ն նոյնական ձևափոխությունն է) $A_1 \dots A_\ell T B_1 \dots B_s = I$: Ուստի $T = (A_1 \dots A_\ell)^{-1} (B_1 \dots B_s)^{-1} = A_\ell^{-1} \dots A_1^{-1} B_s^{-1} \dots B_1^{-1}$:

Այսինքն՝ երկու արտադրիչների դեպքում (6.1)-ը ճիշտ է: Մաքենատիկան կան ինդուկցիայի մեթոդով կհամոզվենք, որ (6.1)-ը ճիշտ է կամայական թվով արտադրիչների դեպքում: ■

3. J -չափելի բազմության պատկերի չափի գնահատականը:

Լեմմա 6.3: Դիցուք D -ա R^n -ում ընկած քաց բազմություն է, իսկ $\psi : D \rightarrow R^n$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է, փոխմիարժեք է և $\det \psi'(x) \neq 0$, $x \in D$: Եթե D_x -ը D -ում ընկած J -չափելի կոմպակտ բազմություն է, իսկ G -ա D_x -ում ընկած J -չափելի բազմություն է, ապա

$$V(\psi(G)) \leq \int_G |\det \psi'(x)| dx :^{**} \quad (6.6)$$

► Եթե T -ն հակադարձելի գծային ձևափոխություն է, իսկ $C \subset D_x$ բազմությունը փակ խորանարդ է, ապա

$$V(\psi(C)) \leq |\det T| \left[\max_{x \in C} \|T^{-1}\psi'(x)\| \right]^n V(C) : \quad (6.7)$$

Իրոք, 6.1 և 6.2 լեմմաների համաձայն՝

$$\begin{aligned} V(\psi(C)) &= V(TT^{-1}\psi(C)) = |\det T| V(T^{-1}\psi(C)) \leq \\ &\leq |\det T| \left[\max_{x \in C} \|(T^{-1}\psi)'(x)\| \right]^n V(C) = |\det T| \left[\max_{x \in C} \|T^{-1}\psi'(x)\| \right]^n V(C) : \end{aligned}$$

Այսուհետև R^n -ում վերցնենք h -ցանց և նշանակենք $C_1, \dots, C_{m(h)}$ -ով ցանցի այն խորանարդները, որոնք ընկած են $\text{int } G$ -ի մեջ: Վերցնենք $x_k \in C_k$, $1 \leq k \leq m(h)$ կետեր և (6.7)-ի մեջ տեղադրենք՝ $C = C_k$, $T = \psi'(x_k)$: Կատանանք՝

$$V(\psi(C_k)) \leq |\det \psi'(x_k)| \left[\max_{x \in C_k} \|(\psi'(x_k))^{-1}\psi'(x)\| \right]^n V(C_k) : \quad (6.8)$$

Այժմ դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(z, t) = \|(\psi'(z))^{-1}\psi'(t)\| : D_x \times D_x \rightarrow R :$$

** Լեմմա 6.1-ի համաձայն, $\psi(G)$ -ն J -չափելի բազմություն է (∂G -ն կոմպակտ է):

Քանի որ D_x -ը փակ, սահմանափակ բազմություն է R^n -ում, ապա $D_x \times D_x$ -ը նույնպես փակ, սահմանափակ բազմություն է R^{2n} -ում, այսինքն՝ կոմպակտ բազմություն է: Բացի այդ, $\|(\psi'(z))^{-1}\psi'(t)\|$ ֆունկցիան անընդհատ է $D_x \times D_x$ կոմպակտ բազմության վրա*, քանի որ $(\psi'(z))^{-1}\psi'(t)$ մատրիցի էլեմենտներն անընդհատ են: Հետևաբար, $F(z, t)$ ֆունկցիան հավասարաչափ ամենիհատ է $D_x \times D_x$ բազմության վրա, ընդ որում, $F(z, z) = 1$, եթե $z \in D_x$: Ուրեմն յուրաքանչյուր $\varepsilon_1 > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թվ, այնպիսին, որ

$$h < \delta \Rightarrow F(x_k, x) < \varepsilon_1 + 1,$$

քանի որ

$$F(x_k, x) \leq |F(x_k, x) - F(x, x)| + F(x, x) :$$

Վերցնելով $\varepsilon_1 = (1 + \varepsilon)^{1/n} - 1 > 0$ թվը, կստանանք, որ յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի դեպքում՝

$$h < \delta \Rightarrow F(x_k, x) < (1 + \varepsilon)^{1/n} :$$

Հաշվի առնելով այս գնահատականը՝ (6.8)-ից կստանանք

$$V(\psi(C_k)) \leq (1 + \varepsilon) |\det \psi'(x_k)| V(C_k), \quad 1 \leq k \leq m(h) :$$

Գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$\sum_{k=1}^{m(h)} V(\psi(C_k)) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{m(h)} |\det \psi'(x_k)| V(C_k) :$$

Մյուս կողմից, եթե նշանակենք $G_h = \bigcup_{k=1}^{m(h)} C_k$, ապա

$$\psi(G_h) = \bigcup_{k=1}^{m(h)} \psi(C_k) :$$

* $\|A\| - \|B\| \leq \|A - B\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij} - b_{ij}|$:

Հետևաբար,

$$V(\psi(G_h)) \leq \bigcup_{k=1}^{m(h)} V(\psi(C_k)),$$

ուստի

$$V(\psi(G_h)) \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{m(h)} |\det \psi'(x_k)| V(C_k): \quad (6.9)$$

Ցանցերի միջոցով ինտեգրալի սահմանման համաձայն, եթե $h \rightarrow 0$, (6.9)-ի աջ կողմի արտահայտությունը կճզուի $(1 + \varepsilon) \int_G |\det \psi'(x)| dx$ -ին:

Ցույց տամբ, որ $V(\psi(G_h)) \rightarrow V(\psi(G))$:

Նշանակենք G^h -ով h -ցանցի այն խորանարդերի միավորումը, որոնք G -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն՝

$$C_1, \dots, C_{m(h)}, C_{m(h)+1}, \dots, C_{p(h)}:$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} 0 &\leq V(\psi(G)) - V(\psi(G_h)) \leq V(\psi(G^h)) - V(\psi(G_h)) \leq \\ &\leq \sum_{k=m(h)+1}^{p(h)} V(\psi(C_k)) \leq \left[\max_{x \in K_{m+1}} \|\psi'(x)\| \right]^n \sum_{k=m(h)+1}^{p(h)} V(C_k), \end{aligned}$$

որովհետև եթե h -ը բավականաչափ փոքր է, ապա $C_k \subset K_{m+1}$:

Մյուս կողմից, (5. 9'), (5. 9)-ի համաձայն,

$$\sum_{k=m(h)+1}^{p(h)} V(C_k) = V(G^h) - V(G_h) \rightarrow 0, \text{ եթե } h \rightarrow 0:$$

Այժմ (6.9)-ում անցնելով սահմանի՝ կստանանք

$$V(\psi(G)) \leq (1 + \varepsilon) \int_G |\det \psi'(x)| dx$$

անհավասարությունը, որը ճշմարիտ է յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար: Հետևաբար, այն ճշմարիտ է $\varepsilon = 0$ դեպքում: Լեմման ապացուցված է: ■

4. Փոխուսականի փոխարինման թեորեմը:

Թեորեմ 6.1: Դիցուք D -ն R^n -ում բնկած բաց բազմություն է, $\psi : D \rightarrow R^n$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի, փոխմիարժեք արտապատկերում է և $\det \psi'(x) \neq 0$, $x \in D$: Այդ դեպքում, եթե D_x -ը D -ում բնկած J -չափելի փակ բազմություն է, $D_y = \psi(D_x)$ և $f \in \mathfrak{R}(D_y)$, ապա

$$a) f \circ \psi \in \mathfrak{R}(D_x),$$

$$p) \int_{D_y} f(y) dy = \int_{D_x} f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx :$$

► f ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը նշանակենք $B(f)$ -ով: Լերեզի թեորեմի համաձայն, $m(B(f)) = 0$: $f(\psi(x))$ ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունն ընկած է $\psi^{-1}(B(f))$ -ի մեջ: Քանի որ ψ^{-1} ֆունկցիան օժտված է նույն հատկություններով, ինչ որ ψ ֆունկցիան, ապա լեմմա 6.1-ի համաձայն, $m(\psi^{-1}(B(f))) = 0$: Լերեզի թեորեմի համաձայն, $f \circ \psi \in \mathfrak{R}(D_x)$: ա) ապացուցենք:

► p)-ն ապացուցենք նախ $f(y) \geq 0$, $y \in D_y$ դեպքում: Օգտվենք ինտեգրալի դասական սահմանումից. դիցուք C_1, \dots, C_m -ը D_y -ի տրոհում են: Այդ դեպքում $C'_i := \psi^{-1}(C_i)$, $1 \leq i \leq m$ բազմությունները J -չափելի են և կազմում են D_x -ի տրոհում: Նշանակենք՝ $m_i = \inf_{y \in C_i} f(y)$: Լեմմա 6.3-ի համաձայն՝

$$V(C_i) \leq \int_{C'_i} |\det \psi'(x)| dx, \quad 1 \leq i \leq m :$$

Այս անհավասարությունները բազմապատկելով համաստասխան m_i -երով և գումարելով ստացված անհավասարությունները՝ կստանանք

$$s := \sum_{i=1}^m m_i V(C_i) \leq \sum_{i=1}^m m_i \int_{C'_i} |\det \psi'(x)| dx \leq \int_{D_x} f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx, \quad (6.10)$$

որտեղ s -ը $\{C_i\}$ տրոհմանը համապատասխանող f -ի Դարբուի սոորին գումարն է: Քանի որ $s \xrightarrow[\lambda \rightarrow 0]{} \int_{D_y} f(y) dy$, ապա (6.10)-ում անցնելով սահմանի,

եթե $\lambda \rightarrow 0$, կստանանք՝

$$\int_{D_y} f(y) dy \leq \int_{D_x} f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx : \quad (6.11)$$

Հակառակ անհավասարությունն ապացուցելու համար (6.11)-ը գրենք $x = \psi^{-1}(y) : D_y \rightarrow D_x$ արտապատկերման և $g(x) := f(\psi(x)) |\det \psi'(x)|$ ֆունկցիայի համար՝

$$\begin{aligned} & \int_{D_x} f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \leq \\ & \leq \int_{D_y} f(\psi(\psi^{-1}(y))) |\det \psi'(\psi^{-1}(y))| |\det(\psi^{-1})'(y)| dy = \int_{D_y} f(y) dy : \end{aligned}$$

Այստեղ օգտվեցինք մատրիցների որոշիչների բազմապատկման կանոնից և հակադարձ ֆունկցիայի քերրեմից:

Այսպիսով, դրական f ֆունկցիայի համար f -ն ճիշտ է:

Ընդհանուր դեպքում նշանակենք՝

$$M = \sup_{y \in D_y} |f(y)|, \quad f_1(y) = M \quad \text{և} \quad f_2(y) = M - f(y) :$$

Այդ դեպքում $f(y) = f_1(y) - f_2(y)$: Քանի որ f_1 ու f_2 ֆունկցիաների համար f -ն ճիշտ է, հետևաբար, այն ճիշտ է նաև f -ի համար: ■

5. Գնդի ծավալը R^n -ում: Հաշվենք 0 կենտրոնով և R շառավղով $B_n(R)$ գնդի՝

$$B_n(R) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in R^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq R^2 \right\},$$

$V_n(R)$ ծավալը:

Ուսենք՝ $V_1(R) = 2R$: Որպեսզի համոզվենք, որ $B_n(R) \in J$, եթե $n \geq 2$, պետք է ցույց տանք, որ նրա եզրը՝ գնդային սփերան, 0-ծավալի է, այսինքն՝

$$x_n = \sqrt{R^2 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)},$$

$$x_n = -\sqrt{R^2 - (x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2)}$$

ֆունկցիաների գրաֆիկները 0-ծավալի են, որտեղ $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq R^2$:

Սա կարելի է ապացուցել մաթեմատիկական իմուլցիայի մեթոդով:
($n-1$)-ի համար պնդման ճշմարիտ լինելուց n -ի համար ճշմարիտ լինելու
հետևում է x_n ֆունկցիայի հավասարաչափ անընդհատությունից:
Մանրամասն դասողությունների կատարումը թողնում ենք ընթերցողին:

Այժմ հաշվենք $V_n(R)$ -ը: Ըստ սահմանման՝

$$V_n(R) = \int_{B_n(R)} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n :$$

Կատարելով $x = R\xi$, $x_i = R\xi_i$, $1 \leq i \leq n$ փոփոխականի գծային
փոխարինումը՝ կստանանք

$$V_n(R) = R^n \int_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \leq 1} d\xi_1 \cdots d\xi_n = R^n V_n(1): \quad (6.12)$$

$V_n(1)$ -ը հաշվելու համար կիրառենք Ֆուրիեի թեորեմը.

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 d\xi_n \int_{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = \\ &= \int_{-1}^1 d\xi_n V_{n-1}\left(\sqrt{1 - \xi_n^2}\right) = \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1 - \xi_n^2}\right)^{n-1} V_{n-1}(1) d\xi_n = \\ &= 2V_{n-1}(1) \int_0^1 \left(\sqrt{1 - \xi_n^2}\right)^{n-1} d\xi_n : \end{aligned}$$

Կատարելով $\xi_n = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ փոփոխականի փոխարինումը՝

կստանանք

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1) \int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi =: 2V_{n-1}(1) I_n :$$

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը և տեղադրելով
 $V_1(1) = 2$ արժեքը՝ կստանանք

$$V_n(1) = 2^n \mathcal{I}_2 \mathcal{I}_3 \dots \mathcal{I}_n :$$

Մյուս կողմից ունենք՝

$$\mathcal{I}_k = \begin{cases} \frac{(k-1)!!}{k!!}, & \text{եթե } k-\text{ն կենտ է} \\ \frac{(k-1)!!}{k!!} \frac{\pi}{2}, & \text{եթե } k-\text{ն զոյգ է} \end{cases} :$$

(6.12)-ի մեջ տեղադրելով $V_n(1)$ -ի և \mathcal{I}_k -երի արժեքները՝ կստանանք

$$V_n(R) = R^n 2^n \frac{1}{n!!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

բանաձևը (քննարկելով $n = 2m$ և $n = 2m + 1$ դեպքերը):

§7. ԲԱԶՈՒԱԿԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԲՆՏԵԳՐԱԼ

1. Դրական ֆունկցիայի անխսկական ինտեգրալ: Դիցուք D -ն R^m -ում ընկած բաց բազմություն է, որը կարող է լինել նաև n ՝ J -չափելի: Դիտարկենք $f : D \rightarrow [0, \infty)$ դրական ֆունկցիան, որը D -ի կոմպակտ ենթարազմությունների վրա ինտեգրելի է կամ, որ նույնն է՝ f -ի խզման կետերի բազմությունը 0 չափի \mathcal{L}^* և յուրաքանչյուր $K \subset D$ կոմպակտ բազմության համար գոյություն ունի M_K թիվ, այնպիսին, որ

$$f(x) \leq M_K, \quad x \in K :$$

Նշանակենք՝

$$\int_D f = \sup_{K \subset D} \int_K f, \quad K \in J : \tag{7.1}$$

* Հետևում է D -ի կոմպակտ սպառման գոյությունից:

Եթե նշարիտ վերին եզրը վերջավոր է, ապա (7.1) ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, հակառակ դեպքում՝ *տարամետ*: (7.1) ինտեգրալը կոչվում է f ֆունկցիայի *անիսկական ինտեգրալ*:

Այն մասնավոր դեպքում, եթե $D \in J$ և $f(x) \leq M$, եթե $x \in D$, f -ի անիսկական ինտեգրալը համընկնում է f -ի ինտեգրալին:

Իրոք, եթե նշանակենք անիսկական ինտեգրալը \mathcal{I}' -ով, իսկ ինտեգրալը՝ \mathcal{I} -ով, ապա \mathcal{I}' -ի սահմանումից հետևում է $\mathcal{I}' \leq \mathcal{I}$ անհավասարությունը: Հակառակ անհավասարությունը հետևում է

$$\mathcal{I} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{D_h} f \leq \mathcal{I}'$$

առնչությունից, որտեղ D_h -ը h -ցանցի այն խորանարդների միավորումն է, որոնք ընկած են D -ի մեջ:

Ընդհանուր դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 7.1: Եթե K_n -ը D բաց բազմության կոմպակտ J -չափելի սպառում է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f = \int_D f : \quad (7.2)$$

► Քանի որ $f \geq 0$ և $K_n \subset K_{n+1}$, ապա

$$\alpha_n := \int_{K_n} f \leq \int_D f \quad (7.3)$$

հաջորդականությունն աճող է, հետևաբար, α_n -ը ունի սահման (վերջավոր կամ անվերջ): Այդ սահմանը նշանակենք α -ով: Այդ դեպքում (7.3)-ից հետևում է, որ

$$\alpha \leq \int_D f :$$

Հակառակ անհավասարությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական $K \subset D$ կոմպակտ բազմություն: Քանի որ $\text{int } K_n$ բաց բազմությունները ծածկում են K -ն, հետևաբար, գոյություն ունի K -ի

Վերջավոր ենթածածկույթ: Որպես n_0 վերցնենք առաջացած ինդեքսներից մեծագույնը: Ակսած այդ n_0 համարից՝ $K \subset K_n$: Այդ դեպքում՝

$$\int_K f \leq \int_{K_n} f \leq \alpha :$$

Հետևաբար, $\sup_K \int_K f \leq \alpha$: ■

$\Re_+(D)$ -ով նշանակենք այն f -երի բազմությունը, որոնց ինտեգրալը բոլոր է:

Հետևանք: Եթե $f_1, f_2 \in \Re_+(D)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, ապա

$$\int_D (\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \int_D f_1 + \beta \int_D f_2 :$$

2. Նշանակող ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ:

Նշանակենք $\Re(D)$ -ով այն $f: D \rightarrow R$ ֆունկցիաների դասը, որոնք ինտեգրելի են D -ի կոմպակտ J -չափելի ենթաբազմությունների վրա և բավարարում են $|f| \in \Re_+(D)$ պայմանին:

Անիսկական ինտեգրալ կսահմանենք $\Re(D)$ դասի ֆունկցիաների համար: Նշանակենք՝

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases} = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \geq 0,$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases} = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} \geq 0 :$$

Այդ դեպքում $f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|$, $f^+(x) - f^-(x) = f(x)$: Քանի որ $|f| \in \Re_+(D)$, ապա $f^+, f^- \in \Re_+(D)$:

Այսուհետև նշանակենք՝

$$\int_D f = \int_D f^+ - \int_D f^- :$$

Թեորեմ 7.2: Եթե K_n -ը D քաց բազմության կոմպակտ J -չափելի սպառում է և $f \in \mathfrak{R}(D)$, ապա

$$\int_D f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f : \quad (7.4)$$

Այս թեորեմը անմիջապես հետևում է նախորդ թեորեմից: Որոշ հեղինակներ անհսկական իմտեգրալը սահմանում են (7.4) սահմանի միջոցով: Ապացուցենք, որ այդ սահմանումը համարժեք է մեր սահմանմանը:

Թեորեմ 7.3: Եթե D -ի յուրաքանչյուր $\{K_n\}$ կոմպակտ չափելի սպառման համար գոյություն ունի $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{K_n} f$ վերջավոր սահմանը, ապա

$$f \in \mathfrak{R}(D) :$$

► Ենթադրենք հակառակը՝ գոյություն ունի կոմպակտ բազմությունների $\{K_n\}$ հաջորդականություն, այնպիսին, որ

$$\int_{K_{n+1}} |f(x)| dx > 3 \int_{K_n} |f(x)| dx + 2n^* :$$

Նշանակենք՝ $F_n = K_{n+1} \setminus \text{int } K_n$: Այդ դեպքում՝

$$\int_{F_n} |f(x)| dx > 2 \int_{K_n} |f(x)| dx + 2n : \quad (7.5)$$

Այսու կողմից՝

$$\int_{F_n} |f| = \int_{F_n} f^+ + \int_{F_n} f^- :$$

Ենթադրենք՝

$$\int_{F_n} f^+ \geq \int_{F_n} f^- :$$

Այդ դեպքում $\int_{F_n} |f| \leq 2 \int_{F_n} f^+$ և (7.5)-ից հետևում է, որ

* Արան կարելի է հասնել՝ K_n -ը նոսրացնելով, այսինքն՝ վերցնելով ենթահաջորդականություն և նորից համարակալելով:

$$\int_{F_n} f^+ > \int_{K_n} |f| + n :$$

Այս անհավասարության մեջ ձախ կողմի ինտեգրալը փոխարինենք իր Դարրոի ստորին գումարով:

Դիցուք $C_1^{(n)}, \dots, C_{p_n(h)}^{(n)}$ -ը h -ցանցի այն փակ խորանարդներն են, որոնք ընդգրկված են $\text{int } F_n$ -ի մեջ: Այդ դեպքում, եթե h -ը բավականաշափ փոքր է, ապա

$$\sum_i m_i V(C_i^{(n)}) > \int_{K_n} |f| + n, \quad m_i = \inf_{C_i^{(n)}} f^+ :$$

F_n^* -ով նշանակենք այն $C_i^{(n)}$ -երի միավորումը, որոնց համապատասխան m_i -երը դրական են՝ $m_i > 0$: Այդ դեպքում՝

$$\int_{F_n^*} f > \int_{K_n} |f| + n :$$

Այս անհավասարությանը գումարելով

$$\int_{K_n} f \geq - \int_{K_n} |f|$$

անհավասարությունը՝ կստանանք

$$\int_{K_n^*} f > n \quad (\text{կամ } < -n),$$

որտեղ $K_n^* = K_n \cup F_n^*$: Քանի որ $\{K_n^*\}$ -ը և D -ի կոմպակտ սպառում է, ապա ստացվեց հակասություն: ■

3. Փոփոխականի փոխարինում:

Թեորեմ 7.4: Դիցուք

ա) D -ն և D' -ը R^m -ում ընկած բաց բազմություններ են, $\psi : D \leftrightarrow D'$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի, փոխարժեք արտապատկերում է և $\det \psi'(x) \neq 0$, $x \in D$,

բ) $f \in \mathfrak{R}(D')$:

Այդ դեպքում $f \circ \psi \cdot |\det \psi'| \in \mathfrak{R}(D)$ և

$$\int_{D'} f(y) dy = \int_D f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx : \quad (7.6)$$

► Դիցուք $\{K_n\}$ -ը D -ի կոնպակտ J – չափելի սպառում է: Այդ դեպքում $\{\psi(K_n)\}$ -ը կհանդիսանա D' -ի կոնպակտ չափելի սպառում: Թեորեմ 6.1-ի համաձայն՝

$$\int_{\psi(K_n)} f^\pm(y) dy = \int_{K_n} f^\pm(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx :$$

f^+ -ի և f^- -ի համար անցնելով սահմանի և ստացված հավասարություններն իրարից հանելով՝ կստանանք (7.6)-ը: ■

Այս թեորեմի եզրակացությունը կարելի է ձևակերպել այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Այս է. (7.6) ինտեգրալներից մեկի գուգամիտությունից հետևում է մյուսի գուգամիտությունը և նրանց հավասարությունը:

Եթե $D' \in J$, իսկ f -ը սահմանափակ է, այսինքն՝ եթե $\int_D f$ -ը գոյություն ունի սովորական* (ոչ անխսկական) իմաստով, հետևյալ թեորեմը էապես լրացնում է սովորական ինտեգրալներում փոփոխականի փոխարինման թեորեմը:

4. Սարդի թեորեմ:

Թեորեմ 7.5: Դիցուք D -ն R^n -ում ընկած բաց բազմություն է, $\psi : D \rightarrow R^n$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերում է և $E = \{x \in D : \det \psi'(x) = 0\}$: Այդ դեպքում $\psi(E)$ -ն 0 չափի է:

► Դիցուք $C \subset D$ բազմությունը փակ խորանարդ է, որի կողմի երկարությունը ℓ է՝

$$C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad b_i - a_i = \ell :$$

* Ինչպես արդեմ սպասուցել ենք, այդ դեպքում անխսկական ինտեգրալը համընկնում է սովորական ինտեգրալին:

$[a_i, b_i]$ հատվածները տրոհելով $\frac{\ell}{N}$ երկարությամբ հավասար հատվածների՝ կստանանք P կանոնական տրոհում, որի խորանարդների թիվը N^n է: Եթե C_j -ն այդ խորանարդներից որևէ մեկն է և $x \in C_j$, ապա կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար բավականաչափ մեծ N -ի դեպքում՝

$$|\psi'(x)(y-x) - (\psi(y) - \psi(x))| < \varepsilon \|y-x\| \leq \varepsilon \frac{\ell}{N}, \quad (7.7)$$

բոլոր $y \in C_j$ կետերի համար: Իրոք.

$$|\psi'(x)(y-x) - (\psi(y) - \psi(x))| \leq \sum_{i=1}^n |\psi'_i(x)(y-x) - (\psi_i(y) - \psi_i(x))|,$$

որտեղ $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ և մնում է կիրառել Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը:

Եթե $C_j \cap E \neq \emptyset$, ապա գոյություն ունի $x \in C_j \cap E$: Այդ դեպքում $\det \psi'(x) = 0$, հետևաբար, գոյություն ունի $V \subset R^n$ ($n-1$) չափանի ենթատարածություն, այնպիսին, որ $\{\psi'(x)(y-x) : y \in C_j\} \subset V$: Այդ դեպքում (7.7)-ի շնորհիվ $\psi(y) - \psi(x)$ կետը պատկանում է V ենթատարածության $\varepsilon \frac{\ell}{N}$ շրջակայթին կամ, որ նոյնն է՝ $\psi(y)$ կետը պատկանում է $\psi(x) + V$ (x -ը ֆիքսված է) հիպերհարթության $\varepsilon \frac{\ell}{N}$ շրջակայթին:

Մյուս կողմից, Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից հետևում է, որ գոյություն ունի M թվի, այնպիսին, որ

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leq M \|x - y\| \leq M \cdot \frac{\ell}{N}:$$

Այսպիսով, եթե $C_j \cap E \neq \emptyset$, ապա $\{\psi(y) : y \in C_j\}$ բազմությունը պարունակվում է մի գլանի մեջ, որի բարձրությունն է $2\varepsilon \frac{\ell}{N}$, իսկ հիմքը

($n - 1$) չափանի գունդ է, որի շառավիղն է՝ $M \cdot \frac{\ell}{N}$: Այդ գլանի ծավալն է՝

$L\left(\frac{\ell}{N}\right)^n \varepsilon$ (օրբողութեալ ձևափոխության միջոցով այդպիսի գլանի ծավալի հաշվումը կրերվի կոորդինատային գլանի դեպքին), որտեղ L -ը որևէ հաստատուն է: Սակայն խորանարդների թիվը $(C_j \cap E \neq \emptyset)$ չի գերազանցում N^n -ը, ուստի $\psi(C \cap E)$ -ն ընդգրկված է

$L\left(\frac{\ell}{N}\right)^n \varepsilon N^n = L\ell^n \varepsilon$ թվից փոքր կամ հավասար ծավալ ունեցող բազմության մեջ: Քանի որ դա ճիշտ է կամայական $\varepsilon > 0$ թվի համար, ուստի $\psi(C \cap E)$ -ն 0-չափի է:

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար վերցնենք D -ի որևէ կոմպակտ սպառում՝ $\{K_m\}$: Այդ դեպքում $D = \cup K_m$, հետևաբար, $E = \cup(K_m \cap E)$ և $\psi(E) = \cup\psi(K_m \cap E)$:

Քանի որ $K_m \cap E$ -ն կարելի է ծածկել h -ցանցի վերջավոր թվով խորանարդներով, որոնք ընդգրկված են K_{m+1} -ի և, հետևաբար նաև՝ D -ի մեջ, ուստի $m(\psi(K_m \cap E)) = 0$:

Սյուս կողմից, հաշվելի թվով 0-չափի բազմությունների միավորումը 0-չափի է, ուստի $m(\psi(E)) = 0$: ■

Ապացուցված թեորեմը մեզ թույլ է տալիս փոփոխականի փոխարինման թեորեմներում ազատվել $\det \psi'(x) \neq 0$ պայմանից:

Նշանակենք՝ $G = D \setminus E$: Այդ դեպքում G -ն բաց բազմություն է, որտեղ փոփոխականի փոխարինման թեորեմի բոլոր պայմանները բավարարվում են: Հետևաբար՝

$$\int_{G'} f(y) dy = \int_G f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx, \quad G' = \psi(G):$$

Ապացուցենք, որ այս ինտեգրալները համապատասխանաբար հավասար են (7.6)-ի ինտեգրալներին: Բավական է քննարկել $f \geq 0$ դեպքը:

Ազ կողմի ինտեգրալի համար ապացուցենք

$$\int_D f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \leq \int_G f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx$$

անհավասարությունը (հակառակ անհավասարությունն ակնհայտ է):

Դրա համար բավական է ապացուցել, որ

$$\int_K f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \leq \int_G f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \quad (7.8)$$

անհավասարությունը, որտեղ $K \subset D$ -ն J -չափելի կոմպակտ բազմություն է:

Դիտարկենք D -ի կոմպակտ չափելի սպառում՝ $\{K_m\}$: Գոյություն ունի m_0 թիվ, այնպիսին, որ $K \subset K_{m_0}$: Այդ դեպքում, եթե h -ը բավականաչափ փոքր է, h -ցանցի այն խորանարդները, որոնք K -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն, ընդգրկված են K_{m_0+1} -ի մեջ: Դիցուք $C_1, \dots, C_{p(h)}$ -ը այն խորանարդներն են, որոնք $K \cap E$ -ի հետ ընդհանուր կետ ունեն:

Նշանակենք՝ $F^h = \bigcup_{i=1}^{p(h)} C_i$: Այդ դեպքում

$$F^h \in J, F^h \subset K_{m_0+1}, K \setminus F^h \subset G:$$

Կանոնորի բերեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$h < \delta \Rightarrow |\det \psi'(x)| < \varepsilon, \quad x \in F^h \subset K_{m_0+1}: \quad (7.9)$$

Այդ դեպքում

$$\int_K f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \leq \int_{K \setminus F^h} + \int_{F^h} \leq \int_G + \int_{F^h} : \quad (7.10)$$

Սյուս կողմից՝ $f(\psi(x)) \leq M$, $x \in K_{m_0+1}$, հետևաբար, (7.9)-ից հետևում է, որ

$$\int_{F^h} f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \leq M \cdot \varepsilon \cdot V(K_{m_0+1}).$$

Այս գնահատականը տեղադրելով (7.10)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\int_K f(\psi(x)) |\det \psi'(x)| dx \leq \int_G + M V(K_{m_0+1}) \cdot \varepsilon :$$

Քանի որ ստացված գնահատականը ճիշտ է կամայական $\varepsilon > 0$ բվի համար, ապա այն ճիշտ է նաև $\varepsilon = 0$ դեպքում: Այսպիսով, (7.8)-ն ապացուցված է: Զախ կողմերի ինտեգրալների դեպքն ավելի հեշտ է և ընթերցողին առաջարկում ենք այդ դեպքը քննարկել ինքնուրույն:

§8. ՄԻԱՎՈՐԻ ՏՐՈՀՈՒՄԸ

1. Ուրիշունի ԽԵМՄԱՆ: Դիցուք՝ $f \in C(R^n)$: Նշանակենք՝
 $\text{supp } f = \{x \in R^n : f(x) \neq 0\}$,

որը կոչվում է f ֆունկցիայի կրիչ:

Ստորև $K \prec f$ սիմվոլը նշանակում է.

- ա) K -ն կոմպակտ է,
- բ) $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in R^n$,
- գ) $f(x) = 1$, $x \in K$,
- դ) $\text{supp } f \subset \text{K}$ կոմպակտ է,
- իսկ $f \prec V$ սիմվոլը նշանակում է.
- ա) V -ն բաց է,
- բ) $0 \leq f(x) \leq 1$, $x \in R^n$,
- գ) $\text{supp } f \subset V$,
- դ) $\text{supp } f \cap V = \emptyset$ կոմպակտ է:

Լեմմա 8.1 (Ուրիշունի): Եթե $K \subset R^n$ կոմպակտ բազմությունն ընկած է $V \subset R^n$ բաց բազմության մեջ, ապա գոյուրյուն ունի $f \in C^\infty(R^n)$ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$K \prec f \prec V :$$

Ապացույցի հիմքում լինելու համար է Կոշիի օրինակը: Մենք գիտենք, որ

$$h(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

ֆունկցիան անվերջ դիմերենցելի է: Հետևաբար, անվերջ դիմերենցելի է նաև

$$\varphi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(b-x)^2}}, & x \in (a,b) \\ 0, & x \notin (a,b) \end{cases}$$

ֆունկցիան: Նշանակենք՝

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\int_0^x \varphi_{(0,\varepsilon)}(t) dt}{\int_0^\varepsilon \varphi_{(0,\varepsilon)}(t) dt}, \quad \varepsilon > 0:$$

Այս ֆունկցիան ևս անվերջ դիմերենցելի է և $0 \leq g_\varepsilon(x) \leq 1$, ընդ որում,

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x \geq \varepsilon \end{cases}$$

Այսուհետև, կամայական $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ կետի համար նշանակենք՝

$$f_{(a,\varepsilon)}(x) = \varphi\left(\frac{x_1 - a_1}{\varepsilon}\right) \cdot \varphi\left(\frac{x_2 - a_2}{\varepsilon}\right) \cdots \varphi\left(\frac{x_n - a_n}{\varepsilon}\right), \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

որտեղ $\varphi = \varphi_{(-1,1)}$: Այդ դեպքում $f_{(a,\varepsilon)} \in C^\infty(R^n)$,

$$f_{(a,\varepsilon)}(x) > 0, \text{ եթե } x \in I(a, \varepsilon) := (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon),$$

իսկ մնացած կետերում $f_{(a,\varepsilon)}(x)$ -ը զրո է:

Այս նախապատրաստական աշխատանքից հետո անցնենք լեմմա 8.1-ի ապացույցին:

► Յուրաքանչյուր $t \in K$ կետի համար գոյություն ունի t կենտրոնով I_t բաց խորանարդ, այնպիսին, որ $\bar{I}_t \subset V$: Այդ դեպքում $K \subset \bigcup_t I_t$: Քանի որ K -ն կոնպակտ է, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ I_{t_1}, \dots, I_{t_p} :

Այդ խորանարդների համար վերևում կառուցված $f_{(a,\varepsilon)}$ ֆունկցիաները նշանակենք համապատասխանարար f_1, \dots, f_p -ով և $f_0 := f_1 + \dots + f_p$: Այդ

Դեպքում f_0 -ն անվերջ դիմերենցելի ֆունկցիա է, որը K -ի վրա ընդունում է դրական արժեքներ: Հետևաբար $\min_{x \in K} f_0(x) = \varepsilon > 0$:

Բացի դրանից՝

$$\text{supp } f_0 \subset \bigcup_{j=1}^p \bar{I}_j \subset V:$$

Հետևաբար, $f(x) = g_\varepsilon(f_0(x))$ ֆունկցիան բավարարում է լեմմայի պահանջներին: ■

2. Միավորի տրոհումը:

Թեորեմ 8.1: Եթե V_1, \dots, V_n -ը R^m -ում ընկած բաց բազմություններ են, $K \subset R^m$ բազմությունը կոմպակտ է և

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m V_i,$$

ապա գոյություն ունեն $h_i \prec V_i$ անվերջ դիմերենցելի ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$h_1(x) + \dots + h_n(x) = 1, \quad x \in K, \quad \sum h_i(x) \leq 1, \quad x \in R^m: \quad (8.1)$$

(8.1)-ին բավարարող ֆունկցիաների $\{h_1, \dots, h_n\}$ հավաքածուն կոչվում է $\{V_i\}$ ծածկույթին ենթարկված միավորի տրոհում K -ի վրա:

► Յուրաքանչյուր $x \in K$ կետի համար գոյություն ունի x կենտրոնով I_x բաց խորանարդ, այնպիսին, որ \bar{I} -ը ընկած է V_i -երից որևէ մեկի մեջ:

Այդ դեպքում՝ $K \subset \bigcup_x I_x$: Քանի որ K -ն կոմպակտ է, ապա գոյություն

ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ I_{x_1}, \dots, I_{x_p} , ընդ որում, $\bar{I}_{x_1}, \dots, \bar{I}_{x_p}$ փակ խորանարդներից յուրաքանչյուրն ընկած է V_i -երից զոնե մեկի մեջ: H_i -ով նշանակենք այն փակույթների միավորումը, որոնք ընկած են V_i -ի մեջ,

$i=1,2,\dots,n$: Այդ դեպքում H_i -ն կոմպակտ է և $H_i \subset V_i$, $i=1,2,\dots,n$: Ուրիշանի լեմմայի համաձայն, զոյտոթյուն ունեն g_i ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ

$$H_i \prec g_i \prec V_i, \quad i=1,2,\dots,n:$$

$$\text{Նշանակենք՝ } h_1 = g_1; \quad h_i = (1 - g_1) \cdots (1 - g_{i-1}) g_i, \quad 2 \leq i \leq n:$$

$$\text{Այդ դեպքում } h_i \prec V_i \text{ և}$$

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_i = 1 - (1 - g_1) \cdots (1 - g_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (8.2)$$

ինչը ստուգվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

Քանի որ $K \subset H_1 \cup \cdots \cup H_n$, ապա յուրաքանչյուր $x \in K$ կետում g_i ֆունկցիաներից գոնի մեկը ընդունում է 1 արժեքը, ուստի (8.2)-ը ցույց է տալիս, որ (8.1)-ը տեղի ունի: ■

Թեորեմ 8.2. Եթե $A \subset R^n$ բազմությունը ծածկված է $O = \{U\}$ բաց բազմությունների ընտանիքով, ապա զոյտոթյուն ունի $\Phi = \{\varphi\}$ անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների հաշվելի ընտանիք, այնպիսին, որ

1^o. Յուրաքանչյուր $\varphi \in \Phi$ ֆունկցիայի համար զոյտոթյուն ունի $U \in O$ բազմություն, այնպիսին, որ $\varphi \prec U$:

2^o. Յուրաքանչյուր $x \in A$ կետի համար զոյտոթյուն ունի x -ը պարունակող V_x բաց բազմություն և Φ -ի F վերջավոր ենթաբազմություն, այնպես, որ

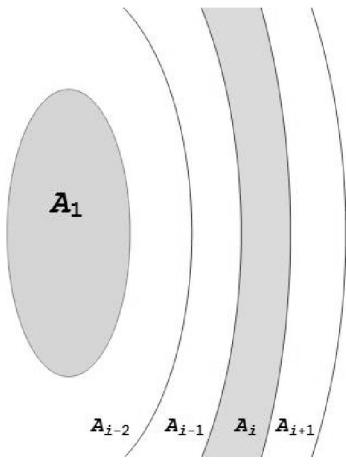
$$\left. \begin{array}{l} y \in V_x \\ \varphi \in \Phi \setminus F \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(y) = 0 :$$

$$3^o. \quad \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) = 1, \quad x \in A \quad \text{և} \quad \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \leq 1, \quad x \in R^n :$$

► Եթե A -ն կոմպակտ բազմություն է, այդ դեպքում թեորեմն ապացուցված է: Ընդհանուր դեպքում թեորեմն ապացուցենք երեք քայլով:

I քայլ: Ենթադրենք $A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, որտեղ յուրաքանչյուր A_i կոմպակտ է և

$$A_i \subset \text{int } A_{i+1}:$$



Նշանակենք՝
 $B_i = A_i \setminus \text{int } A_{i-1}$ ($A_0 = \emptyset$) և

$$O_i = \{U \cap (\text{int } A_{i+1} \setminus A_{i-2}) : U \in O\}, \quad i \geq 2,$$

$$O_1 = \{U \cap \text{int } A_2 : U \in O\}:$$

Այդ դեպքում B_i -ն կոմպակտ է, որը ծածկված է բաց բազմությունների O_i վերջավոր ընտանիքով: Այդ գույքի վրա կիրառենք թեորեմ 8.1-ը և առաջացած ֆունկցիաների ընտանիքը նշանակենք Φ_i -ով: Եվ վերջապես, նշանակենք՝
 $\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Phi_i :$

Այդ դեպքում 1^0 -ը և 2^0 -ը կրավարարվեն, որովհետև, եթե $x \in A_i$, ապա բոլոր Φ_j , $j \geq i+2$ ընտանիքների բոլոր ֆունկցիաներն այդ կետում ընդունում են 0 արժեքը:

$$3^0\text{-ն ապահովելու համար նշանակենք՝ } \sigma(x) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(x), \quad \text{որը}$$

յուրաքանչյուր x կետում վերջավոր գումար է, և յուրաքանչյուր $\varphi \in \Phi$ ֆունկցիայի համար նշանակենք՝

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{\sigma(x)} :$$

Այդ $\tilde{\varphi}$ ֆունկցիաների ընտանիքը կրավարարի նաև 3^0 պայմանին ($\tilde{\varphi}$ -ի անվերջ դիֆերենցիոնունը հետևում է 2^0 -ից):

II քայլ: Ենթադրենք, թե A -ն բաց բազմություն է: Այս դեպքում կղիտարվենք A -ի կոմպակտ սպառումը՝

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad K_i \subset \text{int } K_{i+1},$$

և հարցը կհաճգի նախորդ դեպքին:

III քայլ: Դիցուք A -ն կամայական բազմություն է: Այս դեպքում նշանակենք՝ $\tilde{A} = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$, որը բաց բազմություն է: \tilde{A} -ի համար կառուցված

միավորի տրոհումը (O ծածկույթին ենթարկված) կլինի միավորի տրոհում նաև A -ի համար: ■

3. Անիսկական ինտեգրալի սահմանումը միավորի տրոհման միջոցով:

Դիցուք D -ն R^m -ում ընկած բաց բազմություն է, որը կարող է լինել նաև ոչ չափելի, և $f \in \mathfrak{R}(D)$ անիսկական ինտեգրալի իմաստով: Այսինքն՝ f -ի խզման կետերի բազմությունը 0-չափի է և

$$\sup_{K \subset D} \int_K |f| < \infty,$$

որտեղ \sup -ը վերցվում է ըստ բոլոր J -չափելի կոմպակտ ենթարազմությունների:

Թեորեմ 8.3: Եթե $f \in \mathfrak{R}(D)$ և $\{\varphi\} = \Phi$ ընտանիքը միավորի տրոհում է D -ի վրա, ապա

$$\int_D f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_D \varphi f, \tag{8.3}$$

ընդ որում, (8.3) շարքը բացարձակ զուգամեն է:

► Քանի որ $\{\varphi\}$ -ն հաշվելի է, ապա այն կարող ենք համարակալել՝

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p, \dots$: Այդ դեպքում՝

$$\sum_{i=1}^p \left| \int_D \varphi_i f \right| \leq \int_D |f| \sum_{i=1}^p \varphi_i \leq \int_D |f|,$$

ինտևարար (8.3) շարքը բացարձակ զուգամեն է:

(8.3) հավասարությունն ապացուցելու համար վերցնենք D -ի կոմպակտ սպառում՝ $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$: Այդ դեպքում՝

$$\int_{K_n} f = \sum_{i=1}^{p_n} \int_D \varphi_i f , \quad (8.4)$$

որտեղ p_n -ը K_n -ի վրա 0-ից տարբեր արժեքներ ընդունող φ_i ֆունկցիաների ինդեքսներից մեծագույնն է: (8.4)-ում անցնելով սահմանի՝ թերեմ 7.2-ի շնորհիվ կստանանք (8.3)-ը: ■

XVIII ԳԼՈՒԽ

ԿՈՐԱԳԻԾ ԵՎ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ (Դասական մոտեցումը)

§1. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Պարամետրացված կոր և նրա կողմնորոշումը: Սինչ այժմ γ կոր ասելով՝ հասկանում էինք անընդհատ արտապատկերում՝ $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$: Այն կոչվում էր պարզ կոր, եթե բավարարվում էր

$$\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta \Rightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2) \quad (1.1)$$

պայմանը (VI, §3, 1 և VII, §3, 3): Այսուհետ նպատակահարմար է կորը դիտարկել նաև որպես երկրաչափական պատկեր կամ շարժվող կետի հետագիծ՝ ճանապարհ:

Սահմանում: $\Gamma \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է պարամետրացված պարզ կոր, եթե գոյություն ունի $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$ պարզ կոր, այնպիսին, որ $\gamma([\alpha, \beta]) = \Gamma$: Այդ դեպքում γ -ն կոչվում է Γ -ի պարամետրացում կամ պարամետրական մերկայացում:

Եթե Γ -ն պարամետրացված պարզ կոր է, որի համար γ -ն պարամետրացում է, իսկ $t = \varphi(\tau) \in C[\alpha_1, \beta_1]$ ֆունկցիան խիստ աճող կամ խիստ նվազող է, ու $\varphi([\alpha_1, \beta_1]) = [\alpha, \beta]$, ապա

$$\gamma_1(\tau) := \gamma(\varphi(\tau)), \quad \tau \in [\alpha_1, \beta_1], \quad (1.2)$$

ֆունկցիան նույնական է ։ Կարող ենք պարզեցնել ավելին. Եթե $\gamma_2 \in C([\alpha_2, \beta_2], R^n)$ ֆունկցիան Γ -ի պարամետրացում է, ապա այն ունի (1.2) տեսքը:

► Իրոք, քանի որ $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$ (VII, §5, 1 և 2), ապա, նշանակելով $\varphi(\tau) = \gamma^{-1}(\gamma_2(\tau))$, կոնկանակ՝ $\varphi \in C[\alpha_2, \beta_2]$, $\varphi([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha, \beta]$ և φ

արտապատկերումը փոխսմիարժեք է: Համոզվենք, որ φ ֆունկցիան խիստ մննուուն է: Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, թե $\varphi(\alpha_2) < \varphi(\beta_2)$ և ապացուցենք, որ φ ֆունկցիան խիստ աճող է: Նախ նկատենք, որ φ արտապատկերման փոխսմիարժեքությունից և Բոլցանո-Կոշիի II թեորեմից (III, թեորեմ 2.2) հետևում է, որ եթե $\alpha_2 < \tau < \beta_2$, ապա $\varphi(\alpha_2) < \varphi(\tau) < \varphi(\beta_2)$ (ապացուցվում է հակասող ենթադրության մեթոդով): Համգրւածորեն, եթե $\alpha_2 \leq \tau' < \tau'' \leq \beta_2$, ապա $\varphi(\tau') < \varphi(\tau'')$, այսինքն՝ φ ֆունկցիան խիստ աճող է: Մնում է արձանագրել, որ $\gamma(\varphi(\tau)) = \gamma(\gamma^{-1}(\gamma_2(\tau))) = \gamma_2(\tau)$: ■

Այսպիսով, եթե Γ -ն պարամետրացված պարզ կոր է, որի համար γ -ն որևէ պարամետրացում է, ապա (1.2) բանաձևի միջոցով ստացվում են Γ -ի բոլոր պարամետրացումները:

Γ -ն կոչվում է նաև γ վեկտոր - ֆունկցիայի կրիչ:

Հաճախ Γ -ն պատկերացվում է որպես $\gamma(t)$ շարժվող կետի հետագիծ (կամ՝ ճանապարհ) այն իմաստով, որ եթե t պարամետրը α կետից (աճելով) շարժվում է մինչև β կետը, ապա $\gamma(t)$ կետը $A := \gamma(\alpha)$ կետից Γ կորի երկայնքով շարժվում է մինչև $B := \gamma(\beta)$ կետը^{*}: Այս դեպքում A կետը կոչվում է γ կորի սկզբնակետ, իսկ B -ն՝ վերջնակետ:

A և B կետերը կոչվում են Γ կորի ծայրակետեր, կամ ասում են՝ Γ կորը միացնում է A և B կետերը: Սկզբնակետ և վերջնակետ տերմինները Γ կրիչի համար օգտագործել չի կարելի, քանզի եթե (1.2) ներկայացման մեջ φ ֆունկցիան խիստ նվազող է, ապա γ_1 -ի համար, որի կրիչը նոյն Γ -ն է, սկզբնակետը B -ն է, իսկ վերջնակետը՝ A -ն: Այդ հանգամանքը հաշվի առնելով՝ A սկզբնակետով և B վերջնակետով γ կորի (ֆունկցիայի) կրիչը կնշանակենք $\Gamma(\gamma)$ -ով կամ՝ $\Gamma(AB)$ -ով :

* Այդ երևույթի մարենատիկական իմաստը կայանում է նրանում, որ Γ կորի $\gamma(t)$ կետերը կարգավորվում են ըստ t պարամետրի:

$\Gamma(AB)$ -ն և $\Gamma(BA)$ -ն կոչվում են կողմնորոշված կորեր, կամ՝ Γ -ի կողմնորոշումներ:

Ընդհանուր դեպքում (եթե (1.1) պայմանը կարող է և խախտվել) $\gamma_1 \in C([\alpha_1, \beta_1], R^n)$ և $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$ արտապատկերումներն անվանում են համարժեք կորեր և նշանակում՝ $\gamma_1 \sim \gamma$, եթե գոյություն ունի $\varphi \in C[\alpha_1, \beta_1]$ խիստ աճող ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\varphi([\alpha_1, \beta_1]) = [\alpha, \beta]$ և

$$\gamma_1(\tau) = \gamma(\varphi(\tau)), \quad \tau \in [\alpha_1, \beta_1]:$$

Պարզ կորերի դեպքում $\gamma_1 \sim \gamma$ գրառումը նշանակում է, որ $\Gamma(\gamma_1)$ և $\Gamma(\gamma)$ ճանապարհները համընկնում են:

Եթե γ կորը դիտարկենք որպես շարժվող կետի հետագիծ (կամ՝ ճանապարհ), ապա համարժեք կորերը կունենան նույն հետագիծը՝ $\Gamma(\gamma_1) = \Gamma(\gamma)$: Այդուհանդեռձ, հաճախ γ արտապատկերումը և նրա հետագիծը նշանակում են նույն տառով:

2. Կորի բնական պարամետրացումը: Դիցուք $\Gamma(AB)$ -ն $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$ պարամետրացումով պարզ կողմնորոշված կոր է, ընդ որում γ -ն ուղղելի է և նրա երկարությունը S է*: Այդ դեպքում $\Gamma(AB)$ -ն կոչվում է ուղղելի և S -ը կոչվում է նրա երկարություն: Հայտնի է, որ (XIII, §1, 7)

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} V(\gamma):$$

Նշանակենք՝

$$s(t) = \int_{\alpha}^t V(\gamma), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (s(\alpha) = 0), \quad (1.3)$$

որը γ անընդհատ ֆունկցիայի վարիացիոն ֆունկցիան է: Հետևաբար, $s(t)$ ֆունկցիան աճող անընդհատ ֆունկցիա է (XIII, §1, 6): Բացի դրանից, (1.1)

* Նկատենք, որ այդ դեպքում (1.2) բանաձևով որոշվող $\gamma_1(\tau) = \gamma(\varphi(\tau))$ կորը նույնպես ուղղելի է և նրա երկարությունը նույն S -ն է (XIII, §1, 7):

պայմանից հետևում է, որ s -ը խիստ աճող է: Իբրև, հակառակ դեպքում գոյություն կունենան $t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ կետեր, այնպիսիք, որ $t_1 < t_2$ և

$$s(t_1) = s(t_2), \text{ որի արդյունքում կստանանք } \int_{t_1}^{t_2} V(\gamma) = 0: \text{ Հետևաբար, } \gamma$$

ֆունկցիան $[t_1, t_2]$ հատվածում կլինի հաստատուն, ինչը հակասում է (1.1)-ին:

Հակադարձ ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ թերուեմի համաձայն, $s(t)$ ֆունկցիան կունենա անընդհատ հակադարձ, որը կնշանակենք՝ $t = t(s) : [0, S] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$:

Ստացված $t(s)$ ֆունկցիան տեղադրելով (1.2)-ի մեջ՝ կստանանք $\Gamma(AB)$ -ի հետևյալ պարամետրացումը՝

$$r(s) := \gamma(t(s)), \quad 0 \leq s \leq S,$$

որը կոչվում է $\Gamma(AB)$ -ի կամ γ -ի բնական պարամետրացում: Բնական պարամետրացման մեջ պարամետրի դերը կատարում է կորի աղեղի երկարությունը:

Լրացում: Որպեսզի ոչ պարզ կորի դեպքում հնարավոր լինի անցնել կորի բնական պարամետրացմանը, պետք է լրացուի պահանջել, որ $s(t) = \int_{\alpha}^t V(\gamma)$ ֆունկցիան լինի խիստ աճող: Այսուհետ ենթադրում ենք, որ այդ պայմանը բավարարված է:

Եթե γ կորը ողորկ է, այսինքն՝ եթե $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է և $[\gamma'_1(t)]^2 + \dots + [\gamma'_n(t)]^2 > 0, t \in [\alpha, \beta]$, ապա (XIII, §1, 7)

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{[\gamma'_1(\tau)]^2 + \dots + [\gamma'_n(\tau)]^2} d\tau : \quad (1.3')$$

Ուստի $s'(t) = \sqrt{[\gamma'_1(t)]^2 + \dots + [\gamma'_n(t)]^2} > 0$: Այստեղից հետևում է, որ $s(t)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիան՝ $t(s)$ -ը, նույնպես անընդհատ դիֆերենցելի է: Հետևաբար, γ ողորկ կորի բնական պարամետրացումը՝

$$r(s) := \gamma(t(s)) = (\gamma_1(t(s)), \dots, \gamma_n(t(s))) =: (x_1(s), \dots, x_n(s)) \quad (1.4)$$

նույնական անընդհատ դիֆերենցելի է:

Բնական պարամետրացման դեպքում (1.3)' բանաձևը կը նշունի հետևյալ տեսքը՝

$$s = \int_0^s \sqrt{[x'_1(\tau)]^2 + \dots + [x'_n(\tau)]^2} d\tau, \quad s \in [0, S]:$$

Հետևաբար,

$$[x'_1(s)]^2 + \dots + [x'_n(s)]^2 = 1, \quad s \in [0, S]: \quad (1.5)$$

Պարզենք $r'(s)$ վեկտորի երկրաչափական իմաստը ($n = 2, 3$ դեպքերում): Դիտարկենք $n = 2$ դեպքը և γ կորի բնական պարամետրացմար նշանակենք՝ $r(s) = (x(s), y(s))$, $0 \leq s \leq S$: Դիցուք՝ $0 \leq s_0 < S$, $\Delta s > 0$: Դիտարկենք

$$r(s_0 + \Delta s) - r(s_0) = (x(s_0 + \Delta s) - x(s_0), y(s_0 + \Delta s) - y(s_0))$$

վեկտորը: Այն համուղղված է $\Gamma(AB)$ կորին պատկանող $M_0 = r(s_0)$ և $M = r(s_0 + \Delta s)$ կետերը միացնող $M_0 M$ վեկտորին (կորի հատողին): Քանի որ $\Delta s > 0$, ապա

$$\frac{r(s_0 + \Delta s) - r(s_0)}{\Delta s} = \left(\frac{x(s_0 + \Delta s) - x(s_0)}{\Delta s}, \frac{y(s_0 + \Delta s) - y(s_0)}{\Delta s} \right)$$

վեկտորը համուղղված է $M_0 M$ վեկտորին: Անցնելով սահմանի, եթե $\Delta s \rightarrow 0$, կորդինատային զուգամիտության քերեմի համաձայն կստանանք՝

$$r'(s_0) = (x'(s_0), y'(s_0)):$$

Հետևաբար, (1.5) պայմանը նշանակում է, որ $|r'(s_0)| = 1$: Քանի որ $M_0 M$ վեկտորի սահմանային դիրքը շոշափողն է M_0 կետում, ուստի $r'(s_0)$ միավոր վեկտորը ցույց է տալիս ուղղորդված շոշափողի ուղրությունը, որն անվանում են շոշափողի դրական ուղղություն ($\Gamma(BA)$ -ի

դեպքում կստացվի հակառակ ուղղությունը): Եթե $r(s) = (x(s), y(s))$ միավոր վեկտորի կազմած անկյունները կորորդինատական առանցքների դրական ուղղությունների հետ նշանակենք համապատասխանաբար α -ով և β -ով, ապա

$$x'(s_0) = \cos \alpha, \quad y'(s_0) = \cos \beta : \quad (1.5)$$

3. Առաջին սեռի կորագիծ ինտեգրալ: Դիցուք $\Gamma(AB)$ -ն $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$ պարամետրացումով կողմնորոշված, ուղղելի կոր է և տրված է $f : \Gamma \rightarrow R$ ($\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$) թվային ֆունկցիան:

Վերցնենք $[\alpha, \beta]$ հատվածի կամայական P տրոհում՝

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}, \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta :$$

Նշանակենք՝ $s_i = s(t_i)$ (տե՛ս (1.3)-ը), $\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$: Այնուհետև կերցնենք կամայական կետեր՝ $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq m-1$, նշանակենք՝ $\gamma(\tau_i) = M_i$ և կազմենք հետևյալ ինտեգրալային գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} f(M_i) \Delta s_i : \quad (1.6)$$

Սահմանում: Դիցուք՝ $\lambda = \max_i (t_{i+1} - t_i)$: Եթե $q_{\eta_j} p_{\eta_j}$ ունի*

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I \quad (1.7)$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն կոչվում է f ֆունկցիայի առաջին սեռի (կամ առաջին տիպի) կորագիծ ինտեգրալ՝ տարածված $\Gamma(AB)$ (կամ՝ γ) կորով և նշանակվում է՝

$$I = \int_{\gamma} f(M) ds = \int_{\Gamma(AB)} f(M) ds : \quad (1.8)$$

(1.7)-ը հասկացվում է հետևյալ կերպ. յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ քիլի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

* $\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \mu \rightarrow 0$, $\mu = \max \Delta s_i$:

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon ,$$

անկախ τ_i կետերի ընտրությունից: (1.8) նշանակումներից երկրորդի մեջ պարզ կորերի դեպքում $\Gamma(AB)$ -ի փոխարեն հաճախ գրում են (AB) կամ AB : Այդ դեպքում Δs_i -ն՝ $A_i A_{i+1}$ աղեղի երկարությունը, կախված չէ $\Gamma(AB)$ -ի γ պարամետրացումից: Ուստի (1.8) ինտեգրալի թե՛ գոյությունը և թե՛ նրա արժեքը կախված չեն $\Gamma(AB)$ -ի γ պարամետրացումից: Կարող ենք պնդել ավելին՝

$$\int\limits_{AB} f(M)ds = \int\limits_{BA} f(M)ds , \quad (1.9)$$

այսինքն, կորի ուղղությունը փոխելիս՝ ինտեգրալը չի փոխվում: Այդ պատճառով (1.8) նշանակման մեջ $\Gamma(AB)$ -ի փոխարեն կարելի է գրել Γ :

Ընդհանուր դեպքում (եթե կորը կարող է լինել նաև ոչ պարզ) (1.9)-ը գրում են հետևյալ տեսքով՝

$$\int\limits_{\gamma} f(M)ds = \int\limits_{\gamma^-} f(M)ds , \quad (1.9')$$

որտեղ γ^- -ը γ կորն է՝ հակառակ ուղղությամբ, այսինքն՝

$$\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t), \quad t \in [\alpha, \beta]:$$

Այս հավասարմաք որոշվող կորը կարելի է անվանել նաև γ կորի հակադիր կոր:

Թեորեմ 1.1: Եթե Γ -ն ուղղելի է, γ -ն նրա պարամետրացում է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int\limits_{\gamma} f(M)ds = \int\limits_0^S f(r(s))ds , \quad (1.10)$$

որտեղ $r(s)$ -ը Γ -ի բնական պարամետրացումն է:

► Քանի որ $M_i = \gamma(\tau_i)$, $t_i \leq \tau_i \leq t_{i+1}$, ապա, $t = t(s)$ ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, գոյություն ունի $\bar{s}_i \in [s_i, s_{i+1}]$ կետ, այնպիսին,

$$\text{որ } \tau_i = t(\bar{s}_i) : \text{ Հետևաբար } M_i = \gamma(t(\bar{s}_i)) = r(\bar{s}_i) : \text{ Այսինքն՝} \quad (1.6)$$

ինտեգրալային գումարը կարելի է ներկայացնել

$$\sigma = \sum_{i=0}^{m-1} f(r(\bar{s}_i)) \Delta s_i$$

տեսքով, որը $\int_0^S f(r(s)) ds$ Ոխմանի ինտեգրալի ինտեգրալային գումարն է,

ընդ որում, $f(r(s)) \in C[0, S]$: Հետևաբար, (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և տեղի ունի (1.10) հավասարությունը: ■

Թեորեմ 1.2: Եթե Γ -ն ուղղելի է, γ -ն նրա պարամետրացում է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int_{\gamma} f(M) ds = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) ds(t) : \quad (1.11)$$

► Քանի որ (1.11) հավասարության աջ և ձախ կողմերում գրված ինտեգրաների ինտեգրալային գումարները համընկնում են, և աջ կողմի Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյություն ունի (XIII, §2, 4), ապա գոյություն ունի նաև (1.11)-ի ձախ կողմի կորագիծ ինտեգրալը և տեղի ունի պահանջվող հավասարությունը: ■

Թեորեմ 1.3: Եթե Γ -ն ողորկ է, γ -ն նրա պարամետրացում է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.8) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int_{\gamma} f(M) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \sqrt{[\gamma'_1(t)]^2 + \dots + [\gamma'_n(t)]^2} dt : \quad (1.12)$$

► Քանի որ γ կորը ողորկ է, ապա (1.3)' բանաձևի համաձայն՝

$$s(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{[\gamma'_1(\tau)]^2 + \dots + [\gamma'_n(\tau)]^2} d\tau, \quad t \in [\alpha, \beta] :$$

(1.10) հավասարության աջ կողմի ինտեգրալում կատարելով $s = s(t)$

փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք (1.12)-ը: ■

Մասնավոր դեպք: Եթե $n=2$ և γ պարամետրացումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $\gamma(x) = (x, y(x))$, $x \in [a, b]$, լնդ որում, $y' \in C[a, b]$, ապա (1.12)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx : \quad (1.12')$$

4. Երկրորդ սեռի կորագիծ իմտեզուալ: Դիցուք՝ $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ կորն ուղեկի է* և $f : \Gamma \rightarrow R$ ($\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$):

Վերցնենք $[\alpha, \beta]$ հատվածի կամայական P տրհում՝

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}, \quad \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta :$$

Նշանակենք՝ $\Delta x_i^j = \gamma_j(t_{i+1}) - \gamma_j(t_i)$, $0 \leq i \leq m-1$; $1 \leq j \leq n$ և կազմենք հետևյալ իմտեզորակային գումարը՝

$$\sigma_j = \sum_{i=0}^{m-1} f(M_i) \Delta x_i^j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (1.13)$$

որտեղ $M_i = \gamma(\tau_i)$, $\tau_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq m-1$:

Սահմանում: Դիցուք՝ $\lambda = \max_i (t_{i+1} - t_i)$: Եթե զոյտրյուն ունի

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_j = I_j$$

վերջավոր սահմանը, ապա այն աճվանում են γ կորով տարածված f ֆունկցիայի երկրորդ սեռի կորագիծ իմտեզուալ (ըստ j -րդ կոռորդիմատի) և նշանակում՝

$$I_j = \int_{\gamma} f(x) dx^j = \int_{\gamma} f(x^1, \dots, x^n) dx^j = \int_{\Gamma(AB)} f(x) dx^j : \quad (1.14)$$

(1.14) նշանակումներից վերջինում պարզ կորերի դեպքում $\Gamma(AB)$ -ի վոլյուստն հաճախ գրում են (AB) կամ AB , որտեղ $A = \gamma(\alpha)$, $B = \gamma(\beta)$:

* Այսինքն՝ γ_j կոռորդիմատային ֆունկցիաները վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ են (XIII, §1, 7):

Թեորեմ 1.4: Եթե γ -ն ուղղելի է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.14) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int_{\gamma} f(x^1, \dots, x^n) dx^j = (S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) d\gamma_j(t): \quad (1.15)$$

► Քանի որ (1.13) ինտեգրալային գումարը նաև (1.15) հավասարության աջ կողմի Ստիլտեսի ինտեգրալի ինտեգրալային գումարն է, իսկ այդ Ստիլտեսի ինտեգրալը գոյություն ունի (XIII, §2, 4), ապա գոյություն ունի նաև (1.14) կորագիծ ինտեգրալը և տեղի ունի (1.15) հավասարությունը: ■

Թեորեմ 1.5: Եթե γ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի է և $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.14) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int_{\gamma} f(x^1, \dots, x^n) dx^j = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \gamma'_j(t) dt : \quad (1.16)$$

► Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(\alpha) + \int_{\alpha}^t \gamma'_j(t) dt, \quad t \in [\alpha, \beta]:$$

Ստիլտեսի ինտեգրալը Ռիմանի ինտեգրալով ներկայացնելու բանաձևի համաձայն (XIII, §2, 5)`

$$(S) \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) d\gamma_j(t) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt : \quad (1.17)$$

Ստիլտեսի ինտեգրալի (1.17) արժեքը տեղադրելով (1.15)-ի մեջ՝ կստանանք (1.16)-ը: ■

Մասնավոր դեպ: “Դիցուք՝ $n=2$ և γ պարամետրացումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $\gamma(x) = (x, y(x))$, $x \in [a, b]$, որտեղ $y \in C[a, b]$: Այդ դեպքում, եթե $f \in C(\Gamma)$, ապա (1.14) կորագիծ ինտեգրալը գոյություն ունի և

$$\int_{\gamma} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx : \quad (1.16')$$

Հատկանշական է, որ կորի ուղղությունը փոխելիս երկրորդ սեռի ինտեգրալի նշանը փոխվում է՝

$$\int_{\gamma^-} f(x^1, \dots, x^n) dx^j = - \int_{\gamma} f(x^1, \dots, x^n) dx^j : \quad (1.18)$$

Դա հետևում է ինտեգրալային գումարների կառուցվածքից:

Առաջիկայում մենք կօգտվենք նաև հետևյալ նշանակումից՝

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy := \int_{\gamma} P dx + \int_{\gamma} Q dy :$$

$P dx + Q dy$ տեսքի արտահայտությունը կրչվում է $\eta \mathfrak{H} \mathfrak{F} \mathfrak{E} \mathfrak{R} \mathfrak{E} \mathfrak{M} \mathfrak{G} \mathfrak{H} \mathfrak{A} \mathfrak{L}$ ձև^{*}:

Ողորկ կորի դեպքում, հաշվի առնելով (1.5'), (1.10) և (1.16) բանաձևերը, կստանանք առաջին և երկրորդ սեռի ինտեգրալների կապը՝

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\gamma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds , \quad (1.19)$$

որտեղ α, β -ն $r'(s)$ միավոր վեկտորի ($շոշափողի$ դրական ուղղության) և կոորդինատական առանցքների դրական ուղղությունների կազմած անկյուններն են:

Նշենք, որ (1.19) բանաձևը ճիշտ է նաև կտոր առ կտոր ողորկ կորերի համար: Դա ապացուցելու համար (1.19) բանաձևը կգրենք ողորկ կտորների համար և, արդյունքները գումարելով, կստանանք (1.19)-ը:

5. Գորսայի լեմմա: Դիցուք տրված են $D \subset R^2$ տիրույթը, $\gamma \in C([\alpha, \beta], D)$ ուղղելի կորը և $P, Q \in C(D)$ ֆունկցիաները: Վերցնենք $[\alpha, \beta]$ հատվածի որևէ տրհեռմ՝ $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, նշանակենք՝ $A_i = \gamma(t_i)$ և դիտարկենք $L = A_0 A_1 \dots A_n$ քելյալը:

Թեորեմ 1.6:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_L P dx + Q dy = \int_{\gamma} P dx + Q dy , \quad (1.20)$$

որտեղ $\mu = \max \Delta s_i$, իսկ Δs_i -ն՝ A_i, A_{i+1} կետերը միացնող կորի աղեղի երկարությունն է:

* Դիֆերենցիալ ձևերի տեսությունը տես'ս հաջորդ գլխում:

► Քանի որ $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ -ն կոմպակտ բազմություն է և $\Gamma \subset D$, ապա բաց բազմության կոմպակտ սպառման վերաբերյալ թեորեմի համաձայն (XVII, §5, 6)` գոյություն ունի $D_1 \subset D$ բաց սահմանափակ տիրույթ, այնպիսին, որ $\Gamma \subset D_1$, $\bar{D}_1 \subset D$: Նշանակենք՝ $d = dist(\Gamma, D_1^c) > 0$: Եթե $\mu < d$, ապա $L \subset D_1$:

(1.20)-ը ապացուցենք Pdx գումարելու համար: Գնահատենք ինտեգրալների տարրերությունը`

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} Pdx - \int_L Pdx \right| &\leq \left| \int_{\gamma} Pdx - \sum_{i=0}^{n-1} P(A_i) \Delta x_i \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} P(A_i) \Delta x_i - \int_L Pdx \right| = \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{A_i A_{i+1}} [P(x, y) - P(A_i)] dx \right| + \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[A_i A_{i+1}]} [P(A_i) - P(x, y)] dx \right|, \end{aligned} \quad (1.21)$$

որտեղ $A_i A_{i+1}$ -ը γ արտապատկերումն է $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածում, իսկ $[A_i, A_{i+1}]$ -ը A_i, A_{i+1} կետերը միացնող հատվածն է:

Քանի որ P ֆունկիան անընդհատ է \bar{D}_1 վակ և սահմանափակ տիրույթում, ապա Կանտորի թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\mu < \delta \Rightarrow |P(A_i) - P(x, y)| < \varepsilon :$$

Այդ դեպքում (1.21)-ից հետևում է*, որ $\left| \int_{\gamma} Pdx - \int_L Pdx \right| < 2\varepsilon S$, որտեղ

S -ը γ կորի երկարությունն է: ■

* Կորագիծ ինտեգրալը (1.15) բանաձևի միջոցով բերում ենք Ստիլտեսի ինտեգրալ և օգտվում Ստիլտեսի ինտեգրալ գնահատականից (XIII, §2, 6):

§2. ԳՐԻՆԻ ԲԱՆԱԶԵՎԸ

1. Փակ կորով տարածված ինտեգրալ: Հիշեցնենք, որ $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^n)$

կորը կամ նրա $\Gamma = \gamma([\alpha, \beta])$ կրիչը կոչվում է փակ կոր, եթե $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$:

Փակ կորը կոչվում է պարզ կոր, եթե γ արտապատկերումը $(\alpha, \beta]$ միջակայքում փոխմիարժեք է:

Փակ կորերով տարածված ինտեգրալներն ուսումնասիրելիս կարենք դեռ է խաղում *ժորդանի թեորեմը*. Եթե Γ -ն պարզ, փակ կոր է R^2 -ում, ապա՝

a) $R^2 \setminus \Gamma$ բաց բազմությունը բաղկացած է կապակցվածության երկու կոմպոնենտներից, որոնցից մեկը սահմանափակ է և կոչվում է Γ կորով սահմանափակված տիրույթ կամ՝ Γ -ի մերքին տիրույթ, իսկ մյուսն անսահմանափակ է և կոչվում է Γ -ի արտաքին տիրույթ,

b) Այդ կոմպոնենտներից յուրաքանչյուրի եզրը Γ -ն է:

$G \subset R^2$ տիրույթը կոչվում է միակապ, եթե ցանկացած $\Gamma \subset G$ պարզ փակ կորի մերքին տիրույթն ընկած է G -ի մեջ:

Սահմանենք Γ պարզ փակ կորի շրջանաձև ուղղություն կամ *կողմնորոշում* (անկախ նրա γ պարամետրացումից): Այստեղ մենք սահմանումք կտանք նկարագրական լեզվով, իսկ ճշգրիտ սահմանումք կտրվի հաջորդ գիշում:

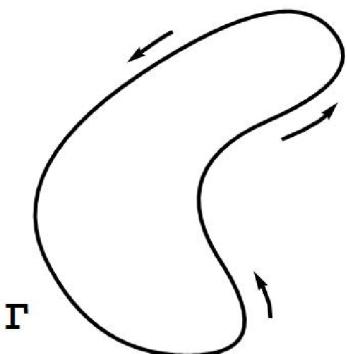
Ենթադրենք xy -ը հարթության վրա ուղղանկյուն դեկարտյան աջ համակարգ է, այսինքն՝ x -երի դրական կիսաառանցքը կոորդինատների սկզբնակետի շուրջը 90° անկյունով ժամացույցի ալարի պատռման ուղղությանը հակառակ ուղղությամբ պատելիս՝ համընկնում է y -ների դրական կիսաառանցքի հետ:

Դիտարկենք $O=(0,0)$ կենտրոնով և r շառավղով Γ շրջանագծի պարամետրացումը՝ $\gamma(t)=(r \cos t, r \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$: Եթե t -ն փոփոխվում է 0 -ից մինչև 2π , այդ դեպքում նրա պատկերը $\gamma(t)$ կետը Γ

շրջանագծի վրա կատարում է մեկ լրիվ պտույտ՝ պտտվելով ժամացույցի սլաքի պտտման ուղղությանը հակառակ ուղղությամբ: Այս դեպքում կասենք, որ $\gamma(t)$ կետը Γ շրջանագիծը շրջանցում է ժամանակաշրջանում, կամ՝ $\gamma(t)$ կետը Γ շրջանագիծը շրջանցում է դրական ուղղությամբ: Հակառակ ուղղությամբ շրջանցումը կանվանենք բացասական (կամ բացասական ուղղությամբ) շրջանցում:

Շրջանագծի վրայով պտտվող կետը համարելով դիտորդ՝ այս սահմանումը (նորից նկարագրական լեզվով) կարենի է տալ նաև հետևյալ կերպ. դիտորդը շրջանագծի վրայով դրական ուղղությամբ պտտվելիս՝ (շրջանագիծը դրական ուղղությամբ շրջանցելիս) շրջանագծով սահմանափակված տիրույթը (շրջանը) մնում է դիտորդի ձախ կողմում: Այս երկրորդ սահմանումը տարածվում է ցանկացած Γ կտոր առ կտոր ողորկ, պարզ,

փակ կորի վրա: Այսպիսի կորը կանվանենք **կոնտուր**:



Այսպիսով, Γ կոնտուրն ունի շրջանցման երկու ուղղություն՝ դրական ուղղությամբ շրջանցում, որի դեպքում Γ -ով սահմանափակված տիրույթի՝ դիտորդին բավականաչափ մնու կետերը մնում են նրա ձախ կողմում, և շրջանցման հակառակ ուղղությունը, որը կանվանենք բացասական ուղղությամբ շրջանցում:

Քանի որ կորի ուղղությունը փոխենիս երկրորդ սեռի ինտեգրալի նշանը փոխվում է (տե՛ս (1.18))-ը, ապա Γ կոնտուրի դրական ուղղությամբ տարածված ինտեգրալը կնշանակենք $\int_{\Gamma} \text{կամ } \int_{\Gamma^+}$ սիմվոլներով, իսկ բացասական ուղղությամբ տարածված ինտեգրալը՝ $-\int_{\Gamma} \text{կամ } \int_{\Gamma^-}$:

2. Գրինի բանաձևը:

Թեորեմ 2.1: Դիցուք $\Gamma \subset R^2$ կոնտուրի ներքին տիրույթը D -ն է: Այդ դեպքում D -ն բառակուսելի է և, եթե P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ

դիֆերենցելի են* \bar{D} փակ տիրույթը պարունակող G քաց քազմության վրա, ապա

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy : \quad (2.1)$$

► (2.1) բանաձևն ապացուցելու համար բավական է համոզվել, որ

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \int_{\Gamma} P dx , \quad (2.1')$$

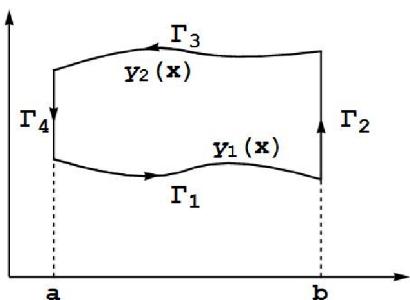
$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\Gamma} Q dy : \quad (2.1'')$$

Ապացուցենք (2.1')-ը, մյուսը կապացուցվի նույն կերպ:

Նախ դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ D -ն կորագիծ սեղան է, որը սահմանափակված է $x=a$, $x=b$ ($a < b$) ուղիղներով և $y_1(x) < y_2(x)$, $x \in [a, b]$ անընդհատ կորերով:

Այդ դեպքում կրկնակի ինտեգրալի հաշվման բանաձևի (XVII, §5, 3) համաձայն՝

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx , \quad (2.2)$$



որտեղ վերջին հավասարությունը հետևում է Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից:

Այժմ D կորագիծ սեղանի Γ եզրագիծը տրուենք Γ_i , $1 \leq i \leq 4$ չորս կողմնորոշված կտորների, ինչպես ցույց է տրված գծագրի վրա:

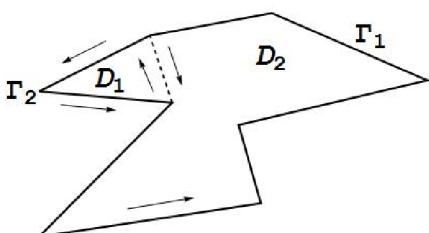
* Բավական է, որ անընդհատ լինեն (2.1) բանաձևի մեջ մասնակցող ֆունկցիաները:

Այդ դեպքում կորագիծ ինտեգրալի հաշվման (1.16') բանաձևի համաձայն, (2.2)-ից կստանանք՝

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \int_{\Gamma_3} P(x, y) dx - \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx : \quad (2.3)$$

Բացի դրանից՝ $\int_{\Gamma_i} P(x, y) dx = 0$, $i = 2, 4$: Հաշվի առնելով այն, որ Γ կորու տարածված ինտեգրալը հավասար է նրա՝ Γ_i , $1 \leq i \leq 4$ մասերով տարածված ինտեգրալների գումարին, (2.3)-ից կստանանք (2.1')-ը:

Ընդհանուր դեպքում (2.1')-ը ապացուցելու համար կօգտվենք Գ-ուրսայի լեմմայից: Նախ համոզվենք, որ (2.1')-ը ճիշտ է, եթե Γ -ն պարզ, փակ բեկյալ է՝ $\Gamma = A_0 A_1 \dots A_n$, $A_0 = A_n$: $n = 3$ դեպքում ստացվում է եռանկյուն, որն իրենից ներկայացնում է կորագիծ սեղան, հետևաբար այս դեպքում (2.1')-ը ճիշտ է:



$n > 3$ դեպքում կիրառենք մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Ներկայացնելով $D = D_1 \cup D_2$ տեսքով (տե՛ս գծագիրը), կունենանք՝

$$\iint_D P dx = \iint_{D_1} P dx + \iint_{D_2} P dx = - \int_{\Gamma_1} P dx - \int_{\Gamma_2} P dx = - \int_{\Gamma} P dx :$$

Կամայական Γ կոնտուրի դեպքում (2.1')-ն ապացուցելու համար Γ -ին ներգծենք $L_n = A_0 A_1 \dots A_n$, $A_0 = A_n$ բեկյալ*, որով սահմանափակված տիրույթը կնշանակենք D_n -ով: Այդ դեպքում

$$\iint_{D_n} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = - \int_{L_n} P dx :$$

* Պարզության համար ենթադրենք, որ L_n -ը պարզ, փակ բեկյալ է:

Գուրասայի լեմմայի համաձայն՝

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int_{L_n} P dx = \int_{\Gamma} P dx, \quad \mu = \max \Delta s_i :$$

Հետևաբար, մեզ մնում է ապացուցել, որ

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \iint_{D_n} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy, \quad \mu = \max \Delta s_i : \quad (2.4)$$

Նախ, օգտվելով G քաց քազմության կոմպակտ սպառումից, ընտրենք $K \subset G$ կոմպակտ քազմություն այնպես, որ $\bar{D} \subset \text{int } K$:

Այնուհետև վերցնենք կամայական $\varepsilon > 0$ թիվ և կառուցենք C քաց քազմություն, այնպիսին, որ քավարարվեն հետևյալ պայմանները՝

$$\text{ա) } \Gamma \subset C, \quad \text{բ) } C \subset K, \quad \text{զ) } V(C) < \varepsilon : \quad (2.5)$$

Γ -ի երկարությունը նշանակենք S -ով, $\text{int } K$ -ն՝ G_1 -ով, իսկ m բնական թիվն ընտրենք այնպես, որ

$$\frac{S}{m} < \text{dist}(\Gamma, G_1^c) \text{ և } \frac{\pi S^2}{m} < \varepsilon :$$

Այնուհետև $M_i \in \Gamma, \quad 0 \leq i \leq m-1$ կետերն ընտրենք այնպես, որ $M_i M_{i+1}$ աղեղի երկարությունը լինի^{*} $\frac{S}{m}$: Այդ դեպքում $C = \bigcup_{i=0}^{m-1} B\left(M_i, \frac{S}{m}\right)$ քաց քազմությունը կընդգրկի Γ -ն, $\bar{C} \subset G_1$ և $V(C) \leq m\pi\left(\frac{S}{m}\right)^2 = \frac{\pi S^2}{m} < \varepsilon :$

(2.5)-ից հետևում է, որ D -ի եզրը 0 -մակերեսի է, հետևաբար, D -ն քառակուսի է:

$$\text{Այժմ ապացուցենք (2.4)-ը: Նշանակենք } E = D \setminus C, \quad f = \frac{\partial P}{\partial y} :$$

* Այսպիսի կետերի գոյությունը կարելի է ապացուցել՝ օգտվելով կորի բնական պարամետրացումից:

Եթե $\mu < \delta := dist(\Gamma, C^C)$, ապա $L_n \subset C$, ուստի $E \subset D_n$ և $D_n \setminus E \subset C$:

Այդ դեպքում

$$\left| \iint_D f - \iint_{D_n} f \right| = \left| \iint_{D \setminus E} f - \iint_{D_n \setminus E} f \right| \leq \iint_{D \setminus E} |f| + \iint_{D_n \setminus E} |f| \leq 2M\varepsilon,$$

որտեղ $M = \max_{x \in K} |f(x)|$: ■

Հետևանք (մակերեսի արտահայտումը կորագիծ ինտեգրալի միջոցով): (2.1)-ի մեջ վերցնելով $Q = x$, $P = 0$, կստանանք

$$S(D) = \int\limits_{\Gamma} x dy,$$

որտեղ $S(D)$ -ն D տիրույթի մակերեսն է:

3. Գրինի բանաձևը բազմակազմ տիրույթների համար: Դիցուք բավարարվում են նախորդ թեորեմի պայմանները և $\Gamma_i \subset D$, $1 \leq i \leq p$, կոնտուրներով սահմանափակված \bar{D}_i փակ տիրույթները չեն հատվում:

Նշանակենք $\Lambda = D \setminus \bigcup_{i=1}^p D_i$: Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.2:

$$\iint_{\Lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int\limits_{\Gamma} P dx + Q dy - \sum_{i=1}^p \iint_{\Gamma_i} P dx + Q dy : \quad (2.6)$$

► Ինտեգրալի աղյուսվորյան շնորհիվ ունենք՝

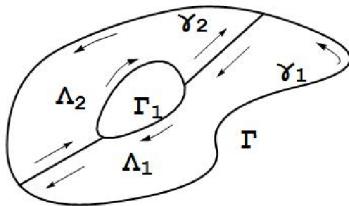
$$\iint_{\Lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \sum_{i=1}^p \iint_{D_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy :$$

Գրինի բանաձևի միջոցով աջ կողմի կրկնակի ինտեգրալները փոխարինելով համապատասխան կորագիծ ինտեգրալներով՝ կստանանք (2.6)-ը:

■

Դժվար չէ համոզվել, որ (2.6) բանաձևը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են ոչ թե ամբողջ G տիրույթում, այլ $\bar{\Lambda}$ փակ տիրույթը պարունակող որևէ G_1 բաց տիրույթում:

► Իրոք, $p=1$ դեպքում, Λ -ն



ներկայացնելով $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ տեսքով (տե՛ս գծագիրը), որտեղ Λ_1, Λ_2 -ը միակապ տիրույթներ են, ու դրանց եզրագծերը նշանակելով γ_1, γ_2 -ով, գրինի բանաձևից կստանանք՝

$$\begin{aligned} \iint_{\Lambda} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_{\Lambda_1} \bullet + \iint_{\Lambda_2} \bullet = \int_{\gamma_1} P dx + Q dy + \int_{\gamma_2} \bullet = \\ &= \int_{\Gamma} P dx + Q dy - \int_{\gamma_1} P dx + Q dy: \end{aligned}$$

$p > 1$ դեպքում կկիրառենք մաքեմատիկական ինտուկցիայի մեթոդը: ■

§3. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ԹԱՎԱՊԱՐՀԻՑ

1. Կորագիծ իմտեգրալի անկախությունը ճանապարհից: Դիցուք P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ են $D \subset R^2$ տիրույթում:

Սահմանում : Կասեմը, որ D տիրույթում $\omega = P dx + Q dy$ դիֆերենցիալ ձևի իմտեգրալը կախված չէ ճանապարհից (ճանապարհից անկախ է), եթե ցանկացած $A, B \in D$ կետերի զույգի և այդ կետերը միացնող $\Gamma_1(AB) \subset D$ և $\Gamma_2(AB) \subset D$ ուղղելի կորերի համար՝

$$\int_{\Gamma_1(AB)} \omega = \int_{\Gamma_2(AB)} \omega :$$

Թեորեմ 3.1: Որպեսզի ω դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը D տիրույթում կախված չլինի ճանապարհից, անհրաժեշտ է և բավարար, որ D տիրույթում ω դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալ՝ տարածված ցանկացած ուղղելի, փակ կորով, լինի զրո:

► **Անհրաժեշտություն:** Դիցուք՝ $\gamma \in C([\alpha, \beta], R^2)$, $\gamma([\alpha, \beta]) \subset D$, γ -ն ուղղելի, փակ կոր է՝ $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$:

Վերցնենք կամայական $t_0 \in (\alpha, \beta)$ կետ և նշանակենք՝

$$\gamma_1(t) = \gamma(t), \quad t \in [\alpha, t_0]; \quad \gamma_2(t) = \gamma(t), \quad t \in [t_0, \beta];$$

$$A = \gamma(\alpha) = \gamma_1(\alpha); \quad B = \gamma(t_0) = \gamma_2(t_0), \quad \Gamma_1(AB) = \gamma_1, \quad \Gamma_2(AB) = \gamma_2^-;$$

Այդ դեպքում, ըստ թեորեմի պայմանի՝ $\int\limits_{\gamma_1} \omega = \int\limits_{\gamma_2^-} \omega$:

Հետևաբար,

$$0 = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2^-} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2} \omega = \int\limits_{\gamma} \omega;$$

Բավարարություն: Դիցուք $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$ կորերը $A, B \in D$ կետերը միացնող ուղղելի կորեր են:

Դիտարկենք $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ փակ կորը: Այդ դեպքում՝

$$0 = \int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega + \int\limits_{\gamma_2^-} \omega = \int\limits_{\gamma_1} \omega - \int\limits_{\gamma_2} \omega; \blacksquare$$

2. Դիֆերենցիալ ձևի նախնականի գոյությունը:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի $D \subset R^2$ տիրույթում դիֆերենցելի F ֆունկցիա, այնպիսին, որ

$$dF = \omega = Pdx + Qdy, \tag{3.1}$$

ապա այդ F -ը կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի նախնական: Այդ դեպքում ω դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է լիիվ (կամ ճշգրիտ) D -ում:

* γ -ն այն կետի հետագիծն է, որը A -ից մինչև B գնում է γ_1 ճանապարհով, այնուհետև B -ից մինչև A ՝ γ_2^- ճանապարհով:

Թեորեմ 3.2: Որպեսզի ω դիֆերենցիալ ձևը D տիրույթում ունենա նախնական, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ինտեգրալը D տիրույթում ճանապարհից կախված չլինի:

► **Բավարարություն:** Վերցնենք կամայական $(a,b) \in D$ կետ և դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան՝

$$F(x,y) = \int_{(a,b)}^{(x,y)} Pdx + Qdy, \quad (x,y) \in D, \quad (3.2)$$

որտեղ ինտեգրալը հասկացվում է որպես (a,b) և (x,y) կետերը միացնող ցանկացած γ ուղենի կորով տարածված ինտեգրալ: Քանի որ D տիրույթում $\omega = Pdx + Qdy$ դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը ճանապարհից անկախ է, ուստի F -ը γ -ից կախված չէ:

Ապացուցենք, որ $dF = \omega$, այսինքն՝

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q : \quad (3.1')$$

Վերցնենք կամայական $(x_0, y_0) \in D$ կետ և այդ կետում ապացուցենք (3.1') հավասարություններից առաջինը (մյուսը կապացուցվի նոյն կերպ): Այդ նպատակով կազմենք աճերի հարաբերությունը՝

$$\frac{\Delta_x F(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x}, \quad (3.3)$$

որտեղ

$$F(x_0, y_0) = \int_{(a,b)}^{(x_0, y_0)} \omega, \quad F(x_0 + \Delta x, y_0) = \int_{(a,b)}^{(x_0, y_0)} \omega + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0 + \Delta x, y_0)} \omega : \quad (3.4)$$

Վերջին ինտեգրալում որպես (x_0, y_0) և $(x_0 + \Delta x, y_0)$ կետերը միացնող կոր վերցնենք

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = y_0 \end{array} \right\} \quad \begin{aligned} x_0 &\leq t \leq x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

պարամետրացումով հատվածը: Այդ դեպքում (1.16)-ի համաձայն՝

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_0 + \Delta x, y_0)} \omega = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P(t, y_0) dt : \quad (3.4)$$

(3.3)-(3.5)-ից կստանանք՝

$$\frac{\Delta_x F(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} P(t, y_0) dt \rightarrow P(x_0, y_0), \text{ եթե } \Delta x \rightarrow 0,$$

որտեղ օգտվեցինք փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի ածանցման թեորեմից:

Անհրաժեշտություն: Դիցուք F -ը D տիրույթում ω -ի որևէ նախնական է, իսկ $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ արտապատկերումը D -ից արժեքներ ընդունող ողորկ կոր է: (1.16)-ի համաձայն՝

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt :$$

Այստեղից, հաշվի առնելով (3.1')-ը, կստանանք՝

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_{\alpha}^{\beta} [F(\varphi(t), \psi(t))]' dt = F(\gamma(\beta)) - F(\gamma(\alpha)) : \quad (3.5)$$

Նշանակելով $\gamma(\alpha) = A$, $\gamma(\beta) = B$, կստանանք՝

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = F(B) - F(A) : \quad (3.5')$$

Դժվար չէ համոզվել, որ (3.5') բանաձևը ճիշտ է նաև ցանկացած ուղղելի կորի դեպքում: Իրոք, եթե γ -ն կտոր առ կտոր ողորկ կոր է, այսինքն՝ գոյություն ունի $[\alpha, \beta]$ հատվածի տրոհում՝ $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, այնպիսին, որ γ -ն $[t_i, t_{i+1}]$ հատվածներում ողորկ է, (3.5)-ի համաձայն՝

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \sum_{i=0}^{n-1} [F(\gamma(t_{i+1})) - F(\gamma(t_i))] = F(B) - F(A) :$$

Ընդհանուր դեպքում, (3.5')-ն ապացուցելու համար կօգտվենք Գուրսայի լեմմայից: ■

3. Փակ դիֆերենցիալ ձև:

Սահմանում: $\omega = Pdx + Qdy$ դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է փակ $G \subset R^2$ տիրույթում, եթե այդ տիրույթում P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են և բավարարում են

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.6)$$

պայմանին:

Թեորեմ 3.3: Դիցուք P և Q ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են G տիրույթում: Որպեսզի G տիրույթում $\omega = Pdx + Qdy$ դիֆերենցիալ ձևը լինի լրիվ, անհրաժեշտ է, խև միակապ տիրույթի դեպքում՝ նաև բավարար, որ այդ տիրույթում ω -ն լինի փակ:

► Անհրաժեշտությունը հետևում է խառն ածանցյալների թեորեմից: Իրոք, եթե ω դիֆերենցիալ ձևը լրիվ է, ապա, ըստ սահմանման, գոյություն ունի G տիրույթում դիֆերենցելի F ֆունկցիա, այնպիսին, որ $\frac{\partial F}{\partial x} = P$,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q : \text{Ուստի խառն ածանցյալների թեորեմի համաձայն՝}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} :$$

Անցնենք բավարարության ապացույցին. նախորդ երկու թեորեմների շնորհիվ, ω -ի լրիվությունն ապացուցելու համար բավական է ապացուցել, որ ω -ի ինտեգրալը՝ ցանկացած փակ, ուղղելի կորով տարածված, զրո է:

Դիցուք ω -ն G միակապ տիրույթում բավարարում է (3.6) պայմանին և Γ -ն G -ում ընկած կոնտուր է: Այդ դեպքում Գրինի բանաձևի համաձայն՝

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 :$$

Ցանկացած փակ թեկյալով տարածված ինտեգրալը հանդիսանում է վերջավոր թվով կոնտուրներով տարածված ինտեգրալների գումար,

հետևաբար այն զրո է, իսկ փակ կորի դեպքը Գուրասայի լեմմայի միջոցով թերվում է թեկյալի դեպքին: ■

Վերջում թերենք փակ դիֆերենցիալ ձևի օրինակ, որը լրիվ չէ: Որպես G տիրույթ վերցնենք $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ բազմությունը և ապացուենք, որ

$$\omega = Pdx + Qdy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

դիֆերենցիալ ձևը G -ում փակ է, բայց լրիվ չէ:

Ունեն՝

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (x,y) \in G,$$

ուստի ω -ն G տիրույթում փակ է:

Այնուհետև, օշանակելով $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, կունենանք՝

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \int_{\gamma} -ydx + xdy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} 2dxdy = 2\pi,$$

այսինքն՝ γ միավոր շրջանագծով տարածված ինտեգրալը զրո չէ, հետևաբար, ω -ն G -ում լրիվ չէ:

§4. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ

1. Հարթ պատկերմերի արտապատկերում: Կիցուք $G \subset R^2$ տիրույթը միակապ է, իսկ $h(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) : G \leftrightarrow G_1$ արտապատկերումն անընդհատ դիֆերենցելի և փոխմիարժեք է, որի յակորիանը զրո չի դառնում՝

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} x'_\xi & x'_\eta \\ y'_\xi & y'_\eta \end{vmatrix} \neq 0, \quad (\xi, \eta) \in G: \tag{4.1}$$

Այդ դեպքում, հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն, h^{-1} -ը կլինի անընդհատ դիֆերենցելի G_1 տիրույթում:

Քանի որ նշված պայմաններում $J(\xi, \eta)$ ֆունկցիան G տիրույթում անընդհատ է, ապա (4.1) պայմանից հետևում է, որ $J(\xi, \eta)$ ֆունկցիան G տիրույթում նշանը չի փոխում:

Թեորեմ 4.1: Նշված պայմաններում ողորկ կորի պատկերը ողորկ կոր է:

► Դիցուք $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ կորը ողորկ է, այսինքն՝ $\xi(t)$ և $\eta(t)$ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են և նրանց ածանցյալները միաժամանակ զրո չեն դառնում:

Պատկեր կորը կլինի՝

$$h(\gamma(t)) = (x(\xi(t), \eta(t)), y(\xi(t), \eta(t))) =: (\varphi(t), \psi(t)): \quad (4.2)$$

Հաշվենք պատկեր կորի կոորդինատային ֆունկցիաների ածանցյալները՝

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \xi'(t) + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \eta'(t) \\ \psi'(t) &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \xi'(t) + \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \eta'(t): \end{aligned} \quad (4.3)$$

Հետևաբար, φ և ψ ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են և նրանց ածանցյալները, (4.1) պայմանի շնորհիվ, միաժամանակ զրո չեն դառնում: ■

Հետևանք: Կտոր առ կտոր ողորկ կոնտորի (պարզ, փակ կորի) պատկերը կտոր առ կտոր ողորկ կոնտոր է:

► Օժերեմ 4.1-ից հետևում է, որ կտոր առ կտոր ողորկ կորի պատկերը կտոր առ կտոր ողորկ կոր է, իսկ արտապատկերման փոխմիարժեքությունից հետևում է, որ պարզ, փակ կորի պատկերը պարզ, փակ կոր է: ■

Թեորեմ 4.2: Եթե $\Gamma \subset G$ պարզ, փակ կոր է և $h(\Gamma) = \Gamma_1$, ապա $h(D) = D_1$, որտեղ D -ն Γ -ի ներքին տիրույթն է, իսկ D_1 -ը՝ Γ_1 -ի:

► Քանի որ D -ն կապակցված է, իսկ h -ը՝ անընդհատ, ապա $h(D)$ -ն ամբողջությամբ կամ Γ_1 -ի ներքին տիրույթում է, կամ՝ արտաքին:

Հակառակ դեպքում կստացվի, որ $h(D)$ -ն կապակցված չէ, ինչը հակասում է D -ի կապակցված լինելուն:

Այսուհետև նկատենք, որ $h(D)$ -ն Γ_1 -ի դրսում լինել չի կարող: Հակառակ դեպքում, նշանակելով Γ_1 -ի արտաքին տիրույթը $ext\Gamma_1$, կունենանք

$$ext\Gamma_1 = h(D) \cup [ext\Gamma_1 \setminus h(\bar{D})] := U_1 \cup U_2,$$

որտեղ U_1, U_2 -ը չհատվող, ոչ դատարկ բաց բազմություններ են:

Հետևաբար, $ext\Gamma_1$ -ը կապակցված չէ, ինչը հակասում է Ժորդանի թեորեմին: Այսպիսով, $h(D)$ -ն Γ_1 -ի ներսում է: Կրկնելով նախորդ դատողությունը, կհամոզվենք, որ $h(D) = D_1$: ■

Դիտողություն: Թեորեմն ապացուցելիս մենք օգտվեցինք միայն նրանից, որ h -ը և h^{-1} -ը անընդհատ են: Այսպիսի արտապատկերումը կոչվում են հոմեոմորֆիզմ (կամ հոմեոմորֆ արտապատկերում):

Հետևանք: Հոմեոմորֆ արտապատկերման դեպքում միակապ տիրույթի պատկերը միակապ տիրույթ է:

2. Սակերեսի արտահայտումը կորագիծ կոորդինատների * միջոցով:

Դիցուք $G \subset R^2$ -ը միակապ տիրույթ է, իսկ h -ը՝ $h(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) : G \leftrightarrow G$, անընդհատ դիֆերենցելի, փոխմիաժամկեր արտապատկերում է, որի յակորիանը զրո չի դառնում: Բացի դրանից, այստեղ լրացուցիչ կենքաղենք, որ $y(\xi, \eta)$ ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է, հետևաբար, նրա խառն ածանցյալները հավասար են:

* Այսպիսս են կոչվում (x, y) կետի (ξ, η) կոորդինատները (1 կետում դիտարկված արտապատկերումների ժամանակ):

Թեորեմ 4.3: Եթե Γ -ն G -ում ընկած կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուր է և $h(\Gamma) = \Gamma_1$, ապա

$$ս) V(D_1) = \iint_D |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta, \text{ որտեղ } D \text{-ի մեջքին տիրույթն է, իսկ}$$

D_1 -ը Γ_1 -ի;

բ) եթե $J(\xi, \eta) > 0$, $(\xi, \eta) \in G$, ապա Γ -ի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է Γ_1 -ի դրական շրջանցումը, իսկ եթե $J(\xi, \eta) < 0$, ապա շրջանցման ուղղությունը փոխվում է:

► Պարզության համար ենթադրենք, թե Γ -ն ողորկ է և վերցնենք Γ -ի որևէ պարամետրացում՝ $\gamma(t) = (\xi(t), \eta(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, այնպես, որ Γ -ն շրջանցվի դրական ուղղությամբ: Այդ դեպքում (4.2)-ը կլինի Γ_1 -ի սլարամենտրացում, ընդ որում, Γ_1 -ի շրջանցումը կարող է կատարվել ինչպես դրական ուղղությամբ, այնպես էլ՝ բացասական:

Այսուհետև, օգտվելով Գրինի բանաձևի հետևանքից, կորագիծ ինտեգրալների հաշվման (1.16) բանաձևից ու (4.3)-ից, կստանանք՝

$$V(D_1) = \int_{\Gamma_1} x dy = \pm \int_{\Gamma} x \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + x \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (4.4)$$

ընդ որում, ինտեգրալի դիմաց պետք է վերցնել «+» նշանը, եթե Γ -ի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է Γ_1 -ի դրական շրջանցումը, և «-» նշանը՝ հակառակ դեպքում:

Գրինի բանաձևի համաձայն, (4.4)-ից կստանանք՝

$$\begin{aligned} V(D_1) &= \pm \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(x \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(x \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] d\xi d\eta = \\ &= \pm \iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + x \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - x \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta = \\ &= \pm \iint_D J(\xi, \eta) d\xi d\eta: \end{aligned} \quad (4.5)$$

Քանի որ $V(D_1) > 0$, ապա (4.5) բանաձևի մեջ ինտեգրալի դիմացի նշանը պետք է համընկնի $J(\xi, \eta)$ -ի նշանի հետ: ■

§5. ԱՍԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵՎ ԱՍԿԵՐԵՍԸ

1. Պարամետրացված մակերևույթ:

Սահմանում: $S \subset R^3$ բազմությունը կոչվում է պարամետրացված ողորկ մակերևույթ, եթե գոյություն ունեն $\Delta \subset R^2$ փակ սահմանափակ տիրույթ, Δ -ն պարունակող $G \subset R^2$ բաց տիրույթ և $r: G \rightarrow R^3$ անընդհատ դիֆերենցելի ու փոխմիարժեք արտապատկերում, այնպիսիք, որ $r(\Delta) = S$ և $rank\ r'(t) = 2$, $t \in \Delta$: Այդ դեպքում r արտապատկերումը կոչվում է S մակերևույթի պարամետրացում կամ պարամետրական ներկայացում:

Եթե r արտապատկերման կոորդինատային ֆունկցիաները նշանակենք $x(u, v)$, $y(u, v)$ և $z(u, v)$, այդ դեպքում՝

$$r(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}; \Delta \leftrightarrow S; \quad r'(u, v) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}: \quad (5.1)$$

$$\text{Այնուհետև նշանակենք՝ } A = \begin{vmatrix} y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & z'_v \\ x'_u & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}:$$

Այդ դեպքում $rank\ r' = 2$ պայմանը համարժեք է $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ անհավասարությանը:

Սահմանվոր դեպքում, եթե S մակերևույթի հավասարումը տրված է բացահայտ տեսքով՝

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

r պարամետրական ներկայացումն ընդունում է

$$r(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}; \quad D \leftrightarrow S, \quad r'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

տեսքը, որտեղ $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$: Այս դեպքում (տես VIII, §1, 4)

$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ կետում մակերևույթի շոշափող հարթության հավասարումն է՝

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0); \quad (5.3^{\circ})$$

Այժմ արտածենք $r(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ կետում շոշափող հարթության հավասարումն ընդհանուր դեպքում: Քանի որ $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, ապա (u_0, v_0) կետում A, B, C թվերից որևէ մեկը զրո չէ: Ենթադրենք, որ $C(u_0, v_0) \neq 0$: Այդ դեպքում հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն, $(x_0, y_0) := (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0))$ կետի շրջակայքում

$$\left. \begin{array}{l} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{array} \right\}$$

համակարգից (u, v) -ն արտահայտվում է (x, y) -ի միջոցով՝

$$\left. \begin{array}{l} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{array} \right\}.$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով $z = z(u, v)$ ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) =: f(x, y)$$

ներկայացումը: Այսպիսով, ստացվեց S մակերևույթի հավասարումը բացահայտ տեսքով ((x_0, y_0) կետի շրջակայքում):

Հաշվենք f ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները: Դիտարկենք

$$f(x(u, v), y(u, v)) = z(u, v)$$

հավասարությունը, որը (u_0, v_0) կետի շրջակայքում նույնություն է: Այդ դեպքում՝

$$\left. \begin{array}{l} f'_x x'_u + f'_y y'_u = z'_u \\ f'_x x'_v + f'_y y'_v = z'_v \end{array} \right\}:$$

Լուծելով այս համակարգը՝ կստանանք $f'_x = -\frac{A}{C}$, $f'_y = -\frac{B}{C}$: Այս

արժեքները տեղադրելով (5.3°) -ի մեջ՝ կստանանք շոշափող հարթության հավասարումն ընդհանուր դեպքում.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 : \quad (5.3)$$

Նշենք նաև, որ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ կետում մակերևոյթի նորմալի ուղղորդ կոսինուսներն են՝

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \mu = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} : \end{aligned} \quad (5.4)$$

Եթե S մակերևոյթի հավասարումը տրված է $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, բացահայտ տեսքով, (5.2)-ից կտանանք $A = -p$, $B = -q$, $C = 1$, որտեղ

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} : \text{Հետևաբար՝}$$

$$\begin{aligned} \cos \lambda &= \frac{-p}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos \mu = \frac{-q}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ \cos \nu &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}} : \end{aligned} \quad (5.4')$$

2. Երկկողմանի մակերևոյթ: $S \subset R^3$ կապակցված բազմությունը կոչվում է *ողորկ մակերևոյթ*, եթե յուրաքանչյուր $P \in S$ կետի համար գոյություն ունի $\delta(P) > 0$ թիվ, այնպիսին, որ $B(P, \delta) \cap S$ բազմության համար գոյություն ունի ողորկ պարամետրացում (լոկալ պարամետրացում):

Ողորկ մակերևոյթի օրինակ է հանդիսանում գնդային մակերևոյթը*:

Դիցուք S -ը ողորկ մակերևոյթ է, $P_0 \in S$ և Γ -ն S -ում ընկած փակ կոր է, որի սկզբնակետը և վերջնակետը P_0 -ն են: P_0 կետում մակերևոյթի նորմալի երկու օրթերից որևէ մեկը նշանակենք n_0 -ով: Եթե P կետը,

* Ամբողջ գնդային մակերևոյթի պարամետրացման դեպքում փոխմիարժեքությունը խախտվում է, հետևաբար, այն պարամետրացված ողորկ մակերևոյթը չէ:

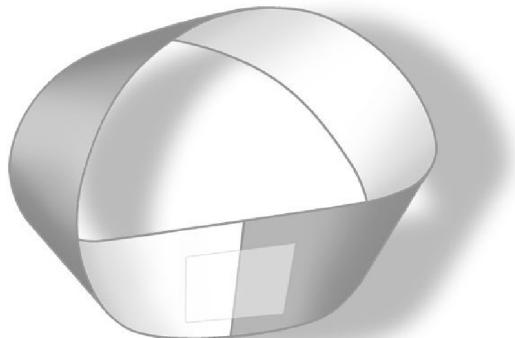
շարժվելով P_0 կետից, շրջանցի Γ փակ կորը և վերադառնա P_0 , ապա հնարավոր է երկու դեպք՝ n_0 -ն անընդհատ փոփոխվելով

ա) կվերադառնա նույն դիրքին,

բ) ուղղությունը կփոխի:

Սահմանում:** S ողորկ մակերևույթը կոչվում է երկկողմանի, եթե ցանկացած P_0 կետի և ցանկացած Γ փակ կորի դեպքում տեղի ունի ա) և:

Եթե որևէ Γ -ի դեպքում տեղի ունի բ)-ն, ապա մակերևույթը կոչվում է միակողմանի: Միակողմանի մակերևույթի օրինակ է Մյորիուսի թերթը:



Մյորիուսի թերթը

Երկկողմանի մակերևույթի օրինակներ են պարամետրացված մակերևույթը և գնդային մակերևույթը:

Այժմ սահմանենք երկկողմանի մակերևույթի կողմի գաղափարը : Նախ դիտարկենք պարամետրացված մակերևույթի դեպքը: n^+ -ով նշանակենք նորմալի այն ($\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu$) օրթը, որը ստացվում է (5.4) բանաձևերում վերցնելով “+” նշանը, իսկ n^- -ով՝ “-” նշանով օրթը: Այդ դեպքում (S, n^+) և (S, n^-) գույգերը կանվանենք S մակերևույթի կողմեր:

** Այստեղ մենք տալիս ենք նկարագրական սահմանումներ: Շշարիտ (մաքեմատիկական սահմանումները) կտրվեն հաջորդ գլուխում:

Եթե S -ի հավասարումը տրված է $z = f(x, y)$ բացահայտ տեսքով, ապա (S, n^+) կողմի համար (5.4)՝ից կստանանք՝

$$\cos \lambda = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \cos \mu = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} : \tag{5.4'}$$

Ուստի, $\cos \nu > 0$, այսինքն՝ ν -ն սուր անկյուն է: Հետևաբար, (S, n^+) -ը մակերևույթի վերևի կողմն է:

Ընդհանուր երկկողմանի մակերևույթի դեպքում վերցնենք կամայական $P_0 \in S$ կետ և n_0 -ով նշանակենք P_0 կետում մակերևույթի նորմալի երկու օրթերից որևէ մեկը: S մակերևույթի կամայական P կետում նորմալի n օրթը ընտրելու համար P_0 կետը $\Gamma \subset S$ կորով միացնենք P կետին և P_0 -ն Γ -ի վրայով շարժենք մինչև P կետը: Այդ դեպքում n_0 -ն անընդհատ փոփոխվելով P կետում կը նդունի ինչ-որ n դիրք: Ստացված n -ը Γ ճանապարհից կախված չէ, քանի որ S -ը երկկողմանի է: (S, n) գոյացք կոչվում է մակերևույթի կողմ: Եթե P_0 կետում ընտրենք n_0 -ի հակադիր օրթը, ապա կստանանք մակերևույթի *հակառակ կողմ*:

Մակերևույթի նշված կողմի վրա կոնտուրի շրջանցման դրական և բացասական ուղղությունները սահմանվում են այնպես, ինչպես հարթ պատկերների դեպքում: Այն է. S մակերևույթի (S, n) կողմի վրա $\Gamma \subset S$ կոնտուրի շրջանցման ուղղությունը համարվում է դրական, եթե դիտորդը, ուղիղ գլուխ n նորմալի ուղղությունն ընդունած Γ կոնտուրը շրջանցելիս, S մակերևույթի Γ կոնտուրով սահմանափակված՝ իրեն բավականաչափ մոտ մասը տեսնում է իր ձախ կողմում: Հեշտ է նկատել, որ մակերևույթի կողմը փոխելիս կոնտուրների շրջանցման ուղղությունը փոխվում է: Այդ պատճառով մակերևույթի կողմի նշելը համարժեք է որևէ կոնտուրի շրջանցման դրական ուղղությունը նշելուն:

Թեորեմ 5.1: Պարամետրացված մակերևույթի դեսքում (S, n^+) -ը մակերևույթի այն կողման է, որի համար $\gamma \subset \Delta$ կոնտուրի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է $\Gamma = r(\gamma) \subset S$ կոնտուրի դրական շրջանցումը:

► Վերցնենք կամայական $t_0 = (u_0, v_0) \in \Delta$ կետ և, քանի որ A, B, C գործակիցներից որևէ մեկը 0-ից տարբեր է, կենքադրենք, որ $C(u_0, v_0) \neq 0$: Այդ դեսքում հակադարձ ֆունկցիայի թեորեմի համաձայն՝

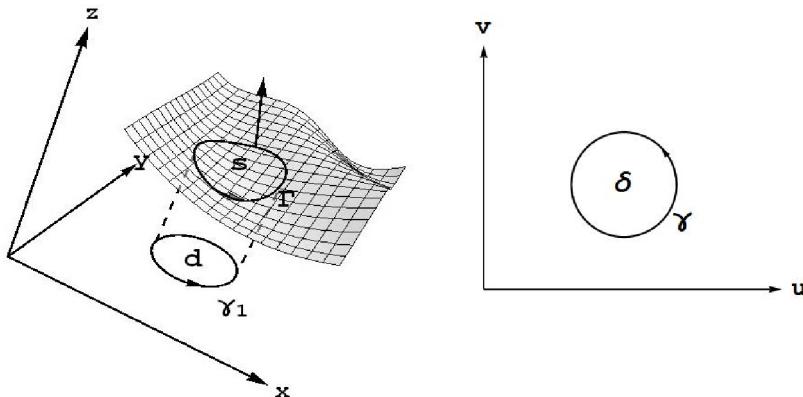
$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (5.5)$$

համակարգից, t_0 կետի δ շրջակայքում (u, v) -ն արտահայտվում է (x, y) -ի միջոցով՝

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} : d \leftrightarrow \delta :$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով $z = z(u, v)$ ֆունկցիայի մեջ՝ կստանանք

$$z = z(u(x, y), v(x, y)) =: f(x, y) : d \leftrightarrow s \quad (\text{տե՛ս գծագիրը}):$$



Ունենք՝

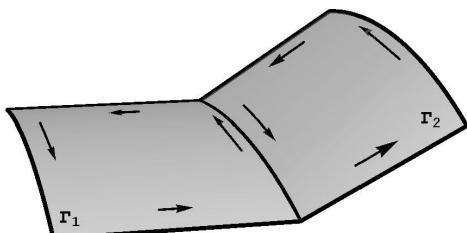
$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} :$$

Քննարկենք $C > 0$ դեպքը: Այս դեպքում $\cos \gamma > 0$, ինտևաբար, ընտրվում է s -ի վերևի կողմը: Մյուս կողմից, քանի որ C -ն (5.5) արտապատկերման յակորիանն է, ապա δ -ի γ եզրի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է d -ի γ_1 եզրի դրական շրջանցումը (§4, 2), որին համապատասխանում է s -ի Γ եզրի այն շրջանցումը, որը դրական է s -ի վերևի կողմի համար: ■

Մակերևույթի կողմնորոշումը կոնտուրների շրջանցման ուղղության միջոցով մեզ հնարավորություն է տալիս ընդլայնել երկկողմանի մակերևույթների դասը:

Դիցուք՝ $S = S_1 \cup S_2$, որտեղ S_1 -ը և S_2 -ը երկկողմանի մակերևույթներ են, որոնք ունեն ընդհանուր եզրամաս կամ եզրամասեր (տե՛ս գծագիրը): Այդ դեպքում S -ը կոչվում է երկկողմանի, եթե հնարավոր է Γ_1 և Γ_2 եզրային կոնտուրների շրջանցումներն ընտրել այնպես, որ ընդհանուր եզրամասերում այդ կոնտուրների շրջանցումները կատարվեն միմյանց հակառակ ուղղություններով:

Այդպիսի S մակերևույթները կոչվում են կտոր առ կտոր ողորկ երկկողմանի մակերևույթներ^{*}:



Կտոր առ կտոր ողորկ երկկողմանի մակերևույթի օրինակ են զուգահեռանիստի եզրը և գլանի լիիվ մակերևույթը:

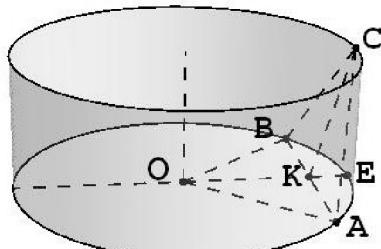
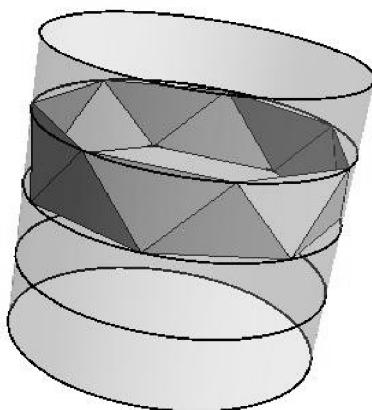
3. Ծվարցի օրինակ: Մենք կորի երկարությունը սահմանել ենք որպես ներգծյալ բեկյալի երկարության սահման (VI, §3, 1): Հարց է առաջանում՝ կարելի՞ է արդյոք նման կերպ վարվել մակերևույթի մակերեսի սահմանման դեպքում: Այլ կերպ ասած, կարելի՞ է արդյոք մակերևույթի մակերեսը

* Կտորների քանակը կարող է երկուսից ավելի լինել:

սահմանել որպես ներգծյալ բազմանիստի մակերեսի սահման: Ըստ քարցի օրինակը ցույց է տալիս, որ այդ հարցի պատասխանը բացասական է:

Դիտարկենք ուղիղ շրջանային գլան, որի հիմքի շառավիղը R է, իսկ բարձրությունը՝ H : Այդ գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսն է՝ $2\pi RH$: Գլանին ներգծենք բազմանիստ հետևյալ կերպ. գլանի բարձրությունը բաժանենք m հավասար մասերի և բաժանման կետերով տանենք հարթություններ՝ գլանի հիմքի հարթությանը զուգահեռ: Գլանի մակերևույթի վրա կառաջանան $m+1$ հատ շրջանագծեր (ներառյալ գլանի հիմքերի շրջանագծերը): Այնուհետև այդ շրջանագծերից յուրաքանչյուրը բաժանենք n հավասար մասերի այնպես, որ նախորդ շրջանագծի բաժանման կետերի պրոյեկցիաները համընկնեն հաջորդ շրջանագծի տրոհման աղեղների միջնակետերի հետ, որից հետո շրջանագծերի յուրաքանչյուր բաժանման կետ միացնենք հարևան կետերի հետ (նոյն շրջանագծի վրա և հաջորդ շրջանագծի վրա): Կատանանք մի բազմանիստ, որի նիստերը $2mn$ հատ հավասար եռանկյուններ են: Հաշվենք այդ

բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը՝ σ_{mn} -ը:



Ուսենք՝

$$\sigma_{mn} = 2mn\Delta, \quad (5.6)$$

որտեղ Δ -ն հավասար եռանկյունների մակերեսն է՝ $\Delta = AK \cdot KC$, որտեղ

$$AK = R \sin \frac{\pi}{n}, \quad KC = \sqrt{CE^2 + KE^2} = \sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + \left(R - R \cos \frac{\pi}{n}\right)^2} :$$

Ստացված արժեքները տեղադրենք (5.6)-ի մեջ՝

$$\sigma_{mn} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + R^2 4m^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} :$$

Այժմ վերցնենք կամայական $q > 0$ թիվ և m -ն ու n -ը ձգտեցնենք

անվերջության այնպես, որ $\frac{m}{n^2} \rightarrow q$: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\sigma_{mn} \rightarrow 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{1}{4} R^2 \pi^4 q^2} :$$

Հետևաբար, σ_{mn} -ի սահմանը հավասար կլինի զլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսին միայն այս դեպքում, եթե $q = 0$:

4. Բացահայտ տեսրով տրված մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք S ողորկ մակերևույթի հավասարումը տրված է բացահայտ տեսրով՝ $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, որտեղ D -ն կտոր առ կտոր ողորկ եզրագծով փակ տիրույթ է: D -ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհենք* D_1, \dots, D_n մասերի: Նշանակենք՝ $S_i = r(D_i)$ (սեւ 5.2)-ը, վերցնենք $M_i \in S_i$ կամայական կետերը: D_i -ի պրոյեկցիան (z -երի առանցքին գուգահեռ ուղղությամբ) M_i կետում S մակերևույթի շոշափող հարթության վրա նշանակենք T_i -ով և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=1}^n V(T_i), \tag{5.7}$$

որտեղ $V(T_i)$ -ն T_i հարթ պատկերի մակերեսն է:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$$

* Օրինակ այնպես, ինչպես վարվել ենք ինտեգրալը ցանցերի միջոցով սահմանելիս:

վերջավոր սահմանը, որտեղ $\lambda = \max_i \operatorname{diam} D_i$, ապա այն կանգանենք S մակերևույթի մակերես և կնշանակենք $V(S)$ -ով: Այդ դեպքում S մակերևույթը կոչվում է քառակուսելի:

Թեորեմ 5.2: Ողորկ մակերևույթը քառակուսելի է և

$$V(S) = \iint_D \frac{dxdy}{|\cos v|}, \quad (5.8)$$

որտեղ v -ն մակերևույթի նորմալի և z -երի առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունն է:

► Պրոյեկցիայի մակերեսի հաշվման բանաձևի համաձայն՝

$$V(D_i) = V(T_i) |\cos v_i|,$$

որտեղ v_i -ն v -ի արժեքն է M_i կետում: Հետևաբար

$$V(T_i) = \frac{V(D_i)}{|\cos v_i|}:$$

Այս արժեքը տեղադրելով (5.7)-ի մեջ, կստանանք

$$\sigma = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|\cos v_i|} V(D_i)$$

որը (5.8) իմտեզրալի իմտեզրալային գումարն է (XVII, §5, 4):

Քանի որ նշված այս մասնաներում (տե՛ս (5.4')-ը)

$$\frac{1}{|\cos v|} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

ֆունկցիան անընդհատ է, ապա նրա σ իմտեզրալային գումարը ճգնում է (5.8) իմտեզրալին, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Տեղադրելով $\frac{1}{|\cos v|}$ ֆունկցիայի արժեքը (5.8) իմտեզրալի մեջ՝ $V(S)$

մակերեսի համար կստանանք հետևյալ բանաձևը՝

$$V(S) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dxdy, \quad (5.8')$$

որտեղ $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$:

5. Պարամետրացված մակերևոսի մակերեսը: Դիցուք S -ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որի պարամետրացումը (5.1)-ն է:

Վերցնենք կամայապես ընտրված $t_0 = (u_0, v_0) \in \Delta$ կետը և ենթադրենք, որ $C(u_0, v_0) \neq 0$: Այդ դեպքում, օգտվելով 2-րդ կետում ներմուծված նշանակումներից և նախորդ բեռնմանց, կունենանք՝

$$V(s) = \iint_d \frac{dxdy}{|\cos v|} :$$

Այստեղ կատարելով փոփոխականի փոխարինում՝

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \delta \leftrightarrow d, \end{array} \right.$$

կստանանք՝

$$V(s) = \iint_{\delta} \frac{1}{|\cos v|} \cdot |C| du dv :$$

Այսուհետև, տեղադրելով $\cos v$ -ի (5.4) արժեքը՝ կստանանք

$$V(s) = \iint_{\delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv : \quad (5.9)$$

Եթե t_0 կետում C -ի փոխարեն զրոյից տարբեր լիներ A -ն կամ B -ն, ապա մակերևույթի s կտրի մակերեսի համար կստացվեր նույն բանաձևը:

Քանի որ Δ փակ, սահմանափակ տիրույթի (կոմպակտ բազմության) յուրաքանչյուր կետում A, B, C թվերից գոնե մեկը զրոյից տարբեր է, ապա օգտվելով Δ -ի կոմպակտությունից, այն կտրոհենք վերջավոր թվով, ընդհանուր ներքին կետ չունեցող, $\delta_1, \dots, \delta_p$ տիրույթների, որոնցից յուրաքանչյուրի համար տեղի ունի (5.9)-ը՝

$$V(s_i) = \iint_{\delta_i} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv, \quad 1 \leq i \leq p :$$

Գումարելով այդ հավասարությունները՝ կստանանք

$$\sum_{i=1}^p V(s_i) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv : \quad (5.9')$$

Այժմ ամբողջ S մակերևույթի $V(S)$ մակերեսը սահմանենք որպես նրա s_i (ընդհանուր ներքին կետ չունեցող) կտորների մակերեսների գումար: Այդ դեպքում (5.9')-ից կտանանք՝

$$V(S) = \iint_{\Delta} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} dudv : \quad (5.10)$$

§6. ՍԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Սոածին տիպի մակերևութային ինտեգրալ: Դիցուք S -ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որի պարամետրացումը (5.1)-ն է: Տրված $f: S \rightarrow R$ ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը կազմելու համար Δ -ն տրոհենք (կտոր առ կտոր ողորկ կորերով) $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ տիրույթների: Նշանակենք՝ $S_i = r(\Delta_i)$, վերցնենք $P_i \in S_i$ կետերը և կազմենք

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i)V(S_i)$$

ինտեգրալային գումարը:

Սահմանում: Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$$

վերջավոր սահմանը $\left(\lambda = \max_i \text{diam } \Delta_i \right)$, ապա այն անվանում են f ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ՝ տարածված S մակերևույթով, և նշանակում են՝

$$\iint_S f(P)dS \text{ կամ } \iint_S f(x,y,z)dS :$$

Թեորեմ 6.1: Եթե S -ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է և $f \in C(S)$, ապա f ֆունկցիայի առաջին տիպի մակերևութային ինտեգրալ՝ տարածված S մակերևույթով, գոյություն ունի և

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv : \quad (6.1)$$

► Օգտվելով մակերեսի (5.10) բանաձևից՝ σ իմտեզրալային գումարը կարելի է ներկայացնել

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(P_i) \iint_{\Delta_i} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

տեսքով, որտեղ

$$P_i = r(t_i) = (x(u_i, v_i), y(u_i, v_i), z(u_i, v_i)), \quad t_i = (u_i, v_i) \in \Delta_i :$$

Մյուս կողմից, (6.1)-ի աջ կողմի կրկնակի իմտեզրալը նշանակելով I -ով, (որի գոյությունը հետևում է ենթիմտեզրալ ֆունկցիայի անընդհատությունից), իմտեզրալ աղյուիվության շնորհիվ կունենանք՝

$$I = \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta_i} f(r(u, v)) \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv :$$

Հետևաբար

$$|\sigma - I| \leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta_i} |f(r(t_i)) - f(r(t))| \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv : \quad (6.2)$$

Քանի որ $g(t) = f(r(t))$ բարդ ֆունկցիան անընդհատ է Δ փակ սահմանափակ տիրությում, ապա Կանոնը թերեմի համաձայն, յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի $\delta > 0$ թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_{\Delta_i}(g) < \varepsilon :$$

Այդ դեպքում (6.2)-ից կստանանք՝

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon V(S),$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Եթե S մակերևույթի հավասարումը տրված է $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, բացահայտ տեսքով, (6.1)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy :$$

Այսուետեղ, հաշվի առնելով $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{1}{|\cos v|}$ հավասարությունը

և f -ի փոխարեն վերցնելով $f |\cos v|$ ֆունկցիան, կստանանք՝

$$\iint_S f(x, y, z) |\cos v| dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy : \quad (6.3)$$

2. Երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալ: Դիցուք S մակերևույթի հավասարումը տրված է $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ բացահայտ տեսքով և $f : S \rightarrow R$:

D -ն կտոր առ կտոր ողորկ կորերով տրոհենք D_1, \dots, D_n տիրույթների, նշանակենք՝ $S_i = r(D_i)$, $(r(x, y) = (x, y, z(x, y)))$, վերցնենք $P_i \in S_i$, $1 \leq i \leq n$ կետեր և կազմենք

$$a) \sigma_q = \sum_{i=1}^n f(P_i) V(D_i), \quad p) \sigma_u = \sum_{i=1}^n f(P_i) [-V(D_i)]$$

ինտեգրալային գումարները:

Սահմանում: Եթե λ -ն զրոյի ճառելիս ($\lambda = \max_i \text{diam } D_i$) σ_q և σ_u գումարներն ունեն վերջավոր սահման, ապա այդ սահմանները կոչվում են f ֆունկցիայի երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալներ, տարածված համապատասխանաբար S մակերևույթի վերին և ստորին կողմերով:

$$\iint_{S_q} f(x, y, z) dx dy, \quad \iint_{S_u} f(x, y, z) dx dy$$

սիմվոլներով:

Թեորեմ 6.2: Եթե S մակերևույթը ողորկ է և $f \in C(S)$, ապա f ֆունկցիայի երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալները գոյություն ունեն և

$$a) \iint_{S_q} f(x, y, z) dx dy = \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (6.4)$$

$$p) \iint_{S_u} f(x, y, z) dx dy = - \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy :$$

► Ապացուցենք միայն ա)-ն: Դիցուք՝ $P_i = r(x_i, y_i) = (x_i, y_i, z(x_i, y_i))$, որտեղ $(x_i, y_i) = M_i \in D_i$: Այդ դեպքում σ_q գումարը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sigma_{\psi} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) V(D_i),$$

որը (6.4) ա) հավասարության աջ կողմում գրված կրկնակի ինտեգրալի Ոիմանի ինտեգրալային գումարն է ($\{D_i\}$ տրոհմանը և $\{M_i\}$ կետերին համապատասխան): Հետևաբար, կրկնակի ինտեգրալի դասական սահմանման համաձայն՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_{\psi} = \iint_D f(x, y, z(x, y)) dx dy : \blacksquare$$

Օգտվելով (6.3) բանաձևից՝ երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը կարելի է արտահայտել առաջին տիպի ինտեգրալի միջոցով՝

$$\iint_S f(x, y, z) dx dy = \iint_S f(x, y, z) \cos v dS, \quad (6.5.1)$$

ընդ որում, եթե ձախ կողմի երկրորդ տիպի ինտեգրալը տարածված է. S մակերևույթի վերին կողմով, ապա v -ն մակերևույթի վերին կողմի նորմալի և z -երի առանցքի դրական ուղղության կազմած անկյունն է, ուստի $\cos v > 0$: Մակերևույթի ստորին կողմի դեպքում՝ $\cos v < 0$:

Եթե երկկողմանի S մակերևույթը (ողորկ կամ կտոր առ կտոր ողորկ, տե՛ս §5, 2) բացահայտ տեսքով չի տրվում, բայց այն կարելի է տրոհել վերջավոր թվով այդպիսի կտորների*, ապա այս դեպքում ամբողջ S մակերևույթի որևէ կողմով տարածված երկրորդ տիպի ինտեգրալը սահմանվում է որպես առանձին կտորներով տարածված ինտեգրալների գումար (կտորների կողմերի ընտրությունը սահմանված է (§5, 2)-ում): Այս դեպքում նույնական տեղի ունի (6.5.1) բանաձևը:

Կտորինատական առանցքների դերերը փոխելով՝ կստանանք

$$\iint_S f(x, y, z) dy dz = \iint_S f(x, y, z) \cos \lambda dS : \quad (6.5.2)$$

$$\iint_S f(x, y, z) dz dx = \iint_S f(x, y, z) \cos \mu dS : \quad (6.5.3)$$

* Այդ կտորների մեջ կարող են լինել նաև z -երի առանցքին գուգահեռ ծմխով գլանային մակերևույթներ, որոնցով տարածված ինտեգրալները, ուստի սահմանման, զրո են:

Եթե S կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթը կոորդինատական առանցքների յուրաքանչյուր գույզի համար վերը նշված տիպի է, ապա միաժամանակ տեղի ունեն (6.5.1)-(6.5.3) հավասարությունները: Այդ հավասարությունները գրելով համապատասխանաբար $R, P, Q \in C(S)$ ֆունկցիաների համար և գումարելով ստացված հավասարությունները՝ կստանանք

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_S (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos v) dS, \quad (6.5)$$

բանաձեռ, ըստ որում, եթե ձախ կողմի երկրորդ տիպի մակերևութային ինտեգրալը տարածված է մակերևույթի (S, n) կողմով (տե՛ս §5, 2), ապա $(\cos \lambda, \cos \mu, \cos v) = n$:

Եթե S -ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որը բավարարում է (6.5) բանաձեռում ենթադրվող պայմաններին, ապա այդ բանաձեռում վերցնելով մակերևույթի (S, n^+) կողմը, այսինքն՝ տեղադրելով

$$\cos \lambda = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \mu = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos v = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

արժեքները, և օգտվելով (6.1) բանաձեռից, կստանանք՝

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = \iint_{\Delta} (AP + BQ + CR) du dv, \quad (6.6)$$

որտեղ ձախ կողմի ինտեգրալը տարածված է S մակերևույթի այն կողմով*, որի համար $\gamma \subset \Delta$ կոնտուրի դրական շրջանցմանը համապատասխանում է: $\Gamma = r(\gamma) \subset S$ կոնտուրի դրական շրջանցումը:

3. Ստորսի բանաձեռ: Ստորսի բանաձեռ Գրինի բանաձեռ ընդհանուրացումն է եռաչափ դեպքի համար: Դիցուք S -ը պարամետրացված ողորկ մակերևույթ է, որը բավարարում է (6.6) բանաձեռում ենթադրվող պայմաններին, $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ ֆունկցիաները կրկնակի դիֆե-

*Տե՛ս թեորեմ 5.1-ը:

բենցելի են Δ -ի վրա (տե՛ս §5, կետ 1): Ենթադրենք նաև, որ Δ -ի եզրը γ կտոր առ կտոր ողորկ կոնսուլը է: Այդ դեպքում $\Gamma = r(\gamma)$ -ն, որը կոչվում է S մակերևույթի եզրագիծ, նույնպես կհանդիսանա կտոր առ կտոր ողորկ կոնսուլը^{**} (R^3 -ում):

Թեորեմ 6.3: Եթե P, Q, R ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են S մակերևույթը պարունակող որևէ բաց բազմության վրա, ապա

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz &= \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx, \end{aligned} \quad (6.7)$$

ըստ որում, Γ կոնսուլի և S մակերևույթի կողմնորոշումները համաձայնեցված են հետևյալ իմաստով. մակերևության իմաստեցրալը տարածված է S մակերևույթի այն կողմով, որի համար Γ կոնսուլի ընտրված շրջանցումը դրական է:

► (6.7) բանաձևը համարժեք է հետևյալ երեք բանաձևերին

$$\int_{\Gamma} Pdx = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dy dx, \quad (6.7.1)$$

$$\int_{\Gamma} Qdy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dz dy, \quad (6.7.2)$$

$$\int_{\Gamma} Rdz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dx dz: \quad (6.7.3)$$

Ապացուցենք (6.7.1)-ը, մյուսները կստացվեն (6.7.1)-ից, եթե xyz կոորդինատական համակարգի փոխարեն դիտարկենք համապատասխանաբար yzx և zxy համակարգերը:

^{**} Ապացուցվում է թեորեմ 4.1-ի մման:

Պարզության համար ենթադրենք, որ γ -ն ողորկ է և վերցնենք γ -ի պարամետրացում՝ $\gamma(\tau) = (u(\tau), v(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, այնպիսին, որ γ կոնտուրի շրջանցումը լինի դրական։ Այդ դեպքում Γ կոնտուրի պարամետրացումը կլինի՝

$$r(u(\tau), v(\tau)) = (x(u(\tau), v(\tau)), y(u(\tau), v(\tau)), z(u(\tau), v(\tau))) :$$

Օգտվելով կորագիծ ինտեգրալների հաշվման (1.16) բանաձևից՝ կստանանք

$$\int_{\Gamma} P dx = \int_{\gamma} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \frac{\partial x}{\partial u} du + P \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad (6.8)$$

քանզի (1.16) բանաձևի միջոցով այս երկու կորագիծ ինտեգրալները կրերկեն Ռիմանի նույն ինտեգրալին։

Այսուհետև, Գրինի բանաձևի միջոցով (6.8)-ի ձախ կողմում գրված կորագիծ ինտեգրալը փոխարինելով կրկնակի ինտեգրալով, կստանանք՝

$$\int_{\Gamma} P dx = \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] dudv :$$

Այսուղեա տեղադրելով մասնակի ածանցյալների արժեքները՝

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(P \frac{\partial x}{\partial v} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(P \frac{\partial x}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v},$$

կստանանք՝

$$\int_{\Gamma} P dx = \iint_{\Delta} \left(B \frac{\partial P}{\partial z} - C \frac{\partial P}{\partial y} \right) dudv :$$

Այսուհետև, հաշվի առնելով (6.6) բանաձևը, կստանանք (6.7.1)-ը: ■

Վերջում ավելացնենք, որ (6.7)-ը բանաձևը ճիշտ է նաև այս դեպքում, եթե S -ը կտոր առ կտոր ողորկ երկրողմանի մակերևույթ է (տե՛ս §5, կետ 2): Դրանում համոզվելու համար (6.7) բանաձևը կգրենք առանձին կտորների համար և ստացված հավասարությունները կգումարենք: Այդ դեպքում առանձին կտորների ընդհանուր եզրերով տարածված կորագիծ ինտեգրալները հակառակ ուղղության են, ինտեգրար նրանք կկրծատվեն, և արդյունքում կմնա S -ի եզրագծով տարածված ինտեգրալը:

Օգտվելով երկու տիպի մակերևութային ինտեգրալների կապը հաստատող (6.5) բանաձևից, Ստորոտ բանաձևը կարելի է գրել նաև առաջին տիպի ինտեգրալի միջոցով՝

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz &= \\ &= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \lambda + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \mu + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \nu \right] dS, \end{aligned}$$

որը պայմանականորեն կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \lambda & \cos \mu & \cos \nu \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS :$$

4. Գառուս - Օստրոգրադսկի բանաձև: Դիցուք V -ն D հիմքով ուղիղ գլանակերպ է՝

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

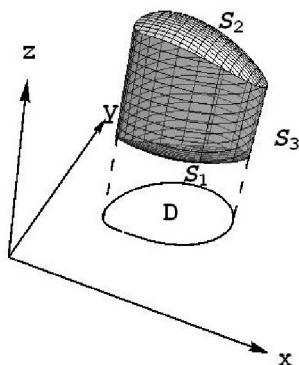
որտեղ $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$ -ը D փակ տիրույթում* անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են:

* Ենթադրվում է, որ D -ի եզրը կտոր առ կտոր ողորկ կոնտուր է:

Թեորեմ 6.3: Եթե R և $\frac{\partial R}{\partial z}$ ֆունկցիաներն անընդհատ են V վայլ տիրույթում, ապա

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R dx dy, \quad (6.9)$$

որտեղ S -ը V -ի եզրն է և աջ կողմի մակերևութային ինտեգրալը տարածված է S -ի արտաքին կողմով:



► Իրոք, օգտվելով նախ գլանակերպով տարածված եռակի ինտեգրալի հաշվման բանաձևից (XVII, §5, 3), ապա՝ Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից, կստանանք՝

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D \left\{ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\} dx dy = \\ &= \iint_D [R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y))] dx dy : \end{aligned}$$

Այնուհետև, օգտվելով (6.4) բանաձևից, կստանանք՝ (տե՛ս զծագիրը)

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S_2)_u} R(x,y,z) dx dy + \iint_{(S_1)_u} R(x,y,z) dx dy :$$

Այսուղ աջ կողմին գումարելով S_3 գլանային մակերևույթի արտաքին կողմով տարածված ինտեգրալը (որը հավասար է զրոյի)՝ կստանանք (6.9)-ը: ■

Նկատենք, որ (6.9) բանաձևը ճիշտ է նաև այն եռաչափ մարմինների համար, որոնք կարելի են տրոհել վերջավոր թվով դիտարկված տիպի մարմինների: Կարելի են ապացուել ավելին, որ (6.9) բանաձևը ճիշտ է

ցանկացած կտոր առ կտոր ողորկ մակերևույթներով սահմանափակված մարմինների համար:

Կոորդինատական առանցքների դերերը փոխելով՝ կստանանք.

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P dy dz, \quad (6.10)$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q dz dx : \quad (6.11)$$

Գումարելով (6.9)-(6.11) հավասարությունները՝ կստանանք Գաուս - Օստրոգրադսկիի լուսանուր բանաձևը.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy :$$

Օգտվելով (6.5) բանաձևից, Գաուս - Օստրոգրադսկիի բանաձևը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS :$$

XIX ԳԼՈՒԽ

ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԶԵՎԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄՆԵՐ

§1. ԲԱԶՍԱԳԾԱՅԻՆ ՆՇԱՄԱՓՈԽ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

1. Տեղափոխությունների խումբ: Դիտարկենք $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$ բազմությունը: N_k -ն ինքն իր վրա արտապատկերող փոխմիարժեք արտապատկերումների (տեղափոխությունների) բազմությունը նշանակենք Σ_k -ով: Երկու արտապատկերումների արտադրյալը սահմանենք որպես այդ արտապատկերումների համադրույթ՝

$$(\sigma)(j) = \sigma(\tau(j)); \quad \sigma, \tau \in \Sigma_k, \quad j \in N_k :$$

Σ_k բազմությունը խումբ է՝ նշված գործողության նկատմամբ: Այդ խումբը կոչվում է N_k բազմության տեղափոխությունների խումբ:

Թեորեմ 1.1: Q -դյուրյուն m միակ $\varepsilon : \Sigma_k \rightarrow \{+1, -1\}$

արտապատկերում, այնպիսին, որ

$$a) \quad \varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau^*,$$

$$p) \quad \varepsilon_\sigma = -1, \text{ եթե } \sigma \text{ -ն դիրքափոխություն է (տրանսպողիցիա է)}^{**} :$$

Երկու տարրերից բաղկացած $\{+1, -1\}$ թվային բազմությունը բազմապատկման գործողության նկատմամբ խումբ է, որտեղ միավորի

* Արտապատկերման արգումենտն ընդունված է գրել նաև որպես ինդեքս:

** Այսինքն՝ գոյություն ունեն իրարից տարրեր $j_1, j_2 \in N_k$ թվեր, այնպիսիք, որ $\sigma(j_1) = j_2, \sigma(j_2) = j_1; \sigma(j) = j$, եթե $j \neq j_1, j_2$:

դերը կատարում է $+1$ -ը: Թեորեմի ա) կետը նշանակում է, որ ε արտապատկերումը $h_{\eta\mu\eta\mu}f\bar{f}q\bar{q}$ է (սահապանում է բազմապատկման գործողությունը):

► ε արտապատկերման միակությունը հետևում է ρ -ից. ε -ի արժեքները բոլոր դիրքավիճակների վրա հայտնի են՝ -1 , իսկ մյուս կողմից՝ յուրաքանչյուր $\sigma \in \Sigma_k$ տեղափոխություն հանդիսանում է վերջավոր բվով դիրքափոխությունների արտադրյալ: Համաձայն ա)՝ ε -ը միարժեքորեն որոշվում է ամբողջ Σ_k -ի վրա:

ε -ի գոյությունն ապացուցելու համար դիտարկենք հետևյալ արտադրյալը՝

$$P = \prod_{i,j \in N_k, i < j} (j-i) \equiv \prod_{i < j} (j-i):$$

Կամայական $\sigma \in \Sigma_k$ -ի համար նշանակենք՝

$$\sigma(P) = \prod_{i,j \in N_k, i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) \equiv \prod_{i < j} (\sigma_j - \sigma_i):$$

Այդ դեպքում տեղի ունի

$$\sigma(P) = (-1)^{\nu(\sigma)} P \quad (1.1)$$

հավասարությունը, որտեղ $\nu(\sigma)$ -ն σ տեղափոխության ինվերսիաների քանակն է, այսինքն՝ այն (i, j) զույգերի քանակն է, որոնք բավարարում են հետևյալ պայմանին՝ $1 \leq i < j \leq k$, բայց $\sigma_i > \sigma_j$:

(1.1)-ն ապացուցելու համար նկատենք, որ

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{\prod_{i \neq j} |j-i|} = \sqrt{\prod_{i \neq j} |\sigma_j - \sigma_i|} = \prod_{i < j} |\sigma_j - \sigma_i| = (-1)^{\nu(\sigma)} \prod_{i < j} (\sigma_j - \sigma_i) = \\ &= (-1)^{\nu(\sigma)} \sigma(P): \end{aligned}$$

Ստացված հավասարության երկու կողմքը բազմապատկելով $(-1)^{\nu(\sigma)}$ -ով՝ կստանանք (1.1)-ը:

Հանգունորեն, կամայական $f \in \Sigma_k$ արտապատկերման համար՝

$$\prod_{i < j} [f(\sigma_j) - f(\sigma_i)] = (-1)^{v(\sigma)} \prod_{i < j} [f(j) - f(i)]: \quad (1.2)$$

Ապացուցենք, որ $\varepsilon_\sigma = (-1)^{v(\sigma)}$ բանաձևով որոշվող արտապատկերումը որոնելին է: Օգտվելով (1.1) և (1.2) հավասարություններից՝ կամայական $\sigma, \tau \in \Sigma_k$ տեղափոխությունների համար ունենք՝

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\sigma\tau} \cdot P &= (\sigma\tau)(P) = \prod_{i < j} [(\sigma\tau)_j - (\sigma\tau)_i] = \prod_{i < j} [\sigma(\tau_j) - \sigma(\tau_i)] = \\ &= \varepsilon_\tau \prod_{i < j} [\sigma(j) - \sigma(i)] = \varepsilon_\tau \sigma(P) = \varepsilon_\tau \varepsilon_\sigma \cdot P, \end{aligned}$$

ուստի $\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$: թ-ն ապացուցելու համար բավական է նկատել, որ եթե σ դիրքափոխությունը տեղափոխում է j_1 և j_2 տարրերը, ապա $v(\sigma) = 2|j_1 - j_2| - 1$, հետևաբար $\varepsilon_\sigma = (-1)^{v(\sigma)} = -1$: ■

ε_σ -ն կոչվում է σ տեղափոխության նշան և այն ընդունված է նշանակել նաև $\text{sgn } \sigma$ սիմվոլով:

2. Բազմագծային ձևեր: Դիցուք V -ն վեկտորական տարածություն է և $V^k = \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_k$: $T: V^k \rightarrow R$ արտապատկերումը կոչվում է k

աստիճանի գծային ձև (k -գծային, բազմագծային ձև), եթե յուրաքանչյուր i -ի համար ($1 \leq i \leq k$)՝

$$T(a_1, \dots, a_{i-1}, \bullet, a_{i+1}, \dots, a_k): V \rightarrow R$$

«մասնակի» արտապատկերումները գծային են:

k աստիճանի գծային ձևն անվանում են նաև k -րենզոր (V -ի վրա): k -թենզորների բազմությունը նշանակենք $\mathfrak{I}^k(V)$ -ով և այդ բազմության վես սահմանենք գումարի և թվով (սկալյարով) բազմապատկման գործողությունները հետևյալ կերպ. եթե $S, T \in \mathfrak{I}^k(V)$, իսկ $a \in R$, ապա

$$\begin{aligned} (S + T)(v_1, \dots, v_k) &= S(v_1, \dots, v_k) + T(v_1, \dots, v_k) \\ (aS)(v_1, \dots, v_k) &= aS(v_1, \dots, v_k): \end{aligned}$$

Այս գործողություններով $\mathfrak{I}^k(V)$ -ն վերածվում է գծային (վեկտորական) տարածության:

Եթե $S \in \mathfrak{I}^k(V)$, $T \in \mathfrak{I}^l(V)$, ապա նրանց քենցորական արտադրյալը՝ $S \otimes T \in \mathfrak{I}^{k+l}(V)$, սահմանվում է

$$(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) = S(v_1, \dots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l})$$

բանաձևով:

Հետևյալ անդրամներն անմիջապես բխում են քերված սահմանումներից.

$$(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T; S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2;$$

$$(aS) \otimes T = S \otimes (aT) = a(S \otimes T); (S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U);$$

Վերջին հավասար արտահայտություններն ուղղակի նշանակում են $S \otimes T \otimes U$ սիմվոլով: Եթերից ավելի քանակով քենցորների քենցորական արտադրյալը սահմանվում է ինդուկտիվ եղանակով:

1-քենցորներին անվանում են գծային ֆունկցիոնալներ, իսկ $\mathfrak{I}^1(V)$ -ն կոչվում է V տարածության համալուծ տարածություն, որը սովորաբար նշանակվում է V^* -ով:

Դիցուք $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ը V տարածության բազիս է: Վեկտորների $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset V^*$ համակարգը կոչվում է V -ի դուալ բազիս (*կամ երկօրոքողոնալ բազիս*), եթե $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$:

Նկատենք, որ դուալ բազիսի վեկտորները որոշվում են $\varphi_k(x) = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ բանաձևերով, որտեղ $x = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$, իսկ

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ համակարգը բազիս է V^* տարածության մեջ:

Թեորեմ 1.2: Եթե $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ը V տարածության բազիս է, իսկ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ -ը V^* համալուծ տարածության դուալ բազիսն է, ապա

$$\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k} \quad (1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq n) \tag{1.3}$$

թենգորսական արտադրյալների համակարգը $\mathfrak{I}^k(V)$ տարածության բազիս է:

Ելմելով այս թեորեմից՝ մասնավորապես կարելի է որոշել $\mathfrak{I}^k(V)$ տարածության չափողականությունը՝ $\dim \mathfrak{I}^k(V) = n^k$:

► Նախ նկատենք, որ

$$\varphi_{i_1} \otimes \varphi_{i_2} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k} (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \dots \delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1, & i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0, & \exists r \text{ st } i_r \neq j_r \end{cases} : \quad (1.4)$$

Եթե V տարածության w_1, \dots, w_k վեկտորները $\{v_1, \dots, v_n\}$ բազիսի միջոցով

արտահայտվում են $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ բանաձևերով, ապա կամայական

$T \in \mathfrak{I}^k(V)$ թենգորի համար կիրառելով մաքենատիկական ինդուկցիայի սկզբունքը, կստանանք՝

$$T(w_1, \dots, w_k) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n a_{1j_1} \dots a_{kj_k} T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n T(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k} (w_1, \dots, w_k) :$$

Հետևաբար՝ $T = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n a_{j_1 \dots j_k} \varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k}$, այսինքն $\mathfrak{I}^k(V)$ տարածության յուրաքանչյուր T վեկտոր հանդիսանում է (1.3) համակարգի վեկտորների գծային կոմբինացիա:

(1.3) համակարգի գծորեն անկախությունը ցույց տալու համար ենթադրենք՝ $\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k} = 0$: Այս հավասարությունը կիրառելով $(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \in V^k$ էլեմենտի վրա, (1.4)-ի շնորհիվ կստանանք՝ $a_{j_1 \dots j_k} = 0$: ■

3. Բազմագծային նշանափոխ ձևեր:

ա) $T \in \mathfrak{I}^2(V)$ 2-թեսնգործ կոչվում է նշանափոխ կամ հակառամաշափ, եթե $T(x, y) = -T(y, x)$, եթե $(x, y) \in V^2$:

Եթե $T \in \mathfrak{I}^2(V)$ թեսնգործ նշանափոխ է, ապա $T(x, x) = 0$, յուրաքանչյուր $x \in V$ տարրի համար: Այսու նաև հակադարձ պնդումը.

$$0 = T(x + y, x + y) = T(x, x) + T(x, y) + T(y, x) + T(y, y) = T(x, y) + T(y, x):$$

բ) $\omega \in \mathfrak{I}^k(V)$ k -թեսնգործ ($k \geq 2$) կոչվում է նշանափոխ կամ հակառամաշափ, եթե

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k), \quad v_1, \dots, v_k \in V: \quad (1.5)$$

$\omega \in \mathfrak{I}^k(V)$ ($k \geq 2$) նշանափոխ թեսնգործների բազմությունը կնշանակենք $\Lambda^k(V)$ -ով: Այս $\mathfrak{I}^k(V)$ տարածության ենթատարածություն է: $k = 1$ դեպքում սահմանում ենք՝ $\Lambda^1(V) = \mathfrak{I}^1(V)$:

Օրինակ: Դիցուք՝ $V = R^n$, $k \leq n$ *

$$v_1 = v_{11}e_1 + \dots + v_{1n}e_n$$

.....

$$v_k = v_{k1}e_1 + \dots + v_{kn}e_n:$$

Վերցնենք $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ հաստատագրված ինդեքսներ և դիտարկենք

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \begin{vmatrix} v_{1i_1} v_{1i_2} \dots v_{1i_k} \\ v_{2i_1} v_{2i_2} \dots v_{2i_k} \\ \dots \\ v_{ki_1} v_{ki_2} \dots v_{ki_k} \end{vmatrix}$$

որոշիք: Այստեղ ω -ի երկու արգումենտները տեղափոխելիս՝ կտեղափոխվեն որոշչի համապատասխան տողերը, որի արդյունքում կփոխվի որոշչի, հետևաբար և՝ ω -ի նշանը, այսինքն՝ $\omega \in \Lambda^k(R^n)$:

* Եթե $k > n$, v_1, \dots, v_k վեկտորներից մեկը գծորեն արտահայտվում է մյուսների միջոցով, հետևաբար, ինչպես ա) կետում, կարելի է ասացուցել, որ $\omega(v_1, \dots, v_k) \equiv 0$:

(1.5) պայմանին առավել հարմար տեսք տալու նպատակով կամայական $\sigma \in \Sigma_k$ արտապատկերման համար մտցնենք հետևյալ նշանակումը.

$$\sigma\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}):$$

Դժվար չէ սոսուզել, որ ցանկացած $\sigma, \tau \in \Sigma_k$ -ի համար

$$\tau(\sigma\omega) = (\tau\sigma)\omega : \quad (1.6)$$

Թեորեմ 1.3: Որպեսզի $\omega \in \mathfrak{I}^k(V)$ թեմզորը լինի նշանափոխ, ամիրաժշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր $\sigma \in \Sigma_k$ արտապատկերման համար

$$\sigma\omega = \varepsilon_\sigma \cdot \omega : \quad (1.7)$$

► Թեորեմի բավարարությունն ակնհայտ է, իսկ անհրաժեշտությունն ապացուցելու համար նկատենք, որ (1.5) պայմանը նշանակում է, որ (1.7) պայմանը տեղի ունի կամայական σ դիրքափոխության համար: Այս կողմից, յուրաքանչյուր $\sigma \in \Sigma_k$ տեղափոխություն հանդիսանում է դիրքափոխությունների վերջավոր արտադրյալ: Այդ պատճառով (1.7)-ը հետևում է (1.5), (1.6)-ից և թեորեմ 1.1-ից: ■

Այժմ սահմանենք թեմզորի ալտերնացիան (*alternation - հաջորդում, հերթագայում*) հետևյալ հավասարությամբ.

$$Alt(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau \tau T, \quad T \in \mathfrak{I}^k(V) : \quad (1.8)$$

Ալտերնացիայի գործողությունը գծային է՝

$$Alt(S + T) = Alt(S) + Alt(T), \quad Alt(aT) = a \cdot Alt(T) :$$

Թեորեմ 1.4: Ծշմարիտ են հետևյալ երկու պնդումները.

1°. Եթե $T \in \mathfrak{I}^k(V)$, ապա $Alt(T) \in \Lambda^k(V)$:

2°. Եթե $\omega \in \Lambda^k(V)$, ապա $Alt(\omega) = \omega$:

► 1°. Ցույց տանք, որ $Alt(T)$ -ն բավարարում է (1.7)-ին: Իրոք*.

$$\sigma(Alt(T)) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau (\sigma\tau)(T) = \frac{\varepsilon_\sigma}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_{\sigma\tau} (\sigma\tau)T = \varepsilon_\sigma Alt(T) :$$

* $\sigma : \mathfrak{I}^k(V) \rightarrow \mathfrak{I}^k(V)$ արտապատկերումը գծային է:

2°. -ը հետևում է (1.8)-ից և (1.7)-ից՝

$$Alt(\omega) = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau \tau \omega = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau^2 \omega = \frac{1}{k!} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \omega = \omega : \blacksquare$$

Հետևանք: $Alt(Alt(T)) = Alt(T)$:

4. Աշանափոխ թենզորմների արտաքին արտադրյալ: Դիցուք $\omega \in \Lambda^k(V)$ և $\eta \in \Lambda^l(V)$: Այդ դեպքում, լոկանութեավես ասած, $\omega \otimes \eta$ թենզորը $\Lambda^{k+l}(V)$ տարածությանը չի պատկանում: Այս նկատառությունը սահմանենք նոր գործողություն՝ $\omega \in \Lambda^k(V)$ և $\eta \in \Lambda^l(V)$ նշանափոխ թենզորմների արտաքին արտադրյալ.

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta) \in \Lambda^{k+l}(V) :$$

Նշենք արտաքին արտադրյալի հետևյալ հատկությունները, որոնց ճշմարտացիությունը կարելի է հեշտությամբ ստուգել.

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = \omega_1 \wedge \eta + \omega_2 \wedge \eta$$

$$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega \wedge \eta_1 + \omega \wedge \eta_2$$

$$(a\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (a\eta) = a(\omega \wedge \eta)$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega : \quad (1.9)$$

Ապացուցենք նշված հատկություններից վերջինը, որի համար ստուգենք

$$Alt(\omega \otimes \eta) = (-1)^{kl} Alt(\eta \otimes \omega) \quad (1.9')$$

հավասարությունը: Նշանակենք σ_0 -ով հետևյալ տեղափոխությունը.

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, & k, & k+1, \dots, k+l \\ l+1, & l+2, \dots, & l+k, & 1, \dots, & l \end{pmatrix} :$$

Այդ դեպքում $\sigma_0(\omega \otimes \eta) = \eta \otimes \omega$ և $\varepsilon_{\sigma_0} = (-1)^{kl}$: Հետևելով (1.7)-ին՝

$$Alt(\omega \otimes \eta) = \varepsilon_{\sigma_0} \cdot \sigma_0 Alt(\omega \otimes \eta) = (-1)^{kl} Alt\sigma_0(\omega \otimes \eta) =$$

$$= (-1)^{kl} Alt(\eta \otimes \omega) :$$

Արտաքին արտադրյալի գուգորդականությունն ապացուցվում է հետևյալ թեորեմի միջոցով.

Թեորեմ 1.5:

1°. Եթե $S \in \mathfrak{I}^k(V)$, $T \in \mathfrak{I}^l(V)$ և $Alt(S) = 0$, ապա

$$Alt(S \otimes T) = Alt(T \otimes S) = 0 :$$

2°. $Alt(Alt(S) \otimes T) = Alt(S \otimes T) = Alt(S \otimes Alt(T)) :$

► 1°. Ըստ սահմանման, ուստի՝ $Alt(S \otimes T)(v_1, \dots, v_{k+l}) =$

$$= \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\tau \in \Sigma_{k+l}} \varepsilon_\tau S(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) T(v_{\tau(k+1)}, \dots, v_{\tau(k+l)}) : \quad (1.10)$$

Դիտարկենք Σ_{k+l} խմբի

$$G := \{\sigma \in \Sigma_{k+l} : \sigma(k+1) = k+1, \dots, \sigma(k+l) = k+l\}$$

Խնդիրը: Կումենանք՝

$$\sum_{\sigma \in G} \varepsilon_\sigma S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau S(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(k)}) =$$

$$= T(v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) k! Alt(S)(v_1, \dots, v_k) = 0 :$$

Այժմ վերցնենք Σ_{k+l} խմբի $\sigma_0 \notin G$ կամայական տարրը և դիտարկենք

$$G\sigma_0 = \{\sigma' \sigma_0 : \sigma' \in G\}$$

հարակից դասը: Նշանակենք՝ $(w_1, \dots, w_{k+l}) \equiv (v_{\sigma_0(1)}, \dots, v_{\sigma_0(k+l)})$:

Կումենանք՝

$$\sum_{\sigma \in G\sigma_0} \varepsilon_\sigma S(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) =$$

$$= \varepsilon_{\sigma_0} \left[\sum_{\sigma' \in G} \varepsilon_{\sigma'} S(w_{\sigma'(1)}, \dots, w_{\sigma'(k)}) \right] T(w_{k+1}, \dots, w_{k+l}) = 0 :$$

Մյուս կողմից, քանի որ (1.10) գումարը հավասար է (միմյանց հետ չհատվող) հարակից դասերի վրա տարածված գումարների գումարին, ուստի այն ևս հավասար է զրոյի:

$Alt(T \otimes S) = 0$ հավասարությունը հետևում է (1.9') -ից:

2°. Ուստի՝ $Alt(Alt(S) \otimes T) - Alt(S \otimes T) = Alt((AltS - S) \otimes T) = 0$,
որտեղ վերջին հավասարությունը հետևում է նախորդ թեորեմի հետևանքից
և 1°-ից: ■

Հետևանք: Եթե $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^l(V)$ և $\theta \in \Lambda^m(V)$, ապա

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta) = \omega \wedge (\eta \wedge \theta) :$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright (\omega \wedge \eta) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} Alt((\omega \wedge \eta) \otimes \theta) = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!} Alt\left[\left(\frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)\right) \otimes \theta\right] = \\ &= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} Alt((\omega \otimes \eta) \otimes \theta) = \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!} Alt(\omega \otimes \eta \otimes \theta) : \end{aligned}$$

Երկրորդ հավասարությունն ապացուցվում է նույն կերպ: ■

Ինդուկտիվ կերպով արտաքին արտադրյալ սահմանվում է նաև երեքից
ավելի արտադրիչների դեպքում և ապացուցվում է նրա
գուգորդականությունը:

5. $\Lambda^k(V)$ տարածության բազիս:

Թեորեմ 1.6: Դիցուք $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ը V տարածության բազիս է, իսկ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ -ը դրա դուալ բազիս է: Այդ դեպքում

$$\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n \quad (1.11)$$

համարդր հանդիսանում է $\Lambda^k(V)$ տարածության բազիս:

Այս թեորեմից անմիջապես հետևում է, որ $\Lambda^k(V)$ տարածության
չափողականությունը C_n^k -է:

► Համաձայն թեորեմ 1.2-ի՝ եթե $\omega \in \Lambda^k(V) \subset \mathfrak{I}^k(V)$, ապա

$$\omega = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n a_{j_1 \dots j_k} \varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k} : \text{Հետևաբար}$$

$$\omega = Alt(\omega) = \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n a_{j_1 \dots j_k} Alt(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k}): \quad (1.12)$$

Մյուս կողմից, արտաքին արտադրյալի սահմանման համաձայն՝

$$Alt(\varphi_{j_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{j_k}) = \frac{1}{k!} \varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k}: \quad (1.13)$$

(1.9)-ից հետևում է, որ $\varphi_{j_p} \wedge \varphi_{j_q} = -\varphi_{j_q} \wedge \varphi_{j_p}$ և, մասնավորապես,

$\varphi_{j_p} \wedge \varphi_{j_p} = 0$: Այդ պատճառով, եթե (1.13) արտաքին արտադրյալի երկու արտադրիչները նույնն են, ապա այդպիսի գումարելիները (1.12)-ում հավասար են 0-ի: Իսկ եթե բոլոր արտադրիչները միմյանցից տարբեր են, ապա արտադրիչների տեղափոխություններով արտադրյալը կարելի է բերել (1.11) տեսքի^{*}: Հետևաբար (1.12) գումարը կներկայացվի որպես (1.11) համակարգի վեկտորների գծային կոմբինացիա՝

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} b_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}: \quad (1.14)$$

(1.11) համակարգի գծորեն անկախությունը ցույց տալու համար ենթադրենք՝

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = 0:$$

Կիրառենք այս հավասարությունը

$$(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \in V^k, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$$

կետում և կստանանք՝

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} (v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} k! a_{i_1 \dots i_k} Alt(\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k})(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau (\varphi_{i_1} \otimes \dots \otimes \varphi_{i_k})(v_{j_{\tau(1)}}, \dots, v_{j_{\tau(k)}}) = \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \varepsilon_\tau \delta_{i_1 j_{\tau(1)}} \dots \delta_{i_k j_{\tau(k)}} = \varepsilon_l a_{j_1 \dots j_k} = a_{j_1 \dots j_k}, \end{aligned}$$

* Կարելի է սպասուցել $\varphi_{j_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_k} = \varepsilon_\sigma \varphi_{j_{\sigma(1)}} \wedge \dots \wedge \varphi_{j_{\sigma(k)}}$ հավասարությունը:

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Դիսողոթյուն: $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ պայմանից երևում է, որ $k \leq n$: Սակայն թերեմի ապացույցից դժվար չէ նկատել, որ եթե $k > n$, ապա $\Lambda^k(V) = \{0\}$: Իրոք. այդ դեպքում կգտնվեն p և q տարրեր ինդեքսներ, այնպիսիք, որ $i_p = i_q$, ուստի կամայական (i_1, \dots, i_k) հավաքածուի համար՝ $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k} = 0$:

6. Աշանափոխ թենզորի ներկայացումը անցման մատրիցի մինորների միջոցով:

Թերեմ 1.6-ից հետևում է, որ եթե V տարածության չափողականությունը n է, ապա $\Lambda^n(V)$ տարածության չափողականությունը 1 է: Դա նշանակում է, որ V -ի վրա որոշված բոլոր նշանափոխները համեմատական են իրենցից ընտրված կամայական ոչ զրոյականին: Այդպիսի թենզորի օրինակ կարող է ծառայել որոշչը:

Թեորեմ 1.7: Եթե $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ը V տարածության բազի է, $\omega \in \Lambda^n(V)$ և $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$, $1 \leq i \leq n$, ապա

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \det(a_{ij}):$$

► Մաքենատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել հետևյալ ներկայացումը.

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{1i_1} \dots a_{ni_n} \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}): \quad (1.15)$$

Այսուղի բոլոր գումարելիիները զրո են, բացառությամբ այն դեպքերից, երբ (i_1, \dots, i_n) -ը $(1, \dots, n)$ -ի ինչ որ σ տեղափոխություն է՝ $i_k = \sigma(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$: Այդ դեպքում $\omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = \varepsilon_\sigma \omega(v_1, \dots, v_n)$, որն էլ տեղադրելով (1.15)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\omega(w_1, \dots, w_n) = \omega(v_1, \dots, v_n) \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \varepsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \omega(v_1, \dots, v_n) \det(a_{ij}): ■$$

Թեորեմ 1.8: Եթե $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ը V տարածության բազիս t , $k < n$,

$$\omega \in \Lambda^k(V) \text{ և } w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j, \quad 1 \leq i \leq k, \text{ ապա } \omega(w_i)$$

$$\omega(w_1, \dots, w_k) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \begin{vmatrix} a_{1j_1} \dots a_{1j_k} \\ \dots \\ a_{kj_1} \dots a_{kj_k} \end{vmatrix}$$

հավասարությունը:

► Ունեն՝

$$\omega(w_1, \dots, w_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}): \quad (1.16)$$

Այստեղ բոլոր գումարելիները զրո են, բացառությամբ այն դեպքերի, երբ (i_1, \dots, i_k) -ն մի ինչ-որ (j_1, \dots, j_k) -ի $(1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n)$ ինչ որ σ տեղափոխություն է՝ $i_m = j_{\sigma(m)}$, $1 \leq m \leq k$: Այդ դեպքում՝

$$\omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \omega(v_{j_{\sigma(1)}}, \dots, v_{j_{\sigma(k)}}) = \varepsilon_{\sigma} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}):$$

Այս արժեքը տեղադրելով (1.16)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\omega(w_1, \dots, w_k) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon_{\sigma} a_{1j_{\sigma(1)}} \dots a_{kj_{\sigma(k)}} =$$

$$= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \begin{vmatrix} a_{1j_1} \dots a_{1j_k} \\ \dots \\ a_{kj_1} \dots a_{kj_k} \end{vmatrix}: \blacksquare$$

Հետևանք: Եթե $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ -ը $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ի դուալ բազիս t , ապա

$$\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(w_1, \dots, w_k) = \begin{vmatrix} a_{1i_1} \dots a_{1i_k} \\ \dots \\ a_{ki_1} \dots a_{ki_k} \end{vmatrix}:$$

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԶԵՎԵՐ

1. Դիֆերենցիալ ձևի սահմանումը: Դիցուք $p \in R^n$ կետը հաստատագրված է: Նշանակենք՝ $R_p^n = \{(p, v) : v \in R^n\}$ և R_p^n բազմության վրա սահմանենք վեկտորական տարածության գործողությունները.

$$(p, v) + (p, w) = (p, v + w); \quad a(p, v) = (p, av), a \in R;$$

(p, v) -ի փոխարեն մենք հաճախ կգրենք՝ v_p (կարդացվում է v վեկտորը՝ կիրառած p կետում): Եթե R^n -ը կոորդինատային հարթությունն է ($n = 2$) կամ եռաչափ տարածությունը ($n = 3$), $v \in R^n$ էլեմենտը պատկերվում է վեկտորի տեսքով, որի սկզբնակետը կոորդինատական համակարգի սկզբնակետն է, իսկ վերջնակետը՝ v -ն: Այդ դեպքում $v_p \in R_p^n$ տարրը պատկերվում է v -ի հետ նոյն երկարության և ուղղության վեկտորի տեսքով, որի սկզբնակետը p -ն է:

Եթե $\{e_1, \dots, e_n\}$ -ը R^n -ի ստանդարտ բազիսն է, ապա $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$ -ն կլինի բազիս R_p^n -ում: Այն կոչվում է R_p^n -ի ստանդարտ բազիս:

R_p^n -ում սկալյար (ներքին) արտադրյալը սահմանվում է բնական ձևով՝

$$\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle:$$

Այժմ նշանակենք $\{\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)\}$ -ով R_p^n տարածության $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$ բազիսի դուալ բազիսը, որը p -ից անկախ է հետևյալ իմաստով՝ $\varphi_i(p)(v_p) = \varphi_i(v)$:

Դիցուք ունենք $\omega(p) \in \Lambda^k(R_p^n)$, $1 \leq k \leq n$ բազմագծային նշանափոխ արտապատկերումը: Այդ դեպքում, համաձայն (1.14)-ի, այն կներկայացվի հետևյալ տեսքով.

$$\omega(p) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(p) [\varphi_{i_1}(p) \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}(p)]: \quad (2.1)$$

Նկատենք, որ p կետը փոփոխելիս փոխվում են ոչ միայն $\omega_{i_1 \dots i_k}(p)$ գործակիցները, այլ նաև՝ $\omega(p)$ -ի փոփոխման տիրույթը՝ $\Lambda^k(R_p^n)$ տարածությունը:

(2.1) տեսքի արտահայտությունը կոչվում է R^n -ի վրա որոշված k -աստիճանի դիֆերենցիալ ձև: $\omega(p)$ դիֆերենցիալ ձևը կարող է նաև (ամբողջ R^n -ի փոխարեն) որոշված լինել կամայական $G \subset R^n$ տիրույթում: Այդ դեպքում կասենք, որ $\omega(p)$ դիֆերենցիալ ձևը G տիրույթում *անընդհատ* է կամ դիֆերենցելի, եթե այդպիսին են $\omega_{i_1 \dots i_k}(p)$ գործակիցները:

$f : R^n \rightarrow R$ (կամ $f : G \rightarrow R$) ֆունկցիան կոչվում է 0 աստիճանի դիֆերենցիալ ձև և $f \omega$ արտադրյալը հաճախ գրվում է $f \wedge \omega$ տեսքով:

2. Դիֆերենցիալ ձևի (արտաքին) դիֆերենցիալ: Նախ դիտարկենք $\omega = f : R^n \rightarrow R$ զրո աստիճանի դիֆերենցիալ ձևը*: Ենթադրենք, որ f ֆունկցիան դիֆերենցելի է: Այդ դեպքում f -ի $df \in \Lambda^1(R_p^n)$ դիֆերենցիալը սահմանվում է հետևյալ կերպ:

$$d\omega(p)(v_p) = df(p)(v_p) = Df(p)(v),$$

որտեղ $Df(p)$ -ն f արտապատկերման Յակոբի մատրիցն է (գրադիենտը), $Df(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right)$: Երբեմն $df(p)(v_p)$ գրելու փոփոխեն գրում են $df(p; v)$:

Մասնավորապես, եթե f -ը i -րդ պրոյեկտող արտապատկերումն է՝

$$f(x) = x^i \equiv \pi^i(x), \quad x = (x^1, \dots, x^n),$$

ապա

* Առաջիկայում, եթե անհրաժեշտություն չինի կոնկրետացնելու դիֆերենցիալ ձևի որոշման տիրույթը, մենք կենթադրենք, որ այն որոշված է ամբողջ R^n -ի վրա:

$$dx^i(p)(v_p) = d\pi^i(p)(v_p) = D\pi^i(p)(v) = \pi^i(v) = v^i :$$

Ուստի $dx^i(p)((e_j)_p) = \delta_{ij}$, որը նշանակում է, որ $\{dx^1(p), \dots, dx^n(p)\}$ -ն $\{(e_1)_p, \dots, (e_n)_p\}$ ստանդարտ բազիսի դուալ բազիսն է: Այլ կերպ ասած՝ $\varphi_i(p) = dx^i(p)$, $1 \leq i \leq n$: Տեղադրելով այս արժեքները (2.1)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (2.1')$$

որը կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի կանոնական ներկայացում:

Առանձնահատուկ հետաքրքրություն է ներկայացնում $f : R^n \rightarrow R$ զրո աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի $d f$ գործընթացում. $f : R^n \rightarrow R$ զրո աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի $d f$ գործընթացում.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n := D_1 f dx^1 + \dots + D_n f dx^n :$$

Այժմ սահմանենք կամայական k -աստիճանի ($k \geq 1$) ω դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալ: Եթակետ է ընդունվում (2.1') կանոնական ներկայացումը և դիֆերենցիալը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով.

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (d\omega_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha \omega_{i_1 \dots i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} : \end{aligned}$$

Նկատենք, որ k -աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալը $k+1$ աստիճանի դիֆերենցիալ ձև է:

Թեորեմ 2.1: Դիցուք R^n -ի վրա որոշված ω և η դիֆերենցիալ ձևերը դիֆերենցելի են: Այդ դեպքում

$$1^\circ. \quad d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta ,$$

$$2^\circ. \quad \text{Եթե } \omega \text{-ը } k \text{-աստիճանի } \text{է, ապա}$$

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta ,$$

$$3^\circ. \quad d(d\omega) = 0 \quad (\text{կամ } d^2\omega = 0) :$$

► 1°.-ն անմիջապես բխում է դիֆերենցիալի սահմանումից:

2°. Հաշվի առնելով 1°.-ը և արտաքին արտադրյալի բաշխական հատկությունը՝ բավական է դիտարկել այն դեպքը, երբ

$$\omega = f_1 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad \eta = f_2 dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l},$$

որտեղ $k+l \leq n$, իսկ $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ և $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq n$ ինդեքսների բազմությունները չեն հատվում ու $f_1, f_2 : R^n \rightarrow R$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են: Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(f_1 f_2 dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}) = \\ &= [(df_1) f_2 + f_1 df_2] \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = (d\omega) \wedge \eta + \\ &+ (-1)^k f_1 \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge df_2 \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta: \end{aligned}$$

$$3°. \text{Քանի որ } d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^n D_\alpha \omega_{i_1 \dots i_k} dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \text{ուստի}$$

$$d(d\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n D_{\alpha\beta} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}:$$

Սակայն՝

$$D_{\alpha\beta} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = -D_{\beta\alpha} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$\text{հետևաբար՝ } \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n D_{\alpha\beta} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^\beta \wedge dx^\alpha \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0: \blacksquare$$

3. Փոփոխականի փոխարինում դիֆերենցիալ ձևերում: Դիցոր ունենք $f : R^n \rightarrow R^m$ դիֆերենցելի արտապատկերումը: Սահմանենք մի նոր արտապատկերում՝

$$f_* : R_p^n \rightarrow R_{f(p)}^m,$$

որը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f_*(v_p) = (Df(p)(v))_{f(p)}:$$

Այնուհետև, R^m -ում որոշված յուրաքանչյուր k -աստիճանի ω դիֆերենցիալ ձևի համապատասխանության մեջ ունենք R^n -ում որոշված f^* ադիֆերենցիալ ձևը հետևյալ կերպ.

$$f^* \omega(p; v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p); f_*(v_1), \dots, f_*(v_k))^*, \quad (2.2)$$

որտեղ $v_i \in R_p^n$, $1 \leq i \leq k$:

Եթե ω -ն զբու աստիճանի է, ապա $f^* \omega := \omega \circ f$: Այսպիսով, յուրաքանչյուր հաստատագրված $p \in R^n$ արժեքի դեպքում՝

$$f^* : \Lambda^k(R_{f(p)}^m) \rightarrow \Lambda^k(R_p^n) :$$

$f^* \omega$ -ն կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի նախապատկեր f արտապատկերման միջոցով: Կիրառելի է նաև $f^*(\omega)$ նշանակումը:

Թեորեմ 2.2: Դիցուք ունենի $y = f(x) : R^n \rightarrow R^m$ դիֆերենցելի արտապատկերմը: Այդ դեպքում

$$1^\circ. \quad f^*(dy^i) = \sum_{j=1}^n D_j f^i dx^j = df^i,$$

$$2^\circ. \quad f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*\omega_1 + f^*\omega_2, \quad f^*a\omega = af^*\omega,$$

$$3^\circ. \quad \text{Եթե } g : R^m \rightarrow R \text{ արտապատկերմը } \eta \text{ դիֆերենցելի } t, \text{ ապա}$$

$$f^*(g\omega) = (g \circ f)f^*\omega,$$

$$4^\circ. \quad f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta,$$

$$5^\circ. \quad \text{Եթե } f \text{-ը կրկնակի դիֆերենցելի } t, \text{ ապա } f^*(d\omega) = d(f^*\omega): \quad (2.3)$$

► Ապացուցենք նախ 1°-ը.

$$f^*(dy^i)(p, v) = dy^i(f(p)) \left(f_*(v_p) \right) = dy^i(f(p)) (Df(p)(v))_{f(p)} =$$

$$= dy^i \left(\sum_{j=1}^n D_j f^1(p) v^j, \dots, \sum_{j=1}^n D_j f^m(p) v^j \right)_{f(p)} =$$

$$= \sum_{j=1}^n D_j f^i(p) v^j = \sum_{j=1}^n D_j f^i(p) dx^j(v_p):$$

2°-ը և 3°-ը ակնհայտ են, ապացուցենք 4°-ը: Ենթադրենք, թե ω -ն k աստիճանի է, իսկ η -ն՝ ℓ : Այդ դեպքում, եթե $v_i \in R_p^n$, $1 \leq i \leq k + \ell$, ապա

* Կույնն է, ինչ $f^*\omega(p)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(p))(f_*(v_1), \dots, f_*(v_k))$:

$$\begin{aligned}
f^*(\omega \wedge \eta)(p; v_1, \dots, v_{k+\ell}) &= (\omega \wedge \eta)(f(p); f_*(v_1), \dots, f_*(v_{k+\ell})) = \\
&= \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} Alt(\omega \otimes \eta)(f(p); f_*(v_1), \dots, f_*(v_{k+\ell})) = \\
&= \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma \omega(f(p); f_*(v_{\sigma(1)}), \dots, f_*(v_{\sigma(k)})) \times \\
&\quad \times \eta(f(p); f_*(v_{\sigma(k+1)}), \dots, f_*(v_{\sigma(k+\ell)})) = \\
&= \frac{1}{k! \ell!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+\ell}} \varepsilon_\sigma (f^* \omega \otimes f^* \eta)(p; f_*(v_{\sigma(1)}), \dots, f_*(v_{\sigma(k+\ell)})) = \\
&= \frac{(k+\ell)!}{k! \ell!} Alt(f^* \omega \otimes f^* \eta)(p; v_1, \dots, v_{k+\ell}) = (f^* \omega \wedge f^* \eta)(p; v_1, \dots, v_{k+\ell});
\end{aligned}$$

5° -ի ապացույցը. նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ ω -ն 0 աստիճանի է՝ $\omega : R^m \rightarrow R$: Դիֆերենցիալի ձևի ինվարիանտության շնորհիվ ունենք՝

$$\begin{aligned}
d(f^* \omega(x)) &= d\omega(f(x)) = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial y^\alpha}(f(x)) df^\alpha = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial y^\alpha}(f(x)) f^* dy^\alpha = \\
&= \sum_{\alpha=1}^m f^* \left(\frac{\partial \omega}{\partial y^\alpha}(y) dy^\alpha \right) = f^* \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \omega}{\partial y^\alpha}(y) dy^\alpha = f^*(d\omega(y));
\end{aligned}$$

Ընդհանուր դեպքում 5°-ն ապացուցելու համար կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը: Ենթադրենք 5°-ը ճիշտ է բոլոր k աստիճանի դիֆերենցիալ ձևերի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև $(k+1)$ աստիճանի դիֆերենցիալ ձևերի համար: Բավական է դիտարկել $\omega \wedge dy^i$ տեսքի ձևերը: Ունենք՝*

$$\begin{aligned}
f^*(d(\omega \wedge dy^i)) &= f^*(d\omega \wedge dy^i) = f^*(d\omega) \wedge f^* dy^i = \\
&= d(f^* \omega) \wedge f^* dy^i = d(f^* \omega \wedge f^* dy^i) = d(f^*(\omega \wedge y^i));
\end{aligned}$$

* Եթզ $\eta = g(y)$ -ը 0-աստիճանի է, $g\omega = g \wedge \omega$:

Հետևանք: Եթե $y = f(x) : R^n \rightarrow R^m$, $y^i = f^i(x^1, \dots, x^n)$, $i = 1, \dots, m$ և

$$\omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k},$$

ապա

$$f^* \omega = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n}} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(x)) \frac{D(f^{i_1}, \dots, f^{i_k})}{D(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

► Թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝

$$f^* \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(f(x)) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k};$$

Հաշվենք դիֆերենցիալների արտաքին արտադրյալը: Կիրառելով մաքենատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ կստանանք

$$\begin{aligned} df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k} &= \\ &= \left(\frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^n} dx^n \right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^n} dx^n \right) = \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial f^{i_2}}{\partial x^{j_2}} \dots \frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \varepsilon_\sigma \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_{\sigma(1)}}} \cdot \frac{\partial f^{i_2}}{\partial x^{j_{\sigma(2)}}} \dots \frac{\partial f^{i_k}}{\partial x^{j_{\sigma(k)}}} \right) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \frac{D(f^{i_1}, \dots, f^{i_k})}{D(x^{j_1}, \dots, x^{j_k})} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}; \end{aligned}$$

Պնդումն ապացուցված է: ■

4. Տրանզիստորյումն (տարանցիկություն):

Թեորեմ 2.3: Եթե $f : R^n \rightarrow R^m$ և $g : R^m \rightarrow R^\ell$ արտապատկերումները

դիֆերենցելի են, ապա

$$1^0. (g \circ f)_* = g_* \circ f_*, \quad 2^0. (g \circ f)^* = g^* \circ f^*;$$

► Ապացուցենք նախ 1⁰-ը.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)_*(v_p) &= (D(g \circ f)(p)(v))_{(g \circ f)(p)} = \\
&= ((Dg(f(p)) \circ Df(p)(v)))_{g(f(p))} = \\
&= g_*((D(f(p))(v))_{f(p)}) = g_*(f_*(v_p)) = (g_* \circ f_*)(v_p);
\end{aligned}$$

2^0 . Դիցուք $p \in R^n$ և $v_1, \dots, v_k \in R_p^n$, իսկ $\omega \in \Lambda^k(R_{g(f(p))}^\ell)$: Այդ

դեպքում՝

$$\begin{aligned}
&\left[(f^* \circ g^*)\omega \right](p; v_1, \dots, v_k) = f^*(g^*\omega)(p; v_1, \dots, v_k) = \\
&= g^*\omega(f(p); f_*(v_1), \dots, f_*(v_k)) = \omega(g(f(p)); g_*(f_*(v_1)), \dots, g_*(f_*(v_k))) = \\
&= \omega((g \circ f)(p); (g \circ f)_*(v_1), \dots, (g \circ f)_*(v_k)) = (g \circ f)^*\omega(p; v_1, \dots, v_k);
\end{aligned}$$

Թերեմն ապացուցված է: ■

5. Պուանկարեի լեմման: ω դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է փակ $A \subset R^n$ տիրույթում, եթե A տիրույթում տեղի ունի $d\omega = 0$ հավասարությունը, և կոչվում է ճշգրիտ A տիրույթում, եթե գոյություն ունի η դիֆերենցիալ ձև, այնպիսին, որ այդ տիրույթում $\omega = d\eta$: Այս դեպքում η դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է ω -ի նախնական: Թերեմ 2.1-ի համաձայն (*կետ 3°*), յուրաքանչյուր ճշգրիտ ձև կական հարց է առաջանում. ճիշտ է արդյոք հակադարձ պնդումը: Հետևյալ օրինակը ցույց է տալիս, որ պատասխանը բացասական է:

Դիտարկենք

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy =: Pdx + Qdy$$

առաջին աստիճանի դիֆերենցիալ ձևը: Կորագիծ ինտեգրալներն ուսումնասիրելիս՝ ապացուցվել է, որ կոորդինատների սկզբնակետը դեռ նետած հարթության վրա $d\omega = 0$, բայց այդ դիֆերենցիալ ձևը նախնական չունի, այսինքն՝ ω -ն ճշգրիտ չէ:

Սահմանում: $A \subset R^n$ տիրույթը կոչվում է աստղաձև 0 կետի նկատմամբ, եթե յուրաքանչյուր $x \in A$ կետի համար $[0, x]$ հատվածը պատկանում է A -ին:

Լեմմա 2.1: Եթե $A \subset R^n$ տիրույթը աստղածն է 0 կետի նկատմամբ և ω դիֆերենցիալ ձևը փակ է A տիրույթում, ապա ω -ն այդ տիրույթում ճշգրիտ է:

► Նախ քննարկենք այն մասնավոր դեպքը, երբ ω -ն 0 աստիճանի դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալ է՝

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = df :$$

f -ը արտահայտենք ω -ի միջոցով: Վերցնենք $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in A$: Ենթադրենք $f(0) = 0$ և նշանակենք՝ $F(t) = f(tx^1, \dots, tx^n)$: Այս ֆունկցիան որոշված է կամայական $t \in [0,1]$ -ի համար, քանի որ A որոշման տիրույթն աստղածն է 0-ի նկատմամբ: Այդ դեպքում Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^n) &= F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(t) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(tx) \cdot x^i dt = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \omega_i(tx) dt \right) x^i : \end{aligned}$$

Անցնենք ընդհանուր դեպքի ապացույցին: Դիցուք՝

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} :$$

Նշանակենք՝

$$(I\omega)(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) x^{i_1} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \hat{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

որտեղ \wedge նշանը dx^{i_α} -ի գլուխն նշանակում է, որ dx^{i_α} -ն բացակայում է: Ցույց տանք, որ

$$d(I\omega) + I(d\omega) = \omega : \tag{2.4}$$

Քանի որ ω -ն փակ է՝ $d\omega = 0$, ապա $I(d\omega) = 0$: Հետևաբար, (2.4)-ից հետևում է, որ $d(I\omega) = \omega$, այսինքն՝ $I\omega := \eta$ -ն փնտրվող դիֆերենցիալ ձևն է: Ուստի՝

$$\begin{aligned}
d(I\omega) = & k \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\
& + \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{\alpha=1}^k \sum_{j=1}^n (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \left(D_j \omega_{i_1 \dots i_k} \right)(tx) dt \right) \times \\
& \times x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} ;
\end{aligned}$$

Այսուհետև զրենք ω -ի դիֆերենցիալը՝

$$d\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n D_j(\omega_{i_1 \dots i_k}(x)) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} ;$$

Հետևաբար,

$$\begin{aligned}
I(d\omega) = & \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k D_j \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) x^j dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} - \\
& - \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^k (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^k \left(D_j \omega_{i_1 \dots i_k} \right)(tx) dt \right) \times \\
& \times x^{i_\alpha} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \overset{\wedge}{dx^{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} ;
\end{aligned}$$

Գումարելով $d(I\omega)$ -ի և $I(d\omega)$ -ի արժեքները՝ կստանանք

$$\begin{aligned}
d(I\omega) + I(d\omega) = & \sum_{i_1 < \dots < i_k} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \\
& + \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t^k x^j D_j \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\
& = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} \left(t^k \omega_{i_1 \dots i_k}(tx) \right) dt \right) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \\
& = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \omega ;
\end{aligned}$$

Ապացույցն ավարտվեց: ■

§3. ԱՏՈՔՄԻ ԹԵՌԵՄԸ ԾՂԹԱՆԵՐՈՎ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԲՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՍԱՐ

1. Ախճական խորանարդ և շղթա: Նշանակենք՝

$$[0,1]^k = \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_k :$$

Սահմանում: Կիցոք՝ $k \leq n$: $c : [0,1]^k \rightarrow R^n$ անընդհատ ֆունկցիան կոչվում է սինգուլյար k չափանի խորանարդ:

$I^k(x) = x$, $x \in [0,1]^k$ ֆունկցիան կոչվում է ստանդարտ սինգուլյար k -խորանարդ:

Կյանքարկենք հետևյալ ֆորմալ գումարները.

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_s c_s, \quad (3.1)$$

որտեղ c_1, \dots, c_s -երը սինգուլյար k չափանի խորանարդներ են, իսկ $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$: Այս գումարները կանվանենք սինգուլյար k չափանի շղթաներ: Սինգուլյար k չափանի c խորանարդը կարելի է դիտարկել որպես սինգուլյար k չափանի շղթա՝ $c = 1 \cdot c$:

C -ով նշանակենք բոլոր սինգուլյար k չափանի խորանարդների բազմությունը: Այդ դեպքում (3.1) ֆորմալ գումարին կարելի է վերագրել հետևյալ իմաստը. դիտարկենք այն $f : C \rightarrow \mathbb{Z}$ արտապատկերումները, որոնք 0-ից տարբեր արժեք են ընդունում միայն վերջավոր թվով «կետերում»: Եվ եթե $f(c_i) = a_i$, $1 \leq i \leq s$, իսկ $f(c) = 0$, եթե $c \neq c_i$, ապա այդ ֆունկցիային կհամապատասխանեցնենք (3.1) շղթան: Այդ դեպքում $c = 1 \cdot c$ պայմանավորվածությունը նշանակում է, որ մենք c սինգուլյար խորանարդը նույնացնում ենք այն f ֆունկցիայի հետ, որը բավարարում է

$$f(c) = 1 \text{ և } f(c') = 0, \text{ եթե } c' \neq c$$

պայմանին:

Սինգուլյար շղթաների համար $f + g$ և mf , $m \in \mathbb{Z}$ գործողությունները սահմանվում են բնական ձևով, այն է՝

$$(f + g)(c) = f(c) + g(c), \quad (mf)(c) = mf(c) :$$

Այժմ սահմանենք սինգուլյար շղթայի եզր: Դրա համար ելման կետը ընդունենք ստանդարտ սինգուլյար խորանարդը: Նշանակենք՝

$$I_{(i,\alpha)}^k(t) := I^k(t^1, \dots, t^{i-1}, \alpha, t^i, \dots, t^{k-1}) = (t^1, \dots, t^{i-1}, \alpha, t^i, \dots, t^{k-1}),$$

որտեղ $t \in [0,1]^{k-1}$, $\alpha = 0$ կամ 1 և $1 \leq i \leq k$:

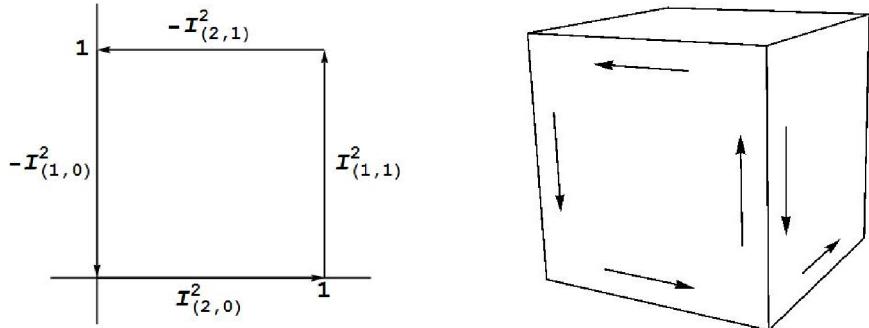
$I_{(i,\alpha)}^k$ -ն սինգուլյար $(k-1)$ չափանի խորանարդ է: Այն կոչվում է I^k ստանդարտ խորանարդի (i,α) նիստ:

Այնուհետև նշանակենք՝

$$\partial I^k := \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^k :$$

∂I^k -ն սինգուլյար $(k-1)$ չափանի շղթա է: Այն կոչվում է I^k -ի եզր:

I^2 և I^3 ստանդարտ խորանարդների եզրերը երկրաչափորեն կարելի են պատկերել հետևյալ տեսքով՝



Կամայական c սինգուլյար k -չափանի խորանարդի (i,α) նիստը և ճշգրիտ սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$c_{(i,\alpha)}(t) = c(I_{(i,\alpha)}^k(t)), \quad \alpha = 0,1; \quad \partial c = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)} :$$

Այնուհետև $c = a_1 c_1 + \dots + a_s c_s$ շղթայի ճշգրիտ եզրը սահմանենք հետևյալ բանաձևով՝

$$\partial c = \sum_{j=1}^s a_j \partial c_j :$$

Թեորեմ 3.1: Յուրաքանչյուր c սինգուլյար k -չափանի շղթայի համար $\partial(\partial c) = 0$:

► Նախ ցույց տանք, որ

$$\left(I_{(i,\alpha)}^k \right)_{(j,\beta)} = \left(I_{(j+1,\beta)}^k \right)_{(i,\alpha)}, \text{ եթե } \alpha, \beta = 0, 1 \text{ և } i \leq j : \quad (3.2)$$

Դիցուք՝ $x \in [0,1]^{k-2}$: Այդ դեպքում ունենք՝

$$\begin{aligned} \left(I_{(i,\alpha)}^k \right)_{(j,\beta)}(x) &= I_{(i,\alpha)}^k \left(I_{(j,\beta)}^{k-1}(x) \right) = I_{(i,\alpha)}^k(x^1, \dots, x^{i-1}, \beta, x^j, \dots, x^{k-2}) = \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{k-2}), \\ \left(I_{(j+1,\beta)}^k(x) \right)_{(i,\alpha)} &= I_{(j+1,\beta)}^k(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{k-2}) = \\ &= (x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \dots, x^{j-1}, \beta, x^j, \dots, x^{k-2}): \end{aligned}$$

(3.2)-ն ապացուցվեց:

Նման դատողություններով կհամոզվենք, որ յուրաքանչյուր c սինգուլյար k -չափանի խորանարդի համար՝

$$\left(c_{(i,\alpha)} \right)_{(j,\beta)} = \left(c_{(j+1,\beta)} \right)_{(i,\alpha)}, \quad 1 \leq i \leq j \leq k-1, \quad \alpha, \beta = 0, 1 :$$

Մյուս կողմից,

$$\partial(\partial c) = \partial \left(\sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^{i-1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)} \right) = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^{i-1} \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{i-1} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} \left(c_{(i,\alpha)} \right)_{(j,\beta)} = 0,$$

քանի որ ստացված գումարի մեջ $\left(c_{(i,\alpha)} \right)_{(j,\beta)}$ -ն և $\left(c_{(j+1,\beta)} \right)_{(i,\alpha)}$ -ն մտնում են հակադիր նշաններով և

$$\{(p;q) : 1 \leq p \leq k, 1 \leq q \leq k-1\} = \{(i,j), (j+1,i) : 1 \leq i \leq j \leq k-1\} :$$

Քանի որ թեորեմը ճիշտ է կամայական սինգուլյար k -չափանի խորանարդի համար, ապա այս ճիշտ է նաև կամայական սինգուլյար k -չափանի շղթայի համար: ■

2. Ստորև թեորեմ: Դիցուք D -ն J -չափելի բազմություն է R^k -ում և $f \in \mathfrak{R}(D)$: Այդ դեպքում $\omega = f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\int_D \omega := \int_D f = \int_D f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k :$$

Եթե ω -ն k -աստիճանի դիֆերենցիալ ձև է $D \subset R^n$ տիրույթում, c -ն սինգուլյար k -չափանի դիֆերենցելի խորանարդ է՝ $c : [0,1]^k \rightarrow D$, ապա

$$\int_c \omega := \int_{[0,1]^k} c^* \omega, \quad (c^* \omega = f(c(x)) dc^1 \wedge \dots \wedge dc^n),$$

որտեղ ենթադրվում է, որ c -ն որոշված է $[0,1]^k$ խորանարդը պարունակող որևէ տիրույթում և անընդհատ դիֆերենցելի է այդ տիրույթում:

$c = I^k$ մասնավոր դեպքում ունենք՝

$$\int_{I^k} \omega = \int_{[0,1]^k} (I^k)^* \omega = \int_{[0,1]^k} \omega :$$

Վերջապես, ω -ի իմտեզքրալը՝ տարածված $C = \sum a_i c_i$ շղայով, սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$\int_C \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega :$$

Թեորեմ 3.2 (Ստորև): Եթե ω -ն $(k-1)$ -աստիճանի անընդհատ դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է $D \subset R^n$ բաց բազմության վրա ($n \geq k$), և c -ն սինգուլյար k -չափանի շղթա է, որի արժեքներ է ընդունում D -ից, ապա

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega :$$

► Նախ ապացուենք այն դեպքում, երբ $c = I^k$, իսկ ω -ն $[0,1]^k$ -ը պարունակող տիրույթում $(k-1)$ -աստիճանի անընդհատ դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է: Բավական է քննարկել

$$\omega = f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k \tag{3.3}$$

դեպքը, քանի որ յուրաքանչյուր $(k-1)$ -աստիճանի դիֆերենցիալ ձև հանդիսանում է (3.3) տեսքի դիֆերենցիալ ձևերի գումար: Ունենք՝

$$d\omega = \sum_{j=1}^k D_j f dx^j \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k = (-1)^{i-1} D_i f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k :$$

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{[0,1]^k} (-1)^{i-1} D_i f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left\{ \int_0^1 D_i f(x^1, \dots, x^k) dx^i \right\} dx^1 \dots \hat{dx^i} \dots dx^k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} \left[f(x^1, \dots, \overset{i}{1}, \dots, x^k) - f(x^1, \dots, \overset{i}{0}, \dots, x^k) \right] dx^1 \dots \hat{dx^i} \dots dx^k = \\ &= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) dx^1 \dots \hat{dx^i} \dots dx^k - \\ &\quad - (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k) dx^1 \dots \hat{dx^i} \dots dx^k : \end{aligned}$$

$$\text{Այժմ հաշվենք } \int_{\partial c} \omega \text{ ինտեգրալը: Քանի որ } \partial I^k = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^{j-1} (-1)^{j+\alpha} I_{(j,\alpha)}^k, \text{ ,}$$

$c = I^k$, ուստի

$$\begin{aligned} \int_{\partial c} \omega &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^{j-1} (-1)^{j+\alpha} \int_{I_{(j,\alpha)}}^k f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k = \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^{j-1} (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} \left(I_{(j,\alpha)}^k \right)^* \left(f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k \right) : \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{Քանի որ } x = I_{(j,\alpha)}^k(t) = (t^1, \dots, t^{j-1}, \alpha, t^j, \dots, t^{k-1}), \text{ ապա } x^1 = t^1, \dots,$$

$$x^{j-1} = t^{j-1}, \quad x^j = \alpha, \quad x^{j+1} = t^j, \dots, \quad x^k = t^{k-1}: \text{Հետևաբար,}$$

$$dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ dt^1 \wedge \dots \wedge dt^{k-1}, & i = j \end{cases} :$$

Տեղադրելով այդ արժեքները (3.4)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\begin{aligned}
\int_{\partial c} \omega &= \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} f(t^1, \dots, t^{i-1}, \alpha, t^i, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} = \\
&= (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(t^1, \dots, 1, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} - \\
&\quad - (-1)^{i-1} \int_{[0,1]^{k-1}} f(t^1, \dots, 0, \dots, t^{k-1}) dt^1 \dots dt^{k-1} = \int_c d\omega:
\end{aligned}$$

Այսպիսով, թեորեմն այս դեպքում ապացուցենք: Հիմա թեորեմն ապացուցենք այն դեպքում, եթե c -ն կրկնակի դիֆերենցելի կամայական սինգուլյար խորանարդ է: Այս դեպքում թեորեմ 2.2-ի համաձայն՝

$$c^*(d\omega) = d(c^*\omega): \text{Հետևաբար,}$$

$$\begin{aligned}
\int_c d\omega &= \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega, \\
\int_{\partial c} \omega &= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{c_{(j,\alpha)}} \omega = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{[0,1]^{k-1}} c_{(j,\alpha)}^* \omega = \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{I^{k-1}} \left(c \circ I_{(j,\alpha)}^k \right)^* \omega = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{I^{k-1}} \left(I_{(j,\alpha)}^k \right)^* \circ c^* \omega = \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{j+\alpha} \int_{I_{(j,\alpha)}^k} c^* \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega = \int_c d\omega:
\end{aligned}$$

Վերջապես, կամայական $c = \sum a_i c_i$ շղթայի համար ունենք՝

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega:$$

c -ի կրկնակի դիֆերենցելիության լրացուցիչ պայմանից ազատվելու համար կօգտվենք ողորկ մոտարկումների վերաբերյալ հետևյալ լեմմայից. Եթե c սինգուլյար խորանարդն անընդհատ դիֆերենցելի է $[0,1]^k$ խորանարդը պարունակող բաց բազմության վրա, ապա յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի c_ε անվերջ դիֆերենցելի սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$c_\varepsilon(x) \rightrightarrows c(x) \text{ և } D_i c_\varepsilon^j(x) \rightrightarrows D_i c^j(x), \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n, \quad x \in [0,1]^k: \quad (3.5)$$

Նկատենք, որ c -ի կրկնակի դիֆերենցելիությունից մենք օգտվել ենք միայն

$$\int_{[0,1]^k} c^* d\omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega \quad (3.6)$$

հավասարությունն ապացուցելիս: Ուստի մեզ մնում է (3.6) հավասարությունն ապացուցել անընդհատ դիֆերենցելի c -ի համար: Դրա համար (3.6) հավասարությունը կգրենք c_ε -ի համար և, ε -ը ձգտեցնելով զրոյի, կստանանք (3.6)-ը:

Վերջում նշենք լեմմայի ապացույցի սխեման:

Նախ ընտրենք $\varphi \in C^\infty(R)$ ֆունկցիա, այնպես, որ $\varphi(s) > 0$, $s \in (0,1)$; $\varphi(s) = 0$, $s \notin (0,1)$ (տես XVII, §8, 1): Այնուհետև նշանակենք՝

$$a = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(|y|^2) dy^1 \dots dy^k \right\}^{-1} :$$

Այդ դեպքում յուրաքանչյուր $\varepsilon > 0$ բվի համար

$$a\varepsilon^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\varepsilon^{-2}|y|^2) dy^1 \dots dy^k = 1 :$$

Այնուհետև c սինգուլյար խորանարդը ներկայացնենք կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝ $c(x) = (c^1(x^1, \dots, x^k), \dots, c^n(x^1, \dots, x^k))$ և նշանակենք՝

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^j(x) &= a\varepsilon^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} c^j(y) \varphi(\varepsilon^{-2}|x-y|^2) dy^1 \dots dy^k = \\ &= a\varepsilon^{-k} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} c^j(x-y) \varphi(\varepsilon^{-2}|y|^2) dy^1 \dots dy^k : \end{aligned}$$

Այդ դեպքում $c_\varepsilon(x) = (c_\varepsilon^1(x), \dots, c_\varepsilon^n(x))$ ֆունկցիան կլինի անվերջ դիֆերենցելի և կբավարարի (3.5) պայմանին: ■

§4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԲԱԶՍԱԶԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Դիֆերենցելի բազմածևություն: Դիցուք $U, V \subset R^n$ բազմությունները բաց են: $h: U \leftrightarrow V$ վոլյումիարժեք արտապատկերումը կոչվում է դիֆերենտիպիզմ, եթե h և h^{-1} ֆունկցիաներն ամրնուած դիֆերենցելի են:

Եթե h -ը դիֆերենտիպիզմ է, ապա օգտվելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցման թեորեմից և որոշիչների բազմապատկման թեորեմից՝

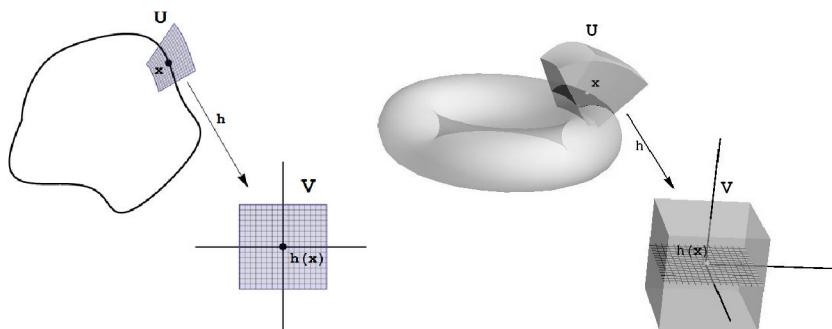
$$1 = \det(h^{-1} \circ h)'(a) = \det[(h^{-1})'(h(a)) \circ h'(a)] = \det(h^{-1})'(h(a)) \det h'(a),$$

հետևաբար, $\det h'(a) \neq 0$, $a \in U$:

Սահմանում: $M \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է k -չափանի ($0 < k \leq n$) դիֆերենցելի բազմածևություն կամ ուղղակի՝ բազմածևություն, եթե յուրաքանչյուր $a \in M$ կետի համար բավարարվում է հետևյալ պայմանը.

(ա) Գոյություն ունեն a կետը պարունակող $U \subset R^n$ բաց բազմություն, $V \subset R^n$ բաց բազմություն $*$ և $h: U \leftrightarrow V$ դիֆերենտիպիզմ, այնպիսիք, որ

$$h(U \cap M) = V \cap (R^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^{k+1} = \dots = y^n = 0\}:$$



Սխալափ բազմածևություն R^2 -ում և երկափ բազմածևություն R^3 -ում:

* Որպես V կարող ենք վերցնել $h(a)$ կենտրոնով բաց խորանարդ:

Նշենք, որ R^n -ի յուրաքանչյուր բաց ենթաբազմություն հանդիսանում է n -չափանի բազմածնություն, իսկ կետը R^n -ում համարվում է 0 -չափանի բազմածնություն:

Եթե $0 < k < n$, հետևյալ թերեմը բազմածնությունների օրինակներ կառուցելու լայն հմարավորություն է տալիս:

Թեորեմ 4.1: $a \in M$ կետի համար (a) պայմանը համարժեք է հետևյալ երկու պայմաններից յուրաքանչյուրին.

(p) Եթե $a = (a^1, \dots, a^k, a^{k+1}, \dots, a^n)$, ապա $\dim_{\mathbb{R}} a = k$
 $(a^1, \dots, a^k) \in R^k$ կետի շրջակայրում $\operatorname{pr}_{R^k} a = x^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^k)$,
 $k+1 \leq i \leq n$ անընդհատ դիֆերենցելի բվային ֆունկցիաներ, այնպիսիք, որ
 $x = (x^1, \dots, x^n) \in M$ կետի կոորդինատները a կետի որևէ U շրջակայրում
 բավարարում են $x^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^k)$, $k+1 \leq i \leq n$ հավասարումներին*:

(q) $\dim_{\mathbb{R}} a = k$ ա կետը պարունակող U բաց բազմություն,
 $W \subset R^k$ բաց բազմություն և $f: W \rightarrow U \cap M$ փոխմիարժեք ու անընդհատ
 դիֆերենցելի արտապատկերում, այնպես, որ $\operatorname{rank} f'(t) = k$, $t \in W$: Այս
 դեպքում ասում են, որ f -ը M բազմածնության լոկալ (a կետի
 շրջակայրում) պարամետրացում է, կամ՝ բազմածնության լոկալ պարա-
 մետրական ներկայացում:

► Ապացույցը կատարենք (q) \Rightarrow (p) \Rightarrow (a) \Rightarrow (q) գծապատկերով:

(q) \Rightarrow (p): Եթե բավարարվում է (q) պայմանը և $x = f(t)$, ապա կարելի
 է x^1, \dots, x^n կոորդինատներն այնպես տեղափոխել, որ $\operatorname{rank} \left(\frac{\partial f^i}{\partial t^j} \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} = k$:

Հակադարձ ֆունկցիայի թերեմի համաձայն,

* (p) պայմանը հասկացվում է R^n տարածության կոորդինատների տեղափոխության
 ճշտությամբ:

$$\left. \begin{array}{l} x^1 = f^1(t^1, \dots, t^k) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x^k = f^k(t^1, \dots, t^k) \end{array} \right\}, \quad (t^1, \dots, t^k) \in W$$

համակարգից t^1, \dots, t^k փոփոխականները կարտահայտվեն x^1, \dots, x^n փոփոխականների միջոցով՝ $t^i = g^i(x^1, \dots, x^k)$, $1 \leq i \leq k$ (լոկալ), ըստ որում, g^i ֆունկցիաներն անընդհատ դիմերենցելի են: Եթե այդ արժեքները տեղադրենք $x^i = f^i(t^1, \dots, t^k)$, $k+1 \leq i \leq n$ հավասարությունների մեջ, ապա կստանանք

$$x^i = f^i(g^1(x^1, \dots, x^k), \dots, g^k(x^1, \dots, x^k)) =: \varphi^i(x^1, \dots, x^k), \quad k+1 \leq i \leq n:$$

Ստացվեց (բ) պայմանը:

(բ) \Rightarrow (ա): Դիցուք տեղի ունի (բ) պայմանը: Սահմանենք $y = h(x)$ արտապատկերումը հետևյալ կերպ.

$$y^i = x^i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$y^j = x^j - \varphi^j(x^1, \dots, x^k), \quad k+1 \leq j \leq n:$$

Այս արտապատկերումն a կետի U շրջակայքը փոխմիարժեք արտապատկերում է V բաց բազմության վրա: Հակադարձ արտապատկերումը տրվում է

$$x^i = y^i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

$$x^j = y^j + \varphi^j(y^1, \dots, y^k), \quad k+1 \leq j \leq n$$

հավասարումներով: Ըստ որում, $U \cap M$ բազմությունն արտապատկերվում է V բազմության այն կետերի ենթարազմության վրա, որոնց համար՝ $y^{k+1} = \dots = y^n = 0$: Հետևաբար, բավարարվում է (ա) պայմանը:

$$(ա) \Rightarrow (զ): \text{Նշանակենք՝ } W = \{y \in R^k : (y, 0) \in h(U \cap M)\},$$

$$f(y) = h^{-1}(y, 0) : W \leftrightarrow U \cap M ; H(x) = (h^1(x), \dots, h^k(x)):$$

Այդ դեպքում $H(f(y)) = y$, $y \in W$: Ուստի $H'(f(y)) \circ f'(y) = I$: Հետևաբար $\text{rank } f'(y) = k$: Իրոք, մի կողմից՝ $\text{rank } f'(y) \leq k$ (f -ի որոշման տիրույթը k -չափանի է), մյուս կողմից՝ $k = \text{rank } I \leq \text{rank } f'(y)$, որովհետև մատրիցների արտադրյալի ռաճքը չի գերազանցում արտադրյալի ռաճքը:

Այսուհետ որպես f -ի հակադարձ կվերցնենք H -ը, որը որոշված է ոչ միայն M -ի կետերում, այլ նաև U -ի վրա: f^{-1} -ը կինդի անընդհատ դիֆերենցելի U -ի վրա: ■

2. Հոշափող տարածություն: Դիցուք M -ը R^n -ում ընկած k -չափանի դիֆերենցելի բազմածնություն է, իսկ $f: W_f \rightarrow R^n$, $W_f \subset R^k$ արտապատկերումը $x = f(a) \in M$ կետի շրջակայքում M -ի լոկալ պարամետրացում է: Այդ դեպքում $\text{rank } f'(a) = k$:

Դիտարկենք

$$f_*(v_a) = (Df(a)(v))_{f(a)}: R_a^k \rightarrow R_{f(a)}^n$$

գծային ձևափոխությունը: Ունենք՝ $\text{rank } f_* = \text{rank } Df(a) = \text{rank } f'(a) = k$:

f_* արտապատկերումը փոխմիաբժեք է (տարբեր կետերի պատկերները տարբեր են), հետևաբար $f_*(R_a^k)$ -ն $R_{f(a)}^n$ տարածության k -չափանի ենթատարածություն է, որը կոչվում է M բազմածնության շոշափող տարածություն x կետում և նշանակվում է M_x -ով:

Ցույց տանք, որ այս սահմանումը կոռեկտ է, այսինքն՝ շոշափող տարածությունը պարամետրացումից կախված չէ:

Դիցուք $g: W_g \rightarrow R^n$ ֆունկցիան $x = g(b)$ կետում (կետի շրջակայքում) մեկ այլ լոկալ պարամետրացում է: Ցույց տանք, որ $g_*(R_b^k) = f_*(R_a^k)$:

Նշանակենք՝ $\varphi = f^{-1} \circ g$ և g -ն $\circ \varphi$ տեսքով: Այդ դեպքում $g = f \circ (\varphi^{-1} \circ g) = f \circ \varphi$ տեսքով:

$$g_* = f_* \circ \varphi_*, \quad (4.1)$$

որտեղ $\varphi_* : R_b^k \rightarrow R_a^k$ արտապատկերումը գծային ձևափոխություն է:
Դժվար չէ տեսնել, որ $\varphi_*(R_b^k) = R_a^k$: Հակառակ դեպքում (4.1)-ից կհետևի, որ
 $g_*(R_b^k)$ տարածության չափողականությունը k -ից փոքր է:

Այսպիսով,

$$g_*(R_b^k) = f_*\left(\varphi_*(R_b^k)\right) = f_*(R_a^k): \quad (4.2)$$

Լրացում: $rank(f^{-1} \circ g)'(b) = k$:

Ապացուցենք, որ $n=3$, $k=2$ դեպքում, եթե որպես M բազմածնություն վերցնենք $r(u,v) : \Delta \leftrightarrow S$ պարամետրացումով S մակերևույթը (տես XVIII, §5, 1), ապա նրա շոշափող տարածությունը $p = (x_0, y_0, z_0)$ կետում XVIII գլխի (5.3) հավասարմանը բավարարող հարթությունն է*:

(5.3)-ը գրենք սկալյար արտադրյալի միջոցով: Նշանակենք՝ $v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ և $\ell = (A, B, C)$: Այդ դեպքում (5.3)-ը կգրվի հետևյալ տեսքով՝ $\langle \ell, v \rangle = 0$, ինչը համարժեք է

$$\langle \ell_p, v_p \rangle = 0$$

պայմանին: Այլ կերպ ասած, (x, y, z) կետը պատկանում է շոշափող հարթությանը այն և միայն այն դեպքում, եթե $v_p = (p; x - x_0, y - y_0, z - z_0) \in R_p^3$ վեկտորն օրթոգոնալ է $\ell_p = (p; A, B, C)$ վեկտորին:

Մյուս կողմից, եթե $\{e_1, e_2\}$ -ը R^2 -ի ստանդարտ բազիսն է, ապա լստ ենթադրության

$$r'(e_1) = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} = (x'_u, y'_u, z'_u) = r'_u \quad \text{և} \quad r'(e_2) = (x'_v, y'_v, z'_v) = r'_v$$

վեկտորները գծորեն ամկախ են, ուստի $r_*(R_t^2)$, $p = r(t)$ շոշափող տարածությունը $r_*(e_i)(t)$, $i = 1, 2$ վեկտորների գծային բաղանքն է, ինչն էլ իր հերթին այդ վեկտորների վեկտորական արտադրյալին (տես §7, 1)

* Եթե R_p^3 տարածության վեկտորը նույնացնենք R^3 -ում նրա վերջնակետի հետ:

ուղղահայաց ենթատարածությունն է: Մնամ է նկատել, որ $(r'_u)_p$ և $(r'_v)_p$ վեկտորների վեկտորական արտադրյալը ℓ_p վեկտորն է ($\S 7, 1$):

3. Եզրով դիմումների բազմաձևություններ: $H^k = \{x \in R^k, x^k \geq 0\}$
 $(x = (x^1, \dots, x^k))$ բազմությունը կոչվում է կիսատարածություն R^k -ում:
 ∂H^k -ն R^k -ի $(k-1)$ -չափանի ենթատարածություն է՝

$$\partial H^k = \{x \in R^k, x^k = 0\} :$$

$M \subset R^n$ բազմությունը կոչվում է եզրով k -չափանի բազմաձևություն, եթե յուրաքանչյուր $a \in M$ կետի համար բավարարվում է կամ (ա) պայմանը կամ հետևյալ պայմանը.

(ա') գոյություն ունեն a կետը պարունակող $U \subset R^n$ բաց բազմություն, $V \subset R^n$ բաց բազմություն և $h: U \leftrightarrow V$ դիմումորֆիզմ այնպիսիք, որ $h(a) \in \partial H^k$ և

$$h(U \cap M) = V \cap (H^k \times \{0\}) = \{y \in V : y^k \geq 0, y^{k+1} = \dots = y^n = 0\} :$$

Կարևոր է նշել, որ միևնույն $a \in M$ կետի համար (ա) և (ա') պայմանները միաժամանակ տեղի ունենալ չեն կարող: Իրոք, եթե $h_1: U_1 \leftrightarrow V_1$ և $h_2: U_2 \leftrightarrow V_2$ բավարարում են համապատասխանաբար (ա) և (ա') պայմաններին, ապա $\varphi = h_2 \circ h_1^{-1}$ արտապատկերումը կհանդիսանա R^k -ում դիմումների արտապատկերում, որը $h_1(a) \in R^k$ կետի շրջակայքը (R^k -ում) արտապատկերում է H^k -ի ենթաբազմության վրա, որը R^k -ում բաց բազմություն չէ, ինչը հակառակ ֆունկցիայի թերթնեն, քանի որ (4.2)-ի համաձայն՝ $\det(h_2 \circ h_1^{-1})' \neq 0$:

(ա') պայմանին բավարարող բոլոր $a \in M$ կետերի բազմությունը կոչվում է M բազմաձևության եզր և նշանակվում է՝ ∂M : Նկատենք, որ $k = n$ դեպքում բազմաձևության եզրը կարող է չհամընկնել M բազմության տոպոլոգիական եզրի հետ:

Օրինակ, R^2 -ում վերցնենք՝ $M = \{x \in R^2 : 0 < |x| \leq 1\}$: Սա երկչափ բազմածնություն է, որի տոպոլոգիական եզրը $S = \{x \in R^2 : |x| = 1\}$ միավոր շրջանագիծն է՝ միավորած 0 կետը, իսկ $\partial M = S$:

Դժվար չէ մեատել, որ եթե M -ը եզրով k -չափանի բազմածնություն է, ապա ∂M եզրը $(k-1)$ -չափանի բազմածնություն է: Ավելին, եթե $a \in \partial M$ և f -ը M -ի լոկալ պարամետրացումն է a կետի շրջակայրում՝ ծնված $(n-1)$ -ում մասնակցող h -ից (ինչպես թեորեմ 4.1, $(\text{ա}) \Rightarrow (\text{գ})$ -ում), ապա $f(y^1, \dots, y^{k-1}, 0)$ ֆունկցիան կհանդիսանա ∂M -ի լոկալ պարամետրացում a կետի շրջակայրում:

§5. ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄ

1. Վեկտորական տարածության կողմնորոշումը: Դիցուք $\{e_1, \dots, e_n\}$ -ը R^n տարածության ստանդարտ բազիսն է, իսկ $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ -ը մեկ այլ օրթոնորմալ բազիսն է (a_{ij}) -ն անցման մատրիցն է՝

$$e'_1 = a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$e'_n = a_{n1}e_1 + \dots + a_{nn}e_n;$$

Այդ դեպքում $\det(a_{ij}) = \pm 1$:

Եթե $\det(a_{ij}) = 1$, ապա կասենք, որ $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ բազիսը ունի նույն կողմնորոշումը, ինչ - որ ստանդարտ բազիսը կամ՝ այդ երկու բազիսները R^n -ում տալիս են նույն կողմնորոշումը և կգրենք՝

$$[e_1, \dots, e_n] = [e'_1, \dots, e'_n]:$$

Այժմ ենթադրենք V -ն կամայական n -չափանի գծային տարածություն է և $\{v_1, \dots, v_n\}$ -ը V -ում բազիս է: $[v_1, \dots, v_n]$ սիմվոլը նշանակենք այն բոլոր

բազիսների ընտանիքը, որոնց անցման մատրիցի ($\{v_1, \dots, v_n\}$ բազիսից) որոշիչը դրական է, իսկ մնացած բազիսների ընտանիքը՝ $-[v_1, \dots, v_n]$ -ով:

Այսպիսով, առաջանում են բազիսների երկու ընտանիքներ՝, որոնցից յուրաքանչյուրը կոչվում է V տարածության կողմնորոշում:

Նշենք կողմնորոշումների պարզագույն հատկությունները: «Իրանք հետևում են որոշիչների հատկություններից»:

$$1^0. [v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n] = -[v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n];$$

$$2^0. [v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n] = \operatorname{sgn} \alpha [v_1, \dots, v_n]; \alpha \neq 0;$$

$$3^0. [v_1, \dots, v_{n-1}, \alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n] = \operatorname{sgn} \alpha_n [v_1, \dots, v_n]; \alpha_n \neq 0;$$

4⁰. Եթե V -ն և W -ն n -չափանի գծային տարածություններ են, $A: V \rightarrow W$ արտապատկերումը հակադարձելի գծային ձևափոխություն է և $[v_1, \dots, v_n] = [v'_1, \dots, v'_n]$, ապա $[Av_1, \dots, Av_n] = [Av'_1, \dots, Av'_n]$:

Հավասարությունը հետևում է նրանից, որ անցման մատրիցները նույն են:

5⁰. Եթե $\varphi: R^k \rightarrow R^k$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է, $a \in R^k$ կետում, ապա հետևյալ երեք պնդումները համարժեք են՝

$$\text{ա)} \det \varphi'(a) > 0,$$

$$\text{բ)} [\varphi'(a)e_1, \dots, \varphi'(a)e_k] = [e_1, \dots, e_k],$$

$$\text{գ)} [\varphi_*(e_1)_a, \dots, \varphi_*(e_k)_a] = [(e_1)_{\varphi(a)}, \dots, (e_k)_{\varphi(a)}];$$

Իրոք, $\{e_1, \dots, e_k\}$ բազիսից՝ $\{\varphi'(a)e_1, \dots, \varphi'(a)e_k\}$ բազիսին անցման մատրիցը $\varphi'(a)$ մատրիցի տրանսպոնացված մատրիցն է, որի որոշիչը հավասար է $\det \varphi'(a)$, իսկ գ)-ում անցման մատրիցը նույն է, ինչ՝ թ)-ում:

2. Դիֆերենցելի բազմանության կողմնորոշում: Դիցուք M -ը R^n -ում ընկած k -չափանի դիֆերենցելի բազմանություն է և յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում M_x -ը M բազմանության շոշափող տարածությունն է:

* Հիմնավորել համարժեքության դասերի միջոցով:

Յուրաքանչյուր M_x տարածությունում ընտրենք μ_x կողմնորոշում (երկու հնարավորներից՝ մեկը): Կասենք, որ այդ կողմնորոշումները $համաձայնեցված են, եթե յուրաքանչյուր $f:W_f \rightarrow M$ լոկալ պարամետրացման և ամեն մի $a, b \in W_f$ կետերի գույզի համար՝$

$$[f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_k)_a] = \mu_{f(a)} \Leftrightarrow [f_*(e_1)_b, \dots, f_*(e_k)_b] = \mu_{f(b)} \quad (5.1)$$

(կամ W_f -ի բոլոր կետերում տեղի ունի հավասարություն, կամ ոչ մի կետում տեղի չունի):

Ենթադրենք μ_x -երը համաձայնեցված են: Եթե որևէ $a \in W_f$ կետում (հետևաբար, նաև՝ W_f -ի բոլոր կետերում) տեղի ունի հավասարություն, ապա կասենք, որ f լոկալ պարամետրացումը պահպանում է կողմնորոշումը, հակառակ դեպքում կասենք, որ f -ը կողմնորոշումը փոխում է:

Եթե f -ը չի պահպանում կողմնորոշումը և $T: R^k \leftrightarrow R^k$ -ում այնպիսի գծային արտապատկերում է, որ $\det T = -1$, ապա կողմնորոշումների 4^0 հատկության համաձայն, $f \circ T$ -ն պահպանում է կողմնորոշումը: Հետևաբար, յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում գոյություն ունի կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում:

Թեորեմ 5.1: Դիցուք f -ը և g -ն M -ի լոկալ պարամետրացումներ են $x = f(a) = g(b)$ կետի շրջակայքում: Որպեսզի

$$\text{ա) } [f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_k)_a] = [g_*(e_1)_b, \dots, g_*(e_k)_b],$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\text{բ) } \det(g^{-1} \circ f)'(a) > 0 :$$

► Կողմնորոշումների 4^0 հատկության և թեորեմ 2.3-ի համաձայն, այսպիսն անհրաժեշտ է:

$$[(g^{-1} \circ f)_*(e_1)_a, \dots, (g^{-1} \circ f)_*(e_k)_a] = [(e_1)_b, \dots, (e_k)_b]$$

պայմանին: Մնում է օգտվել կողմնորոշումների 5^0 հատկությունից: ■

Սահմանում: M -ը կոչվում է կողմնորոշելի, եթե գոյություն ունեն համաձայնեցված μ_x -եր: Համաձայնեցված μ_x -երի բազմությունը կնշանակենք μ -ով: Այդ դեպքում (M, μ) գոյզը կոչվում է կողմնորոշված բազմաձևություն, իսկ $\mu = \{\mu_x\}$ -ը՝ M -ի կողմնորոշում:

Յուրաքանչյուր կողմնորոշելի բազմաձևություն ունի երկու կողմնորոշում՝ $\{\mu_x\}$ -ը և $\{-\mu_x\}$ -ը:

Թեորեմ 5.2: Դիցուք M բազմաձևության վրա տրված է $g: W_g \rightarrow M$ լոկալ պարամետրացումների $C = \{(g, W_g)\}$ ընտանիք, այնպիսին, որ

1) յուրաքանչյուր $x \in M$ կետի համար գոյություն ունի $g \in C$, որը x -ի շրջակայրում լոկալ պարամետրացում է՝ $\bigcup_{g \in C} g(W_g) = M$,

2) եթե $g_1(W_{g_1}) \cap g_2(W_{g_2}) \neq \emptyset$, ապա $\det(g_1^{-1} \circ g_2)' > 0$:

Այդ դեպքում գոյություն ունի M -ի միակ կողմնորոշում, որը բոլոր g -երը համար պահպանվում է:

► Յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում նշանակենք՝

$$\mu_x = [g_*(e_1)_t, \dots, g_*(e_k)_t], \text{որտեղ } x = g(t):$$

Նախորդ թեորեմի շնորհիվ, 2)-ից հետևում է, որ μ_x -ը g -ի ընտրությունից կախված չէ: Մեզ մնում է ապացուցել, որ այդպիս ընտրված μ_x -երը համաձայնեցված են: Դրա համար վերցնենք $x \in M$ կետում M -ի կամայական պարամետրացում՝ $f: W_f \rightarrow M$, և ապացուցենք, որ այն բավարարում է (5.1) պայմանին:

Նշանակենք՝

$$s(t) = \det(g^{-1} \circ f)'(t), \quad g \in C, \quad t \in W_f:$$

2)-ից հետևում է, որ $s(t)$ -ն g -ի ընտրությունից կախված չէ, քանի որ

$$\det(g_1^{-1} \circ f)' = \det(g_1^{-1} \circ g_2)' \det(g_2^{-1} \circ f)', \quad g_1, g_2 \in C:$$

Քանի որ $s(t)$ -ն W_f կապակցված բազմության վրա 0 -ից տարբեր արժեքներ ընդունող (տե՛ս (4.2)-ը) անընդհատ ֆունկցիա է, ապա նրա ընդունած արժեքների բազմությունը R -ի 0 կետը չպարունակող կապակցված ենթաբազմություն է (VII, §5, 4): Հետևաբար, $s(t)$ -ն ամբողջ W_f -ի վրա նշանը պահպանում է: Մնում է կիրառել թեորեմ 5.1-ը:

Այս դեպքում, եթե $s(t) > 0$, $t \in W_f$, թեորեմ 5.1-ի համաձայն, f -ը կողմնորշումը պահպանում է, իսկ եթե $s(t) < 0$, f -ը կողմնորշումը փոխում է: ■

3. Արտաքին նորմալի օրը: Ենթադրենք $M \subset R^n$ -ը k չափանի եզրով դիմերենցելի բազմածնություն է, այդ դեպքում ∂M -ը ($k-1$) չափանի բազմածնություն է (§4, 3): $x \in \partial M$ դեպքում $(\partial M)_x$ -ը կլինի M_x -ի ($k-1$) չափանի ենթատարածություն, հետևաբար, $M_x = (\partial M)_x \oplus E$, որտեղ E -ն $(\partial M)_x$ -ի օրբոգոնալ լրացումն է M_x -ում, որը կլինի մեկ չափանի ենթատարածություն: Հետևաբար, գոյություն ունեն $n_1(x) = -n_2(x)$ միավոր վեկտորներ, այնպիսիք, որ $n_1(x), n_2(x) \in E$, $n_1(x), n_2(x) \perp (\partial M)_x$: Կիցուք $f: W \rightarrow R^n$, $W \subset R^k$ արտապատկերումը $x \in \partial M$ կետում M -ի լոկալ պարամետրացում է: Նշանակենք $n(x)$ -ով $n_1(x)$ և $n_2(x)$ վեկտորներից այն, որի համար $f_*^{-1}(n_i(x)) =: v_a$ -ի k -րդ կոորդինատը բացասական է: $n(x)$ -ը կոչվում է *արտաքին նորմալի օրը*:

Սյուս կողմից, v_a -ի k -րդ կոորդինատը բացասական է, նշանակում է, որ $v_a = \alpha_1(e_1)_a + \dots + \alpha_k(e_k)_a$, $\alpha_k < 0$: Այսինքն՝

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_k e_k = (\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k), \alpha_k < 0:$$

Հետևաբար, $v \in R^k \setminus H^k$:

Կարելի է ապացուցել, որ արտաքին նորմալի օրըը f լոկալ պարամետրացումից կախված չէ:

Իրոք, ենթադրենք հակառակը՝ $v_a = f_*^{-1}(n(x))$ -ի k -րդ կոորդինատը բացասական է, իսկ $v'_b = g_*^{-1}(n(x))$ -ի k -րդ կոորդինատը՝ դրական։ Նշանակենք՝ $\varphi = g^{-1} \circ f : \text{Այդ } \eta\text{-պայման}$

$$\varphi_*(v_a) = g_*^{-1}(f_*(v_a)) = g_*^{-1}(n(x)) = v'_b :$$

Հետևաբար, $\varphi_*(v_a)$ -ի k -րդ կոորդինատը դրական է։

Մյուս կողմից, $\varphi_*(v_a) = (D\varphi(a)(v))_b$, $b = \varphi(a) : \text{Այսպիսով, } v$ -ի k -րդ կոորդինատը բացասական է, իսկ $D\varphi(a)(v)$ -ին՝ դրական, ինչը հակասություն է, քանի որ

$$D\varphi(a)(v) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(a + tv) - \varphi(a)}{t},$$

որտեղ $a, \varphi(a) \in \partial H^k$ (որովհետև $x = f(a) \in \partial M$): Սակայն այս դեպքում $\frac{\varphi(a + tv) - \varphi(a)}{t}$, $t > 0$ վեկտորի, հետևաբար, նաև՝ $D\varphi(a)(v)$ վեկտորի k -րդ կոորդինատը դրական չէ։

4. Մակածված կողմնորոշում: Դիցուք (M, μ) -ն եզրով, կողմնորոշված k չափանի բազմածնություն է։ Այդ դեպքում ∂M -ը $(k-1)$ չափանի բազմածնություն է և $(\partial M)_x$ -ը M_x -ի $(k-1)$ չափանի ենթատարածություն է ($\S 4, 3$):

Ելմելով μ կողմնորոշումից՝ $(\partial M)_x$ -ում ընտրենք $(\partial\mu)_x$ կողմնորոշում հետևյալ կերպ. $(\partial M)_x$ տարածության $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ բազիսը կը նեղարկենք $(\partial\mu)_x$ -ի մեջ, եթե $[n(x), v_1, \dots, v_{k-1}] = \mu_x$:

$(\partial\mu)_x$ կողմնորոշումը կոչվում է μ_x կողմնորոշումից մակածված կողմնորոշում։

Թեորեմ 5.3: Եթե f -ը $x = f(a) \in \partial M$ կետում M -ի կողմնորոշումը պահպանող լոկալ պարամետրացում է, ապա

$$(\partial\mu)_x = (-1)^k [f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{k-1})_a] :$$

Այլ կերպ ասած, եթե k -ն զույգ է, ապա f -ը պահպանում է նաև ∂M եզրի կողմնորոշումը, իսկ եթե k -ն կենտ է, ապա f -ը եզրի կողմնորոշումը փոխում է:

► α -ով նշանակենք 1 կամ -1 թվերից այն, որի համար տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը^{*}:

$$\begin{aligned} [f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_k)_a] &= \mu_x = \alpha[n(x), f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{k-1})_a] = \\ &= \alpha[f_*(v_a), f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{k-1})_a] = \\ &= -\alpha[f_*(e_k)_a, f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{k-1})_a] = \alpha(-1)^k [f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_k)_a], \end{aligned}$$

որտեղ $v_a = f_*^{-1}(n(x))$:

Հետևաբար, $\alpha(-1)^k = 1$, այսինքն՝ $\alpha = (-1)^k$: ■

Հետևանք: $(\partial\mu)_x$ -եռք համաձայնեցված են:

Այսպիսով, ∂M -ը կողմնորոշելի է, և $\partial\mu := \{(\partial\mu)_x : x \in \partial M\}$ -ը ∂M -ի կողմնորոշում է, որը կոչվում է μ կողմնորոշումից մակածված կողմնորոշում:

Այժմ $k = n - 1$ դեպքի համար տաճք արտաքին նորմալի օրթի մեջ այլ սահմանում:

Եթե (M, μ) -ն R^n -ում $(n-1)$ -չափանի կողմնորոշված բազմածեռթյուն է և $[v_1, \dots, v_{n-1}] = \mu_x$ ($v_1, \dots, v_{n-1} \in M_x$), ապա $n(x)$ -ով նշանակենք R_x^n -ի այն միակ միավոր վեկտորը, որը օրթոգոնալ է M_x -ին և բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$[n(x), v_1, \dots, v_{n-1}] = [(e_1)_x, \dots, (e_n)_x],$$

որտեղ $\{(e_1)_x, \dots, (e_n)_x\}$ -ը R_x^n -ի ստանդարտ բազիսն է:

Եթե M -ը որևէ n -չափանի բազմածեռթյան եզր է, և այդ բազմածեռթյունը կողմնորոշված է ստանդարտ կողմնորոշմամբ, ապա $n(x)$ -ի նախկին սահմանումը և այս նոր սահմանումը համընկնում են (որպես f լոկալ պարամետրացում կվերցնենք նույնական արտապատկերումը):

* Այստեղ մենք օգտվում ենք կողմնորոշումների պարզագույն հատկություններից և նրանից, որ v_a -ի k -րդ կոորդինատը բացասական է:

§6. ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱՉԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ

1. Դիֆերենցիալ ձևեր բազմածնությունների վրա: Դիցուք M -ը k -չափանի դիֆերենցելի բազմածնություն է: ω -ն կոչվում է p -աստիճանի^{*} դիֆերենցիալ ձև M -ի վրա, եթե յուրաքանչյուր $x \in M$ կետի համար՝ $\omega(x) \in \Lambda^p(M_x)$: Այն կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} : \quad (6.1)$$

Իրոք, եթե $\{e_1, \dots, e_n\}$ -ը R^n -ի ստանդարտ բազիսն է և $\{e'_1, \dots, e'_k\}$ -ը օրթոնորմալ բազիսն M_x -ում, ապա

$$\left. \begin{aligned} e'_1 &= a_{11}e_1 + \dots + a_{1n}e_n \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_k &= a_{k1}e_1 + \dots + a_{kn}e_n \end{aligned} \right\},$$

որտեղ $a_{ij} = (e'_i, e_j) = (e_j, e'_i)$:

Այսուհետև համապատասխան դուալ բազիսները նշանակենք՝ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ և $\{\psi_1, \dots, \psi_k\}$: Այդ դեպքում ամեն մի $v \in M_x$ վեկտորի համար ունենք՝

$$v = \psi_1(v)e'_1 + \dots + \psi_k(v)e'_k = \varphi_1(v)e_1 + \dots + \varphi_n(v)e_n :$$

Այս հավասարությունը սկայլարորեն բազմապատկելով e'_i -ով՝ կստանանք՝

$$\psi_i(v) = (e_1, e'_i)\varphi_1(v) + \dots + (e_n, e'_i)\varphi_n(v) = a_{i1}\varphi_1(v) + \dots + a_{in}\varphi_n(v) :$$

Այս արժեքները տեղադրելով ω -ի բազիսային ներկայացման մեջ՝

$$\omega(x) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} c_{j_1 \dots j_p}(x) \psi_{j_1} \wedge \dots \wedge \psi_{j_p},$$

կստանանք՝

$$\omega(x) = \sum_{j_1 < \dots < j_p} c_{j_1 \dots j_p} (a_{j_1 1}\varphi_1 + \dots + a_{j_1 n}\varphi_n) \wedge \dots \wedge (a_{j_p 1}\varphi_1 + \dots + a_{j_p n}\varphi_n) :$$

* Եթե $p > k$, ապա $\omega = 0$:

Այստեղից կստացվի (6.1)-ը:

Այժմ սահմանենք M -ի վրա որոշված ω դիֆերենցիալ ձևի նախապատկերը: Եթե $f:W \rightarrow M$, $W \subset R^k$ արտապատկերումը M -ի լոկալ պարամետրացում է, ապա $f^*\omega$ նախապատկերը (f արտապատկերման միջոցով) սահմանվում է ինչպես ($\S 2, 3$)-ում՝

$$f^*\omega(t; v_1, \dots, v_p) = \omega(f(t); f_*(v_1), \dots, f_*(v_p)),$$

որտեղ $t \in W$, $v_1, \dots, v_p \in R_t^k$:

($\S 2, 3$)-ում ապացուցված թերեմի 1^0 - 4^0 պնդումները ճիշտ են նաև այս դեպքում:

Այսուհետև, նախապատկերի միջոցով կարող ենք սահմանել M -ի վրա որոշված դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալը: (6.1) բանաձևով տրված ω դիֆերենցիալ ձևը կոչվում է դիֆերենցելի, եթե դիֆերենցելի է

$$f^*\omega(t) = \sum \omega_{i_1 \dots i_p} (f(t)) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_p}$$

դիֆերենցիալ ձևը: Այս սահմանումն իմաստ ունի այն դեպքում, եթե f լոկալ պարամետրացման կոորդինատային ֆունկցիաները կրկնակի դիֆերենցելի են:

Առաջիկայում մենք կօգտվենք հետևյալ սահմանումից. կասենք M դիֆերենցելի բազմանկորյունը C^r ($r \geq 1$) դասից է, եթե յուրաքանչյուր f լոկալ պարամետրացման կոորդինատային ֆունկցիաների r -րդ կարգի մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են:

Թեորեմ 6.1: Եթե ω -ն M -ի վրա p -աստիճանի ($p \leq k$) դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է, իսկ f -ը M -ի լոկալ պարամետրացում է, ապա f գոյություն ունի M -ի վրա որոշված միակ $p+1$ աստիճանի η դիֆերենցիալ ձև, այնպիսին, որ

$$f^*\eta = df^*\omega : \tag{6.2}$$

Այդ η -ն կոչվում է ω դիֆերենցիալ ձևի դիֆերենցիալ և նշանակվում է՝ $\eta = d\omega$:

► Եթե $x = f(a) \in M$, ապա $f_* : R_a^k \rightarrow M_x$ արտապատկերումը հակադարձնի է: Կամայական $v_1, \dots, v_{p+1} \in M_x$ վեկտորների համար նշանակենք՝ $\varpi_i = f_*^{-1}(v_i)$, $1 \leq i \leq p+1$ և

$$\eta(x; v_1, \dots, v_{p+1}) := df^* \omega(a; \varpi_1, \dots, \varpi_{p+1}).$$

Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} f^* \eta(a; \varpi_1, \dots, \varpi_{p+1}) &= \eta(f(a); f_*(\varpi_1), \dots, f_*(\varpi_{p+1})) = \\ &= \eta(x; v_1, \dots, v_{p+1}) = df^* \omega(a; \varpi_1, \dots, \varpi_{p+1}). \end{aligned}$$

(6.2)-ն ապացուցեն:

η -ի միակությունն ապացուելու համար ենթադրենք՝ $f^* \eta_1 = df^* \omega$ և $f^* \eta_2 = df^* \omega$: Այդ դեպքում $f^*(\eta_1 - \eta_2) = 0$, հետևաբար, $\eta_1 - \eta_2 = 0$: Ցույց տանք, որ $d\omega$ -ն f -ի ընտրությունից կախված չէ:

Եթե g -ն մեկ այլ պարամետրական ներկայացում է $g(b) = f(a) = x$ կետի շրջակայքում, ապա $g = f \circ (f^{-1} \circ g) = f \circ \varphi$, որտեղ $\varphi = f^{-1} \circ g$ և $\varphi(b) = a$: Այդ դեպքում $g_* = f_* \circ \varphi_*$, $g^* = \varphi^* \circ f^*$ և $g_*^{-1} = \varphi_*^{-1} \circ f_*^{-1}$: Հետևաբար,

$$dg^* \omega = d(\varphi^* \circ f^*) \omega = d\varphi^* (f^* \omega) = \varphi^* df^* \omega.$$

Այսուհետև կամայական $v_1, \dots, v_{p+1} \in M_x$ վեկտորների համար կստանանք՝

$$\begin{aligned} dg^* \omega(b; g_*^{-1}(v_1), \dots, g_*^{-1}(v_{p+1})) &= \varphi^*(df^* \omega)(b; g_*^{-1}(v_1), \dots, g_*^{-1}(v_{p+1})) = \\ &= (df^* \omega)\left(a; \varphi_*\left(g_*^{-1}(v_1)\right), \dots, \varphi_*\left(g_*^{-1}(v_{p+1})\right)\right) = df^* \omega\left(a; f_*^{-1}(v_1), \dots, f_*^{-1}(v_{p+1})\right). \end{aligned}$$

Այսինքն՝ $dg^* \omega = df^* \omega$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

2. Բազմաձևությամբ տարածված ինտեգրալ: Հիշեցնենք (§3, 2), որ եթե $D \subset R^k$ բազմությունը J -չափելի է և $f \in \mathcal{R}(D)$, ապա, ըստ սահմանման,

$$\int_D f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_D f(x^1, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k :$$

Դիցուք $M \subset R^n$ -ը k -չափանի ($k \leq n$) դիմերենցելի բազմածևոյուն է, ω -ն M -ի վրա որոշված p -աստիճանի ($p \leq k$) դիմերենցիալ ձև է, c -ն M -ից արժեքները ընդունող անընդհատ դիմերենցելի p -չափանի սինգուլյար խորանարդ է: Այդ դեպքում c -ով տարածված ω -ի ինտեգրալը սահմանվում է ($\S 3, 2$) հետևյալ կերպ՝

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^* \omega :$$

$c = \sum a_i c_i$ սինգուլյար շղթայով տարածված ինտեգրալը նույնական սահմանվում է նախկին ձևով՝

$$\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega :$$

Եթե M -ը կողմնորոշված է և $p = k$, այդ դեպքում c -ն կոչվում է M -ի հետ համակողմնորոշված, եթե գոյություն ունի կողմնորոշումը պահպանող $f: W \rightarrow M$ լոկալ պարամետրացում, այնպիսին*, որ

$$[0,1]^k \subset W; \quad c(x) = f(x), \quad x \in [0,1]^k :$$

c -ն կոչվում է M -ի հետ հակակողմնորոշված, եթե f -ը կողմնորոշումը փոխում է:

Թեորեմ 6.2: Եթե c_1 -ը և c_2 -ը M -ի հետ համակողմնորոշված են և

$$\omega(y) = 0, \text{ եղան } y \in \left\{ c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k) \right\}^c, \quad (6.3)$$

ապա

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega :$$

► Նշանակենք՝ $c_i([0,1]^k) = D_i$, $i = 1, 2$; $D = D_1 \cap D_2$ և դիտարկենք $g(t) = c_2^{-1}(c_1(t))$, $t \in c_1^{-1}(D)$ ֆունկցիան: Այդ դեպքում g ֆունկցիան

* Այդ բանին կարելի է հասնել՝ $f(t)$ պարամետրացման փոխարեն վերցնելով $f(a + \varepsilon t)$ ֆունկցիան:

անընդհատ դիֆերենցելի ու փոխմիարժեք արտապատկերում է և
 $g(c_1^{-1}(D)) = c_2^{-1}(D)$: Բացի դրանից՝ $\det g'(t) > 0$ (§5, 2):

Մյուս կողմից, $c_i^{-1}(D)$, $i=1, 2$ բազմությունները J -չափելի են և

$$\int \omega = \int_{c_1^{-1}(D)} c_1^* \omega = \int_{c_2^{-1}(D)} c_1^* \omega, \quad \int \omega = \int_{c_2^{-1}(D)} c_2^* \omega = \int_{c_2^{-1}(D)} c_2^* \omega,$$

քանի որ, (6.3)-ի համաձայն, ω -ն D -ից դուրս գրում է:

Հետևաբար, մեզ մնում է ապացուցել, որ

$$\int_{c_1^{-1}(D)} c_1^* \omega = \int_{c_2^{-1}(D)} c_2^* \omega :$$

Այդ նպատակով c_1 -ը ներկայացնենք $c_1 = c_2 \circ (c_2^{-1} \circ c_1) =: c_2 \circ g$

տեսքով, իսկ $c_2^* \omega$ -ն՝ $c_2^* \omega = h(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ տեսքով: Այդ դեպքում՝

$$\begin{aligned} \int_{c_1^{-1}(D)} c_1^* \omega &= \int_{c_1^{-1}(D)} (g^* \circ c_2^*) \omega = \int_{c_1^{-1}(D)} g^* [h(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k] = \\ &= \int_{c_1^{-1}(D)} h(g(t)) \det g'(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k : \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով $\det g'(t) > 0$ պայմանը և կատարելով $x = g(t)$
 փոփոխականի փոխարինումը՝ կստանանք

$$\int_{c_1^{-1}(D)} c_1^* \omega = \int_{g(c_1^{-1}(D))} h(x) dx = \int_{c_2^{-1}(D)} h(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k = \int_{c_2^{-1}(D)} c_2^* \omega : \blacksquare$$

Այժմ սահմանենք M -ով տարածված ω դիֆերենցիալ ձևի ինտեգրալը:
 Դիտարկենք դեպքեր.

Ի դեպք: Գոյություն ունի k -չափանի c համակողմնորոշված սինգուլյար
 խորանարդ այնպիս, որ $c([0,1]^k)$ -ից դուրս՝ $\omega = 0$:

Այս դեպքում՝

$$\int_M \omega := \int_c \omega ,$$

իսկ եթե c -ն հակառակողմնորոշված է, ապա

$$\int_M \omega := - \int_c \omega :$$

Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ $\int_M \omega$ իմտեզրալը c -ի ընտրությունից

կախված չէ:

II դեպք: Ենթադրենք M -ը կոմպակտ է և O -ն M -ի վերջավոր բաց ծածկույթ է, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին.

յուրաքանչյուր $U \in O$ բաց բազմության համար գոյություն ունի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$M \cap U \subset c([0,1]^k) \subset M :$$

Φ -ով նշանակենք այդ ծածկույթին ենթարկված որևէ միավորի տրոհում և M -ով տարածված իմտեզրալը սահմանենք հետևյալ կերպ՝

$$\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \omega : \quad (6.4)$$

Նախորդ թեորեմից հետևում է, որ այսպես սահմանված իմտեզրալը O -ի և Φ -ի ընտրությունից կախված չէ:

Իրոք, եթե $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ և $\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_s\}$ ընտանիքները միավորի տրոհումներ են, ապա

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \int_M \varphi_i \omega &= \sum_{i=1}^r \int_{c_i} \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^r \int_{c_i} \varphi_i \left(\sum_{j=1}^s \psi_j \right) \omega = \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \int_{c_i} \varphi_i \psi_j \omega = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^r \int_{c'_j} \psi_j \varphi_i \omega = \sum_{j=1}^s \int_{c'_j} \psi_j \omega = \sum_{j=1}^s \int_M \psi_j \omega, \end{aligned}$$

որտեղ c_i -ն և c'_j -ը այն խորանարդներն են, որոնց համար $c_i([0,1]^k)$ -ից դուրս՝ $\varphi_i = 0$ և $c'_j([0,1]^k)$ -ից դուրս՝ $\psi_j = 0$:

Ապացուցենք նաև, որ եթե M -ը f -ով պարամետրացված բազմածեռություն է, իսկ

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

դիֆերենցիալ ձևը որոշված է M -ի վրա, ապա M -ով տարածված ինտեգրալը արտահայտվում է Ω -իմանի ինտեգրալի միջոցով՝

$$\int_M \omega = \int_{\Delta} f^* \omega :$$

Բավական է այս պնդումն ապացուցել մեկ գումարելիի համար՝

$$\omega = \omega(x) dx^i \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$f^* \omega = \omega(f(t)) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k} =: h(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k.$$

Յուրաքանչյուր $t_0 \in \Delta$ կետի համար վերցնենք $\delta_{t_0} > 0$ թիվն այնպես, որ t_0 կենտրոնով և δ_{t_0} կողմի երկարությամբ Δ_{t_0} փակ խորանարդն ընկած լինի W -ի մեջ: Դիտարկենք $t = T_{t_0}(\tau) = t_0 + \delta_{t_0}(\tau - \tau_0)$ գծային ձևափոխությունը, որտեղ $\tau_0 = \left(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right)$: T_{t_0} -ն $[0,1]^k$ խորանարդը արտապատճենում է t_0 -ի համար վերցնենք $x_0 = f(t_0) \in M$ կետի U_{x_0} բաց շրջակայք, այնպիսին, որ $M \cap U_{x_0} \subset f(\Delta_{t_0})$:

Յուրաքանչյուր t_0 -ի համար վերցնենք $x_0 = f(t_0) \in M$ կետի U_{x_0} բաց շրջակայք, այնպիսին, որ $M \cap U_{x_0} \subset f(\Delta_{t_0})$:

Քանի որ M կոմպակտ բազմությունը ծածկված է $\{U_{x_0}\}$ բաց բազմությունների ընտանիքով, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝ $O = \{U_{x_1}, \dots, U_{x_p}\}$: Դիցուք $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$ -ն O ծածկույթին ենթարկված միավորի տրոհում է: Այդ դեպքում

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^p \int_M \varphi_i \omega = \sum_{i=1}^p \int_{[0,1]^k} c_i^*(\varphi_i \omega),$$

որտեղ $c_i(\tau) = f(T_{t_i}(\tau))$, $c_i^* = T_{t_i}^* \circ f^*$, $t_i = f^{-1}(x_i)$: Ուստի

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \sum_{i=1}^p \int_{[0,1]^k} \varphi_i(f(T_{t_i}(\tau))) T_{t_i}^*(h(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k) = \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{[0,1]^k} \varphi_i(f(T_{t_i}(\tau))) h(T_i(\tau)) \frac{D(T_{t_i}^1, \dots, T_{t_i}^k)}{D(\tau^1, \dots, \tau^k)} d\tau^1 \dots d\tau^k = \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{T_{t_i}([0,1]^k)} \varphi_i(f(t)) h(t) dt^1 \dots dt^k = \sum_{i=1}^p \int_{\Delta_{t_i}} \varphi_i(f(t)) h(t) dt^1 \dots dt^k = \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{\Delta} \varphi_i(f(t)) h(t) dt^1 \dots dt^k = \int_{\Delta} h(t) dt^1 \dots dt^k : \end{aligned}$$

Լեմմա 6.1: Դիցուք

- ա) M -ը եզրով դիմերենցիկ բազմաձևություն է և c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդն այնպիսին է, որ $c_{(k,0)} \subset \partial M$, իսկ մնացած նիստերը ∂M -ի վրա ներքին կենտրոնացնեն,
 բ) ω -ն M -ի վրա որոշված $(k-1)$ -աստիճանի դիմերենցիկությունը է և $c([0,1]^k)$ -ից դուրս՝ $\omega = 0$:

Այդ դեպքում

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial c} \omega ,$$

որտեղ ∂M եզրում վերցրված է մակածված կողմնորոշումը:

► Ըլթայով տարածված ինտեգրալի սահմանման համաձայն՝

$$\int_{\partial c} \omega = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{(i,\alpha)}} \omega = (-1)^k \int_{c_{(k,0)}} \omega ,$$

քանի որ մյուս նիստերի վրա՝ $\omega = 0$:

Մյուս կողմից, ապացուցել ենք (թեորեմ 5.3), որ եթք k -ն զույգ է, ապա $c_{(k,0)}$ -ն ∂M -ում համակողմնորոշված է, իսկ եթք k -ն կենտրոնացնեած է, ապա $c_{(k,0)}$ -ն հակակողմնորոշված է: ■

* Բազմաձևության այն կետերը, որոնք եզրին չեն պատկանում, կոչվում են այդ բազմաձևության ներքին կետեր:

3. Ստորսի թեորեմը բազմածեռությունների վրա:

Թեորեմ 6.3 (Ստորս): Կիցուր M -ը C^2 դասի k -չափանի, եզրով, կողմնորոշված, կոմպակտ դիֆերենցելի բազմածեռություն է, իսկ ω -ն M -ի վրա $(k-1)$ -աստիճանի անընդհատ դիֆերենցելի դիֆերենցիալ ձև է: Այդ դեպքում

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega, \quad (6.5)$$

որտեղ եզրում վերցրված է մակածված կողմնորոշումը:

► Նախ թեորեմն ապացուցենք M -ից արժեքներ ընդունող շղթայի համար*: Դրա համար բավական է թեորեմն ապացուցել խորանարդի դեպքում: Եթե c -ն M -ից արժեքներ ընդունող համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ է, ապա

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^* d\omega = \int_{I^k} dc^* \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega = \int_{\partial c} \omega : \quad (6.6)$$

Վերջին հավասարությունն ապացուցվում է այնպես, ինչպես սովորական սինգուլյար խորանարդների դեպքում:

Այժմ անցնենք (6.5)-ի ապացույցին: Դիտարկենք դեպքեր.

I դեպք: Գոյություն ունի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$c([0,1]^k) \subset M \setminus \partial M \text{ և } \omega(x) = 0, \text{ եթե } x \notin c([0,1]^k):$$

Այս դեպքում $d\omega(x) = 0$, $x \notin c([0,1]^k)$: Մասնավորաբար, $d\omega(x) = 0$,

եթե $x \in \partial c$: Հետևաբար,

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0 \text{ և } \int_{\partial M} \omega = 0,$$

քանի որ ω -ն ∂M -ի վրա 0 է:

II դեպք: ω -ն այնպիսին է, որ գոյություն ունի c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ $c_{(k,0)} \subset \partial M$, և այն միակ նիստն է,

* Այս դեպքում շրայտվ տարածված ինտեգրալը սահմանվում է այնպես, ինչպես սովորական շրայտի դեպքում:

որ ∂M -ի վրա ունի սերքին կետ, ու $\omega = 0 \in c([0,1]^k)$ -ից դուրս: Այս դեպքում, լեմմա 6.1-ի համաձայն,

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega = \int_M d\omega,$$

մասի որ $d\omega$ -ն $c([0,1]^k)$ -ից դուրս 0 է (տես նախորդ կետի I դեպք):

III դեպք: ω -ն կամայական դիֆերենցիալ ձև է: Կառուցենք M -ի O բաց ծածկույթ այնպես, որ յուրաքանչյուր $U \in O$ բաց բազմության համար գոյություն ունենա c համակողմնորոշված սինգուլյար խորանարդ, այնպիսին, որ

$$U \cap M \subset c([0,1]^k),$$

ընդ որում*, կամ՝ $c([0,1]^k) \subset M \setminus \partial M$, կամ՝ $c_{(k,0)} \subset \partial M$ և այն միակ նիստն է, որ ∂M -ի վրա ունի սերքին կետ:

Քանի որ M -ը կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի նրա վերջավոր ենթածածկույթ: Այդ ենթածածկույթին ենթարկված որևէ միավորի տրոհում նշանակենք $\Phi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_r\}$ -ով: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\sum_{i=1}^r \varphi_i(x) = 1, \text{ եթե } x \in M:$$

Ուստի

$$\sum_{i=1}^r d\varphi_i = d \sum_{i=1}^r \varphi_i = 0; \quad \sum_{i=1}^r (d\varphi_i \wedge \omega) = \left(\sum_{i=1}^r d\varphi_i \right) \wedge \omega = 0;$$

Ինտեգրալի սահմանման համաձայն^{*}

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^r \int_M \varphi_i d\omega = \sum_{i=1}^r \int_M \varphi_i d\omega + \sum_{i=1}^r \int_M (d\varphi_i \wedge \omega) = \sum_{i=1}^r \int_M d\varphi_i \omega: \quad (6.7)$$

* Այդ բանին հասնելու համար U բաց բազմությունները և համապատասխան c -երը կառուցում ենք ∂M -ի և $M \setminus \partial M$ -ի բոլոր կետերի համար:

^{*} Ինտեգրալը գծային ֆունկցիոնալ է՝ $\int_M (a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2) = a_1 \int_M \omega_1 + a_2 \int_M \omega_2$:

Քանի որ $d\varphi_i \omega$ դիֆերենցիալ ձևերը նախորդ դեպքերում դիտարկված տեսքի են, ապա

$$\int_M d\varphi_i \omega = \int_{\partial M} \varphi_i \omega, \quad 1 \leq i \leq r :$$

Տեղադրելով այս արժեքները (6.7)-ի մեջ՝ կստանանք

$$\int_M d\omega = \sum_{i=1}^r \int_{\partial M} \varphi_i \omega = \int_{\partial M} \omega :$$

Վերջին հավասարությունը ստացվում է նրանից, որ Φ ընտանիքը միավորի տրոհում է նաև ∂M -ի համար: ■

Լրացում: Եթե ω -ն անընդհատ դիֆերենցելի է M -ը պարունակող $D \subset R^n$ բաց բազմության վրա, ապա Ստորև բերեմը ճիշտ է նաև C^1 դասի բազմածության համար:

Իրոք, M -ը C^2 դասին պատկանելու պայմանը օգտագործել ենք միայն $\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega$ (6.6) հավասարությունն ապացուցելիս:

Սակայն (§3, 2)-ում ապացուցել է, որ եթե ω -ն բավարարում է նշված պայմանին, ապա (6.6)-ը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե c -ն անընդհատ դիֆերենցելի է:

§7. ԲԱԶՄԱՉԵՎՈՒԹՅԱՆ ԾԱՎԱԼ

1. Արտաքին նորմալի օրբը որպես վեկտորական արտադրյալ: R^3 -ում $v_1 = (v_1^1, v_1^2, v_1^3)$ և $v_2 = (v_2^1, v_2^2, v_2^3)$ վեկտորների $v_1 \times v_2$ վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} v_2^2 & v_2^3 \\ v_2^1 & v_2^3 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} v_1^3 & v_1^1 \\ v_2^3 & v_2^1 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{vmatrix} e_3, \quad (7.1)$$

որտեղ $\{e_1, e_2, e_3\}$ -ը R^3 -ի ստանդարտ բազիսն է:

(7.1) վեկտորական արտադրյալը սիմվոլիկ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1^1 & v_1^2 & v_1^3 \\ v_2^1 & v_2^2 & v_2^3 \end{vmatrix}; \quad (7.1)$$

R^n -ում $v_i = (v_i^1, \dots, v_i^n)$, $1 \leq i \leq n-1$ վեկտորների $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} = A_1 e_1 + \dots + A_n e_n, \quad (7.2)$$

որտեղ $\{e_1, \dots, e_n\}$ -ը R^n -ի ստանդարտ բազիսն է, իսկ A_i -ն e_i էլեմենտի հանրահաշվական լրացումն է՝

$$A_i = (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & \hat{v}_1^i & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^i & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix},$$

որտեղ i -րդ սյան վրայի « $\hat{}$ » նշանը ցույց է տալիս, որ i -րդ սյունը բացակայում է:

Եթե $\varpi = (\varpi^1, \dots, \varpi^n)$, ապա (7.2) վեկտորական արտադրյալի և ϖ վեկտորի սկալյար արտադրյալը կլինի՝

$$\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, \varpi \rangle = \varpi^1 A_1 + \dots + \varpi^n A_n = \begin{vmatrix} \varpi^1 & \dots & \varpi^n \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} =: \det \begin{pmatrix} \varpi \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}; \quad (7.3)$$

Հետևաբար, $v_1 \times \dots \times v_{n-1} \perp v_1, \dots, v_{n-1}$:

R_p^n -ում վեկտորական արտադրյալը սահմանվում է այսպես՝

$$(p, v_1) \times \dots \times (p, v_{n-1}) = (p, v_1 \times \dots \times v_{n-1}):$$

Թեորեմ 7.1: Եթե (M, μ) -ը R^n -ում կողմնորոշված $(n-1)$ -չափանիք բազմածևորյուն է, $v_1, \dots, v_{n-1} \in M_x$ և $[v_1, \dots, v_{n-1}] = \mu_x$, ապա

$$n(x) = \frac{v_1 \times \dots \times v_{n-1}}{|v_1 \times \dots \times v_{n-1}|}, \quad (7.4)$$

որտեղ $n(x)$ -ը M բազմածևորյան արտաքին նորմալի օրքն է $x \in M$ կետում:

► Նշանակենք՝ $n_0 = \frac{v_1 \times \dots \times v_{n-1}}{|v_1 \times \dots \times v_{n-1}|}$: (7.3)-ի համաձայն՝

$$\det \begin{pmatrix} n_0 \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = < v_1 \times \dots \times v_{n-1}, \frac{v_1 \times \dots \times v_{n-1}}{|v_1 \times \dots \times v_{n-1}|} > = |v_1 \times \dots \times v_{n-1}| > 0,$$

այսինքն՝ $[n_0, v_1, \dots, v_{n-1}] = [(e_1)_x, \dots, (e_n)_x]$: Արտաքին նորմալի օրքի երկրորդ սահմանման համաձայն՝ $n(x) = n_0$: ■

Եթե $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ -ը M_x -ում օրբոնորմալ բազիս է, ապա

$$\det \begin{pmatrix} n(x) \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = 1 : \quad (7.5)$$

Այժմ, եթե $f: W_f \rightarrow M$ արտապատկերումը $x = f(t)$ կետում կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում է, ապա (7.4)-ի համաձայն՝

$$n(x) = \frac{f_*(e_1)_t \times \dots \times f_*(e_{n-1})_t}{|f_*(e_1)_t \times \dots \times f_*(e_{n-1})_t|}, \quad t \in W_f, \quad x = f(t),$$

ուստի $n(x)$ -ը x կետում անընդհատ է: Այսինքն՝ $n(x)$ -ը M բազմության վրա որոշված $(n-1)$ -չափանիք է:

Ծիծու է նաև հակադարձ պնդումը. Եթե R^n -ում $(n-1)$ -չափանիք M բազմածևորյունն այնպիսին է, որ գոյություն ունի M_x շոշափող

տարածության օրբոգնալ, միավոր վեկտորներից կազմված $n(x)$ անընդհատ վեկտորական դաշտ, ապա M -ը կողմնորոշելի է:

Ապացուցենք սա: M_x տարածության $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ բազիսը կընդգրկենք μ_x -ի մեջ, եթե $[n(x), v_1, \dots, v_{n-1}] = [(e_1)_x, \dots, (e_n)_x]$: Ցույց տանք, որ այդպես սահմանված μ_x -երը համաձայնեցված են: Եթա համար պետք է ապացուցել, որ եթե $f: W_f \rightarrow M$ արտապատկերումը լոկալ պարամետրացում է, $a, b \in W_f$ և $[f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{n-1})_a] = \mu_{f(a)}$, ապա $[f_*(e_1)_b, \dots, f_*(e_{n-1})_b] = \mu_{f(b)}$:

Ումենք՝

$$[n(x), f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{n-1})_a] = [(e_1)_x, \dots, (e_n)_x], \quad x = f(a):$$

Նշանակենք՝

$$v(t) = \frac{f_*(e_1)_t \times \dots \times f_*(e_{n-1})_t}{|f_*(e_1)_t \times \dots \times f_*(e_{n-1})_t|}, \quad t \in W_f:$$

Այդ դեպքում $v(t)$ -ն անընդհատ է և $v(a) = n(x) = n(f(a))$:

Մյուս կողմից, $v(t)$ -ն $M_{f(t)}$ -ին օրբոգնալ միավոր վեկտոր է, ուստի այն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$v(t) = \alpha(t)n(f(t)), \quad t \in W_f,$$

որտեղ $\alpha(t) = \pm 1$:

Բացի դրանից, $\alpha(t) \in C(W_f)$, քանի որ $\alpha(t) = \langle v(t), n(f(t)) \rangle$: Ուստի

α -ն հաստատում է, քանի W_f -ը կապակցված է:

$$\text{Անում է նկատել, որ } [n(f(t)), f_*(e_1)_t, \dots, f_*(e_{n-1})_t] = \mu_{f(t)} \text{ սլայմանը}$$

նշանակում է, որ

$$[n(f(t)), f_*(e_1)_t, \dots, f_*(e_{n-1})_t] = [(e_1)_{f(t)}, \dots, (e_{n-1})_{f(t)}],$$

կամ, որ նույնն է՝

$$0 < \det \begin{pmatrix} n(f(t)) \\ f_*(e_1)_t \\ \dots & \dots & \dots \\ f_*(e_{n-1})_t \end{pmatrix} = \langle n(f(t)), f_*(e_1)_t \times \dots \times f_*(e_{n-1})_t \rangle,$$

այսինքն՝ $\alpha(t) = 1$:

2. Ծավալի էլեմենտ և ծավալ: Դիցուք (V, μ) -ն k -չափանի կողմնորոշված գծային տարածություն է, որում սահմանված է $T(v, \varpi)$ սկալյար արտադրյալ: Այսինքն՝ T -ն երկգծային արտապատկերում է, որը սիմետրիկ է և դրական որոշյալ՝

$$T(v, \varpi) = T(\varpi, v); \quad T(v, v) > 0, \text{ եթե } v \neq 0:$$

Այսպիսի տարածությունում ծավալի թենզոր կամ ծավալի էլեմենտ է կոչվում և այն միակ k -աստիճանի հակահամաշափ ω թենզորը, որը $[v_1, \dots, v_k] = \mu$ պայմանին բավարարող օրթոնորմալ բազիսների վրա ընդունում է 1 արժեքը՝ $\omega(v_1, \dots, v_k) = 1$ (ω -ն միակն է, քանի որ այս դեպքում $\Lambda^k(V)$ -ն մեկ չափանի է):

Ծավալի թենզորը կախված է կողմնորոշումից և սկալյար արտադրյալից: Այս պատճառով էլ երբեմն ասում են՝ տրված կողմնորոշումից և տրված սկալյար արտադրյալից ծնված ծավալի թենզոր:

Դիցուք (M, μ) -ն k -չափանի (եզրով կամ առանց եզրի) կողմնորոշված բազմանկարյունն է R^n -ում, և M_x -ը x կետում շոշափող տարածությունն է, որը k -չափանի գծային տարածություն է: T_x -ով նշանակենք M_x -ում ստանդարտ սկալյար արտադրյալը՝

$$T_x(v_x, \varpi_x) = \langle v, \varpi \rangle; \quad v_x, \varpi_x \in M_x, \quad v, \varpi \in R^n:$$

$x \in M$ կետում ծավալի թենզորը է կոչվում M_x -ում՝ T_x -ից և μ_x -ից ծնված $\omega(v_1, \dots, v_k)$ ծավալի թենզորը և նշանակվում է՝

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = dV:$$

(Դասական նշանակումներով՝ dV , եթե $n = k = 3$; ds , եթե $n = 3$, $k = 2$; ds , եթե $k = 1$):

Այդ դեպքում

$$\int_M dV =: V_k(M) \quad (\text{կամ} \quad S(M))$$

ինտեգրալը կոչվում է M բազմանության ծավալ:

Նկատենք, որ եթե $M \subset R^n$ -ը n -չափանի, ստանդարտ կողմնորոշմամբ, կոմպակտ բազմանություն է, ապա $dV = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n : \zeta_{\text{ետևաբար}},$ այս նոր սահմանված ծավալը համընկնում է Ω իմանի ինտեգրալի միջոցով սահմանված ծավալի հետ:

Դիտարկենք մասնավոր դեպքեր:

ա) Եթե $k = n - 1,$ (7.5)-ի համաձայն,

$$\omega(x, v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} n(x) \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

$(n-1)$ -աստիճանի հակահամաչափ թեսզորը M_x -ում ծավալի էլեմենտն է:

Բացի դրանից, եթե $[v_1, \dots, v_{n-1}] = \mu_x,$ ապա (7.4)-ի համաձայն, կստանանք՝

$$dV(v_1, \dots, v_{n-1}) = \det \begin{pmatrix} n(x) \\ v_1 \\ \dots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} = \langle n(x), v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle = |v_1 \times \dots \times v_{n-1}| :$$

Մյուս կողմից, եթե $f : W_f \rightarrow M,$ $W_f \subset R^{n-1}$ արտապատկերումը $x = f(a) \in M$ կետի շրջակայրում կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում է, ապա $[f_*(e_1)_a, \dots, f_*(e_{n-1})_a] = \mu_x : \zeta_{\text{ետևաբար}},$

$$\begin{aligned} f^* dV(a, (e_1)_a, \dots, (e_{n-1})_a) &= |f_*(e_1)_a \times \dots \times f_*(e_{n-1})_a| = \\ &= |Df(a)(e_1) \times \dots \times Df(a)(e_{n-1})| : \end{aligned} \tag{7.6}$$

բ) Եթե $n = 3, k = 2$ և մակերևույթի պարամետրական ներկայացումն է՝

$$r = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \text{ ուստի } r' = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix},$$

ապա

$$r^* dS = |r_*(e_1) \times r_*(e_2)| = |(x'_u, y'_u, z'_u) \times (x'_v, y'_v, z'_v)| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

որտեղ

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix};$$

գ) $k=1$: Եթե $M \subset R^n$ -ը 1-չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է, ապա այն նաև կոչվում է ողորկ կոր: Այս դեպքում յուրաքանչյուր $x \in M$ կետում M_x -ը R_x^n -ի 1-չափանի ենթատարածություն է: Եթե $T \in M_x$, $[T] = \mu_x$ և $|T| = 1$, ապա լստ սահմանման՝

$$dV(T) = ds(T) = 1:$$

Եթե $v \in M_x$, $[v] = \mu_x$, ապա $v = |v|T$ (անցնան մատրիցի որոշիչը պետք է լինի դրական՝ $v = aT$, $|v| = a$): Հետևաբար՝ $ds(v) = |v|$:

Եթե $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ -ն M -ի կողմնորոշումը պահպանող պարամետրացում է, ապա

$$\gamma^* ds(e_1)_t = |\gamma_*(e_1)_t| = \left| (\gamma'(t)(e_1))_{\gamma(t)} \right| = |\gamma'(t)(e_1)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [\gamma'_i(t)]^2}:$$

3. Բազահայտ տեսքով տրված մակերևույթի մակերեսը: Ենթադրենք, թե R^n -ում $(n-1)$ -չափանի M բազմաձևության պարամետրացումը տրված է բացահայտ տեսքով՝ $x^n = \varphi(x^1, \dots, x^{n-1})$, ինչը կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով կը նշունի հետևյալ տեսքը՝

* Այս դեպքում ասում են, որ T վեկտորն ուղղված է շոշափողի դրական ուղղությամբ (XVIII, §1, 2):

$$f(x^1, \dots, x^{n-1}) = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \\ \varphi(x^1, \dots, x^{n-1}) \end{pmatrix}, \quad f' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x^{n-1}} \end{pmatrix}:$$

Այդ դեպքում՝

$$f_*(e_1) \times \dots \times f_*(e_{n-1}) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & \dots & e_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial x^{n-1}} \end{vmatrix} = A_1 e_1 + \dots + A_{n-1} e_{n-1} + A_n e_n,$$

որտեղ $|A_i| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right|$, $1 \leq i \leq n-1$, $|A_n| = 1$:

Հետևաբար՝

$$|f_*(e_1) \times \dots \times f_*(e_{n-1})| = \sqrt{1 + A_1^2 + \dots + A_{n-1}^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{n-1}} \right)^2}:$$

Այս արժեքը տեղադրելով (6.12)-ի մեջ՝ կստանանք

$$f^* dV(x) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^{n-1}} \right)^2} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}:$$

4. Ծավալի էլեմենտի կանոնական ներկայացումը:

ա) $k = n-1$: Ունենք՝

$$dV(x, v_1, \dots, v_{n-1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} n^1(x) & \dots & n^n(x) \\ v_1^1 & \dots & v_1^n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} n^i(x) \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & \hat{v}_1^i & \dots & v_1^n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^i & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix}: \quad (7.7)$$

Քանի որ R^n -ում $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ -ը $\{e_1, \dots, e_n\}$ ստանդարտ բազիսի դուալ բազիսն է, ապա (տես §1, 6)

$$dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n (v_1, \dots, v_{n-1}) = \begin{vmatrix} v_1^1 & \dots & \hat{v_1^i} & \dots & v_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1}^1 & \dots & v_{n-1}^i & \dots & v_{n-1}^n \end{vmatrix};$$

Այս արժեքները տեղադրելով (7.7)-ի մեջ, կստանանք.

$$dV(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} n^i(x) dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n : \quad (7.8)$$

թ) Եթե $n=3$, $k=2$, կստանանք՝

$$1^0. dS = n^1 dy \wedge dz + n^2 dz \wedge dx + n^3 dx \wedge dy :$$

Ապացուցենք նաև հետևյալ բանաձևերը՝

$$2^0. dy \wedge dz = n^1 dS, \quad 3^0. dz \wedge dx = n^2 dS, \quad 4^0. dx \wedge dy = n^3 dS : \quad (7.9)$$

Նշանակենք՝ $v \times \varpi = \alpha n(x)$, որտեղ $v, \varpi \in M_x$ և $\alpha = 0$, եթե v, ϖ -ն գծորեն կախված են, $\alpha > 0$, եթե $[v, \varpi] = \mu_x$ և $\alpha < 0$, եթե $[v, \varpi] = -\mu_x$:

Այսուհետև վերցնենք կամայական $z \in R_x^3$ վեկտոր. Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\langle z, n(x) \rangle \cdot \langle v \times \varpi, n(x) \rangle = \langle z, \alpha n(x) \rangle = \langle z, v \times \varpi \rangle,$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$\langle z, v \times \varpi \rangle = \langle z, n(x) \rangle dS(v, \varpi) :$$

Այժմ, վերցնելով $z = (e_1)_x, (e_2)_x, (e_3)_x$, կստանանք 2⁰⁻⁴-ը:

զ) $n=3$, $k=1$: Ունենք (նախորդ կետի զ)-ն.

Եթե $T = (T^1, T^2, T^3) \in M_x$, $[T] = \mu_x$, $|T| = 1$ և $v \in M_x$, $[v] = \mu_x$, ապա

$$v = |v| T : \zeta$$

$$ds(v) = |v| = \langle T, v \rangle = T^1 v^1 + T^2 v^2 + T^3 v^3 = T^1 dx(v) + T^2 dy(v) + T^3 dz(v),$$

այսինքն՝

$$1^0. \ ds = T^1 dx + T^2 dy + T^3 dz :$$

Ճիշտ են նաև հետևյալ բանաձևերը՝

$$2^0. \ dx = T^1 ds, \ 3^0. \ dy = T^2 ds, \ 4^0. \ dz = T^3 ds : \quad (7.10)$$

Երոք, եթե $[v] = [T]$ (հակառակ դեպքում կապացուցենք $-v$ -ի համար և կրազմապատկենը -1 -ով), ապա

$$v = |v|T = (|v|T^1, |v|T^2, |v|T^3),$$

հետևաբար,

$$dx(v) = T^1 |v| = T^1 ds(v), \ dy(v) = T^2 |v| = T^2 ds(v), \ dz(v) = T^3 |v| = T^3 ds(v) :$$

5. Անրացահայտ տեսքով արված մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք $F : R^n \rightarrow R$ ֆունկցիան անընդհատ դիֆերենցելի է, $M = F^{-1}(0)$ բազմա-ձևությունը դատարկ չէ և $\text{rank } F'(x) = 1, \ x \in M$:

Այդ դեպքում անրացահայտ ֆունկցիայի գոյության թեորեմի համա-ձայն, յուրաքանչյուր $a \in M$ կետում բավարարվում է թեորեմ 4.1-ի (ր) պայմանը, ընդ որում, $k = n - 1 : \Omega$ տարրի M -ը ($n - 1$) չափանի դիֆերենցելի բազմաձևություն է:

Նշանակենք՝ $g = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$ (որը կոչվում է F ֆունկցիայի գրադիենտ) և ապացուցենք

$$n(x) = \frac{1}{|g|} \cdot g_x \quad (7.10)$$

հավասարությունը:

Քանի որ M -ը $F(x) = 0$ հավասարման լուծումների բազմությունն է, ապա $x = f(t) : W \rightarrow M$ լոկալ պարամետրացման համար կունենանք՝ $F(f(t)) = 0, t \in W$ կամ, որ նույնն է՝

$$F(f^1(t^1, \dots, t^{n-1}), \dots, f^n(t^1, \dots, t^{n-1})) (f(t)) \equiv 0, \ t \in W :$$

Հաշվելով մասնակի ածանցյալը ըստ t^i -ի՝ կստանանք.

$$\frac{\partial F}{\partial x^1} \frac{\partial f^1}{\partial t^i} + \frac{\partial F}{\partial x^2} \frac{\partial f^2}{\partial t^i} + \dots + \frac{\partial F}{\partial x^n} \frac{\partial f^n}{\partial t^i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1$$

այսինքն՝

$$\langle g_x, f_*(e_i) \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1:$$

Այսպիսով, $g_x \perp M_x$, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել:

(7.10) բանաձևից հետևում է, որ $n(x)$ -ը նորմալի օրթերից կազմված անընդհատ վեկտորական դաշտ է, հետևաբար, M -ը կողմնորոշելի է: M -ի ծավալը հաշվելու համար $n(x)$ -ի (7.10) արժեքը կտեղադրենք (7.8)-ի մեջ և կհաշվենք $\int_M dV$ ինտեգրալը:

Որպես օրինակ, հաշվենք r շառավղով գնդային մակերևույթի մակերեսը R^n -ում, որը կնշանակենք $S_n(r)$ -ով: Այս դեպքում՝

$$F(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - r^2: \text{ Ուստի } g = 2(x_1, \dots, x_n), \text{ հետևաբար, } n(x) = \frac{1}{r} x_x:$$

(7.8)-ի համաձայն՝

$$S_n(r) = \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2} dV = \frac{1}{R} \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \hat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n:$$

Այնուհետև, կիրառելով Ստորև թերթեմը, կստանանք՝

$$S_n(r) = \frac{1}{r} \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2} \sum_{i=1}^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \frac{n}{r} V_n(r),$$

որտեղ $V_n(R)$ -ը n -չափանի գնդի ծավալն է:

6. Դաշտի տեսության տարրերը:

ա) Գառուս - Օստրոգարդսկու բանաձևը: Դիցուք M -ը R^3 -ում ընկած եռաչափ, եզրով, ստանդարտ կողմնորոշմամբ կոմպակտ բազմածևություն է, n -ը դրա արտաքին նորմալի օրթն է և $F = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ -ը M -ի վրա դիֆերենցելի վեկտորական դաշտ է: Այդ դեպքում, Ստորև թերթեմի մեջ վերցնելով $\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$, կստանանք՝

$$\int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial M} (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy): \quad (7.11)$$

Հաշվի առնելով (7.9) բանաձևերը՝ (7.11)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\int_M \operatorname{div} F dV = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle dS,$$

որտեղ $\operatorname{div} F := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, որը կոչվում է F վեկտորական դաշտի դիվերզիտեցիա:

թ) Ստորևի բանաձևեր: Դիցուք M -ը R^3 -ում ընկած երկչափ, եզրով, ստանդարտ կողմնորոշմանք կոնպակտ բազմանկային է, n -ը դրա արտաքին նորմալի օրթն է: Այնուհետև ենթադրենք, որ $T \in (\partial M)_x$ -ը այն վեկտորական դաշտն է, որը բավարարում է $ds(T)=1$ պայմանին, և $F=(P,Q,R)$ -ը M -ը պարունակող բաց բազմության վրա դիվերզեցելի վեկտորական դաշտն է: Այդ դեպքում, Ստորևի թեորեմի մեջ վերցնելով $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, կստանանք՝

$$\begin{aligned} & \int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz = \\ & = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx: \end{aligned} \quad (7.12)$$

Հաշվի առնելով (7.9) և (7.10) բանաձևերը՝ (7.12)-ը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$\int_{\partial M} \langle F, T \rangle dS = \int_M \langle (\nabla \times F), n \rangle dS,$$

որտեղ

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad \langle (\nabla \times F), n \rangle = \begin{vmatrix} n^1 & n^2 & n^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}:$$

$\nabla \times F$ -ը կոչվում է F վեկտորական դաշտի ռոտոր և նշանակվում է՝ $rot F$ կամ $curl F$:

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԽՄՔԱԳԻՐՆԵՐԻ ԿՈՂՄԻՑ	3
Հ ԳԼՈՒԽ, ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԾԱՐՔԵՐ	
§1. ՀԱՎԱՍԱՐԱԳԱՓ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅՈՒՆ	
1. Կետային զուգամիտուրյուն և հավասարաշափ զուգամիտուրյուն.....	4
2. Հավասարաշափ զուգամիտուրյան Կոշիի սկզբունքը.....	8
§2. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԾԱՐՔԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԳԱՓ	
ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻԾՆԵՐ	
1. Վայերշտրասի (մաժորանոռվ) հայտանիշը.....	9
2. Արելի և Դիրիխլեի հայտանիշները.....	10
§3. ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ԾԱՐՔԻ ԳՈՒՄԱՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
1. Ֆունկցիոնալ շարքի գումարի անընդհատությունը.....	13
2. Անդամ առ անդամ սահմանային անցում.....	16
3. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ինտեգրումը.....	18
4. Ֆունկցիոնալ շարքերի անդամ առ անդամ ածանցումը.....	20
5. Վան դեր Վարդենի օրինակը.....	24
§4. ԱՍԻՃԱՆԱՅԻՆ ԾԱՐՔԵՐ	
1. Արելի քեռքեմմերը.....	26
2. Տարքերի քեռքեմը.....	28
3. Աստիճանային շարքի ինտեգրումը և ածանցումը.....	30
4. Աստիճանային շարքը՝ որպես մելլորի շարք.....	32
§5. ՎԱՅԵՐԾՏՐԱՄԻ ԹԵՇՈՐԵՍԸ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ. ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԱՍԻՆ	
1. Լանդաուի ապացույցը.....	33
2. Բենջտեյնի ապացույցը.....	36

XI ԳԼՈՒԽ, ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԱՆՎԵՐՋ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԸ ՎԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1.	Անվերջ սահմաններով ինտեգրալների սահմանումը.....	39
2.	Ինտեգրալ հաշվի հիմնական բանաձևը.....	40
3.	Անիսկական ինտեգրալի պարզագույն հատկությունները.....	41
4.	Դրական ֆունկցիայի ինտեգրալի գուգամիտությունը.....	43
5.	Ինտեգրալի գուգամիտությունն ընդհանուր դեպքում.....	45
6.	Բացարձակ և պայմանական գուգամեան ինտեգրալներ.....	47
§2.	ԱՆՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ	
1.	Անսահմանափակ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները.....	49
2.	Ֆրուլլանիի ինտեգրալը.....	53
3.	Կոշիի գուգամիտության սկզբունքը ընդհանուր դեպքում.....	55
§3.	ՄԱՍԵՐԸ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԵՎ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒՄ	
1.	Մասերով ինտեգրում.....	56
2.	Փոփոխականի փոխարինում.....	57

XII ԳԼՈՒԽ, ՊԱՐԱՍԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՀԱՎԱՍԱՐԱՎԱՓ ՉՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅՈՒՆ

1.	Ընդհանուր հավասարաշափ գուգամիտության Կոշիի սահմանումը.....	59
2.	Ընդհանուր հավասարաշափ գուգամիտության Կոշիի սկզբունքը.....	61
3.	Ընդհանուր հավասարաշափ գուգամիտության Հայմեի սահմանումը....	61
4.	Հաջորդական սահմանների բերեմքը.....	63

§2. ՊԱՐԱՍԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1.	Սահմանային անցում պարամետրից կախված ինտեգրալի նշանի տակ.....	66
2.	Պարամետրից կախված ինտեգրալի ածանցումը.....	67
3.	Պարամետրից կախված ինտեգրալի ինտեգրումը.....	68

4. Միայն <i>x</i> -ից կախված արտադրիչի ներմուծումը.....	69
§3. ՊԱՐԱՍԵՏՐԻՑ ԿԱԽՎԱԾ ԱՆԻՍԿԱԿԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ	
1. ՊԿԱԲ-ի հավասարաշափ գուգամիտուրյունը.....	70
2. ՊԿԱԲ-ի հավասարաշափ գուգամիտուրյան Կոշիի սկզբունքը.....	71
3. ՊԿԱԲ-ի հավասարաշափ գուգամիտուրյան հայտանիշներ.....	72
4. ՊԿԱԲ-ի թերումը ֆունկցիոնալ հաջորդականուրյան կամ շարքի.....	76
§4. ՊԿԱԲ-Ի ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
1. ՊԿԱԲ-ի անընդհատուրյունը.....	77
2. Սահմանային անցում ՊԿԱԲ-ի ճշանի տակ.....	77
3. ՊԿԱԲ-ի ածանցումը.....	82
4. ՊԿԱԲ-ի ինտեգրումը.....	84
5. ՊԿԱԲ-ի անխսկական ինտեգրալը.....	85
6. Միայն <i>x</i> -ից կախված արտադրիչի ներմուծումը.....	89
§5. ԷՅԼԵՐՅԱՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ	
1. Առաջին սեռի էյլերյան ինտեգրալ.....	90
2. Երկրորդ սեռի էյլերյան ինտեգրալ.....	92
3. Էյլեր - Գատովի բանաձևը.....	94
4. <i>B</i> և <i>G</i> ֆունկցիաների կապը.....	96
5. <i>G</i> ֆունկցիայի լրացման բանաձևը.....	97

XIII ԳԼՈՒԽ, ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒԿՑԻԱՆԵՐ, ՍՏԻԼՏԵՍԻՐ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ

§1. ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒԿՑԻԱՆԵՐ	
1. Ֆունկցիայի վարիացիայի սահմանումը, վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաներ.....	99
2. Փոփոխական վերին սահմանով ինտեգրալի վարիացիան.....	101

3. <i>BV[a,b]</i> դասի կառուցվածքը.....	102
4. Վերջավոր վարիացիայի ֆունկցիաների հիմնական հատկությունը.....	103
5. Ժորդանի վերլուծությունը.....	105
6. Վերջավոր վարիացիայի անընդհատ ֆունկցիաներ.....	105
7. Վեկտորարժեք ֆունկցիաներ, ուղելի կորեր.....	108
§2. USHLSEH ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ	
1. Ստիլտեսի ինտեգրալի սահմանումը և պարզագույն հատկությունները.....	110
2. Մասերով ինտեգրում.....	111
3. Ըստ աճող ֆունկցիայի Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյության պայմանը.....	112
4. Ստիլտեսի ինտեգրալի գոյությունն ընդհանուր դեպքում.....	114
5. Ստիլտեսի ինտեգրալի ներկայացումը Ո-իմանի ինտեգրալով.....	116
6. Ստիլտեսի ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները.....	117
7. Միջին արժեքի բեռնեմները.....	118
8. Փոփոխականի փոխարինում.....	119
9. Ստիլտեսի ինտեգրալի երկրաչափական մեկնարանումը.....	120
10. Սահմանային անցում Ստիլտեսի ինտեգրալի նշանի տակ.....	121

XIV ԳԼՈՒԽ, ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՁԵՐ

§1. ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՁ, ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ	
1. Եռանկյունաչափական շարքի գործակիցների հաշվումը Էյլեր - Ֆուրիեի մեթոդով.....	124
2. Ֆուրիեի շարք.....	126
3. Դիրիխլեի ինտեգրալը.....	127
4. Ո-իմանի լեմման.....	129
5. Տեղայնացման (լոկալիզացիայի) սկզբունքը.....	130

§2. ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԵՏՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻԾՆԵՐ

1. Դիմիի հայտանիշը.....	132
2. Լիպշիցի հայտանիշը.....	133
3. Կոտոր առ կտոր դիֆերենցելի ֆունկցիայի դեպքը.....	134
4. Դիրիխլեի լեմման.....	135
5. Դիրիխլե - Ժորդանի հայտանիշը.....	137

§3. ՈՉ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒՄԸ

ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՔԻ

1. $(-\pi, \pi]$ միջակայքի դեպքը.....	139
2. Կամայական հաստվածի դեպքը.....	140
3. Սիայն ըստ կոսինուսների (սինուսների) վերլուծություններ.....	141
4. $\sin x$ ֆունկցիայի վերլուծությունն անվերջ արտադրյալի (Էյլեր).....	146
§4. ՖԵՅԵՐԻ ԹԵՌՈՐԵՄԸ	

1. Ֆեյերի թեռորեմը.....	147
2. Վայերշտրասի թեռորեմները.....	150

§5. ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՔ ԸՍՏ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՍՏԱԿՐԳԻ

1. Իրական փոփոխականի կոմպլեքս ֆունկցիաներ.....	153
2. Սկալյար արտադրյալ, նորմ և հեռավորություն.....	156
3. Ֆունկցիոնալ տարածություններ: Օրթոգոնալ համակարգեր.....	158
4. Եռանկյունաչափական շարքի կոմպլեքս գրեյածներ.....	159
5. Ֆուրիեի շարք ըստ օրթոգոնալ համակարգի.....	161
6. Ֆուրիեի շարքի մասնակի գումարի էքստրեմալ հատկություններ.....	163
7. Եռանկյունաչափական համակարգի փակություններ և լրիվություններ.....	164
8. Ֆուրիեի շարքի անդամ առ անդամ ինտեգրումներ.....	168
§6. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՖՈՒՐԻԵԻ ԾԱՐՔԸ	
1. Անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիայի ֆուրիեի գործակիցների նվազման արագություններ.....	170

2. Անընդհատ դիմումների ֆունկցիայի Ֆորիեի շարքի զուգամիտության արագությունը.....	172
3. Ֆորիեի շարքի անդամ առ անդամ ածանցումը.....	174
§7. ՖՈՒՐԻԵԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ	
1. Նախնական դաստողություններ.....	174
2. Դիմի հայտանիշը.....	175
3. Միայն բայտ կոսինուսների (սինուսների) վերլուծություններ.....	178
4. Ֆորիեի ինտեգրալի կոմպլեքս գրելաձևը: Ֆորիեի ձևափոխություն.....	179

XV ԳԼՈՒԽ, ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§1. ՖՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՍԻճԱՆ ԱՆԸՆԴՀԱՏ

ԸՆՏԱՆԻՔՆԵՐ

1. Հավասարաստիճան ամընդհատություն.....	182
2. Հավասարաչափ սահմանափակություն.....	184
3. Արցելայի թեորեմը.....	185

§2. ՄԹՈՈՒՆ - ՎԱՅԵՐԾՐԱՍԻ ԹԵՌՈՒԵԱԾ

1. Մրուն - Վայերշտրասի թեորեմի ձևակերպումը.....	189
2. Նախապատրաստական լեմմաներ.....	191
3. Հիմնական լեմմա.....	193
4. Մրուն - Վայերշտրասի թեորեմի ապացույցը.....	194
5. Մրուն - Վայերշտրասի թեորեմն առանց երրորդ պայմանի.....	196
6. Մրուն-Վայերշտրասի թեորեմը կոմպլեքս համրահաշիվների համար.	197

XVI ԳԼՈՒԽ, ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

§1. ԳԾԱՅԻՆ ԶԵՎԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Ներածություն.....	200
2. Գծային ձևափոխության նորմ.....	201
3. Հակադարձելի գծային ձևափոխությունների թեորեմը.....	203

§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

1. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ.....	205
2. Պարզագոյն քեռեմներ.....	206
3. Դիֆերենցելիությունը կոորդինատային ֆունկցիաների լեզվով.....	208
4. Անընդհատ դիֆերենցելի արտապատկերումներ.....	210
§3. ՀԱՎԱԴԱՐՁ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԹԵՇՈՐԵՄԸ	
1. Նախապատրաստական լեմմա.....	211
2. Հակադարձ ֆունկցիայի քեռեմնը.....	212
3. Անբացահայտ ֆունկցիաներ.....	216
§4. ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ	
1. Հարաբերական էքստրեմումներ.....	219
2. Անհրաժեշտ պայմաններ.....	221
3. Լազրանմի ամորոշ գործակիցների մեթոդ.....	223
4. Բավարար պայմաններ.....	224

XVII ԳԼՈՒԽ, ԲԱԶԱՐԱԿԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

§1. ՉՈՒԳԱՀԵՇՈԱՆՏԻՍՈՎ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Զուգահեռանիստի տրոհումները.....	228
2. Ինտեգրալի սահմանումը և գոյության անհրաժեշտ պայմանը.....	231
3. Դարրոի գումարները.....	232
§2. ԼԵՔԵԳԻ ԹԵՇՈՐԵՄԸ	

1. Ֆունկցիայի տատանում կետում.....	235
2. Զրո չափի և զրո ծավալի բազմություններ.....	237
3. Լեքեգի քեռեմնը.....	239
§3. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
1. Ինտեգրալի՝ հավասարությունով արտահայտվող հատկությունները... <td>241</td>	241
2. Ինտեգրալի՝ անհավասարություններով արտահայտվող հատկությունները.....	243

3. Սիցին արժեքի թեորեմները.....	244
§4. ՖՈՒԲԻՆԻ ԹԵՈՐԵՄԸ.....	246
§5. ԶԱՓԵԼԻ ԲԱԶՈՒԹՅԱՍՔ ՏԱՐԱԾՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ	
1. Ժորդանի իմաստով չափելի բազմություններ.....	249
2. J -չափելի բազմությամբ տարածված ինտեգրալ.....	251
3. Կրկնակի և եռակի ինտեգրալների հաշվումը.....	253
4. Բազմակի ինտեգրալի դասական սահմանումը.....	259
5. Ինտեգրալի սահմանումը ցանցերի միջոցով.....	261
6. Բաց բազմության կոմպակտ սպառում.....	264
§6. ՓՈՓՈԽԱԿԱԾԻ ՓՈԽԱՐԲՆՈՒՄ	
1. J -չափելի բազմության պատկերը.....	265
2. J -չափելի բազմության գծային պատկերը.....	267
3. J -չափելի բազմության պատկերի չափի գնահատականը.....	271
4. Փոփոխականի փոխարինման թեորեմը.....	274
5. Գնդի ծավալը Rⁿ -ում.....	275
§7. ԲԱԶՈՍԱԿԻ ԱՆԻՍԿԱԿԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ	
1. Դրական ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ.....	277
2. Նշանափոխ ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ.....	279
3. Փոփոխականի փոխարինում.....	281
4. Սարդի թեորեմը.....	282
§8. ԱԻՎԱՌԻ ՏՐՈՀՈՒՄԸ	
1. Ուրիտնի լեմման.....	286
2. Սիավորի տրոհումը.....	288
3. Անիսկական ինտեգրալի սահմանումը միավորի տրոհման միջոցով.....	291

**XVIII ԳԼՈՒԽ, ԿՈՐԱԳԻԾ ԵՎ ՍԱԿԵՐԵՎՈՒԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ
(Դասական մոտեցումը)**

§1. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Պարամետրացված կոր և նրա կողմնորոշումը.....	293
2. Կորի բնական պարամետրացումը.....	295
3. Սուազին սեռի կորագիծ ինտեգրալ.....	298
4. Երկրորդ սեռի կորագիծ ինտեգրալ.....	301
5. Գորսայի լեմման.....	303

§2. ԳՐԻՆԻ ԲԱՆԱԳԵՎԸ

1. Փակ կորով տարածված ինտեգրալ.....	305
2. Գրինի բանաձևը.....	306
3. Գրինի բանաձևը բազմակապ տիրույթների համար.....	310

§3. ԿՈՐԱԳԻԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԱՆԿԱԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ԾԱՆՍՊԱՐՀԻՑ

1. Կորագիծ ինտեգրալի անկախությունը ճանապարհից.....	311
2. Դիֆերենցիալ ձևի ճախմականի գոյությունը.....	312
3. Փակ դիֆերենցիալ ձև.....	315

§4. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐԻ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ

1. Հարթ պատկերների արտապատկերումը.....	316
2. Մակերեսի արտահայտումը կորագիծ կոորդինատների միջոցով.....	318

§5. ՍԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵՎ ՍԱԿԵՐԵՄԸ

1. Պարամետրացված մակերեսոյք.....	320
2. Երկկողմանի մակերեսոյք.....	322
3. Ըփարցի օրինակը.....	326
4. Բացահայտ տեսքով տրված մակերեսոյքի մակերեսը.....	328
5. Պարամետրացված մակերեսոյքի մակերեսը.....	330

§6. ՍԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐ

1. Սուազին տիպի մակերեսութային ինտեգրալ.....	331
2. Երկրորդ տիպի մակերեսութային ինտեգրալ.....	333

3. Ստորսի բանաձեռ	335
4. Գառու - Օստրոգրադսկի բանաձեռ	338
 XIX ԳԼՈՒԽ, ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԶԵՎԵՐ ԵՎ ԴՐԱՆՑ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄԸ	
§1. ԲԱԶՈՍԱԳԾԱՅԻՆ ՆԾԱՆԱՓՈԽ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ	
1. Տեղափոխությունների խումբ	341
2. Բազմագծային ձևեր	343
3. Բազմագծային նշանափոխ ձևեր	346
4. Նշանափոխ թենգորների արտաքին արտադրյալ	348
5. $\Lambda^k(V)$ տարածության բազին	350
6. Նշանափոխ թենգորների ներկայացումը անցման մատրիցի մինորների միջոցով	352
§ 2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԶԵՎԵՐ	
1. Դիֆերենցիալ ձևի սահմանումը	354
2. Դիֆերենցիալ ձևի (արտաքին) դիֆերենցիալ	355
3. Փոփոխականի փոխարինում դիֆերենցիալ ձևերում	357
4. Տրանզիստորյուն (տարանցիկություն)	360
5. Պուանկարեի լեմման	361
§3. ԱՏՈՔՍԻ ԹԵՇՈՐԵՄԸ ԾՂԹԱՆԵՐՈՎ ՏԱՐԱԾՎԱԾ	
ԻՆՏԵԳՐԱԼՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ	
1. Մինգույար խորանարդ և շղթա	364
2. Ստորսի թեորեմը	366
§4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԵԼԻ ԲԱԶՈՍԱԶԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	
1. Դիֆերենցելի բազմանություն	371
2. Ըոշափող տարածություն	374
3. Եզրով դիֆերենցելի բազմանություններ	376

§5. ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՈՒՄ

1. Վեկողութական տարածության կողմնորոշումը.....	377
2. Դիմումայի բազմաձևության կողմնորոշում.....	378
3. Արտաքին նորմալի օրթ.....	381
4. Մակածված կողմնորոշում.....	382
§ 6. ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ ԲԱԶՄԱՉԵՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎՐԱ	
1. Դիմումայի ձևեր բազմաձևությունների վրա.....	384
2. Բազմաձևությամբ տարածված ինտեգրալ.....	386
3. Ստորափ թեորեմը բազմաձևությունների վրա.....	392
§ 7. ԲԱԶՄԱՉԵՎՈՒԹՅԱՆ ԾԱՎԱԼ	
1. Արտաքին նորմալի օրթը որպես վեկողութական արտադրյալ.....	394
2. Ծավալի էլեմենտ և ծավալ.....	398
3. Բացահայտ տեսքով տրված մակերևույթի մակերեսը.....	400
4. Ծավալի էլեմենտի կանոնական մերկայացումը.....	401
5. Անբացահայտ տեսքով տրված մակերևույթի մակերեսը.....	403
6. Դաշտի տեսության տարրերը.....	404
ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ.....	406