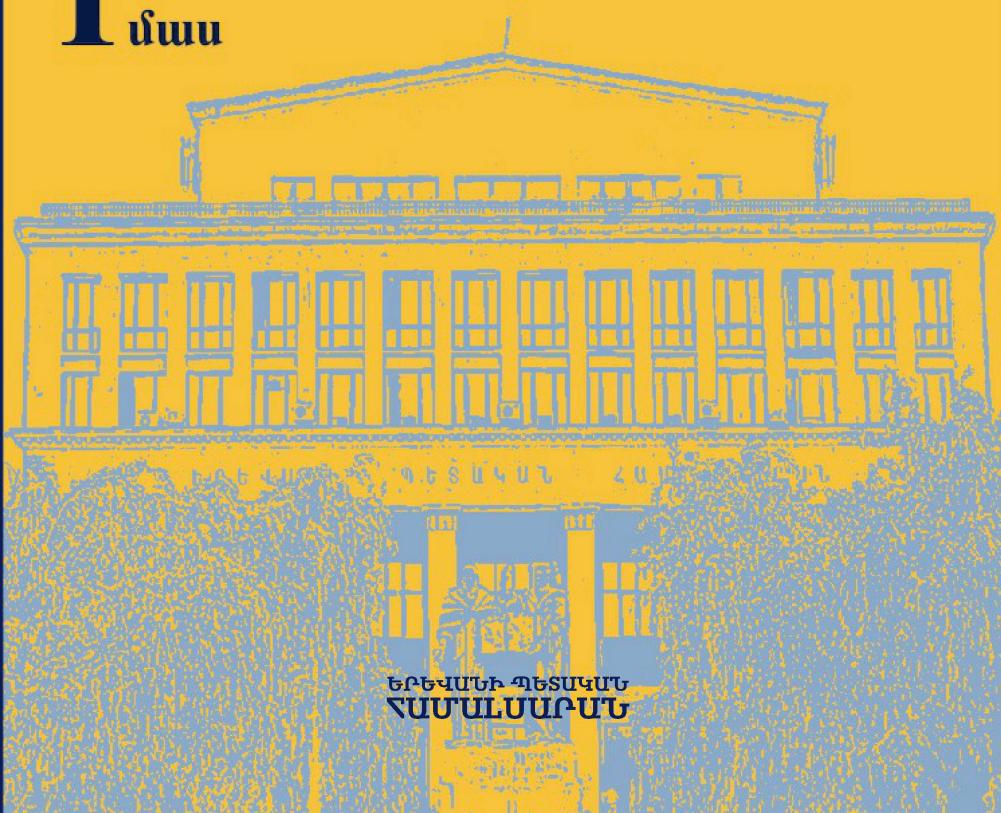


Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

# Մարեմատիկական ԱՆԱԼԻԶ

I  
մաս



ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՄԱՐԱՆ

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

առաջին մաս

Երևոնք՝ լրամշակված հրատարակություն

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ նախարարության կողմից  
որպես բուհական դասագիրք

ԵՐԵՎԱՆ  
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ  
2018

ՀՏԴ 517(075.8)

ԳՄԴ 22.16g73

Մ 980

Հրատարակության է երաշխավորել  
ԵՊՀ մաքենատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի  
գիտական խորհուրդը

Խմբագիրներ՝

**Ա. Ա. Սահակյան**

ԵՊՀ մաքենատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի դեկան,  
ֆիզ.մաթ. գիտությունների դոկտոր,  
ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ

**Մ. Մ. Մարտիրոսյան**

ԵՊՀ մաքենատիկական անալիզի և ֆունկցիաների  
տեսության ամբիոնի դոցենտ,  
ֆիզ.մաթ. գիտությունների թեկնածու

Մուսոյան Վ.

Մ 980 Մաքենատիկական անալիզ/Մուսոյան Վ., Մաս 1, -Եր.: ԵՊՀ հրատ., 2018,  
340 էջ:

Դասագիրքը նախատեսված է բուհերի ֆիզիկամաքենատիկական, բնագիտական և տեխնիկական մասնագիտությունների համար: Տեսական հարուստ նյութից զատ, այն աշխի է ընկնում նաև լրության օրինակների բազմազանությամբ, ինչը հնարավորություն է տալիս դասագրքից օգտվելու նշված մասնագիտությունների առկա և հեռակա բաժիններում սովորող բոլոր ուսանողներին:

ՀՏԴ 517(075.8)

ԳՄԴ 22.16g73

ISBN 978-5-8084-2264-3

© ԵՊՀ հրատ., 2018

© Մուսոյան Վ., 2018

Դասագրքի երկրորդ՝ լրամշակված հրատարակությունը նվիրվում է  
պրոֆեսոր Վ.Խ. Մուսոյանի ծննդյան 80 ամյակին



## Առաջին հրատարակության նախաբան (խմբագիրների կողմից)

Ներկայացվող դասագիրքը հիմնված է Երևանի պետական համալսարանում երկար տարիների ընթացքում հեղինակի կարդացած դասախոսությունների վրա: Այն ընդգրկում է «Մարեմատիկական անալիզ» առարկայի բուհական ծրագրերում նախատեսված բոլոր թեմաները:

Դասագիրքն աչքի է ընկնում շարադրանքի հատակությամբ, սահմանումների և ապացույցների ճշգրտությամբ, լուծված օրինակների բազմազանությամբ: Դրա հետ մեկտեղ՝ հեղինակը հմարավորինս գերծ է մնում «ավելորդ խստություններից», որոնք կարող են խճել ընթերցողին: Այս դասագրքի մերոդական առավելությունը կայանում է նրանում, որ նյութը ներկայացված է ամբողջական և բովանդակալից, բայց միևնույն ժամանակ՝ հակիրճ տեսքով: Դա մի կողմից միտքած է ուղղորդելու և հեշտացնելու ուսանողի ուսումնառության գործընթացը, իսկ մյուս կողմից՝ մղելու նրան ինքնուրույն ստեղծագործական աշխատանքի:

Դասագիրքը բաղկացած է երկու հատորից: Առաջին հատորը ներառում է մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշիվը, մի քանի փոփոխականի թվային ֆունկցիաների դիֆերենցիալ հաշիվը և թվային շարքերը: Երկրորդ հատորը նվիրված է ֆունկցիոնալ հաջորդականություններին ու շարքերին, պարամետրից կախված ինտեգրալներին, Ստիլտեսի ինտեգրալին, շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվին: Բովանդակությունը արողիված է գլուխների, գլուխները՝ պարագրաֆների, վերջիններս էլ՝ կետերի: Բանաձևերի համարակալումը երկտեղ է և զործում է միայն տվյալ գլխի շրջանակներում. օրինակ՝ որևէ գլխում հանդիպող (5.8) բանաձևն այդ գլխի 5-րդ պարագրաֆի 8-րդ բանաձևն է: Թեորեմների ապացույցները սկսվում են ► նշանով, իսկ

■ նշանն ազդարարում է ապացույցի ավարտը:

## Ի ԳԼՈՒԽ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ

### ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մաքեմատիկական աճալիզի հիմնական հասկացությունների ուսումնասիրությունը, ինչպիսիք են՝ սահմանը, անընդհատությունը, ածանցյալը և ինտեգրալը, հիմնված է թվի գաղափարի ճշգրիտ սահմանման վրա: Մենք կենթադրենք, որ ընթերցողը ծանոր է ռացիոնալ թվերի կառուցվածքին ու հատկություններին\* և իրական թվերը կներմուծենք ռացիոնալ թվերի բազմության հասուլությունից միջոցով:

Հայտնի է, որ ռացիոնալ թվերի համակարգը լրիվ չէ այն իմաստով, որ ռացիոնալ թվերը բավարարում են թվաբանության և երկրաչափության ոչ բոլոր պահանջներին: Օրինակ, ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ գոյություն չունի այնպիսի թիվ, որի քառակուսին 2 է: Այս պնդումն ապացուցենք հակասող ենթադրության մեթոդով. դիցուք գոյություն ունի  $\frac{m}{n}$  ռացիոնալ թիվ ( $m$ -ը և  $n$ -ը բնական թվեր են) այնպիսին, որ  $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ :

Կարող ենք համարել, որ  $\frac{m}{n}$  կոտորակն անկրճատելի է՝ հակառակ դեպքում դատողությունները կշարունակենք այն կրճատելուց հետո: Այսպիսով՝  $m^2 = 2n^2$ , հետևաբար,  $m$ -ը զույգ թիվ է՝  $m = 2k$ : Այստեղից կստանանք՝  $n^2 = 2k^2$ , հետևաբար,  $n$ -ը նույնապես զույգ թիվ է: Ստացվեց, որ  $\frac{m}{n}$  կոտորակը կրճատելի է, ինչը հակառակություն է:

Ստացված իրավիճակը դիտարկենք մի նոր՝ Դեղեկինդի հատույթների տեսանկյունից: Նշանակենք  $A$ -ով այն  $a$  դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են  $a^2 < 2$  պայմանին, իսկ  $A'$ -ով՝ այն

\* Առաջիկայում այդ հատկությունները կբարկենք:

$a'$  դրական ռացիոնալ թվերի բազմությունը, որոնք բավարարում են  $a'^2 > 2$  պայմանին:

Ցույց տանք, որ  $A$  բազմությանը պատկանող թվերի մեջ չկա մեծագույնը, իսկ  $A'$ -ին պատկանողների մեջ՝ փոքրագույնը: Ապացուցենք այդ պնդումներից, օրինակ, առաջինը: Վերցնենք կամայական  $a \in A$  թիվ և համոզվենք, որ այն  $A$  բազմության մեծագույն տարրը չէ: Դրա համար բավական է նկատել, որ գոյություն ունի  $n$  բնական թիվ այնպիսին, որ

$$a + \frac{1}{n} \in A, \text{ այսինքն } \left( a + \frac{1}{n} \right)^2 < 2: \text{ Իրոք, քանի որ}$$

$$\left( a + \frac{1}{n} \right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \leq a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n},$$

$n$ -ը կընտրենք այնպես, որ տեղի ունենա

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} < 2$$

անհավասարությունը, կամ, որ նույնն է՝

$$n > \frac{2a+1}{2-a^2}:$$

$A'$ -ում փոքրագույն տարրի բացակայությունն ապացուցվում է նման դասողություններով:

Բերված մեկնաբանությունը նախադրյալ է՝ ընկալելու *Դեղեկինդի հատույթների տեսությունը*:

## §1. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ: ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶՄՈՒԹՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ

**1. Իրական թվի սահմանումը:** Դիցուք ռացիոնալ թվերի  $\mathbf{Q}$  բազմությունը տրուիված է  $A$  և  $A'$  երկու ոչ դատարկ դասերի (ենթաբազմությունների) այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ երկու պայմանները.

1<sup>o</sup>. Յուրաքանչյուր ռացիոնալ թիվ պատկանում է այդ դասերից մեկին և միայն մեկին՝

$$\mathbf{Q} = A \cup A', \quad A \cap A' = \emptyset :$$

2<sup>o</sup>.  $A$  դասին պատկանող յուրաքանչյուր  $a$  թիվ փոքր է  $A'$  դասին պատկանող յուրաքանչյուր  $a'$  թվից՝

$$a \in A, \quad a' \in A' \Rightarrow a < a' :$$

Այսպիսի տրոհումը կանվանենք *հասուլյք* և կնշանակենք  $A / A'$  սիմվոլը:  $A$  բազմությունը կոչվում է *հասուլյքի ստորին դաս*, իսկ  $A'$ -ը՝ *հասուլյքի վերին դաս*:

### Օրինակներ:

**ա)** Ֆիքսենք կամայական  $r$  ռացիոնալ թիվ:  $A$  ստորին դասի մեջ ընդգրկենք  $a < r$  պայմանին բավարարող բոլոր  $a$  ռացիոնալ թվերը, իսկ  $A'$  վերին դասի մեջ՝  $a' \geq r$  պայմանին բավարարող բոլոր  $a'$  ռացիոնալ թվերը:

Հեշտ է տեսնել, որ  $1^0$  և  $2^0$  պայմանները բավարարված են, այսինքն՝ առկա է հասուլյք:  $r$  ռացիոնալ թիվը պատկանում է վերին դասին և այդ դասի փոքրագույն թիվն է: Մյուս կողմից,  $A$  ստորին դասում մեծագույն թիվ գոյություն չունի, որովհետև յուրաքանչյուր  $a \in A$  ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունի  $a_1$  ռացիոնալ թիվ, այնպիսին, որ  $a < a_1 < r$  (օրինակ,

$$a_1 = \frac{a+r}{2} : \text{Հետևաբար, } a_1 - \text{ը նույնական ստորին դասից է:}$$

**ա)**  $A$  ստորին դասը կազմենք  $a \leq r$  պայմանին բավարարող բոլոր ռացիոնալ թվերից, իսկ մնացած ռացիոնալ թվերն ընդգրկենք  $A'$  վերին դասի մեջ:

Այս օրինակը նախորդից տարբերվում է նրանով, որ  $r$  թիվը վերին դասից տեղափոխվել է ստորին դաս, ուստի ա) օրինակում ստորին դասը պարունակում է մեծագույն տարր, իսկ վերինը չի պարունակում փոքրագույն տարր:

**բ)**  $A$  ստորին դասի մեջ ներգրավենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերը,  $0$ -ն և այն դրական ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են  $a^2 < 2$  պայմանին: Մնացած ռացիոնալ թվերը (այսինքն՝  $a' > 0, a'^2 > 2$  պայմանին բավարարող ռացիոնալ թվերը) բոլ կազմեն  $A'$  վերին դասը:

Ներածությունում ապացուցվել է, որ այս հատույքի ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ վերին դասում՝ փոքրագույն:

Նկատենք նաև, որ հնարավոր չէ, որ մի որևէ հատույքի ստորին դասում գոյություն ունենա մեծագույն տարր և, միաժամանակ, վերինում՝ փոքրագույն: Իրոք, եթե  $r$ -ը լինի  $A$ -ի մեծագույն տարրը, իսկ  $r'$ -ը՝  $A'$ -ի փոքրագույնը, կդիտարկենք  $r_0 = \frac{r + r'}{2}$  ռացիոնալ թիվը, որը կբավարարի

$r < r_0 < r'$  պայմանին: Վերջինս կնշանակի, որ  $r_0$ -ն ոչ  $A$ -ին է պատկանում, և ոչ էլ՝  $A'$ -ին, ինչը հակասություն է:

Այսպիսով, հատույթները կարող են լինել ընդամենը երեք տիպի՝ հետևյալ նկարագրերով.

**ա)**  $A$  ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ  $A'$  վերին դասում կա փոքրագույն տարր՝  $r$ :

**աշ)**  $A$  ստորին դասում կա մեծագույն տարր՝  $r$ , իսկ  $A'$  վերին դասում չկա փոքրագույնը:

**բ)**  $A$  ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ  $A'$  վերին դասում՝ փոքրագույն:

Առաջին երկու տիպի հատույթներում  $r$ -ը կոչվում է *հատույթի սահմանազատիչ թիվ*, իսկ ք) տիպի հատույքի համար ասում են, որ այն սահմանազատիչ թիվ չունի:

**Սահմանում:** բ) տիպի հատույթները կոչվում են *իռացիոնալ թվեր*, այսինքն, *իռացիոնալ թիվ* ասելով, կհասկանանք այնպիսի հատույթ, որի ստորին դասում չկա մեծագույն տարր, իսկ վերին դասում՝ փոքրագույն:

Ուացիոնալ թվերին նույնպես կարելի է համապատասխանեցնել հատույթներ: Որոշակիության համար, հետազայտման աշխատավոր տիպի հատույթը չենք դիտարկի:  $r$  ռացիոնալ թիվը կնույնացնենք ա) տիպի այն հատույթի հետ, որի սահմանազատիչ թիվը հենց  $r$ -ն է, այսինքն՝ այն հատույթի, որի  $A$  ստորին դասը բաղկացած է  $r$ -ից փոքր ռացիոնալ թվերից, իսկ  $r$ -ն ընկած է  $A'$  վերին դասի մեջ և այդ դասի փոքրագույն տարրն է:

Ուացիոնալ և իռացիոնալ թվերին տալիս են ընդհանուր անվանում՝ *իրական թվեր*: Այսպիսով, կամայական իրական թիվ՝ դա  $A / A'$  հատույթ է, ընդ-

որում, ուացիոնալ թիվը  $w$ ) տիպի հատույթ է, իուացիոնալը՝  $p$ ) տիպի: Առաջիկայում այդ հատույթները կանվանենք համապատասխանաբար *ուացիոնալ հատույթ* և *իուացիոնալ հատույթ*:

**2. Իրական թվերի բազմության կարգավորում:** Դիցուք ունենք երկու ուացիոնալ թիվ՝  $r$  և  $s$ , որտեղ  $r < s$ , ընդ որում,  $r = A / A'$ ,  $s = B / B'$ : Այդ դեպքում  $A$  դասը բաղկացած է  $r$ -ից փոքր  $a$  ուացիոնալ թվերից: Մյուս կողմից, եթե  $a < r$ , ապա  $a < s$ , հետևաբար  $a \in B$ : Այսպիսով՝  $A \subset B$ : Նկատենք, որ  $A \neq B$ , քանի որ  $r \leq r_1 < s$  պայմանին բավարարող  $r_1$  ուացիոնալ թվերն  $A$  դասին չեն պատկանում, քայլ ընկած են  $B$  դասի մեջ: Սա իմբք է ծառայում հետևյալ սահմանման համար.

**Սահմանում:** Դիցուք ունենք երկու իրական թիվ՝  $\alpha = A / A'$  և  $\beta = B / B'$ : Կասենք  $w$ )  $\alpha = \beta$ , եթե  $A = B$ ,  $p$ )  $\alpha < \beta$ , եթե  $A \subset B$  և  $A \neq B$ ,  $q$ )  $\alpha > \beta$ , եթե  $\beta < \alpha$ :\*

Դժվար չէ համոզվել, որ կամայական երկու իրական թվերի համար տեղի ունի նշված երեք դեպքերից մեկը և միայն մեկը: Իբրոք, եթե  $A \neq B$ , ապա այդ բազմություններից գոնե մեկն ունի ինչ-որ մի տարր, որը յուսին չի պատկանում, ասենք՝  $a \in A$ , քայլ՝  $a \notin B$ : Այստեղից հետևում է, որ  $B$ -ի բոլոր տարրերը փոքր են  $a$ -ից, հետևաբար՝  $B \subset A$ : Բայց  $B \neq A$ , ուստի՝  $\beta < \alpha$  (մյուս դեպքում կստանայինք՝  $\alpha < \beta$ ):

Նկատենք, որ պահպանվում է նաև փոխանցականության (տրանզիֆուրյան) օրենքը, այն է՝ եթե  $\alpha < \beta$  և  $\beta < \gamma$ , ապա  $\alpha < \gamma$ :

Այն դեպքում, եթք  $\alpha = A / A'$ -ը իուացիոնալ հատույթ է, որպեսզի  $r$  ուացիոնալ թիվը պատկանի  $A$  դասին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $r < \alpha$ , այսինքն՝  $A$  դասի մեջ ընկած են այն ուացիոնալ թվերը, որոնք փոքր են  $\alpha$ -ից, իսկ  $A'$ -ի մեջ՝ նրանք, որոնք մեծ են  $\alpha$ -ից: Այսինքն՝ իուացիոնալ հատույթի դեպքում սահմանազարդիչ թվի դերը կատարում է  $\alpha$  իուացիոնալ թիվը:

\* Այսրանդ սահմանված ենք համարում նաև  $\alpha \leq \beta$  և  $\alpha \geq \beta$  առնչությունները՝ իրենց սովորական իմաստով:

**Լեմմա 1.1:** Եթե  $\alpha = A / A'$  և  $\beta = B / B'$  հասույթները  $\alpha < \beta$  պայմանին բավարարող կամայական իրական թվեր են, ասպա նրանց միջև զոյլորդուն ունի  $r$  ուստի ուղղակի թիվ՝  $\alpha < r < \beta$ :

► Քանի որ  $A \subset B$  և  $A \neq B$ , ուստի գոյություն ունի  $r_1$  ուստի ուղղակի թիվ այնպիսին, որ  $r_1 \in B$  և  $r_1 \notin A$ : Հետևաբար՝  $r_1 \in B$  և  $r_1 \in A'$ , այսինքն՝  $\alpha \leq r_1 < \beta$ : Քանի որ  $B$  ստորին դասում մեծագույն տարր գոյություն չունի, ուրեմն  $r_1$ -ի և  $\beta$ -ի միջև գոյություն ունի  $r$  ուստի ուղղակի թիվ՝  $r_1 < r < \beta$ , որն էլ կլինի որոնելին: ■

**Լեմմա 1.2:** Դիցուք  $\alpha$  և  $\beta$  իրական թվերն այնպիսին են, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  ուստի ուղղակի համար գոյություն ունեն  $s$  և  $s'$  ուստի ուղղակի թվեր, որոնք բավարարում են

$$\text{ա) } s < \alpha < s', \quad s < \beta < s';$$

$$\text{բ) } s' - s < \varepsilon$$

պայմաններին: Այդ դեպքում  $\alpha = \beta$ :

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, օրինակ՝  $\alpha < \beta$  : Նախորդ լեմման երկու անգամ կիրառելով՝ կստանանք  $r_1$  և  $r_2$  ուստի ուղղակի թվեր, որոնք բավարարում են  $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$  պայմանին: Մյուս կողմից, ա) պայմանից կստանանք՝  $s < r_1 < r_2 < s'$ : Այստեղից հետևում է՝  $s' - s > r_2 - r_1 > 0$ : Ըստ լեռով՝  $\varepsilon = r_2 - r_1$ ՝ կզանք հակասության ((բ) պայմանը չի բավարարվի): ■

**3. Իրական թվերի համակարգի լրիվությունը:** Այժմ դիտարկենք իրական թվերի բազմության հասույթներ, այն է՝ իրական թվերի բազմության տրոհում  $\overline{A}$  և  $\overline{A}'$  երկու ոչ դատարկ դասերի, այնպես, որ բավարարվեն հետևյալ պայմանները.

1<sup>o</sup>. Յուրաքանչյուր իրական թիվ պատկանում է այդ դասերից մեկին և միայն մեկին:

2<sup>o</sup>.  $\overline{A}$  դասի յուրաքանչյուր  $\alpha$  թիվ փոքր է  $\overline{A}'$  դասի յուրաքանչյուր  $\alpha'$  թվից:

**Թեորեմ 1.1 (Դեղեկինդի թեորեմը):** Իրական թվերի բազմության յուրաքանչյուրը  $\bar{A} / \bar{A}'$  հասուլիք համար կամ  $\bar{A}$  ստորին դասում կա մեծագույն տարր, կամ  $\bar{A}'$  վերին դասում՝ փոքրագույն:

Այլ կերպ ասած՝ իրական թվերի բազմության յուրաքանչյուր հասուլիք ունի սահմանագաստիչ թիվ:

► Ուսցինալ թվերի բազմության մեջ դիտարկենք հետևյալ  $A / A'$  հասուլիքը.  $A$  ստորին դասը կազմենք բոլոր այն ռացիոնալ թվերից, որոնք  $\bar{A}$  դասից են, իսկ  $A'$  դասը՝  $\bar{A}'$  դասին պատկանող ռացիոնալ թվերից: Ակնհայտ է, որ  $A / A'$ -ը հասուլիք է ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ, հետևաբար, այն մի իրական թիվ է՝  $\alpha$ , որը պետք է ընկած լինի  $\bar{A}$  կամ  $\bar{A}'$  դասերից մեկի ու միայն մեկի մեջ: Ապացուցենք, որ եթե  $\alpha \in \bar{A}$ , ապա  $\alpha$ -ն  $\bar{A}'$  դասի մեծագույն տարրն է: Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ, այսինքն՝ ենթադրենք, թե  $\bar{A}'$  դասում կա  $\alpha$ -ից մեծ մի  $\beta$  թիվ՝  $\alpha < \beta$ : Լեմմա 1.2-ի համաձայն, նրանց միջև գոյություն ունի  $r$  ռացիոնալ թիվ՝  $\alpha < r < \beta$ : Բայց  $\alpha < r$  պայմանից բխում է, որ  $r \in A'$ , հետևաբար՝  $r \in \bar{A}'$ , իսկ  $r < \beta \in \bar{A}$  պայմանից բխում է, որ  $r \in \bar{A}$ : Ուրեմն, միևնույն  $r$  թիվը պատկանում է թե՛  $\bar{A}'$  դասին, և թե՛  $\bar{A}$  դասին, ինչը հակասում է հատույթի սահմանամբ:

Հանգունորեն ապացուցվում է, որ եթե  $\alpha \in \bar{A}'$ , ապա  $\alpha$ -ն  $\bar{A}'$  վերին դասի փոքրագույն տարրն է: ■

**4. Ծագրիտ եզրերի գոյությունը:**  $X$  (ոչ դատարկ) թվային բազմությունը կոչվում է վերևից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի  $M$  թիվ այնպիսին, որ

$$x \leq M, \quad \forall x \in X : \tag{1.1}$$

(1.1) պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր  $M$  թիվ կոչվում է  $X$  բազմության վերին եզր: Եթե  $M$  -ը  $X$  բազմության վերին եզր է և  $M' > M$ , ապա  $M'$  -ը նոյնպես  $X$  բազմության վերին եզր է:

$X$  բազմությունը կոչվում է մերքից սահմանափակ, եթե գոյություն ունի  $m$  թիվ այնպիսին, որ

$$m \leq x, \forall x \in X : \quad (1.2)$$

(1.2) պայմանին բավարարող յուրաքանչյուր  $m$  թիվ կոչվում է  $X$  բազմության **ստորին եզր**: Եթե  $m$ -ը  $X$  բազմության ստորին եզր է և  $m' < m$ , ապա  $m'$ -ը նոյնպես  $X$  բազմության ստորին եզր է:

Բազմությունը կոչվում է **սահմանափակ**, եթե այն սահմանափակ է թիվ վերևից, թիվ՝ ներքևից:

**Թեորեմ 1.2:** **Վերևից (Ներքևից) սահմանափակ  $X$  բազմության վերին (ստորին) եզրերի մեջ գոյություն ունի փոքրագույնը (մեծագույնը):**

Այդ փոքրագույն վերին եզրը կոչվում է  $X$  բազմության **ճշգրիտ վերին եզր** և նշանակվում է  $\sup X$  սիմվոլով ( $\sup$ -ը կարդացվում է՝ **սուպրեմում**): Նմանապես, մեծագույն ստորին եզրը կոչվում է  $X$  բազմության **ճշգրիտ ստորին եզր** և նշանակվում է  $\inf X$  սիմվոլով ( $\inf$ -ը կարդացվում է՝ **ինֆրեմում**): Եթե  $X$  բազմությունը վերևից (ներքևից) սահմանափակ չէ, կնշանակենք՝  $\sup X = +\infty$  ( $\inf X = -\infty$ ):

► Կապացուցենք պնդումներից միայն մեկը՝ վերևից սահմանափակ  $X$  բազմության ճշգրիտ վերին եզրի գոյությունը (մյուս պնդումն առաջարկում ենք ապացուել ինքնուրույն): Դիտարկենք երկու դեպք.

ա) **Դիցուք  $X$  բազմության տարրերի մեջ գոյություն ունի մեծագույնը:**

Այս դեպքում հենց այդ տարրն էլ կհանդիսանա  $X$  բազմության փոքրագույն վերին եզրը:

բ) **Դիցուք  $X$  բազմության տարրերի մեջ գոյություն չունի մեծագույնը:**

Այս դեպքում իրական թվերի բազմության մեջ կառուցենք հետևյալ  $A / A'$  հատույթը.  $\bar{A}'$  վերին դասի մեջ ընդգրկենք  $X$  բազմության բոլոր վերին եզրերը, իսկ  $\bar{A}$  ստորին դասի մեջ՝ մնացած իրական թվերը: Մասնավորաբար,  $X$  բազմության բոլոր տարրերն ընկած կլինեն  $\bar{A}$  ստորին դասի մեջ, քանի որ  $X$  բազմությանը պատկանող  $X$ -ի վերին եզր գոյություն չունի (չէ՞ որ  $X$ -ում չկար ամենամեծ տարր):

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\bar{A}$  ստորին դասում չկա մեծագույն տարր: Իրոք, եթե  $\alpha \in \bar{A}$ , ապա  $\alpha$ -ն  $X$  բազմության վերին եզր չէ: Այդ պատճառով  $X$ -ում, հետևաբար և՝  $\bar{A}$ -ում, գոյություն ունի  $\alpha$ -ից մեծ տարր:

Այժմ, Դեղէկինդի թեորեմի համաձայն,  $\bar{A}'$  վերին դասը կունենա ամենափոքր տարր, այսինքն՝  $X$  բազմության վերին եզրերի մեջ կա փոքրագույնը: ■

## §2. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ

**1. Իրական թվերի գումարը:** Մենք գիտենք, որ ռացիոնալ թվերի համար սահմանված է գումարման գործողություն, որն օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.

- 1)  $a + b = b + a$ ,
- 2)  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,
- 3)  $a + 0 = a$ ,
- 4)  $a + (-a) = 0$ ,

5) եթե  $a < b$ , ապա կամայական  $c$  թվի համար՝  $a + c < b + c$ :

Այժմ մեր նկատակն է գումարման գործողությունը տարածել բոլոր իրական թվերի բազմության վրա, այնպես, որ պահպանվեն այդ հինգ հատկությունները:

Նախ ապացուցենք հետևյալ օժանդակ պնդումը.

**Լեմմա 2.1** Դիցուք  $\alpha$ -ն իրական թիվ է: Այդ դեպքում կամայական  $\varepsilon > 0$  ռացիոնալ թվի համար գոյություն ունեն  $a$  և  $a'$  ռացիոնալ թվեր, որոնք բավարարում են հետևյալ երկու պայմաններին.

$$a < \alpha < a',$$

$$a' - a < \varepsilon:$$

► Ապացուցման կարիք կա միայն իռացիոնալ  $\alpha$ -ի դեպքում: Դիցուք՝  $\alpha = A / A'$  և  $a_0 \in A$ ,  $a'_0 \in A'$ : Դիտարկենք  $a_0 + n \frac{\varepsilon}{2} > a'_0$  պայմանին բարարող  $n$  բնական թիվը: Նշանակենք  $n_0$ -ով  $n$ -ը չգերազանցող և  $a_0 + n_0 \frac{\varepsilon}{2} \in A'$  պայմանին բավարարող ամենափոքր բնական թիվը: Մնում է նկատել, որ

$$a = a_0 + \frac{(n_0 - 1)\varepsilon}{2} \text{ և } a' = a_0 + \frac{n_0\varepsilon}{2}$$

ուսցիոնալ թվերը կբավարարեն նշված պայմաններին: ■

Անցնենք իրական թվերի գումարման սահմանմանը: Դիցուք  $\alpha$ -ն և  $\beta$ -ն կամայական իրական թվեր են: Դիտարկենք բոլոր այն  $a, a'$  և  $b, b'$  ուսցիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են

$$a < \alpha < a' \text{ և } b < \beta < b' \quad (2.1)$$

պայմաններին:

**Սահմանում:**  $\alpha$  և  $\beta$  իրական թվերի գումարը է կոչվում այն  $\gamma$  թիվը, որը բավարարում է

$$a + b < \gamma < a' + b' \quad (2.2)$$

պայմանին՝ (2.1)-ին բավարարող բոլոր  $a, a', b, b'$  ուսցիոնալ թվերի համար:

Ապացուցենք, որ այդպիսի  $\gamma$  գոյություն ունի և միակն է:

Դիտարկենք (2.1) պայմանին բավարարող բոլոր  $a, b$  թվերի գումարների  $\{a + b\}$  բազմությունը: Այն սահմանափակ է վերևից, որովհետև (2.1)-ին բավարարող ցանկացած  $a' + b'$  թիվ այդ բազմության վերին եզր է: Նշանակելով  $\gamma = \sup \{a + b\}$ ՝ կունենանք

$$a + b \leq \gamma \leq a' + b'$$

անհավասարությունը: Վերջինիս մեջ հավասարության նշանները բացառվում են, որովհետև (2.1) պայմանին բավարարող  $a, b$  թվերի մեջ չկա մեծագույնը, իսկ  $a', b'$  թվերի մեջ՝ փոքրագույնը:

Միակությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  ուսցիոնալ թիվ: Լեմմա 2.1-ի համաձայն, գոյություն ունեն (2.1) պայմանին բավարարող  $a, a'$  և  $b, b'$  ուսցիոնալ թվեր, այնպիսիք, որ

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{2} \text{ և } b' - b < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Հետևաբար՝

$$(a' + b') - (a + b) < \varepsilon: \quad (2.3)$$

Եթե  $\gamma_1$ -ը նույնպես բավարարի (2.2) պայմանին, լեմմա 1.2-ի համաձայն, կստանանք՝  $\gamma = \gamma_1$ :

Նկատենք, որ եթե  $\alpha$  և  $\beta$  թվերը ռացիոնալ են, այս նոր սահմանված գումարը և նախկին (սովորական կոտորակների) գումարը համընկնում են, քանի որ հենց նախկին գումարն է, որ բավարարում է (2.2) պայմանին (դա ապացուցելու համար բավական է գումարել (2.1)-ի նույնանուն անհավասարությունները):

**Թեորեմ 2.1** *Իրական թվերի բազմության մեջ սահմանված գումարման գործողությունը օժտված է 1) - 5) հիմնական հատկություններով, այն է՝*

$$1) \alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

$$2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

$$3) \alpha + 0 = \alpha,$$

4) Յուրաքանչյուր  $\alpha$  իրական թվի համար գոյություն ունի հակադիր, այսինքն՝ մի  $\beta$  իրական թվի, որը կնշանակենք  $-\alpha$ -ով, և որը բավարարում է  $\alpha + (-\alpha) = 0$  պայմանին:

5) Եթե  $\alpha < \beta$  և  $\gamma$  -ն կամայական իրական թվի է, ապա  $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$ :

► 1)-ը և 2)-ը բխում են իրական թվերի գումարի սահմանումից և ռացիոնալ թվերի գումարի համապատասխան հատկություններից: 3)-ն ապացուցելու համար վերցնենք  $a$ ,  $a'$  և  $b$ ,  $b'$  ռացիոնալ թվեր, այնպես, որ  $a < \alpha < a'$ ,  $b < 0 < b'$ : Գումարի սահմանման համաձայն, ունենք

$$a + b < \alpha + 0 < a' + b':$$

Մյուս կողմից՝  $a + b < a < \alpha < a' < a' + b'$ : Ստացվեց, որ  $\alpha + 0$  և  $\alpha$  թվերն ընկած են  $a + b$  և  $a' + b'$  թվերի միջև, որոնց տարբերությունը կարող ենք կամայակես փոքր դարձնել (տես (2.3)-ը), հետևաբար, լեմմա 1.2-ի համաձայն, այդ թվերը համընկնում են:

4)-ն ապացուցենք իուացիոնալ թվերի համար: Վերցնենք  $\alpha = A / A'$  իուացիոնալ թվը և որոնենք  $-\alpha$  թվը որոշենք հետևյալ  $B / B'$  հատույթի միջոցով.  $B$  ստորին դասի մեջ ներգրավենք բոլոր  $-a'$  ռացիոնալ թվերը, որտեղ  $a' \in A'$ , իսկ  $B'$  վերին դասի մեջ՝ բոլոր  $-a$  թվերը, որտեղ  $a \in A$ :

Գումարի սահմանման համաձայն,  $\alpha + (-\alpha)$ -ն միակ թիվն է, որի համար

$$\alpha + (-\alpha') = \alpha + (-\alpha) = a' + (-a):$$

անհավասարությունը տեղի ունի բոլոր  $a \in A$ ,  $a' \in A'$  տարրերի համար:

Մյուս կողմից, ունենք  $a - a' < 0 < a' - a$ : Հետևաբար,  $\alpha + (-\alpha)$  և 0 թվերը համընկնում են:

5)-ն ապացուցելու համար նախ օգտվենք լեմմա 1.1-ից. զոյություն ունեն  $r_1$  և  $r_2$  ռացիոնալ թվեր, այնպիսիք, որ  $\alpha < r_1 < r_2 < \beta$ : Այնուհետև, համաձայն լեմմա 2.1-ի, զոյություն ունեն  $c$ ,  $c'$  ռացիոնալ թվեր, այնպիսիք, որ բավարարվեն  $c < \gamma < c'$  և  $c' - c < r_2 - r_1$  պայմանները:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\alpha + \gamma < r_1 + c' < r_2 + c < \beta + \gamma : \blacksquare$$

Հետևանք:  $\alpha < \beta$  անհավասարությունը համարժեք է  $\beta - \alpha > 0$  անհավասարությանը:

**2. Իրական թվերի արտադրյալ:**  $\alpha$  և  $\beta$  իրական թվերի արտադրյալը սահմանենք նախ այն դեպքում, երբ դրանք դրական են՝  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ : Դիտարկենք բոլոր այն  $a$ ,  $a'$  և  $b$ ,  $b'$  ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են

$$0 < a < \alpha < a', \quad 0 < b < \beta < b' \tag{2.4}$$

պայմաններին:

**Սահմանում:**  $\alpha$  և  $\beta$  դրական թվերի արտադրյալ է կոչվում այն  $ab$  թիվը, որը բավարարում է

$$ab < \gamma < a'b' \tag{2.5}$$

պայմանին՝ (2.4)-ին բավարարող բոլոր  $a$ ,  $a'$ ,  $b$ ,  $b'$  ռացիոնալ թվերի համար:

Ապացուցենք, որ այդպիսի  $ab$  զոյությունը ունի և միակն է:

Դիտարկենք  $\{ab\}$  բազմությունը: Այն սահմանափակ է վերևից, որովհետև յուրաքանչյուր  $a'b'$  թիվ այդ բազմության վերին եզր է: Նշանակենք՝

$\gamma = \sup \{ab\} : \text{ ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, (2.4)-ին բավարարող բոլոր } a, a', b, b' \text{ ուսցիումալ թվերի համար ունեմք՝}$   

$$ab \leq \gamma \leq a'b' :$$

Այստեղ հավասարության նշանները բացառվում են, որովհետև (2.4) պայմանին բավարարող  $a$  թվերի մեջ չկա մեծագույնը, իսկ  $a'$  թվերի մեջ՝ փոքրագույնը:

Ելնելով լինմա 1.2-ից՝ (2.5) պայմանին բավարարող  $\gamma$  թվի միակուրյունն ապացուցելու համար բավական է ցույց տալ, որ  $a'b'$  և  $ab$  տիպի թվերի տարրերությունը կարելի է փոքր դարձնել կամայական դրական թվից: Այդ նպատակով  $a'$  և  $b'$  տիպի թվերից ֆիրսենք կամայական երկուսը՝  $a'_0$  և  $b'_0$ , և ստորև դիտարկենք միայն  $a'$  և  $b'$  թվերը, որոնք բավարարում են

$$a' \leq a'_0 \text{ և } b' \leq b'_0 \quad (2.6)$$

պայմաններին:

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: (2.4) և (2.6) պայմանին բավարարող  $a, a'$  և  $b, b'$  թվերն ընտրենք այնպես, որ բավարարվեն

$$a' - a < \varepsilon, \quad b' - b < \varepsilon$$

անհավասարությունները:

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$a'b' - ab = a'(b' - b) + b(a' - a) < (a'_0 + b'_0)\varepsilon,$$

այսինքն՝  $a'b' - ab$  տարրերությունը կարող ենք ցանկացած չափով փոքր դարձնել, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Նկատենք, որ եթե  $\alpha$  և  $\beta$  թվերը ուսցիումալ են, ապա նրանց սովորական  $\gamma = \alpha\beta$  արտադրյալը կբավարարի (2.5) անհավասարություններին: Այսինքն, ուսցիումալ թվերի համար սահմանված այս նոր արտադրյալը կհամընկնի նախկինում սահմանված արտադրյալին:

Ոչ դրական թվերի (եթե գոնե մեկը դրական չէ) արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ա) եթե արտադրիչներից զոնե մեկը զրո է, ապա արտադրյալը զրո է՝

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha ,$$

իսկ մնացած դեպքերում գործում է սովորական «նշանի կանոնը».

$$p) \alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta|, \text{ եթե } \alpha -\text{ը} \text{ և } \beta -\text{ը} \text{ նույն նշանի են},$$

$$q) \alpha \cdot \beta = -(|\alpha| \cdot |\beta|), \text{ եթե } \alpha -\text{ը} \text{ և } \beta -\text{ը} \text{ տարրեր նշանների են}:$$

Իրական թվերի արտադրյալն օժտված է հետևյալ հիմնական հատկություններով.

$$1) \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha ,$$

$$2) (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) ,$$

$$3) \alpha \cdot 1 = \alpha ,$$

4) Յուրաքանչյուր  $\alpha \neq 0$  իրական թվի համար գոյություն ունի հակառած, այսինքն՝ մի իրական թիվ, որը կնշանակենք  $\frac{1}{\alpha}$ -ով, և որը բավարարություն է  $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$  պայմանին:

$$5) (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma ,$$

$$6) \text{եթե } \alpha < \beta \text{ և } \gamma > 0, \text{ ապա } \alpha\gamma < \beta\gamma :$$

Այս հատկությունների ապացուցման վրա մենք կանգ չենք առնի, ցանկության դեպքում ընթերցողն այդ աշխատանքը կարող է կատարել ինքնուրույն:

Եթե որևէ բազմության վրա սահմանված են գումարման և բազմապատկման գործողություններ, որոնք օժտված են վերը նշված հատկություններով, ապա այդ բազմությունը կոչվում է **կարգավորված դաշտ**: Ուստի, այսուհետ իրական թվերի բազմությունը կանվանենք նաև **իրական թվերի դաշտ**:

### §3. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏԱԳԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆԵՐԸ

**1. Արմատի գոյությունը:** Իրական թվերի արտադրյալի սահմանումը մեզ հնարավորություն է տալիս սովորականի պես սահմանել ամբողջ ցուցիչով աստիճանը և կամայական  $n$  աստիճանի թվաբանական արմատը\*:

\*  $n$  -ը մեկից մեծ բնական թիվ է:

**Թեորեմ 3.1:** Իրական թվերի դաշտում կամայական  $\alpha > 0$  թվի համար գոյություն ունի միակ  $\beta > 0$  թվ, այնպիսին, որ

$$\beta^n = \alpha : \quad (3.1)$$

►  $\beta$ -ի միակությունը հետևում է իրական թվերի արտադրյալի 6-րդ հիմնական հատկությունից: Ապացուցենք  $\beta$ -ի գոյությունը:

Կարող ենք ենթադրել, որ (3.1) պայմանին բավարարող  $\beta$  ռացիոնալ թվի գոյություն չունի (հակառակ դեպքում թերեմն ապացուցված է): Ուսցիոնալ թվերի բազմության մեջ կառուցենք  $X / X'$  հատույթը հետևյալ կերպ.  $X$  ստորին դասի մեջ ընդգրկենք բոլոր բացասական ռացիոնալ թվերը, 0-ն և այն դրական ռացիոնալ թվերը, որոնք բավարարում են  $x^n < \alpha$  պայմանին:  $X'$  վերին դասը կազմենք մնացած  $x'$  ռացիոնալ թվերից (դժվար չէ տեսնել, որ առկա է հատույթ): Նախ նկատենք, որ  $X$  դասը զուրկ չէ դրական թվերից: Իրոք, եթե վերցնենք  $m$  բնական թվին այնպես, որ

բավարարվի  $\frac{1}{m} < \alpha$  պայմանը, ապա,  $\sqrt[m]{\alpha} < \frac{1}{m} < \alpha$  զնահա-

տականների, կունենանք՝  $\frac{1}{m} \in X$ :

Նշանակենք  $\beta = X / X'$  և ապացուցենք, որ այդ  $\beta$  թիվը բավարարում է (3.1) պայմանին: Դրա համար վերցնենք  $0 < x < \beta < x'$  անհավասարություններին բավարարող որևէ  $x$  և  $x'$  ռացիոնալ թվեր: Դրական կողմերով անհավասարությունները բարձրացնելով  $n$  աստիճան (դա բույլատրելի է՝ շնորհիվ իրական թվերի արտադրյալի 6-րդ հիմնական հատկության), կստանանք՝  $x^n < \beta^n < x'^n$ :

Մյուս կողմից՝  $0 < x \in X$  և  $x' \in X'$ , հետևաբար՝  $x^n < \alpha < x'^n$ :

Մնում է կիրառել լիմնա 1.2-ը. վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թվ և  $x, x'$  դրական ռացիոնալ թվերն այնպես, որ բավարարվեն  $x < \beta < x'$  և  $x' - x < \varepsilon$  պայմանները (տես լիմնա 2.1-ը): Կարող ենք համարել, որ  $x'$ -ը չի գերազանցում մի որևէ ֆիքսած  $x'_0$ -ը: Այդ դեպքում կունենանք

$$x'^n - x^n = (x' - x)(x'^{n-1} + x'^{n-2}x + \dots + x'x^{n-2} + x^{n-1}) < \varepsilon \cdot nx_0'^{n-1},$$

այսինքն՝  $x'^n - x^n$  տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել: Այսպիսով՝  $\beta^n = \alpha$ : ■

Արմատի գոյությունն ապացուցելուց հետո սովորական ձևով սահմանվում է (որպական թվի) ռացիոնալ ցուցիչով աստիճան՝  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ , և ապացում են ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի հիմնական հատկությունները.

$$1) a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1+r_2},$$

$$2) a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1-r_2},$$

$$3) (ab)^r = a^r b^r,$$

$$4) (a/b)^r = a^r / b^r,$$

$$5) (a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2},$$

6) Եթե  $a > 1$ , ապա  $f(r) = a^r$  ֆունկցիան աճող է ռացիոնալ թվերի բազմության վրա:

**2. Իրական ցուցիչով աստիճան:** Նախ դիտարկենք մեկից մեծ հիմքի դեպքը՝  $a > 1$ , և սահմանենք  $a^\beta$  աստիճան, որտեղ  $\beta$ -ն կամայական իրական թիվ է: Այդ նպատակով դիտարկենք

$$b < \beta < b' \tag{3.2}$$

պայմանին բավարարող բոլոր  $b$  և  $b'$  ռացիոնալ թվերը:

**Սահմանում:**  $a > 1$  իրական թվի  $\beta$  իրական աստիճան է կոչվում այն  $\gamma$  իրական թիվը, որը բավարարություն է

$$a^b < \gamma < a^{b'} \tag{3.3}$$

անհավասարություններին՝ (3.2) պայմանին բավարարող բոլոր  $b$ ,  $b'$  ռացիոնալ թվերի համար:

Այժմ ցույց տանք, որ այդպիսի  $\gamma$  գոյություն ունի և միակն է:

Քանի որ  $a^r$ -ը աճող է ռացիոնալ թվերի բազմության վրա, այսինքն՝  $b < b'$  պայմանից հետևում է  $a^b < a^{b'}$  պայմանը, ուստի  $\{a^b\}$  բազմությունը

Վերևից սահմանափակ է  $a^{b_0}$  թվով, որտեղ  $b'_0$ -ը  $\beta$ -ից մեծ կամայական ռացիոնալ թիվ է: Նշանակելով  $\gamma = \sup\{a^b\}$ ՝ կոնենանք

$$a^b \leq \gamma \leq a^{b'}$$

անհավասարությունը՝ (3.2)-ին բավարարող քոլոր  $b$ ,  $b'$  ռացիոնալ թվերի համար: Այստեղ հավասարության նշանները բացառվում են, որովհետև  $a^b$  տեսքի թվերի մեջ չկա ամենամեծը, իսկ  $a^{b'}$  տեսքի թվերի մեջ՝ ամենափոքը:

Միակուրյունն ապացուցելու համար ցույց տանք, որ  $a^{b'} - a^b$  տարրերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել (որից հետո կվիրառենք լինմա 1.2-ը):

Նախ, եթե  $b$  և  $b'$  ռացիոնալ թվերն ընտրենք այնպես, որ բավարարվի  $b' - b < \frac{1}{n}$  պայմանը ( $n$ -ը հետագայում կընտրենք), կունենանք՝

$$a^{b'} - a^b = a^b (a^{b'-b} - 1) < a^b \left( a^{\frac{1}{n}} - 1 \right): \quad (3.4)$$

Նշանակենք  $a^{\frac{1}{n}} - 1 = x_n$  և օգտվենք Բեռնուլիի անհավասարությունից՝  $(1 + x_n)^n > 1 + nx_n$ : Այստեղից կստանանք  $x_n < \frac{a-1}{n}$  անհավասարությունը, որն էլ, համարելով (3.4)-ի հետ, կունենանք

$$a^{b'} - a^b < a^b \frac{a-1}{n}$$

գնահատականը:

Մյուս կողմից՝  $a^b < a^{b'_0}$ , հետևաբար տեղի ունի  $a^{b'} - a^b < a^{b'_0} \frac{a-1}{n}$  անհավասարությունը: Որպեսզի աջում ստացված արտահայտությունը փոքր դառնա նախապես տրված  $\varepsilon > 0$  թվից, բավական է վերցնել

$$n > \frac{a^{b'_0} (a-1)}{\varepsilon}:$$

Այսպիսով աստիճանի գոյությունն ու միակությունն ապացուցված է:

Նկատենք նաև, որ եթե  $\beta$ -ն ուացիոնալ թիվ է, ապա այս նոր սահմանված  $a^\beta$  արժեքը համընկնում է նրա սովորական արժեքի հետ: Իրոք. քանի որ  $a^\gamma$ -ը աճող է, ուստի հենց  $a^\beta$ -ի սովորական արժեքն է, որ բավարարում է (3.3) անհավասարություններին:

$$0 < a < 1 \text{ դեպքում } a^\beta -ը սահմանվում է  $a^\beta = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\beta}$  հավասարությամբ:$$

Նշենք, որ նախորդ կետի վերջում ներկայացված ռացիոնալ ցուցիչով աստիճանի հիմնական հատկությունները պահպանվում են նաև կամայական իրական աստիճանների դեպքում: Ապացուցենք, օրինակ, դրանցից առաջինը՝  $a^\gamma a^\beta = a^{\gamma+\beta}$ , որտեղ  $\beta$ -ն և  $\gamma$ -ն կամայական իրական թվեր են:

Այդ նպատակով դիտարկենք  $b < \beta < b'$  և  $c < \gamma < c'$  պայմաններին բավարարող բոլոր  $b$ ,  $b'$ ,  $c$ ,  $c'$  ռացիոնալ թվերը: Իրական ցուցիչով աստիճանի սահմանման համաձայն՝ ունենք

$$a^b < a^\beta < a^{b'}, \quad a^c < a^\gamma < a^{c'}, \quad a^{b+c} < a^{\beta+\gamma} < a^{b'+c'}$$

անհավասարությունները: Առաջին երկուսն անդամ առ անդամ բազմապատկելով՝ կստանանք

$$a^{b+c} < a^\beta a^\gamma < a^{b'+c'}$$

անհավասարությունը: Այսպիսով,  $a^{\beta+\gamma}$  և  $a^{\beta}a^\gamma$  թվերն ընկած են միևնույն  $a^{b+c}$  և  $a^{b'+c'}$  թվերի միջև, որոնց տարրերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել: Հետևաբար, լեմմա 1.2-ի համաձայն՝  $a^{\beta+\gamma} = a^\beta \cdot a^\gamma$ :

**3. Լոգարիթմի գոյություն:** Ապացուցենք, որ եթե  $a > 0, a \neq 1$  և  $\beta > 0$ , ապա գոյություն ունի  $\log_a \beta$ , այսինքն՝ գոյություն ունի միակ  $\gamma$  իրական թիվ, որը բավարարում է

$$a^\gamma = \beta \tag{3.5}$$

պայմանին:

Այս պնդումն ապացուցենք  $a > 1$  դեպքում:  $0 < a < 1$  դեպքում  $\log_a \beta$ -ն

կորոշենք  $\log_a \beta = -\log_{\frac{1}{a}} \beta$  հավասարությամբ:

Ենթադրենք, թե (3.5) պայմանին բավարարող  $\gamma$  ռացիոնալ թիվ գոյություն չունի (հակառակ դեպքում պնդումն ապացուցված է): Ռացիոնալ թվերի բազմության մեջ դիտարկենք  $X / X'$  հատույթը հետևյալ կերպ.  $X$  ստորին դասի մեջ ընդգրկենք  $a^x < \beta$  պայմանին բավարարող բոլոր  $x$  ռացիոնալ թվերը, իսկ  $X'$  վերին դասի մեջ՝  $a^{x'} > \beta$  պայմանին բավարարող բոլոր  $x'$  ռացիոնալ թվերը: Դժվար չէ տեսնել, որ այդ դասերը դատարկ չեն:

Իրոք, քանի որ  $a^n > 1 + n(a-1) > n(a-1)$  և  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} < \frac{1}{n(a-1)}$ , ուստի բավականաչափ մեծ  $n$ -երի համար կունենանք՝

$$a^{-n} < \beta < a^n,$$

այսինքն՝  $-n \in X$  և  $n \in X'$ :

Հատույթի մնացած հատկություններն ակնհայտ են: Նշանակելով  $\gamma = X / X'$  և դիտարկելով  $x < \gamma < x'$  պայմանին բավարարող բոլոր  $x, x'$  ռացիոնալ թվերը, կունենանք՝

$$a^x < a^\gamma < a^{x'} \text{ և } a^x < \beta < a^{x'}; \quad (3.6)$$

Քանի որ  $a^{x'} - a^x$  տարբերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել, ապա լեմմա 1.2-ի համաձայն (3.6) պայմանից բխում է (3.5) հավասարությունը:

$\gamma$  -ի միակությունն անմիջապես հետևում է ցուցային ֆունկցիայի աճող լինելուց:

**4. Իրական թվի տասնորդական ներկայացումը:** Դիցուք  $\alpha$  իրական թիվը ոչ ամբողջ է, և ոչ էլ՝ վերջավոր տասնորդական կոտորակ: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $C$  ամբողջ թիվ, այնպիսին, որ

$$C < \alpha < C + 1$$

(որպես  $C$  վերցնում ենք  $\alpha = A / A'$  հատույթի  $A$  ստորին դասին պատկանող ամբողջ թվերից մեծագույնը):

Այնուհետև, վերցնենք  $c_1$  թվանշանն այնպիսին, որ տեղի ունենա

$$C, c_1 < \alpha < C, c_1 + \frac{1}{10}$$

կրկնակի անհավասարությունը: Հաջորդ քայլում ընտրենք  $c_2$  թվանշանը՝ ապահովելով

$$C, c_1 c_2 < \alpha < C, c_1 c_2 + \frac{1}{10^2}$$

անհավասարությունը:

Շարունակենք՝ եթե  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  թվանշաններն արդեն ընտրված են,  $c_n$  թվանշանն ընտրենք այնպիսին, որ բավարարվի

$$C, c_1 c_2 \dots c_n < \alpha < C, c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n}$$

պայմանը:

Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք, այսպես կոչված, *անվերջ տասնորդական կոտորակ*՝  $C, c_1 c_2 \dots c_n \dots$ , որի համար բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

$$C, c_1 c_2 \dots c_n < \alpha < C, c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.7)$$

Եթե  $\alpha$ -ն ամբողջ թիվ է կամ վերջավոր տասնորդական կոտորակ, կրկին նոյն ձևով կստանանք  $C, c_1 c_2 \dots c_n \dots$  անվերջ տասնորդական կոտորակ, միայն թե այս ամգամ (3.7)-ի փոխարեն կառաջանա

$$C, c_1 c_2 \dots c_n \leq \alpha \leq C, c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n} \quad (3.7)$$

պայմանը:

Օրինակ՝  $\alpha = 2,718$  թվի համար երրորդ քայլում կունենանք

$$\text{ա) } 2,718 \leq \alpha < 2,718 + \frac{1}{10^3} \quad \text{կամ բ) } 2,717 < \alpha \leq 2,717 + \frac{1}{10^3} :$$

Այս երկու դեպքերից յուրաքանչյուրը կունենա իր շարունակությունը.

ա)-ն շարունակելու հաջորդ բոլոր նիշերը կլինեն 0-ներ՝  $c_4 = c_5 = \dots = 0$ , իսկ բ)-ն՝ 9-եր,  $c_4 = c_5 = \dots = 9$ :

**Սահմանում:**  $C, c_1 c_2 \dots c_n \dots$  անվերջ տասնորդական կոտորակը կոչվում է  $\alpha$  թվի տասնորդական վերլուծություն, եթե

$$C, c_1 c_2 \dots c_n \leq \alpha \leq C, c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n}, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (3.8)$$

Ելնելով լեմմա 1.2-ից՝ տարրեր թվեր չեն կարող ունենալ նույն վերլուծությունը, որովհետև,  $n$ -ը մեծ վերցնելու շնորհիվ,  $\frac{1}{10^n}$ -ը կարող ենք փոքր դարձնել կամայական  $\varepsilon > 0$  ռացիոնալ թվից: Իբրոք,  $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$  պայմանը

համարժեք է  $10^n > \frac{1}{\varepsilon}$  պայմանին և, քանի որ  $10^n > n$  (ապացուցե՛ն), բավական է վերցնել՝  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ :

Մյուս կողմից, հարց է ծագում. արդյո՞ք այս գործընթացին կմասնակցեն բոլոր անվերջ տասնորդական կոտորակները: Այսինքն՝ եթե վերցնենք կամայական անվերջ տասնորդական կոտորակ՝  $B, b_1 b_2 \dots b_n \dots$ , արդյոք գոյություն ունի՞ այնպիսի  $\beta$  թիվ, որի տասնորդական վերլուծությունը հենց  $B, b_1 b_2 \dots b_n \dots$  կոտորակն է՝

$$B, b_1 b_2 \dots b_n \leq \beta \leq B, b_1 b_2 \dots b_n + \frac{1}{10^n}: \quad (3.8)$$

Պատասխանը դրական է: Ապացուցելու համար նշանակենք՝  $B_n = B, b_1 b_2 \dots b_n$ ,  $B'_n = B, b_1 b_2 \dots b_n + \frac{1}{10^n}$  և նկատենք, որ  $B_n$ -ը աճող է, իսկ

$B'_n$ -ը՝ նվազող (լայն իմաստով): Հետևաբար,  $B_n < B'_m$ ,  $n, m = 1, 2, \dots$  \*:

Այժմ դիտարկենք  $\{B_n\}$  բազմությունը: Քանի որ կամայական  $B'_m$  այդ

\* Իբրոք.  $k = \max \{m, n\} \Rightarrow B_n \leq B_k < B'_k \leq B'_m$ :

բազմության վերին եզր է, ուստի այն սահմանափակ է վերևից:  
 $\mathcal{N}$ շանակելով  $\beta = \sup\{B_n\}$ , կունենանք

$$B_n \leq \beta \leq B'_n$$

անհավասարությունը, այսինքն՝ (3.8)-ը:

Եթե (3.7) պայմանում հավասարության նշանը քույլատրենք միայն ձախից, ապա բ)-ն կրացառվի և յուրաքանչյուր իրական թիվ կունենա մեկ և միայն մեկ տասնորդական վերլուծություն (օրինակ՝  $\alpha = 2,718$  թվի տասնորդական վերլուծություն կհամարվի  $2,71800\dots = 2,718(0)$  անվերջ տասնորդական կոտորակը և ոչ թե մյուս «հակակնորդը»՝  $2,717(9)$ -ը):

Ավելին, եթե պայմանավորվենք նաև անվերջ տասնորդական կոտորակ-ների շարքում 9 պարբերությամբ կոտորակները չփառակել՝ փոխարինելով դրանք համապատասխան վերջավոր տասնորդական կոտորակներով ( $2,717(9) = 2,718$ ), ապա (3.8) անհավասարության միջոցով իրական թվերի և անվերջ տասնորդական կոտորակների միջև կստեղծվի փոխադարձաբար միարժեք համապատասխանություն:

Դպրոցական դասընթացից ընթերցողին հայտնի է, որ ուսցիունալ թվի տասնորդական վերլուծությունը վերջավոր է (ե՞րբ) կամ անվերջ պարբերական (ապացուցե՛ն): Հետևաբար, *իուացիոնալ թվերը այն անվերջ տասնորդական կոտորակներն են, որոնք պարբերական չեն*:

**5. Թվային առանցք:** Հիշեցնենք, թե ինչպես էին ուսցիունալ թվերը տեղադրում թվային առանցքի վրա:

Ֆիբոնաչի ուղղի (որին էլ հենց կանվանենք *թվային առանցք*) որևէ հատված և դրա ձախ ու աջ ծայրակետերին վերագրենք համապատասխանաբար 0 և 1 թվերը: Այդ հատվածը կանվանենք *միավոր հատված*: Այնուհետև,

տես,  $\frac{m}{n}$  դրական կոտորակին համապատասխանեցնենք ուղղի այն կետը,

որը ստացվում է միավոր հատվածի  $\frac{1}{n}$  մասը՝ սկսած 0 կետից  $m$  անգամ

հաջորդաբար տեղադրելով (0-ից դեպի 1 ուղղությամբ՝ ձախից դեպի աջ):

$-\frac{m}{n}$  բացասական թվին համապատասխանեցնում ենք  $\frac{m}{n}$  կետի սիմետրիկ

կետը 0 կետի նկատմամբ:

Իռացիոնալ թվերը թվային առանցքի վրա տեղադրելու համար դիտարկենք  $\alpha$  իռացիոնալ թվի տասնորդական վերլուծությունը՝

$$\alpha = C, c_1 \dots c_n \dots, \quad C_n := C, c_1 \dots c_n < \alpha < C, c_1 \dots c_n + \frac{1}{10^n} := C'_n,$$

և թվային առանցքի վրա դիտարկենք  $\Delta_n = [C_n, C'_n]$  ներդրված հատվածները:

Երկրաչափական ուղղի լիփության վերաբերյալ աքսիոմի համաձայն, ուղղի վրա գոյություն ունի միակ  $M$  կետ, որը պատկանում է բոլոր այդ հատվածներին:  $\alpha$  թվին համապատասխանեցնենք հենց այդ  $M$  կետը:

Եթենով նախորդ կետում ապացուցված այն պնդումից, որ տարբեր իրական թվեր չեն կարող ունենալ նոյն տասնորդական վերլուծությունը՝ դժվար չէ համոզվել, որ տարբեր իրական թվերին համապատասխանում են թվային առանցքի տարբեր կետեր:

Այժմ ապացուցենք, որ այսպիսի համապատասխանեցման արդյունքում սպառվում են ուղղի բոլոր կետերը և, այսպիսով, առաջանում է փոխմիարժեք համապատասխանություն իրական թվերի բազմության և ուղղի կետերի բազմության միջև:

Այդ նպատակով դրական կիսաառանցքի վրա վերցնենք կամայական  $M$  կետ, որին ուացիոնալ թիվ չի համապատասխանում, և ուացիոնալ թվերի բազմության մեջ դիտարկենք հետևյալ  $A/A'$  հատույթը.  $A'$  վերին դասի մեջ ընդգրկենք բոլոր այն ուացիոնալ թվերը, որոնց համապատասխան կետերը թվային ուղղի վրա ընկած են  $M$ -ից աջ, իսկ մնացած ուացիոնալ թվերը ներառենք  $A$  ստորին դասի մեջ: Ստուգենք, որ ստացվել է հատույթ: Դրա համար բավական է համոզվել, որ

- ա)  $A' - \eta$  դատարկ չէ,
- բ) եթե  $a' \in A'$  և  $a'_1 > a'$ , ապա  $a'_1 \in A'$ :

Այս երկու պահումներից առաջինը հետևում է երկրաչափական հատվածների վերաբերյալ *Առքիմեոի աքսիոմից*, ըստ որի, գոյություն ունի  $n$  բնական թիվ, որին համապատասխան կետն ընկած է  $M$ -ից աջ: Իսկ ք

պնդումը հետևում է քվային առանցքի վրա ուսցիունալ թվերին կետեր համապատասխանեցնելու կանոնից:

Այսպիսով,  $\alpha = A / A'$ -ը իռացիունալ թիվ է: Մնում է նկատել, որ քվային առանցքի վրա  $\alpha$  թվին համապատասխանող կետը հենց  $M$  -ն է:

## II ԳԼՈՒԽ

### ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

#### §1. ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆ

**1. Հաջորդականության սահմանի սահմանումը:** Բնական արգումենտի ֆունկցիան կոչվում է *հաջորդականություն*: Հաջորդականությունը սովորաբար նշանակում են  $\{x_n\}$  սիմվոլով կամ գրում են  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  տեսքով:  $x_1$ -ը կոչվում է հաջորդականության առաջին անդամ,  $x_2$ -ը՝ երկրորդ և այլն:  $x_n$ -ը կոչվում է հաջորդականության  $n$ -րդ անդամ կամ՝ ընդհանուր անդամ:

Պարզության համար, այսուհետ  $x_n$ -ը կօգտագործենք նաև որպես հաջորդականության նշանակում՝ ընդունված  $\{x_n\}$  նշանակման փոխարեն:

**Սահմանում:**  $a$  թիվը կոչվում է  $x_n$  հաջորդականության սահման, եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ասում ենք, ուժությամբ  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $N = N(\varepsilon)$  թիվ, որի համար  $x_n$  թիվը այնպիսի է, որ

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon : \quad (1.1)$$

(1.1)-ը նշանակում է, որ  $x_n$  հաջորդականության  $N$ -ից մեծ համար (իմադեքս) ունեցող անդամները բավարարում են  $- \varepsilon < x_n - a < \varepsilon$  պայմանին կամ, որ նույնն է,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \quad (1.1)$$

պայմանին:

(1.1')-ը նշանակում է, որ թվային առանցքի վրա  $x_n$  կետը պատկանում է  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  միջակայքին, որը կոչվում է  $a$  կետի  $\varepsilon$ -շրջակայր:

Հաջորդականության սահմանի սահմանումը կարելի է տալ նաև, այսինքն կոչված, շրջակայրերի լեզվով.

\*  $N(\varepsilon)$  գրելաձևը մատնանշում է, որ  $N$ -ը, ընդհանրապես ասած, կախված է  $\varepsilon$  -ից:

a) թիվը կոչվում է  $x_n$  հաջորդականության սահման, եթե

ա)  $a$ -ի կամայական շրջակայր\* պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության բոլոր անդամները՝ սկսած ինչ-որ համարից,  
կամ, որ նույնն է,

բ)  $a$ -ի կամայական շրջակայրից դուրս կարող են գտնվել  $x_n$  հաջորդականության միայն վերջավոր քանակով անդամներ:

Եթե  $a$  թիվը  $x_n$  հաջորդականության սահման է, կասենք  $x_n$ -ը ձգուում է ա-ի  $n$ -ը անվերջի ձգտելիս: Դա կնշանակենք  $x_n \rightarrow a$  կամ  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  սիմվոլներով:

Նկատենք, որ այս սահմանման մեջ  $\varepsilon > 0$  թիվը կարող ենք կամայապես փոքր վերցնել: Հետևաբար,  $x_n \rightarrow a$  նշանակում է, որ սկսած որոշ համարից,  $x_n$ -ը որքան կամենանք մոտ է դառնում  $a$  թվին (այդ համարը կախված է մոտեցման չափից):

**Օրինակներ:**

$$1. \quad x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 : \text{Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական } \varepsilon > 0$$

թիվ: Պետք է գտնենք այնպիսի  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, որ  $n > N(\varepsilon)$  պայմանից հետո

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ : Վերջինս համարժեք է

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \text{ անհավասարությանը: Որպես } N(\varepsilon) \text{ կարող ենք վերցնել } \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] \text{-ից}$$

մեծ կամ հավասար կամայական բնական թիվ, օրինակ՝  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ :

$$2. \quad x_n = \frac{1 + (-1)^n}{n} \rightarrow 0 :$$

\* Շրջակայր ասելով՝ հասկանում ենք որևէ  $\varepsilon$  - շրջակայր:

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Քանի որ  $|x_n| \leq \frac{2}{n}$ , բավական է պահանջել, որ տեղի ունենաւ  $\frac{2}{n} < \varepsilon$  անհավասարությունը: Լուծելով այն՝ կստանանք  $n > \frac{2}{\varepsilon}$ : Որպես  $N(\varepsilon)$  կարող ենք վերցնել  $\left[ \frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$ -ը:

3.  $x_n = \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ , որտեղ  $a > 1$ : Նշանակենք՝  $\sqrt[n]{a} - 1 = y_n$ : Կունենանք՝  $a = (1 + y_n)^n$  և, Նյուտոնի երկանդամի բանաձևից ելնելով, կստանանք՝  $a > 1 + ny_n$ : Ուստի՝

$$y_n < \frac{a-1}{n}: \quad (1.2)$$

Այժմ վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Պետք է ապացուցենք, որ սկսած որոշ համարից, բավարարվում է

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$$

անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝  $y_n < \varepsilon$ : Դրա համար բավարար է (տես (1.2))

$$\frac{a-1}{n} < \varepsilon$$

պայմանը: Լուծելով այս անհավասարումը՝ կստանանք  $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ : Որպես

$N(\varepsilon)$  կարող ենք վերցնել  $\left[ \frac{a-1}{\varepsilon} \right] + 1$ -ը:

4.  $x_n = q^n \rightarrow 0$ , որտեղ  $0 < |q| < 1$ : Ցույց տանք, որ կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի համար, սկսած որոշ համարից, բավարարվում է  $|q|^n < \varepsilon$  պայմանը: Լուծելով այդ անհավասարումը՝ կստանանք  $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}$ : Որպես  $N(\varepsilon)$  կա-

բող ենք վերցնել  $\left[ \frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|} \right]$ -ից մեծ կամայական բնական թիվ:

**Սահմանում:** Կասենք, որ  $x_n$  հաջորդականությունը ճգնաժամ է պլյուս անվերջության և կնշանակենք՝  $x_n \rightarrow +\infty^*$ , եթե յուրաքանչյուր  $E$  թվի համար գոյություն ունի  $N(E)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(E) \Rightarrow x_n > E :$$

Կասենք, որ  $x_n$  հաջորդականությունը ճգնաժամ է մինուս անվերջության և կնշանակենք՝  $x_n \rightarrow -\infty$ , եթե յուրաքանչյուր  $E$  թվի համար գոյություն ունի  $N(E)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(E) \Rightarrow x_n < E :$$

Կամայական  $E$  թվի համար  $(E, +\infty)$  միջակայքը կանվանենք  $+\infty$ -ի շրջակայք, իսկ  $(-\infty, E)$  միջակայքը՝  $-\infty$ -ի շրջակայք: Անվերջ սահմանի սահմանումը ևս կարելի է ձևակերպել շրջակայքերի լեզվով, ինչը բողնում ենք ընթերցողին:

Հաջորդականությունը կոչվում է *զուգամետ*, եթե այն ճգնաժամ է վերջավոր սահմանի, հակառակ դեպքում այն կոչվում է *տարամետ*:

## 2. Զուգամետ հաջորդականությունների պարզագույն հատկությունները:

**Հատկություն 1:** Եթե  $x_n \rightarrow a$  և  $a > p$ , ապա սկսած որոշ համարից՝  $x_n > p$ : Եթե  $x_n \rightarrow a$  և  $a < q$ , ապա սկսած որոշ համարից՝  $x_n < q$ :

► Առաջին դեպքում սահմանի սահմանման մեջ վերցնելով  $\varepsilon = a - p$ ՝ կստանանք  $p = a - \varepsilon < x_n$ , եթե  $n > N(\varepsilon)$ : Նոյն ձևով կապացուցենք նաև մյուս դեպքը: ■

**Մասմավոր դեպք:** Այս հատկության մեջ վերցնելով  $p = 0$  ( $q = 0$ )՝ կստանանք հետևյալ արդյունքը. Եթե հաջորդականության սահմանը դրա-

\* Այսուհետ՝  $+\infty$  սիմվոլը նույնացվում է  $\infty$  սիմվոլի հետ:

կամ է (բացասական է), ապա սկսած որոշ համարից, հաջորդականության անդամները նոյնպես դրական են (բացասական են):

**Հատկություն 2:** Եթե  $x_n \geq p$  ( $x_n \leq q$ ) և  $x_n \rightarrow a$ , ապա  $a \geq p$  ( $a \leq q$ ):

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Եթե  $a < p$ , ապա, առաջին հատկության համաձայն, սկսած որոշ համարից՝  $x_n < p$ , որը հակասում է տրված պայմանին: Նույն ձևով կապացուցենք նաև մյուս դեպքը: ■

Նկատենք, որ եթե այս հատկության մեջ  $x_n \geq p$  պայմանը փոխարինենք  $x_n > p$  պայմանով, ապա  $a \geq p$  եզրակացությունը չի կարելի փո-

խարինել  $a > p$  եզրակացությամբ: Իրոք. օրինակ  $x_n = \frac{1}{n} > 0$ , բայց  $x_n \rightarrow 0$ :

**Հատկություն 3:** Չուզամենու հաջորդականության սահմանը միակն է:

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք  $x_n \rightarrow a$  և  $x_n \rightarrow b$ , ընդ որում,  $a \neq b$ : Առանց ընդհանրությունը խախտելու՝ կարող ենք ենթադրել, թե  $a < b$ : Սահմանի սահմանման մեջ վերցնելով  $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ , կստանանք.

ա)  $x_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$ , եթե  $n > N_1$  և բ)  $\frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < x_n$ , եթե  $n > N_2$ :

Նշանակենք  $N = \max\{N_1, N_2\}$ : Եթք  $n > N$ ,  $x_n$ -ը կբավարարի թե՛ ա), թե՛ բ) պայմանին, ինչը հակասություն է: ■\*

**Հատկություն 4:** Չուզամենու հաջորդականությունը սահմանափակ է<sup>\*\*</sup>:

► Ենթադրենք՝  $x_n \rightarrow a$  ( $a$ -ն վերջավոր է): Ապացուցենք, որ գոյություն

\* Փորձեք հանգունորեն ապացուցել ավելի ընդհանուր պնդում. Եթե հաջորդականությունն ունի սահման (թեկուզ անվերջ), ապա այդ սահմանը միակն է:

\*\* Հաջորդականությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե բավարարվում է (1.3) պայմանը:

ունեն  $m$  և  $M$  թվեր, այնպիսիք, որ

$$m \leq x_n \leq M, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (1.3)$$

Սահմանի սահմանման մեջ վերցնելով  $\varepsilon = 1$ ՝ կստանանք

$$a - 1 < x_n < a + 1, \quad \text{եթե } n > N : \quad (1.4)$$

Նշանակելով  $m = \min \{a - 1, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ,  $M = \max \{a + 1, x_1, x_2, \dots, x_N\}$ ,

(1.4)-ից կստանանք (1.3)-ը: ■

### 3. Անվերջ փորբեմ:

**Սահմանում:**  $x_n$  հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ փորբ, եթե  $x_n \rightarrow 0$ :

**Թեորեմ 1.1:** Որպեսզի  $x_n$  հաջորդականությունը գուգամիտի արվիա, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $x_n - a$  հաջորդականությունը լինի անվերջ փորբ:

Այս թեորեմի ապացույցն անմիջապես բխում է սահմանի և անվերջ փորբի սահմանումներից:

**Լեմմա 1.1:** Վերջավոր քվով անվերջ փորբերի գումարն անվերջ փորբ է:

► Ապացույցներ  $\alpha_n$  և  $\beta_n$  երկու գումարելիների դեպքում: Ունենք՝  $\alpha_n \rightarrow 0$  և  $\beta_n \rightarrow 0$ , պետք է ապացույցել, որ  $\alpha_n + \beta_n \rightarrow 0$ : Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն՝

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{եթե } n > N_1 \text{ և } |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{եթե } n > N_2 :$$

Նշանակելով  $N = \max \{N_1, N_2\}$ , կունենանք.

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{եթե } n > N,$$

ինչ և պետք էր ապացույցել:

Երկուսից ավելի գումարելիների դեպքն ապացույցում է մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: ■

**Լեմմա 1.2:** Սահմանափակ հաջորդականության և անվերջ փոքրի արտադրյալն անվերջ փոքր է:

► Ունենք, որ մի ինչ որ դրական  $L$  թվի համար՝  $|x_n| \leq L$  և  $\alpha_n \rightarrow 0$ :

Ապացուցենք, որ  $x_n \alpha_n \rightarrow 0$ : Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{L}:$$

Այդ դեպքում  $n > N(\varepsilon)$  արժեքների համար կունենանք՝

$$|x_n \alpha_n| = |x_n| |\alpha_n| < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon,$$

ինչն էլ հենց նշանակում է, որ  $x_n \alpha_n \rightarrow 0$ : ■

#### 4. Անվերջ մեծեր:

**Սահմանում:**  $x_n$  հաջորդականությունը կոչվում է անվերջ մեծ, եթե  $|x_n| \rightarrow \infty$ :

**Թեորեմ 1.2:** Որպեսզի  $x_n$  հաջորդականությունը\* լինի անվերջ մեծ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $\frac{1}{x_n}$  հաջորդականությունը լինի անվերջ փոքր:

► Անհրաժեշտություն: Ունենք՝  $|x_n| \rightarrow \infty$ , պետք է ապացուցել, որ

$\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ : Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Անվերջ սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| > \frac{1}{\varepsilon}:$$

Այդ դեպքում  $n > N(\varepsilon)$  արժեքների համար կունենանք՝

---

\* Ենթադրվում է, որ  $x_n \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$\left| \frac{1}{x_n} \right| = \frac{1}{|x_n|} < \varepsilon,$$

ինչն էլ նշանակում է, որ  $\frac{1}{x_n}$ -ը անվերջ փոքր է: Բավարարությունն ապացուելու համար դատողությունները կատարում ենք հակառակ հերթականությամբ: ■

### 5. Թվաբանական գործողություններ զուգամետ հաջորդականությունների հետ:

**Թեորեմ 1.3:** Եթե  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$  ( $a$ -ն,  $b$ -ն վերջավոր են), ապա

$$1) x_n \pm y_n \rightarrow a \pm b;$$

$$2) x_n y_n \rightarrow ab;$$

$$3) \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b}, \text{եթե } y_n \neq 0, b \neq 0:$$

► 1)-ի ապացույցը: Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն  $N_1$  և  $N_2$  բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Նշանակենք՝  $N = \max\{N_1, N_2\}$ : Եթե  $n > N$ , կունենանք՝

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon:$$

2)-ի ապացույցը: Քանի որ  $y_n$  զուգամետ հաջորդականությունը սահմանափակ է՝  $|y_n| \leq M$ , ուստի  $a = 0$  դեպքում ապացույցը հետևում է լեմմա 1.2-ից: Դիցուք՝  $a \neq 0$ : Ունենք՝

$$|x_n y_n - ab| = |y_n(x_n - a) + a(y_n - b)| \leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b|: \quad (1.5)$$

Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն  $N_1$  և  $N_2$  բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}; \quad n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}:$$

Նշանակենք՝  $N = \max\{N_1, N_2\}$ : Եթե  $n > N$ , (1.5)-ից կունենանք՝

$$|x_n y_n - ab| < \varepsilon,$$

ինչ և պետք էր ապացուցել:

*Յ) Ի ապացույցը:* Ապացուցենք, որ  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ , և հարցը կբերվի նախորդ դեպքին: Ունենք՝

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - y_n}{by_n} \right| = \frac{|y_n - b|}{|y_n||b|}: \quad (1.6)$$

Քանի որ  $|y_n| \rightarrow |b| > 0$  (որովհետև  $\|b| - |y_n|\| \leq |b - y_n|$ ), զուգամետ հաջորդականությունների պարզագույն հատկություններից առաջինի համաձայն, գոյություն ունի  $N_1$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N_1 \Rightarrow |y_n| > \frac{|b|}{2}: \quad (1.7)$$

Այժմ վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի  $N_2$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{b^2}{2}\varepsilon: \quad (1.8)$$

Նշանակենք՝  $N = \max\{N_1, N_2\}$ : Հաշվի առնելով (1.7) և (1.8) զնահատականները՝ (1.6) հավասարությունից կստանանք

$$n > N \Rightarrow \left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon,$$

որը նշանակում է՝  $\frac{1}{y_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ : ■

Օգտվելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդից՝ քերեմ 1.3-ի 1) և 2) պնդումները կարելի է ապացուցել ցանկացած թվով գումարելիների կամ արտադրյալիների դեպքում:

Որպես օրինակ, դիտարկենք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոցեսիան՝  $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots; 0 < |q| < 1$ :

$$\text{Նշանակենք } S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1} :$$

Որպես անվերջ նվազող պրոցեսիայի  $S$  գումարը ընդունվում է  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  սահմանը: Հաշվենք այդ գումարը: Քանի որ  $q^n \rightarrow 0$ , ուստի՝

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} (1 - q^n) \rightarrow \frac{a}{1 - q} :$$

Այսպիսով, ստացանք  $S = \frac{a}{1 - q}$  բանաձևը:

**6. Անորոշություններ:** Կասենք  $\frac{x_n}{y_n}$  ( $y_n \neq 0$ ) հարաբերությունը  $\frac{0}{0}$  տեսքի անորոշություն  $t^*$ , եթե  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$ :

Անորոշություն անվանումը պայմանավորված է այն հանգամանքով, որ  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$  պայմանի առկայությամբ  $\frac{x_n}{y_n}$  հարաբերությունը տարրեր

դեպքերում կարող է ձգտել թե՛ վերջավոր սահմանի, թե՛  $+\infty$ , թե՛  $-\infty$ , և թե՛ սահման չունենալ:

**Օրինակներ:**

$$\text{ա) } x_n = \frac{a}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{1} \rightarrow a ;$$

$$\text{բ) } x_n = \frac{1}{n^2}, \quad y_n = \frac{1}{n^3} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = n \rightarrow +\infty ;$$

$$\text{գ) } x_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} = (-1)^n :$$

\* Այս տերմինաբանությունը կօգտագործենք միայն սահման հաշվելիս:

Վերջին դեպքում  $\frac{x_n}{y_n}$  հարաբերությունը սահման չունի:

Նման ձևով սահմանվում է  $\frac{\infty}{\infty}$  տեսքի անորոշությունը:

**Օրինակ:** Դիցուք՝  $x_n = (2 + (-1)^n)n$ ,  $y_n = n$ : Կունենանք՝

$\frac{x_n}{y_n} = 2 + (-1)^n$ : Այս դեպքում՝  $x_n \rightarrow +\infty$ ,  $y_n \rightarrow +\infty$ , իսկ  $\frac{x_n}{y_n}$  հարաբերությունը ոչ մի սահմանի չի ձգտում:

Ընթերցողին առաջարկվում է սահմանել  $0 \cdot \infty$  և  $\infty - \infty$  տեսքի անորոշությունները և քերել օրինակներ:

### 7. Սահմանային անցում անհավասարություններում:

**Թեորեմ 1.4:** Եթե  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$  և  $x_n \leq y_n$ , ապա  $a \leq b$ :

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք՝  $b < a$ : Վերցնենք որևէ  $c$  թիվ, այնպիսին, որ  $b < c < a$ : Չուզամետ հաջորդականությունների առաջին պարզագույն հատկության համաձայն, գոյություն ունեն  $N_1$  և  $N_2$  բնական թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow x_n > c; \quad n > N_2 \Rightarrow y_n < c:$$

Նշանակելով  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , կունենանք

$$n > N \Rightarrow y_n < c < x_n,$$

որը հակասում է քերեմի պայմանին: ■

**Թեորեմ 1.5:** Եթե  $x_n \leq z_n \leq y_n$ ,  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow a$ , ապա  $z_n \rightarrow a$ :

► Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն  $N_1$  և  $N_2$  թվեր, այնպիսիք, որ

$$n > N_1 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n; \quad n > N_2 \Rightarrow y_n < a + \varepsilon:$$

Նշանակելով  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , կունենանք

$$n > N \Rightarrow a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon ,$$

այսինքն՝  $z_n \rightarrow a$  : ■

**Օրինակ:** Դիցուք՝  $z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$  :

Ուստի՝

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq z_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

(մի դեպքում ամենափոքր գումարելին ենք բազմապատկում գումարելիների թվով, մյուս դեպքում՝ ամենամեծը):

Քանի որ

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \rightarrow 1 \text{ և } \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1 ,^*$$

ուստի  $z_n \rightarrow 1$  :

## §2. ՍՊՆՈՏՈՒՆ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

### 1. Սոնտոն հաջորդականության սահմանը:

**Սահմանում:**  $x_n$  հաջորդականությունը կոչվում է աճող կամ աճող՝ լայն իմաստով, եթե  $x_{n+1} \geq x_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  : Եթե  $x_{n+1} > x_n$ , հաջորդականությունը կոչվում է խիստ աճող: Նման ձևով սահմանվում է խիստ նվազող և լայն իմաստով նվազող հաջորդականությունը:

$x_n$  հաջորդականությունը կոչվում է մոնոտոն, եթե այն աճող է կամ նվազող:

**Թեորեմ 2.1:** Եթե աճող հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, սպա այն զուգամետ է, հակառակ դեպքում՝ ձգում է  $+\infty$  :

\* Ընթերցողին առաջարկում ենք խիստ ապացուցել այս երկու սահմանային առնչությունները:

► Ունենք՝  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$  և  $x_n \leq M$  : Ծզգիտ վերին եզրի գոյության թեորեմի համաձայն,  $x_n$  հաջորդականության ընդունած արժեքների բազմությունն ունի վերջավոր ճշգրիտ վերին եզր: Նշանակենք

$$a = \sup \{x_n\}$$

և ապացուենք, որ  $x_n \rightarrow a$  :

Քանի որ  $a$ -ն  $x_n$  հաջորդականության ընդունած արժեքների բազմության վերին եզր է, ապա  $x_n \leq a$  :

Այժմ վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Քանի որ  $a$ -ն վերին եզրերից փոքրագույնն է, ապա  $(a - \varepsilon)$ -ը վերին եզր չէ: Հետևաբար գոյություն ունի  $n_0$  այնպես, որ

$$x_{n_0} > a - \varepsilon :$$

Մոնտոնության շնորհիվ կունենանք՝  $x_{n_0} \leq x_n \leq a$ , եթե  $n > n_0$ : Այսինքն՝

$$n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq a < a + \varepsilon :$$

Հետևաբար՝  $x_n \rightarrow a$  :

Այժմ ապացուենք, որ եթե աճող հաջորդականությունը սահմանափակ չէ վերևից, ապա այն ձգում է  $+\infty$  :

Ապացուելու համար վերցնենք կամայական  $E$  թիվ: Քանի որ  $x_n$  հաջորդականությունը սահմանափակ չէ վերևից, ապա գոյություն ունի  $n_0$ , այնպիսին, որ  $x_{n_0} > E$  : Մոնտոնության շնորհիվ կունենանք՝

$$n > n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0} > E,$$

ինչը և պետք էր ապացուել: ■

Նման ձևով կապացուցվի նաև հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ 2.1:** Եթե նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքևից, ապա այն զուգամետ է, հակառակ դեպքում՝ ձգում է  $-\infty$ :

**Դիտողություն:** Ներկայացված պնդումները ճիշտ են նաև այն հաջորդականությունների համար, որոնք մոնտոն են՝ սկսած մի ինչ-որ համարից: Այդպիսի հաջորդականությունները կոչվում են ի վերջո մոնտոն հաջորդականություններ:

**Օրինակ:** Դիցուք՝  $x_n = \frac{a^n}{n!}$ ,  $a > 0$  : Ուստի՝  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1} < 1$ , եթե  $n$ -ը բա-

վականաշափ մեծ է: Հետևաբար  $x_n$  հաջորդականությունն ի վերջո նվազող է:

Մյուս կողմից,  $x_n$  հաջորդականությունը դրական է, հետևաբար՝ սահմանափակ է ներքեւից: Թեորեմ 2.1-ի համաձայն,  $x_n$  հաջորդականությունը գուգամետ է՝  $x_n \rightarrow c$ :

Ապացուցենք, որ  $c = 0$  : Ուստի՝

$$x_{n+1} = x_n \frac{a}{n+1} :$$

Հավասարության երկու մասերում անցնելով սահմանի՝ կստանանք  $c = c \cdot 0 = 0$  :

**2. ե թիվը:** Դիտարկենք  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  հաջորդականությունը: Ապացուցենք, որ այն աճող է և սահմանափակ (վերևից):

Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի համաձայն, ուստի՝

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k + \dots + \frac{n(n-1)\dots 1}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) : \end{aligned} \quad (2.1)$$

Այստեղից բխում է, որ  $x_n$ -ը խիստ աճող է: Իբրոք.  $n$ -ը ( $n+1$ )-ով փոխարինելիս՝ կմեծանան բոլոր փակագծերի մեջ գրված թվերը և կավելանա ևս մեկ դրական գումարելի:

Մյուս կողմից, քանի որ փակագծերի մեջ գրված թվերը փոքր են մեկից, կստանանք՝

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n = 2, 3, \dots : \quad (2.2)$$

Հայտարարմերում 2-ից մեծ արտադրիչները 2-ով փոխարինելիս՝ անհավասարության աջ մասը կմնանա, հետևաբար՝

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3 :$$

Այսպիսով՝  $x_n$ -ը աճող և վերևից սահմանափակ հաջորդականություն է:

Համաձայն թեորեմ 2.1-ի,  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  հաջորդականությունը զուգամետ է,

որի սահմանն այսուհետև կնշանակենք  $e$  -ով.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ :

**3. Եթի մոտավոր հաշվումը:** Ցույց տանք, որ

$$y_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

հաջորդականությունը նույնական զուգամիտում է  $e$  թվին:

(2.1) հավասարությունից ունեն՝

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < x_n \quad (n > k) :$$

Ֆիքսելով  $k$  -ն և  $n$  -ը ճշտեցնելով  $\infty$  -ի՝ կստանանք

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!} \leq e, \quad k = 1, 2, \dots :^*$$

Հաշվի առնելով նաև (2.2) անհավասարությունը՝ կստանանք

$$x_n < y_n < e : \tag{2.3}$$

Քանի որ  $x_n \rightarrow e$ , (2.3)-ից բխում է, որ  $y_n \rightarrow e$ :

$e$  թի մոտավոր հաշվան բանաձև ստանալու համար զնահատենք  $y_{n+m} - y_n$  տարրերությունը.

---

\* Այս անհավասարության մեջ հավասարության դեպքը բացառվում է, քանի որ այդտեղ  $k$  -ն ( $k+1$ ) -ով փոխարինելիս, անհավասարությունը պետք է պահպանվի:

$$\begin{aligned}
y_{n+m} - y_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+m)!} = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+2)(n+3)\dots(n+m)} \right] < \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \left[ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right] < \\
&< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1};
\end{aligned}$$

Այս ամեավասարության մեջ ֆիքսելով  $n$ -ը, իսկ  $m$ -ը ձգտեցնելով  $\infty$ -ի՝ կստանանք

$$e - y_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1};$$

Հաշվի առնելով (2.3)-ը՝ այստեղից կստանանք

$$0 < e - y_n \leq \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2};$$

Քանի որ  $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$ , ապա ունենք՝

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}; \quad (2.4)$$

Եշտակելով  $\theta = \frac{e - y_n}{\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n}}$ , (2.4)-ից կունենանք՝  $0 < \theta < 1$  և, համաձայն այս նշանակման, կստանանք՝

$$e - y_n = \frac{\theta}{n!n};$$

Դա նույն է, որ

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta}{n!n}, \quad 0 < \theta < 1; \quad (2.5)$$

(2.5) մոտավոր հաշվման բանաձևից հետևում է, որ  $e$ -ն իուսցիում քիչ է:

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք  $e$ -ն ռացիոնալ քիչ է՝  $e = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ : Այդ դեպքում, (2.5) բանաձևի մեջ վերցնելով  $n = q$ , կստանանք՝

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} + \frac{\theta}{q!q};$$

Այս հավասարության երկու կողմն բազմապատկելով  $q!$ -ով կստանանք, որ  $\theta/q$ -ը ամբողջ թիվ է, ինչը հակասություն է:

#### 4. Ըսուլցի թեորեմ:

**Թեորեմ 2.2:** *Դիցուք*

$$1) \quad y_1 < y_2 < \dots < y_n < \dots, \quad y_n \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \rightarrow a:$$

Այդ դեպքում  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow a$  ( $a$ -ն կարող է լինել թե՛ վերջավոր, և թե՛ անվերջ):

► Ապացույցը բերենք այն դեպքի համար, երբ  $a$ -ն վերջավոր է:  
Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Սահմանի սահմանման համաձայն, գոյություն ունի  $n_0 > 1$  բնական թիվ այնպես, որ

$$k \geq n_0 \Rightarrow a - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < a + \frac{\varepsilon}{2}:$$

Անհավասարության բոլոր մասերը բազմապատկելով  $y_k - y_{k-1}$  դրական թվով՝ կստանանք

$$\left( a - \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < \left( a + \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_k - y_{k-1}):$$

\*  $a = \pm\infty$  դեպքերում ապացուցել ինքնուրույն:

$k$ -ին տալով  $n_0 + 1, \dots, n$  արժեքները և, գումարելով ստացված նոյնանում անհավասարությունները, կստանանք՝

$$\left( a - \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_n - y_{n_0}) < x_n - x_{n_0} < \left( a + \frac{\varepsilon}{2} \right) (y_n - y_{n_0}):$$

Անհավասարության բոլոր մասերը բաժանելով  $y_n$  դրական թվի վրա ( $n_0$ -ն կարող է ինք այնպես լնալու, որ սկսած այդ համարից՝  $y_n > 0$ )՝ որոշ ձևափոխություններից հետո կստանանք

$$\left( a - \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( 1 - \frac{y_{n_0}}{y_n} \right) + \frac{x_{n_0}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n_0}}{y_n} + \left( a + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( 1 - \frac{y_{n_0}}{y_n} \right): \quad (2.6)$$

$$\text{Քանի որ } \left( a - \frac{\varepsilon}{2} \right) \left( 1 - \frac{y_{n_0}}{y_n} \right) + \frac{x_{n_0}}{y_n} \rightarrow a - \frac{\varepsilon}{2}, \text{ ապա, սկսած մի ինչ-որ } N_1$$

համարից այն մեծ կդառնա  $a - \varepsilon$  թվից: Նման ձևով, սկսած  $N_2$  համարից, (2.6) անհավասարության աջ կողմի արտահայտությունը փոքր կդառնա  $(a + \varepsilon)$ -ից:

$$\text{Նշանակելով } N = \max \{N_1, N_2, n_0\}, \text{ կունենանք}$$

$$n > N \Rightarrow a - \varepsilon < \frac{x_n}{y_n} < a + \varepsilon,$$

ինչ և պահանջվում էր ապացուցել: ■

**Հետևանք (Կոչիի թեորեմը):** Եթե  $a_n \rightarrow a$ , ապա

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a : \quad (2.7)$$

Ապացուցելու համար նշանակենք՝  $x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ,  $y_n = n$ : Այդ դեպքում կունենանք՝

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a_n \rightarrow a :$$

Հետևաբար, (2.7) պնդումն անմիջապես բխում է Շոոլցի թեորեմից:

Ծովոցի թեորեմը վերաբերում էր  $\infty/\infty$  տեսքի անորոշություններին: Ըստ թեորողին առաջարկվում է ապացուցել  $0/0$  տեսքի անորոշությունների վերաբերյալ հետևյալ պնդումը. եթե

$$1) \ y_1 > y_2 > \dots > y_n > \dots, \ y_n \rightarrow 0; \quad 2) \ x_n \rightarrow 0; \quad 3) \ \frac{x_n - x_{n+1}}{y_n - y_{n+1}} \rightarrow a,$$

ապա  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow a$ :

*Ցուցում.*

$$(a - \varepsilon)(y_k - y_{k+1}) < x_k - x_{k+1} < (a + \varepsilon)(y_k - y_{k+1}) \quad (k = n, n+1, \dots, n+m-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (a - \varepsilon)(y_n - y_{n+m}) < x_n - x_{n+m} < (a + \varepsilon)(y_n - y_{n+m}):$$

### 5. Ներորմած հատվածների լեմման:

**Թեորեմ 2.3:** *Դիցուք՝*

1)  $x_n$  հաջորդականությունը աճող է, իսկ  $y_n$ -ը՝ նվազող;

2)  $x_n < y_n$ ;

3)  $y_n - x_n \rightarrow 0$ :

Այդ դեպքում  $x_n$  և  $y_n$  հաջորդականությունները զուգամետ են և ունեն նույն սահմանը:

► Քանի որ  $x_n < y_n \leq y_1$ , ուստի  $x_n$  աճող հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է: Հետևաբար այն զուգամետ է՝  $x_n \rightarrow c$ : Այսու կողմից՝  $x_1 \leq x_n < y_n$ : Այսինքն՝  $y_n$  նվազող հաջորդականությունը սահմանափակ է ներքից, հետևաբար, այն նույնպես զուգամետ է՝  $y_n \rightarrow c_1$ :

Ցույց տանք, որ  $c = c_1$ : Իբրոք.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c_1 - c : \blacksquare$$

**Երկրաչափական մեկնաբանում:** Թվային առանցքի վրա դիտարկենք  $[x_n, y_n]$  հատվածները: 1) և 2) պայմաններից կունենանք, որ այդ հատվածները մերորդած են՝

$$[x_1, y_1] \supset [x_2, y_2] \supset \dots \supset [x_n, y_n] \supset \dots :$$

3) պայմանը նշանակում է,որ այդ հատվածների երկարություններից կազմած հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի:

Թեորեմ 2.3-ի եզրակացությունը նշանակում է, որ զոյտքյուն ունի մեկ և միայն մեկ  $c$  կետ, որը պատկանում է այդ բոլոր հատվածներին:

Այսպիսով՝ թեորեմ 2.3-ը թվային առանցքի վրա կարող ենք ձևակերպել հետևյալ կերպ.

**Ներդրված հատվածների լեմման:** Եթե ներդրված հատվածների երկարությունների հաջորդականությունը ձգտում է 0-ի, ապա զոյտքյուն ունի մեկ և միայն մեկ կետ, որը պատկանում է բոլոր այդ հատվածներին:

### §3. ԵՆԹԱՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՍԱՄՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆ

#### 1. Սասնակի սահման:

**Սահմանում:** Հիցուք  $x_n$ -ը կամայական հաջորդականություն է, իսկ  $n_k$ -ը՝ բնական թվերի խիստ աճող հաջորդականություն: Այդ դեպքում  $y_k = x_{n_k}$  հաջորդականությունը կոչվում է  $x_n$  հաջորդականության ենթահաջորդականություն:

**Թեորեմ 3.1:** Եթե  $x_n \rightarrow a$ , ապա նրա կամայական ենթահաջորդականություն ևս կծագի այդ նոյն  $a$  սահմանին:

Թեորեմի ապացույցը քողնում ենք ընթերցողին՝ ստուգելու սահմանի սահմաննան իր իմացությունը:

**Սահմանում:** Եթե  $x_{n_k} \rightarrow c$ , որտեղ  $x_{n_k}$  -ն  $x_n$  -ի որևէ ենթահաջորդականություն է, ապա  $c$  -ն կոչվում է  $x_n$  հաջորդականության մասնակի սահման:

**Օրինակ:**  $x_n = (-1)^{n+1}$  հաջորդականության համար ունենք՝  $x_{2k-1} = 1$ ,  $x_{2k} = -1$ : Հետևաբար,  $1$ -ը և  $-1$ -ը կհանդիսանան այդ հաջորդականության մասնակի սահմաններ: Նկատնք, որ  $x_n$ -ը այլ մասնակի սահմաններ չունի:

Ընդհանուր դեպքում, մասնակի սահմանների բազմությունը որոշելու համար, հարմար է օգտվել հետևյալ քերեմից:

**Թեորեմ 3.2:** Որպեսզի  $a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ) հանդիսանա  $x_n$  հաջորդականության մասնակի սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $a$ -ի կամայական շրջակայք պարունակի  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

► **Անհրաժեշտությունն անմիջապես բխում է մասնակի սահմանի սահմանումից:**

**Բավարարություն:** Ապացուցենք այն դեպքում, երբ  $a$ -ն վերջավոր է: Առաջին քայլում վերցնենք  $a$  կետի  $(a-1, a+1)$  շրջակայքը: Քանի որ այդ միջակայքը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության անդամներ, ապա գոյություն ունի  $n_1$  ինդեքս, այնպիսին, որ  $a-1 < x_{n_1} < a+1$ :

$$\text{Երկրորդ քայլում դիտարկենք } a \text{ կետի } \left( a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2} \right) \text{ շրջակայքը:}$$

Քանի որ այդ շրջակայքը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, ապա գոյություն ունի  $n_2$ , այնպիսին, որ  $n_2 > n_1$  և

$$a - \frac{1}{2} < x_{n_2} < a + \frac{1}{2};$$

Եթե  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$  ինդեքսներն արդեն ընտրված են,  $n_k$  ինդեքսն ընտրում ենք այնպես, որ

$$n_k > n_{k-1} \text{ և } a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}, \quad k = 2, 3, \dots;$$

Այսպիսի ընտրությունն իրոք հնարավոր է, քանի որ  $a$  կետի  $\left( a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k} \right)$  շրջակայքը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Այսպիսով՝ ստանում ենք  $x_n$  հաջորդականության  $x_{n_k}$  ենթահաջորդա-

կանություն, որը բավարարում է

$$a - \frac{1}{k} < x_{n_k} < a + \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

պայմանին: Այստեղից բխում է, որ  $x_{n_k} \rightarrow a$ :

$a = \pm\infty$  դեպքերում դիտարկում ենք համապատասխանաբար  $(k, \infty)$  և  $(-\infty, -k)$  շրջակայթերը և կատարում նույն դատողությունը: ■

## 2. Հաջորդականության վերին և ստորին սահմաններ:

**Սահմանում:**  $x_n$  հաջորդականության մասնակի սահմաններից մեծագույնը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է այդ հաջորդականության վերին սահման և նշանակվում է  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  կամ  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$  սիմվոլով: Մասնակի սահմաններից փոքրագույնը (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է հաջորդականության ստորին սահման և նշանակվում՝  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  կամ  $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ :

**Թեորեմ 3.3** Կամայական հաջորդականություն ունի վերին և ստորին սահմաններ:

► Ապացուցենք վերին սահմանի գոյությունը (ստորինի գոյությունը կարելի է ապացուցել նույն դատողություններով):

Նախ, եթե  $x_n$  հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ չէ,  $+\infty$ -ի կամայական շրջակայթ կպարունակի  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար,  $+\infty$ -ը կհանդիսանա  $x_n$  հաջորդականության մասնակի սահման և կլինի նրանցից մեծագույնը:

Մնում է դիտարկել այն դեպքը, եթե  $x_n$  հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է:

Նշանակենք  $y_n = \sup \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ :

$y_n$  հաջորդականությունը նվազող է (լայն իմաստով), հետևաբար ունի սահման, վերջավոր կամ  $-\infty$ :

Այդ դեպքերը քննարկենք առանձին:

Քանի որ  $x_n \leq y_n$ , ապա  $y_n \rightarrow -\infty$  դեպքում կունենանք՝  $x_n \rightarrow -\infty$ : Հետևաբար,  $-\infty$ -ը կլինի  $x_n$ -ի միակ մասնակի սահմանը, ուստի և՝ ամենամեծը:

Մնում է քննարկել այն դեպքը, եթե  $y_n$ -ը նվազելով ձգում է  $c$  վերջավոր սահմանի:

Ցույց տանք, որ հենց  $c$ -ն կհանդիսանա  $x_n$  հաջորդականության մասնակի սահմաններից մեծագույնը:

Իրոք, նախ  $c$ -ից մեծ մասնակի սահման գոյություն չունի, որովհետև յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $N$ , այնպիսին, որ

$$n > N \Rightarrow y_n < c + \varepsilon \Rightarrow x_n < c + \varepsilon:$$

Մյուս կողմից,  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ մեծ են  $(c - \varepsilon)$ -ից, հակառակ դեպքում, սկսած որոշ համարից, տեղի կունենար  $y_n \leq c - \varepsilon$  անհավասարությունը, ինչը հակասություն է:

Այսպիսով՝  $c$  կետի յուրաքանչյուր  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  շրջակայք պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Հետևաբար,  $c$ -ն  $x_n$  հաջորդականության մասնակի սահման է: ■

Ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել, որ եթե

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

ապա  $x_n \rightarrow a$ :

### 3. Թուցանություն - Վայերշտրասի լեմման:

**Թեորեմ 3.4:** Յուրաքանչյուր սահմանափակ  $x_n$  հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենրակագորդականություն:

► Քանի որ  $x_n$  հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա գոյություն ունեն  $a$  և  $b$  թվեր, այնպիսիք, որ  $a \leq x_n \leq b$ :

Դիտարկենք  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  և  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$  հատվածները: Այդ հատվածներից գոնեւ մեկը կպարունակի  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամները: Այն նշանակենք  $[a_1, b_1]$ -ով (եթե երկու կետերն էլ պարունակեն անվերջ թվով անդամներ, կվերցնենք որևէ մեկը):

Երկրորդ քայլում կիսենք  $[a_1, b_1]$  հատվածը և  $[a_2, b_2]$ -ով նշանակենք այն կետը, որը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ, ապա  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  հատվածը կառուցելու համար կիսում ենք  $[a_n, b_n]$ -ը և վերցնում այն կետը, որը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ:

Այսպիսով, ստանում ենք ներդրված հատվածներ՝

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots ,$$

որտեղ  $n$ -րդ հատվածի երկարությունը հավասար է  $\frac{b-a}{2^n}$ , որը ձգտում է 0-ի: Հետևաբար, ներդրված հատվածների լիմմայի համաձայն, զոյություն ունի մի  $c$  թիվ, այնպիսին, որ

$$a_n \rightarrow c, \quad b_n \rightarrow c:$$

Այստեղից բխում է, որ  $c$  կետի կամայական շրջակայք պարունակում է որևէ  $[a_n, b_n]$  հատված, ինտևաբար և՝  $x_n$  հաջորդականության անվերջ թվով անդամներ: Այսպիսով՝  $c$  -ն հաջորդականության մասնակի սահման է, այսինքն՝ զոյություն ունի  $x_{n_k}$  զուգամետ ( $c$  -ին ձգտող) ենթահաջորդականություն: ■

**Մեկ այլ սպասույց:** Թեորեմ 3.3-ի համաձայն՝  $\exists x_{n_k} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b]$ :

#### §4. ԿՈՉԻԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ

**Սահմանում:**  $x_n$  հաջորդականությունը կոչվում է ֆունդամենտալ, եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  համար զոյտություն ունի  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n, n' > N \Rightarrow |x_{n'} - x_n| < \varepsilon :$$

Այս պայմանը կարելի է գրել նաև այսպես.

$$n > N \Rightarrow |x_{n+m} - x_n| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots :$$

##### 1. Կոչիի զուգամիտության սկզբունքը:

**Թեորեմ 4.1:** Որպեսզի  $x_n$  հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունդամենտալ:

► **Անհրաժեշտություն:** Դիցուք՝  $x_n \rightarrow a$  ( $a$ -ն վերջավոր է): Այդ դեպքում, յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար զոյտություն ունի  $N$ , այնպիսին, որ

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} :$$

Հետևաբար, եթե  $n, n' > N$ , ապա

$$|x_{n'} - x_n| = |(x_{n'} - a) + (a - x_n)| \leq |x_{n'} - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon :$$

Այսպիսով,  $x_n$  հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է:

**Բավարարություն:** Ունենք  $x_n$  ֆունդամենտալ հաջորդականությունը: Պետք է ապացուցենք, որ այն զուգամետ է:

Նախ ապացուցենք, որ ֆունդամենտալ հաջորդականությունը սահմանափակ է: Դրա համար վերցնենք որևէ  $\varepsilon_0 > 0$  թիվ: Գոյություն ունի  $N$ , այնպիսին, որ

$$n', n > N \Rightarrow |x_n - x_{n'}| < \varepsilon_0 ,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$n', n > N \Rightarrow x_{n'} - \varepsilon_0 < x_n < x_{n'} + \varepsilon_0 :$$

$n'$ -ը ֆիքսենք և նշանակենք՝

$$m = \min \{x_{n'} - \varepsilon_0, x_1, x_2, \dots, x_N\},$$

$$M = \max \{x_{n'} + \varepsilon_0, x_1, x_2, \dots, x_N\}:$$

Կունենանք՝  $m \leq x_n \leq M$  և, համաձայն Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի, գոյություն ունի  $x_n$  հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն՝  $x_{n_k} \rightarrow c$ :

Ցույց տանք, որ  $x_n \rightarrow c$ :

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Քանի որ  $x_n$  հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, գոյություն ունի  $N$  թիվ, այնպիսին, որ  $N$ -ից մեծ կամայական  $n$  և  $n_k$  ինդեքսների համար տեղի ունի

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \quad (4.1)$$

անհավասարությունը:

(4.1) անհավասարության մեջ ֆիքսենք  $n$ -ը և անցնենք սահմանի, եթե  $k \rightarrow \infty$ : Կստանանք՝

$$n > N \Rightarrow |x_n - c| \leq \varepsilon :$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

**Օրինակ:**  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \rightarrow +\infty$ :

Իրոք.  $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ , հետևաբար  $x_n$ -ը ֆունդամենտալ չէ: Համաձայն Կոչիի զուգամիտության սկզբունքի, այն տարամետ է: Մյուս կողմից,  $x_n$ -ը աճող է: Ուրեմն, ըստ քերեմ 2.1-ի՝  $x_n \rightarrow +\infty$ :

## §5. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

**1.Կուտակման կետ:** Դիցուք  $X$ -ը կամայական թվային բազմություն է:

**Սահմանում:**  $a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ) կոչվում է  $X$  բազմության կուտակման կետ, եթե  $a$ -ի յուրաքանչյուր շրջակայր պարունակում է  $X$  բազմության անվերջ բվով տարրեր:

Կարելի է տալ կուտակման կետի մեկ այլ սահմանում.  $a$  կետը կոչվում է  $X$  բազմության կուտակման կետ, եթե  $a$  կետի յուրաքանչյուր շրջակայր պարունակում է  $a$ -ից տարրեր գոնի մեկ կետ այդ բազմությունից:

Առաջին հայացքից բվում է, թե այս երկրորդ սահմանման մեջ պահանջն ավելի քոյլ է, քան առաջին սահմանման պահանջը: Բայց դա միայն թվացյալ է: Ապացուցենք, որ երկրորդից բխում է առաջինը (հակառակն ակնհայտ է):

Ապացույցը տանենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք  $a$ -ի որևէ շրջակայր պարունակում է  $X$  բազմության վերջավոր բվով տարրեր՝  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :

Եթե  $a$ -ն վերջավոր է, նշանակենք՝  $\delta = \min_{x_i \neq a} |x_i - a|$ : Այդ դեպքում  $a$  կետի  $(a - \delta, a + \delta)$  շրջակայրը  $X$  բազմությանը պատկանող՝  $a$ -ից տարրեր կետ չի պարունակի, որը հակառակություն է:

Եթե  $a$ -ն անվերջ է, ասենք՝  $a = +\infty$ , կնշանակենք՝  $E = \max_{1 \leq i \leq m} x_i$ : Այդ դեպքում  $(E, \infty)$ -ը  $X$  բազմության ոչ մի տարր չի պարունակի, ինչը կրկին հակառակություն է:

**Լեմմա 5.1:** Եթե  $a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ)  $X$  բազմության կուտակման կետ է, ապա զոյլություն ունի  $x_n \in X$  հաջորդականություն, այնպիսին, որ  $x_n \rightarrow a$  և  $x_n \neq a$ :

► Ապացուցենք վերջավոր  $a$ -ի դեպքում: Յուրաքանչյուր բնական  $n$ -ի համար դիտարկենք  $a$  կետի  $\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$  շրջակայրը: Կուտակման կետի սահմանման համաձայն, զոյլություն ունի  $x_n$  կետ, այնպիսին, որ  $x_n \in X$ ,  $x_n \neq a$ ,  $x_n \in \left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$ , այսինքն՝

$$a - \frac{1}{n} < x_n < a + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots :$$

Հետևաբար՝  $x_n \rightarrow a$  : ■

**2. Ֆունկցիայի սահմանի Կոչիի սահմանումը:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  բազմության վրա, որի համար  $a$ -ն կուտակման կետ է ( $a$ -ն կարող է լինել թե՛ վերջավոր, և թե՛ անվերջ):

### Սահմանում:

1) Դիցուք  $a$ -ն վերջավոր է: Կասեմը, որ  $x \rightarrow a$  ա-ին ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ձգտում է  $A$  վերջավոր սահմանին և կգրենք՝

$$f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow a) \quad կամ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta, \quad x \in X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon :$$

2) Կասեմը, որ  $f(x) \rightarrow A$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) (այսուել  $a = +\infty$ , իսկ  $A$ -ն կրկին վերջավոր է), եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $E$  թիվ, այնպիսին, որ

$$x > E, \quad x \in X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon :$$

Ֆունկցիայի սահմանի Կոչիի սահմանումը ընդհանուր դեպքում (չսուսանացնելով  $a$ -ի և  $A$ -ի վերջավոր կամ անվերջ լինելու դեպքերը) ձևակերպվում է շրջակայթերի լեզվով. կասեմը  $x \rightarrow a$  ա-ին ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ձգտում է  $A$  սահմանին, եթե  $A$ -ի կամայական  $V$  շրջակայթի համար գոյություն ունի  $a$ -ի այնպիսի  $U$  շրջակայթ, որ

$$x \in X \cap U, \quad x \neq a \Rightarrow f(x) \in V :$$

Ելնելով այս վերջին սահմանումից՝ նախորդ սահմանումը կարելի է համարել 3)  $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow +\infty$ ) ; 4)  $f(x) \rightarrow +\infty$  ( $x \rightarrow a$ ) և մնացած (հինգ) դեպքերով, ինչը բողնում ենք ընթերցողին:

Մասնավորաբար, եթե  $X$  բազմությունը համընկնում է  $\mathbb{N}$  բնական թվերի բազմության հետ, 2) սահմանումը կհամընկնի հաջորդականության սահ-

մանի սահմանմանը: Այսինքն՝ ֆունկցիայի սահմանի գաղափարը հաջորդականության սահմանի գաղափարի ընդհանրացումն է: Եվ հաջորդականության սահմանի շատ հատկություններ տարածվում են ֆունկցիայի սահմանի վրա:

**Օրինակ 1:**  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ :

Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ և գտնենք  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$|x - 0| < \delta \Rightarrow |a^x - 1| < \varepsilon: \quad (5.1)$$

Առանց ընդհանրությունը խախտելու ենթադրենք, թե  $a > 1$  և  $\varepsilon < 1$ : Այդ դեպքում (5.1) առնչությունը համարժեք է հետևյալին.

$$|x| < \delta \Rightarrow \log_a(1 - \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon):$$

Քանի որ  $\log_a(1 - \varepsilon) < -\log_a(1 + \varepsilon)$ , բավական է պահանջել, որ տեղի ունենա

$$-\log_a(1 + \varepsilon) < x < \log_a(1 + \varepsilon)$$

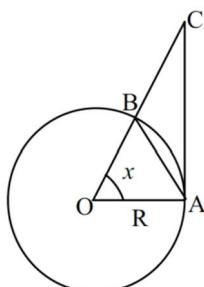
անհավասարությունը:

Այսպիսով, կարող ենք վերցնել՝  $\delta = \log_a(1 + \varepsilon)$ :

**Օրինակ 2:**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ :

Ապացույցը կատարենք երկրաչափական դասողությունների օգնությամբ: Նախ ապացուցենք հետևյալ անհավասարությունը.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right): \quad (5.2)$$



$R$  շառավղով շրջանում դիտարկենք  $x$  ուսղիանային մեծության  $AOB$  սուր անկյունը: Դիցուք՝  $AC \perp OA$ : Ունենք, որ  $AOB$  եռանկյան մակերեսը փոքր է  $AOB$  սեկտորի մակերեսից, ինչն էլ փոքր է  $AOC$  եռանկյան մակերեսից:

Տեղադրելով այդ մակերեսների արժեքները՝ կստանանք

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \lg x$$

անհավասարությունը, որի բոլոր կողմերը բաժանելով  $\frac{1}{2}R^2$ -ու, կստանանք

(5.2)-ը:

Քանի որ (5.2) անհավասարության բոլոր կողմերը դրական են, ապա լրացն հակադարձների համար ճիշտ է,

$$\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$$

անհավասարությունը: Վերջինիս բոլոր կողմերը բազմապատկելով  $-\sin x$ -ով՝ կստանանք

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x$$

անհավասարությունը, որտեղից էլ՝

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \quad \left( 0 < x < \frac{\pi}{2} \right):$$

$$\text{Սակայն } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < x, \text{ ուստի՝}$$

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x:$$

Քանի որ  $\frac{\sin x}{x}$  և  $|x|$  ֆունկցիաները զույգ են, վերջին զնահատականից կստանանք՝

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x| \quad \left( 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \right):$$

Ստացված անհավասարությունն արդեն լուծում է մեր խնդիրը. Կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի համար կը նայենք՝  $\delta = \min \left\{ \frac{\pi}{2}, \varepsilon \right\}$ :

**3. Ֆունկցիայի սահմանի Հայտեի սահմանումը:** Կիցուք  $f(x)$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  բազմության վրա, որի համար  $a$ -ն (վերջավոր կամ անվերջ) կուտակման կետ է:

**Սահմանում:** Կասենք  $x \rightarrow a$ -ին ճգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ճգույն է  $A$  սահմանին, եթե յուրաքանչյուր  $x_n \in X$ ,  $x_n \neq a$  հաջորդականության համար՝

$$x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A :$$

Ապացուցենք, որ Կոշիի և Հայտեի սահմանումները համարժեք են: Սահմանափակվենք այն դեպքով, եթե  $a$ -ն և  $A$ -ն վերջավոր են:

Կոշիի պայմանից բխում է Հայտեի պայմանը: Իրոք,  $f(x)$ -ը բավարարում է Կոշիի պայմանին, նշանակում է, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta, \quad x \in X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon :$$

Այժմ վերցնենք որևէ  $a \neq x_n \in X$ ,  $x_n \rightarrow a$  հաջորդականություն: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $N(\delta)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\delta) \Rightarrow |x_n - a| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon :$$

Իսկ դա նշանակում է, որ  $f(x_n) \rightarrow A$ :

**Հայտեի պայմանից բխում է Կոշիի պայմանը:** Ապացույցը տանենք հակասող ենթադրությամբ: Կոշիի պայմանը չի բավարարվում, նշանակում է, որ մի որևէ  $\varepsilon_0 > 0$  թվի համար ինչպիսի  $\delta > 0$  թիվ էլ վերցնենք, գոյություն կունենա գոնե մեկ  $x_\delta \in X$  կետ, այնպիսին, որ չնայած՝  $0 < |x_\delta - a| < \delta$ , բայց  $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$ :

Վերցնելով  $\delta = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  և համապատասխան կետերը նշանակելով  $x_n$ , կստանանք՝  $a \neq x_n \in X$ ,  $x_n \rightarrow a$ , բայց  $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ : Սա հակասում է Հայտեի  $f(x_n) \rightarrow A$  պայմանին:

**4. Սիակողմանի սահման:** Ենթադրենք  $a$  կետը  $\text{աջից } X$  բազմության կուտակման կետ է, այսինքն՝ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար  $(a, a + \varepsilon)$  միջակայքը պարունակում է  $X$  բազմության անվերջ թվով կետեր:

Այսպիսի  $a$  կետում կարող ենք սահմանել  $f(x)$  ֆունկցիայի աջակողման սահման՝ սահմանի սահմանման մեջ դնելով լրացուցիչ պայման՝  $x > a$ :

Ներկայացնենք, օրինակ, վերջավոր աջակողմյան սահմանի Կոշիի սահմանումը (մնացած դեպքերն առաջարկում ենք ձևակերպել ինքնուրույն):

**Սահմանում:**  $A$  թիվը կոչվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի աջակողմյան սահման՝  $a$  կետում, եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < x - a < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon :$$

Աջակողմյան սահմանը կնշանակենք

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

սիմվոլով:

Եթե  $a$  կետը ձախից կուտակման կետ է, այսինքն՝ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար  $(a - \varepsilon, a)$  միջակայքը պարունակում է  $X$  բազմության անվերջ թվով կետեր, սահմանվում է ձախակողմյան սահման՝ սահմանի սահմանման մեջ լրացուցիչ դնելով  $x < a$  պայմանը: Ձախակողմյան սահմանը կնշանակենք

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

սիմվոլով:

Աջակողմյան և ձախակողմյան սահմանները կոչվում են միակողմանի սահմաններ:

Եթե  $a$ -ն կուտակման կետ է, թե՛ աջից, և թե՛ ձախից, բերված սահմանումներից անմիջապես բխում է հետևյալ պնդումը.

$\text{որպեսզի } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  ( $A$ -ն կարող է լինել ինչպես վերջավոր, այնպես էլ՝ անվերջ), անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$  և  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$ :

**Օրինակ:**  $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$  ֆունկցիան 0 կետում սահման չունի: Իբրև, քանի որ  $2^x \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$  և  $2^x \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty)$ , հետևաբար

$$\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ և } \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0 :$$

**5. Եթի բնդիանուր բանաձևը:** Ազացուցենք, որ

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e :$$

Բավական է ապացուցել, որ

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (1+x)^{1/x} = e, \quad (5.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} (1+x)^{1/x} = e : \quad (5.4)$$

Օգտվենք Հայնեի սահմանումից: Վերցնենք որևէ  $x_k > 0$ ,  $x_k \rightarrow 0$  հաջորդականություն և ցույց տանք, որ

$$(1+x_k)^{1/x_k} \rightarrow e :$$

$$\text{Նշանակենք, } \left[ \frac{1}{x_k} \right] = n_k, \text{ կունենանք՝ } n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1, \text{ որտեղից էլ՝}$$

$$1 + \frac{1}{n_k + 1} < 1 + x_k \leq \frac{1}{n_k} + 1 ;^*$$

Հաշվի առնելով աստիճանային և ցուցային ֆունկցիաների մոնոտոնությունը՝ կստանանք

$$\left( 1 + \frac{1}{n_k + 1} \right)^{n_k} < (1+x_k)^{1/x_k} < \left( 1 + \frac{1}{n_k} \right)^{n_k+1}$$

անհավասարությունը: Քանի որ  $n_k \rightarrow \infty$ , օգտվելով Հայնեի սահմանումից և հաշվի առնելով  $e$  թվի բանաձևը, կստանանք, որ այդ անհավասարության ծայրանդամները ձգտում են  $e$ -ի: Հետևաբար, նրա միջին անդամը նույնական կհամարվի  $e$ -ի: (5.3)-ն ապացուցված է:

\* Կարող ենք համարել՝  $x_k < 1$ , ուստի՝  $n_k \neq 0$ :

(5.4)-ն ապացուցելու համար վերցնենք  $-1 < x_k < 0, x_k \rightarrow 0$  պայմաններին բավարարող որևէ  $x_k$  հաջորդականություն և նշանակենք  $y_k = -x_k$  :

$$\begin{aligned} (1+x_k)^{1/x_k} &= (1-y_k)^{-\frac{1}{y_k}} = \left( \frac{1}{1-y_k} \right)^{1/y_k} = \left( 1 + \frac{y_k}{1-y_k} \right)^{1/y_k} = \\ &= \left( 1 + \frac{y_k}{1-y_k} \right)^{\frac{1-y_k}{y_k}} \left( 1 + \frac{y_k}{1-y_k} \right); \end{aligned}$$

Այսպիսով, հարցը բերվեց նախորդ դեպքին: Երբք.  $z_k := \frac{y_k}{1-y_k} > 0$  և

$$z_k \rightarrow 0, \text{ հետևաբար } (1+z_k)^{1/z_k} (1+z_k) \rightarrow e \cdot 1 = e:$$

### 6. Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիայի պարզագույն հատկությունները:

Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  բազմության վրա, որի համար  $a$ -ն կուտակման կետ է: Եթե  $a$ -ն վերջավոր է, ապա ճիշտ են հետևյալ հատկությունները.

1) Եթե  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  և  $A > p$  ( $A < q$ ), ապա գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow f(x) > p \quad (f(x) < q): \quad (5.5)$$

Իրոք, դիցուք  $0 < \varepsilon < A - p$ : Օգտվենք Կոշիի սահմանումից. գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$0 < |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon,$$

որից էլ բխում է (5.5)-ը:

Մասմակոր դեպք: Եթե  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) > 0$  ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x) < 0$ ), ապա  $a$ -ին բավականակի մոտ ( $a$ -ից տարրեր)  $x$ -երի համար ֆունկցիան նոյնպես դրական է (բացասական է):

2) Եթե  $x \rightarrow a$ -ին ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, ապա  $a$ -ի մի ինչ-որ շրջակայքում  $f(x)$  ֆունկցիան սահմանավակ է:

Այս հատկությունը նույնապես բխում է սահմանի Կոշիի սահմանումից:

Ընթերցողին առաջարկվում է ձևակերպել և ապացուցել բերված հատկությունների անալոգները  $a = \pm\infty$  դեպքերում:

### 7. Թվարանական գործողությունները վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ:

Դիցուք  $f(x)$  և  $g(x)$  ֆունկցիաները որոշված են  $X$  բազմության վրա, որի համար  $a$  -ն (վերջավոր կամ անվերջ) կուտակման կետ է: Ենթադրենք, որ գոյություն ունեն

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Վերջավոր սահմանները: Այդ դեպքում

1) Ֆունկցիաների գումարը  $a$  կետում նույնապես ունի սահման և գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին՝

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

2) Ֆունկցիաների արտադրյալը  $a$  կետում նույնապես ունի սահման և՝

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

3) Եթե  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ , ապա  $\frac{f(x)}{g(x)}$  բանորդը  $a$  կետում նույնապես ունի սահման և՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)};$$

Նկատենք, որ  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  պայմանից հետևում է, որ  $a$ -ից տարբեր և  $a$ -ին բավականաշափ մոտ  $x$ -երի համար՝  $g(x) \neq 0$  (անս' նախորդ կետը):

Օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից՝ հարցը բերվում է հաջորդականությունների համապատասխան հատկություններին:

**8. Սոնուողն ֆունկցիայի սահմանը:** Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  բազմության վրա, որի համար  $a$ -ն կուտակման կետ է: Ենթադրենք  $X$  բազմության բոլոր տարրերը փոքր են  $a$ -ից՝

$$x < a, \quad x \in X :$$

Այդ դեպքում ճիշտ է հետևյալ քննորենը.

**Թեորեմ 5.1:** Եթե  $f(x)$  առող ֆունկցիան սահմանափակ է վերևից, ապա  $x$ -ը  $a$ -ին ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում այն ձգուում է  $+\infty$ :

► Քանի որ  $f(x)$ -ը սահմանափակ է վերևից, նրա ընդունած արժեքների բազմության ճշգրիտ վերին եզրը վերջավոր է: Նշանակենք՝

$$A = \sup_{x \in X} f(x),$$

և ապացուցենք, որ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A :$$

Նախ ունենք, որ

$$f(x) \leq A : \tag{5.6}$$

Այսուհետև, վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: ճշգրիտ վերին եզրի հատկության համաձայն, գոյություն ունի  $x_1 \in X$ , այնպիսին, որ

$$A - \varepsilon < f(x_1) :$$

Ֆունկցիայի աճելու շնորհիվ ունենք՝

$$x_1 < x < a, \quad x \in X \Rightarrow f(x_1) \leq f(x) : \tag{5.7}$$

(5.6) և (5.7) անհավասարություններից կստանանք՝

$$x_1 < x < a, \quad x \in X \Rightarrow A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon ,$$

ինչը նշանակում է, որ  $x$ -ը  $a$ -ին ձգտելիս՝  $f(x)$ -ը ձգուում է  $A$ -ի:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, եթե  $f(x)$  ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ: Վերցնենք կամայական  $E$  թիվ: Գոյություն ունի  $x_1 \in X$ , այնպիսին, որ  $f(x_1) > E$ : Ֆունկցիայի աճելու շնորհիվ կունենանք՝

$$x_1 < x < a, \quad x \in X \Rightarrow f(x) \geq f(x_1) > E ,$$

ինչը նշանակում է, որ  $x$ -ը  $a$ -ին ձգտելիս՝  $f(x)$ -ը ձգտում է  $+\infty$ : ■

Նման ձևով կապացուցվի նաև հետևյալ արդյունքը.

**Թեորեմ 5.1':** Եթե նվազող  $f(x)$  ֆունկցիան սահմանափակ է ներքեցից, ապա  $x$ -ը  $a$ -ին ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ունի վերջավոր սահման, հակառակ դեպքում այն ձգտում է  $-\infty$ :

Այս թեորեմների նմանակները ճիշտ են նաև այն դեպքի համար, եթե  $a$  կոտակման կետը փոքր է  $X$  բազմության տարրերից (ձևակերպել):

**9. Կոշիի գուգամիտուրյան սկզբունքը:** Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  բազմության վրա, որի համար  $a$  կետը (վերջավոր) կոտակման կետ է:

**Թեորեմ 5.2:** Որպեսզի  $x$ -ը  $a$ -ին ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունենա  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} 0 < |x' - a| < \delta \\ 0 < |x - a| < \delta \\ x, x' \in X \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon : \quad (5.8)$$

► Անհրաժեշտուրյունն անմիջապես բխում է սահմանի սահմանումից:

**Բավարարություն:** Օգտվելու ենք ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից: Դիտարկենք  $x_n \in X$ ,  $a \neq x_n \rightarrow a$  պայմաններին բավարարող կամայական  $x_n$  հաջորդականություն: Ունենք, որ կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի (5.8) պայմանին բավարարող  $\delta > 0$  թիվ: Վերջինիս համար գոյություն ունի  $N(\delta)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\delta) \Rightarrow |x_n - a| < \delta :$$

Այդ դեպքում, հաշվի առնելով (5.8)-ը, կունենանք՝

$$\left. \begin{array}{l} n, n' > N(\delta) \Rightarrow 0 < |x_n - a| < \delta \\ 0 < |x_{n'} - a| < \delta \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_{n'})| < \varepsilon :$$

Այսինքն՝  $f(x_n)$  հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է, հետևաբար, Կոշիի գուգամիտության սկզբունքի համաձայն, այն գուգամիտում է  $A$  վերջավոր սահմանին:

Մնում է ապացուել, որ այդ  $A$  թիվը  $x_n$  հաջորդականության ընտրությունից կախված չէ: Ապացուենք հակասող ենթադրությամբ:

Ենթադրենք, թե  $x'_n$  հաջորդականությունը ևս ձգտում է  $a$ -ին և  $f(x'_n) \rightarrow B \neq A$ :

Այդ դեպքում կազմենք  $a$ -ին ձգտող մի նոր հաջորդականություն՝  $x_1, x'_1, x_2, x'_2, \dots, x_n, x'_n, \dots$ : Այս հաջորդականության վրա ֆունկցիայի ընդունած արժեքների հաջորդականությունը կլինի՝

$$f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots,$$

որը սահման չունի: Բայց դա հակասում է արդեն ապացուցված այն փաստին, որ  $a$ -ին ձգտող կամայական  $x_n$  հաջորդականության համար ֆունկցիայի արժեքների  $f(x_n)$  հաջորդականությունը գուգամետ է: ■

$a = \pm\infty$  դեպքում Կոշիի սկզբունքը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

1) Որպեսզի  $x$ -ը  $+\infty$ -ի ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ունենալ վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյոր ̵ > 0 քի համար գոյություն ունենալ  $E$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} x' > E \\ x'' > E \\ x', x'' \in X \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

2) Որպեսզի  $x$ -ը  $-\infty$ -ի ձգտելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ունենալ վերջավոր սահման, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյոր ̵ > 0 քի համար գոյություն ունենալ  $E$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} x' < E \\ x'' < E \\ x', x'' \in X \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

### III ԳԼՈՒԽ

## ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՐՄԿՑԻԱՆԵՐ

### §1. ՖՈՐՄԿՑԻԱՅԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ

**1. Անընդհատության սահմանումը:** Կիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X \subset R$  բազմության վրա և արժեքներ է ընդունում  $R$ -ից՝  $f: X \rightarrow R$ :

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ  $x_0 \in X$  կետում, եթե  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ :

$$\left| x - x_0 \right| < \delta \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : \\ x \in X \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Այն դեպքում, եթե  $x_0 \in X$  կետը  $X$  բազմության կուտակման կետ է, (1.1) պայմանը նշանակում է՝  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ : Այս դեպքում, օգտվելով ֆունկցիայի սահմանի Հայմեի սահմանումից, կստանանք, որ (1.1)-ը համարժեք է հետևյալին. յուրաքանչյուր  $x_n \in X$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  հաջորդականության համար տեղի ունի

$$f(x_n) \rightarrow f(x_0) \quad (1.1')$$

առնչությունը:

Ներկայացված սահմանումներից առաջինը կոչվում է ֆունկցիայի անընդհատության Կոշիի սահմանում, իսկ երկրորդը՝ Հայմեի սահմանում:

Այն մասնավոր դեպքում, եթե  $x_0 \in X$  կետը  $X$  բազմության կուտակման կետ չէ (մեկուսացված կետ է), ինչպիսին էլ որ լինի  $f$  ֆունկցիան, (1.1) պայմանը բավարարվում է: Այսինքն՝ որոշման տիրույթի մեկուսացված կետում բոլոր ֆունկցիաներն անընդհատ են\*:

**Սահմանում:** Եթե  $x_0 \in X$  կետում  $f$  ֆունկցիան անընդհատ չէ, ապա ասում են, որ այն խզվում է  $x_0$  կետում, իսկ  $x_0$ -ն անվանում են  $f$  ֆունկցիայի խզման կետ:

---

\* Հենց այս նկատառությունը էլ ֆունկցիայի անընդհատությունն այսուհետ հետազոտելու ենք միայն նրա որոշման տիրույթի կուտակման կետերում:

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ  $X$  բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է  $X$  բազմության բոլոր կետերում:  $X$  բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների դասը նշանակվում է՝  $C(X)$ :

## 2. Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ:

**Թեորեմ 1.1:** Դիցուք  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները որոշված են  $X$  բազմության վրա և  $x_0 \in X$  կետը  $X$  բազմության կոտակման կետ է: Եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն անընդհատ են  $x_0$  կետում, ապա այդ կետում անընդհատ են նաև  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$  ֆունկցիաները, վերջին դեսպում ենթադրելով, որ

$$g(x_0) \neq 0:$$

Այս պնդումն անմիջապես բխում է վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ թվաբանական գործողությունների վերաբերյալ թեորեմից:

### Օրինակներ:

1<sup>0</sup>.  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  բազմանդամն անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա:

Իրոք,  $a_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) գործակիցները՝ որպես հաստատուն ֆունկցիաներ, անընդհատ են: Քանի որ  $f(x) = x$  ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է, ուստի յուրաքանչյուր

$$a_k x^k = a_k \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

միանդամ և անընդհատ է: Իսկ  $P(x)$  բազմանդամը հանդիսանում է այդպիսի միանդամների գումար, հետևաբար, այն նույնպես անընդհատ է:

2<sup>0</sup>.  $R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$  ռացիոնալ ֆունկցիան անընդհատ է թվային առանցքի բոլոր այն կետերում, որտեղ հայտարարը 0 չէ:

3<sup>0</sup>.  $f(x) = a^x$  ցուցային ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, քանի որ  $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1) \rightarrow 0$ , եթե  $x \rightarrow x_0$ :

$4^0.$   $f(x) = \sin x$  ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա, քանի որ  $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \rightarrow 0$ , եթե  $x \rightarrow x_0$ :

### 3. Միակողմանի անընդհատություն:

**Սահմանում:** Դիցուք  $x_0$ -ն  $X$  բազմության կոտակման կետ է աջից ( $\text{ձախից}$ ) և  $x_0 \in X$ :  $X$  բազմության վրա որոշված  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում կոչվում է անընդհատ աջից ( $\text{ձախից}$ ), եթե տեղի ունի

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0) \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0) \right)$$

պայմանը:

Եթե ֆունկցիայի որոշման տիրույթը միջակայք է, ապա միջակայքի ձախ (աջ) ծայրակետում կարող ենք խստել միայն աջից ( $\text{ձախից}$ ) անընդհատության մասին:

**Թեորեմ 1.2:** Որպեսզի միջակայքի ներքին կետում ֆունկցիան լինի անընդհատ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում լինի անընդհատ թե՛ աջից, և թե՛ ձախից:

Այս թեորեմն անմիջապես հետևում է ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ նախորդ գլխի 4-րդ կետում ձևակերպված պնդումից:

**Սահմանում:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  բազմության վրա և  $x_0$ -ն  $X$ -ի կոտակման կետ է աջից ( $\text{ձախից}$ ):

ա) Եթե  $x_0 \in X^*$  և գոյություն ունի

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \right) \tag{1.2}$$

վերջավոր միակողմանի սահմանը, որը հավասար չէ  $f(x_0)$  թվին, ապա կասենք, որ  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում աջից ( $\text{ձախից}$ ) ունի առաջին խզում:

\* Այն դեպքում, եթե  $f$ -ը  $x_0$  կետում որոշված չէ, բայց գոյություն ունի (1.2) վերջավոր միակողմանի սահմանը, ընդունված է ասել, որ ֆունկցիան  $x_0$  կետում աջից ( $\text{ձախից}$ ) ունի վերացնելի խզում: Այս անվանումը պայմանավորված է նրանով, որ  $x_0$  կետում  $f$ -ը լրացուցիչ կարելի է որոշել այնպես, որ այն այդ կետում դառնա անընդհատ աջից ( $\text{ձախից}$ ):

թ) Եթե (1.2) սահմանը գոյություն չունի կամ անվերջ է, կասենք, որ  $f$  ֆունկցիան աջից (ձախից) ունի երկրորդ սեռի խզում (անկախ այն բանից,  $x_0$ -ն պատկանում է  $X$ -ին, թե ոչ):

ա) կամ թ) պայմանին բավարարող կետերը կոչվում են  $f$  ֆունկցիայի խզման կետեր (*համապատասխանաբար՝ առաջին կամ երկրորդ սեռի*):

**Օրինակներ:**

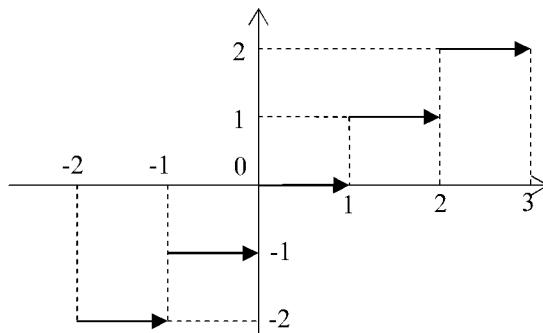
1<sup>0</sup>. Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան (կարդում ենք՝ սիգնում իրա)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Այն 0 կետում թե՛ աջից և թե՛ ձախից ունի առաջին սեռի խզում: Իսկապես,  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1, \quad f(0) = 0:$$

2<sup>0</sup>.  $f(x) = [x]$  ( $[x]$ -ը  $x$  թվի ամբողջ մասի ընդունված նշանակումն է)



ֆունկցիան 0 կետում (նաև՝ կամայական ամբողջ կետում)

աջից անընդիւստ է, իսկ ձախից ունի առաջին սեռի խզում՝

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 = f(0), \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1 \neq f(0):$$

$3^0.$   $f(x) = \frac{1}{x}$  ֆունկցիան 0 կետում քե' աջից և քե' ձախից ունի երկրորդ սեռի խզում: Իրոք.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty:$

**4. Սոնստոն ֆունկցիայի խզումները և անընդհատությունը:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան աճող է (լայն իմաստով)  $X$  միջակայքում\*,  $x_0 \in X$  և  $x_0$ -ն  $X$  ի ձախ ծայրակետ չէ: Սոնստոն ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թերուեմի համաձայն, գոյություն ունի

$$f(x_0-) := \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$$

վերջավոր սահմանը, ընդ որում,  $f(x_0-) \leq f(x_0)$ : Եթե այդ սահմանը հավասար է ֆունկցիայի արժեքին  $x_0$  կետում, ապա ֆունկցիան այդ կետում կլինի ձախից անընդհատ: Իսկ եթե  $f(x_0-) < f(x_0)$ , ապա ֆունկցիան  $x_0$  կետում ձախից կունենա առաջին սեռի խզում:

Նման դատողություններ կարող ենք կատարել նաև այն դեպքում, եթք  $x_0 \in X$  կետը  $X$ -ի աջ ծայրակետ չէ և  $x \rightarrow x_0+$ :

Այսպիսով, մոնուոն ֆունկցիան իր որոշման միջակայքին պատկանող կետերում կամ անընդհատ է (աջից կամ ձախից), կամ ոճի առաջին սեռի խզում (միջակայքին չպատկանող ծայրակետում կարող է ունենալ երկրորդ սեռի խզում):

Այժմ ձևակերպենք մոնուոն ֆունկցիայի անընդհատության հետևյալ հայտանիշը:

**Թեորեմ 1.3:** Եթե  $f$  ֆունկցիան մոնուոն է  $X$  միջակայքում և նրա ընդունած արժեքների  $Y$  բազմությունը նոյնական միջակայք է, ապա  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $X$  միջակայքում:

► Դիտարկենք միայն աճող ֆունկցիայի դեպքը և ապացուենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, թե մի ինչ-ոք  $x_0 \in X$  կետում  $f$  ֆունկցիան, ասենք քե' ձախից անընդհատ չէ:

\*  $x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ :

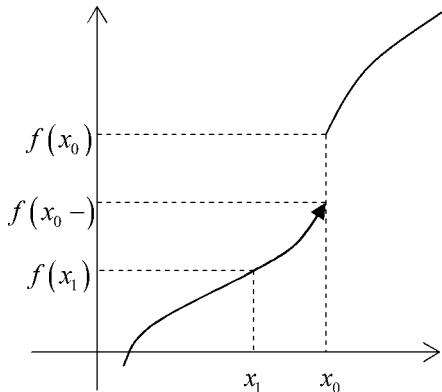
Այդ դեպքում  $f(x_0-) < f(x_0)$ : Վերցնելով  $X$  միջակայքի  $x_1 < x_0$  կետ՝ կստանանք

$$f(x_1) \leq f(x_0-) < f(x_0)$$

անհավասարությունները, ինչը հակառակ է:

Իսկապես.  $(f(x_0-), f(x_0))$  միջակայքի կետերը, ընկած լինելով  $Y$  բազմությանը պատկանող  $f(x_1)$ -ի և  $f(x_0)$ -ի միջև, չեն պատկանում  $Y$  բազմությանը: Իսկ դա նշանակում է, որ  $Y$ -ը միջակայք չէ:

Նման ձևով, հակառական ենք համգում նաև  $x_1 > x_0$  դեպքում: ■



### Օրինակներ:

1<sup>0</sup>. Յույց տանք, որ  $f(x) = \log_a x$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ) ֆունկցիան անընդհատ է  $(0, \infty)$  միջակայքում:

Որոշակիության համար դիտարկենք  $a > 1$  դեպքը: Այս դեպքում  $\log_a x$  ֆունկցիան խիստ աճող է և նրա արժեքների բազմությունը  $(-\infty, \infty)$  միջակայքն է, որովհետև կամայական  $y_0 \in (-\infty, \infty)$  արժեքը ֆունկցիան ընդունում է  $x_0 = a^{y_0}$  կետում:

2<sup>0</sup>. Ապացուցենք, որ  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha$ -ն ամբողջ թիվ չէ) ֆունկցիան անընդհատ է  $(0, \infty)$  միջակայքում:

$\alpha > 0$  դեպքում ֆունկցիան աճող է, իսկ  $\alpha < 0$  դեպքում՝ նվազող: Մյուս կողմից, ֆունկցիայի արժեքների բազմությունը միջակայք  $(0, \infty)$ -ը: Իրոք՝ կամայական  $y_0 \in (0, \infty)$  արժեքը ֆունկցիան ընդունում է  $x_0 = y_0^{1/\alpha}$  կետում:

### 5. Բարդ ֆունկիայի անընդհատությունը:

**Սահմանում:** Դիցուք  $x = \varphi(t)$  ֆունկցիան որոշված է  $T$  միջակայքում և արժեքները  $t$  ընդունում  $X$  միջակայքից, իսկ  $y = f(x)$  ֆունկցիան որոշված

$t \in X$  միջակայքում: Այդ դեպքում  $g(t) = f(\varphi(t))$  ֆունկցիան, որը որոշված  $t \in T$  միջակայքում, այն կոչվում է բարդ ֆունկցիա կամ սուպերվոլոգիա:

**Թեորեմ 1.4:** Եթե  $\varphi(t)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $t_0 \in T$  կետում, իսկ  $f(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0 = \varphi(t_0)$  պատկեր-կետում, ապա  $g(t) = f(\varphi(t))$  բարդ ֆունկցիան անընդհատ է  $t_0$  կետում:

► Օգտվենք անընդհատության սահմանման  $\varepsilon - \delta$  լեզվից:  $f(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0$  կետում, նշանակում է՝ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\eta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$x \in X, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : \quad (1.3)$$

Քանի որ  $\varphi(t)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $t_0$  կետում, ապա այդ  $\eta$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

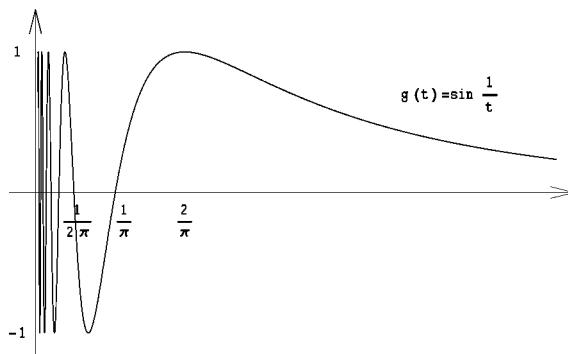
$$t \in T, |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \eta : \quad (1.4)$$

(1.3) և (1.4) առնչություններից կստանանք՝

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \eta \Rightarrow |g(t) - g(t_0)| = |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon : \blacksquare$$

**Օրինակներ:**

1<sup>0</sup>.  $g(t) = \sin \frac{1}{t}$  ֆունկցիան (այս դեպքում  $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ ,  $f(x) = \sin x$ ) անընդհատ է թվային առանցքի բոլոր կետերում, բացի  $t = 0$  կետից, իսկ  $t = 0$  կետում թե՛ աջից, և թե՛ ձախից  $g(t)$  ֆունկցիան ունի երկրորդ սեղի խզում:



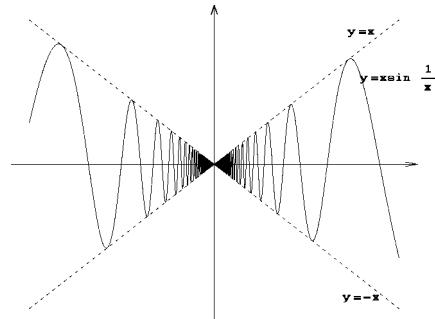
$t$ -ն 0-ի ձգտելիս՝  $g(t)$  ֆունկցիան սահման չունի, որովհետև  $t_k = \frac{1}{\pi k}$  հաջորդականության վրայով  $g(t)$  ֆունկցիան ձգտում է 0-ի, իսկ  $t'_k = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$  հաջորդականության վրայով՝ 1-ի:

$$2^0. \quad h(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad h(0) = 0$$

Ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ թվային առանցքի վրա: Իրոք՝ ֆունկցիան անընդհատ է 0 կետում, քանի որ  $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$

հայտնի զնահատականից հետևում է՝  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$ : Իսկ

0-ից տարբեր կետերում  $h$ -ը անընդհատ է՝ որպես երկու անընդհատ ֆունկցիաների արտադրյալ:



**6. Երեք հիմնական սահմաններ:** Ազացուցենք հետևյալ սահմանային առնչությունները.

$$\text{ա) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \text{ բ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad q)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha :^*$$

Ուստինք, որ

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a (1+x)^{1/x}:$$

Նշանակենք՝  $\varphi(x) = (1+x)^{1/x}$ ,  $\varphi(0) = e$ : Քանի որ  $\varphi(x) \rightarrow e$  ( $x \rightarrow 0$ ),  $\varphi$  ֆունկցիան անընդհատ է 0 կետում: Մյուս կողմից,  $\log_a y$  ֆունկցիան

\* ա) հաճախ հանդիպում է  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  տեսքով, իսկ բ) հանդիպում է՝  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  տեսքով: բ)

առնչության կարևոր հետևանքներից է նաև  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$  սահմանը:

անընդհատ է՝  $y = e$  կետում: Ոստի, բարդ ֆունկցիայի անընդհատության վերաբերյալ քեզրեմի համաձայն, տեղի ունի ա) առնչությունը:

թ)-ն ապացուցելու համար նշանակենք՝  $a^x - 1 = y$ : Կունենամք՝  $x = \log_a(1+y)$ : Քանի որ  $a^x$  ֆունկցիան 0 կետում անընդհատ է, ոստի՝  $x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0$ : Հետևաբար՝

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y}{\log_a(1+y)} = \frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}} \rightarrow \frac{1}{\log_a e} = \ln a \quad (x \rightarrow 0):$$

զ)-ն ապացուցելու համար նշանակենք՝  $(1+x)^\alpha - 1 = y$ : Կունենամք՝  $(1+x)^\alpha = 1+y$ , որտեղից էլ՝  $\alpha \ln(1+x) = \ln(1+y)$ :

Քանի որ  $(1+x)^\alpha$  ֆունկցիան  $x=0$  կետում անընդհատ է, ոստի  $y = (1+x)^\alpha - 1 \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow 0$ ): Հետևաբար՝

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1+y)} \cdot \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow 0):$$

## §2. ԱՆՁՆԴԱՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### 1. Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները:

**Թեորեմ 2.1 (Բոլցանո-Կոշիի I թեորեմը):** Եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ  $t \in [a, b]$  հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունած է տարրեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ  $f(c) = 0$ :

►(**Առաջին ապացույց**) Որոշակիության համար ենթադրենք, թե  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ : Թեորեմն ապացուցենք  $[a, b]$  հատվածը հաջորդաբար կիսելու մեթոդով:

$$\text{Դիտարկենք } [a, b] \text{ հատվածի } x_0 = \frac{a+b}{2} \text{ միջնակետը: Եթե } f(x_0) = 0,$$

ապա որպես  $c$  կվերցնենք հենց այդ  $x_0$  կետը և թերեմի ապացույցը կավարտվի: Եթե  $f(x_0) \neq 0$ , ապա  $[a_1, b_1]$ -ով կնշանակենք  $[a, b]$  հատվածի այն կեսը, որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է տարրեր նշանի արժեքներ: Այսինքն՝ եթե  $f(x_0) < 0$ , որպես  $[a_1, b_1]$  վերցնում ենք  $[x_0, b]$ -ն, իսկ եթե  $f(x_0) > 0$ , ապա՝  $[a, x_0]$ -ն: Երկու դեպքում էլ՝  $f(a_1) < 0$ ,  $f(b_1) > 0$ :

Երկրորդ քայլում կիսենք  $[a_1, b_1]$  հատվածը: Կրկին՝ կամ  $f(x)$  ֆունկցիան  $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$  միջնակետում դառնում է 0 և այս դեպքում թերեմի ապացույցն ավարտվում է, կամ՝  $f(x_1) \neq 0$  և այս դեպքում  $[a_2, b_2]$ -ով նշանակում ենք  $[a_1, b_1]$  հատվածի այն կեսը, որի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է տարրեր նշանի արժեքներ՝  $f(a_2) < 0$ ,  $f(b_2) > 0$ :

Չարունակելով այս պրոցեսը՝ կամ վերջավոր քվով քայլերից հետո առաջացած հատվածի միջնակետում ֆունկցիան կընդունի 0 արժեքը և թերեմի ապացույցը կավարտվի, կամ էլ պրոցեսը կշարունակվի անվերջ և կստանանք  $[a_n, b_n]$ ,  $n=1,2,\dots$  ներդրված հատվածները, այնպիսիք, որ

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0: \tag{2.1}$$

Քանի որ  $[a_n, b_n]$  հատվածի երկարությունը հավասար է

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0,$$

ուստի, համաձայն ներդրված հատվածների լեմմայի, կոնհենանք՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c:$$

Քանի որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ  $[a, b]$  հատվածում, հետևաբար և՝  $c \in [a, b]$  կետում, ապա, հաշվի առնելով (2.1)-ը, կստանանք՝

$$f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \leq 0; \quad f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) \geq 0:$$

Այս երկու անհավասարություններից հետևում է, որ  $f(c) = 0$ : Թեորեմն ապացուցված է: ■

► (**Երկրորդ ապացույց**) Կրկին համարենք, որ  $f(a) < 0$  և  $f(b) > 0$ : Նշանակենք  $E$ -ով  $[a, b]$  հատվածի այն  $x$  կետերի բազմությունը, որոնց համար տեղի ունի  $f(x) < 0$  պայմանը: Նկատենք, որ մասնավորաբար՝  $a \in E$  և  $b \notin E$ : Նշանակենք՝  $c = \sup E$  և ապացուենք, որ  $f(c) = 0$ :

Քանի որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, ապա այն այդ հատվածի բոլոր կետերում ունի վերջավոր սահման: Հետևաբար, վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների առաջին հատկության համաձայն, եթե որևէ կետում  $f(x)$  ֆունկցիան դրական է (բացասական է), ապա այդ կետի մի ինչ-որ շրջակայքում ֆունկցիան կպահպանի իր նշանը:

Ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն,  $c$ -ից աջ գտնվող  $E$  բազմության կետերը չկան, ինչի պատճառով էլ  $f(c)$ -ն բացասական լինել չի կարող: Մյուս կողմից,  $c$  կետից ձախ  $c$ -ին կամայապես մոտ կետեր կան  $E$  բազմությունից, ուստի  $f(c)$ -ն դրական լինել չի կարող: Այսպիսով՝  $f(c) = 0$ : ■

**Թեորեմ 2.2 (Բոլցան-Կոշիի Առողջության Ապացույց):** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և այդ հատվածի ծայրակետերում ընդունում է տուրբեր արժեքներ՝  $f(a) \neq f(b)$ : Այդ դեպքում,  $f(a)$  և  $f(b)$  թվերի միջև ընկած յուրաքանչյուր  $C$  բվի համար գոյություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ  $f(c) = C$ :

► Ենթադրենք՝  $f(a) < C < f(b)$ : Դիտարկենք

$$\varphi(x) = f(x) - C$$

օժանդակ ֆունկցիան: Այն անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և  $\varphi(a) < 0$ ,  $\varphi(b) > 0$ :

Բոլցան - Կոշիի առաջին թեորեմի համաձայն, գոյություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ  $\varphi(c) = 0$ , այսինքն՝  $f(c) = C$ : ■

**Հետևանք:** Եթե հաստատունից տարրեր  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $X$  միջակայրում, ապա այդ միջակայրի վրա նրա ընդունած արժեքների  $f(X)$  բազմությունը նույնպես միջակայր է:

►  $X$  միջակայրի վրա  $f$  ֆունկցիայի ընդունած արժեքների  $f(X)$  բազմությունը նշանակենք  $Y$ -ով:

Որպեսզի ցոյց տանք, որ  $Y$ -ը միջակայր է, անհրաժեշտ է ապացուցել, որ  $Y$ -ին պատկանող կամայական  $y_1$  և  $y_2$  իրարից տարրեր թվերի միջև ընկած յուրաքանչյուր  $C$  թիվ նույնպես  $Y$ -ից է, այսինքն՝ ֆունկցիայի արժեքը է:

Զանի որ  $y_1$ -ը և  $y_2$ -ը  $f$  ֆունկցիայի արժեքներ են, ուստի գոյություն ունեն  $x_1, x_2 \in X$  այնպիսիք, որ  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ : Ենթադրենք, թե  $x_1 < x_2$  և  $[x_1, x_2]$  հատվածի վրա կիրառենք Բոլցանո - Կոշիի երկրորդ թեորեմը. գոյություն ունի  $c \in (x_1, x_2)$  այնպիսին, որ  $f(c) = C$ : Այսպիսում,  $C$ -ն հանդիսանում է  $f$  ֆունկցիայի արժեքը: ■

**2. Հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը և անընդհատությունը:** Դիցուք  $f$ -ը խիստ աճող (նվազող) և անընդհատ ֆունկցիա է  $X$  միջակայրում: Նրա ընդունած արժեքների բազմությունը, որը ևս միջակայր է, նշանակենք  $Y$ -ով: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $f$ -ի հակադարձ ֆունկցիան, որը որոշված է  $Y$  միջակայրում:

Իրոք,  $Y$  միջակայրի յուրաքանչյուր  $y$  կետին համապատասխանության մեջ դնելով նրա միակ  $x$  նախապատկերը (այն  $x$ -ը\*, որի համար՝  $f(x) = y$ ), կստանանք  $x = g(y)$  հակադարձ ֆունկցիան:

Ֆունկցիայի մոնոտոնության սահմանումից անմիջապես հետևում է, որ  $X$ -ի վրա որոշված  $f$  խիստ աճող (նվազող) ֆունկցիայի հակադարձ  $g$  ֆունկցիան խիստ աճող է (նվազող է)  $Y$  միջակայրում:

Ապացուցենք, որ  $g$ -ն նաև անընդհատ է  $Y$  միջակայրում: Դրա համար

\* Այդ  $x$ -ը միակն է, որովհետև  $f$  ֆունկցիան խիստ աճող է:

բավական է նկատել, որ նրա ընդունած արժեքների քազմությունը միջայք է ( $X$ -ը), այնուհետև՝ կիրառել մոնուսոն ֆունկցիայի անընդհատությանը վերաբերող թերեմ 1.3-ը:

### 3. Վայերշտրասի թեորեմները:

**Թեորեմ 2.3 (Վայերշտրասի I թեորեմը):** *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան սահմանափակ է:*

► Ենթադրենք, որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և ապացուցենք, որ այն սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունեն  $m$  և  $M$  թվեր, այնպիսիք, որ

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]:$$

Ենթադրենք հակառակը՝  $f(x)$  ֆունկցիան սահմանափակ չէ, օրինակ՝ վերևից: Դա նշանակում է, որ յուրաքանչյուր  $E$  թվի համար գոյություն ունի  $x_E \in [a, b]$  այնպիսին, որ  $f(x_E) > E$ : Վերցնելով  $E = n$  բնական թիվը և, համապատասխան կետը նշանակելով  $x_n$ , կստանանք՝

$$f(x_n) > n, \quad n = 1, 2, \dots: \tag{2.2}$$

Քանի որ

$$a \leq x_n \leq b,$$

ապա, Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի  $x_n$  հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b]:$$

Ֆունկցիայի անընդհատության Հայնեի սահմանման համաձայն՝

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(c): \tag{2.3}$$

Բայց մյուս կողմից, (2.2)-ից հետևում է, որ  $f(x_{n_k}) \rightarrow \infty$ , ինչը հակասում է (2.3)-ին: Այսպիսով, թեորեմն ապացուցված է: ■

Ելնելով այս թեորեմից՝  $[a, b]$  հատվածում անընդհատ  $f$  ֆունկցիան սահմանափակ է, հետևաբար, այն ունի վերջավոր ճշգրիտ եզրեր<sup>\*</sup>.

\* Ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրեր են անվանում նրա արժեքների քազմության ճշգրիտ եզրերը:

$$M = \sup_{[a,b]} f(x), \quad m = \inf_{[a,b]} f(x);$$

Հարց է ծագում. արդյոք այդ բվերը կհանդիսանա՞ն ֆունկցիայի արժեքներ, թե ոչ: Կամ, որ նույնն է, արդյոք  $f(x)$  ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմության մեջ գոյություն ունե՞ն մեծագույն և փոքրագույն տարրեր՝  $\max_{[a,b]} f(x)$  և  $\min_{[a,b]} f(x)$ :

Այդ հարցին պատասխանում է հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 2.4 (Վայերշտրասի II թեորեմը):** Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան ունի մեծագույն և փոքրագույն արժեքներ:

► Ապացուցենք մեծագույնի գոյությունը՝ հակասող ենթադրության մեթոդով: Ենթադրենք, թե  $M = \sup_{[a,b]} f(x)$  քիչը ֆունկցիայի արժեք չէ և դիտարկենք

$$\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

օժանդակ ֆունկցիան: Քանի որ  $M - f(x)$  ֆունկցիայի արժեք չէ, ուստի  $M - f(x) \neq 0$ ,  $x \in [a,b]$ : Հետևաբար,  $\varphi(x)$  ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է  $[a,b]$  հատվածում: Նախորդ թեորեմի համաձայն,  $\varphi(x)$ -ը սահմանափակ է, այսինքն՝ գոյություն ունի  $\mu > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\frac{1}{M - f(x)} \leq \mu, \quad x \in [a,b]:$$

Այստեղից կստանանք՝

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}, \quad x \in [a,b],$$

ինչը հակասում է ճշգրիտ վերին եզրի սահմանմանը: Թեորեմն ապացուված է: ■

► (**Երկրորդ ապացույց**) Ճշգրիտ վերին եզրի սահմանման համաձայն, յուրաքանչյուր  $n$  քնական թվի համար գոյություն ունի  $x_n \in [a,b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (2.4)$$

Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն,  $x_n$  հաջորդականությունը պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k} \rightarrow c \in [a, b] :$$

(2.4) անհավասարությունից հետևում է, որ

$$f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

իսկ  $c$  կետում ֆունկցիայի անընդհատությունից հետևում է՝

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(c) :$$

Այժմ, (2.4) անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, կստանանք՝

$$f(c) \geq M :$$

Սակայն  $f(c) = M$ -ից մեծ լինել չի կարող, հետևաբար՝  $f(c) = M$ ։ Այսինքն՝ ֆունկցիայի ճշգրիտ վերին եզրը հանդիսանում է ֆունկցիայի արժեքը: ■

**Սահմանում:** Հատկածում անընդհատ ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարրերությունը կոչվում է ֆունկցիայի տաստանում այդ հատկածի վրա և նշանակվում է առառողջ օր =  $M - m$ ։

Եթե  $f(x)$  ֆունկցիան (պարտադիր չէ՝ անընդհատ) սահմանափակ է  $X$  բազմության վրա, ապա նրա տաստանումը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝

$$\omega = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x) :$$

Ընթերցողին առաջարկում ենք ապացուցել, որ

$$\omega = \sup_{x', x'' \in X} [f(x'') - f(x')] :$$

#### 4. Հավասարաչափ անընդհատություն:

**Սահմանում:**  $X$  բազմության վրա որոշված  $f$  ֆունկցիան կոչվում է հավասարաչափ անընդհատ  $X$ -ի վրա, եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  բիլի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  բիլ, այնպիսին, որ  $|x'' - x'| < \delta$  պայմանին

բավարարող կամայական  $x', x'' \in X$  կետերի համար տեղի ունի

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

անհավասարությունը:

**Թեորեմ 2.5:**  $X$  բազմության վրա հավասարաչափ անընդհատ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է այդ բազմության վրա:

► Վերցնենք կամայական  $x_0 \in X$  կետ և ցույց տանք, որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է այդ կետում:

Իրոք, հավասարաչափ անընդհատության սահմանման մեջ վերցնելով  $x' = x_0$ ,  $x'' = x$ , կստանանք, որ  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում բավարարում է անընդհատության պայմանին ( $\varepsilon - \delta$  լեզվով): ■

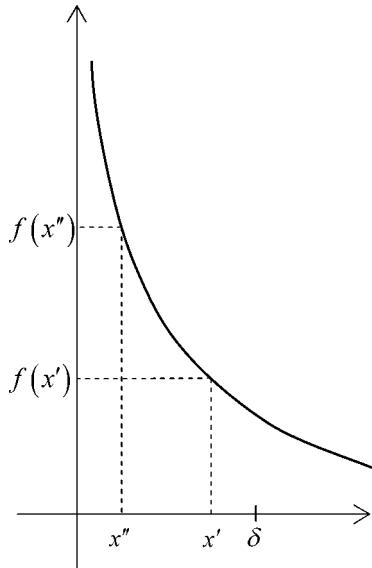
Այս թեորեմի հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ, այսինքն՝ ֆունկցիան կարող է լինել անընդհատ, բայց՝ ոչ հավասարաչափ:

**Օրինակներ:**

1<sup>o</sup>.  $(0,1)$  միջակայքում դիտարկենք  $f(x) = \frac{1}{x}$  անընդհատ ֆունկցիան: Ցույց տանք, որ  $f$ -ը հավասարաչափ անընդհատ չէ այդ միջակայքում:

Դրա համար բավական է նկատել, որ, օրինակ,  $\varepsilon_0 = 1$  թվի համար հավասարաչափ անընդհատության  $\delta$  գոյություն չունի: Այսինքն՝ ինչպիսի  $\delta > 0$  թիվ էլ որ վերցնենք,  $(0,1)$  միջակայքում գոյություն կունենան ( $\delta$ -ից կախված)  $x'$  և  $x''$  կետեր այնպիսիք, որ չնայած՝

$$|x'' - x'| < \delta, \text{ բայց } |f(x'') - f(x')| \geq 1:$$



Իսկապես, որպես  $x'$  կարելի է վերցնել  $(0, \delta)$  միջակայքի կամայական կետ, իսկ  $x''$ -ն ընտրել այդ նույն  $(0, \delta)$ -ից, այնպես (0-ին բավականաչափ մոտ), որ տեղի ունենա  $f(x'') \geq 1 + f(x')$  պայմանը:

$$2^0. \quad f(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{ֆունկցիան նույնպես անընդհատ է } (0,1) \text{ միջակայքում, բայց հավասարաչափ անընդհատ չէ: Այդտեղ:}$$

Կրկին ցույց տանք, որ  $\varepsilon_0 = 1$  թվի համար  $\delta$  գոյություն չունի: Դրա համար վերցնենք  $(0, \delta)$  միջակայքը և այդ միջակայքում  $x'$  և  $x''$  կետերն ընտրենք այնպես, որ  $f(x') = -1$ ,  $f(x'') = 1$ : Այդ դեպքում կունենանք՝  $|x'' - x'| < \delta$ , բայց  $|f(x'') - f(x')| = 2$ :

**Թեորեմ 2.6 (Կանոնի թեորեմ):** *Հատվածում անընդհատ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է:*

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք, որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, բայց՝ ոչ հավասարաչափ: Դա նշանակում է, որ մի որևէ  $\varepsilon_0 > 0$  թվի համար հավասարաչափ անընդհատության  $\delta$  գոյություն չունի, այսինքն՝ ինչպիսի  $\delta > 0$  թիվ էլ վերցնենք, նրան համապատասխան գոյություն կունենան ( $\delta$ -ից կախված)  $x'_\delta$  և  $x''_\delta$  կետեր այնպիսիք, որ  $|x''_\delta - x'_\delta| < \delta$ , բայց՝

$$|f(x''_\delta) - f(x'_\delta)| \geq \varepsilon_0:$$

Վերցնելով  $\delta = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  և համապատասխան  $x'_n$  և  $x''_n$  կետերը համապատասխանաբար նշանակելով  $x'_n$  և  $x''_n$ -ի կունենանք

$$|x''_n - x'_n| < \frac{1}{n}, |f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (2.5)$$

անհավասարությունները:

Քանի որ  $x'_n \in [a, b]$ , ապա, Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի  $x'_n$ -ի զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x'_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]:$$

Դիտարկենք նույն՝  $x'_{n_k}$  ինդեքսներով մյուս՝  $x''_{n_k}$  հաջորդականությունը:  
Չանչի որ

$$x''_{n_k} - x_0 = (x'_{n_k} - x_0) + (x''_{n_k} - x'_{n_k}) \text{ և } |x''_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0,$$

ուստի  $x''_{n_k}$ -ը ևս կձգտի  $x_0$  սահմանին:

Չանչի որ  $x_0$  կետում ֆունկցիան անընդիւստ էր, ուստի՝

$$f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0), \quad f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0),$$

հետևաբար՝

$$f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k}) \rightarrow 0 :$$

Բայց վերջինս հակասում է (2.5) պայմանից թիսող  $|f(x''_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0$   
անհավասարությանը: ■

Այժմ ձևակերպենք Կամտորի թեորեմի՝ հետագայում կարևոր դեր ունե-  
ցող մի հետևանք: Այդ նպատակով նախ տանը մի քանի սահմանումներ.

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  վերջավոր բազմությունը կանվանենք  $[a, b]$  հաս-  
պածի տրոհում, եթե  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ :

Նշված  $x_0, x_1, \dots, x_n$  կետերը կոչվում են տրոհման կետեր, իսկ  
 $[x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, \dots, n-1$  հատվածները՝ տրոհման հատվածներ:

$\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$  թիվը կոչվում է տրոհման տրամագիծ:

**Հետևանք:** Եթե  $f$  ֆունկցիան անընդիւստ է  $[a, b]$  հասպածում, ապա  
յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ այնպիսին, որ  
 $[a, b]$  հատվածի  $\lambda$  տրամագծով կամայական տրոհման համար տեղի ունի

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(f) < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \tag{2.6}$$

պայմանը, որտեղ  $\omega_i(f)$ -ը  $f$  ֆունկցիայի տատանումն է տրոհման  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածի վրա:

► Նիցոք  $\varepsilon$ -ը կամայական դրական թիվ է: Համաձայն Կանոնի թեորեմի,  $f$ -ը հավասարաչափ անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, ուստի տրված  $\varepsilon$ -ի համար գոյություն ունի հավասարաչափ անընդհատության  $\delta$ : Ցույց տանք, որ հենց այդ  $\delta$ -ն բավարարում է (2.6) պայմանին:

Վերցնենք  $[a, b]$  հատվածի  $\delta$ -ից փոքր տրամագծով կամայական տրիհում՝

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; x_{i+1} - x_i < \delta, i = 0, 1, \dots, n-1;$$

Քանի որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ  $[a, b]$  հատվածի վրա, ապա այն անընդհատ կլինի նաև  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  հատվածների վրա: Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն,  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածի վրա այն կընդունի իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները, ասենք թե,  $x'_i$  և  $x''_i$  կետերում: Այդ դեպքում,  $\delta$ -ի ընտրության համաձայն, կունենանք՝

$$\omega_i(f) = f(x'_i) - f(x''_i) < \varepsilon, i = 0, 1, \dots, n-1,$$

ինչը և պետք էր ապացուցել: ■

### §3. ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՍՍԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

#### 1. Բորելի լեմման:

**Սահմանում:** Կասենք, որ  $\{\Delta_\alpha\}$  բաց միջակայքերի ընտանիքը\* հանդսանում է  $X$  բազմության ծածկույթ ( $\Delta_\alpha$ ՝ ծածկում է  $X$  բազմությունը), եթե  $X$ -ի յուրաքանչյուր կետ պատկանում է այդ ընտանիքի անդամներից գոնեմեկին:

**Օրինակ:** Որպես  $X$  վերցնենք  $(0, 1)$  բաց միջակայքը և դիտարկենք

$$\left\{ \left( \frac{1}{n}, 1 \right) \right\}, n = 2, 3, \dots$$

բաց միջակայքերի ընտանիքը: Դժվար չէ տեսնել, որ

\* Բազմությանը (վերջավոր կամ անվերջ), որի տարրերն իրենց հերթին ևս բազմություններ են, ընդունված է անվանել ընտանիք:

այդ ընտանիքը ծածկում է  $(0,1)$  միջակայքը, որովհետև յուրաքանչյուր  $x_0 \in (0,1)$  կետի համար, սկսած ինչ-որ համարից, բավարարվում է  $\frac{1}{n} < x_0$  անհավասարությունը, այսինքն՝

$$x_0 \in \left( \frac{1}{n}, 1 \right), n > n_0;$$

Ցույց տանք, որ այդ ընտանիքի ոչ մի վերջավոր ենթարազմություն չի ծածկի  $(0,1)$  միջակայքը (գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթը):

Իրոք, այդ ընտանիքի ինչպիսի վերջավոր ենթարազմություն էլ վերցնենք՝

$$\left( \frac{1}{n_1}, 1 \right), \left( \frac{1}{n_2}, 1 \right), \dots, \left( \frac{1}{n_m}, 1 \right),$$

և նշանակենք՝  $x_1 = \min \left\{ \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \dots, \frac{1}{n_m} \right\}$ , կունենանք, որ  $(0, x_1]$

միջակայքի կետերը ծածկված չեն այդ վերջավոր ընտանիքով:

Բորելի լեմման պնդում է, որ եթե  $X$  վերջավոր միջակայքը փակ է, այսպիսի երևույթը բացառվում է:

**Թեորեմ 3.1 (Բորելի լեմմա):**  $[a, b]$  հատվածի կամայական  $\{\Delta_\alpha\}$  բաց միջակայքերի անկերզ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ՝ կիրառելով հատվածը կիսելու մեթոդը:

Եթե  $[a, b]$  հատվածը հնարավոր չէ ծածկել  $\{\Delta_\alpha\}$  ընտանիքին պատկանող վերջավոր թվով միջակայքերով, ապա նույնը կարելի է ասել  $[a, b]$

հատվածի  $\left[ a, \frac{a+b}{2} \right]$  և  $\left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$  երկու կեսերից առնվազն մեկի մասին:

Այդ կեսը նշանակենք  $[a_1, b_1]$ -ով և նույն դատողությունը կատարենք  $[a_1, b_1]$ -ի համար:

Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք  $[a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ներդրված հատվածները: Համաձայն ներդրված հատվածների լեմմայի, գոյություն ունի  $c \in [a, b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$a_n \rightarrow c, \quad b_n \rightarrow c, \quad c \in [a_n, b_n]:$$

Քանի որ  $[a, b]$  հատվածի յուրաքանչյուր կետ պատկանում է  $\{\Delta_\alpha\}$  բաց միջակայքերի ընտանիքի անդամներից գոնե մեկին, ուստի գոյություն ունի  $\Delta_{\alpha_0} := (\beta, \gamma)$  միջակայք, այնպիսին, որ

$$\beta < c < \gamma:$$

Չուզամետ հաջորդականությունների առաջին հատկության համաձայն, սկսած որոշ համարից տեղի կունենան

$$\beta < a_n \leq c \leq b_n < \gamma$$

անհավասարությունները: Հետևաբար, սկսած հենց այդ համարից,  $[a_n, b_n]$  հատվածը ծածկվում է  $\{\Delta_\alpha\}$  ընտանիքին պատկանող ընդամենը մեկ՝  $\Delta_{\alpha_0}$  միջակայքով: Դա հակասում է  $[a_n, b_n]$  հատվածների ընտրության պայմանին: Թերեմն ապացուցված է: ■

## 2. Բորելի լեմմայի բնոհանուր ձևակերպում:

**Սահմանում:** Նիցուք  $\Delta$ -ն թվային բազմություն է՝  $\Delta \subset \mathbb{R}$ :

ա)  $\Delta$  բազմության  $a$  կետը կոչվում է այդ բազմության ներքին կետ, եթե գոյություն ունի  $a$ -ի շրջակայք, որը պարունակվում է  $\Delta$ -ում:

բ)  $\Delta$ -ն կոչվում է բաց բազմություն, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են:

գ) Բազմությունը կոչվում է փակ, եթե նրա լրացումը\* բաց է:

Փակ բազմությունը կարելի է սահմանել նաև հետևյալ կերպ. բազմությունը կոչվում է փակ, եթե նրա վերջավոր կուտակման կետերը պատկանում են իրեն: Այս և նախորդ սահմանումների համարժեքության ապացույցը բողնենք ընթերցողին:

\*  $A \subset \mathbb{R}$  բազմության լրացում է կոչվում  $\mathbb{R} \setminus A$  բազմությունը, որը նշանակվում է  $A^c$ -ով:

**Թեորեմ 3.2 (Բորելի լեմմայի ընդհանուր ձևակերպումը):** *E փակ ևսահմանափակ բազմության կամայական  $\{\Delta_\alpha\}$  բաց բազմությունների անվերջ ծածկույթից կարելի է անջատել վերջավոր ենթածածկույթ:*

► Քանի որ  $E$ -ն սահմանափակ է, որեմն գոյություն ունի  $[a, b]$  հատված, այնպիսին, որն ընդգրկում է  $E$ -ն՝  $E \subset [a, b]$ :

Կրկին կիրառենք հակասող ենթադրության մեթոդը: Եթե  $E$ -ն հնարավոր չէ ծածկել  $\{\Delta_\alpha\}$  ընտանիքի վերջավոր թվով բազմություններով, ապա  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cap E$  և  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right] \cap E$  բազմություններից առնվազն մեկը նոյնպես չի ծածկվի այդ ընտանիքի վերջավոր թվով անդամներով:  $[a, b]$  հատվածի համապատասխան կեսը նշանակենք  $[a_1, b_1]$ -ով և նույն դատողությունը կատարենք  $[a_1, b_1]$ -ի համար: Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք  $[a_n, b_n]$ ,  $n=1, 2, \dots$  ներդրված հատվածներ և, կիրառելով նախորդ թեորեմի ապացույցի դատողությունները, կհանգենք հակասության: ■

**Սահմանում:** *Բաց բազմություններից բաղկացած ծածկույթն անվանում են բաց ծածկույթ:*  $K \subset \mathbb{R}$  բազմությունը կոչվում է կոմպակտ, եթե նրա յուրաքանչյուր բաց ծածկույթ պարունակում է վերջավոր ենթածածկույթ:

«Կոմպակտ» տերմինի միջոցով Բորելի լեմման ձևակերպվում է հետևյալ կերպ: յուրաքանչյուր փակ սահմանափակ բազմություն կոմպակտ է:

Ծիշտ է նաև հակադարձ պնդումը (ապացուցե՛լ):

**3. Վայերշտրասի առաջին թեորեմի ապացույցը Բորելի լեմմայի օգնությամբ:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում: Ապացույնք, որ այն սահմանափակ է, օրինակ, վերևից:

Վերցնենք կամայական  $\alpha \in [a, b]$  կետ: Քանի որ  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = f(\alpha)$ , ուստի, վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների առաջին հատկության համաձայն, գոյություն ունի  $\delta_\alpha > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

\* Տե՛ս VII գլուխ, § 3, կետ 2:

$$x \in [a, b], |x - \alpha| < \delta_\alpha \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < 1: \quad (3.1)$$

Այս դասողությունը կատարենք  $[a, b]$  հատվածի բոլոր  $\alpha$  կետերի համար և նշանակենք՝  $\Delta_\alpha = (\alpha - \delta_\alpha, \alpha + \delta_\alpha)$ : Այդ դեպքում  $\{\Delta_\alpha\}$  բաց միջակայքերի ընտանիքը կծածկի  $[a, b]$  հատվածը:

Բորելի լեմմայի համաձայն, գոյություն ունի  $[a, b]$ -ի վերջավոր ենթածածկոյթ՝

$$\left\{ (\alpha_1 - \delta_{\alpha_1}, \alpha_1 + \delta_{\alpha_1}), \dots, (\alpha_m - \delta_{\alpha_m}, \alpha_m + \delta_{\alpha_m}) \right\}: \quad (3.2)$$

Նշանակենք՝

$$M = \max \{f(\alpha_1) + 1, \dots, f(\alpha_m) + 1\},$$

և ցույց տանք, որ

$$f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]:$$

Իրոք,  $[a, b]$  հատվածի յուրաքանչյուր  $x$  կետ պատկանում է (3.2) վերջավոր ընտանիքի միջակայքերից գոնե մեկին՝  $x \in (\alpha_i - \delta_{\alpha_i}, \alpha_i + \delta_{\alpha_i})$ : Հետևաբար, (3.1) պայմանից կունենանք՝  $f(x) < f(\alpha_i) + 1 \leq M$ : ■

**4. Կանոնի թերեմի ապացույցը Բորելի լեմմայի օգնությամբ:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում: Ապացույնք, որ այն հավասարաչափ անընդհատ է:

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ և  $\alpha \in [a, b]$  կետ:  $\alpha$  կետում  $f$  ֆունկցիայի անընդհատությունից բխում է, որ գոյություն ունի  $\delta_\alpha$  թիվ, այնպիսին, որ

$$x', x'' \in [a, b], |x' - \alpha| < \delta_\alpha, |x'' - \alpha| < \delta_\alpha \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon:$$

Դրանում համոզվելու համար, որպես  $\delta_\alpha$  կարելի է վերցնել  $\frac{\varepsilon}{2}$  թվին համապատասխանող անընդհատության  $\delta$ -ն՝

$$x \in [a, b], |x - \alpha| < \delta_\alpha \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

և օգտվել

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x'')|$$

Եռանկյան անհավասարությունից:

Այժմ  $[a, b]$  հատվածի յուրաքանչյուր  $\alpha$  կետի համար նշանակենք՝  
 $\Delta_\alpha = \left( \alpha - \frac{\delta_\alpha}{2}, \alpha + \frac{\delta_\alpha}{2} \right)$ : Այդ դեպքում  $\{\Delta_\alpha\}$  բաց միջակայքերի ընտանիքը կծածկի  $[a, b]$  հատվածը և, բորելի լեմմայի համաձայն, կպարունակի վերջավոր ենթածածկույթ՝

$$\{\Delta_{\alpha_1}, \Delta_{\alpha_2}, \dots, \Delta_{\alpha_m}\}: \quad (3.3)$$

Դիտարկենք համապատասխան  $\delta_{\alpha_1}, \dots, \delta_{\alpha_m}$  թվերը և նշանակենք՝

$$\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{\alpha_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{\alpha_m}}{2} \right\}:$$

Ցոյց տանք, որ հենց այս  $\delta$  թիվը բավարարում է հավասարաչափ անընդհատության  $\delta$ -ի վրա դրված պայմանին՝

$$x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

Այդ նպատակով վերցնենք  $|x' - x''| < \delta$  պայմանին բավարարող կամայական  $x', x'' \in [a, b]$  կետեր: Քանի որ (3.3) ընտանիքը ծածկում է  $[a, b]$  հատվածը, ուստի  $x'$  կետը պետք է պատկանի այդ ընտանիքի միջակայքերից գունե մելիս՝  $x' \in \Delta_{\alpha_i}$ , այսինքն՝

$$|x' - \alpha_i| < \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} < \delta_{\alpha_i}: \quad (3.4)$$

Մյուս կողմից՝  $|x' - x''| < \delta$ , հետևաբար՝

$$|x'' - \alpha_i| \leq |x'' - x'| + |x' - \alpha_i| < \delta + \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} \leq \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} + \frac{\delta_{\alpha_i}}{2} = \delta_{\alpha_i}: \quad (3.5)$$

$\delta_{\alpha_i}$  թվի ընտրության պայմանի շնորհիվ, (3.4) և (3.5) անհավասարություններից բխում է  $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$  : ■

### **5. Իրական թվերի լրիվությանը համարժեք պնդումներ:**

**Թեորեմ 3.3:** *Հետևյալ պնդումները համարժեք են.*

- 1°. *Դեղեկինդի թեորեմը (I զույն, թեորեմ 1.1):*
  - 2°. *Շշզրիտ եզրերի գոյության թեորեմը (I զույն, թեորեմ 1.2):*
  - 3°. *Մնացուած հաջորդականության սահմանի գոյության թեորեմը (II զույն, թեորեմ 2.1):*
  - 4°. *Ներդրված հատվածների լեմման (II զույն, թեորեմ 2.3):*
  - 5°. *Բորելի լեմման (III զույն, թեորեմ 3.1):*
  - 6°. *Բոլցանո-Վայերշտրասի լեմման (III զույն, թեորեմ 3.4):*
  - 7°. *Կոչիի զուգամիտության սկզբունքը (III զույն, թեորեմ 4.1):*
- Քանի որ  $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \Rightarrow \begin{cases} 5^\circ \\ 6^\circ \Rightarrow 7^\circ \end{cases}$  առնչություններն արդեն

ապացուցված են, ուստի նշված պնդումների համարժեքությունը ցույց տալու համար բավական է ապացուցել հետևյալ առնչությունները.

$$\text{ա) } 5^\circ \Rightarrow 6^\circ, \quad \text{բ) } 7^\circ \Rightarrow 4^\circ, \quad \text{զ) } 4^\circ \Rightarrow 1^\circ :$$

*ա) ի ապացույցը:* Ապացուցենք, որ եթե  $\Omega$  բորելի լեմման ճիշտ է, ապա  $y$  յուրաքանչյուր  $a \leq x_n \leq b$  սահմանափակ հաջորդականություն ունի մասնակի սահման:

Կատարենք հակասող ենթադրություն. դիցուք  $[a, b]$  հատվածի ոչ մի կետ  $x_n$  հաջորդականության մասմակի սահման չէ: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր  $x \in [a, b]$  կետ կունենա մի այնպիսի  $\Delta_x$  շրջակայք, որը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության վերջավոր քանակով անդամներ\*:

Դիտարկենք  $[a, b]$  հատվածի բոլոր  $x$  կետերի  $\Delta_x$  շրջակայքերը: Առաջացած բաց միջակայքերի  $\{\Delta_x\}$  ընտանիքը կհանդիսանա  $[a, b]$  հատվածի ծածկույթ և, համաձայն Բորելի լեմմայի, կպարունակի վեր-

\* Այդ քանակը կարող է նաև զրո լինել:

ջավոր ենթածածկույթ՝  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_p}$ : Բայց, քանի որ նշված միջակայքերից յուրաքանչյուրը պարունակում է  $x_n$  հաջորդականության վերջավոր քանակով անդամներ, ուստի  $x_n$  հաջորդականությունն առհասարակ բաղկացած է վերջավոր քանակով անդամներից, ինչը հակասություն է:

թ)-ի ապացույցը: Դիցուք  $[a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  հատվածները ներդրված են և  $b_n - a_n \rightarrow 0$ : Այդ դեպքում տեղի ունեն

$$0 \leq a_{n+m} - a_n < b_n - a_n \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

անհավասարությունները, ինչից հետևում է, որ  $a_n$  հաջորդականությունը ֆունդամենտալ է: Համաձայն Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի,  $a_n$  հաջորդականությունը զուգամետ է՝  $a_n \rightarrow c$ : Մյուս կողմից՝  $b_n = (b_n - a_n) + a_n \rightarrow c$ : Պնդումն ապացուցված է:

զ)-ի ապացույցը: Դիցուք  $A / A'$ -ը իրական թվերի հատույթ է: Ապացուցենք, որ այս հատույթն ունի սահմանազատիչ թիվ, այսինքն՝ գոյություն ունի մի  $\gamma$  իրական թիվ, այնպիսին, որ

$$\alpha < \gamma \Rightarrow \alpha \in A \text{ և } \gamma < \beta \Rightarrow \beta \in A': \quad (3.6)$$

Այդ նպատակով վերցնենք որևէ  $\alpha_1 \in A$  և  $\beta_1 \in A'$  իրական թվեր և կիսենք  $[\alpha_1, \beta_1]$  հատվածը:  $[\alpha_2, \beta_2]$ -ով նշանակենք առաջացած կեսերից այն, որի ծայրակետերը  $A / A'$  հատույթի տարրեր դասերից են, այսինքն՝  $\alpha_2 \in A$  և  $\beta_2 \in A'$ : Նույն սկզբունքով կիսենք  $[\alpha_2, \beta_2]$  հատվածը և այլն: Անվերջ շարունակելով հատվածները կիսելու պրոցեսը՝ կիսանգենը  $[\alpha_n, \beta_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ներդրված հատվածներին, ընդ որում,

$$\alpha_n \in A, \beta_n \in A', \beta_n - \alpha_n \rightarrow 0:$$

Կիրառելով ներդրված հատվածների լեմման՝ կունենանք, որ  $\alpha_n$  և  $\beta_n$  հաջորդականությունները զուգամիտում են միևնույն  $\gamma$  սահմանին: Մնում է նկատել, որ այդ  $\gamma$  թիվը բավարարում է (3.6) պայմանին: ■

## IV ԳԼՈՒԽ

### ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

#### §1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ

**1. Ածանցյալի սահմանումը:** Դիցուք  $y = f(x)$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  միջակայքում և  $x_0 \in X$ : Նշանակենք՝  $\Delta x = x - x_0$ , որը կանվանենք *արգումենտի աճ*  $x_0$  կետում\*: Այնուհետև, նշանակենք՝

$$\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

որը կանվանենք  $y = f(x)$  ֆունկցիայի աճ  $x_0$  կետում (անհրաժեշտության դեպքում  $\Delta f$ -ի փոխարեն կգրենք  $\Delta f(x_0)$ , լրացնիչ նշելով, որ ֆունկցիայի աճը դիտարկված է  $x_0$  կետում):

Դիտարկենք այդ աճերի հարաբերության սահմանը՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ կամ, որ նույնն է, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}: \quad (1.1)$$

**Սահմանում:** Եթե (1.1) սահմանը գոյուրյուն ունի (որը կարող է լինել  $p$ ՝ վերջավոր, և  $p$ ՝  $\pm \infty$ ), ապա այն կոչվում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի ածանցյալ  $x_0$  կետում և նշանակվում է  $f'(x_0)$  սիմվոլով՝

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}:$$

Այս սահմանը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}: \quad (1.1')$$

Այն դեպքում, եթե  $x_0$ -ն  $X$  միջակայքի ծայրակետ է, (1.1')-ը հասկացվում է որպես միակողմանի սահման (ծախ ծայրակետում՝ որպես աջակողմյան սահման, իսկ աջ ծայրակետում՝ ձախակողմյան):

\* Ենթադրվում է, որ  $x \in X$ :

$$f'(x_0) \text{ նշանակման փոխարեն օգտագործվում է նաև } \frac{df(x_0)}{dx}$$

նշանակումը:

Այս դեպքում, եթե  $f$  ֆունկցիան  $X$  միջակայքի բոլոր կետերում ունի վերջավոր ածանցյալ,  $f'(x)$ -ը որոշված է  $X$  միջակայքի բոլոր կետերում ( $X$  միջակայքում): Սահմանված  $f'(x)$  ֆունկցիան կոչվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի ածանցյալ ֆունկցիա  $X$  միջակայքում, կամ պարզապես՝ ածանցյալ:

Ածանցյալ ֆունկցիայի համար օգտագործվում են նաև

$$y', \frac{dy}{dx}, y'_x$$

նշանակումները:

**2. Ածանցյան բանաձևեր:** Ապացուցենք հետևյալ բանաձևերը.

$$1^0. C' = 0, \quad 2^0. (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad 3^0. (a^x)' = a^x \ln a,$$

$$4^0. (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e, \quad 5^0. (\sin x)' = \cos x, \quad 6^0. (\cos x)' = -\sin x :$$

**1<sup>0</sup>-ի ապացույցը:**  $f(x) = C$  ֆունկցիան  $(-\infty, \infty)$  միջակայքի բոլոր կետերում ընդունում է միևնույն  $C$  արժեքը, հետևաբար՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{C - C}{\Delta x} = 0 \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) :$$

**2<sup>0</sup>-ի ապացույցը:** Դիտարկենք  $f(x) = x^\alpha$  ֆունկցիան, որտեղ  $\alpha$  -ն զրոյից տարրեր կամայական իրական թիվ է: Ենթադրենք, որ  $x_0$ -ն պատկանում է այդ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին և  $x_0 \neq 0$ : Եթե  $\Delta x \rightarrow 0$ , օգտվելով երրորդ հիմնական սահմանից, կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = x_0^{\alpha-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}} \rightarrow x_0^{\alpha-1} \cdot \alpha :$$

Եթե  $x_0 = 0$  կետը պատկանում է  $f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ապա  $2^0$  բանաձևը կրկին մնում է ուժի մեջ: Իսկապես,  $\alpha > 1$  դեպքում կունենանք՝

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^\alpha}{\Delta x} = (\Delta x)^{\alpha-1} \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

$\alpha = 1$  դեպքում՝  $f'(0) = 1$ , իսկ  $0 < \alpha < 1$  դեպքում՝  $f'(0) = \infty$ :

**3<sup>0</sup>-ի ապացույցը:** Կիտարկենք  $f(x) = a^x$  ֆունկցիան, որտեղ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ : Կամայական  $x_0 \in (-\infty, \infty)$  կետի համար, օգտվելով երկրորդ հիմնական սահմանից, կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0}}{\Delta x} = a^{x_0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow a^{x_0} \ln a \quad (\Delta x \rightarrow 0):$$

**4<sup>0</sup>-ի ապացույցը:** Կիտարկենք  $f(x) = \log_a x$  ֆունկցիան ( $x > 0$ ): Կամայական  $x_0 \in (0, \infty)$  կետի համար, օգտվելով առաջին հիմնական սահմանից, կունենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)}{x_0 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}} \rightarrow \frac{1}{x_0} \cdot \log_a e \quad (\Delta x \rightarrow 0):$$

**5<sup>0</sup>-ի ապացույցը:**  $f(x) = \sin x$  ֆունկցիայի համար կամայական  $x_0$  կետում ունենք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \rightarrow \cos x_0 \quad (\Delta x \rightarrow 0):$$

Այստեղ օգտվում ենք  $\cos x$  ֆունկցիայի անընդհատությունից և  $\frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$  ( $t = \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0$ ) սահմանից:

**6<sup>0</sup>-ն ապացույցում է 5<sup>0</sup>-ի նման:**

**3. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը:** Ենթադրենք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  միջակայքում և  $x_0 \in X$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում, ըստ ածանցյալի սահմանման, ունենք՝

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0) \quad (\Delta x \rightarrow 0);$$

Նշանակելով

$$\alpha := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0),$$

կունենանք՝

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0) \quad (1.2)$$

կամ, որ նոյնն է՝

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x, \quad (1.2')$$

որտեղ  $\alpha$ -ն կախված է  $\Delta x$ -ից և նրա հետ մեկտեղ ձգուում է զրոյի:

Այս բանաձևը կոչվում է **ֆունկցիայի աճի բանաձև:**

**Դիտողություն:** Մինչ այժմ ենթադրվում էր, որ  $\Delta x \neq 0$ : Սակայն, եթե պայմանավորվենք  $\Delta x = 0$  դեպքում  $\alpha$ -ին վերագրել 0 արժեքը՝  $\alpha(0) = 0$ , ապա ֆունկցիայի աճի բանաձևը ճիշտ կլինի նաև  $\Delta x = 0$  ( $x = x_0$ ) դեպքում:

**Հետևանք՝ ֆունկցիայի աճի բանաձևից:** Եթե  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ կետում  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է:

Հակառակ պնդումը ճիշտ չէ. ֆունկցիան կարող է լինել անընդհատ, բայց ածանցյալ չունենալ: Այդպիսին է, օրինակ,  $f(x) = |x|$  ֆունկցիան  $x_0 = 0$  կետում (համոզվել ինքնուրույն): Բերենք մեկ այլ օրինակ. դիցուք՝

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad \text{և} \quad f(0) = 0: \quad \text{Այս ֆունկցիան կրկին 0 կետում}$$

անընդհատ է (տես III գլուխ, §1, կետ 5, օրինակ  $2^\circ$ ), բայց ածանցյալ չունի: Իրոք, քանի որ

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

հետևաբար,  $\Delta x \rightarrow 0$ -ի ձգտելիս աճերի հարաբերությունը սահման չունի:

Տեղին է քերել նաև ֆունկցիայի օրինակ, որը խզվող է, քայլ ունի ածանցյալ (բնականաբար՝ անվերջ): Այդպիսի ֆունկցիայի օրինակ է հանդիսանում  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  ֆունկցիան (III գլուխ, §1, կետ 3, օրինակ 1°):

$f(x) = \operatorname{sgn} x$  ֆունկցիան  $x_0 = 0$  կետում ունի առաջին սեռի խզում: Սակայն դժվար չէ համոզվել, որ այդ կետում աճերի հարաբերությունը ձգտում է  $+\infty$ -ի: Իրոք.

$$\text{եթե } \Delta x \rightarrow 0+, \text{ ապա } \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \rightarrow +\infty,$$

$$\text{եթե } \Delta x \rightarrow 0-, \text{ ապա } \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x} \rightarrow +\infty:$$

**4. Ածանցյան կանոնները:** Դիցուք  $u$  և  $v$  ֆունկցիաները որոշված են միևնույն  $X$  միջակայքում և այդ միջակայքի  $x_0$  կետում ( $X$  միջակայքում) ունեն վերջավոր ածանցյալ:

Այդ դեպքում  $x_0$  կետում ( $X$  միջակայքում) վերջավոր ածանցյալ ունեն նաև այդ ֆունկցիաների գումարը, տարրերությունը, արտադրյալը, բանորդը\* և տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը.

$$1^0. (cu)' = cu',$$

$$2^0. (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$3^0. (uv)' = u'v + uv',$$

$$4^0. \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}:$$

Ապացուցենք, օրինակ, վերջինը: Այդ նպատակով նշանակենք՝

$$F(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

\* Քանորդի դեպքում ենթադրում ենք, որ  $v(x_0) \neq 0$ :

և, հաշվի առնելով  $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u$  հավասարությունը, հաշվենք աճերի հարաբերության սահմանը, եթե  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta x} &= \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} \right] = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{u(x_0) + \Delta u}{v(x_0) + \Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} \right] = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x_0) - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u(x_0)}{v(x_0)v(x_0 + \Delta x)} \rightarrow \frac{u'v - v'u}{v^2}: \end{aligned}$$

Վերջին քայլում օգտվեցինք  $x_0$  կետում  $v$  ֆունկցիայի անընդհատությունից (վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիան անընդհատ է):

**Օրինակներ:**

$$1^0. (tgx)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$2^0. (ctgx)' = \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

**5. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալ:** Կիսարկենք  $F(x) = f(\varphi(x))$  բարդ ֆունկցիան: Ապացուենք, որ եթե  $\varphi$  ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ  $x_0$  կետում, իսկ  $f$  ֆունկցիան՝  $t_0 = \varphi(x_0)$  կետում, ապա  $F$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0): \quad (1.3)$$

Ֆունկցիայի աճի բանաձևի համաձայն, ունենք՝

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) &= f(\varphi(x_0 + \Delta x)) - f(\varphi(x_0)) = \\ &= f(\varphi(x_0) + \Delta \varphi) - f(\varphi(x_0)) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \Delta \varphi + \alpha \cdot \Delta \varphi, \end{aligned}$$

որտեղ  $\alpha$ -ն կախված է  $\Delta \varphi$ -ից և նույն մեկտեղ ձգտում է 0-ի: Հավասարության երկու կողմը բաժանելով  $\Delta x$ -ի վրա, կստանանք՝

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f'(\varphi(x_0)) \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta x};$$

Այժմ, եթե  $\Delta x \rightarrow 0$ , ապա  $\Delta\varphi \rightarrow 0$  (որովհետև վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիան անընդհատ է): Հետևաբար՝

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} \rightarrow f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

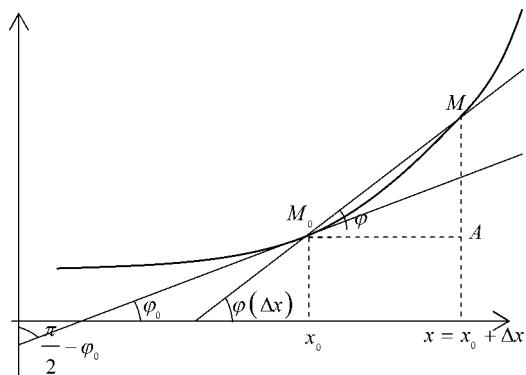
ինչը և պետք էր ապացուցել:

**6. Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  միջակայքում և  $x_0 \in X$  կետում ունի ածանցյալ (վերջավոր կամ անվերջ):

$y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա դիտարկենք  $M_0 = (x_0, f(x_0))$  փիքսված և

$$M = (x, f(x))$$

փոփոխական կետերը:  
Սիացմելով այդ կետերը՝  
կստանանք  $M_0 M$  հա-  
տողը (լարը): Այդ  
հատողի՝ արացիսների  
առանցքի դրական ուղ-  
ղության հետ կազմած  
անկյունը նշանակենք  
 $\varphi(\Delta x)$ -ով, այսինքն՝



$\varphi(\Delta x) := \arctg k(\Delta x)$ , որտեղ  $k(\Delta x)$ -ը  $M_0 M$  հատվածի անկյունային գործակիցն է: Ուստե՛ք՝

$$k(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \quad (\Delta x \rightarrow 0): \quad (1.4)$$

Այսպիսով, եթե  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի ածանցյալ, ապա  $k(\Delta x)$  անկյունային գործակիցը  $\Delta x \rightarrow 0$  դեպքում ունի սահման, որը հենց այդ ածանցյալն է:

**Սահմանում:** Եթե  $\Delta x$ -ը զրոյի ճգնելիս՝  $k(\Delta x)$ -ը ունի սահման, ապա ասում են, որ  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $M_0$  կետում ունի շոշափող:

Որպես շոշափող ընդունվում է այն ուղիղը, որն անցնում է  $M_0$  կետով, և որի անկյունային գործակիցը հավասար է՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} k(\Delta x) = k_0^* : \quad (1.5)$$

(1.5) պայմանը,  $\arctg x$  ֆունկցիայի անընդհատության շնորհիվ, կարելի է գրել նաև

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$$

տեսքով: Այս նկատառումով էլ ասում են, որ շոշափողը հասողի սահմանային դիրքն է:

Հաշվի առնելով (1.4)-ը, կստանանք, որ եթե  $\int$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի ածանցյալ, ապա նրա զրաֆիկը  $M_0$  կետում ունի շոշափող, որի անկյունային գործակիցը  $f'(x_0)$ -ն է՝  $k_0 = f'(x_0)$ :

Եթե  $f'(x_0)$  ածանցյալը վերջավոր է, շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) :$$

Տեղադրելով  $y_0$ -ի և  $k_0$ -ի արժեքները կստանանք

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

հավասարումը:

Իսկ եթե ածանցյալն անվերջ է, շոշափողի հավասարումը կլինի՝

$$x = x_0 :$$

**7. Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալ:** Դիցուք  $y = f(x)$  ֆունկցիան  $X$  միջակայրում խիստ մոնուսոն է ու անընդհատ, և նրա ընդունած արժեքների բազմությունը  $Y$  միջակայքն է: Այդ դեպքում, հակադարձ ֆունկցիայի գոյության թերենի համաձայն, գոյություն ունի  $x = g(y)$  անընդհատ հակադարձ ֆունկցիան, որը որոշված է  $Y$  միջակայրում:

**Թեորեմ 1.1:** Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիան  $x_0 \in X$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ և  $f'(x_0) \neq 0$ , ապա  $x = g(y)$  հակադարձ ֆունկցիան  $y_0 = f(x_0)$  պատկեր-կետում ունի ածանցյալ և

\*Անվերջ անկյունային գործակցով ուղիղ է համարվում  $OX$  առանցքին ուղղահայաց ուղիղը:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} : \quad (1.6)$$

► Կիտարկենք աճերի հետևյալ հարաբերությունը՝

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} : \quad (1.7)$$

Եթե  $y \rightarrow y_0$ , ապա  $x = g(y)$  ֆունկցիայի անընդհատությունից կրխի, որ  $x \rightarrow x_0$ : Այսուհետև, (1.7) հավասարությունում անցնելով սահմանի, կստանանք (1.6)-ը: ■

Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանություն. եթե  $M_0$  կետում ֆունկցիայի գրաֆիկի շոշափողը  $x$ -երի առանցքի դրական ուղղության հետ կազմում է  $\varphi_0$  անկյուն, ապա այդ շոշափողը  $y$ -երի առանցքի դրական ուղղության հետ կկազմի  $\pi/2 - \varphi_0$  անկյուն (տես գծագիրը): Եվ, քանի որ ածանցյալը այդ շոշափողի անկյունային գործակիցն է, ապա

$$g'(y_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} = \frac{1}{f'(x_0)} :$$

**Օրինակներ:**

$$1^0. \quad y = \arcsin x, \quad x = \sin y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} :$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} :$$

Արմատի դիմաց վերցնում ենք «+» նշանը, որովհետև  $\cos y$  ֆունկցիան  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  միջակայքում դրական է:

$$2^0. \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad x = \operatorname{tgy} :$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2} :$$

Նման դատողություններով կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ բանաձևերը.

$$3^0. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} :$$

$$4^0. (\operatorname{arcctgx})' = -\frac{1}{1+x^2} :$$

## §2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻՎԼ

### 1. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:

Սահմանում: Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  միջակայքում:

Կասենք այն դիֆերենցելի է  $x_0 \in X$  կետում, եթե այդ կետում նրա աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha\Delta x, \quad (2.1)$$

որտեղ  $A$  թիվը կախված չէ  $\Delta x$ -ից, իսկ  $\alpha$ -ն  $\Delta x$ -ից կախված անվերջ փոքր է, եթե  $\Delta x \rightarrow 0$ :

Վերջավոր ածանցյալ ունեցող ֆունկցիայի աճի բանաձևը ցույց է տալիս, որ եթե  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ապա այդ կետում  $f$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է, ընդ որում,  $A = f'(x_0)$ :

Ապացուցենք հակառակ պնդումը: Դիցուք  $f$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում, այսինքն՝  $f$  ֆունկցիայի աճը  $x_0$  կետում կարելի է ներկայացնել (2.1) տեսքով: Այդ դեպքում կոնենանք՝

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0) :$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, եթե  $\Delta x \rightarrow 0$ ՝ կստանանք, որ  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում,  $f'(x_0) = A$ :

Այսպիսով, որպեսզի  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում լինի դիֆերենցելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն այդ կետում ունենա վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում,  $A = f'(x_0)$ :

(2.1) Աերկայացման մեջ մասնակցող  $A\Delta x$  գումարելին, որը գծորեն է կախված  $\Delta x$ -ից, կոչվում է ֆունկցիայի աճի զիսավոր մաս: Այսպիսի անվանումը պայմանավորված է նրանվ, որ ( $A \neq 0$  դեպքում)  $\Delta x$ -ը 0-ի հաջորդությամբ այդ գումարելին ավելի դանդաղ է ձգտում 0-ի, քան մյուսը՝  $\alpha\Delta x$ -ը:

**Սահմանում:**  $x_0$  կետում դիֆերենցելի  $f$  ֆունկցիայի աճի զիսավոր մասը կոչվում է ֆունկցիայի դիֆերենցիալ այդ կետում և նշանակվում է  $df(x_0)$  կամ  $dy(x_0)$  սիմվոլով:

Այսպիսով՝

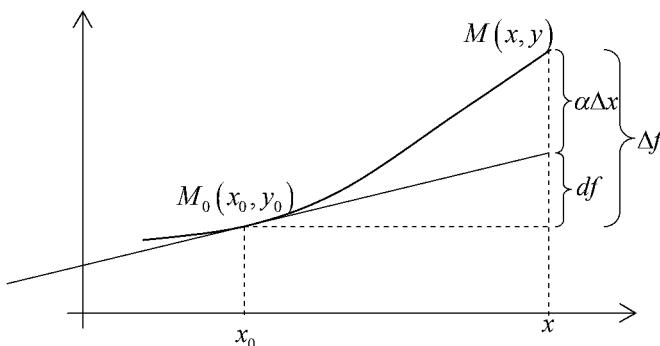
$$df(x_0) = A\Delta x = f'(x_0)\Delta x:$$

Մասնավորաբար, վերցնելով  $f(x) = x$  ֆունկցիան, կստանանք՝  $dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ : Հետևաբար,  $f(x)$  ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կարելի է ներկայացնել նաև

$$df(x_0) = f'(x_0)dx$$

տեսքով:

Դիֆերենցիալն ունի պարզ երկրաչափական իմաստ:



$f$  ֆունկցիայի դիֆերենցիալը  $x_0$  կետում՝ դա  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկին՝ նրա  $M_0 = (x_0, y_0)$  կետում տարված շոշափողի օրդինատի աճն է: Իրոք, այդ աճի համար ունենք՝

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) = df(x_0):$$

**2. Դիֆերենցման կանոնները:** Դիցուք  $u$  և  $v$  ֆունկցիաները դիֆերենցելի են  $x_0$  կետում ( $X$  միջակայքում): Այդ դեպքում  $x_0$  կետում ( $X$  միջակայքում) դիֆերենցելի կլինեն նաև  $cu$ ,  $u \pm v$ ,  $uv$  և  $u/v$  ( $v \neq 0$ ) ֆունկցիաները, ըստ որում,

$$1^0. \quad dcu = cdu ,$$

$$2^0. \quad d(u \pm v) = du \pm dv ,$$

$$3^0. \quad d(uv) = vdu + udv ,$$

$$4^0. \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} .$$

Նշված ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունը բխում է նրանից, որ դրանք ունեն վերջավոր ածանցյալ (տե՛ս 1, 4): Բերված բանաձևերից ապացուցենք, օրինակ,  $3^0$ -ը: Ըստ ածանցման համապատասխան կանոնի, ունենք՝  $(uv)' = v \cdot u' + u \cdot v'$ : Այս հավասարության երկու կողմն բազմապատկելով  $dx$ -ով՝ կստանանք

$$d(uv) = (uv)'dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv$$

հավասարությունը:

### §3. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

**1. Բարձր կարգի ածանցյալներ:** Ենթադրենք՝  $y = f(x)$  ֆունկցիան  $X$  միջակայքում ունի վերջավոր ածանցյալ և դիտարկենք  $f'(x)$  ֆունկցիան:

Եթե  $f'(x)$  ֆունկցիան  $x_0 \in X$  կետում ( $X$  միջակայքում) ունի ածանցյալ ապա այդ ածանցյալը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի ածանցյալ  $x_0$  կետում ( $X$  միջակայքում) և այն նշանակում են  $y''$ ,  $f''(x_0)$ ,  $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  սիմվոլներից որևէ մեկով:

Նման ձևով սահմանվում են երրորդ, չորրորդ և այլ կարգի ածանցյալները: Որպեսզի կարողանանք սահմանել  $n$ -րդ կարգի ածանցյալը  $x_0$  կետում, անհրաժեշտ է, որ  $f$  ֆունկցիան այդ կետի շրջակայքում ունենա ( $n - 1$ )-րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում

$$f^{(n)}(x_0) = \left( f^{(n-1)} \right)'(x_0):$$

### Օրինակներ:

1<sup>0</sup>.  $y = x^\alpha$ ,  $y' = \alpha x^{\alpha-1}$ ,  $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ , ...,  $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ :

2<sup>0</sup>.  $y = a^x$ ,  $y' = a^x \ln a$ ,  $y'' = a^x \ln^2 a$ , ...,  $y^{(n)} = a^x \ln^n a$ :

3<sup>0</sup>.  $y = \ln x$ ,  $y' = \frac{1}{x}$ ,  $y'' = -\frac{1}{x^2}$ , ...,  $y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ :

4<sup>0</sup>.  $y = \sin x$ ,  $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , ...,  $y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ :

5<sup>0</sup>.  $y = \cos x$ ,  $y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ , ...,  $y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ :

6<sup>0</sup>.  $y = \arctan x$ ,  $y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$ :

Նշված բամաձևերը ապացուցվում են մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով: Եթելայացնենք միայն 6<sup>0</sup>-ի ապացույցը:

$n = 1$  դեպքում ուսնենք՝

$$y' = \cos^2 y = \cos y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right):$$

Այժմ ենթադրենք, որ 6<sup>0</sup> բամաձևը ճիշտ է  $n$ -ի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է նաև  $(n+1)$ -ի համար: Իրոք՝

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \left( y^{(n)} \right)' = \left[ (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right]' = \\ &= (n-1)! \left[ -n \cos^{n-1} y \sin y \cdot \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^n y \cdot n \cos n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right] y' = \\ &= n! \cos^{n+1} y \left[ \cos y \cos n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= n! \cos^{n+1} y \cos\left((n+1)y + n\frac{\pi}{2}\right) = n! \cos^{n+1} y \sin(n+1)\left(y + \frac{\pi}{2}\right): \end{aligned}$$

Պնդումն ապացուցված է:

Օգտվելով ածանցման կանոններից՝ մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կարելի է ապացուցել, որ եթե  $u$  և  $v$  ֆունկցիաները ունեն  $n$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա  $cu$  և  $u \pm v$  ֆունկցիաները ևս կունենան  $n$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ և

$$(cu)^{(n)} = cu^{(n)}, \quad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}; \quad (3.1)$$

**2. Լայբնիցի բանաձև:** Ապացուցենք, որ եթե  $u$  և  $v$  ֆունկցիաներն ունեն  $n$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ապա  $y = uv$  ֆունկցիան նույնական կունենա  $n$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալ, ընդ որում,

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}, \quad (3.2)$$

որտեղ  $u^{(0)} = u$ ,  $v^{(0)} = v$ , իսկ  $C_n^k$ ,  $0 \leq k \leq n$  բվերը Նյուտոնի երկանդասի բանաձևի զործակիցներն են՝  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ :

(3.2)-ը կոչվում է Լայբնիցի բանաձև: Ապացուցենք այն մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:

$n = 1$  դեպքում ունենք

$$y' = (uv)' = u'v + uv' = \sum_{k=0}^1 C_1^k u^{(1-k)} v^{(k)};$$

Այժմ ենթադրենք, որ (3.2) բանաձևը ճիշտ է  $n$ -ի համար և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է  $n+1$ -ի համար: Ունենք՝

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= [(uv)^n]' = \sum_{k=0}^n C_n^k [u^{(n-k)} v^{(k)}]' = \sum_{k=0}^n C_n^k [u^{(n-k+1)} v^{(k)} + u^{(n-k)} v^{(k+1)}] = \\ &= u^{(n+1)} v + \sum_{k=1}^n C_n^k u^{(n+1-k)} v^{(k)} + \sum_{k=1}^n C_n^{k-1} u^{[n-(k-1)]} v^{(k)} + u v^{(n+1)}, \end{aligned}$$

որտեղ վերջին քայլում կատարեցինք  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^n a_{k-1}$  ծևափոխությունը:

Այժմ, հաշվի առնելով  $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$  հավասարությունը, կստանանք (3.2) բանաձևը  $n+1$ -ի համար:

**3. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ:** Դիցուք  $y = f(x)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $x_0$  կետի շրջակայքում:  $dx$ -ը համարելով հաստատում՝  $x_0$  կետի շրջակայքում դիտարկենք  $dy = f'(x)dx$  ֆունկցիան: Եթե այն դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում (այսինքն՝  $f'(x)$  ֆունկցիան ունի վերջավոր ածանցյալ  $x_0$  կետում՝  $f''(x_0)$ ), ապա այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կոչվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ  $x_0$  կետում, իսկ  $f(x)$  ֆունկցիան կոչվում է երկու անգամ (կամ կրկնակի) դիֆերենցելի  $x_0$  կետում:

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալի համար կօգտագործենք

$$d^2 f(x_0), d^2 y, d^2 f$$

նշանակումները: Այսպիսով՝

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)(dx)^2 :$$

Եթե  $y = f(x)$  ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է  $X$  միջակայքում, ապա տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները՝

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (df'(x)) \cdot dx = (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2 :$$

Հետագայում  $(dx)^2$ -ու փոխարեն կգրենք  $dx^2$ : Երկիմաստությունից խուսափելու համար՝  $x^2$  ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կնշանակենք  $d(x^2)$ : Նման ձևով սահմանվում են երրորդ, չորրորդ, ...,  $n$ -րդ կարգի դիֆերենցիալները և  $n$  անգամ դիֆերենցելիությունը.  $y = f(x)$  ֆունկցիայի  $n$ -րդ կարգի դիֆերենցիալն այդ ֆունկցիայի  $(n - 1)$ -րդ կարգի դիֆերենցիալի դիֆերենցիալն է՝

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)dx^n :$$

Վերջին հավասարությունն ապացուցվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեջողով:

Լայրնիցի բանաձևի երկու կողմն բազմապատկելով  $dx^n$ -ով՝ կստանանք

$$d^n(uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u d^k v$$

հավասարությունը, որտեղ  $d^0 u = u$ :

#### §4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱԾՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՇՈՐԵՄՆԵՐԸ

##### 1. Ֆերմայի թեորեմ:

**Թեորեմ 4.1:** Եթե  $f$  ֆունկցիան  $X$  միջակայրի  $x_0$  ներքին կետում ընդունում է իր մեծագույն (փոքրագույն) արժեքը և գոյություն ունի  $f'(x_0)$  ածանցյալը, ապա  $f'(x_0) = 0$ :

► Ապացուցենք մեծագույնի դեպքում: Չանչի որ  $f(x)$  ֆունկցիան  $x_0$  ներքին կետում ունի ածանցյալ, ապա գոյություն ունեն աջակողմյան և ձախակողմյան ածանցյալները և հավասար են  $f'(x_0)$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0:$$

Այս երկու անհավասարություններից բխում է, որ  $f'(x_0) = 0$ : ■

Հաշվի առնելով ածանցյալի երկրաչափական իմաստը՝ կստանանք, որ ֆերմայի թեորեմի պայմանների դեպքում  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկին՝ նրա  $(x_0, f(x_0))$  կետում տարված շոշափողը զուգահեռ է արագիսների առանցքին:

##### 2. Ո՞յի թեորեմ:

**Թեորեմ 4.2:** Դիցուք  $[a, b]$  հատվածի վրա որոշված  $f$  ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

ա) անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում,

բ) ունի ածանցյալ առնվազն  $(a, b)$  բաց միջակայրում,

գ)  $f(a) = f(b)$ :

Այդ դեպքում գոյություն ունի  $c$  կետ ( $a < c < b$ ), այնպիսին, որ  $f'(c) = 0$ :

► Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն,  $[a, b]$  հատվածում անընդհատ  $f$  ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները՝  $M$ ,  $m$ :

Եթե  $M = m$ , ապա  $f$  ֆունկցիան հաստատում է, հետևաբար՝  $f'(x) = 0$ ,  $x \in [a, b]$ :

Մնում է քննարկել այն դեպքը, երբ  $m < M$ : Այս դեպքում, հաշվի առնելով, որ  $[a, b]$  հատվածի ծայրակետերում ֆունկցիան ընդունում է հավասար արժեքներ, եզրակացնում ենք, որ  $m$  և  $M$  արժեքներից գոնե մեկը  $f$  ֆունկցիան կընդունի  $[a, b]$  հատվածի ներքին կետում՝  $c$ : Ֆերմայի թեորեմի համաձայն՝  $f'(c) = 0$ : ■

### 3. Լազրանժի վերջավոր ածերի բանաձևը:

**Թեորեմ 4.3:** Եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և ունի վերջավոր ածանցյալ առնվազն  $(a, b)$  քաց միջակայքում, ապա գոյություն ունի  $[a, b]$  հատվածի  $c$  ներքին կետ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c): \quad (4.1)$$

► Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a):$$

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\varphi$  ֆունկցիան բավարարում է Ո-րի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար, գոյություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ  $\varphi'(c) = 0$ :

Մյուս կողմից՝

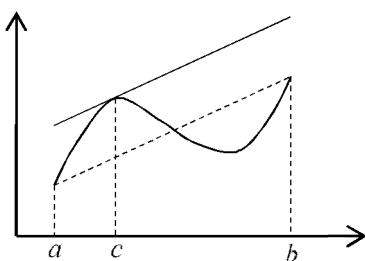
$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

որը համարժեք է (4.1)-ին: ■

Այս թեորեմը կիրառելով  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  հատվածի վրա՝ կստանանք  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x$  հավասարությունը:

Քանի որ  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  թիվը հանդիսանում է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկի  $(a, f(a))$  և  $(b, f(b))$  կետերը միացնող լարի անկյունային

գործակիցը, ապա թեորեմ



4.3-ի եզրակացությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ գոյություն ունի  $[a, b]$  հատվածի  $c$  ներքին կետ, այնպիսին, որ ֆունկցիայի գրաֆիկին՝ նրա  $(c, f(c))$  կետում տարված շղակողը զուգահեռ է գրաֆիկի ծայրակետերը միացնող լարին: (ան'ս գծագիրը):

**Հետևանք:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[x_0, x_0 + h]$  հատվածում և ունի վերջավոր ածանցյալ  $(x_0, x_0 + h)$  բաց միջակայքում:

Այդ դեպքում, եթե գոյություն ունի

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = K \quad (4.2)$$

սահմանը, ապա  $x_0$  կետում  $f$  ֆունկցիան ունի աջակողմյան ածանցյալ, որը հավասար է նոյն  $K$ -ին՝  $f'(x_0) = K$  ( $K$ -ն կարող է լինել թե՝ վերջավոր, թե՝ անվերջ):

► Դիցուք՝  $0 < \Delta x < h$  և  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  հատվածի վրա կիրառենք Լազանի թեորեմը (թեորեմ 4.3-ը).

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(c), \quad x_0 < c < x_0 + \Delta x: \quad (4.3)$$

Եթե  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $c$ -ն կձգտի  $x_0$ -ին: Հաշվի առնելով (4.2)-ը՝ (4.3)

հավասարությունում անցնենք սահմանի: Կատանանք՝

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = K,$$

ինչ և պետք էր ապացույցել: ■

Նկատենք, որ ձևակերպված հետևանքից անմիջապես հետևում է, որ ածանցյալ ֆունկցիայի խզման կետերը կարող են լինել միայն երկրորդ սեռի: Իսկ եթե  $f'$  ածանցյալ ֆունկցիան անընդհատ է մի ինչ-որ բազմության վրա, ապա ասում են, որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ դիֆերեն-

ցելի է այդտեղ:  $X$ -ում անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասն ընդունված է նշանակել  $C^1(X)$ -ով:

#### 4. Կոչիի վերջավոր աճերի բանաձև:

**Թեորեմ 4.4:** Եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն անընդհատ են  $[a, b]$  հատվածում և դիֆերենցելի են  $(a, b)$  բաց միջակայքում, ըստ որում,  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$ , ապա գոյություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} : \quad (4.4)$$

► ‘Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան’

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)]:$$

Նկատենք, որ այստեղ  $g(b) - g(a) \neq 0$ : Իրոք, հակառակ դեպքում  $g$  ֆունկցիան կրավարարի Ո-ովի թեորեմի պայմաններին, հետևաբար, գոյություն կունենա  $c \in (a, b)$ , այնպիսին, որ  $g'(c) = 0$ , ինչը հակառակ է մեր ենթադրությանը:

Դժվար չէ համոզվել, որ  $\varphi$  ֆունկցիան բավարարում է Ո-ովի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար,  $\exists c \in (a, b)$ , այնպիսին, որ  $\varphi'(c) = 0$ : Մյուս կողմից ունենք՝

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c),$$

որը համարժեք է (4.4)-ին: ■

#### 5. Դարրոնի թեորեմ:

**Թեորեմ 4.5:** Եթե  $f$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $[a, b]$  հատվածում և

$$f'(a)f'(b) < 0,$$

ապա գոյություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ  $f'(c) = 0$ :

► Որոշակիության համար ենթադրենք, թե  $f'(a) > 0$  և  $f'(b) < 0$ : Ցույց տանք, որ այս դեպքում  $f$  ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն

ընդունում է  $[a, b]$  հատվածի ներքին կետում: Եթա համար ապացուցենք, որ  $f(a)$ -ն և  $f(b)$ -ն ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը չեն: Իրոք, ունենք՝

$$0 < f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} :$$

Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիայի առաջին հատկության համաձայն,  $a$  կետի մի ինչ-որ (աջակողմյան) շրջակայքում տեղի ունի

$$0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

անհավասարությունը: Քանի որ այս կոտորակի հայտարարը դրական է, ապա նշված շրջակայքում կունենանք՝  $f(x) - f(a) > 0$  կամ, որ նոյնն է՝

$$f(x) > f(a) :$$

Հետևաբար,  $f(a)$ -ն  $f$  ֆունկցիայի մեծագույն արժեքը չէ:

Նման դատողություններով կհամոզվենք, որ  $f(b)$ -ն նոյնպես մեծագույն արժեքը չէ: Հետևաբար, ֆունկցիան իր մեծագույն արժեքն ընդունում է միջակայքի ներքին  $c$  կետում: Այժմ, Ֆերմայի թեորեմի համաձայն՝  $f'(c) = 0$ , ինչ և պետք էր ապացուցել: ■

**Լրացում:** Եթե  $f$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $[a, b]$  հատվածում և  $f'(a) < C < f'(b)$ , ապա զոյլություն ունի  $c \in (a, b)$  կետ, այնպիսին, որ

$$f'(c) = C : \tag{5.5}$$

► Դիտարկենք  $\varphi(x) = f(x) - Cx$  օժանդակ ֆունկցիան: Դժվար չէ համոզվել, որ  $\varphi(x)$  ֆունկցիան բավարարում է Դարբուի թեորեմի պայմաններին: Հետևաբար,  $\exists c \in (a, b)$ , այնպիսին, որ  $\varphi'(c) = 0$ :

Մյուս կողմից,  $0 = \varphi'(c) = f'(c) - C$ , որը համարժեք է (5.5)-ին: ■

## §5. ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՑՍԱՆ ԼՈՊԻՏԱԼԻ ԿԱՆՈՆԸ

### 1. 0/0 տեսքի անորոշություններ:

**Թեորեմ 5.1:** Դիցուք՝

ա)  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները դիֆերենցելի են  $(a, b)$  միջակայքում, ըստ որում,  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$ ;

$$p) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

$$q) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K :$$

Այդ դեպքում՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K : \quad (5.1)$$

► Նախ դիտարկենք այն դեպքը, երբ  $a$ -ն վերջավոր է: Այս դեպքում կարող ենք  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները լրացնուի որոշել  $a$  կետում այնպես, որ նրանք լինեն անընդհատ այդ կետում: Դրա համար պետք է ընդունենք՝  $f(a) = g(a) = 0$ :

Այժմ վերցնենք կամայական  $x \in (a, b)$  կետ և  $[a, x]$  հատվածի վրա կիրառենք Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < x :$$

Անցնելով սահմանի, երբ  $x \rightarrow a$ , և հաշվի առնելով q)-ն՝ կստանանք (5.1)-ը:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ  $a = -\infty$ , իսկ  $K$ -ն վերջավոր է: Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: q) պայմանի համաձայն, գոյություն ունի մի  $E$  թիվ, այնպիսին, որ

$$c < E \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < K + \varepsilon : \quad (5.2)$$

Այժմ վերցնենք  $y < x < E$  կետեր և  $[y, x]$  հատվածում կիրառենք Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad y < c < x :$$

Հաշվի առնելով (5.2)-ը՝ այստեղից կստանանք

$$K - \varepsilon < \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < K + \varepsilon \quad (5.3)$$

անհավասարությունները: Այստեղ ֆիքսենք  $x$ -ը, իսկ  $y$ -ը ձգտեցնենք  $a$ -ի: Հաջող առնելով  $\rho$ -ն՝ կստանանք, որ

$$x < E \Rightarrow K - \varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq K + \varepsilon,$$

ինչն էլ նշանակում է, որ տեղի ունի (5.1)-ը:

$a = -\infty$ ,  $|K| = \infty$  դեպքում թերեմն ապացուցում ենք նման դասողություններով: ■

**Դիտողություն:** (5.3) անհավասարության մեջ կարող ենք անցնել սահմանի, որովհետև հայտարարի սահմանը զրո չէ՝  $g(x) \neq 0$ : Դա բխում է  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$  պայմանից (ապացուցել):

## 2. $\infty/\infty$ սեպի անորոշություններ:

**Թեորեմ 5.2:** Դիցուք՝

ա)  $f$  և  $g$  գումարի հայտարարի սահմանը զրո չէ ( $a, b$ ) միջակայքում, ընդ որում,  $g'(x) \neq 0$ ,  $x \in (a, b)$ :

p)  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$ :

q)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ :

Այդ դեպքում՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = K : \quad (5.4)$$

► Ապացուցենք այն դեպքի համար, եթե  $K$ -ն վերջավոր է (իսկ  $a$ -ն՝ վերջավոր կամ  $-\infty$ ): Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Կրկնելով նախորդ թերեմի դասողությունները՝ կստանանք, որ գոյություն ունի մի  $E$  թիվ, այնպիսին, որ

$$a < y < x < E \Rightarrow K - \varepsilon < \frac{f(y) - f(x)}{g(y) - g(x)} < K + \varepsilon : \quad (5.5)$$

բ) պայմանից բխում է, որ գոյություն ունի մի  $E_1 \in (a, E)$  թիվ, այնպիսին,

որ (ֆիքսված  $x$ -ի դեպքում)

$$a < y < E_1 \Rightarrow g(y) - g(x) > 0, \quad g(y) > 0:$$

$$(5.5) \quad \text{անհավասարությունը} \quad \text{բազմապատկելով} \quad \frac{g(y) - g(x)}{g(y)} - \text{ով՝}$$

կստանանք

$$(K - \varepsilon) \frac{g(y) - g(x)}{g(y)} < \frac{f(y) - f(x)}{g(y)} < (K + \varepsilon) \frac{g(y) - g(x)}{g(y)},$$

անհավասարությունը, կամ, որ նոյնին է՝

$$(K - \varepsilon) \left( 1 - \frac{g(x)}{g(y)} \right) + \frac{f(x)}{g(y)} < \frac{f(y)}{g(y)} < (K + \varepsilon) \left( 1 - \frac{g(x)}{g(y)} \right) + \frac{f(x)}{g(y)}:$$

Ֆիքսված  $x$ -ի դեպքում՝  $\frac{g(x)}{g(y)} \xrightarrow[y \rightarrow a]{} 0$ ,  $\frac{f(x)}{g(y)} \xrightarrow[y \rightarrow a]{} 0$ , հետևաբար, գոյություն ունի  $E_2 < E_1$  թիվ, այնպիսին, որ

$$a < y < E_2 \Rightarrow K - 2\varepsilon < \frac{f(y)}{g(y)} < K + 2\varepsilon,$$

ինչը համարժեք է (5.4)-ին: ■

**Օրինակներ:**

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\frac{1 - \cos x}{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{\cos^2 x} = 2, \quad (0/0):$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}} = 0, \quad \alpha > 0 \quad (\infty/\infty):$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = 0, \quad \alpha > 0 \quad (0 \cdot \infty):$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \quad a > 1, \quad n \in N \quad (\infty/\infty):$$

► Ապացուցենք, օրինակ,  $n = 2$  դեպքում՝

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{a^x \ln a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{a^x \ln^2 a} = 0 :$$

Ընդհանուր դեպքում կիրառենք մաքեմատիկական ինդուկցիա: ■

$$5) 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \cos x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \sin x} = 1 :$$

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ եթե  $p$  պայմանը չի բավարարվում, ապա  $\liminf_{x \rightarrow 0}$  կանոնը կիրառելի չէ:

$$6) 1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x} \neq \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x) :$$

Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ  $\liminf_{x \rightarrow \infty}$  կանոնի հակադարձը ճիշտ չէ (գ) պայմանը (5.4)-ից չի հետևում):

## §6. ԹԵՎԼՈՐԻ ԲԱՆԱՉԵՎԸ

1. ԹԵՎԼՈՐԻ ԲԱՆԱՃԵՐԻ ԲԱԳՄԱՆԴԱՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ: Կիտարկենք

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0 \quad (6.1)$$

$n$  աստիճանի բազմանդամը: Մեր նպատակն է  $a_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) գործակիցներն արտահայտել  $P$  բազմանդամի և նրա ածանցյալների՝ 0 կետում ընդունած արժեքների միջոցով:

Ածանցյալների հաշվելու կանոնների համաձայն՝

$$P^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n a_m (x^m)^{(k)}, \quad 0 \leq k \leq n :$$

Այսու կողմից (տես 3, 1, օրինակ 1°), ունենք՝

$$(x^m)^{(k)} = \begin{cases} 0 & , \quad m < k \\ m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k}, & k \leq m \leq n \end{cases} :$$

Այս արժեքները տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ՝ կստանանք

$$P^{(k)}(x) = \sum_{m=k}^n a_m m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

հավասարությունը, որտեղից էլ՝

$$P^{(k)}(0) = a_k \cdot k!, \quad 0 \leq k \leq n:$$

Հետևաբար՝

$$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \dots, \quad a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}:$$

Գործակիցների ստացված արժեքները տեղադրելով (6.1)-ի մեջ՝ ստանում ենք

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6.2)$$

բանաճնը, որը կոչվում է *ԹԵՂՂՈՐԻ ԲԱՆԱՃՆԸ*:

Այժմ ստանանք այնպիսի բանաճն, որտեղ  $x$ -ի աստիճանների փոխարեն մասնակցեն  $(x - x_0)$ -ի աստիճանները ( $x_0$ -ն կամայական թիվ է):

Նյուտոնի երկանդամի բանաճնի համաձայն, ունենք՝

$$x^m = [(x - x_0) + x_0]^m = \sum_{k=0}^m C_m^k (x - x_0)^k x_0^{m-k}, \quad m = 1, 2, \dots, n:$$

Տեղադրելով (6.1)-ի մեջ և կատարելով նման անդամների միացում՝  $P(x)$  բազմանդամի համար կստանանք

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n \quad (6.3)$$

ներկայացումը:

Այժմ, նշանակելով  $x - x_0 = y$  և կրկնելով նախորդ դասողությունները, կստանանք՝

$$b_0 = P(x_0), \quad b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}, \quad b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}, \dots, \quad b_n = \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}:$$

Ստացված արժեքները տեղադրելով (6.3)-ի մեջ՝ կստանանք

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ներկայացումը, որը կոչվում է  $P(x)$  բազմանդամի *ԹԵՂՂՈՐԻ ԲԱՆԱՃՆԸ*,  $x_0$  կետի շրջակայրում:

**Դիտողություն:** Եթե  $P(x)$  բազմանդամը ներկայացված է

$$P(x) = c_0 + \frac{c_1}{1!}(x - x_0) + \frac{c_2}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{c_n}{n!}(x - x_0)^n$$

տեսքով, ապա  $c_k = P^{(k)}(x_0)$ ,  $0 \leq k \leq n$ :

**2. Թեյլորի բանաձևը կամյալկան ֆունկցիայի համար:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի մինչև  $n$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ: Նշանակենք՝

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

և  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ , կամ, որ նույնն է՝

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Ազ մասում ստացված արտահայտությունը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի Թեյլորի վերլուծություն՝  $x_0$  կետի շրջակայքում (կամ Թեյլորի բանաձև), իսկ  $r_n(x)$ -ը կոչվում է մասնարդային անդամ: Քանի դեռ  $r_n(x)$ -ի մասին լրացուցիչ տեղեկություն չունենք, (6.4) բանաձևը կիրառելի չէ, որովհետև այն ուղղակի նշանակում է (ուրիշ՝ ոչինչ):

Մեր առաջիկա նպատակն է. ելնելով  $f$  ֆունկցիայի հատկություններից՝  $r_n(x)$ -ի մասին ստանալ լրացուցիչ տեղեկություններ:

### 3. Մասնարդային անդամը Պեանոյի տեսքով:

**Թեորեմ 6.1:** Եթե  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի մինչև  $n$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ, ապա

$$r_n(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \rightarrow x_0),$$

այսինքն՝

$$\frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0) : \quad (6.5)$$

Այս պնդումն անմիջապես քիում է, հետևյալ լեմմայից.

**Լեմմա 6.1:** Եթե  $r(x)$  ֆունկցիան բավարարում է

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \dots = r^{(n)}(x_0) = 0 \quad (6.6)$$

ավայմանին, ապա

$$r(x) = o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \rightarrow x_0) :$$

► Ապացուցենք՝ մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:  $n = 1$  դեպքում ունենք՝  $r(x_0) = r'(x_0) = 0$ : Հետևաբար,

$$\frac{r(x)}{x - x_0} = \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} \rightarrow r'(x_0) = 0 \quad (x \rightarrow x_0),$$

այսինքն՝  $n = 1$  դեպքում լեմման ճիշտ է:

Այժմ ապացուցենք, որ եթե  $n$ -ի դեպքում լեմման ճիշտ է, ապա այն ճիշտ է նաև  $(n + 1)$ -ի դեպքում: Լեմման  $(n + 1)$ -ի դեպքում ապացուցելու համար պետք է ենթադրենք, որ  $r(x)$  ֆունկցիան բավարարում է

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \dots = r^{(n)}(x_0) = r^{(n+1)}(x_0) = 0$$

պայմանին: Սա նշանակում է, որ  $r'(x)$  ֆունկցիան բավարարում է (6.6)

պայմանին: Հետևաբար,  $r'(x)$  ֆունկցիան պետք է բավարարի (6.5) պայմանին (լեմմայի եզրակացությանը):

$$\frac{r'(x)}{(x - x_0)^n} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0) : \quad (6.7)$$

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{r'(c)}{(x - x_0)^n} = \frac{r'(c)}{(c - x_0)^n} \cdot \left(\frac{c - x_0}{x - x_0}\right)^n, \quad (6.8)$$

որտեղ երկրորդ քայլում կիրառեցինք Լազրանմի վերջավոր աճերի բանաճկը՝  $x_0 < c < x$  (որոշակիության համար ենթադրենք, որ  $x_0 < x$ ):

Այժմ, եթե  $x \rightarrow x_0$ , ապա  $c \rightarrow x_0$ , և (6.7)-ից ու (6.8)-ից քիում է, որ

$$\frac{r(x)}{(x - x_0)^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0),$$

$$\text{քանի} \text{որ} \ 0 < \frac{c - x_0}{x - x_0} < 1 : \blacksquare$$

Նախորդ կետի դիտողության համաձայն,  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ -ը բավարարում է (6.6) պայմանին, հետևաբար (6.5)-ը բխում է լեմմայից:

Մնացորդային անդամի ստացված արտահայտությունը տեղադրելով (6.4)-ի մեջ, կստանանք՝

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right) \quad (x \rightarrow x_0) : \end{aligned}$$

**4. Մնացորդային անդամը Լագրանժի և Կոշիի տեսքերով:** Եիցուք  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետի շրջակայքում ունի մինչև  $(n+1)$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ: Այդ շրջակայքում հաստատագրենք  $x$ -ը և  $[x_0, x]$  հատվածում (որոշակիության համար ենթադրենք՝  $x_0 < x$ ) դիտարկենք

$$\varphi(z) = f(x) - \left\{ f(z) + \frac{f'(z)}{1!}(x - z) + \frac{f''(z)}{2!}(x - z)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x - z)^n \right\}$$

ֆունկցիան: Պարզ հաշվումները ցույց են տալիս, որ

$$\varphi'(z) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n :$$

Այժմ վերցնենք  $[x_0, x]$  հատվածում դիֆերենցելի  $\psi(z)$  ֆունկցիա (որը հետագայում հարմար ձևով կընտրենք) և կիրառենք Կոշիի վերջավոր աճերի բանաձևը.

$$\frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{\psi(x_0) - \psi(x)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} :$$

Այստեղից ստացվում է՝

$$\varphi(x_0) - \varphi(x) = \frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} \varphi'(c) :$$

Քանի որ  $\varphi(x_0) = r_n(x)$ ,  $\varphi(x) = 0$ , ուստի

$$r_n(x) = -\frac{\psi(x_0) - \psi(x)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n : \quad (6.9)$$

Մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքը ստանալու համար վերցնենք՝  $\psi(z) = (x - z)^{n+1}$ : Այդ դեպքում  $\psi'(c) = -(n+1)(x - c)^n$  և, տեղադրելով (6.9)-ում, կստանանք՝

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad x_0 < c < x :$$

Մնացորդային անդամի Կոշիի տեսքը ստանալու համար վերցնենք՝  $\psi(z) = x - z$ : Այս դեպքում՝  $\psi'(c) = -1$  և, տեղադրելով այն (6.9)-ում, կստանանք՝

$$r_n(x) = (x - x_0) \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x - c)^n, \quad x_0 < c < x : \quad (6.10)$$

Նշանակենք՝  $\theta = \frac{c - x_0}{x - x_0}$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ : Տեղադրելով (6.10)-ի մեջ՝ կստանանք մնացորդային անդամի Կոշիի տեսքը.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (1 - \theta)^n (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 :$$

**5. Հիմնական տարրական ֆունկցիաների թեյլորի բանաձևեր:** Կոդապարկենք Թեյլորի վերլուծությունները 0 կետի շրջակայքում՝

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x) :$$

$$1) \quad f(x) = e^x, \quad f^{(k)}(x) = e^x, \quad f^{(k)}(0) = 1, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x) :$$

$$2) \quad f(x) = \sin x, \quad f^{(k)}(x) = \sin \left( x + k \frac{\pi}{2} \right), \quad f^{(k)}(0) = \sin k \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq k \leq 2m,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{m-1} x^{2m-1}}{(2m-1)!} + r_{2m}(x) :$$

$$3) f(x) = \cos x, f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \frac{\pi}{2}\right), f^{(k)}(0) = \cos k \frac{\pi}{2}, 0 \leq k \leq 2m,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + r_{2m}(x):$$

$$4) f(x) = (1+x)^m, f^{(k)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$

$$f^{(k)}(0) = m(m-1)\dots(m-k+1), 1 \leq k \leq n,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + r_n(x):$$

$$5) f(x) = \ln(1+x), f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + r_n(x):$$

$$6) f(x) = \arctgx, f^{(k)}(x) = (k-1)!\cos^k y \sin k\left(y + \frac{\pi}{2}\right), y = \arctgx,$$

$$f^{(k)}(0) = (k-1)!\sin k \frac{\pi}{2}, 1 \leq k \leq 2m,$$

$$\arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + r_{2m}(x):$$

## §7. ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

### 1. Ֆունկցիայի հաստատում լինելու պայմանը:

**Թեորեմ 7.1:** Եթե  $f$  ֆունկցիայի ածանցյալը  $X$  միջակայրում հապատակ է զրոյի, ապա  $f$  ֆունկցիան այդ միջակայրում հաստատում է:

► Ապացուցելու համար վերցնենք կամայական  $x_1, x_2 \in X$  կետեր և ապացուցենք, որ  $f(x_1) = f(x_2)$ : Դրա համար կիրառենք Լազրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը  $[x_1, x_2]$  հատվածում՝

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0 : \blacksquare$$

**Դիտողություն:** Այս թեորեմի մեջ բավական էր պահանջել, որ  $X$  միջակայքի ներքին կետերում ֆունկցիան ունենա վերջավոր (զորյի հավասար) ածանցյալ իսկ ծայրակետերում լինի անընդհատ (եթե նրանք պատկանում են  $X$  միջակայքին):

**Հետևանք:** Եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները դիմերենցելի են  $X$  միջակայրում և  $f'(x) = g'(x)$ ,  $x \in X$ , ապա նրանք տարրերկում են հաստատունով՝

$$f(x) = g(x) + c :$$

► Ապացուցվում է՝ կիրառելով նախորդ թեորեմը  $f(x) - g(x)$  տարրերության համար: ■

## 2. Ֆունկցիայի մոնոտոն լինելու պայմանը:

**Թեորեմ 7.2:** Որպեսզի  $X$  միջակայրում դիմերենցելի  $f$  ֆունկցիան այդ միջակայրում լինի աճող (նվազող) լայն իմաստով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ),  $x \in X$ :

► Բավարարությունն ապացուցելու համար վերցնենք կամայական  $x_1, x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2$  կետեր և կիրառենք Լազրանմի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

կամ, որ նույնը է՝

$$f(x_1) \leq f(x_2) :$$

Անհրաժեշտությունն անմիջապես բխում է ածանցյալի սահմանումից: ■

**Դիտողություն:** Եթե պահանջենք, որ ածանցյալը լինի դրական, այդ դեպքում կեզրակացնենք, որ ֆունկցիան խիստ աճող է: Սակայն  $f(x) = x^3$  ֆունկցիայի օրինակը ցույց է տալիս, որ հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ՝  $f'(0) = 0$ :

Նշենք նաև, որ նախորդ կետում արված դիտողությունը վերաբերում է նաև այս կետին:

### 3. Եքստրեմումներ:

**Սահմանում:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  միջակայքում, որի համար  $x_0$ -ն ներքին կետ է: Կասեմը,  $x_0$ -ն մաքսիմումի (սինիմումի) կետ է, եթե զոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ\*

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)):$$

Մաքսիմումի և սինիմումի կետերը կոչվում են էքստրեմումի կետեր, իսկ ֆունկցիայի արժեքներն այդ կետերում՝ էքստրեմումներ:

**Թեորեմ 7.3 (Էքստրեմումի անհրաժեշտ պայմանը):** Եթե  $x_0$  էքստրեմումի կետում  $f$  ֆունկցիան ունի ածանցյալ, ապա

$$f'(x_0) = 0: \tag{7.1}$$

► Ապացուցելու համար կկիրառենք Ֆերմայի թեորեմը  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  միջակայքում: ■

Ինչպես ցույց է տալիս  $f(x) = x^3$  ֆունկցիայի օրինակը, (7.1) պայմանը էքստրեմումի համար բավարար չէ ( $f'(x_0) = 0$ , բայց 0 կետը  $f(x) = x^3$  ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ):

(7.1) պայմանին բավարարող կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր:

### 4. Եքստրեմումներ գտնելու առաջին կանոնը:

**Թեորեմ 7.4:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $(x_0 - \delta, x_0)$  և  $(x_0, x_0 + \delta)$  միջակայքերում, իսկ  $x_0$  կետում անընդհատ է: Այդ դեպքում

1<sup>o</sup>. Եթե  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  և  $f'(x) < 0$ ,  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , ապա  $x_0$  կետը մաքսիմումի կետ է:

2<sup>o</sup>. Եթե  $f'(x) < 0$ ,  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  և  $f'(x) > 0$ ,  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , ապա  $x_0$ -ն սինիմումի կետ է:

3<sup>o</sup>. Եթե  $f'(x)$ -ը նշանը չի փոխում  $((x_0 - \delta, x_0)$  և  $(x_0, x_0 + \delta)$  միջակայքերում  $f'(x)$ -ը ունի նոյն նշանը), ապա  $x_0$ -ն էքստրեմումի կետ չէ:

\* Եթե  $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ , ապա  $x_0$ -ն կոչվում է խիստ մաքսիմումի կետ:

► Այս թեորեմը բխում է ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանից (թեորեմ 7.2): ■

### 5. Էքստրեմումներ գտնելու երկրորդ կանոնը:

**Թեորեմ 7.5:** Դիցուք  $x_0$ -ն  $f$  ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է և այդ կետում  $f$  ֆունկցիան ունի երկրորդ կարգի վերջավոր ածանցյալ: Այդ դեպքում՝

1<sup>o</sup>. Եթե  $f''(x_0) > 0$ , ասպա  $x_0$ -ն մինիմումի կետ է:

2<sup>o</sup>. Եթե  $f''(x_0) < 0$ , ասպա  $x_0$ -ն մաքսիմումի կետ է:

► Գրենք  $f$  ֆունկցիայի թեյլորի բանաձևը  $x_0$  կետի շրջակայքում: Վերցնենք  $n = 2$ , իսկ մնացորդային անդամը  $\Theta$  եանոյի տեսքով՝

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0)^2, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0):$$

Դա նույնն է, որ

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(x_0) + 2\alpha}{2}(x - x_0)^2:$$

Քանի որ  $f''(x_0) \neq 0$ , ուստի աջ կողմում գրված արտահայտության նշանը կհամընկնի  $f''(x_0)$ -ի նշանի հետ (եթե  $x$ -ը բավականաչափ մոտ է  $x_0$ -ին,  $x \neq x_0$ ), ինչից և բխում են  $1^0$  և  $2^0$  պնդումները: ■

Դիտարկենք  $-x^4$ ,  $x^4$  և  $x^3$  ֆունկցիաները ( $0$  կետում): Եթեք դեպքում ել՝  $f''(0) = 0$ : Սակայն  $0$ -ն առաջին ֆունկցիայի համար մաքսիմումի կետ է, երկրորդ ֆունկցիայի համար՝ մինիմումի կետ, իսկ երրորդ ֆունկցիայի համար եքստրեմումի կետ չէ: Այս օրինակները ցույց են տալիս, որ եթե  $f''(x_0) = 0$ , ապա էքստրեմումի մասին ոչինչ ասել չենք կարող:

### 6. Բարձր կարգի ածանցյալների օգտագործումը:

**Թեորեմ 7.6:** Դիցուք  $x_0$ -ն  $f$  ֆունկցիայի ստացիոնար կետ է և

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(2k)}(x_0) \neq 0:$$

Այդ դեպքում՝

1<sup>o</sup>. Եթե  $f^{(2k)}(x_0) > 0$ , ասպա  $x_0$ -ն մինիմումի կետ է:

2<sup>o</sup>. Եթե  $f^{(2k)}(x_0) < 0$ , ապա  $x_0$ -ն մաքսիմումի կետ է:

► Թեյլորի բանաձևի մեջ վերցնենք  $n = 2k$ , իսկ մնացողային անդամը՝  $\Phi$  եանոյի տեսքով: Կատանանք՝

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k)}(x_0) + (2k)! \alpha}{(2k)!} (x - x_0)^{2k}, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0):$$

Քանի որ  $f^{(2k)}(x_0) \neq 0$ , ապա աջ կողմում գրված արտահայտության նշանը կհամընկնի  $f^{(2k)}(x_0)$ -ի նշանի հետ, ինչից և բխում են  $1^0$ -ը և  $2^0$ -ը:

Այժմ քննարկենք այն դեպքը, երբ

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(2k)}(x_0) = 0, \quad f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0:$$

Այս դեպքում կատանանք՝

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(2k+1)}(x_0) + (2k+1)! \alpha}{(2k+1)!} (x - x_0)^{2k+1}:$$

Քանի որ աջ կողմում գրված արտահայտության մեջ  $(x - x_0)^{2k+1}$  արտադրիչը  $x_0$  կետում նշանը փոխում է, ուստի այս դեպքում  $x_0$ -ն էքստրեմումի կետ չէ: ■

**7. Գոգավորության ուղղություն:** Դիցուք  $g$  ֆունկցիան որոշված է  $E \subset R$  բազմության վրա և  $a \in E$ : Կասենք, որ  $(a, b)$  կետն ընկած է  $g$  ֆունկցիայի գրաֆիկից վերև (*համապատասխանաբար իսկստ վերև, ներքև, իսկստ ներքև*), եթե  $b \geq g(a)$  (*համապատասխանաբար  $b > g(a)$ ,  $b \leq g(a)$ ,  $b < g(a)$* ):

Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $X$  միջակայքում և դիֆերենցելի է  $x_0 \in X$  ներքին կետում: Կասենք, որ  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկը  $x_0$  կետում գոգավորությամբ ուղղված է վերև (*ներքև*), եթե  $\exists \delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $(x_0 - \delta, x_0)$  և  $(x_0, x_0 + \delta)$  միջակայքերում  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերն ընկած են գրաֆիկին  $(x_0, f(x_0))$  կետում տարված շոշափողից իսկստ վերև (*իսկստ ներքև*):

**Թեորեմ 7.7:** Եթե  $x_0$  կետում  $f$ -ը կրկնակի դիֆերենցելի է և  $f''(x_0) > 0$  ( $f''(x_0) < 0$ ), ապա  $x_0$  կետում  $f$ -ի գրաֆիկը գոգավորությամբ ուղղված է վերև (աերքել):

► Քննարկենք  $f''(x_0) > 0$  դեպքը: Գրենք  $f$  ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը՝ վերցնելով  $n = 2$ , իսկ մնացորդային անդամը՝ Պեանոյի տեսքով.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \alpha(x - x_0)^2: \quad (7.2)$$

Քանի որ  $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  հավասարումն որոշվող  $Y$ -ը գրաֆիկի  $(x_0, f(x_0))$  կետում տարված շոշափողի օրդինատն է  $x$  կետում, ապա (7.2)-ից հետևում է, որ  $\exists \delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$f(x) - Y = \frac{f''(x_0) + 2\alpha}{2}(x - x_0)^2 > 0, \text{ եթե } 0 < |x - x_0| < \delta: \blacksquare$$

### 8. Ծրջման կետ:

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկի  $(x_0, f(x_0))$  կետը կոչվում է շրջման կետ\*, եթե գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $(x_0, f(x_0))$  կետում տարված շոշափողը  $(x_0 - \delta, x_0)$  միջակայրում ընկած է գրաֆիկի մի կողմում, իսկ  $(x_0, x_0 + \delta)$  միջակայրում՝ մյուս կողմում (իսկան իմաստով):

Նախորդ թեորեմից բխում է, որ եթե  $(x_0, f(x_0))$ -ն շրջման կետ է և  $x_0$  կետում  $f$  ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է, ապա  $f''(x_0) = 0$ :

**Թեորեմ 7.8:** Դիցուք  $x_0$  կետի շրջակայրում  $f$  ֆունկցիան կրկնակի դիֆերենցելի է: Եթե գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $(x_0 - \delta, x_0)$  միջակայրում  $f''(x)$ -ը մի նշանի է, իսկ  $(x_0, x_0 + \delta)$  միջակայրում՝ հակառակ նշանի, ապա  $(x_0, f(x_0))$ -ն շրջման կետ է:

► Գրենք Թեյլորի բանաձևը՝ մնացորդային անդամը վերցնելով Լագրանժի տեսքով.

\* Եթեմն շրջման կետ են անվանում ուղղակի  $x_0$  արացիսը:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2 :$$

Ըոշափողի օրդինատը նշանակելով  $y$ , այստեղից ստանում ենք

$$f(x) - y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

ինչից և բխում է թեորեմի պնդումը: ■

### 9. Ասիմպտոտներ:

#### Սահմանումներ:

ա)  $y = b$  ուղղը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի զրաֆիլի հորիզոնական ասիմպտոտ, եթե

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad կամ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b :$$

բ)  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) ուղղը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի զրաֆիլի թերապիտիկ ասիմպտոտ, եթե

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0 \quad կամ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0 : \quad (7.3)$$

զ)  $x = a$  ուղղը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի զրաֆիլի ուղղահայաց (կամ վերտիկալ) ասիմպտոտ, եթե

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty \quad կամ \quad \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty^* :$$

**Թեորեմ 7.9:** Որպեսզի  $y = kx + b$  ( $k \neq 0$ ) ուղղը հանդիսանա  $f$  ֆունկցիայի զրաֆիլի թերապիտիկ ասիմպտոտ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b : \quad (7.4)$$

► Քանի որ (7.4) պայմաններից երկրորդը համարժեք է (7.3)-ին, ապա ապացուցման կարիք ունի (7.4) պայմաններից միայն առաջինի անհրաժեշտությունը: Իսկ դա ապացուցելու համար (7.3) պայմանը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$f(x) - (kx + b) = \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) :$$

\* Այստեղ  $\infty$  նշանը հասկացվում է  $+\infty$  կամ  $-\infty$ :

Հետևաբար՝

$$\frac{f(x)}{x} - k = \frac{\alpha}{x} + \frac{b}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) : \blacksquare$$

**Օրինակ:** Գտնենք  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  ֆունկցիայի զրաֆիկը

ասիմպտոտները:

Քանի որ  $f$  ֆունկցիան կենտ է, ապա նրա զրաֆիկը սիմետրիկ է կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

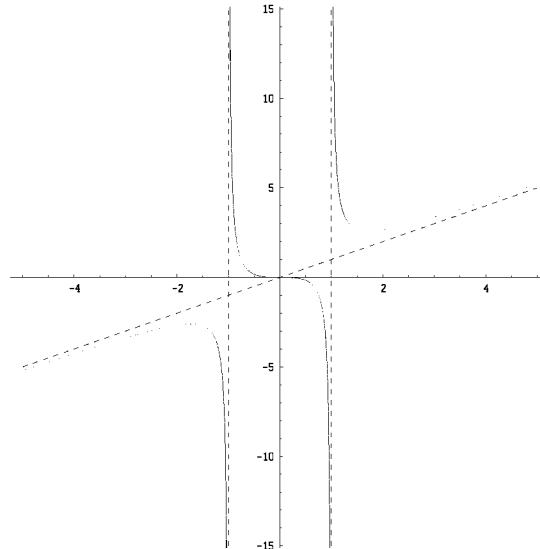
Հաշվենք (7.4) սահմանները.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 - 1} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow +\infty), \quad f(x) - x = \frac{x}{x^2 - 1} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

հետևաբար,  $y = x$  ուղիղը թեք ասիմպտոտ է:

Ուղարիայաց ասիմպտոտները գտնելու համար հայտարար հավասարեցնենք զրոյի՝  $x^2 - 1 = 0$ ,  $x = \pm 1$ : Հետևաբար,  $x = -1$  և  $x = 1$  ուղիղները ասիմպտոտներ են:

Այս ֆունկցիայի զրաֆիկը կունենա հետևյալ տեսքը:



Ընթերցողին առաջարկվում է գրաֆիկի տեսքը հետազոտել  
 $f'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$  և  $f''(x) = 2x \frac{x^2 + 3}{(x^2 - 1)^3}$  ածանցյալների օգնությամբ:

### §8. ՈՒՌՈՒՅՑԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

#### 1. Ուռուցիկ ֆունկցիայի սահմանումը և անընդհատությունը:

Սահմանում:  $f$  ֆունկցիան կոչվում է ուռուցիկ  $X$  միջակայքում, եթե յուրաքանչյուր  $x, y \in X$  կետերի  $q$ -ույզի և յուրաքանչյուր  $\lambda \in [0,1]$  թվի համար տեղի ունի

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \quad (8.1)$$

անհավասարությունը:

Որպեսզի հասկանանք, թե (8.1) պայմանը ի՞նչ երկրաչափական իմաստ ունի, նշանակենք՝

$$z = (1-\lambda)x + \lambda y :$$

Այդ դեպքում (տե՛ս գծագիրը), եթե  $f(x) \neq f(y)$ , ապա

$$\lambda = \frac{z - x}{y - x} = \frac{Z - f(x)}{f(y) - f(x)} :$$

Այստեղից ստանում ենք՝

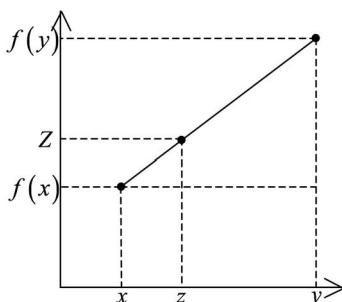
$$Z = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) ,$$

որն իրենից ներկայացնում է  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկի  $(x, f(x))$  և  $(y, f(y))$  կետերը միացնող լարի օրինատը  $z$  կետում:

$$f(x) = f(y) \quad \text{դեպքում} \quad (8.1)-ից$$

հետևում է, որ  $f(z) \leq f(x)$ :

Այսպիսով, (8.1) անհավասարությունը երկրաչափորեն նշանակում է, որ  $[x, y]$  հատվածում  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկն ընկած է  $(x, f(x))$  և  $(y, f(y))$  կետերը միացնող լարից ներքև (լայն իմաստով):

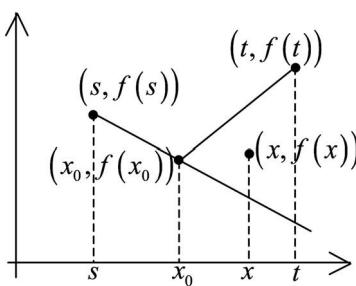


**Թեորեմ 8.1:** Բաց միջակայքում ուսուցիկ ֆունկցիան անընդհատ է:

► Դիցուք  $f$  ֆունկցիան ուսուցիկ է  $X$  բաց միջակայքում: Վերցնենք կամայական  $x_0 \in X$  կետ և ապացուցենք, որ  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում անընդհատ է, ասենք թե՝ աջից.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) : \quad (8.2)$$

Այդ նպատակով դիտարկենք  $s < x_0 < t$ ,  $s, t \in X$  ֆիքսված կետերը:

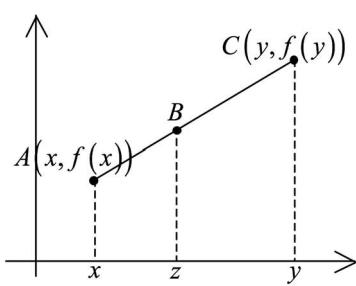


Եթե  $x_0 < x < t$ , ապա մի կողմից,  $(x, f(x))$  կետը պետք է ընկած լինի  $(s, f(s))$  և  $(x_0, f(x_0))$  կետերով անցնող ուղղից վերև, իսկ մյուս կողմից՝  $(x_0, f(x_0))$  և  $(t, f(t))$  կետերը միացնող ուղղից ներքև (տե՛ս զծագիրը): Այստեղից և բխում է (8.2)-ը: ■

**Թեորեմ 8.2:** Որպեսզի  $f$  ֆունկցիան լինի ուսուցիկ  $X$  միջակայքում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $x < z < y$ ,  $x, y, z \in X$  եռյակի համար բավարարվի

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad (8.3)$$

պայմանը:



►  $AB$  և  $BC$  հատվածների անկյունային գործակիցները հավասար են (տե՛ս զծագիրը): Եթե  $B$  կետը արցիսների առանցքին ուղղահայաց իջեցնենք ներքև, ապա  $AB$ -ի անկյունային գործակիցը կփոքրանա, իսկ  $BC$ -ինը՝ կմեծանա: Այստեղից էլ բխում է (8.3) անհավասարությունը: ■

## 2. Դիֆերենցելի ուսուցիկ ֆունկցիաներ:

**Թեորեմ 8.3:** Որպեսզի  $X$  միջակայրում դիֆերենցելի  $f$  ֆունկցիան լինի ուսուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա ածանցյալը լինի աճող (լայն իմաստով):

► **Անհրաժեշտություն:** Դիցուք  $x, y \in X$ ,  $x < y$ : Վերցնենք կամայական  $z \in (x, y)$  կետ և օգտվենք (8.3) անհավասարությունից: Այդ անհավասարության մեջ  $z$ -ը մի դեպքում ձգտեցնելով  $x$ -ի, մյուս դեպքում՝  $y$ -ի, կստանանք՝

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y): \quad (8.4)$$

**Բավարարություն:** Եթե ֆունկցիայի ածանցյալը աճող է, ապա, Լազրանմի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն, բավարարվում է (8.3) պայմանը: Իսկ դա բավարար է, որ ֆունկցիան լինի ուսուցիկ: ■

**Դիտողություն:** (8.4) պայմանը նույնակեն համարժեք է ուսուցիկությանը:

**Հետևանք:** Որպեսզի  $X$  միջակայրում կրկնակի դիֆերենցելի  $f(x)$  ֆունկցիան լինի ուսուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ,  $f''(x) \geq 0$ ,  $x \in X$ :

Այս պնդումն անմիջապես բիսում է ֆունկցիայի մոնոտոնության պայմանից:

**Թեորեմ 8.4:** Որպեսզի  $X$  բաց միջակայրում դիֆերենցելի  $f$  ֆունկցիան լինի ուսուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր  $(x_0, f(x_0))$  կետում տարված շոշափողը ընկած լինի գրաֆիկից ներքև (լայն իմաստով):

► Շոշափողի՝ գրաֆիկից ներքև ընկած լինելու պայմանն է.

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in X: \quad (8.5)$$

Հետևաբար, մենք պետք է ապացուենք, որ (8.4) և (8.5) պայմանները համարժեք են:

Եթե  $x > x_0$ , (8.5)-ը համարժեք է

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq f'(x_0)$$

գնահատականին, ինչը իր հերթին համարժեք է (8.4) անհավասարություններից առաջինին:

Եթե  $x < x_0$ , (8.5)-ը համարժեք է:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} \leq f'(x_0),$$

որը համարժեք է (8.4) անհավասարություններից երկրորդին: ■

### 3. Ոչ դիֆերենցելի ուսուցիկ ֆունկցիաներ:

**Թեորեմ 8.4:** Որպեսզի  $f$  ֆունկցիան  $X$  բաց միջակայքում լինի ուսուցիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա գրաֆիկի յուրաքանչյուր  $(x_0, f(x_0))$  կետի համար գոյություն ունենա այդ կետով անցնող ուղիղ, որն ընկած է  $f$  ֆունկցիայի գրաֆիկից ներքև:

► **Անհրաժեշտություն:** Եթե  $x', x \in X$  և  $x < x_0 < x'$ , ապա

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ և } \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

ֆունկցիաներն աճող են (համապատասխանաբար, ըստ  $x$ -ի և  $x'$ -ի) և տեղի ունի

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}$$

անհավասարությունը:

Հետևաբար, մննուող ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմի համաձայն, գոյություն ունեն

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_-(x_0) \text{ և } \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

ձախակողմյան և աջակողմյան ածանցյալները, ընդ որում,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0) \leq \frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}. \quad (8.4)$$

Այժմ, եթե  $(x_0, f(x_0))$  կետով անցնող  $y = kx + b$  ուղիղն ընտրենք այնպես, որ  $f'_-(x_0) \leq k \leq f'_+(x_0)$ , ապա այդ ուղիղը կլինի որոնելին:

**Բավարարություն:** Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Եթե  $f$ -ը ուռուցիկ չէ, ապա  $\exists x, y \in X$ ,  $x_0 \in (x, y)$ , այնպիսիք, որ  $(x_0, f(x_0))$  կետն ընկած է  $(x, f(x))$  և  $(y, f(y))$  կետերը միացնող լարից իմաստ վերև: Այս դեպքում գոյություն չունի  $(x_0, f(x_0))$  կետով անցնող ուղիղ, որի կետերն ընկած են  $f$ -ի գրաֆիկից ներքև: ■

#### 4. Յենսենի անհավասարությունը:

**Թեորեմ 8.5:** Դիցուք՝

a)  $f$  ֆունկցիան ուռուցիկ է  $X$  միջակայքում,

b)  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ,  $n \geq 2$ ,

c)  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  թվերը դրական են և  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ :

Այդ դեպքում՝

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) : \quad (8.6)$$

► Ապացուցենք մաքենատիպական ինդուկցիայի մեթոդով:  $n = 2$  դեպքում (8.6)-ը համարժեք է ուռուցիկության սահմանմանը:

Այժմ ենթադրենք, թե (8.6)-ը ճիշտ է  $n$  գումարելիի դեպքում և ապացուցենք, որ այն ճիշտ է  $(n+1)$  գումարելիի դեպքում: Այսինքն՝ ուստի՝

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in X \text{ և } \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1,$$

և պետք է ապացուցենք, որ տեղի ունի

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n+1} f(x_{n+1})$$

անհավասարությունը:

Օգտվենք ինդուկտիվ ենթադրությունից. կունենանք՝

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) =$$

$$= f\left( \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) \cdot \left( \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1} \right) \right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + (\alpha_n + \alpha_{n+1}) f\left( \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_n + \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n + \alpha_{n+1}} x_{n+1} \right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} f(x_{n-1}) + \alpha_n f(x_n) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}):$$

Թեորեմն ապացուցված է: ■

Եթե  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  պայմանը չի բավարարվում, Յենսենի անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը

$$f\left(\frac{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}\right) \leq \frac{\alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}.$$

(8.7)

Դա ապացուցելու համար նշանակենք՝  $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}$  : Այդ դեպքում  $\beta_1 + \dots + \beta_n = 1$  և, զրելով Յենսենի անհավասարությունն այդ գործակիցներով, կստանանք (8.7)-ը:

**Հետևանք (Միջինների անհավասարություն):**

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}; \quad a_i > 0, \quad i = 1, \dots, n : \quad (8.8)$$

► Քանի որ  $f(x) = e^x$  ֆունկցիան ուսուցիկ է  $(-\infty, \infty)$  միջակայքում ( $f''(x) > 0$ ), ապա, ըստ Յենսենի անհավասարության

$$e^{\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}} \leq \frac{e^{x_1} + \dots + e^{x_n}}{n};$$

Այստեղ վերցնելով  $x_i = \ln a_i$ , կստանանք (8.8)-ը: ■

**5. Հյուրերի անհավասարություն:**

**Թեորեմ 8.6: Դիցուք՝**

$$ա) \quad p > 1, \quad q > 1 \quad և \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 :$$

$$բ) \quad a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \quad p\text{-վերը դրական են:}$$

Այդ դեպքում՝

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q} : \quad (8.9)$$

► Նշանակենք՝

$$A_i = \frac{a_i}{\left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p}}, \quad B_i = \frac{b_i}{\left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{1/q}} :$$

Այդ դեպքում

$$\sum_{i=1}^n A_i^p = 1, \quad \sum_{i=1}^n B_i^q = 1, \quad (8.10)$$

հետևաբար (8.9)-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq 1: \quad (8.11)$$

Այժմ  $x_i$  և  $y_i$  թվերն ընտրենք այնպես, որ

$$A_i = e^{\frac{x_i}{p}}, \quad B_i = e^{\frac{y_i}{q}}:$$

Այժմ, հաշվի առնելով  $e^x$  ֆունկցիայի ուսուցիկությունը և ա) պայմանը, կստանանք՝

$$A_i B_i = e^{\frac{1}{p}x_i + \frac{1}{q}y_i} \leq \frac{1}{p}e^{x_i} + \frac{1}{q}e^{y_i} = \frac{1}{p}A_i^p + \frac{1}{q}B_i^q:$$

Այս անհավասարությունը զրենք  $i = 1, 2, \dots, n$  ինդեքսների համար և գումարենք ստացված անհավասարությունները: Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n A_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n B_i^q:$$

Հաշվի առնելով (8.10)-ը, այստեղից կստանանք (8.11)-ը: ■

Եթե բ) պայմանը չի բավարարվում, Հյուրերի անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}:$$

## 6. Մինկովսկիի անհավասարությունը:

**Թեորեմ 8.7:** Դիցուք  $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$  թվերը դրական են և  $p > 1$ : Այդ դեպքում՝

$$\left\{ \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right\}^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p}: \quad (8.12)$$

► Ունենք՝

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1} :$$

Ազ կողմում գրված գումարներից յուրաքանչյուրի համար կիրառենք Հյոլիերի անհավասարությունը՝ հաշվի առնելով  $(p-1)q = p$

հավասարությունը (որը ստացվում է  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  հավասարությունից):

Կստանանք՝

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/q} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/q} :$$

Ստացված անհավասարության երկու կողմը բաժանելով  
 $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/q}$  արտահայտության վրա՝ կստանանք (8.12)-ը: ■

Եթե  $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$  թվերը դրական չեն, Մինկովսկու անհավասարությունն ընդունում է հետևյալ տեսքը՝

$$\left\{ \sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p \right\}^{1/p} \leq \left\{ \sum_{i=1}^n |a_i|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{i=1}^n |b_i|^p \right\}^{1/p} :$$

Մասնավոր դեպքում՝ եթե  $p = 2$ , այս անհավասարությունն ապացուել է Կոչին:

## Վ ԳԼՈՒԽ

**ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎ****§1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ**

**1. Նախնական ֆունկցիա և անորոշ ինտեգրալ:**  $F(x)$  ֆունկցիան կոչվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի նախնական  $X$  միջակայքում, եթե

$$F'(x) = f(x), \quad x \in X :$$

Այս պարագրաֆում մենք կենթադրենք, որ դիտարկվող ֆունկցիաներն ունեն նախնական: Հետագայում կապացուցենք, որ յուրաքանչյուր անընդհատ ֆունկցիա ունի նախնական:

Եթե  $F(x)$ -ը  $f(x)$ -ի նախնական է, ապա  $(F(x) + C)$ -ն նույնպես կլինի  $f(x)$ -ի նախնական, որտեղ  $C$ -ն կամայական հաստատուն է: Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանի համաձայն, ճիշտ է նաև հակադարձ պնդումը՝ եթե  $G(x)$ -ը  $f(x)$ -ի նախնական է, ապա գրյություն ունի  $C_G$  հաստատուն, այնպիսին, որ  $G(x) = F(x) + C_G, \quad x \in X$ :

Այսպիսով, եթե  $f(x)$ -ը անընդհատ է  $X$  միջակայքում, ապա այն ունի նախնական՝  $F(x)$ , և  $f(x)$ -ի բոլոր նախնական ֆունկցիաները կարելի են երկայացնել

$$F(x) + C$$

տեսքով, որտեղ  $C$ -ն կամայական հաստատուն է:

$f(x)$  ֆունկցիայի բոլոր նախնականների բազմությունը կոչվում է այդ ֆունկցիայի անորոշ ինտեգրալ և նշանակվում է

$$\int f(x)dx$$

սիմվոլով: Հետևաբար,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad C \in R,$$

որտեղ  $F(x)$ -ը  $f(x)$ -ի որևէ նախնական է, իսկ  $C$ -ն՝ կամայական հաստատուն:

$f(x)dx$ -ը կոչվում է ենթիմտեգրալ արտահայտություն, իսկ  $f(x)$ -ը՝ ենթիմտեգրալ ֆունկցիա:

Անորոշ ինտեգրալի սահմանումից անմիջապես բխում են հետևյալ հատկությունները.

$$1^0. d \int f(x)dx = f(x)dx : \quad 2^0. \int F'(x)dx = F(x) + C :$$

Ելեւով ֆունկցիաների ածանցման քանածներից՝ կարող ենք կազմել անորոշ ինտեգրալների հետևյալ աղյուսակը.

$$1. \int 0dx = C :$$

$$2. \int 1dx = \int dx = x + C :$$

$$3. \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1) :$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C :$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C :$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C :$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C :$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C :$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C :$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C :$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C :$$

## 2. Ինտեգրման պարզագույն կանոնները:

ա) Եթե  $a$  -ն հաստատուն է, ապա

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx := aF(x) + C \quad (F'(x) = f(x)),$$

այսինքն՝ հաստատուն արտադրիչը կարելի է իմտեզրալի նշանի տակից դուրս հանել:

$$p) \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx := F(x) \pm G(x) + C,$$

$$(G'(x) = g(x)),$$

այսինքն՝ ֆունկցիաների գումարի (տարրերության) իմտեզրալը հավասար է այդ ֆունկցիաների իմտեզրալների գումարին (տարրերությանը):

$$q) Եթե F(x)-ը f(x)-ի որևէ նախնական է՝ F'(x) = f(x), ապա$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C :$$

Այս կանոնները բխում են անորոշ իմտեզրալի սահմանումից և ածանցման համապատասխան կանոններից:

**Օրինակներ:**

$$1) \int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \int (x-a)^{-k} dx = \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C \quad (k \neq 1):$$

$$2) \int \sin mx dx = -\frac{1}{m} \cos mx + C, \quad \int \cos mx dx = \frac{1}{m} \sin mx + C \quad (m \neq 0):$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0):$$

$$4) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C :$$

$$5) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[ \int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a} \right] = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C :$$

$$6) \text{Քանի որ } \cos^2 mx = \frac{1 + \cos 2mx}{2} \text{ և } \sin^2 mx = \frac{1 - \cos 2mx}{2},$$

$$\text{ապա } \int \cos^2 mx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4m} \sin 2mx + C, \quad \int \sin^2 mx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4m} \sin 2mx + C :$$

**3. Փոփոխականի փոխարինում:** Եթե  $f(t)$  և  $\varphi'(x)$  ֆունկցիաներն անընդհատ են իսամապատասխանաբար  $T$  և  $X$  միջակայթերում, ընդունում,  $\varphi(X) \subset T$ , ապա

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C, \quad (1.1)$$

որտեղ  $F'(t) = f(t)$ :

Այս բանաձևը բխում է անորոշ ինտեգրալի սահմանումից և բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևից:

Փոփոխականի փոխարինման (1.1) բանաձևը կարելի է ներկայացնել նաև հետևյալ տեսքով.

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \quad (1.1')$$

որտեղ ենթադրվում են, որ աջ կողմի ինտեգրալը հաշվելոց հետո, արդյունքում պետք է տեղադրել  $t = \varphi(x)$ :

(1.1') բանաձևը կարելի է գրել նաև

$$\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(t)dt \quad (1.1'')$$

տեսքով:

$$\text{Մասնավորապես՝ } \int d\varphi(x) = \varphi(x) + C :$$

**Օրինակներ:**

$$1) \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x d \sin x = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C,$$

(այստեղ՝  $t = \sin x$ ):

$$2) \int \sin^3 x dx = - \int (1 - \cos^2 x) d \cos x = - \int (1 - t^2) dt =$$

$$= -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C:$$

Հաճախ հարկ է լինում (1.1') փոփոխականի փոխարինման բանաձևը օգտագործել հակառակ ուղղությամբ՝

$$\int f(t)dt = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx :$$

Այստեղ ենթադրվում է, որ ազ կողմի իմտեզրալը հաշվելոց հետո, արդյունքում պեսք է տեղադրել  $x = \varphi^{-1}(t)$ :

Որպես օրինակ հաշվենք հետևյալ իմտեզրալը.

$$3) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0, \quad -a \leq x \leq a :$$

$$\text{Նշանակենք } x = a \sin t, \quad dx = a \cos dt, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (x \text{ և } t \text{ տառերի})$$

տեղերը փոխված են):

Տեղադրելով՝ կստանանք

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \left( \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C :$$

Հաշվենք մեկ այլ հաճախ հանդիպող իմտեզրալ.

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} \quad (\alpha \geq 0) :$$

$$\text{Նշանակենք } \sqrt{x^2 + \alpha} = t - x : \quad \text{Կունենանք}$$

$$x^2 + \alpha = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2 - \alpha}{2t},$$

հետևաբար,

$$\sqrt{x^2 + \alpha} = t - \frac{t^2 - \alpha}{2t} = \frac{t^2 + \alpha}{2t}, \quad dx = \frac{t^2 + \alpha}{2t^2} dt :$$

Այսպիսով՝

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C :$$

**4. Մասերով իմտեզրում:** Ապացուենք, որ եթե  $u$  և  $v$  ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են  $X$  սիցակայրում\*, ապա

$$\int u dv = uv - \int v du : \tag{1.2}$$

\*  $f$  ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ դիֆերենցելի  $X$  միջակայրում, եթե  $f' \in C(X)$ :

Արտադրյալի դիֆերենցման կանոնի համաձայն՝  $d(uv) = udv + vdu$ ,  
ուստի՝  $udv = d(uv) - vdu$ : Ինտեգրելով և օգտվելով տարրերության  
ինտեգրալի բանաձևից՝ կստանանք (1.2)-ը:

**Օրինակներ:**

$$1) \int x \cos x dx = \int x d \sin x = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C:$$

$$\begin{aligned} 2) \int x^3 \ln x dx &= \int \ln x d \frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} d \ln x = \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \int \arct g x dx &= x \arct g x - \int x d \arct g x = x \arct g x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \arct g x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \arct g x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) I &= \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = x \sqrt{x^2 + \alpha} - \int x d \sqrt{x^2 + \alpha} = x \sqrt{x^2 + \alpha} - \\ &- \int \frac{x^2 + \alpha - \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = x \sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}: \end{aligned}$$

Հաշվի առնելով նախորդ կետի 4) օրինակը՝ այստեղից կստանանք

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \alpha} + \frac{\alpha}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 + \alpha}| + C$$

բանաձևը:

$$5) I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int \cos bx d e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx,$$

$$I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \int \sin bx d e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx:$$

Տեղադրելով մեկը մյուսի մեջ՝ կստանանք

$$I_1 = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I_1,$$

$$I_2 = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} I_2$$

բանաձևերը: Այստեղից կարող ենք հաշվել  $I_1$ -ը և  $I_2$ -ը՝

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C :$$

$$\begin{aligned} 6) I_n &= \int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d(x^2 + a^2)^{-n} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2 n I_{n+1}: \end{aligned}$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$I_{n+1} = \frac{1}{2a^2 n} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2a^2 n} I_n:$$

Այսպիսով,  $I_{n+1}$ -ը արտահայտվեց  $I_n$ -ի միջոցով: Այսպիսի բանաձևը կոչվում է **ռեկորդնային բանաձև**:

Հաշվի առնելով, որ

$$I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C,$$

մենք կարող ենք հերթականությամբ հաշվել  $I_2$ -ը,  $I_3$ -ը և այլն:

Վերջում նշենք, որ տարրական ֆունկցիայի ինտեգրալը հաճախ տարրական ֆունկցիա չէ: Ահա այդպիսի օրինակներ .\*

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx:$$

## §2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ ԵՎ ԳՈՅՉՈԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

**1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանում:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $[a, b]$  հատվածում\*\*: Կետերի  $x_0, x_1, \dots, x_n$  շարվածքը կոչվում է  $[a, b]$  հասովածի տրոհում, եթե  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ :

Դիտարկենք այդ հատվածի կամայական  $P$  տրոհում՝

\* Г.Харді, Интегрирование элементарных функций. М., 1935.

\*\*  $f$ -ը կարող է և  $a, b$  ծայրակետերում որոշված չլինել:

$$P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b :$$

Նշանակենք՝  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  և  $\lambda = \max_{0 \leq i < n} \Delta x_i$ :  $\lambda$ -ն

կոչվում է  $P$  տրոհման տրամագիծ:

$[x_i, x_{i+1}]$  տրոհման հատվածներից յուրաքանչյուրում կամայապես վերցնենք մեկ  $\xi_i$  կետ՝

$$x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

և կազմենք հետևյալ գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

որը կոչվում է *Ոիմանի ինտեգրալային գումար*:

Կասենք, որ  $\lambda$ -ն  $0$ -ի ձգտելիս,  $\sigma$  ինտեգրալային գումարը ձգտում է  $I$  վերջավոր սահմանին և կգրենք՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $\lambda < \delta$  տրամագծով կամայական տրոհմանը համապատասխանող յուրաքանչյուր  $\sigma$  գումար բավարարում է.  $|\sigma - I| < \varepsilon$  անհավասարությանը:

Եթե այդ  $I$  վերջավոր սահմանը գոյություն ունի, ապա այն կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի ինտեգրալ (*կամ՝ որոշյալ ինտեգրալ, կամ՝ Ոիմանի ինտեգրալ*)  $[a, b]$  հատվածում, նշանակվում է հետևյալ կերպ՝

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

և ասում են, որ  $\int$  ֆունկցիան ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում  $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ :

## 2. Ինտեգրելիության անհրաժեշտ պայմանը:

**Թեորեմ 2.1:** *Ինտեգրելի ֆունկցիան սահմանավակ է:*

► Ապացուցենք, որ եթե  $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ , ապա այն սահմանավակ է, օրինակ՝ վերևից:

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ.  $f$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածում վերևից սահմանափակ չէ: Այդ դեպքում տրոհման հատվածներից գոնեւ մեկի վրա այն նույնպես վերևից սահմանափակ չէ:

Թող, որ դա լինի  $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$  հատվածը: Ֆիքսելով  $\xi_i$ ,  $i \neq i_0$ , կետերը և փոփոխելով  $\xi_{i_0}$ -ն՝  $f(\xi_{i_0})$ -ն, ու նրա հետ մեկտեղ, նաև  $\sigma$  գումարը, կարող ենք կամայապես մեծ դարձնել: Հետևաբար,  $\sigma$  գումարը վերջավոր սահման չունի, ինչը հակասում է  $f$  ֆունկցիայի ինտեգրելիությանը: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմ 2.1-ի պնդման հակադարձը ճշմարիտ չէ: Օրինակ,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in I \end{cases}$$

Դրիհիսեի ֆունկցիան թվային առանցքի յուրաքանչյուր հատվածում սահմանափակ է, սակայն ինտեգրելի չէ: Խոկապես, օրինակ  $[0, 1]$  հատվածում այս ֆունկցիայի ինտեգրալային գումարը ըստ  $\xi_i$  ռացիոնալ կետերի հավասար է 1, իսկ ըստ իրացիոնալ կետերի՝ 0:

Այսպիսով, ստորև մենք կդիտարկենք միայն սահմանափակ ֆունկցիաները:

**3. Դարրոի գումարներ:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան սահմանափակ է  $[a, b]$  հատվածում և  $P$ -ն այդ հատվածի կամայական տրոհում է: Նշանակենք՝

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x), M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

և ներմուծենք

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

գումարները, որոնց համապատասխանաբար կոչում են Դարրոի ստորին և վերին գումարներ ( $P$  տրոհման համար):

Քանի որ

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i, \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

ապա, բազմապատկելով այս անհավասարությունների բոլոր կողմերը  $\Delta x_i$ -երով ու ստացված անհավասարությունները գումարելով, կստանան՝

$$s \leq \sigma \leq S :$$

**Դիտողություն:** Ֆիքսած տրոհման դեպքում  $s$  և  $S$  գումարները ֆիքսված են (անփոփոխ են), իսկ  $\sigma$  գումարը կարող է փոփոխվել ( $\xi_i$  կետերի փոփոխման հաշվին): Մյուս կողմից,  $\xi_i$  կետը փոփոխելով  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում, կարող ենք  $f(\xi_i)$ -ի ցանկացած չափով մոտեցնել թե՛  $m_i$ -ին, և թե՛  $M_i$ -ին: Այդ պատճառով էլ  $\sigma$  գումարը կարող է կամայապես մոտ լինել թե՛  $s$ -ին, և թե՛  $S$ -ին:

Այսինքն՝ ֆիքսված տրոհման դեպքում  $s$ -ը և  $S$ -ը հանդիսանում են  $\sigma$  ինտեգրալի գումարների, համապատասխանաբար, ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը:

Դարբուի գումարներն օժտված են հետևյալ երկու հատկություններով.

**Առաջին հատկություն:** *Sprinkmaan* կետերին նոր կետեր ավելացնելիս՝ Դարբուի ստորին գումարը կարող է միայն մեծանալ, իսկ վերին գումարը՝ փորձանալ:

► Ապացուցենք միայն վերին գումարին վերաբերող պնդումը: Ենթադրենք, թե  $x_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) տրոհման կետերին ավելացնում ենք ևս մեկ կետ՝  $x'$ , ընդ որում,

$$x_k < x' < x_{k+1} :$$

Եթե այս նոր տրոհմանը համապատասխանող վերին գումարը նշանակենք  $S'$ -ով, ապա այն նախկին  $S$ -ից կտարբերվի ընդամենը նրանով, որ վերջինիս մեջ մտնող  $M_k(x_{k+1} - x_k)$  գումարելին փոխարինված է

$$\bar{M}_k(x' - x_k) + \bar{\bar{M}}_k(x_{k+1} - x')$$

գումարով, որտեղ  $\bar{M}_k$ -ը և  $\bar{\bar{M}}_k$ -ը  $f$  ֆունկցիայի ճշգրիտ վերին եզրերն են համապատասխանաբար  $[x_k, x']$  և  $[x', x_{k+1}]$  հատվածներում:

Քանի որ  $\bar{M}_k \leq M_k$  և  $\overline{\bar{M}}_k \leq M_k$ , ապա

$$\bar{M}_k(x' - x_k) \leq M_k(x' - x_k),$$

$$\overline{\bar{M}}_k(x_{k+1} - x') \leq M_k(x_{k+1} - x'):$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կստանանք

$$\bar{M}_k(x' - x_k) + \overline{\bar{M}}_k(x_{k+1} - x') \leq M_k(x_{k+1} - x_k)$$

անհավասարությունը, որտեղից էլ հետևում է, որ  $S' \leq S$ : ■

**Լրացում:**  $f$  ֆունկցիայի տատանումն ամբողջ  $[a, b]$  հատվածի վրա նշանակենք  $\Omega$ -ով: Քանի որ  $M_k - \bar{M}_k$  և  $M_k - \overline{\bar{M}}_k$  տարրերությունները չեն գերազանցում  $\Omega$ -ն, ուստի  $S - S'$  տարրերությունը չի գերազանցի  $\Omega\lambda$  արտադրյալը ( $\Omega\Delta x_k \leq \Omega\lambda$ ): Եթե տրոհման կետերին ավելացվի  $m$  հատ կետ, ապա վերին գումարների տարրերությունը չի գերազանցի  $m\Omega\lambda$  թիվը:

**Երկրորդ հատկություն:** Դարրուի յուրաքանչյուր ստորին գումարը չի գերազանցում յուրաքանչյուր վերին գումարը:

► Դիցուք  $P_1$ -ը և  $P_2$ -ը  $[a, b]$  հատվածի կամայական տրոհումներ են: Նրանց համապատասխան Դարրուի գումարները նշանակենք  $s_1$ ,  $S_1$  և  $s_2$ ,  $S_2$ : Պետք է ապացուցենք, որ

$$s_1 \leq S_2:$$

Այդ նպատակով կազմենք մի նոր  $P$  տրոհում, որը ստացվում է  $P_1$  և  $P_2$  տրոհումները միավորելիս, այսինքն՝ որպես  $P$  տրոհման կետեր վերցնում ենք  $P_1$ -ի ու  $P_2$ -ի արողման բոլոր կետերը: Այս նոր տրոհմանը համապատասխանող Դարրուի գումարները նշանակենք  $s$  և  $S$ : Առաջին հատկության համաձայն, ունենք՝

$$s_1 \leq s; \quad S \leq S_2:$$

Սակայն՝  $s \leq S$ , որպես նույն տրոհմանը համապատասխանող ստորին և վերին գումարներ: Համադրելով ստացված երեք անհավասարությունները՝ ստանում ենք պահանջվող անհավասարությունը: ■

Այժմ դիտարկենք բոլոր ստորին գումարների բազմությունը՝  $\{s\}$  (բոլոր տրոհումներին համապատասխանող): Այս սահմանափակ է վերևից յուրաքանչյուր  $S$  վերին գումարով (երկրորդ հատկությանը համաձայն):

Նշանակենք՝

$$I_* = \sup \{s\} :$$

Քանի որ ճշգրիտ վերին եզրը վերին եզրերից փոքրագույնն է, ապա  $I_* \leq S$ , որտեղ  $S$ -ը կամայական վերին գումար է: Ուստի, նշանակելով

$$I^* = \inf \{S\},$$

կստանանք՝

$$I_* \leq I^* :$$

Այսպիսով՝

$$s \leq I_* \leq I^* \leq S : \quad (2.1)$$

$I_*$  և  $I^*$  թվերը կոչվում են, համապատասխանաբար, *Դարրուի ստորին և վերին ինտեգրալներ*:

#### 4. Ինտեգրալի գոյության պայման:

**Թեորեմ 2.2:** Ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ տեղի ունենա

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0 \quad (2.2)$$

հավասարությունը:

► *Անհրաժեշտություն:* Ունենք, որ  $\int$  ֆունկցիան ինտեգրելի է, այսինքն՝

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I,$$

կամ, որ նույնն է, յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow I - \varepsilon < \sigma < I + \varepsilon : \quad (2.3)$$

Քանի որ ֆիքսած տրոհման դեպքում  $s$ -ը և  $S$ -ը հանդիսանում են  $\sigma$  ինտեգրալային գումարների ճշգրիտ ստորին և ճշգրիտ վերին եզրերը (տե՛ս 3-ի դիտողությունը), ապա

$$\lambda < \delta \Rightarrow I - \varepsilon \leq s \leq S \leq I + \varepsilon :$$

Հետևաբար՝

$$\lambda < \delta \Rightarrow S - s \leq 2\varepsilon ,$$

ինչը նշանակում է, որ տեղի ունի (2.2) պայմանը:

**Բավարարություն:** (2.2) պայմանը նշանակում է, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow S - s < \varepsilon : \quad (2.4)$$

Այստեղից և (2.1) անհավասարություններից հետևում է, որ

$$I_* = I^* :$$

Նշանակենք  $I = I_*$  և ցույց տանք, որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = I :$$

Քանի որ  $s \leq I \leq S$  և  $s \leq \sigma \leq S$ , ապա հաշվի առնելով (2.4)-ը, կստանանք՝

$$\lambda < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \varepsilon : \blacksquare$$

Վերադառնալով՝ Դարբուի գումարների նշանակումներին՝ ինտեգրալի գոյության (2.2) պայմանը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) \Delta x_i = 0 :$$

Նշանակելով  $\omega_i = M_i - m_i$  (ֆունկցիայի տատանումը  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածի վրա)՝ այդ պայմանը կը նդունի հետևյալ տեսքը.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0 : \quad (2.2')$$

**Թեորեմ 2.3 (Դարբու):** Յուրաքանչյուր սահմանափակ  $f$  ֆունկցիայի համար ճշմարիտ են հետևյալ սահմանային առնչությունները.

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s = I_*, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = I^* : \quad (2.5)$$

► Ապացուցենք նշված առնչություններից միայն երկրորդը: Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Քանի որ  $I^*$ -ը  $S$ -երի ճշգրիտ ստորին եզրն է,

ապա գոյություն ունի մի  $P_1 : a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b$  տրոհում, որի համապատասխան  $S_1$  վերին գումարը բավարարում է

$$S_1 < I^* + \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.6)$$

պայմանին:

Այժմ վերցնենք կամայական  $P$  տրոհում, որի  $\lambda$  տրամագիծը բավարարում է

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{2m\Omega} := \delta \quad (2.7)$$

անհավասարությանը ( $\Omega$ -ա  $f$ -ի տատանումն է  $[a, b]$  հատվածում): Այդ տրոհմանը համապատասխանող Դարբուի վերին գումարը նշանակենք  $S$ -ով և ապացուենք

$$S - I^* < \varepsilon \quad (2.8)$$

անհավասարությունը, որը համարժեք է (2.5)-ի երկրորդ առնչությանը:

Այդ նպատակով կազմենք  $P_2 := P \cup P_1$  տրոհումը և նրա համապատասխան Դարբուի վերին գումարը նշանակենք  $S_2$ -ով: Ունենք՝

$$S - I^* = (S - S_2) + (S_2 - I^*): \quad (2.9)$$

Դարբուի գումարների առաջին հատկության լրացմանը համաձայն՝

$$S - S_2 \leq m\Omega\lambda,$$

քանի որ  $P_2$ -ը ստացվում է  $P$ -ից՝ ավելացնելով  $P_1$ -ի կետերը, իսկ այդ ավելացված կետերի քանակը չի գերազանցում  $m$ -ը:

Այժմ, հաշվի առնելով (2.7)-ը, կստանանք՝

$$S - S_2 < \frac{\varepsilon}{2}: \quad (2.10)$$

Մյուս կողմից,  $P_2$ -ը ստացվում է  $P_1$ -ից՝ ավելացնելով  $P$ -ի կետերը, ուստի՝  $S_2 \leq S_1$ : Հաշվի առնելով (2.6)-ը, կստանանք

$$S_2 - I^* < \frac{\varepsilon}{2}: \quad (2.11)$$

Համեմատելով (2.9) - (2.11)-ը՝ կստանանք (2.8)-ը: ■

**Հետևածք 1:** Ինտեգրալի գոյության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $I_* = I^*$ :

Այս պնդումը հետևում է ինտեգրալի գոյության (2.2) պայմանից և Դարրովի թեորեմից:

**Հետևածք 2:** Եթե սահմանափակ  $f$  ֆունկցիան այնպիսին է, որ կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի համար զոյլություն ունի մի այնպիսի  $P$  տրոհում, որին համապատասխանող Դարրովի գումարները բավարարում են  $S - s < \varepsilon$  պայմանին, ապա  $f$  ֆունկցիան ինտեգրելի է:

Ապացույցը բխում է (2.1)-ից և նախորդ հետևանքից:

### §3. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ

Օգտվելով ինտեգրալի գոյության (2.2)՝ պայմանից կամ Դարրովի թեորեմի երկրորդ հետևանքից՝ կարող ենք բացահայտել ինտեգրելի ֆունկցիաների որոշ դասեր:

**Թեորեմ 3.1:** Եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, ապա այն ինտեգրելի է այդ հատվածում\*:

► Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Կամտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, զոյլություն ունի մի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ կամայական  $P$  տրոհման համար՝  $\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i < \varepsilon$ :

$$\text{Այդ դեպքում} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon(b-a), \text{ այսինքն,}$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0, \text{ եթե } \lambda \rightarrow 0:$$

Ինտեգրալի գոյության (2.2) պայմանի համաձայն՝  $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ : ■

**Թեորեմ 3.2:** Եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է և սահմանափակ  $(a, b)$  բաց միջակայքում, ապա այն ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում:

\* Կարճ՝  $C[a, b] \subset \mathfrak{R}[a, b]$ :

► Վերցնենք  $b - a$ -ից փոքր կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Կանոնը թերեմի հետևանքի համաձայն, գոյություն ունի՝  $\left[ a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2} \right]$  հատվածի

$$a + \frac{\varepsilon}{2} = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = b - \frac{\varepsilon}{2}$$

տրոհում, այնպիսին, որ  $\omega_i < \varepsilon$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 2$ :

Ընտեղը  $[a, b]$  հատվածի հետևյալ  $P$  տրոհումը.

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b:$$

Այդ տրոհման համար կունենանք՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < 2\Omega \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon(b - a),$$

որտեղ  $\Omega$ -ն  $f$ -ի տատանումն է  $[a, b]$  հատվածում:

Այժմ, ‘Դարբուի թերեմի երկրորդ հետևանքի համաձայն,  $f$ -ը ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում: ■

Նման ձևով կապացուցվի նաև հետևյալ պնդումը.

**Եթե  $[a, b]$  հատվածում սահմանափակ  $f$  ֆունկցիան ինտեգրելի է կամայական  $[a', b'] \subset (a, b)$  հատվածում, ապա այն ինտեգրելի է նաև  $[a, b]$  հատվածում:**

**Թեորեմ 3.3:** Եթե  $f$  ֆունկցիան ինտեգրելի է  $[a, c]$  և  $[c, b]$  հատվածներում ( $a < c < b$ ), ապա այն ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում:

► Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ:  $f$  ֆունկցիայի  $[a, c]$  և  $[c, b]$  հատվածներում ինտեգրելիությունից հետևում է, որ գոյություն ունեն այդ հատվածների  $P_1$  և  $P_2$  տրոհումներ՝ համապատասխանաբար ‘Դարբուի  $s_1$ ,  $S_1$  և  $s_2$ ,  $S_2$  զումարներով, այնպիսիք, որ

$$S_1 - s_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad S_2 - s_2 < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Որպես  $[a, b]$  հատվածի  $P$  տրոհում վերցնենք  $P_1$  և  $P_2$  տրոհումների միավորումը:  $s := s_1 + s_2$ -ը և  $S := S_1 + S_2$ -ը կհանդիսանան այս տրոհման ‘Դարբուի գումարները, հետևաբար,

$$S - s = S_1 - s_1 + S_2 - s_2 < \varepsilon :$$

Համաձայն Դարբուի թեորեմի երկրորդ հետևանքի,  $f$ -ը իմտեզրելի է  $[a, b]$  հատվածում: ■

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիա՝ կհամոզվենք, որ այս թեորեմի եզրակացությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե  $[a, b]$  հատվածը տրոհվում է ոչ թե երկու, այլ կամայական վերջավոր թվով հատվածների:

Թեորեմ 3.2-ից և թեորեմ 3.3-ից բխում է, որ եթե  $f$  հատվածում սահմանափակ  $f$  ֆունկցիան խզվում է ընդամենը վերջավոր թվով կետերում, ապա այն իմտեզրելի է այդ հատվածում:

**Թեորեմ 3.4:** Հատվածում մոնուռն ֆունկցիան իմտեզրելի է:

► Ապացուցենք այն դեպքում, եթե ֆունկցիան աճող է (լայն իմաստով): Ուսնենք՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \Delta x_i \leq \lambda [f(b) - f(a)],$$

որտեղ  $\lambda$  -ն տրոհման տրամագիծն է: Հետևաբար՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0): ■$$

Ճիշտ է նաև հետևյալ պնդումը. Եթե  $f$  -ը մոնուռն է և սահմանափակ  $(a, b)$  բաց միջակայրում, ապա այն իմտեզրելի է  $[a, b]$  հատվածում:

Ապացուցվում է թեորեմ 3.2-ի սխեմայով:

#### §4. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

##### 1. Հավասարությունով արտահայտվող հատկություններ:

**Թեորեմ 4.1:** Եթե  $f$  -ը իմտեզրելի է  $[a, b]$  հատվածում, ապա այն իմտեզրելի կլինի նաև  $[a, c]$  և  $[c, b]$  ( $a < c < b$ ) հատվածներում, ընդ որում,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx : \quad (4.1)$$

► Վերցնենք  $[a, b]$  հատվածի  $P$  սրբում, այնպիսին, որ այն պարունակի  $c$  կետը: Այդ դեպքում

$$\sum_a^b \omega_i \Delta x_i = \sum_a^c \omega_i \Delta x_i + \sum_c^b \omega_i \Delta x_i :$$

Քանի որ աջ կողմի գումարելիները դրական են, ապա

$$\sum_a^c \omega_i \Delta x_i \leq \sum_a^b \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0), \quad \sum_c^b \omega_i \Delta x_i \leq \sum_a^b \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0) :$$

Հետևաբար,  $f$ -ը ինտեգրելի է  $[a, c]$  և  $[c, b]$  հատվածներում:

(4.1) հավասարությունն ապացուցելու համար զբենք համապատասխան հավասարությունը  $\Omega$ -իմանի գումարելի համար.

$$\sum_a^b f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_a^c f(\xi_i) \Delta x_i + \sum_c^b f(\xi_i) \Delta x_i :$$

Այստեղ անցնելով սահմանի, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ , կստանանք (4.1)-ը: ■

Մինչ այժմ մենք սահմանել ենք  $f$  ֆունկցիայի ինտեգրալ  $[a, b]$  հատվածում, որտեղ  $a < b$ : Օգտակար է ընդլայնել սահմանումը  $b \leq a$  դեպքում՝

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{և} \quad \int_a^a f(x) dx = 0 :$$

Դժվար չէ համոզվել, որ այս պայմանավորվածության դեպքում (4.1) հավասարությունը մնում է ուժի մեջ՝  $a, b$  և  $c$  կետերի կամայական դասավորվածության դեպքում, միայն բերած  $f$  ֆունկցիան լինի ինտեգրելի դիտարկվող հատվածներից ամենամեծում:

**Թեորեմ 4.2:** Դիցուք  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները ինտեգրելի են  $[a, b]$  հատվածում և  $C$ -ն որևէ հաստատում է: Այդ դեպքում

$$a) f(x) \pm g(x), \quad p) Cf(x), \quad q) |f(x)|, \quad \eta) f(x)g(x)$$

ֆունկցիաները նույնակեն կլինեն ինտեգրելի  $[a, b]$  հատվածում, ընդունում,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx , \quad (4.2)$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx : \quad (4.3)$$

► ա) և բ) ֆունկցիաների ինտեգրելիությունն ու (4.2), (4.3) հավասարությունները բխում են Ո-իմանի համապատասխան գումարների հավասարություններից:

*զ)-ի ապացույցը:* Քանի որ  $\|f(x)| - |f(y)\| \leq |f(x) - f(y)|$ , իսկ

$$\omega_i(f) = \sup_{x,y \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - f(y)|, \quad \omega_i(|f|) = \sup_{x,y \in [x_i, x_{i+1}]} \|f(x)| - |f(y)\|,$$

ապա  $\omega_i(|f|) \leq \omega_i(f)$  և  $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(|f|) \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ): ■

*դ)-ի ապացույցը:* Քանի որ  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն ինտեգրելի են, ապա դրանք սահմանափակ են՝  $|f(x)| \leq L$ ,  $|g(x)| \leq K$ ,  $x \in [a, b]$ :

Մյուս կողմից, եթե  $x, y \in [x_i, x_{i+1}]$ , ունենք՝

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + \\ &+ |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq L\omega_i(g) + K\omega_i(f): \end{aligned}$$

Հետևաբար՝  $\omega_i(fg) \leq L\omega_i(g) + K\omega_i(f)$ , ուստի՝

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(fg) \Delta x_i \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(g) \Delta x_i + K \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \rightarrow 0 (\lambda \rightarrow 0): ■$$

## 2. Անհավասարություններով արտահայտվող հասկություններ:

**Թեորեմ 4.3:** Դիցուք  $f, g \in \mathfrak{R}[a, b]$ : Այդ դեպքում

ա) եթե  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ , ապա

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0,$$

բ) եթե  $f(x) \leq g(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , ապա

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

$$q) Եթե  $M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$ ,  $m = \inf_{x \in [a,b]} f(x)$ , ապա$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

$$\eta) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx :$$

$$\blacktriangleright w) Քանի որ  $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a,b]$ , ուստի  $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \geq 0$  :$$

Այս անհավասարության մեջ անցնելով սահմանի, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ , կստանանք ա)-ն:

$p$ -ն ապացուցելու համար ա)-ն կկիրառենք  $g-f$  ֆունկցիայի համար և կօգտվենք նախորդ թեորեմի (4.2) հավասարությունից:

$q$ -ն անմիջապես բխում է  $p$ -ից ( $m \leq f(x) \leq M$ ):

$q$ -ն ապացուցելու համար կզբանք համապատասխան անհավասարությունը Ուժմանի գումարների համար, կօգտվենք նախորդ թեորեմի  $q$ ) պնդումից և կանցնենք սահմանի, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ : ■

### 3. Սիցին արժեքի թեորեմը:

**Թեորեմ 4.4:** Եթե  $f$  -ը ինտեղրելի է  $[a,b]$  հաստվածում, ապա գոյություն ունի  $\mu \in [m,M]$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

որտեղ  $M$  -ը և  $m$  -ը  $f$  ֆունկցիայի ծզգրիտ եղբերն են  $[a,b]$  հաստվածում:

$\blacktriangleright$  Նախորդ թեորեմի  $q$ ) պնդումից ունենք՝

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M :$$

Կշանակելով

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ■

Այս դեպքում, եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում,  $M$  և  $m$  ճշգրիտ եզրերը հանդիսանում են  $f$  ֆունկցիայի արժեքներ (համաձայն Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի), և նրանց միջև ընկած  $\mu$  թիվը ևս հանդիսանում է  $f$  ֆունկցիայի արժեք (համաձայն Բոլցանո - Կոշիի երկրորդ թեորեմի հետևաբար,  $\int_a^b f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, ապա ապա գոյություն ունի  $c \in [a, b]$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a):$$

#### 4. Սիցին արժեքի բնորոշուազված թեորեմը:

**Թեորեմ 4.5:** Եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն իմտեզրելի են  $[a, b]$  հատվածում և  $g$ -ն նշանը չի փոխում այդ հատվածում, ապա գոյություն ունի  $\mu \in [m, M]$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

որտեղ  $m$  -ը և  $M$  -ը  $f$  ֆունկցիայի ճշգրիտ եզրերն են  $[a, b]$  -ում:

Այս թեորեմի մեջ վերցնելով  $g(x) \equiv 1$ , կստանանք նախորդ թեորեմը:

► Ապացուցենք այն դեպքում, եթե  $g(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ : Ուսենք՝

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a, b]:$$

Հետևաբար՝

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \quad x \in [a, b]:$$

Օգտվելով թեորեմ 4.3-ի զ) պնդումից և թեորեմ 4.2-ից՝ կստանանք

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx \tag{4.4}$$

անհավասարությունները, որտեղ, համաձայն թեորեմ 4.3-ի ա) պնդման,

$$\int_a^b g(x)dx \geq 0 :$$

Եթե այս ինտեգրալը դրական է, ապա (4.4) անհավասարության բոլոր կողմերը բաժանելով այդ ինտեգրալի վրա և նշանակելով

$$\mu = \int_a^b f(x)g(x)dx \Bigg/ \int_a^b g(x)dx ,$$

կստանանք պահանջվող հավասարությունը:

Այն դեպքում, եթե  $g$ -ի ինտեգրալը 0 է, (4.4) անհավասարությունից բխում է, որ  $\int g$ -ի ինտեգրալը նույնպես 0 է, հետևաբար, թեորեմի պնդումը ճիշտ է:  $[m, M]$  հատվածին պատկանող բոլոր  $\mu$ -երի համար: ■

Այն դեպքում, եթե  $f$ -ը անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, ինչպես և նախորդ թեորեմում, այսուղև նույնպես  $\mu$ -ն կարելի է փոխարինել  $\int$  ֆունկցիայի արժեքով:

## §5. ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ ՈՐՊԵՍ ՎԵՐԻՆ ՍԱՀՄԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ

Դիցուք  $f$  ֆունկցիան ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում: Նշանակենք՝

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, a \leq x \leq b :$$

Հիշենք, որ պայմանավորվածության համաձայն՝  $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ :

**Թեորեմ 5.1:** Եթե  $f$  ֆունկցիան ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում, ապա  $F$  ֆունկցիան անընդհատ է այդ հատվածում:

► Վերցնենք կամայական  $x_0 \in [a, b]$  կետ և ապացույնը  $F$ -ի անընդհատությունն այդ կետում, որից և կրիսի թեորեմի պնդումը:

Ինտեգրալի առաջին հատկության համաձայն, ունենք՝

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt : \quad (5.1)$$

Հետևաբար, թեորեմ 4.3-ի դ) և զ) պնդումների համաձայն՝

$$|F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)| \leq K |\Delta x| \rightarrow 0 \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

$$\text{որտեղ } K = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| : \blacksquare$$

**Թեորեմ 5.2:** Եթե  $f$ -ը ինտեգրելի է  $[a, b]$  հատվածում և անընդհատ է  $x_0 \in [a, b]$  կետում, ապա  $F$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում ունի ածանցյալ և

$$F'(x_0) = f(x_0) :$$

► (5.1) հավասարությունից բխում է, որ

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} [f(t) - f(x_0)] dt : \quad (5.2)$$

Մյուս կողմից, քանի որ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0$  կետում, ապա

$$|\Delta x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad t \in [x_0, x_0 + \Delta x] : \quad (5.3)$$

Օգտելով (5.2) հավասարությունից և կիրառելով թեորեմ 4.3-ի դ) և զ) կետերը՝ (5.3)-ից կստանանք

$$|\Delta x| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|\Delta x|} \cdot \varepsilon |\Delta x| = \varepsilon$$

գնահատականը: Այսպիսով՝

$$\frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f(x_0) \quad (\Delta x \rightarrow 0) : \blacksquare$$

Այն դեպքում, եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է ամբողջ  $[a, b]$  հատվածում,  $F'(x) = f(x)$  հավասարությունը ճիշտ կլինի  $[a, b]$  հատվածի բոլոր կետերում: Այսինքն՝  $[a, b]$  հատվածում  $F(x)$ -ը կհանդիսանա  $f(x)$ -ի նախնական:

**§6. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԸ  
(ՆՅՈՒՏՈՆ - ԼԱՅԲՆԻՑ)**

**Թեորեմ 6.1:** Եթե  $f$ -ը անընդհատ է  $[a, b]$  հաստվածում և  $\Phi$ -ն արա որևէ նախնական է, ապա

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi|_a^b : \quad (6.1)$$

► Նշանակենք՝

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt :$$

Թեորեմ 5.2-ի համաձայն,  $F$ -ը նոյնպես կհանդիսանա  $f$ -ի նախնական: Հետեւաբար, գոյություն ունի մի  $C$  հաստատուն, այնպիսին, որ  $\Phi(x) = F(x) + C$ ,  $x \in [a, b]$ :

Վերցնելով  $x = a$ ՝ կստանանք  $\Phi(a) = C : \text{Այսինքն՝}$

$$\Phi(x) = F(x) + \Phi(a), \quad x \in [a, b] :$$

Այսուղ տեղադրելով  $x = b$ ՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ■

**Թեորեմ 6.2:** Դիցուք  $f$ -ը ինտեգրելի է  $[a, b]$  հաստվածում,  $\Phi$ -ն անընդհատ է  $[a, b]$  հաստվածում և  $[a, b]$ -ում, բացի վերջավոր թվով կետերից, տեղի ունի

$$\Phi'(x) = f(x)$$

հավասարությունը: Այդ դեպքում ճշմարիտ է (6.1) բանաձևը:

► Վերցնենք  $[a, b]$  հատվածի կամայական  $P$  տրոհում՝  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , այնպիսին, որն ընդգրկում է վերը նշված բացառիկ կետերը:

Ուժենք՝

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \sum_{i=0}^{n-1} [\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad (6.2)$$

որտեղ  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ : Վերջին հավասարությունը ստացվում է Լազրանժի վերջավոր աճերի բանաձևից՝  $\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = \Phi'(\xi_i)\Delta x_i$ :

(6.2) հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ , կստանանք (6.1)-ը: ■

## §7. ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՇՈՐԵՄԸ (ԲՈՆՆԵ)

**Թեորեմ 7.1:** Եթե  $f$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածում նվազող է և դրական, իսկ  $g$ -ն ինտեգրելի է այդ հատվածում, ապա գոյություն ունի  $\xi \in [a, b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^\xi g(x)dx : \quad (7.1)$$

► Նշանակենք՝

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad G(x) = \int_a^x g(t)dt, \quad M = \max_{x \in [a, b]} G(x), \quad m = \min_{x \in [a, b]} G(x) :$$

Այնուհետև, վերցնենք  $[a, b]$  հատվածի կամայական տրոհում՝  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , և առաջին ինտեգրալը ներկայացնենք գումարի միջոցով.

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)]g(x)dx + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx := \rho + \sigma : \end{aligned} \quad (7.2)$$

Քանի որ  $g$ -ն ինտեգրելի է, ուստի այն սահմանափակ է՝  $|g(x)| \leq L$ : Հետևաբար՝

$$|\rho| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| |g(x)| dx \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0) :$$

Այժմ (7.2) հավասարությունից բխում է, որ  $\sigma \rightarrow I$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ):

Մյուս կողմից ունենք՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)[G(x_{i+1}) - G(x_i)] = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)[f(x_{i-1}) - f(x_i)] + G(x_n)f(x_{n-1}):$$

Քանի որ  $f(x_{i-1}) - f(x_i) \geq 0$  և  $f(x_{n-1}) \geq 0$ , ապա վերջին հավասարությունից կստանանք՝  $mf(a) \leq \sigma \leq Mf(a)$ : Անցնելով սահմանի, եթե  $\lambda \rightarrow 0$ , կստանանք՝  $mf(a) \leq I \leq Mf(a)$ , կամ, որ նույնն է,

$$I = mf(a), m \leq \mu \leq M:$$

Քանի որ  $G$  ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի նրա մեծագույն և փոքրագույն արժեքների միջև ընկած  $\mu$  թիվը ֆունկցիայի արժեք է՝ գոյություն ունի  $\xi \in [a, b]$  կետ, այնպիսին, որ  $\mu = G(\xi)$ :

Այսպիսով՝  $I = f(a)G(\xi)$ , ինչը և պահանջվում էր ապացուցել: ■

Նման ձևով կարելի է ապացուցել նաև հետևյալ պնդումը.

Եթե  $f$  ֆունկցիան  $[a, b]$  հատվածում աճող է և դրական, իսկ  $g$ -ն ինտեգրելի է, ապա գոյություն ունի  $\xi \in [a, b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_\xi^b g(x)dx:$$

Վերջապես, եթե  $f$  ֆունկցիան մոնուռն է, իսկ  $g$ -ը՝ ինտեգրելի, ապա գոյություն ունի  $\xi \in [a, b]$  կետ, այնպիսին, որ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx: \quad (7.3)$$

Իրոք, դիցուք  $f$ -ը նվազող է: Այդ դեպքում՝  $f(x) - f(b) \geq 0$ : Այժմ, (7.1) բանաձեռ գրելով  $f(x) - f(b)$  ֆունկցիայի համար, կստանանք

$$\int_a^b [f(x) - f(b)]g(x)dx = [f(a) - f(b)]\int_a^\xi g(x)dx$$

հավասարությունը, որտեղից էլ արտածվում է (7.3)-ը:

## §8. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԻՆՈՒԹՎԱԿԱՆ ՍԱՍԵՐՈՎ ԲՆՏԵԳՐՈՒՄ

### 1. Փոխիսականի փոխարինում:

**Թեորեմ 8.1:** Դիցուք՝ 1)  $f(x)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում, 2)  $\varphi(t)$ -ն անընդհատ դիֆերենցելի է  $[\alpha, \beta]$  հատվածում\*, ընդ որում,  $\varphi$ -ի արժեքները դուրս չեն գալիս  $[a, b]$  հատվածից, 3)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  : Այդ դեպքում

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt : \quad (8.1)$$

► Ապացույցը անմիջապես բխում է Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևից: Եթոք, եթե  $F$ -ը  $f$ -ի նախնական է  $[a, b]$  հատվածում, այդ դեպքում  $F(\varphi(t))$ -ն կհանդիսանա  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ -ի նախնական  $[\alpha, \beta]$  հատվածում: Հետևաբար՝

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt : \blacksquare$$

**Օրինակ:** Կատարելով  $x = a \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  փոխիսականի

փոխարինումը, կստանանք՝

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4} :$$

### 2. Մասերով ինտեգրում:

**Թեորեմ 8.2:** Եթե  $u$  և  $v$  ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են  $[a, b]$  հատվածում, ապա

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du : \quad (8.2)$$

► Քանի որ  $udv = duv - vdu$ , ապա

\* Տե՛ս IV, 4, 3:

$$\int_a^b u dv = \int_a^b du v - \int_a^b v du : \quad (8.3)$$

Այսու կողմից, Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$\int_a^b du v = \int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b :$$

Այս ինտեգրալի արժեքը տեղադրելով (8.3)-ի մեջ, կստանանք (8.2)-ը: ■

**Օրինակ:**

$$\begin{aligned} J_m &= \int_0^{\pi/2} \sin^m x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x d(-\cos x) = -\cos x \sin^{m-1} x \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \int_0^{\pi/2} (m-1) \sin^{m-2} x \cos^2 x dx = (m-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x (1 - \sin^2 x) dx : \end{aligned}$$

Այստեղից ստանում ենք՝

$$mJ_m = (m-1)J_{m-2}; \quad J_m = \frac{m-1}{m} J_{m-2} :$$

Այժմ, կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիա, ստանում ենք հետևյալ բանաձևերը.

$$J_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots3 \cdot 1}{2n(2n-1)\dots4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (8.4)$$

$$J_{2n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2n(2n-2)\dots4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots3 \cdot 1} : \quad (8.5)$$

**3. Վալիսի բանաձև:** Նշանակենք՝

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdots 2n; \quad (2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\cdots3 \cdot 1 :$$

Այդ դեպքում (8.4) և (8.5) բանաձևերը կը նույնացնեն հետևյալ տեսքերը.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} : \quad (8.6)$$

Այնուհետև, ինտեգրելով  $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

անհավասարությունը, կստանանք՝

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx \leq \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x dx,$$

որից էլ հաշվի առնելով (8.6) հավասարությունները, կստանան՝

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \leq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}:$$

Ստացված անհավասարության բոլոր կողմերը բաժանենք  $\frac{\pi}{2}$ -ի գործակցի վրա և կստանանք՝

$$a_n := \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n} =: b_n:$$

Քանի որ

$$b_n - a_n = \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{(2n+1)2n} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2n} \rightarrow 0,$$

ուստի  $b_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$  և  $a_n \rightarrow \frac{\pi}{2}$ : Այսինքն, ստանում ենք

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1}$$

սահմանային առնչությունը, որն էլ անվանում են Վալիսի բանաձև:

#### **4. Թեյորի բանաձևի մեացողային անդամը:**

**Թեորեմ 8.3:** Եթե  $f$  ֆունկցիան  $[x_0, x]$  հատվածում ունի մինչեւ  $(n+1)$ -րդ կարգի անընդհատ ածանցյալներ, ապա ճշմարիտ է հետևյալ բանաձևը.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt : \quad (8.7)$$

► Նյուտոն - Լայբնիցի բանաձևի համաձայն՝

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_{x_0}^x f'(t) dt = - \int_{x_0}^x f'(t) d(x-t) = \\ &= -f'(t)(x-t) \Big|_{t=x_0}^x + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt, \end{aligned}$$

կամ, որ նոյնն է,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^x f''(t)(x-t) dt :$$

Այսինքն՝  $n = 1$  դեպքում (8.7) բանաձևը ճիշտ է: Այնուհետև կիրառենք մաքեմատիկական ինդուկցիա.

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = -\frac{1}{n!(n+1)} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)d(x-t)^{n+1} = \\ &= -\frac{1}{(n+1)!} (x-t)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(t) \Big|_{t=x_0}^x + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_{x_0}^x f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1} dt : \end{aligned}$$

Տեղադրելով  $r_n(x)$ -ի ստացված արժեքը (8.7)-ի մեջ՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը: ■

## VI ԳԼՈՒԽ

## ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

## §1. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍ

**1. Քառակուսեի պատկերներ:** Հարթության բոլոր կետերի բազմությունը կնշանակենք  $R^2$ -ով:  $M \in R^2$  կետի  $\varepsilon$  - շրջակայք ասելով՝ կհասկանանք  $M$  կենտրոնով և  $\varepsilon$  չառավղով բաց շրջանը:

Դիցուք  $E$  -ն  $R^2$ -ի որևէ ենթաբազմություն է:  $M \in E$  կետը կոչվում է այդ բազմության ներքին կետ, եթե գոյություն ունի  $\varepsilon > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $M$  կետի  $\varepsilon$  - շրջակայքի բոլոր կետերը պատկանում են  $E$  բազմությանը:

$M \notin E$  կետը կոչվում է  $E$  բազմության արտաքին կետ, եթե գոյություն ունի  $\varepsilon > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $M$  կետի  $\varepsilon$  - շրջակայքը  $E$  բազմության կետ չի պարունակում (կամ՝  $M$  -ի  $E$  լրացման ներքին կետ է):

$M$  կետը կոչվում է  $E$  բազմության եզրային կետ, եթե  $M$  կետի յուրաքանչյուր շրջակայք պարունակում է թե՛  $E$  բազմությանը պատկանող կետ, և թե՛  $E$  բազմությանը չպատկանող կետ:

$E$  բազմության եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է  $E$  բազմության եզր և նշանակվում է  $\partial E$  սիմվոլով:

$E$  բազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե գոյություն ունի շրջան, որը պարունակում է  $E$  -ի բոլոր կետերը:

**Հարք պատկեր** ասելով՝ կհասկանանք սահմանափակ բազմություն, որի ներքին կետերի բազմությունը դատարկ չէ:

**Պարզ պատկեր** կամ բազմանկյունային պատկեր կոչվում են այնպիսի պատկերները, որոնք ստացվում են վերջավոր թվով եռանկյունների միավորումից: Այդպիսի պատկերները մենք նաև կանվանենք բազմանկյուններ (ընդհանրացված իմաստով) և կնշանակենք (A), (B), ... սիմվոլներով, իսկ նրանց մակերեսները՝ համապատասխանաբար  $A$ ,  $B$ , ... (առանց փակագծերի) սիմվոլներով:

Այժմ դիտարկենք կամայական հարք պատկեր՝ ( $P$ ), դիտարկենք այդ պատկերի մեջ ընդգրկված բոլոր ( $A$ ) բազմանկյունները և այդ պատկերը ընդգրկող բոլոր ( $B$ ) բազմանկյունները:

Քանի որ  $(A) \subset (B)$ , ապա  $A \leq B$ :

Հետևաբար,  $\{A\}$  թվային բազմությունը սահմանափակ է վերևից յուրաքանչյուր  $B$  թվով: Նշանակենք

$$P_* = \sup \{A\}, P^* = \inf \{B\}:$$

Այդ դեպքում յուրաքանչյուր  $B$  թիվ կրավարարի  $P_* \leq B$  անհավասարությանը, հետևաբար,

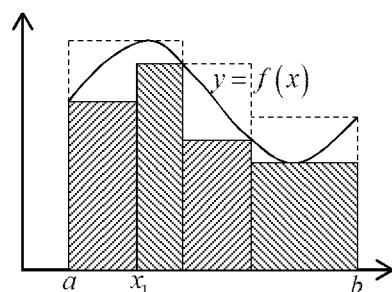
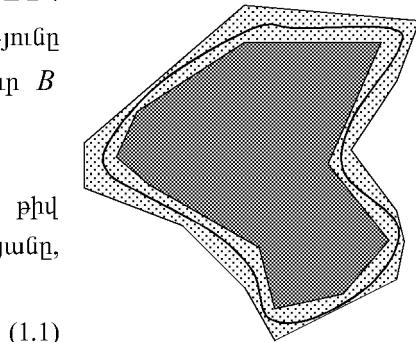
$$A \leq P_* \leq P^* \leq B: \quad (1.1)$$

**Սահմանում:** ( $P$ ) պատկերը կոչվում է քառակուսելի, եթե  $P_* = P^*$ : Եթե պատկերը քառակուսելի է, այդ ընդհանուր արժեքը կնշանակենք  $P$ -ով և կնշանամենք ( $P$ ) պատկերի մակերես:

Քառակուսելի պատկերները կոչվում են նաև *ժորդանի իմաստով չափելի բազմություններ*: Այդ դեպքում  $P$ -ն կոչվում է ( $P$ ) պատկերի *ժորդանի չափ*, իսկ  $P_*$ -ը և  $P^*$ -ը՝ համապատասխանաբար *ներքին և արտաքին չափեր*, որոնք մեզ հիշեցնում են Դարբուի ստորին և վերին ինտեգրալները:

## 2. Կորագիծ սեղանի մակերես:

Դիցուք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում և  $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$ : Դիտարկենք ( $P$ ) կորագիծ սեղանը, որը վերևից սահմանափակված է  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկով, կողքերից՝  $x = a$  և  $x = b$  ուղիղներով, իսկ



ներքեցից՝ աբսցիսների առանցքով:

*Ապացուցենք, որ այդ կորագիծ սեղանը քառակուսելի է և*

$$P = \int_a^b f(x) dx : \quad (1.2)$$

Այդ նպատակով վերցնենք  $[a, b]$  հատվածի կամայական տրոհում՝  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , և դիտարկենք այդ տրոհմանը համապատասխանող Դարբուի գումարները՝

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,$$

որտեղ  $m_i$ -ն և  $M_i$ -ն  $f$  ֆունկցիայի փոքրագույն և մեծագույն արժեքներն են  $[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում: Նկատենք, որ  $s$ -ը հանդիսանում է  $(P)$ -ի մեջ ընդգրկված քազմանկյան մակերես (տե՛ս վերևի գծագիրը), իսկ  $S$ -ը՝ ընդգրկող:

Հետևաբար՝

$$s \leq P_* \leq P^* \leq S : \quad (1.3)$$

Քանի որ  $f$  անդիհատ ֆունկցիան ինտեգրելի է, ապա

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

ինտեգրալը միակ թիվն է, որը, անկախ տրոհման ընտրությունից, բավարարում է  $s \leq I \leq S$  անհավասարություններին: Ուստի, (1.3)-ից բխում է, որ  $P_* = P^* = I$ : Աս նշանակում է, որ  $(P)$  պատկերը քառակուսելի է և նրա մակերեսը հավասար է  $I$  ինտեգրալին:

### 3. Քառակուսելիության հայտանիշներ:

1<sup>o</sup>. Որպեսզի  $(P)$  պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունենան  $(A)$  և  $(B)$  քազմանկյուններ, այնպիսիք, որ  $(A) \subset (P) \subset (B)$  և

$$B - A < \varepsilon :$$

► **Անհրաժեշտություն:** Ծշզիտ եզրերի սահմանման համաձայն, գոյություն ունեն ( $A$ ) և ( $B$ ) բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ

$$(A) \subset (P) \subset (B)$$

և բավարարվում են

$$P_* - A < \frac{\varepsilon}{2}, \quad B - P^* < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.4)$$

անհավասարությունները: Քանի որ ( $P$ ) պատկերը քառակուսելի է, ապա  $P_* = P^* = P$ : Հաշվի առնելով (1.4)-ը, կստանանք՝

$$B - A = B - P + P - A < \varepsilon :$$

**Բավարարություններ** բխում է (1.1) անհավասարությունից: ■

2<sup>o</sup>. Որպեսզի ( $P$ ) պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենամ ( $A_n \subset (P) \subset (B_n)$ ) բազմանկյունների հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n : \quad (1.5)$$

► **Անհրաժեշտություն:** Նախորդ հայտանիշի համաձայն,  $\varepsilon = 1/n$  թվի համար գոյություն ունեն ( $A_n \subset (P) \subset (B_n)$ ) բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ

$$B_n - A_n < \frac{1}{n}, \quad A_n < P < B_n :$$

Այստեղից բխում է, որ  $A_n$  և  $B_n$  հաջորդականությունները ձգտում են միևնույն  $P$  սահմանին:

**Բավարարություններ** բխում է (1.1) անհավասարությունից: ■

Դժվար չեն նկատել, որ այս հայտանիշի մեջ ( $A_n$ ) և ( $B_n$ ) բազմանկյունները կարելի է փոխարինել ( $Q_n$ ) և ( $R_n$ ) կամայական քառակուսելի պատկերներով:

Երրորդ հայտանիշը ձևակերպելու համար տանը *զրո մակերեսի բազմության սահմանումը*.

կասենք, որ  $E \subset R^2$  բազմությունը զրո մակերեսի է (կամ ունի 0 մակերես), եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի ( $C$ ) բազմանկյուն, այնպիսին, որ

$$E \subset (C) \text{ և } C < \varepsilon :$$

3<sup>o</sup>. Որպեսզի ( $P$ ) պատկերը լինի քառակուսելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա եզրն ունենա 0 - մակերես:

► **Անհրաժեշտություն:** Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի: Առաջին հայտանիշի համաձայն՝ գոյություն ունեն ( $A$ ) և ( $B$ ) բազմանկյուններ, այնպիսիք, որ ( $A \subset (P) \subset (B)$  և  $B - A < \varepsilon$ :

Այժմ, եթե ( $B$ ) բազմանկյունից դեմ զցենք ( $A$ ) բազմանկյան ներքին կետերը, կատանանք մի ( $C$ ) բազմանկյուն, որը կպարունակի ( $P$ ) -ի եզրը և որի մակերեսը կլինի՝  $B - A < \varepsilon$ : Այսինքն՝ ( $P$ ) -ի եզրը զրո մակերեսի է:

**Բավարարություն\***: Եթե ( $P$ ) -ի եզրը զրո մակերեսի է, ապա յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի մի ( $C$ ) բազմանկյուն, այնպիսին, որ ( $C \supset \partial(P)$  և  $C < \varepsilon$ :

Այժմ, որպես ( $A$ ) կվերցնենք ( $P$ ) -ի այն կետերի բազմությունը, որոնք ( $C$ ) -ին չեն պատկանում (փոքր  $\varepsilon$  -ի դեպքում այդ բազմությունը դատարկ չի լինի), իսկ որպես ( $B$ ) կվերցնենք ( $A \cup (C)$  -ն: Այդ դեպքում կունենանք՝

$$B - A = C < \varepsilon ,$$

և կօգտվենք 1<sup>o</sup> հայտանիշից: ■

**4. Մակերեսի աղիտիվությունը:** Դիցուք ( $P_1$ ) և ( $P_2$ ) քառակուսելի պատկերներն լնդիանուր ներքին կետ չունեն: Ապացուցենք, որ այդ դեպքում ( $P) = (P_1) \cup (P_2)$  միավորություն և կլինի քառակուսելի և

$$P = P_1 + P_2 : \quad (1.5)$$

\* Այս ապացույցը նկարագրական քնույթ ունի: Ծշօրիտ ապացույցը տե՛ս կրկնակի ինտեգրալների գլխում:

Իրոք, քանի որ  $\partial P \subset \partial P_1 \cup \partial P_2$ , իսկ  $\partial P_1 \cup \partial P_2$  եզրերը 0 - մակերեսի են, ապա թե՛  $\partial P_1 \cup \partial P_2$  միավորումը, և թե՛ նրա  $\partial P$  ենթաբազմությունը կլինեն 0 - մակերեսի: Հետևաբար,  $(P)$ -ն քառակուսելի է:

Մնում է ապացուցել (1.5) հավասարությունը: Այդ նպատակով դիտարկենք  $(A_1) \subset (P_1) \subset (B_1)$  և  $(A_2) \subset (P_2) \subset (B_2)$  քազմանկյունները: Քանի որ  $(A_1)$ -ը և  $(A_2)$ -ը ընդհանուր ներքին կետ չունեն, ապա  $(A) = (A_1) \cup (A_2)$  միավորումն ընդգրկված է  $(P)$ -ի մեջ և  $A = A_1 + A_2$ , իսկ  $(B) = (B_1) \cup (B_2)$  քազմանկյունը ընդգրկում է  $(P)$ -ն և  $B \leq B_1 + B_2$ :

Հետևաբար,

$$A_1 + A_2 = A \leq P \leq B \leq B_1 + B_2,$$

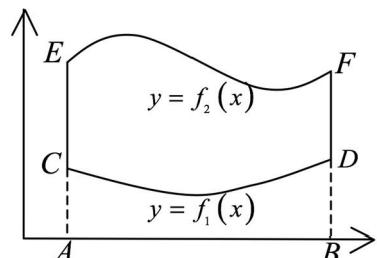
$$A_1 + A_2 \leq P_1 + P_2 \leq B_1 + B_2:$$

Քանի որ  $B_1 + B_2$  և  $A_1 + A_2$  թվերի տարրերությունը կարող ենք կամայապես փոքր դարձնել, ապա նրանց միջև ընկած  $P$  և  $P_1 + P_2$  թվերը համընկնում են: Պնդումն ապացուցված է:

Դժվար չէ նկատել, որ այս հատկության մեջ  $(P_1)$ -ի և  $(P_2)$ -ի քառակուսելիության փոխարեն կարելի է պահանջել  $(P)$ -ի և  $(P_1)$ -ի քառակուսելիությունը (եթե  $(P_2)$ -ը  $(P_1)$ -ի հետ չունի ընդհանուր ներքին կետ):

Եթե կորազիծ սեղանը թե՛ վերևից, թե՛ ներքևից սահմանափակված է կորերով, որոնց հավասարումներն են՝  $y = f_1(x)$  և  $y = f_2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , ապա այն դիտարկելով որպես  $ABFE$  և  $ABDC$  պատկերների տարրերություն, նրա մակերեսի համար կստանանք

$$P = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$



քանածել:

### 5. Մակերեսի արտահայտումը ընեռային կոորդինատներով:

Դիտարկենք  $AOB$  կորագիծ սեկտորը, որը սահմանափակված է  $OA$  և  $OB$  շառավիղ վեկտորներով և  $AB$  կորով, որի հավասարումը տրված է ընեռային կոորդինատների միջոցով՝

$$r = g(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

որտեղ  $g(\theta)$ -ն դրական անընդհատ ֆունկցիա է:

Վերցնենք  $[\alpha, \beta]$  հատվածի կամայական տրոհում՝

$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n = \beta$  և տաճենք  $\theta_i$  անկյունների համապատասխան շառավիղ վեկտորները: Նշանակենք՝  $m_i = \min_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} g(\theta)$  և  $M_i = \sup_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} g(\theta)$ :

Այսուհետև, հաշվենք  $\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$  բացվածքով կենտրոնական անկյան  $m_i$  և  $M_i$  շառավիղներով շրջանային սեկտորների մակերեսները (անկյունը չափվում է ռադիաններով):

$$\frac{1}{2}m_i^2\Delta\theta_i, \quad \frac{1}{2}M_i^2\Delta\theta_i:$$

Հետևաբար,  $s = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2 \Delta\theta_i$  գումարն իրենից ներկայացնում է տրված

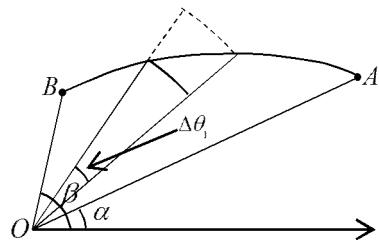
պատկերի մեջ ընդգրկված քառակուսելի պատկերի մակերես, իսկ  $S = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2 \Delta\theta_i$ -ն՝ ընդգրկող:

Հետևաբար,

$$s \leq P_* \leq P^* \leq S : \tag{1.6}$$

Մյուս կողմից,  $s$ -ը և  $S$ -ը  $\frac{1}{2}[g(\theta)]^2$  ֆունկցիայի Դարբուի գումարներն են՝

$$s \leq I \leq S, \quad I = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta, \tag{1.7}$$



հետևաբար,  $I$ -ն միակ թիվն է, որ բավարարում է (1.7)-ին:

(1.6)-ից բխում է, որ տրված կորագիծ սեկտորը քառակուսելի է, և նրա մակերեսի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

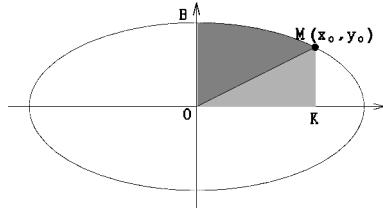
$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta : \quad (1.8)$$

**Օրինակներ:**

ա) Դիտարկենք  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ելիազար և նրա վրա  $M(x_0, y_0)$  կետը:

Հաշվենք  $BOKM$  կորագիծ սեղանի և  $OMB$  էլիպտիկ սեկտորի մակերես-



Աերը:  $BM$  կորի հավասարումն է՝  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ , հետևաբար՝

$$P = S_{BOKM} = \int_0^x \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \left( \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right) \Big|_0^{x_0} =$$

$$= \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x_0}{a} + \frac{x_0 y_0}{2} :$$

Քանի որ վերջին գումարելին  $OKM$  եռանկյան մակերեսն է, ապա  $OMB$  սեկտորի մակերեսի համար ստանում ենք

$$P_1 = S_{OMB} = \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x_0}{a} :$$

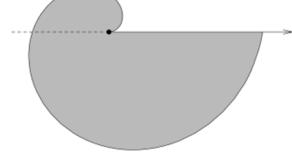
Տեղադրելով  $x = a$ ՝ կստանանք, որ քառորդ էլիպսի մակերեսը հավասար է  $\frac{\pi ab}{4}$ , հետևաբար, ամբողջ էլիպսի մակերեսը կլինի՝  $\pi ab$ :

Ծրջանի դեպքում՝  $a = b = r$ ,  $P = \pi r^2$ :

թ) Հաշվենք Արքիմեդի զալարագծի՝  $r = a\theta$  կորի, մեկ զալարով սահմանափակված պատկերի մակերեսը:

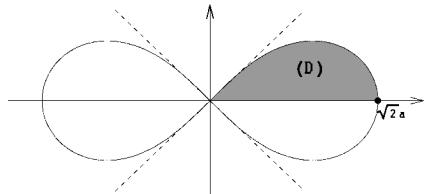
(1.8) բանաձևի համաձայն, ունենք՝

$$P = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta = \frac{a^2}{6} \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 :$$



զ) Հաշվենք լեմմիկասով սահմանափակված պատկերի մակերեսը.

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2(x^2 - y^2), \\ r^2 &= 2a^2 \cos 2\varphi, \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{aligned}$$



$$D = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}, P = 4D = 2a^2 :$$

դ) Դիցուք կորագիծ սեղանի մեջ կորի հավասարումը տրված է պարամետրական տեսքով

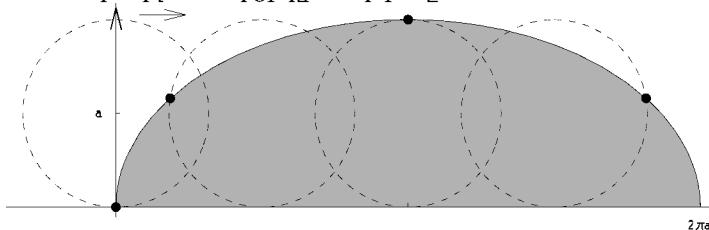
$$\begin{aligned} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{aligned} \quad t_0 \leq t \leq T$$

$$\varphi', \psi' \in C[t_0, T] :$$

Այդ դեպքում, կորագիծ սեղանի մակերեսի բանաձևի մեջ փոփոխականի փոխարինում կատարելով, կստանանք՝

$$P = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx = \int_{t_0}^T \psi(t) \varphi'(t) dt :$$

Որպես օրինակ՝ հաշվենք  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ցիկլոիդով սահմանափակված մեկ ցիկլի մակերեսը.



$$P = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \left( \frac{3}{2}t - 2 \sin t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2 :$$

## §2. ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ

**1. Խորանարդելի մարմիններ:** Եռաչափ տարածության բոլոր կետերի քազմությունը կնշանակենք  $R^3$ -ով:  $M \in R^3$  կետի  $\varepsilon$ -շրջակայր ասելով՝ կհասկանանք  $M$  կենտրոնով և  $\varepsilon$  չառավղով բաց գունդը:

Եռաչափ տարածության մեջ քազմության ներքին կետ, արտաքին կետ, եզրային կետ և եզր սահմանվում է ճիշտ այնպես, ինչպես հարթության դեպքում:

$E \subset R^3$  քազմությունը կոչվում է սահմանափակ, եթե գոյություն ունի գունդ, որն ընդգրկում է  $E$  -ն:

Եռաչափ մարմին (կամ ուղղակի՝ մարմին) ասելով՝ կհասկանանք սահմանափակ քազմություն, որի ներքին կետերի քազմությունը դատարկ չէ:

Պարզ մարմին կամ քազմանիստ կոչվում են այն մարմինները, որոնք ստացվում են վերջավոր թվով եռանկյան բուրգերի միավորումից:

Այժմ դիտարկենք կամայական ( $V$ ) մարմին: Դիտարկենք այդ մարմնի մեջ ընդգրկված բոլոր ( $X$ ) քազմանիստերը և այդ մարմինը ընդգրկող բոլոր ( $Y$ ) քազմանիստերը: Դրանց ծավալները կնշանակենք նույն տառով՝ առանց փակագծի: Նշանակենք  $V_* = \sup \{X\}$ ,  $V^* = \inf \{Y\}$ :

Ուսենք՝

$$X \leq V_* \leq V^* \leq Y: \tag{2.1}$$

Եթե  $V_* = V^*$ , ապա ( $V$ ) մարմինը կոչվում է խորանարդելի:  $V_* = V^*$  ընդհանուր արժեքը կոչվում է ( $V$ ) մարմնի ծավալ և նշանակվում է  $V$  տառով:

Այստեղ ճշմարիտ են խորանարդելիության հետևյալ հայտանիշները (դրանց ապացույցները նման են «հարթ դեպքին»).

1<sup>o</sup>. Որպեսզի (V) մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունենան (X) և (Y) բազմանիստեր, այնպիսիք, որ

$$(X) \subset (V) \subset (Y), Y - X < \varepsilon :$$

2<sup>o</sup>. Որպեսզի (V) մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ գոյություն ունենան  $(X_n) \subset (V) \subset (Y_n)$  բազմանիստերի հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = V$$

(կամ գոյություն ունենան խորանարդելի մարմինների (T<sub>n</sub>) և (U<sub>n</sub>) հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$(T_n) \subset (V) \subset (U_n); \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = V :)$$

**Սահմանում:** Կսանենք, որ  $E \subset R^3$  բազմությունը զրո ծավալի է (կամ ունի 0 ծավալ), եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի (Z) բազմանիստ, այնպիսին, որ

$$E \subset (Z) \text{ և } Z < \varepsilon :$$

3<sup>o</sup>. Որպեսզի (V) մարմինը լինի խորանարդելի, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա եզրը լինի զրո ծավալի:

Եռաչափ մարմնի ծավալը նույնպես օժտված է աղիտիվության հատկությամբ:

## 2. Գլանի ծավալը:

**Թեորեմ 2.1:** Քառակուսելի հիմքով ուղիղ գլանը խորանարդելի է և նրա ծավալը հավասար է հիմքի մակերեսի և բարձրության արտադրյալին:

► Իրոք, գլանի հիմքը քող լինի (P) քառակուսելի պատկերը, իսկ բարձրությունը՝ H : Վերցնենք  $(A_n) \subset (P) \subset (B_n)$  բազմանկյունների հաջորդականություններ, այնպիսիք, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = P :$$

Կառուցենք  $(X_n)$  և  $(Y_n)$  ուղիղ պիզմաներ, որոնց հիմքերն են  $(A_n)$ -ը և  $(B_n)$ -ը, և յուրաքանչյուրի բարձրությունն է՝ H :

Այդ դեպքում  $(X_n)$  պրիզմաները կը նդգրկվեն զլանի մեջ,  $(Y_n)$ -երը կը նդգրկեն զլանը և

$$X_n = A_n H, \quad Y_n = B_n H,$$

որոնք ձգտում են միևնույն  $PH$  սահմանին:

Խորանարդելիության  $2^0$  հայտանիշի համաձայն, զլանը կլինի խորանարդելի և նրա ծավալը կլինի  $PH$  -ը: ■

**3. Ծավալի արտահայտումն ինտեղրալով:** Դիցուք ( $V$ ) մարմինն ընկած է  $x=a$  և  $x=b$  հարթությունների միջև: Դիտարկենք ( $V$ ) մարմնի հատույթները արսցիսների առանցքին ուղղահայաց բոլոր հարթություններով: Ենթադրենք, որ այդ բոլոր հատույթները քառակուսելի են և արսցիսի  $x$  արժեքին համապատասխանող հատույթի մակերեսը  $P(x)$ -ն է: Կենթադրենք, որ  $P(x)$  -ը անընդհատ է  $[a, b]$  հատվածում:

Բացի դրանից, կենթադրենք, որ եթե այդ հատույթները պրոյեկտենք արսցիսների առանցքին ուղղահայաց որևէ հարթության վրա, ապա կամայական երկու պրոյեկցիաներից մեկը ընկած կլինի մյուսի մեջ (մասնակի հատվել կամ մեկը մյուսից դուրս ընկած լինել չեն կարող):



*Ապացուցենք, որ նշված պայմանների դեպքում ( $V$ ) մարմինը խորանարդելի է և*

$$V = \int_a^b P(x) dx := I : \quad (2.2)$$

Վերցնենք  $[a, b]$  հատվածի  $\int_a^b P(x) dx$  մարմինը տրոհում՝  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  և  $x = x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  հարթություններով ( $V$ ) մարմինը տրոհենք շերտերի՝  $(V_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  ( $(V_i)$ -ն ( $V$ ) մարմնի այն մասն է, որն ընկած է  $x = x_i$  և  $x = x_{i+1}$  հարթությունների միջև):

$[x_i, x_{i+1}]$  հատվածում  $P(x)$  անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է  $m_i$  փոքրագույն և  $M_i$  մեծագույն արժեքները: Եթե այդ հատվածի բոլոր

Կետերի համապատասխան հատույթները պրոյեկտենք  $x = x_i$  հարթության վրա, ապա նրանք բոլորը ընկած կլինեն  $M_i$ , արժեքի համապատասխան ( $M_i$ ) հատույթի մեջ, և բոլորը կընդգրկեն  $m_i$  արժեքի համապատասխան ( $m_i$ ) հատույթը: ( $m_i$ ) և ( $M_i$ ) հիմքերի վրա կառուցենք  $\Delta x_i$  բարձրությամբ ուղիղ զլաններ՝ ( $T_i$ ) և ( $U_i$ ), որտեղ ( $T_i) \subset (V_i) \subset (U_i)$ : Դրանց ծավալները համապատասխանաբար կլինեն՝  $m_i \Delta x_i$  և  $M_i \Delta x_i$ :

Այժմ նշանակենք

$$(T) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (T_i), \quad (U) = \bigcup_{i=0}^{n-1} (U_i):$$

Այդ դեպքում կունենանք՝

$$(T) \subset (V) \subset (U), \quad T = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \quad U = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i:$$

Բացի դրանից՝

$$s = T \leq V_* \leq V^* \leq U = S: \tag{2.3}$$

Քանի որ  $I$ -ն միակ թիվն է, որը բավարարում է  $T \leq I \leq U$  անհավասարություններին, ապա (2.3)-ից բխում է, որ

$$V_* = V^* = I,$$

այն, ինչ պետք էր ապացուցել:

**Օրինակ:** Հաշվենք  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  էլիպսոիդով սահմանափակված

մարմնի (որին նույնապես ընդունված է անվանել էլիպսիդ) ծավալը:

Այս դեպքում արցիսի  $x$  արժեքին համապատասխանող հատույթի պրոյեկցիայի ( $yz$  հարթության վրա) եզրագծի հավասարումը կլինի

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1,$$

որը  $b' = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ,  $c' = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  կիսառանցքներով էլիպսն է:

Հետևաբար,

$$P(x) = \pi b'c' = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) :$$

Այժմ, (2.2) բանաձևի համաձայն, կունենանք՝

$$V = \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi abc :$$

Մասնավոր դեպքում, եթե  $a = b = c = R$ , կստանանք գնդի ծավալը՝

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 :$$

**4. Պտտման մարմնի ծավալը:** Դիցուք  $f$ -ը դրական և անընդհատ ֆունկցիա է  $[a, b]$  հատվածում: Դիտարկենք այն մարմինը, որը ստացվում է՝ պտտելով  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված կորագիծ սեղանը արացիսների առանցքի շորջը:

Այս դեպքում  $P(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ : Հետևաբար,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx :$$

Օրինակներ:

ա) Կոնի ծավալը: Այս դեպքում՝  $y = \frac{R}{H}x$ ,  $0 \leq x \leq H$ :

$$V = \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H x^2 dx = \frac{1}{3} \pi R^2 H :$$

բ) Հաստած կոնի ծավալը: Այս դեպքում՝  $y = r + \frac{R-r}{H}x$ ,  $0 \leq x \leq H$ :

$$V = \pi \int_0^H \left(r + \frac{R-r}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi H}{3} (R^2 + r^2 + Rr) :$$

### §3. ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

#### 1. Ուղղելի կորեր:

Սահմանում:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta \quad (3.1)$$

անընդհատ ֆունկցիաների զույգը կոչվում է կոր (կամ հարք կոր):

Նշանակելով  $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ , կստանանք մի արտապատկերում, որը  $[\alpha, \beta]$  հատվածն արտապատկերում է կոորդինատային հարթության մեջ: Եթեմն, կոր ասելով՝ հասկանում են այդ արտապատկերման ընդունած արժեքների բազմությունը, որը կոչվում է  $\gamma$  կորի կրիչ կամ՝ երկրաչափական կոր: Այդ դեպքում (3.1) ֆունկցիաների զույգը կոչվում է այդ երկրաչափական կորի պարամետրացում: Հասկանալի է, որ միևնույն երկրաչափական կորը կունենա անթիվ բազմությամբ պարամետրացումներ ((3.1)-ի մեջ տեղադրելով  $t = t(\tau)$ ,  $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ ՝ կստանանք միևնույն երկրաչափական կորի մի նոր պարամետրացում):

Այսպիսով, համաձայն վերևում տրված սահմանման, կոր ասելով՝ մենք կհասկանանք ոչ թե երկրաչափական կոր, այլ անընդհատ ֆունկցիաների զույգ (այդ կորի մի որոշակի պարամետրացում):

**Սահմանումներ:** Կորը կոչվում է պարզ, եթե  $t_1 \neq t_2$  պայմանից հետևում է, որ  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  (կորը ինքնահատում չունի):

Կորը կոչվում է փակ, եթե  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$  (կորի ծայրակետերը համընկնում են):

Եթե  $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ ,  $t_1 < t_2$  պայմանը տեղի ունի այն և միայն այն դեպքում, եթե  $t_1 = \alpha$  և  $t_2 = \beta$ , ասա կորը կոչվում է պարզ փակ կոր:

Այժմ դիտարկենք  $[\alpha, \beta]$  հատվածի կամայական տրոհում՝  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ , և նշանակենք  $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ :

Այսուհետև դիտարկենք  $(P) = M_0 M_1 M_2 \dots M_n$  բեկյալը և նրա երկարությունը նշանակենք  $p$ -ով:

**Սահմանում:** Եթե գոյություն ունի  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} p := l$  վերջավոր սահմանը, որտեղ  $\lambda = \max_{0 \leq i \leq n-1} \Delta t_i$ ,  $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ , ապա (3.1) կորը կոչվում է ուղղելի և  $l$  թիվը կոչվում է կորի երկարություն:

## 2. Կորի երկարության արտահայտումն ինտեգրալով:

**Թեորեմ 3.1:** Եթե  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաներն անընդհատ դիֆերենցելի են<sup>\*</sup>, ապա (3.1) կորն ուղղելի է և

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt : \quad (3.2)$$

►  $(P)$  բեկյալի երկարության համար ունեն՝

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i)]^2} :$$

Այստեղ կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$p = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i^*)]^2} \Delta t_i, \quad \tau_i, \tau_i^* \in [t_i, t_{i+1}],$$

հավասարությունը, որի աջ կողմը մեզ հիշեցնում է (3.2) ինտեգրալի ինտեգրալային գումարը՝

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{[\varphi'(\tau_i)]^2 + [\psi'(\tau_i)]^2} \Delta t_i :$$

Քանի որ, ըստ ենթադրության, ենթիմտեգրալ ֆունկցիան անընդհատ է, ապա  $\sigma \rightarrow l$ , եթե  $\lambda \rightarrow 0$ : Մեզ մնում է ապացուցել, որ  $p - \sigma \rightarrow 0$ , եթե  $\lambda \rightarrow 0$ :

Օգտվելով հետևյալ տարրական անհավասարությունից՝

$$\left| \sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right| \leq |b_1 - b|,$$

կստանանք՝

$$|p - \sigma| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\psi'(\tau_i^*) - \psi'(\tau_i)| \Delta t_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\psi') \Delta t_i \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow 0),$$

\* Նշված պայմանի դեպքում ընդունված է կորն անվանել ողորկ:

որտեղ  $\omega_i(\psi')$ -ը  $\psi'$  ֆունկցիայի տատանումն է  $[t_i, t_{i+1}]$  հատվածում:  
Վերջին առնչությունը բիում է նրանից, որ  $\psi'$  ամընդհատ ֆունկցիան  
ինտեգրելի է: ■

Եթե կորի հավասարումը տրված է քացահայտ տեսքով՝  $y = f(x)$ ,  
 $a \leq x \leq b$ , այս դեպքում  $t$  պարամետրի դերը կատարում է  $x$ -ը: Այսինքն՝  
(3.1) զույգը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\left. \begin{array}{l} x = x \\ y = f(x) \end{array} \right\}, \quad a \leq x \leq b:$$

Հետևաբար, այս մասնավոր դեպքում կստանանք՝

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx: \quad (3.3)$$

Վերջապես, եթե կորի հավասարումը տրված է քևեռային կոորդինատ-  
ների միջոցով՝

$$r = g(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta,$$

օգտագործելով քևեռային կոորդինատներից դեկարտյան կոորդինատներին  
անցման բանաձևերը, կստանանք՝

$$x = r \cos \theta = g(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = g(\theta) \sin \theta:$$

Այս դեպքում՝

$$x'_\theta = g'(\theta) \cos \theta - g(\theta) \sin \theta, \quad y'_\theta = g'(\theta) \sin \theta + g(\theta) \cos \theta:$$

Տեղադրելով (3.2) բանաձևի մեջ՝ կստանանք

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[g(\theta)]^2 + [g'(\theta)]^2} d\theta \quad (3.4)$$

հավասարությունը:

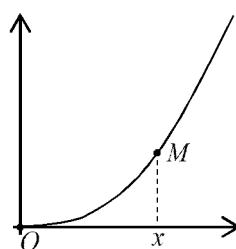
**Օրինակներ:**

$$1) \quad \text{Դիտարկենք} \quad y = \frac{x^2}{2p} \quad \text{պարաբոլ:}$$

Վերցնենք  $x$  արացիսն ունեցող  $M$  կետը և

հաշվենք  $\angle OM$  աղեղի երկարությունը:

$$(3.3) \text{ բանաձևի համաձայն, կստանանք՝}$$



$$l = \bar{OM} = \frac{1}{p} \int_0^x \sqrt{p^2 + x^2} dx = \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + p^2} \right) \Big|_0^x = \\ = \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$$

2) Հաշվենք  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) հավասարումներով տրված ցիկլոիդի երկարությունը:

(3.2) բանաձևի համաձայն՝

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a :$$

3) Հաշվենք  $r = a\theta$  գալարագծի 0 քերի և  $M$  կետի ( $\theta$  անկյանը համապատասխան) միջև ընկած աղեղի երկարությունը:

(3.4) բանաձևի համաձայն՝

$$l = a \int_0^\theta \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = \frac{a}{2} \left[ \theta \sqrt{1 + \theta^2} + \ln \left( \theta + \sqrt{1 + \theta^2} \right) \right] :$$

$$4) Հաշվենք \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ էլիպսի}$$

( $a \geq b$ ) փոքր առանցքի վերին ծայրակետից մինչև առաջին քառորդում ընկած  $M$  կետն ընկած աղեղի  $l$  երկարությունը:

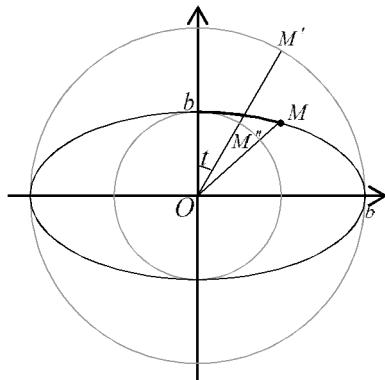
Այդ նպատակով դիտարկենք էլիպսի պարամետրական հավասարումը՝

$$x = a \sin t, \quad y = b \cos t,$$

որտեղ  $t$ -ն  $M'$  (կամ  $M''$ ) կետի

շառավիղ վեկտորի՝ օրդինատների առանցքի դրական ուղղության հետ կազմած անկյունն է: Այս դեպքում

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \\ = \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 t} = a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t},$$



որտեղ  $\varepsilon = \sqrt{(a^2 - b^2) / a^2}$  էլիպսի էքսցենտրիսիտետն է:

Տեղադրելով (3.2) բանաձևի մեջ, կստանանք

$$l = a \int_0^\theta \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} dt$$

բանաձևը, որտեղ  $\theta$ -ն  $OM$  վեկտորի կազմած անկյունն է  $OY$  առանցքի դրական ուղղության հետ: Եթե  $a \neq b$ , այս ինտեգրալը տարրական ֆունկցիաների միջոցով չի արտահայտվում: Այն կոչվում է երկրորդ սեռի էլիպտիկ ինտեգրալ:

**3. Տարածական կորի երկարություն:** Տարածական կորի պարամետրացման տարվում է երեք ֆունկցիաների միջոցով՝

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \\ z &= \chi(t) \end{aligned} \right\}, \alpha \leq t \leq \beta :$$

Այս դեպքում կորի երկարությունը սահմանվում է նոյն կերպ, ինչ որ հարք կորի դեպքում: Տարածական ողորկ կորի երկարությունը հաշվում են (3.2) բանաձևի անալոգով.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt :$$

Այս բանաձևն ապացուցելիս օգտվում ենք

$$\left| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2 + c_1^2} \right| \leq |b_1 - b| + |c_1 - c|$$

անհավասարությունից:

**4. Կորի երկարության երկրորդ սահմանում:** Դիտարկենք հարք կորի դեպքը.

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\}, \alpha \leq t \leq \beta : \quad (3.5)$$

Դիտարկենք կորին ներգծված բոլոր բեկյալների երկարությունների բազմությունը, և այդ բազմության ճշգրիտ վերին եզրը նշանակենք  $S$ -ով՝

$$S = \sup \{p\},$$

որը կարող է լինել նաև  $+\infty$ :

**Սահմանում 2:** Կորը կոչվում է ուղղելի, եթե  $S < \infty$ : Այդ դեպքում  $S$  քիչը կոչվում է կորի երկարություն:

Ապացուցենք, որ կորի երկարության երկու սահմանումները համարժեք են: Այլ կերպ ասած, ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

**Թեորեմ 3.2:** Որպեսզի կորը լինի ուղղելի նախկին իմաստով, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $\{p\}$  բազմությունը լինի սահմանափակ, ընդ որում,  $l = \sup\{p\}$ :

► **Անհրաժեշտություն:** Նկատենք, որ  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$  տրոհման կետերին նոր կետեր ավելացնելիս բեկյալի երկարությունը կարող է միայն մեծանալ: Ընդ որում, եթե եղած կետերին ավելացնենք մեկ տրոհման կետ՝  $t' \in (t_i, t_{i+1})$ , այդ դեպքում  $(P)$  բեկյալի երկարությունը կմեծանա ամենաշատը

$\sqrt{[\varphi(t') - \varphi(t_i)]^2 + [\psi(t') - \psi(t_i)]^2} + \sqrt{[\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t')]^2 + [\psi(t_{i+1}) - \psi(t')]^2}$

չափով, որը չի գերազանցում  $2[\omega_i(\varphi) + \omega_i(\psi)]$  մեծությունը, որտեղ  $\omega_i(\varphi)$ -ն և  $\omega_i(\psi)$ -ն համապատասխանաբար  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաների տատանումներն են  $[t_i, t_{i+1}]$  հատվածում:

Հետևաբար, եթե կորն ուղղելի է նախկին իմաստով, ապա նախ՝  $p \leq l$ , և բացի դրանից՝  $l = \sup\{p\}$ :

**Բավարարություն:** Ունենք՝  $\sup\{p\} = S < \infty$ : Ցույց տանք, որ

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p = S :$$

Ապացուցենք Դարրոի թեորեմի ապացույցի սխեմայով: Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ և, դրան համապատասխան,  $P_1 : \alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  տրոհում, այնպիսին, որ տեղի ունենա

$$S - p_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

պայմանը ( $p_1$ -ը համապատասխան բեկյալի երկարությունն է):

Այսուհետև, քանի որ  $\varphi$  և  $\psi$  ֆունկցիաներն անընդհատ են, ապա, Կամտորի թեորեմի հետևանքի համաձայն, այդ  $\varepsilon > 0$  թիվ համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\lambda < \delta \Rightarrow \omega_i(\varphi), \omega_i(\psi) < \frac{\varepsilon}{8m}:$$

Այժմ վերցնենք կամայական  $P$  տրոհում, որի տրամագիծը փոքր է այդ  $\delta$ -ից, և կառուցենք  $P_2$  տրոհում՝  $P_2 = P \cup P_1$ : Վերջինիս համապատասխան բեկյալի երկարությունը նշանակենք՝  $p_2$ : Այդ դեպքում՝

$$S - p = S - p_2 + p_2 - p \leq S - p_1 + 2m \left( \frac{\varepsilon}{8m} + \frac{\varepsilon}{8m} \right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

որով էլ ավարտվում է թեորեմի ապացույցը: ■

## VII ԳԼՈՒԽ

### ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԱՆՁՆԴԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

**§1. ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ  $R^m$  ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ**

**1.  $R^m$ -ը որպես գծային նորմալոված տարածություն:**

$$R^m = R \times R \times \cdots \times R$$

դեկարտյան արտադրյալի յուրաքանչյուր  $x \in R^m$  տարր ներկայացվում է  $x = (x^1, \dots, x^m)$  տեսքով, որտեղ  $x^i$ -ն ( $1 \leq i \leq m$ ) կոչվում է  $x$ -ի  $i$ -րդ կոորդինատ:  $R^m$ -ի տարրերը կոչվում են կետեր կամ վեկտորներ:  $m = 2$  դեպքում  $(x^1, x^2)$  նշանակման փոխարեն հաճախ օգտագործվում է  $(x, y)$  նշանակումը, իսկ  $m = 3$  դեպքում  $(x^1, x^2, x^3)$ -ի փոխարեն՝  $(x, y, z)$ -ը:

$R^m$ -ը գծային (վեկտորական) տարածություն է, որտեղ գործողությունները սահմանվում են հետևյալ կերպ՝

$$(x^1, \dots, x^m) + (y^1, \dots, y^m) = (x^1 + y^1, \dots, x^m + y^m),$$

$$\alpha(x^1, \dots, x^m) = (\alpha x^1, \dots, \alpha x^m), \quad (\alpha \in R):$$

Նշանակենք՝

$$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^m)^2},$$

որը կոչվում է  $x$  վեկտորի նորմ (քացարձակ արժեք կամ երկարություն):

Դժվար չէ համոզվել, որ նորմը բավարարում է հետևյալ պայմաններին՝

ա)  $|x| \geq 0$ , ընդ որում,  $|x| = 0$  պայմանը տեղի ունի միայն  $x = 0$  դեպքում;

բ)  $|\alpha x| = |\alpha| |x|$ , ( $\alpha \in R$ );

գ)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , ( $x, y \in R^m$ ):

Իրք, ա)-ն և բ)-ն անմիջապես հետևում են նորմի սահմանումից, իսկ գ)-ն Կոշիի անհավասարությունն է (տես IV գլուխ, § 8, կետ 6):

$x, y \in R^m$  երկու կետերի  $d(x, y)$  հեռավորությունը սահմանվում է  

$$d(x, y) = |x - y|$$

բանաձևի միջոցով:

զ) անհավասարությունից հետևում է *եռամկյան անհավասարությունը\**  

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in R^m;$$

Հեռավորության գաղափարից ենթելով՝ կարող ենք սահմանել  $a \in R^m$  կենտրոնով և  $r > 0$  շառավղով  $m$ -չափանի բաց գունդ՝

$$B(a, r) := \{x \in R^m : d(x, a) < r\} = \{x \in R^m : |x - a| < r\},$$

և փակ գունդ՝

$$\bar{B}(a, r) := \{x \in R^m : |x - a| \leq r\} :$$

$m = 2$  դեպքում (երկչափ) գունդը շրջանն է:

$a \in R^m$  կենտրոնով և  $2\eta$  երկարությամբ կողով  $C(a, \eta)$  բաց խորածարդը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$C(a, \eta) = \{(x^1, \dots, x^m) : a^i - \eta < x^i < a^i + \eta, \quad 1 \leq i \leq m\} :$$

$a$  կենտրոնով գնդերի և խորանարդների համար տեղի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$B(a, r) \subset C(a, r) \subset B(a, \sqrt{m} - r), \quad (1.1)$$

որոնք բխում են

$$|x^i - a^i| \leq |x - a| = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x^i - a^i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

անհավասարություններից:

**2. Հաջորդականության սահման:** Դիցուք  $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^m) \in R^m$  տարածության կետերի հաջորդականություն է:

**Սահմանում:**  $a = (a^1, \dots, a^m) \in R^m$  կետը կոչվում է  $x_n$  հաջորդականության սահման և նշանակվում է՝  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  բվի համար գոյություն ունի  $n_0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon :$$

\* զ)-ն նույնպես անվանում են եռամկյան անհավասարություն:

Այսինքն, սկսած որոշ համարից,  $x_n$  կետը պատկանում է  $B(a, \varepsilon)$  բաց գնդին: Վերջինս կոչվում է  $a$  կետի  $\varepsilon$ -շրջակայք ( $a$ -ի շրջակայք են կոչվում նաև  $a$  կենտրոնով խորանարդները):

Այսպիսով, սահմանի սահմանումը  $R^m$  տարածությունում ըստ էության նույնն է, ինչ որ թվային հաջորդականությունների դեպքում ( $m=1$ ): Այդ պատճառով ել սահմանների տեսության շատ դրույթներ (որոնք իմաստ ունեն այս դեպքում<sup>\*</sup>) ապացուցվում են այնպես, ինչպես թվային հաջորդականությունների դեպքում:

Սահմանները նաև անվերջ սահման:

**Սահմանում:** Կասենք, որ  $x_n$ -ը ձգուում է անվերջության<sup>\*\*</sup> և կգրենք՝

$$x_n \rightarrow \infty,$$

եթե յուրաքանչյուր  $r > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $n_0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n| > r :$$

Այս սահմանումը շրջակայքերի լեզվով ձևակերպելու համար  $\infty$ -ի  $r$ -շրջակայք կհամարենք  $\bar{B}(0, r)$  փակ գնդի լրացումը՝

$$\left\{ x \in R^m : |x| > r \right\} \quad (r > 0):$$

**3. Կոորդինատային զուգամիտություն:** Նորմի սահմանումից բխում են

$$|x^i| \leq |x| \leq |x^1| + \dots + |x^m|, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (1.2)$$

անհավասարությունները, ինչից ել բխում է հետևյալ պնդումը.

**Թեորեմ 1.1:** (Կոորդինատային զուգամիտության թեորեմ) Դիցուք՝  $a = (a^1, \dots, a^m) \in R^m$ : Որպեսզի  $x_n \rightarrow a$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\left. \begin{array}{l} x_n^1 \rightarrow a^1 \\ x_n^2 \rightarrow a^2 \\ \vdots \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n^m \rightarrow a^m \end{array} \right\} : \quad (1.3)$$

\* Իրական թվերի բազմության կարգավորվածությանն առնչվող պնդումներն այստեղ իմաստ չունեն:

\*\*  $m \geq 2$  դեպքում  $x_n \rightarrow +\infty$  և  $x_n \rightarrow -\infty$  արտահայտություններն իմաստ չունեն:

► (1.2) անհավասարությունները գրենք  $x_n - a \leqslant \epsilon$  վեկտորի համար.

$$\left| x_n^i - a^i \right| \leq |x_n - a| \leq \left| x_n^1 - a^1 \right| + \dots + \left| x_n^m - a^m \right| : \quad (1.4)$$

Այժմ (1.3) պայմանի անհրաժեշտությունը հետևում է (1.4)-ի առաջին անհավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ երկրորդից: ■

Այս թեորեմի միջոցով  $R^m$  տարածության հաջորդականությունների ուսումնասիրությունը բերվում է թվային հաջորդականությունների դեպքին:

#### 4. Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման:

**Թեորեմ 1.2:** Յուրաքանչյուր սահմանափակ  $x_n \in R^m$  հաջորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն:

► Նախ ապացուցենք  $m = 2$  դեպքում: Ուստե՛մ  $x_n = (x_n^1, x_n^2)$  սահմանափակ հաջորդականությունը,  $|x_n| \leq L$ ,  $n \in N$ : (1.2)-ի համաձայն ունեն՝

$$\left| x_n^1 \right| \leq L, \quad \left| x_n^2 \right| \leq L :$$

Ծվային հաջորդականությունների վերաբերյալ Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմմայի համաձայն,  $x_n^1$  հաջորդականությունը պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝

$$x_{n_k}^1 \rightarrow x_0^1 : \quad (1.5)$$

Այժմ,  $x_{n_k}^2$  հաջորդականության համար կիրառելով Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման, կստանանք՝

$$x_{n_{k_l}}^2 \rightarrow x_0^2, \quad l \rightarrow \infty : \quad (1.6)$$

Նախորդ թեորեմի համաձայն, (1.5)-ից և (1.6)-ից հետևում է

$$x_{n_{k_l}} \rightarrow (x_0^1, x_0^2), \quad l \rightarrow \infty :$$

Քանի որ  $x_{n_k}$ -ը  $x_n$  հաջորդականության ենթահաջորդականություն է, ապա  $m = 2$  դեպքում ապացույցն ավարտված է:

Ընդհանուր դեպքում պնդումն ապացուցելու համար կկիրառենք մաքեմատիկական ինդուկցիա ըստ  $m$ -ի: ■

### 5. Կոչիի զուգամիտության սկզբունքը:

**Թեորեմ 1.3:** Որպեսզի  $x_n \in R^m$  հաջորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ այն լինի ֆունկամենտալ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունենա  $n_0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$n > n_0 \Rightarrow |x_{n+m} - x_n| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots :$$

► Անհրաժեշտության ապացույցը նույնն է, ինչ որ  $m = 1$  դեպքում՝ Ապացուցենք բավարարությունը: (1.3)-ի համաձայն, ունենք՝

$$|x_{n+m}^i - x_n^i| \leq |x_{n+m} - x_n|, \quad 1 \leq i \leq m :$$

Ուրեմն  $x_n^i$  թվային հաջորդականությունները ( $1 \leq i \leq m$ ) ֆունդամենտալ են, ուստի և, զուգամետ են՝  $x_n^i \rightarrow a^i$ ,  $1 \leq i \leq m$ :

Կորողինատային զուգամիտության թեորեմի համաձայն կստանանք՝

$$x_n \rightarrow a := (a^1, \dots, a^m) : \blacksquare$$

## §2. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

### 1. Կուտակման կետ $R^m$ -ում:

**Սահմանում:**  $a \in R^m$  կետը կոչվում է  $E \subset R^m$  բազմության կուտակման կետ, եթե  $a$  կետի յուրաքանչյուր  $B(a, \varepsilon)$  շրջակայր պարունակում է  $E$  բազմությանը պատկանող անվերջ թվով կետեր:  $E$  բազմության կուտակման կետերի բազմությունը նշանակվում է  $E'$ :

**Լեմմա 2.1:** Եթե  $a \in E'$ , ապա գոյություն ունի  $x_n \in E$  հաջորդականություն, այնպիսին, որ  $x_n \neq a$  և  $x_n \rightarrow a$ :

Ապացուցվում է նոյն կերպ, ինչպես  $m = 1$  դեպքում:

**2. Մի բանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի սահմանում:** Եթե  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $E \subset R^m$  բազմության վրա, ապա այն կոչվում է  $m$  փոփոխականի կամ շատ փոփոխականի ֆունկցիա:

Դիցուք  $a$ -ն  $E$  բազմության կուտակման կետ է՝  $f: E \rightarrow R$ ,  $a \in E'$ :

**Սահմանում:** Կասենը  $x$ -ը  $a$ -ին ճգնելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ճգնում է  $b$  բվին (կամ  $f$ -ի սահմանը  $a$  կետում  $b$ -ն է) և կգրեն՝

$$f(x) \rightarrow b, \text{եթե } x \rightarrow a \text{ կամ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  բվի համար գոյորդյուն ունի  $\delta > 0$  բիկ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in E \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon : \quad (2.1)$$

Եթե  $x$  և  $a$  վեկտորները ներկայացնենք իրենց կոորդինատների միջոցով, ապա այս սահմանումը կընդունի հետևյալ տեսքը.

Կասենը  $x$ -ը  $a$ -ին ճգնելիս՝  $f(x)$  ֆունկցիան ճգնում է  $b$ -ի, եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  բվի համար գոյորդյուն ունի  $\eta > 0$  բիկ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} |x^i - a^i| < \eta \\ i = 1, 2, \dots, m \\ x \neq a, \quad x \in E \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x^1, \dots, x^m) - b| < \varepsilon : \quad (2.1')$$

Այս դեպքում գրում են՝  $\lim_{\substack{x^i \rightarrow a^i \\ i=1, \dots, m}} f(x^1, \dots, x^m) = b$ :

(2.1) և (2.1') պայմանների համարժեքությունը բխում է (1.1)-ից:

**Թեորեմ 2.1:** Որպեսզի  $f(x) \rightarrow b$ , եթե  $x \rightarrow a$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $x_n \in E$  հաջորդականության համար, որը բավարարում է  $x_n \neq a$  և  $x_n \rightarrow a$  պայմաններին, տեղի ունենա

$$f(x_n) \rightarrow b$$

սահմանային առնչությունը:

Սա նշանակում է, որ Կոշիի և Հայնեի սահմանումները համարժեք են նաև մի բանի փոփոխականների դեպքում\*:

Թեորեմ 2.1-ն ապացուցվում է այնպես, ինչպես  $m = 1$  դեպքում:

\* Այստեղ պահպանված են  $m = 1$  դեպքի անվանումները:

Անվերջ սահմանները նույնապես սահմանվում են  $m = 1$  դեպքի նման (ձևակերպել ինքնուրույն):

**3. Թվաբանական գործողություններ:** Դիցուք  $f$  և  $g$  ֆունկցիաները որոշված են  $E$  բազմության վրա, որի համար  $a$ -ն կոտակման կետ է, և  $f(x) \rightarrow b_1$  ու  $g(x) \rightarrow b_2$ , եթե  $x \rightarrow a$  ( $b_1, b_2$  թվերը վերջավոր են):

Այդ դեպքում

1) Նրանց գումարը նույնապես ունի վերջավոր սահման և գումարի սահմանը հավասար է գումարելիների սահմանների գումարին՝

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) :$$

2) Նրանց արտադրյալը նույնապես ունի վերջավոր սահման և

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] \cdot [\lim_{x \rightarrow a} g(x)] :$$

3) Եթե  $b_2 \neq 0$ , ապա  $f / g$  բանորդը նույնապես ունի վերջավոր սահման և

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} :$$

► Հայնեի սահմանման միջոցով հարցը բերվում է թվային հաջորդականությունների համապատասխան հատկություններին: ■

#### 4. Կոչիի զուգամիտության սկզբները:

**Թեորեմ 2.2 :** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $E \subset R^m$  բազմության վրա, որի համար  $a$ -ն կոտակման կետ է: Որպեսզի  $f(x)$  ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, եթե  $x \rightarrow a$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունենա  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} 0 < |x' - a| < \delta \\ 0 < |x'' - a| < \delta \\ x', x'' \in E \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

Ապացուցվում է, այնպես, ինչպես մեկ փոփոխականի դեպքում (փորձեք ապացուցել ինքնուրույն):

**5. Հաջորդական սահմաններ:** Դիցուք  $X, Y \subset R$ ,  $a$ -ն  $X$ -ի կուտակման կետ է,  $b$  -ն՝  $Y$ -ի և  $f: X \times Y \rightarrow R^*$ :

Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր հաստատագրված  $y \in Y$ ,  $y \neq b$  թվի համար գոյություն ունի

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y)$$

Վերջավոր սահմանը (որպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի սահման): Այդ դեպքում  $\varphi(y)$  ֆունկցիան որոշված է  $Y \setminus \{b\}$  բազմության վրա:

Եթե գոյություն ունի  $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y)$  սահմանը, ապա այն կոչվում է  $f(x, y)$

ֆունկցիայի հաջորդական սահման և նշանակվում է՝

$$\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) :$$

Նման ձևով սահմանվում է մյուս հաջորդական սահմանը՝

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) :$$

### Թեորեմ 2.3: Եթե

1) գոյություն ունի

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A \quad (2.2)$$

(վերջավոր կամ անվերջ) կրկնակի սահմանը<sup>\*\*</sup>,

2) յուրաքանչյուր հաստատագրված  $y \in Y$ ,  $y \neq b$  արժեքի դեպքում գոյություն ունի

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y)$$

վերջավոր սահմանը,

ապա գոյություն ունի

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

\* Նոյնիսկ բավական է, որ  $f: (X \setminus \{a\}) \times (Y \setminus \{b\}) \rightarrow R$ :

\*\* Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանն ընդունված է կրկնակի սահման անվանել:

▶ Ապացուցենք վերջավոր  $A$ -ի դեպքում: (2.2)-ի համաձայն, յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta \\ 0 < |y - b| < \delta \\ (x, y) \in X \times Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x, y) - A| < \varepsilon :$$

Այսուհետև հաստատագրենք  $y$ -ը, իսկ  $x$ -ը ճշտեցնենք  $a$ -ի:

$$0 < |y - b| < \delta \Rightarrow |\varphi(y) - A| \leq \varepsilon ,$$

որը նշանակում է, որ  $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = A$ : ■

**Լրացում:** Եթե այս քերենք մեջ բացի 1) և 2) պայմաններից բավարպի նաև հետևյալ պայմանը.

3) յուրաքանչյուր  $x \in X$ ,  $x \neq a$  արժեքի դեպքում գոյություն ունի

$$\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) = \psi(x)$$

վերջավոր սահմանը,

ապա գոյություն կունենա նաև  $\lim_{x \rightarrow a} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$  հաջորդական սահմանը և հավասար կլինի նոյն  $A$ -ին, այսինքն՝ երկու հաջորդական սահմանները գոյություն կունենան և հավասար կլինեն:

**Օրինակներ.**

ա)  $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}$ ;  $(a, b) = (0, 0)$ :

Քանի որ  $|x \sin 1/y| \leq |x|$ , ապա  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , բայց  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$

սահմանը գոյություն չունի:

բ)  $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow R$  ֆունկցիան որոշենք հետևյալ կերպ.

$f(x, y) = 0$ , եթե  $x \neq y$  և  $f(x, y) = 1$ , եթե  $x = y$ : Այդ դեպքում՝

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0 ,$$

բայց  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$  կրկնակի սահմանը գոյություն չունի:

զ) Կոորդինատային առաջին քառորդում որոշենք՝  $f(x, y) = 0$ , եթե  $y > x > 0$ ;  $f(x, y) = 1$ , եթե  $0 < y \leq x$ : Այս դեպքում՝

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1;$$

**6. Վեկտոր - ֆունկցիայի սահմանը:** Այժմ ենթադրենք, որ  $f$  ֆունկցիան որոշված է  $E \subset R^m$  բազմության վրա և արժեքներ է ընդունում  $R^k$  տարածությունից, այսինքն՝ ֆունկցիայի արժեքները նույնպես վեկտորներ են: Յուրաքանչյուր հաստատագրված  $x \in E$  դեպքում այդ ֆունկցիայի արժեքը (վեկտորը) կարելի է ներկայացնել կոորդինատների միջոցով՝

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^k(x)),$$

որտեղ  $f^i(x)$ -երը,  $1 \leq i \leq k$ , իրական թվեր են: Փոփոխելով  $x$ -ը  $E$  բազմության վրա՝ ստանում ենք նոր ֆունկցիաներ.

$$f^i : E \rightarrow R, \quad 1 \leq i \leq k,$$

որոնք կոչվում են  $f$  ֆունկցիայի կոորդինատային ֆունկցիաներ: Այս դեպքում ասում են, որ  $f$  -ը վեկտորարժեք ֆունկցիա է (կամ կարճ վեկտոր-ֆունկցիա), իսկ  $f^i$  կոորդինատային ֆունկցիաները իրականարժեք կամ թվային ֆունկցիաներ են:

**Սահմանում:** Դիցուք  $E \subset R^m$  և  $a$  -ն  $E$  բազմության կուտակման կետ  $t: b \in R^k$  վեկտորը կոչվում է  $f: E \rightarrow R^k$  ֆունկցիայի սահման  $a$  կետում և նշանակվում է՝  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի մի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $0 < |x - a| < \delta$  պայմանին բավարարող բոլոր  $x \in E$  կետերի համար տեղի ունենա  $|f(x) - b| < \varepsilon$  անհավասարությունը:

**Թեորեմ 2.4:** Որպեսզի  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\lim_{x \rightarrow a} f^i(x) = b^i, \quad 1 \leq i \leq k, \quad b = (b^1, \dots, b^k):$$

Ապացույցը բխում է:

$$|f'(x) - b'| \leq |f(x) - b| \leq |f^1(x) - b^1| + \cdots + |f^k(x) - b^k|$$

անհավասարություններից (ինչպես կոորդինատային գուգամիտության վերաբերյալ թերեմի դեպքում):

### §3. ԱՆՀԱՎԱՍ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1.  $R^m$  տարածության տոպոլոգիան: Դիցուք  $D \subset R^m$ :

$D$  բազմությանը պատկանող  $a$  կետը կոչվում է այդ բազմության ներքին կետ, եթե գոյություն ունի  $\varepsilon > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $B(a, \varepsilon) \subset D$ :

$D$  բազմությունը կոչվում է *բաց բազմություն*, եթե նրա բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Բաց բազմության պարզագույն օրինակներ են բաց գունդը և  $m$ -չափանի բաց գուգահեռանիստը՝

$$I(a, b) = \{(x^1, \dots, x^m) : a^i < x^i < b^i\}, \quad (-\infty < a^i < b^i < +\infty, i=1, \dots, m).$$

$F \subset R^m$  բազմությունը կոչվում է *փակ*, եթե նրա բոլոր կուտակման կետերը պատկանում են իրեն:

Հետևյալ թերեմը անմիջապես բխում է սահմանումներից:

**Թերեմ 3.1:** Որպեսզի  $F$  բազմությունը լինի փակ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա լրացումը՝

$$F^C := R^m \setminus F,$$

լինի բաց:

Հեշտ է տեսնել, որ յուրաքանչյուր  $E \subset R^n$  բազմության կուտակման կետերի բազմությունը՝  $E'$  -ը, փակ է:

$E \cup E'$  բազմությունը կոչվում է  $E$  բազմության փակույթ և նշանակվում է  $\bar{E}$ :

Դժվար չէ տեսնել, որ  $\bar{E}$  բազմությունը փակ է և հավասար է  $E$ -ն պարունակող բոլոր փակ բազմությունների հատմանը՝

$$\bar{E} = \bigcap_F \{F \supset E; F - \text{փակ}\}:$$

$R^m$  տարածությունում  $a$  և  $b$  կետերը միացնող հատված է կոչվում  $[0,1]$  հատվածի պատկերը՝

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb = a + t(b-a), \quad t \in [0,1]$$

արտապատկերման դեպքում: Այդ դեպքում  $a$ -ն և  $b$ -ն կոչվում են հատվածի ծայրակետեր, ընդ որում,  $a$ -ն՝ սկզբնակետ, իսկ  $b$ -ն՝ վերջնակետ: Հատվածը նշանակվում է  $[a, b]$  սիմվոլով:

$L \subset R^n$  բազմությունը կոչվում է *բեկյալ*, եթե գոյություն ունի  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset R^n$  վերջավոր բազմություն, այնպիսին, որ

$$L = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]:$$

Այդ դեպքում  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  կետերը կոչվում են բեկյալի գագաթներ:  $x_0$ -ն կոչվում է  $L$  բեկյալի սկզբնակետ, իսկ  $x_n$ -ը՝ վերջնակետ:  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  հատվածները կոչվում են բեկյալի կողմեր: Բեկյալը գրվում է նաև  $L = x_0 x_1 \dots x_n$  տեքրով:

$D \subset R^n$  բաց բազմությունը կոչվում է *կապակցված*, եթե յուրաքանչյուր  $a \in D$ ,  $b \in D$  կետերի զույգի համար գոյություն ունի  $L \subset D$  բեկյալ այնպիսին, որ  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  (գոյություն ունի  $L \subset D$  բեկյալը որպես միացնում է  $a$  և  $b$  կետերը):

Բաց և կապակցված բազմությունը կոչվում է *տիրույթ* (*կամ բաց ալիրույթ*):

$a \in R^n$  կետը կոչվում է  $D$  բազմության *եզրային կետ*, եթե  $a$ -ի յուրաքանչյուր շրջակայր պարունակում է  $\rho$ '  $D$  բազմությանը պատկանող կետ, և  $\rho$ '  $D$  բազմությանը չպատկանող կետ:

$D$  բազմության եզրային կետերի բազմությունը կոչվում է  $D$  բազմության *եզր* և նշանակվում է  $\partial D$  սիմվոլով:

Եթե  $D$ -ն բաց տիրույթ է, ապա  $D \cup \partial D$  բազմությունը կոչվում է փակ տիրույթ և նշանակվում է  $\overline{D}$  սիմվոլով\*:

$D \subset R^n$  բազմությունը կոչվում է *ուռուցիկ*, եթե  
 $a, b \in D \Rightarrow [a, b] \subset D$ :

Պարզագույն ուռուցիկ բազմության օրինակներ են հանդիսանում գունդը և զուգահեռանիստը\*\*:

\* Ասպացուցել, որ այն փակ բազմությունն է:

\*\* Ասպացուցել:

## 2. Բորելի լեմման:

**Թեորեմ 3.2:** Եթե  $E \subset R^m$  փակ և սահմանափակ բազմությունը ծածկված է բաց բազմությունների  $\{\Delta_\alpha\}$  ընտանիքով, ապա այդ ընտանիքից կարելի է աճատեղ վերջավոր ենթածածկույթ:

► Պարզության համար ապացույցը ներկայացնենք  $m = 2$  դեպքում: Այս դեպքում  $E$  սահմանափակ բազմությունը կարող ենք ընդգրկել  $[a, b] \times [c, d] =: A$  ուղղանկյան մեջ:

Ենթադրենք հակառակը՝  $E$  բազմության համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ:

$A$  ուղղանկյունը  $x = \frac{a+b}{2}$  և  $y = \frac{c+d}{2}$  ուղղներով տրոհենք չորս փակ ուղղանկյունների՝  $A^1, A^2, A^3, A^4$  և դիտարկենք  $E \cap A^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  բազմությունները: Այս բազմություններից գոնեւ մեկի համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ: Դրան ծածկող համապատասխան  $A^i$  ուղղանկյունը նշանակենք  $A_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ : Այնուհետև նոյնը կատարենք  $A_i$ -ի հետ: Այս դեպքում կատանանք  $A_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2]$  ուղղանկյունը, այնպիսին, որ  $E \cap A_2$  բազմության համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ: Այս պրոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք

$$A_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k], \quad k = 1, 2, \dots$$

ներդրված ուղղանկյունները, այնպիսիք, որ յուրաքանչյուր  $E \cap A_k$  բազմության համար գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ: Ընդ որում, թե՛  $[a_k, b_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$  հատվածները ներդրված են և

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0, \quad d_k - c_k = \frac{d-c}{2^k} \rightarrow 0:$$

Ներդրված հատվածների լեմմայի համաձայն, գոյություն ունեն  $a_0$  և  $c_0$  հաստատումներ, այնպիսիք, որ

$$\begin{array}{l} a_k \rightarrow a_0, \quad c_k \rightarrow c_0 \\ b_k \rightarrow a_0, \quad d_k \rightarrow c_0 \end{array} :$$

Քանի որ  $a_0 \in [a_k, b_k]$ ,  $c_0 \in [c_k, d_k]$ ,  $k=1, 2, \dots$ , ապա  $(a_0, c_0)$  կետը պատկանում է բոլոր  $A_k$  ուղղանկյուններին: Եվ քանի որ յուրաքանչյուր  $A_k$  ուղղանկյուն պարունակում է  $E$ -ի անվերջ թվով կետեր (հակառակ դեպքում  $E \cap A_k$ -ի համար գոյություն կունենար վերջավոր ենթածածկույթ), ապա  $(a_0, c_0)$  կետը  $E$ -ի կուտակման կետ է\*, իետևաբար,  $(a_0, c_0) \in E$  (քանի որ  $E$ -ն փակ է):

Քանի որ  $E$  բազմության բոլոր կետերը ծածկված են  $\{\Delta_\alpha\}$  բազմություններով, ապա գոյություն ունի  $\alpha_0$  թիվ, այնպիսին, որ  $(a_0, c_0) \subset \Delta_{\alpha_0}$ : Սակայն  $\Delta_{\alpha_0}$ -ն բաց է, իետևաբար, գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$(a_0 - \delta, a_0 + \delta) \times (c_0 - \delta, c_0 + \delta) \subset \Delta_{\alpha_0}:$$

Մյուս կողմից, գոյություն ունի  $k_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$k > k_0 \Rightarrow [a_k, b_k] \subset (a_0 - \delta, a_0 + \delta) \cup [c_k, d_k] \subset (c_0 - \delta, c_0 + \delta)$ , իետևաբար,

$$k > k_0 \Rightarrow A_k \subset \Delta_{\alpha_0}:$$

Այսպիսով,  $E \cap A_k$  բազմությունը ծածկվեց մեկ հատ  $\Delta_{\alpha}$ -ով, ինչը և հակառակություն է: ■

**Սահմանում:**  $K \subset R^m$  բազմությունը կոչվում է **կոմպակտ**, եթե նրա յուրաքանչյուր բաց ծածկույթ պարունակում է վերջավոր ենթածածկույթ:

Բորելի լեմմայի համաձայն, յուրաքանչյուր փակ և սահմանափակ բազմություն կոմպակտ է: Ծիշտ է նաև հակադարձ պնդումը.

**Թեորեմ 3.3:** Եթե  $K \subset R^m$  բազմությունը կոմպակտ է, ապա այն փակ է և սահմանափակ:

---

\*  $(a_0, c_0)$  կետի ցանկացած  $(a_0 - \eta, a_0 + \eta) \times (c_0 - \eta, c_0 + \eta)$  շրջակայթ պարունակում է  $A_k$ -ն, եթե  $k > k_0(\eta)$  (տես հաջորդ դաստողությունները):

► Նախ ապացուցենք սահմանափակությունը: Ենթադրենք հակառակը՝  $K \subset R^m$  բազմությունը կոմպակտ է, բայց սահմանափակ չէ: Այդ դեպքում  $\{B(0, n)\}, \quad n=1,2,\dots$  բաց գնդերի ընտանիքը ծածկում է  $K$ -ն, բայց գոյություն չունի վերջավոր ենթածածկույթ, ինչը հակառակություն է:

$K$  կոմպակտ բազմության փակությունն ապացուցելու համար կրկին կատարենք հակառակ ենթադրություն: Գոյություն ունի  $K$ -ի կուտակման կետ՝  $a$ , որը չի պատկանում  $K$ -ին: Այդ դեպքում

$$\left[ \overline{B}\left( a, \frac{1}{n} \right) \right]^c = \left\{ x \in R^k : |x - a| > \frac{1}{n} \right\}, \quad n=1,2,\dots$$

բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի  $K$ -ն, բայց չի պարունակի վերջավոր ենթածածկույթ: Նորից եկանք հակառակության: ■

**3. Անընդհատ ֆունկցիաներ:**  $f: E \rightarrow R^k$  ( $E \subset R^m$ ) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ  $x_0 \in E$  կետում, եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} & |x - x_0| < \delta \\ & x \in E \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon: \quad (3.1)$$

Մասնավոր դեպքում, եթե  $x_0$ -ն  $E$  բազմության կուտակման կետ է, (3.1) պայմանը նշանակում է՝

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0): \quad (3.1')$$

Հետևյալ պնդումը բխում է ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումից:

**Թեորեմ 3.4:** Որպեսզի  $f$  ֆունկցիան լինի անընդհատ  $x_0 \in E$  կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $x_n \in E$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  հաջորդականության համար  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ :

Այն դեպքում, եթե  $x_0 \in E$  կետը  $E$  բազմության կուտակման կետ չէ (մեկուսացված կետ է), (3.1) պայմանը բավարարվում է՝ անկախ  $f$  ֆունկցիայից, այսինքն՝ մեկուսացված կետում բոլոր ֆունկցիաներն անընդհատ են:

Եթե  $x$  և  $x_0$  կետերը գրենք կոորդինատների միջոցով, ապա (3.1) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$\left| \begin{array}{l} x^i - x_0^i < \delta \\ 1 \leq i \leq m \end{array} \right\| \Rightarrow |f(x^1, \dots, x^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m)| < \varepsilon : \quad (3.1'')$$

Նկատենք, որ եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0 \in E$  կետում, ապա  $\varphi(t) := f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, t, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m)$  ֆունկցիան, որը մեկ փոփոխականի ֆունկցիա է, անընդհատ է  $x_0^i$  կետում: Այլ կերպ ասած, եթե մի քանի փոփոխականի ֆունկցիան անընդհատ է, ապա այն անընդհատ է նաև ըստ յուրաքանչյուր փոփոխականի:

$f$  ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ  $E$  բազմության վրա, եթե այն անընդհատ է  $E$  բազմության բոլոր կետերում:  $E$  բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիաների դասը կնշանակենք  $C(E)$ :

**Թեորեմ 3.5:** Եթե  $f, g \in C(E)$ , ապա  $f + g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  ( $g \neq 0$ ) ֆունկցիաները ևս  $C(E)$  դասից են:<sup>\*</sup>

Ապացույցը բխում է վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ բվարանական գործողությունների վերաբերյալ թեորեմից:

Վեկտորարժեք ֆունկցիայի անընդհատությունը սահմանվում է նույն կերպ, այն է.  $f: E \rightarrow R^k$  ( $E \subset R^m$ ) ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ  $x_0 \in E$  կետում, եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left| \begin{array}{l} x - x_0 < \delta \\ x \in E \end{array} \right\| \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon :$$

**Թեորեմ 3.6:** Որպեսզի  $f: E \rightarrow R^k$  ( $E \subset R^m$ ) վեկտորարժեք ֆունկցիան լինի անընդհատ  $x_0 \in E$  կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ նրա

\* Այս թեորեմը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե  $f$  և  $g$  ֆունկցիաներն անընդհատ են ոչ թե ամբողջ  $E$ -ի վրա, այլ միայն  $x_0 \in E$  կետում:

կոորդինատային ֆունկցիաները՝  $f^i : E \rightarrow R$  ( $f = (f^1, \dots, f^k)$ ), լինեա անընդհատ  $x_0$  կետում:

Այս թեորեմը բխում է վեկտորարժեք ֆունկցիայի սահմանի վերաբերյալ թեորեմից (թեորեմ 2.4):

$E$  բազմության վրա անընդհատ վեկտորարժեք ֆունկցիաների բազմությունը կնշանակենք  $C(E, R^k)$ :

**Թեորեմ 3.7:** Եթե  $f, g \in C(E, R^k)$ , ապա  $f + g$ ,  $\alpha f \in C(E, R^k)$  ( $\alpha \in R$ ):

Այս թեորեմը բխում է նախորդ թեորեմից և բվային ֆունկցիաների վերաբերյալ համապատասխան թեորեմից:

**Սահմանում:**  $\varphi \in C([\alpha, \beta], R^m)$  ֆունկցիան կոչվում է անընդհատ կոր (կամ ուղղակի՝ կոր)  $R^m$ -ում, իսկ նրա արժեքների բազմությունը՝  $\gamma := \varphi([\alpha, \beta])$  -ն, կոչվում է այդ կորի կրիչ:

Հաճախ կոր են համարում հենց  $\gamma$ -ն՝  $x = \varphi(t)$  ֆունկցիան համարելով  $\gamma$  կորի պարամետրացում:

Կորի պարամետրացումը կարելի է ներկայացնել նաև  $\varphi$  ֆունկցիայի կոորդինատային ֆունկցիաների միջոցով՝

$$\left. \begin{array}{l} x^1 = \varphi^1(t) \\ \dots \dots \dots \\ x^m = \varphi^m(t) \end{array} \right\}, \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

որտեղ  $\varphi^i \in C[\alpha, \beta]$ ,  $1 \leq i \leq m$ :

Հարթ կորերի համար ( $m = 2$ ) ընդունված տերմինները պահպանվում են նաև ընդհանուր դեպքում:

#### 4. Բարդ ֆունկիայի անընդհատությունը:

**Թեորեմ 3.8:** Դիցուք  $T \subset R^k$ ,  $X \subset R^m$ : Եթե

ա)  $\varphi : T \rightarrow X$  ֆունկցիան անընդհատ է  $t_0 \in T$  կետում,

բ)  $f : X \rightarrow R^n$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0 = \varphi(t_0)$  կետում,

ապա  $h(t) := f(\varphi(t)) : T \rightarrow R^n$  բարդ ֆունկցիան անընդհատ է  $t_0$  կետում:

► Ապացուցում է, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում. բ) պայմանից ունենք, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\eta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} |x - x_0| < \eta \\ x \in X \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon : \quad (\text{p})$$

Այսուհետև, ա) պայմանից ունենք, որ գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \eta :$$

(ա)

Համադրելով (ա)-ն և (պ)-ն, կստանանք.

$$\left. \begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow |f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))| < \varepsilon :$$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} |t - t_0| < \delta \\ t \in T \end{array} \right\} \Rightarrow |h(t) - h(t_0)| < \varepsilon : \blacksquare$$

Եթե  $\varphi$  ֆունկցիան և  $t$  վեկտորը ներկայացնենք կոորդինատների միջոցով՝  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ ,  $t = (t^1, \dots, t^k)$ , ապա թերեմ 3.9-ը կընդունի հետևյալ տեսքը.

Եթե  $\varphi^1(t^1, \dots, t^h), \dots, \varphi^m(t^1, \dots, t^h)$  բվային ֆունկցիաներն անընդհատ են  $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^h)$  կետում, իսկ  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$  կետում, ըստ որում,  $x_0^i = \varphi^i(t_0^1, \dots, t_0^h)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , ապա  $f(\varphi^1(t^1, \dots, t^h), \dots, \varphi^m(t^1, \dots, t^h))$  բարդ ֆունկցիան անընդհատ է  $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^h)$  կետում:

### 5. Անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ:

1)  $R^m$  տարածությունում ( $m$  փոփոխականի) բազմանդամ է կոչվում հետևյալ տեսքի վերջավոր գումարը.

$$P(x_1, \dots, x_m) = \sum C_{v_1 \dots v_m} x_1^{v_1} \cdots x_m^{v_m},$$

որտեղ  $C_{v_1 \dots v_m} \in R$ , իսկ  $v_1, \dots, v_m$  թվերը ոչ բացասական ամբողջ թվեր են:

$P$  բազմանդամն անընդհատ է ամբողջ  $R^m$  տարածության վրա: Իրոք, քանի որ  $x_1^{v_1}, \dots, x_m^{v_m}$  ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրը կարելի է դիտարկել որպես  $m$  փոփոխականի ֆունկցիա, որն անընդհատ է  $R^m$ -ում, ուստի նրանց արտադրյալը նույնպես կլինի անընդհատ  $R^m$ -ում:

$$2) P \text{ և } Q \text{ բազմանդամների հարաբերությունը } \frac{P}{Q}, \text{ կոչվում է ռացիոնալ}$$

ֆունկցիա: Ռացիոնալ ֆունկցիան անընդհատ է  $R^m$  տարածության բոլոր այն կետերում, որոնցում հայտարարը զրո չէ:

3)  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  ֆունկցիան հարթության  $(0, 0)$  կետից տարբեր բոլոր կետերում անընդհատ է:  $(0, 0)$  կետում ֆունկցիան խզվում է\*, որովհետև այդ կետում այն սահման չունի: Իրոք,  $y = kx$  ուղղի վրա

$$f(x, y) = \frac{k}{1 + k^2} \xrightarrow[y \rightarrow 0]{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + k^2},$$

որը կախված է  $k$ -ից:

4) Եթե  $a, b \in R^m$ , ապա  $\varphi(t) = a + t(b - a): R \rightarrow R^m$  ֆունկցիան անընդհատ է  $R$ -ում, որովհետև նրա կոռորդինատային ֆունկցիաները գծային ֆունկցիաներ են:

#### §4. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Այս պարագուածում դիտարկվող ֆունկցիաները թվային են:

##### 1. Բոլոր կետերում:

**Թեորեմ 4.1:** Հիցուք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $D \subset R^m$  բաց (կամ փակ) տիրույթում: Եթե  $a \in D$  և  $b \in D$  կետերում  $f$ -ն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ, ապա գոյություն ունի  $c \in D$  կետ, այնպիսին, որ  $f(c) = 0$ :

\* Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների համար ընդունված տերմինները պահպանվում են նաև շատ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում:

► Նախ քերեմն ապացուցենք այն դեպքում, եթե  $D$  տիրույթը բաց է: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $L = x_0x_1\dots x_n$  թեկյալ, այնպիսին, որ  $x_0 = a$ ,  $x_n = b$  և  $L \subset D$ :

Որոշակիության համար ենթադրենք, որ  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ : Թող, որ  $i$ -ն լինի այնպիսին, որ  $f(x_i) < 0$ ,  $f(x_{i+1}) > 0$ :

Դիտարկենք հետևյալ օժանդակ ֆունկցիան՝

$$F(t) = f(x_i + t(x_{i+1} - x_i)): [0,1] \rightarrow R,$$

որն անընդհատ է  $[0,1]$  հատվածում, ըստ որում,  $F(0) = f(x_i) < 0$ ,  $F(1) = f(x_{i+1}) > 0$ : Հետևաբար, մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի վերաբերյալ Բոլցանո - Կոշիի առաջին քերեմի համաձայն, գոյություն ունի  $\theta \in [0,1]$  թիվ, այնպիսին, որ  $F(\theta) = 0$ : Այսինքն՝

$$f(x_i + \theta(x_{i+1} - x_i)) = 0:$$

Մնում է վերցնել

$$c = x_i + \theta(x_{i+1} - x_i) = (1 - \theta)x_i + \theta x_{i+1}$$

կետը, որը պատկանում է  $[x_i, x_{i+1}] \subset D$  հատվածին:

Փակ տիրույթի դեպքը բերվում է բաց տիրույթի դեպքին հետևյալ դատողությունների միջոցով.

Եթե  $a$ -ն եզրային կետ է և  $f(a) < 0$ , ապա գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{aligned} |x - a| &< \delta \\ x &\in D \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) < 0: \tag{4.1}$$

Հետևաբար, գոյություն ունի  $a_1 \in D$  ներքին կետ, այնպիսին, որ  $f(a_1) < 0$ : Նման ձևով (հարկ եղած դեպքում)  $b$ -ն նույնպես կարող ենք փոխարինել ներքին կետով: ■

**Թեորեմ 4.2:** *Բաց (կամ փակ) տիրույթում անընդհատ ֆունկցիայի ընդունած արժեքների բազմությունը միջակայք է:*

Ապացուցվում է նույն կերպ, ինչ որ մեկ փոփոխականի դեպքում:

## 2. Վայերշտրասի թեորեմները:

**Թեորեմ 4.3:** Եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ  $K \subset R^m$  վակ սահմանափակ<sup>\*</sup> բազմության վրա, ապա այն սահմանափակ է:

► Պետք է ապացուցենք, որ գոյություն ունեն  $m, M \in R$  թվեր, այնպիսիք, որ

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in K :$$

Ապացուցենք միայն վերևից սահմանափակությունը ( $M$ -ի գոյությունը): Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր  $n$  բնական թվի համար գոյություն ունի  $x_n \in K$  կետ, այնպիսին, որ

$$f(x_n) > n : \tag{4.2}$$

$K$  բազմության սահմանափակ լինելուց հետևում է, որ  $x_n$  հաջորդականությունը սահմանափակ է: Ուստի, Բոլցանո - Վայերշտրասի լիմմայի համաձայն, այն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝  $x_{n_k} \rightarrow x_0$ : Քանի որ  $K$ -ն նաև փակ է, ապա  $x_0 \in K$ :

Ֆունկցիայի անընդհատության Հայնեի սահմանման համաձայն՝

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0),$$

որը հակասում է (4.2) պայմանին: ■

**Թեորեմ 4.4:** *Փակ սահմանափակ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան ընդունում է իր մեծագույն և փոքրագույն արժեքները:*

Ապացույցը ճիշտ նույնն է, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում:

$E \subset R^m$  բազմության վրա սահմանափակ ֆունկցիայի տաստանումը սահմանվում է նույն կերպ, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում՝

$$\omega_E(f) := \sup_{x \in E} f(x) - \inf_{x \in E} f(x) = \sup_{x, y \in E} [f(x) - f(y)] :$$

---

\*Կոմապակտ:

Թեորեմ 4.4-ի համաձայն, կոմպակտ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիայի տառանումը հավասար է ֆունկցիայի մեծագույն և փոքրագույն արժեքների տարրերությանը:

**3. Հավասարաշափ անընդհատություն:** Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի հավասարաշափ անընդհատությունը սահմանվում է նոյն կերպ, ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Այն է՝  $f: E \rightarrow R$ ,

$E \subset R^n$  ֆունկցիան կոչվում է հավասարաշափ անընդհատ  $E$  բազմության վրա, եթե յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի մի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left| \begin{array}{l} |x' - x''| < \delta \\ x', x'' \in E \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon: \quad (4.3)$$

**Թեորեմ 4.5 (Կանոն):** Կոմպակտ բազմության վրա անընդհատ ֆունկցիան հավասարաշափ անընդհատ է:

► Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $K \subset R^n$  կոմպակտ բազմության վրա, բայց հավասարաշափ անընդհատ չէ: Դա նշանակում է, որ մի որևէ  $\varepsilon_0 > 0$  թվի համար խախտվում է (4.3)-ը: Այսինքն՝ ինչպիսի  $\delta > 0$  թիվ էլ վերցնենք, գոյություն ունեն  $x'_\delta, x''_\delta \in K$  կետեր, այնպիսիք, որ

$$|x'_\delta - x''_\delta| < \delta, \quad |f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \varepsilon_0:$$

$$\text{Վերցնենք } \delta = \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ և համապատասխան կետերը նշանակենք}$$

$x'_n, x''_n$ : Կունենանք՝

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0, \quad n = 1, 2, \dots: \quad (4.4)$$

Քանի որ  $K$  կոմպակտ բազմությունը սահմանափակ է, ապա սահմանափակ է նաև  $x'_n \in K$  հաջորդականությունը: Բոլցանո-Վայերշտրասի լիմմայի համաձայն, այն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն՝  $x'_{n_k} \rightarrow x_0$ : Քանի որ  $K$ -ն փակ է, ապա  $x_0 \in K$ :

Դժվար չէ նկատել, որ  $x''_{n_k}$  հաջորդականությունը ձգտում է նույն  $x_0$  սահմանին: Անընդհատության Հայնեի սահմանման համաձայն՝

$$f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0), \quad f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0), \quad k \rightarrow \infty,$$

որը հակասում է (4.4)-ին: ■

**Սահմանում:**  $E \subset R^n$  բազմության տրամագիծ է կոչվում

$$\sup_{x', x'' \in E} |x' - x''|$$

մեծությունը: Այն նշանակում է  $\text{diam } E$  կամ  $\delta(E)$  սիմվոլներով:

Զևակերպենք Կանոնորի թեորեմի դասական հետևանքը՝ եթե  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $K \subset R^m$  կոմպակտ բազմության վրա, ապա  $\liminf_{x \in K} f(x) \geq \limsup_{x \in K} f(x)$  այսինքն՝  $\varepsilon > 0$  բվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} \text{diam } E < \delta \\ E \subset K \end{array} \right\} \Rightarrow \omega_E(f) < \varepsilon,$$

որտեղ  $\omega_E(f)$ -ը  $f$  ֆունկցիայի տատանումն է  $E$  բազմության վրա:

Այժմ ապացուցենք Կանոնորի թեորեմը Բորելի լեմմայի միջոցով\*:

► Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Այդ դեպքում  $\liminf_{t \in K} f(t) \geq \limsup_{t \in K} f(t)$  կետի համար գոյություն ունի  $\delta_t > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\left. \begin{array}{l} |x - t| < \delta_t \\ x \in K \end{array} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2}:$$

Հետևաբար,

$$x', x'' \in B(t, \delta_t) \cap K \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon: \quad (4.5)$$

Դիտարկենք  $\left\{ B\left(t, \frac{\delta_t}{2}\right) \right\}, t \in K$  բաց զնդերի ընտանիքը, որը ծածկում է  $K$ -ն: Քանի որ  $K$ -ն կոմպակտ է, ապա գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝

\* Ասպացույցը կատարվում է նույն դատողություններով, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում:

$$B\left(t_1, \frac{\delta_{t_1}}{2}\right), \dots, B\left(t_n, \frac{\delta_{t_n}}{2}\right);$$

Նշանակենք  $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{t_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{t_n}}{2} \right\}$  և ցույց տանք, որ

$$\left| x' - x'' \right| < \delta \quad \begin{cases} x', x'' \in K \end{cases} \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon :$$

Իրոք, դիցուք՝  $x' \in B\left(t_i, \frac{\delta_{t_i}}{2}\right)$ : Այդ դեպքում,  $\delta$ -ի ընտրության շնորհիվ,

$$x'' \in B\left(t_i, \delta_{t_i}\right);$$

Այսպիսով՝  $x', x'' \in B\left(t_i, \delta_{t_i}\right) \cap K$  և, (4.5)-ի համաձայն, կստանանք՝

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon : \blacksquare$$

## §5. ԱՆԲԵԿԱՏ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ

**1. ԱՆԲԵԿԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆ ԱՐՏԱՊԱՏԼԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԼԵզվով:** Դիցուք  $X \subset R^n$  և  $f: X \rightarrow R^k$ , այսինքն՝  $f$  արտապատլերումը որոշված է  $X$  բազմության վրա և արժեքներ է ընդունում  $R^k$  տարածությունից: Յուրաքանչյուր  $A \subset X$  ենթաբազմության համար  $f(A)$  սիմվոլով նշանակենք այն  $f(x)$  կետերի բազմությունը, որոնց համար բավարարվում է  $x \in A$  պայմանը՝

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} :$$

$f(A)$ -ն կոչվում է  $A$  բազմության պատկեր:

Այնուհետև, կամայական  $U \subset R^k$  բազմության համար  $f^{-1}(U)$  սիմվոլով նշանակենք այն բոլոր  $x \in X$  կետերի բազմությունը, որոնք բավարարում են  $f(x) \in U$  պայմանին՝

$$f^{-1}(U) := \{x \in X : f(x) \in U\} :$$

$f^{-1}(U)$ -ն կոչվում է  $U$  բազմության նախապատկեր:

Հասուն նշենք, որ այս սահմանման մեջ  $f$  արտապատկերման հակադարձելիությունը չի պահանջվում:

Այժմ ենթադրենք, որ  $f : R^m \rightarrow R^k$  ֆունկցիան անընդհատ է,  $x_0 \in R^m$  կետում: Այսինքն՝ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  բվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$x \in B(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon) : \quad (5.1)$$

(5.1) պայմանը կարելի է գրել ինչպես

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \quad (5.2)$$

տեսքով, այնպես էլ նախապատկերի միջոցով՝

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) : \quad (5.2')$$

**Թեորեմ 5.1:** Որպեսզի  $f \in C(R^m, R^k)$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $U \subset R^k$  բաց բազմության նախապատկերը՝  $f^{-1}(U)$ -ն, լինի բաց բազմություն:

► **Անհրաժեշտություն:** Նշանակենք  $V = f^{-1}(U)$  և ապացուցենք, որ  $V$ -ն բաց է (այսինքն՝  $V$ -ի յուրաքանչյուր կետ ներքին կետ է):

Դիցուք  $x_0 \in V$ , որը նշանակում է՝  $f(x_0) \in U$ : Քանի որ  $U$ -ն բաց է, ապա գոյություն ունի  $f(x_0)$  կետի  $B(f(x_0), \varepsilon)$  շրջակայք, այնպիսին, որ

$$B(f(x_0), \varepsilon) \subset U :$$

(5.2')-ի համաձայն՝ գոյություն ունի  $B(x_0, \delta)$  գունդ, այնպիսին, որ

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(U) = V :$$

Այսպիսով,  $x_0$ -ն  $V$ -ի ներքին կետ է, հետևաբար՝  $V$ -ն բաց է:

**Բավարարություն:** Վերցնենք կամայական  $x_0 \in R^m$  կետ և ապացուցենք  $f$ -ի անընդհատությունն այդ կետում: Այդ նպատակով վերցնենք

$\varepsilon > 0$  թիվը և որպես  $U \subset R^k$  բաց բազմություն ընտրենք  $U = B(f(x_0), \varepsilon)$  բաց գունդը: Ըստ թերեմի պայմանի,  $V = f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$  բազմությունը բաց է: Հետևաբար, գոյություն ունի  $x_0 \in V$  կետի  $B(x_0, \delta)$  շրջակայք, այնպիսին, որ

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)):$$

Այժմ, (5.2)-ի համաձայն,  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0$  կետում: ■

Այն դեպքում, եթե  $f$  ֆունկցիան որոշված է ոչ թե ամբողջ  $R^m$  տարածությունում, այլ նույն  $X$  նորագույն վրա, այս թերեմի նմանակը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

**Թեորեմ 5.2:** Որպեսզի  $f \in C(X, R^k)$ ,  $X \subset R^m$ , անհրաժեշտ է և բավարար, որ յուրաքանչյուր  $U \subset R^k$  բաց բազմության համար գոյություն ունենա  $V \subset R^m$  բաց բազմություն, այնպիսին, որ

$$f^{-1}(U) = V \cap X:$$

► **Անհրաժեշտություն:**  $f$ -ն անընդհատ է  $x_0 \in X$  կետում, նշանակում է, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի մի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$(B(x_0, \delta) \cap X) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)): \quad (5.3)$$

Քանի որ  $U$ -ն բաց է, ապա յուրաքանչյուր  $x \in f^{-1}(U)$  կետի համար գոյություն ունի  $\varepsilon_x > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $B(f(x), \varepsilon_x) \subset U$ :

(5.3)-ի համաձայն,  $\varepsilon_x > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta_x > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$(B(x, \delta_x) \cap X) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon_x)) \subset f^{-1}(U):$$

Նշանակենք՝

$$V = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} B(x, \delta_x):$$

Այդ դեպքում՝

$$V \cap X = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} (B(x, \delta_x) \cap X) = f^{-1}(U):$$

Բավարարությունն ապացուցվում է այնպես, ինչպես նախորդ թեմում: ■

Ընթերցողին առաջարկվում է այս թեորեմը ձևակերպել փակ բազմությունների տերմիններով և այդտեղից ստանալ հետևյալ արդյունքը. եթե  $K \subset R^n$  բազմությունը կոմպակտ բազմություն է և  $f \in C(K, R^k)$  ֆունկցիան հակադարձէլի է, ապա  $f^{-1}$ -ը նույնպես անընդհատ է (օգուվեր հաջորդ թեորեմից):

### 2. Կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկեր:

**Թեորեմ 5.3:** Կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկերը կոմպակտ բազմություն է:

► Դիցուք  $K \subset R^n$  բազմությունը կոմպակտ է և  $f \in C(K, R^k)$ : Պեսոք է ապացուցենք, որ  $f(K)$  բազմությունը ևս կոմպակտ է:

Դիցուք բաց բազմությունների  $\{U_\alpha\}$  ընտանիքը ծածկում է  $f(K)$ -ն: Նախորդ թեորեմի համաձայն, յուրաքանչյուր  $U_\alpha$  բաց բազմության համար գոյություն ունի  $V_\alpha \subset R^n$  բաց բազմություն, այնպիսին, որ

$$f^{-1}(U_\alpha) = V_\alpha \cap K:$$

Այդ դեպքում  $\{V_\alpha\}$  բաց բազմությունների ընտանիքը կծածկի  $K$  կոմպակտ բազմությունը, հետևաբար, գոյություն ունի վերջավոր ենթածածկույթ՝

$$V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}:$$

Մնում է նկատել, որ համապատասխան  $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$  բազմությունների ընտանիքը կծածկի  $f(K)$ -ն: Թեորեմն ապացուցված է: ■

Դժվար չէ նկատել, որ Վայերշտրասի թեորեմները հետևում են այս թեորեմից: Իրոք, եթե վերցնենք  $k = 1$ , այդ դեպքում  $f(K)$ -ն կհանդիսանա թվային առանցքի կոմպակտ ենթաբազմություն, այսինքն՝ փակ և սահմանափակ բազմություն: Իսկ այդպիսի բազմությունն ունի մեծագույն և փոքրագույն տարրեր:

**3. Կապակցվածություն:**\* Դիցուք  $D \subset R^n$ -ը բաց բազմություն է: Յուրաքանչյուր  $x_0 \in D$  կետի համար  $C(x_0)$ -ով նշանակենք այն բոլոր  $x \in D$  կետերի բազմությունը, որոնք հնարավոր են  $x_0$ -ին միացնել թեկյալով,

\* Ընթերցողին օգտակար կիրակի ինքնուրույն ստուգել այս կետի սկզբնամասում թերված պահումների ճշմարտացիությունը:

որն ամբողջությամբ պատկանում է  $D$ -ին:  $C(x_0)$ -ն  $x_0$  կետը պարունակող  $D$  բազմության բաց և կապակցված ենթաբազմություն է: Ավելին՝ այն այդ հատկությամբ օժտված ամենամեծ ենթաբազմությունն է:  $C(x_0)$ -ն կոչվում է  $D$  բաց բազմության կապակցվածության կոմպոնենտ:

Նկատենք, որ տարբեր կետերի համապատասխան կոմպոնենտները կամ համընկնում են կամ չեն հատվում: Հետևաբար, կոմպոնենտների քանակը վերջավոր է կամ հաշվելի:

Եթե  $D$  բազմությունը կապակցված չէ, ապա այն ունի առնվազն երկու կոմպոնենտ: Այդ դեպքում կոմպոնենտներից որևէ մեկը նշանակենք  $U_1$ , իսկ մնացած կոմպոնենտների միավորումը՝  $D \setminus U_1 =: U_2$ :

$U_1$ -ը և  $U_2$ -ը ոչ դատարկ, բաց բազմություններ են և

$$\text{ա) } U_1 \cap U_2 = \emptyset, \text{ բ) } U_1 \cup U_2 = D: \quad (5.4)$$

Թիշտ է նաև հակադարձ պնդումը. Եթե գոյություն ունեն  $U_1, U_2$  ոչ դատարկ, բաց բազմություններ, որոնք բավարարում են (5.4) պայմաններին, ապա  $D$ -ն կապակցված չէ:

Ավելին, եթե  $x_i \in U_i, i=1,2$ , ապա գոյություն չունի  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow R^n$  անընդհատ կոր այնպես, որ  $\gamma(\alpha) = x_1, \gamma(\beta) = x_2$  և  $\gamma([\alpha, \beta]) \subset D$ :

Իրոք, եթե գոյություն ունենա այդպիսի  $\gamma$ , ապա, նշանակելով

$$t_0 := \sup \{t \in [\alpha, \beta] : \gamma(t) \in U_1\} = \sup \gamma^{-1}(U_1),$$

և օգտվելով թերեմ 5.2-ից, կստանանք, որ  $\gamma(t_0)$  կետը չի պատկանում ոչ  $U_1$ -ին, և ոչ էլ  $U_2$ -ին: Այսինքն՝  $\gamma(t_0) \notin D$ , ինչը հակասություն է:

Այժմ տանք կապակցվածության սահմանումը ընդհանուր դեպքում:

**Սահմանում 1:**  $E \subset R^n$  բազմությունը կոչվում է չկապակցված, եթե գոյություն ունեն  $U_1, U_2$  բաց բազմություններ, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } U_1 \cap U_2 = \emptyset, \text{ բ) } U_1 \cap E \neq \emptyset, U_2 \cap E \neq \emptyset, \text{ զ) } E \subset U_1 \cup U_2: \quad (5.5)$$

Հակառակ դեպքում  $E$  բազմությունը կոչվում է կապակցված:

Այսինքն՝  $E$  բազմությունը կոչվում է կապակցված, եթե գոյություն չունեն  $U_1$  և  $U_2$  բաց բազմություններ, որոնք բավարարում են (5.5) պայմաններին:

Տաճք կապակցվածության մեջ այլ սահմանում:

**Սահմանում 2:**  $E_1, E_2 \subset R^n$  ոչ դատարկ բազմությունները կոչվում են անջատելի, եթե  $E_1 \cap \bar{E}_2 = \bar{E}_1 \cap E_2 = \emptyset$ :

$E \subset R^n$  բազմությունը կոչվում է կապակցված, եթե այն հնարավոր չէ ներկայացնել  $E_1$  և  $E_2$  ոչ դատարկ անջատելի բազմությունների միավորման տեսքով:

Հետևաբար,  $E$ -ն կապակցված չէ, նշանակում է՝ գոյություն ունեն  $E_1, E_2$  ոչ դատարկ բազմություններ, այնպիսիք, որ

$$\text{ա) } E = E_1 \cup E_2; \quad \text{բ) } E_1 \cap \bar{E}_2 = \bar{E}_1 \cap E_2 = \emptyset: \quad (5.6)$$

Ապացուցենք, որ (5.5)-ը և (5.6)-ը համարժեք են:

(5.5)-ից (5.6)-ը բխեցնելու համար նշանակենք՝

$$U_1 \cap E = E_1, \quad U_2 \cap E = E_2:$$

Այդ դեպքում (5.6)-ի ա) պայմանն ակնհայտորեն կրավարարվի: (5.6)-ի բ) պայմանն ապացուցելու համար ենթադրենք, որ  $x_0 \in E_1 \subset U_1$ : Քանի որ  $U_1$ -ը բաց է, ապա գոյություն ունի  $B(x_0, \delta) \subset U_1$ : Հետևաբար,  $x_0 \notin \bar{E}_2$ , այսինքն՝  $E_1 \cap \bar{E}_2 = \emptyset$ :

Նույն ձևով կատուգվի նաև բ) պայմանի մյուս հավասարությունը:

Այժմ (5.6)-ից բխեցնենք (5.5)-ը: Նախ նկատենք, որ

$$\begin{aligned} \forall p \in E_1 \quad & \exists \delta_p > 0 \quad B(p, \delta_p) \cap E_2 = \emptyset \\ \forall q \in E_2 \quad & \exists \delta_q > 0 \quad B(q, \delta_q) \cap E_1 = \emptyset \end{aligned} : \quad (5.7)$$

Նշանակենք՝

$$U_1 = \bigcup_{p \in E_1} B\left(p, \frac{\delta_p}{2}\right), \quad U_2 = \bigcup_{q \in E_2} B\left(q, \frac{\delta_q}{2}\right):$$

(5.5)-ի բ) և գ) պայմաններն ակնհայտորեն կբավարարվեն: Անում է ապացուցել ա) պայմանը:

Ենթադրենք հակառակը՝  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ : Այդ դեպքում գոյություն ունեն  $p \in E_1$ ,  $q \in E_2$  կետեր, այնպիսիք, որ

$$B\left(p, \frac{\delta_p}{2}\right) \cap B\left(q, \frac{\delta_q}{2}\right) \neq \emptyset:$$

Այժմ, եթե  $x$ -ը պատկանում է այդ հատույթին և  $\delta_q \leq \delta_p$ , ապա

$$|p - q| \leq |p - x| + |x - q| < \frac{\delta_p}{2} + \frac{\delta_q}{2} \leq \delta_p,$$

ինչը նշանակում է, որ  $q \in B(p, \delta_p)$ : Ուստի  $B(p, \delta_p) \cap E_2 \neq \emptyset$ , որը հակասում է (5.7)-ին:

#### **4. Կապակցված բազմության անընդհատ պատկերը:**

**Թեորեմ 5.4:** Կապակցված բազմության անընդհատ պատկերը կապակցված բազմություն է:

► Դիցուք  $E \subset R^m$  բազմությունը կապակցված է և  $f \in C(E, R^k)$ : Ցույց տանք, որ  $f(E)$ -ն նոյնպես կապակցված է:

Ապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Այդ դեպքում գոյություն ունեն  $U_1, U_2 \subset R^k$  բաց բազմություններ, այնպիսիք, որ

ա)  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , բ)  $U_1 \cap f(E) \neq \emptyset$ ,  $U_2 \cap f(E) \neq \emptyset$ ,

գ)  $f(E) \subset U_1 \cup U_2$ :

Նշանակենք  $f^{-1}(U_i) = E_i$ ,  $i = 1, 2$ : Այդ դեպքում  $E_1$  և  $E_2$  բազմությունները դատարկ չեն և

ա)  $E = E_1 \cup E_2$ , բ)  $E_1 \cap \bar{E}_2 = \bar{E}_1 \cap E_2 = \emptyset$ :

Այսինքն՝  $E$ -ն կապակցված չէ, ինչը հակասություն է: ■

**Հետևանք:** Եթե  $E \subset R^m$  բազմությունը կապակցված է և  $f \in C(E)$ , ապա  $f(E)$ -ն միջակայք է:

Այս հետևանքն ընդհանրացնում է Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները:

► Թեորեմ 5.4-ի համաձայն,  $Y = f(E)$  բազմությունը կապակցված է:

Մեզ մնում է ապացուցել, որ  $R$ -ում կապակցված  $Y$  բազմությունը միջակայք է:

Ենթադրենք հակառակը: Այդ դեպքում գոյություն ունեն  $y_1, y_2 \in Y$  թվեր և  $z \in (y_1, y_2)$  թիվ, այնպիսիք, որ  $z \notin Y$ : Նշանակելով  $U_1 = (-\infty, z)$ ,  $U_2 = (z, +\infty)$ ՝ կստանանք, որ  $U_1$  և  $U_2$  բաց բազմությունները բավարարում են (5.5) պայմաններին, այսինքն՝  $Y$ -ը կապակցված չէ: Դա հակասություն է: ■

## VIII ԳԼՈՒԽ

### ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ

#### §1. ՍԱՄՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ

**1. Մասնակի ածանցյալեր:** Դիցուք  $u = f(x, y)$  ֆունկցիան որոշված է  $D \subset R^2$  բաց տիրույթում և  $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ :

Նշանակենք  $\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ , որտեղ  $\Delta x = x - x_0$  աճը<sup>\*</sup> վերցվում է այնքան փոքր, որ  $M = (x_0 + \Delta x, y_0)$  կետը դուրս չգա  $D$  տիրույթից:  $\Delta_x u$ -ն կոչվում է  $u = f(x, y)$  ֆունկցիայի մասնակի աճ՝ ըստ  $x$  փոփոխականի:

**Սահմանում:** Եթե զոյուրյուն ունի

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ), ապա այն կոչվում է  $u = f(x, y)$  ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալ՝ ըստ  $x$ -ի,  $M_0 = (x_0, y_0)$  կետում, և աշամակվում է  $\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)$ ,  $u'_x(x_0, y_0)$ ,  $f'_x(x_0, y_0)$ ,  $f'_x(M_0)$  սիմվոլներից որևէ մեկով:

Նման ձևով սահմանվում է նաև ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալն ըստ  $y$ -ի:

**Օրինակներ:**

$$1) u = x^y, \frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x;$$

$$2) u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

---

\* Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների դեպքում ընդունված տերմիններն օգտագործվում են նաև այստեղ:

$$3) \text{Եթե } f(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{եթե } xy=0 \\ 1, & \text{եթե } xy \neq 0 \end{cases}, \text{ապա } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0:$$

Ընդհանուր դեպքում ենթադրենք, որ  $u=f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիան որոշված է  $D \subset R^m$  բաց տիրույթում և  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m) \in D$ : Նշանակենք՝

$$\Delta_{x^i} u = f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + h, x_0^{i+1}, \dots, x_0^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m),$$

որը կոչվում է  $u$  ֆունկցիայի մասմակի աճ՝ ըստ  $x^i$  փոփոխականի:

**Սահմանում:** Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x^i} u}{h}$$

սահմանը, ապա այն կոչվում է  $u$  ֆունկցիայի մասմակի ածանցյալ  $x_0$  կետում՝ ըստ  $x^i$ -ի, և նշանակվում է  $\frac{\partial u}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$ ,  $u'_{x^i}(x_0)$ ,  $f'_{x^i}(x_0)$  սիմվոլներից որևէ մեկով:

**2. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը:** Նախ դիտարկենք  $u=f(x, y)$  երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքը:

Նշանակենք՝  $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ : Այն կոչվում է ֆունկցիայի լրիվ աճ՝  $(x_0, y_0)$  կետում (նշանակվում է նաև՝  $\Delta f(x_0, y_0)$ ):

**Թեորեմ 1.1:** Եթե  $(x_0, y_0)$  կետի մի որևէ շրջակայքում գոյություն ունեն  $f'_x(x, y)$  և  $f'_y(x, y)$  վերջավոր մասմակի ածանցյալները և դրանք անընդհատ են  $(x_0, y_0)$  կետում, ապա ֆունկցիայի լրիվ աճի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y, \quad (1.1)$$

որտեղ  $\alpha_1$  և  $\alpha_2$  ֆունկիաները կախված են  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  աճերից և նրանց հետ մեկտեղ ճգնաժամ են  $q_{ppj} \alpha_i \rightarrow 0$ , եթե  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ,  $i=1,2$ :

► Ապացուցելու համար  $\Delta u$  լրիվ աճը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned}\Delta u = & [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + \\ & + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)];\end{aligned}\quad (1.2)$$

Այստեղ առաջին գումարելին իրենից ներկայացնում է  $f$  ֆունկցիայի մասնակի աճ՝ ըստ  $x$ -ի ( $(x_0, y_0 + \Delta y)$  կետում), իսկ երկրորդը՝ ըստ  $y$ -ի: Այսինքն՝ դրանք մեկ փոփխականի ֆունկցիաների աճեր են: Դրանցից յուրաքանչյուրի համար կիրառելով Լագրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$\Delta u = f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y; \quad 0 < \theta_i < 1, \quad i = 1, 2$$

հավասարությունը: Այժմ, նշանակելով

$$f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0) := \alpha_1,$$

$$f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0) := \alpha_2,$$

կստանանք (1.1)-ը: Իրոք, մասնակի ածանցյալների անընդհատության շնորհիվ  $\alpha_i \rightarrow 0$ , եթե  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ,  $i = 1, 2$ : ■

Ընդհանուր դեպքում այս քերեմը կծնակերպվի հետևյալ կերպ:

**Թեորեմ 1.2:**\* Եթե  $u = f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները զոյլորուն ունեն  $x_0$  կետի շրջակայրում և անընդհատ են  $x_0$  կետում, ապա ֆունկցիայի լրիվ աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned}\Delta u = & f(x_0^1 + h^1, \dots, x_0^m + h^m) - f(x_0^0, \dots, x_0^0) = \\ & = f'_{x^1}(x_0)h^1 + \dots + f'_{x^m}(x_0)h^m + \alpha_1 h^1 + \dots + \alpha_m h^m,\end{aligned}\quad (1.3)$$

որտեղ  $\alpha_i \rightarrow 0$ , եթե  $h = (h^1, \dots, h^m) \rightarrow 0$  ( $0 = (0, 0, \dots, 0)$ ):

Ապացուցվում է նախորդի պես, միայն թե այս դեպքում (1.2)-ի փոխարեն  $\Delta u$ -ն կմերկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

\* Օգտվում ենք հետևյալ նշանակումներից՝  $x = (x^1, \dots, x^m)$ ,  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ ,  $\Delta x^i = x^i - x_0^i = h^i$ ;  $\Delta u = f(x) - f(x_0)$ :

$$\Delta u = \sum_{i=1}^m [f(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + h^i, x_0^{i+1} + h^{i+1}, \dots, x_0^m + h^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^i, x_0^{i+1} + h^{i+1}, \dots, x_0^m + h^m)],$$

**Հետևաբար:** Եթե բավարարվում են քորեւմ 1.2-ի պայմանները, ապա  $f$  ֆունկցիան անընդհատ է  $x_0$  կետում:

► Իբրև, ըստ (1.3)-ի՝

$$f(x) - f(x_0) = f'_{x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \dots + f'_{x^m}(x_0)(x^m - x_0^m) + \\ + \sum_{i=1}^m \alpha_i(x^i - x_0^i) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0),$$

քանի որ կոռորդինատային գուգամիտության համաձայն՝

$$(x \rightarrow x_0) \Rightarrow (x^i \rightarrow x_0^i, i = 1, \dots, m) : \blacksquare$$

Ֆունկցիայի աճի բանաձևն ավելի կոմպակտ տեսքով գրելու նպատակով նշանակենք՝

$$\rho = |x - x_0| = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + \dots + (x^m - x_0^m)^2} :$$

Այդ դեպքում՝\*

$$\alpha_1 h^1 + \dots + \alpha_m h^m = \rho \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{x^i - x_0^i}{\rho} = \rho \cdot \varepsilon(x) = o(\rho), \text{ եթե } \rho \rightarrow 0,$$

որտեղ

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{x^i - x_0^i}{\rho} \rightarrow 0, \text{ եթե } \rho \rightarrow 0 \quad \left( \left| \frac{x^i - x_0^i}{\rho} \right| \leq 1 \right).$$

Հետևաբար, ֆունկցիայի աճի բանաձևը կլնղունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Delta u = f(x^1, \dots, x^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m) = f'_{x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + \dots + f'_{x^m}(x_0)(x^m - x_0^m) + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0), \quad (1.3)$$

\* Շիշտ է նաև հակադարձ պնդումը՝

$$o(\rho) = \rho \cdot \varepsilon(\rho) = \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho} \cdot \rho^2 = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon(\rho)(x^i - x_0^i)}{\rho} \cdot (x^i - x_0^i) := \sum_{i=1}^m \alpha_i(x^i - x_0^i) :$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\begin{aligned} f(x_0^1 + h^1, \dots, x_0^m + h^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m) &= f'_x(x_0)h^1 + \dots + \\ &+ f'_{x^m}(x_0)h^m + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0): \end{aligned} \quad (1.3')$$

Այժմ քերենք մի օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ ձևակերպած թերեմների մեջ մասնակի ածանցյալների անընդհատության պահանջն ավելորդ չէ: Դիտարկենք

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

ֆունկցիան, որն անընդհատ է ամբողջ հարթության վրա  $((0,0)$  կետում անընդհատությունը հետևում է  $|f(x, y)| \leq \frac{1}{2}|x|$  անհավասարությունից):

Բացի դրանից, ֆունկցիան ունի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ հարթության բոլոր կետերում: Իբրոք,  $(0,0)$  կետում մասնակի աճերը 0 են, ուստի այդ կետում 0 են նաև մասնակի ածանցյալները: Մնացած կետերում վերջավոր մասնակի ածանցյալների գոյությունը հետևում է կոտորակի ածանցյալի վերաբերյալ թերեմից\*:

Այժմ համոզվենք, որ այս ֆունկցիայի համար  $(0,0)$  կետում ֆունկցիայի աճի բանաձեռ ճիշտ չէ: Խսկապես, հակառակ դեպքում կունենանք՝

$$\Delta f(0,0) = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \varepsilon \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

որտեղից էլ, վերցնելով  $\Delta y = \Delta x > 0$ , կստանանք՝

$$\frac{\Delta x}{2} = \varepsilon \sqrt{2} \Delta x, \quad \varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

ինչը հակասություն է:

**3. Դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:** Դիցուք  $z = f(x, y)$  ֆունկցիան որոշված է  $D \subset R^2$  տիրույթում (բաց) և  $M_0 = (x_0, y_0) \in D$ :

**Սահմանում:**  $f$  ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի  $M_0$  կետում, եթե գոյություն ունեն  $A, B \in R$  թվեր, այնպիսիք, որ

\* Մեկ փոփոխականի ֆունկցիաների վերաբերյալ ածանցյալի տեսությունը կիրառելի է մասնակի ածանցյալների դեպքում:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho \rightarrow 0),\end{aligned}\tag{1.4}$$

որտեղ  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  :

Ֆունկցիայի աճի բանաձևը թույլ է տալիս ստանալ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայման: Ֆունկցիայի լրիվ աճի վերաբերյալ թերենք կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝

եթե  $f$  ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են  $M_0$  կետում\*, ապա  $f$  ֆունկցիան այդ կետում դիֆերենցելի է:

Սակայն հակառակ պնդումը ճիշտ չէ: Որպես օրինակ դիտարկենք  $z(x, y) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $z(0, 0) = 0$  ֆունկցիան, որը  $(0, 0)$  կետում դիֆերենցելի է, բայց ըստ  $x$ -ի ածանցյալն այդ կետում անընդհատ չէ:

Մյուս կողմից, դժվար չէ ապացուել, որ եթե  $f(x, y)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $M_0$  կետում, ապա այն  $M_0$  կետում ունի մասնակի ածանցյալներ և

$$A = f'_x(M_0), \quad B = f'_y(M_0):$$

Իրոք, (1.4) բանաձևի մեջ վերցնենք  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$  և կստանանք՝

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \rightarrow A \quad (\Delta x \rightarrow 0):$$

Նման ձևով կապացուցվի նաև մյուս հավասարությունը:

(1.4) կամ (1.1) բանաձևի մեջ մասնակցող

$$A\Delta x + B\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y$$

արտահայտությունը կոչվում է ֆունկցիայի աճի գծային մաս կամ գլխավոր մաս:

**Սահմանում:** Դիֆերենցելի ֆունկցիայի աճի գծային մասը կոչվում է այդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալ և նշանակվում է  $df$  սիմվոլով՝

$$df(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y:$$

\* Ենթադրվում է, որ  $f$  ֆունկցիան  $M_0$ -ի շրջակայրում ունի վերջավոր մասնակի ածանցյալներ:

Մասնավորաբար, վերցնելով  $f(x, y) = x$ , կստանանք  $dx = \Delta x$ , ու նման ձևով՝  $dy = \Delta y$ : Հետևաբար, ֆունկցիայի դիֆերենցիալը կարելի է ներկայացնել նաև

$$df(M_0) = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy$$

տեսքով:

Ընդհանուր դեպքում  $u = f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիան կոչվում է դիֆերենցելի  $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$  կետում, եթե  $f$  ֆունկցիայի լրիվ աճը  $x_0$  կետում կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{aligned} \Delta u &:= f(x_0^1 + \Delta x^1, \dots, x_0^m + \Delta x^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m) = \\ &= a_1 \Delta x^1 + \dots + a_m \Delta x^m + o(\rho), \end{aligned} \quad (1.4)$$

երբ  $\rho := \sqrt{(\Delta x^1)^2 + \dots + (\Delta x^m)^2} \rightarrow 0$ :

Այդ դեպքում

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0),$$

և

$$df(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)dx^m:$$

Հաշվի առնելով քերեմ 1.2-ը՝ ֆունկցիայի աճի բանաձևը մեզ տալիս է դիֆերենցելիության հետևյալ բավարար պայմանը.

**Թեորեմ 1.3:** Եթե  $u = f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիայի բոլոր մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն  $x_0$  կետի շրջակայրում և անընդհատ են  $x_0$  կետում, ապա  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում դիֆերենցելի է:

**4. Դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստ:** Ենթադրենք, որ  $z = f(x, y)$  ֆունկցիան անընդհատ է  $D \subset R^2$  տիրույթում: Այդ դեպքում նրա գրաֆիկը մակերևույթ է, որը նշանակենք  $S$ -ով:

Ենթադրենք նաև, որ  $z = f(x, y)$  ֆունկցիան  $M_0 = (x_0, y_0)$  կետում դիֆերենցելի է՝

$z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho), \rho \rightarrow 0, (z_0 := f(x_0, y_0))$  (1.4)

և դիտարկենք

$$Z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0),$$

հարթությունը, որն անցնում է  $(x_0, y_0, z_0)$  կետով և որի փոփոխական կետի կոորդինատներն են՝  $(x, y, Z)$ :

Այդ դեպքում (1.4) պայմանը կընդունի հետևյալ տեսքը.

$$z - Z = o(\rho), \rho \rightarrow 0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{|z - Z|}{\rho} \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0); \quad (1.5)$$

Որպեսզի հասկանանք այս պայմանի երկրաչափական իմաստը, բերենք շոշափող հարթության սահմանումը.

**Սահմանում:**  $z = f(x, y)$  հավասարմամբ որոշվող  $S$  մակերևույթի  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  կետով անցնող  $\alpha$  հարթությունը կոչվում է  $S$  մակերևույթի շոշափող հարթություն  $P_0$  կետում, եթե

$$\frac{d}{r} \rightarrow 0 \quad (P \rightarrow P_0), \quad (1.6)$$

որտեղ  $r$ -ը մակերևույթի  $P = (x, y, z) \in S$  փոփոխական կետի հեռավորությունն է  $P_0 \in S$  կետից, իսկ  $d$ -ն  $P$  կետի հեռավորությունն է այդ հարթությունից:

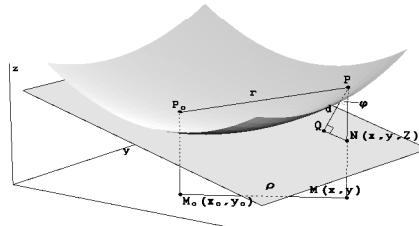
$$r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$PQ \perp \alpha \Rightarrow d = PQ,$$

$$P_0 M_0, PM \perp (xy)$$

$$\Rightarrow PN = |z - Z|:$$



Քանի որ  $\frac{d}{PN} = \cos \varphi$ , որտեղ  $\varphi$ -ն կախված չէ.  $P$ -ից ( $\varphi$ -ն  $(xy)$  և  $\alpha$  հարթությունների նորմալների կազմած անկյունն է), ապա (1.6) պայմանը համարժեք է

$$\frac{|z - Z|}{r} \rightarrow 0 \quad (M \rightarrow M_0) \quad (1.7)$$

պայմանին:

Մյուս կողմից,  $\rho \leq r$ , հետևաբար, (1.5)-ից բխում է (1.7)-ը: Այսինքն՝ եթե  $z = f(x, y)$  ֆունկցիան  $M_0 = (x_0, y_0)$  կետում դիֆերենցելի է, ապա ֆունկցիայի գրաֆիկը  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  կետում ունի շոշափող հարթություն, որի հավասարումն է՝

$$Z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

իսկ ֆունկցիայի դիֆերենցիալը այդ հարթության ավելիկատի աճն է:

Այժմ ապացուենք, որ եթե  $\alpha$  հարթությունը շոշափում է  $S$  մակերևույթը, ապա  $f$ -ը դիֆերենցելի է  $M_0$  կետում, այսինքն՝ (1.7)  $\Rightarrow$  (1.5):

Իրա համար պետք է ապացուենք, որ  $r/\rho$  հարաբերությունը սահմանափակ է: Քանի որ

$$\frac{r}{\rho} = \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta z}{\rho} \right)^2} \leq 1 + \frac{|\Delta z|}{\rho},$$

ապա բավական է ցույց տալ, որ  $\frac{|\Delta z|}{\rho}$ -ն սահմանափակ է:

Իրոք, (1.7)-ից հետևում է, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ

$$|M - M_0| < \delta \Rightarrow |z - Z| < \varepsilon \cdot r:$$

$$\text{Վերցնենք } \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ և կունենանք՝}$$

$$|M - M_0| < \delta \Rightarrow \frac{|z - Z|}{\rho} < \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\rho} \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|\Delta z|}{\rho} \right);$$

Այսու կողմից՝  $z - Z = z - z_0 - [A(x - x_0) + B(y - y_0)]$ , հետևաբար

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} - \frac{|A\Delta x + B\Delta y|}{\rho} \leq \frac{|z - Z|}{\rho} \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{|\Delta z|}{\rho} \right);$$

Այստեղից կստանանք՝

$$\frac{1}{2} \frac{|\Delta z|}{\rho} \leq |A| \frac{|\Delta x|}{\rho} + |B| \frac{|\Delta y|}{\rho} + \frac{1}{2} \leq |A| + |B| + \frac{1}{2},$$

որտեղից էլ՝

$$\frac{|\Delta z|}{\rho} \leq 2(|A| + |B|) + 1;$$

**5. Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիությունը և մասնակի ածանցյալները:** Կիցուք տրված են  $T \subset R^k$  և  $X \subset R^m$  տիրույթները։ Դիտարկենք  $f : X \rightarrow R$  և  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m) : T \rightarrow X$  ֆունկցիաների միջոցով կազմված բարդ ֆունկցիան՝

$$u(t^1, \dots, t^k) = f(\varphi^1(t^1, \dots, t^k), \dots, \varphi^m(t^1, \dots, t^k));$$

**Թեորեմ 1.4:** Եթե  $x^i = \varphi^i(t)$ ,  $1 \leq i \leq m$  ֆունկցիաները դիֆերենցելի են  $T$  տիրույթի  $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^k)$  կետում, իսկ  $f(x)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $X$  տիրույթի  $x_0 = \varphi(t_0)$  կետում, ապա և բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $t_0$  կետում և

$$\frac{\partial u}{\partial t^j}(t_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0);$$

Այս բանաձևը երբեմն անվանում են շորայի կամունք։

► Թեորեմն ապացուցելու համար նշանակենք՝

$$a_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0)$$

և ապացուենք, որ  $u$  բարդ ֆունկցիայի աճը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta u = a_1 \Delta t^1 + \cdots + a_k \Delta t^k + \rho \cdot \varepsilon, \quad \rho = |t - t_0|, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0): \quad (1.8)$$

$f$  և  $x^i = \varphi^i(t^1, \dots, t^k)$  ֆունկցիաների դիֆերենցելիությունից ուժենք՝

$$\begin{aligned} f(x^1, \dots, x^m) - f(x_0^1, \dots, x_0^m) &= \\ = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \Delta x^i + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x^i, \quad \alpha_i \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow x_0), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta x^i &= \varphi^i(t^1, \dots, t^k) - \varphi^i(t_0^1, \dots, t_0^k) = \\ = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0) \Delta t^j + \rho \cdot \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0): \end{aligned} \quad (1.9)$$

Այդ հավասարություններից առաջինի մեջ տեղադրենք  $x^i = \varphi^i(t^1, \dots, t^k)$ , իսկ  $\Delta x^i$ -ի փոխարեն՝ (1.9)-ը: Կատանանք՝

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(\varphi^1(t^1, \dots, t^k), \dots, \varphi^m(t^1, \dots, t^k)) - f(\varphi^1(t_0^1, \dots, t_0^k), \dots, \varphi^m(t_0^1, \dots, t_0^k)) = \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \left[ \sum_{j=1}^k \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0) \Delta t^j + \rho \cdot \varepsilon_i \right] + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Delta x^i = \\ &= \sum_{j=1}^k \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial x^i}{\partial t^j}(t_0) \right] \Delta t^j + \rho \cdot \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \varepsilon_i + \alpha_i \frac{\Delta x^i}{\rho} \right] = \\ &= a_1 \Delta t^1 + \cdots + a_k \Delta t^k + \rho \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

որտեղ կատարել ենք  $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \varepsilon_i + \alpha_i \frac{\Delta x^i}{\rho} \right]$  նշանակումը:

(1.8)-ը ապացուելու համար մեզ մնում է ցույց տալ, որ

$$\varepsilon \rightarrow 0, \text{ եթե } \rho \rightarrow 0,$$

իսկ դրա համար, (1.9)-ի շնորհիվ, բավական է ցույց տալ, որ

$$\alpha_i \frac{\Delta x^i}{\rho} \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0), \quad 1 \leq i \leq m :$$

Քանի որ  $x^i = \varphi^i(t)$  դիֆերենցելի ֆունկցիաները նաև անընդհատ են ( $t_0$  կետում), ապա

$$(\rho \rightarrow 0) \Leftrightarrow (t \rightarrow t_0) \Rightarrow (\Delta x^i \rightarrow 0) \Leftrightarrow (x \rightarrow x_0):$$

Այժմ, (1.9)-ի շնորհիվ՝  $\alpha_i \rightarrow 0$ :

$$\text{Մյուս կողմից, քանի որ } \left| \frac{\Delta t^j}{\rho} \right| \leq 1, \text{ ապա (1.9)-ից հետևում է, որ } \frac{\Delta x^i}{\rho},$$

$1 \leq i \leq m$  կոտորակները սահմանափակ են ( $\rho = 0$  կետի շրջակայքում), ինչով և ավարտվում է թեորեմի ապացույցը: ■

Եթե  $\varphi^i$  ֆունկցիաները կախված են մեկ փոփոխականից, այդ դեպքում  $u$  բարդ ֆունկցիան ևս կախված կլինի մեկ փոփոխականից և  $u = f(\varphi^1(t), \dots, \varphi^m(t))$  բարդ ֆունկցիայի ածանցման բանաձևը կը նդունի հետևյալ տեսքը՝

$$u'(t_0) = \frac{du}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) \frac{d\varphi^i}{dt}(t_0):$$

Նկատենք, որ եթե թեորեմում նշված  $f$  ֆունկցիայի դիֆերենցելիության պայմանը չբավարարվի, ապա այս բանաձևը կարող է կիրառելի չլինել:

Օրինակ՝

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0$$

ֆունկցիայի համար  $x = t$ ,  $y = t$  դեպքում  $t_0 = 0$  կետում շղթայի կանոնը կիրառելի չէ:

#### 6. Դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունը:

Եթե  $u = f(x) = f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է,  $X \subset R^m$  տիրույթում, ապա

$$du = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m: \quad (1.10)$$

Այժմ ենթադրենք, որ  $x^1, \dots, x^m$  փոփոխականները նույնպես դիֆերենցելի ֆունկցիաներ են  $T \subset R^k$  տիրույթում՝  $x^i(t) = \varphi^i(t^1, \dots, t^k)$  և

$(x^1(t), \dots, x^m(t)) \in X, t \in T :$  Այդ դեպքում  $u = f(x^1(t), \dots, x^m(t))$  բարդ ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $T$  տիրույթում և

$$du = \sum_{j=1}^k \frac{\partial u}{\partial t^j} dt^j :$$

Այստեղ տեղադրելով  $u$  բարդ ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալների արժեքները՝ կստանանք

$$du = \sum_{j=1}^k \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^j} \right] dt^j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} \left[ \sum_{j=1}^k \frac{\partial x^i}{\partial t^j} dt^j \right] = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

բանաձեռ: Այլ կերպ ասած,  $u$  ֆունկցիայի դիֆերենցիալի (1.10) տեսքը պահպանվում է նաև այն դեպքում, եթե  $x^1, \dots, x^m$  փոփոխականներն իրենց հերթին ֆունկցիաներ են: Այս երևույթը կոչվում է դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն (անփոփոխություն):

Օգտվելով դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունից՝ ապացուցվում են դիֆերենցման կանոնները.

Եթե

$$x = \varphi^1(t^1, \dots, t^k), \quad y = \varphi^2(t^1, \dots, t^k)$$

ֆունկցիաները դիֆերենցելի են  $T \subset R^k$  տիրույթում, ապա

$$d(x \pm y) = dx \pm dy, \quad d(xy) = ydx + xdy, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Իրոք, բավական է այդ բանաձեռն ապացուցել այն դեպքում, եթե  $x$ -ը և  $y$ -ը անկախ փոփոխականներ են, իսկ այդ դեպքում դրանք ակնհայտ են:

## 7. Լազրանի վերջավոր ածերի բանաձեռ:

**Թեորեմ 1.5:** Դիցուք  $f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $D \subset R^m$  տիրույթում և  $x_0, x \in R^m$  կետերը միացնող  $[x_0, x]$  հատվածը պատկանում է  $D$  տիրույթին՝

$$(1-t)x_0 + tx \in D, \quad t \in [0,1]:$$

Այդ դեպքում գոյություն ունի  $\theta \in (0,1)$  թիվ, այնպիսին, որ

$$\Delta f(x_0) = f'_{x^1}(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x^1 + \dots + f'_{x^m}(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x^m : \quad (1.11)$$

► Կիտարկեմք

$$\begin{aligned} F(t) &= f((1-t)x_0 + tx) = f(x_0 + t(x - x_0)) = \\ &= f(x_0^1 + t(x^1 - x_0^1), \dots, x_0^m + t(x^m - x_0^m)) = f(x_0^1 + t\Delta x^1, \dots, x_0^m + t\Delta x^m) \end{aligned}$$

մեկ փոփոխականի ֆունկցիան  $t \in [0,1]$  հատվածում\*, և կիրառենք Լազրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝

$$\Delta f(x_0) = F(1) - F(0) = F'(\theta), \quad \theta \in (0,1) :$$

Մյուս կողմից, շորայի կանոնի համաձայն, ունեմք՝

$$F'(\theta) = f'_x(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x^1 + \dots + f'_{x^m}(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x^m :$$

$F'(\theta)$ -ի արժեքը տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ՝ կստանանք (1.11)-ը: ■

**Հետևանք:** Եթե  $f$  ֆունկցիայի մասնակի ածանցյալները  $D$  տիրույթում գրուեն, ապա  $f$  ֆունկցիան այդ տիրույթում հաստատուն է:

► Վերցնենք կամայական  $a, b \in D$  կետեր և ապացուենք, որ  $f(a) = f(b)$ : “Իրա համար դիտարկեմք\*\*  $x_i$ ,  $0 \leq i \leq n$  գագաթներով  $L \subset D$  թեկյան, այնպիսին, որ  $a = x_0$ ,  $b = x_n$ :

Այնուհետև,  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  հատվածների համար կիրառենք (1.11)-ը, կստանանք՝

$$f(x_{i+1}) - f(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{որտեղից էլ՝ } f(b) = f(a) : ■$$

### 8. Ուղղությամբ ածանցյալ:

**Թեորեմ 1.6:** Եթե  $f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում և  $|v| = 1$  ( $v = (v^1, v^2, \dots, v^m) \in R^m$ ), ապա

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) \cdot v^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0) \cdot v^m : \quad (1.12)$$

\* Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցելիության թեորեմի համաձայն,  $F$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է:

\*\*  $D$ -ն բաց կապակցված բազմություն է, այդ պատճառով այդպիսի թեկյալ գոյություն ունի:

Եթե ձախս կողմում գրված սահմանը գոյություն ունի, այդ դեպքում այն կոչվում է՝  $f$  ֆունկցիայի ածանցյալ ( $x_0$  կետում)  $v$  վեկտորի ուղղությամբ և նշանակվում է՝  $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$  սիմվոլով:

Հաշվի առնելով այս սահմանումը, թերենը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ՝ եթե  $f$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում, ապա այդ կետում  $f$  ֆունկցիայի ածանցյալը կամայական  $v$  վեկտորի ուղղությամբ գոյություն ունի և

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0)v^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(x_0)v^m : \quad (1.12)$$

► Դիտարկենք

$$F(t) = f(x_0 + tv) = f(x_0^1 + tv^1, \dots, x_0^m + tv^m)$$

ֆունկցիան, որտեղ  $t$ -ն վերցնում ենք այնքան փոքր, որ  $x_0 + tv$  կետը դուրս չգա  $f$  ֆունկցիայի որոշման տիրույթից:

Այդ դեպքում ունենք, որ

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t) - F(0)}{t} = F'(0) : \quad (1.13)$$

Մյուս կողմից, շղթայի կանոնի համաձայն,

$$F'(0) = f'_{x^1}(x_0)v^1 + \cdots + f'_{x^m}(x_0)v^m :$$

$F'(0)$ -ի արժեքը տեղադրելով (1.13)-ի մեջ՝ կստանանք (1.12)-ը: ■

Սասնավոր դեպքում, եթե  $m = 3$ ,  $v$  միավոր վեկտորը <sup>\*</sup> ներկայացվում է ուղղորդ կոսինուսների միջոցով՝

$$\vec{v} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) :$$

Այս դեպքում  $u = f(x, y, z)$  ֆունկցիայի ածանցյալը  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  կետում  $\vec{v}$  վեկտորի ուղղությամբ ((1.12)-ի փոխարեն) կը նդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cos \gamma :$$

\*  $R^3$ -ում վեկտորը հաճախ գրվում է՝ գլխին սլաք դնելով:

Այս բանաձևի մեջ աջ կողմի գրվածը հանդիսանում է  $\vec{v}$  և  
 $\vec{g} = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(M_0), \frac{\partial f}{\partial y}(M_0), \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \right)$  վեկտորների սկալյար արտադրյալը,  
 հետևաբար այն կարելի է գրել նաև

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (\vec{g}, \vec{v}) \quad (1.13')$$

տեսքով:  $\vec{g}$  վեկտորը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի գրադիենտ  $M_0$  կետում և  
 նշանակվում է  $\text{grad } f$  սիմվոլով:

Եթե  $\vec{v}$  և  $\vec{g}$  վեկտորների կազմած անկյունը նշանակենք  $\varphi$ -ով, ապա

$$(\vec{g}, \vec{v}) = |\vec{g}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi = |\vec{g}| \cdot \cos \varphi :$$

Այդ դեպքում (1.13')-ը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = |\vec{g}| \cdot \cos \varphi : \quad (1.13'')$$

Այստեղից երևում է, որ  $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ -ն կընդունի իր մեծագույն արժեքն այն  
 դեպքում, եթե  $\varphi = 0$ : Այսինքն՝ գրադիենտը այն վեկտորն է, որի ուղղու-  
 թյամբ  $f$  ֆունկցիայի ածանցյալն ընդունում է իր մեծագույն արժեքը, և  
 այդ մեծագույն արժեքը հավասար է  $|\text{grad } f|$ :

**9. Համասեռ ֆունկիաներ:** Դիցուք  $u = f(x^1, \dots, x^m)$  ֆունկիան  
 որոշված է  $D \subset R^m$  տիրույթում: Այդ դեպքում յուրաքանչյուր  $x_0 \in D$  կետի  
 համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $|t - 1| < \delta$  պայմանին  
 բավարարող  $t$  թիրի համար տեղի ունի

$$tx_0 \in D \quad (1.14)$$

պայմանը:

Իրոք, եթե  $x_0 = 0$ , (1.14)-ը ակնհայտ է, իսկ եթե  $x_0 \neq 0$ , գոյություն ունի  
 $\varepsilon > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $B(x_0, \varepsilon) \subset D$ : Քանի որ

$$x := tx_0 \Rightarrow |x - x_0| = |x_0| |t - 1|,$$

ուստի որպես  $\delta$  կարող ենք վերցնել  $\frac{\varepsilon}{|x_0|}$  թիվը:

**Սահմանում:**  $D \subset R^n$  տիրույթում որոշված  $u = f(x)$  ֆունկցիան կոչվում է  $p$  աստիճանի համաստեղ ֆունկցիա  $D$  տիրույթում, եթե յուրաքանչյուր  $x \in D$  և  $tx \in D$  կետերի համար ( $t \in R^1$ ) բավարարվում է

$$f(tx) = t^p f(x) \quad (1.15)$$

հավասարությունը:

**Թեորեմ 1.7:** Եթե  $D$  տիրույթում դիֆերենցելի  $u = f(x)$  ֆունկցիան այդ տիրույթում  $p$  աստիճանի համաստեղ ֆունկցիա է, ապա  $D$  տիրույթում այն բավարարում է հետևյալ հավասարությանը՝

$$\frac{\partial u}{\partial x^1} x^1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x^m} x^m = p \cdot u : \quad (1.16)$$

Այս հավասարությունը կոչվում է Էյլերի բանաձև:

► Վերցնենք կամայական  $x \in D$  կետ և (1.16)-ը ապացուցենք այդ կետում: Օգտվելով շղթայի կանոնից՝ ածանցենք (ըստ  $t$ -ի) (1.15) հավասարության ձախ և աջ կողմերում գրված ֆունկցիաները.

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(tx)x^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(tx)x^m = pt^{p-1}f(x^1, \dots, x^m) :$$

Այսուղեւ տեղադրելով  $t = 1$ ՝ կստանանք (1.16)-ը: ■

Ճիշտ է նաև հակադարձ պիդումը.

**Թեորեմ 1.7:**  $D$  տիրույթում (1.16) հավասարությանը բավարարող  $u = f(x)$  դիֆերենցելի ֆունկցիան  $p$  աստիճանի համաստեղ ֆունկցիա է:

►  $t = 1$  կետի շրջակայրում հաշվենք  $\varphi(t) := \frac{f(tx_0)}{t^p}$ ,  $x_0 \in D$

ֆունկցիայի ածանցյալը՝

$$\varphi'(t) = \frac{\left[ \frac{\partial f}{\partial x^1}(tx_0)x_0^1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^m}(tx_0)x_0^m \right] t - pf(tx_0)}{t^{p+1}} : \quad (1.17)$$

Էյլերի բանաձևի մեջ վերցնելով  $x = tx_0$ ՝ կհամոզվենք, որ (1.17) կոտորակի համարիշը զրո է, ինտևսաբար,  $\varphi'(t) = 0$ :

Որեմն  $\varphi(t) = const = \varphi(1)$ , այսինքն՝

$$\frac{f(tx_0)}{t^p} = f(x_0),$$

կամ, որ նույնն է՝

$$f(tx_0^1, \dots, tx_0^m) = t^p f(x_0^1, \dots, x_0^m), \quad x_0 \in D; \blacksquare$$

## §2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ

1. Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ: Դիցուք  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  ֆունկցիան որոշված է  $D \subset R^m$  տիրույթում և  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  մասնակի ածանցյալը գոյություն ունի  $D$  տիրույթի բոլոր կետերում և վերջավոր է:

Այդ դեպքում  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_m)$  ֆունկցիան հանդիսանում է  $D$  տիրույթում որոշված մի նոր ֆունկցիա: Եթե այդ նոր ֆունկցիան  $x_0 \in D$  կետում ունի մասնակի ածանցյալ ըստ  $x_j$ -ի, ապա այդ մասնակի ածանցյալը կոչվում է  $u$  ֆունկցիայի երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալ և նշանակվում է  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $u''_{x_i x_j}$ ,  $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$  կամ  $f''_{x_i x_j}(x_0)$  սիմվոլներից որևէ մեկով:

Այն դեպքում, եթե  $i = j$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}$  զբելու փոխարեն գրում ենք  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  (ինչպես մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում), իսկ եթե  $i \neq j$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$

երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալները կոչվում են խառն ածանցյալներ:

Ինդուկտիվ կերպով սահմանվում են երկուսից բարձր կարգի մասնակի ածանցյալները՝

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left( \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{n-1}}} \right):$$

$$\text{Օրինակ՝ } u = \arctg \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Ինչպես տեսնում ենք,  $u''_{xy}$  և  $u''_{yx}$  խառն ածանցյալները հավասար են:

Առաջիկայում կապացուցենք, որ այս երևույթը պատճառական չէ, իսկ հիմա բերենք ֆունկցիայի օրինակ, որի խառն ածանցյալները հավասար չեն:

$$\text{Դիցուք՝ } f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0 : \text{Ցույց տանք, որ}$$

$$f''_{xy}(0, 0) = -1, \quad f''_{yx}(0, 0) = 1 :$$

Օգտվենք հետևյալ դիտողությունից. Եթե  $\varphi(0) = 0$ , ապա

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t)}{t} : \text{Այս դիտողության համաձայն՝}$$

$$f'_x(0, y) = -y, \quad f'_y(0, x) = x :$$

Գրված հավասարությունները ճիշտ են նաև  $x = 0$  և  $y = 0$  արժեքների դեպքում, որովհետև  $f$  ֆունկցիան կորողինատական առանցքների վրա ընդունում է 0 արժեքը: Ածանցելով այդ ֆունկցիաները՝ կստանանք պահանջվող հավասարությունը:

Այժմ սահմանենք բարձր կարգի դիֆերենցելիություն և դիֆերենցիալ:

**Սահմանում:**  $D$  տիրույթում դիֆերենցելի  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  ֆունկցիան կոչվում է երկու անգամ դիֆերենցելի  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in D$  կետում, եթե

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

ֆունկցիաները դիֆերենցելի են  $x_0$  կետում:

Ֆունկցիայի դիֆերենցելիության բավարար պայմանից հետևում է և ֆունկցիայի երկու անգամ դիֆերենցելիության հետևյալ բավարար պայմանը.

Եթե  $D$  տիրույթում դիֆերենցելի և ֆունկցիայի բոլոր երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներն անընդհատ են  $x_0$  կետում, ապա և -ն այդ կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է:

Եթե և -ն  $x_0$  կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա  $x_1, \dots, x_m$  անկախ փոփոխականների  $dx_1, \dots, dx_m$  դիֆերենցիալները հաստատագրելու դեպքում

$$du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$$

Փունկցիան դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում: Այդ փունկցիայի դիֆերենցիալը կոչվում է և փունկցիայի երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ և նշանակվում է  $d^2u$  (կամ՝  $d^2f(x_0)$ ):

Օգտվելով դիֆերենցման կանոններից՝ կստանանք, որ

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i\right) = \sum_{i=1}^n \left[ d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \right] dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \right] dx_i = \sum_{i_1, i_2=1}^m \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} dx_{i_1} dx_{i_2} : \end{aligned}$$

Ինդուկտիվ կերպով սահմանվում են երկուսից բարձր կարգի դիֆերենցելությունը և դիֆերենցիալը.

$D$  տիրույթում ( $n-1$ )-անգամ դիֆերենցելի և փունկցիան կոչվում է  $n$ -անգամ դիֆերենցելի  $x_0 \in D$  կետում, եթե նրա բոլոր ( $n-1$ )-րդ կարգի մասնակի ածանցյալները դիֆերենցելի են  $x_0$  կետում: Այդ դեպքում  $d^{n-1}u$  փունկցիայի դիֆերենցիալը (համարվում է, որ  $dx_1, \dots, dx_m$  դիֆերենցիալները հաստատագրված են) կոչվում է և փունկցիայի  $n$ -րդ կարգի դիֆերենցիալ և նշանակվում է  $d^n u$  (կամ՝  $d^n f(x_0)$ ):

Մաքեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կստանանք՝

$$d^n u = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} \cdots dx_{i_n} :$$

## 2. Խառն ածանցյալների թեորեմները:

**Թեորեմ 2.1:** Դիցուք  $u = f(x, y)$  ֆունկցիան  $(x_0, y_0)$  կետի մի ինչուր շրջակայրում ունի երկրորդ կարգի խսոն ածանցյալներ՝  $f''_{xy}(x, y)$ ,  $f''_{yx}(x, y)$ :

Եթե այդ խսոն ածանցյալներն անընդհատ են  $(x_0, y_0)$  կետում, ապա

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0) : \quad (2.1)$$

► Նշանակենք

$$W = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)}{\Delta x \Delta y},$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)}{\Delta y} :$$

Այդ դեպքում

$$W = \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x}, \quad \varphi'(x) = \frac{f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)}{\Delta y} :$$

Կիրառելով Լազրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք, որ

$$W = \varphi'(x_0 + \theta \Delta x) = \frac{f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0)}{\Delta y}, \quad 0 < \theta < 1 :$$

Այժմ, կիրառելով Լազրանժի բանաձևն ըստ երկրորդ արգումենտի, կստանանք

$$W = f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y), \quad 0 < \theta_1 < 1 :$$

Քանի որ  $f''_{xy}$  ֆունկցիան անընդհատ է  $(x_0, y_0)$  կետում, ապա

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} W = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{xy}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta_1 \Delta y) = f''_{xy}(x_0, y_0) : \quad (2.2)$$

Մյուս կողմից,  $\varphi$  ֆունկցիայի փոխարեն ներմուծելով

$$\psi(y) = \frac{f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)}{\Delta x}$$

օժանդակ ֆունկցիան և կատարելով նույն դատողությունները, կստանանք՝

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f''_{yx}(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0 + \theta_3 \Delta y) = f''_{yx}(x_0, y_0), \quad (2.3)$$

որտեղ  $0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1$ : Սահմանի միակության քերեմի համաձայն, (2.2)-ից և (2.3)-ից հետևում է (2.1)-ը: ■

**Թեորեմ 2.2:** Դիցուք  $(x_0, y_0)$  կետի շրջակայքում գոյություն ունեն  $f'_x$ ,  $f'_y$  և  $f''_{xy}$  վերջավոր մասմակի ածանցյալները: Եթե  $f''_{xy}$  ֆունկցիան  $(x_0, y_0)$  կետում անընդհատ է, ապա այդ կետում գոյություն ունի նաև  $f''_{yx}$  մասմակի ածանցյալը և  $f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$ :

► Եթե  $\Delta y \rightarrow 0$ , ունեն՝

$$W := \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} - \right. \\ \left. - \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \right\} \rightarrow \frac{f'_y(x_0 + \Delta x, y_0) - f'_y(x_0, y_0)}{\Delta x} :$$

Կման ձևով՝

$$W \rightarrow \frac{f'_x(x_0, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0)}{\Delta y}, \text{ եթե } \Delta x \rightarrow 0 :$$

Մյուս կողմից, քանի որ  $f''_{xy}$ -ը անընդհատ է  $(x_0, y_0)$  կետում, ապա ճիշտ է (2.2)-ը, այսինքն՝ գոյություն ունի

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} W = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

կրկնակի սահմանը: Այսպիսով, քերեմի եզրակացությունն անմիջապես հետևում է հաջորդական սահմանների վերաբերյալ քերեմի լրացումից: ■

**Թեորեմ 2.3:** Եթե  $u = f(x, y)$  ֆունկցիան  $(x_0, y_0)$  կետում երկու անգամ դիֆերենցելի է, ապա  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ :

► Վերցնելով  $\Delta x = \Delta y = h$ ՝ կունենանք (օգտագործում ենք քերեմ 2.1-ի նշանակումները և ապացույցը), որ

$$W = \frac{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)}{h}, \quad 0 < \theta < 1:$$

Այս արտահայտությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$W = \frac{1}{h} \left\{ \begin{array}{l} [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] - \\ - [f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)] \end{array} \right\},$$

և օգտվենք  $f'_x$  ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից  $(x_0, y_0)$  կետում՝

$$W = \frac{1}{h} \{ f''_{x^2}(x_0, y_0) \theta h + f''_{xy}(x_0, y_0) h - f''_{x^2}(x_0, y_0) \theta h + \alpha h \},$$

որտեղ  $\alpha \rightarrow 0$ , եթե  $h \rightarrow 0$ : Այսպիսով՝

$$W = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha :$$

Նման ձևով կստանանք

$$W = f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta,$$

որտեղ  $\beta \rightarrow 0$ , եթե  $h \rightarrow 0$ :

Թեորեմի պնդումը հետևում է այս երկու հավասարություններից: ■

**Թեորեմ 2.4:** Եթե  $u = f(x_1, \dots, x_n)$  ֆունկցիան  $n$  անգամ դիֆերենցելի է  $D \subset R^n$  տիրույթում, ապա այդ ֆունկցիայի  $n$ -րդ կարգի խառն ածանցյալների արժեքները կախված չեն ածանցման հերթականությունից:

► Նկատենք, որ բավական է ապացուցել հետևյալ հավասարությունը.

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_n}} = \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_n}}, \quad 1 \leq k \leq n-1: \quad (2.4)$$

Դիտարկենք  $\frac{\partial^{k-1} u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}}$  ֆունկցիան: Այն դիտարկենք որպես  $x_{i_k}$  և  $x_{i_{k+1}}$ -ից կախված երկու փոփոխականի\* ֆունկցիա, որն առնվազն երկու անգամ դիֆերենցելի կլինի: Հետևաբար, նախորդ թեորեմի համաձայն, կստանանք

\* Անացած փոփոխականները հաստատագրված են:

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} = \frac{\partial^{k+1} u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k}},$$

որտեղից էլ հետևում է (2.4)-ը: ■

**Հետևանք:** Եթե  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  ֆունկցիան ու անզամ դիֆերենցելի է, ապա նրա ցանկացած  $n$ -րդ կարգի մասնակի ածանցյալը կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}},$$

որտեղ  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  բվերման ամքող են,  $0 \leq \alpha_i \leq n$ ,  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$ :

**3. Նյուտոնի բազմանդամի բանաձևը:** Ապացուցենք, որ ցանկացած  $m$  և  $n$  բնական թվերի համար  $\delta_m^m$  ճշմարիտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n \\ 0 \leq \alpha_i \leq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}: \quad (2.5)$$

► Կիրառենք մաթեմատիկական ինդուկցիա ըստ  $m$ -ի:  $m = 2$  դեպքում հավասարությունը ճշմարիտ է. այն Նյուտոնի երկանդամի հայտնի բանաձևն է՝

$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{\substack{\alpha_1 + \alpha_2 = n \\ 0 \leq \alpha_i \leq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}:$$

Այժմ ենթադրենք, որ (2.5)-ը ճշշտ է  $m$ -ը չենազանցող բոլոր  $n$  բնական թվերի համար և ապացուցենք, որ այն ճշշտ է նաև  $(m+1)$ -ի համար: Ուստե՞ն՝

$$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n &= [(x_1 + \cdots + x_m) + x_{m+1}]^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (x_1 + \cdots + x_m)^k x_{m+1}^{n-k}: \end{aligned}$$

Ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն, այստեղից կստանանք՝

$$\begin{aligned} (x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n &= \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \sum_{\substack{0 \leq \alpha_i \leq k \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} x_{m+1}^{n-k}: \end{aligned}$$

Նշանակելով  $n - k = \alpha_{m+1}$ , կստանանք

$$(x_1 + \cdots + x_m + x_{m+1})^n = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m + \alpha_{m+1} = n \\ 0 \leq \alpha_i \leq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m! \alpha_{m+1}!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m} x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$$

հավասարությունը, ինչ և պահանջվում էր ապացուցել. ■

**Հետևանք:**

$$\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n \\ 0 \leq \alpha_i \leq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} :^*$$

Սա ապացուցելու համար բավական է նկատել

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$$

հավասարությունը, որն ապացուցվում է՝ կիրառելով իմուսկցիա ըստ  $n$ -ի:

Օգտվելով այս հետևանքից և թերեմ 2.4-ի հետևանքից, բարձր կարգի դիֆերենցիալի բանաձևը՝

$$d^n u = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^m \frac{\partial^n u}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}} dx_{i_1} \cdots dx_{i_n},$$

կարելի է ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$d^n u = \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n \\ 0 \leq \alpha_i \leq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} dx_1^{\alpha_1} \cdots dx_m^{\alpha_m} : \quad (2.6)$$

Հաշվի առնելով Նյուտոնի բազմանդամի բանաձևը, (2.6)-ը սիմվոլիկ կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$d^n u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n u :$$

\* Այս հավասարությունը նշանակում է, որ եթե  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  թվերը ֆիքսենք այնպես, որ  $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq n$ , ապա մասնաւոր գումարելին կլրկնվի  $\frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}$  անգամ:

**4. Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալները:** Դիցուք ուսենք բարդ ֆունկցիա՝  $u = f(x_1, \dots, x_m)$ ,  $x_i = \varphi_i(t_1, \dots, t_k)$ ,  $1 \leq i \leq m$ :

Այդ դեպքում, դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտության շնորհիվ,

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} dx_m$$

բանաձևը ճիշտ է նաև բարդ ֆունկցիայի համար, սակայն բարդ ֆունկցիայի դեպքում  $dx_1, \dots, dx_m$  դիֆերենցիալները ֆունկցիաներ են ( $\varphi_i$  ֆունկցիաների դիֆերենցիալներն են), որոնք կարող են և հաստատուն չլինել: Այդ պատճառով, դիֆերենցման կանոնների համաձայն,

$$\begin{aligned} d^2 u &= \left[ d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \right] dx_1 + \dots + \left[ d\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right) \right] dx_m + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 f + \frac{\partial f}{\partial x_1} d^2 x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m} d^2 x_m : \end{aligned} \quad (2.7)$$

Տեսնում ենք, որ բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար ընդհանուր դեպքում դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն տեղի չունի:

Դիտարկենք այն մասնավոր դեպքը, եթե  $\varphi_i$  ֆունկցիաները զծային են՝

$$x_i = \alpha_{i1} t_1 + \dots + \alpha_{ik} t_k + \beta_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

որտեղ  $\alpha_{ij}$  և  $\beta_i$  գործակիցները հաստատուններ են:

Այս դեպքում

$$dx_i = \alpha_{i1} dt_1 + \dots + \alpha_{ik} dt_k, \quad 1 \leq i \leq m :$$

Քանի որ  $t_1, \dots, t_k$  անկախ փոփոխականներից կախված ֆունկցիաների դիֆերենցիալները հաշվելիս՝  $dt_1, \dots, dt_k$  դիֆերենցիալները համարվում են հաստատուններ, ապա դիտարկվող դեպքում  $dx_i$  դիֆերենցիալները հաստատուններ են, հետևաբար,  $d^2 x_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq m$ :

Այսպիսով, դիտարկվող դեպքում (2.7)-ը վերածվում է

$$d^2 u = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 u$$

հավասարությանը: Այսինքն՝ եթե  $x_i$  ֆունկցիաները գծային են, դիֆերենցիալ տեսքի ինվարիանտությունը տեղի ունի նաև երկրորդ կարգի դիֆերենցիալների համար: Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կհամոզվենք, որ եթե  $\varphi_i$  ֆունկցիաները գծային են, ապա բարձր կարգի դիֆերենցիալների համար նույնպես տեղի ունի դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտություն՝

$$d^n u(t_0) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = n \\ 0 \leq \alpha_i \leq n}} \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} dx_1^{\alpha_1} \cdots dx_m^{\alpha_m},$$

$$dx_i = \Delta x_i = \varphi_i(t) - \varphi_i(t_0), \quad 1 \leq i \leq m:$$

### §3. ԹԵՇԼՈՐԻ ԲԱՆԱՉԵՎԸ

#### 1. Անացորդային անդամը Լագրանժի տեսքով:

**Թեորեմ 3.1:** Եթե  $f(x)$  ֆունկցիան ( $n+1$ ) անգամ դիֆերենցելի է  $D \subset R^m$  տիրույթում և  $[x_0, x] \subset D$ , ապա գոյուրյուն ունի  $\theta \in (0,1)$  թիվ, այնպիսին, որ

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x), \quad (3.1)$$

որտեղ  $\Delta x = x - x_0$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ :

► Ապացուցելու համար նախ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը գրենք դիֆերենցիալների միջոցով:

Եթե  $F$  ֆունկցիան  $[t_0, t] \subset R$  հատվածում ունի մինչև  $(n+1)$ -րդ կարգի վերջավոր ածանցյալներ\*, ապա

$$F(t) = F(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{F^{(k)}(t_0)}{k!} (t - t_0)^k + \frac{F^{(n+1)}(t_0 + \theta(t - t_0))}{(n+1)!} (t - t_0)^{n+1},$$

որտեղ  $0 < \theta < 1$ :

Մյուս կողմից,

\* Ինչը համարմեր է  $n+1$  անգամ դիֆերենցելի լինելուն:

$$t - t_0 = \Delta t = dt \text{ և } F^{(k)}(t_0)(t - t_0)^k = F^{(k)}(t_0) d^k t = d^k F(t_0),$$

հետևաբար,

$$F(t) = F(t_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k F(t_0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(t_0 + \theta \Delta t), \quad 0 < \theta < 1:$$

Սասմավոր դեպքում, եթե  $t = 1$ ,  $t_0 = 0$ , կունենանք

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k F(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} F(\theta), \quad 0 < \theta < 1: \quad (3.2)$$

Այսուհետև դիտարկենք  $F(t) = f(x_0 + t\Delta x)$ ,  $t \in [0,1]$  մեկ փոփոխականի բարդ ֆունկցիան: Այսուղի՝  $F(0) = f(x_0)$ ,  $F(1) = f(x)$ :

Հաշվի առնելով բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիության վերաբերյալ թերեմը և դիֆերենցիալի տեսքի հնվարիսնությունը, կստանանք

$$d^k F(t_0) = d^k f(x_0 + t_0 \Delta x)$$

հավասարությունը: Այսուղի՝ տեղադրենք  $t_0 = 0$ , այսուհետև՝  $t_0 = \theta$ : Կստանանք  $d^k F(0) = d^k f(x_0)$ ,  $1 \leq k \leq n$  և  $d^{n+1} F(\theta) = d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x)$  հավասարությունները: Այս արժեքները տեղադրելով (3.2)-ի մեջ՝ կստանանք (3.1)-ը: ■

## 2. Մնացորդային անդամը Պեանոյի տեսքով:

**Թեորեմ 3.2:** Եթե  $f$  ֆունկցիան  $n$  անգամ դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում, ապա

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} d^k f(x_0) + o(\rho^n),$$

որտեղ  $\rho \rightarrow 0$ ,  $\rho = |x - x_0|$ :

Եթե  $d^k f(x_0)$  դիֆերենցիալի փոխարեն տեղադրենք իր արժեքը, ապա այդ բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_m) &= f(x_1^0, \dots, x_m^0) + \sum_{k=1}^n \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \\ &\cdot \frac{\partial^k f(x_1^0, \dots, x_m^0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m} + o(\rho^n): \end{aligned} \quad (3.3)$$

► Ապացուցվում է նույն սխեմայով, ինչ որ մեկ փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքում: Նշանակենք

$$r_n(x) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k \\ 0 \leq \alpha_i \leq k}} \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \cdot \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m},$$

և ապացուցենք, որ

$$r_n(x) = o(\rho^n), \text{ եթե } \rho \rightarrow 0: \quad (3.4)$$

Այդ նպատակով ապացուցենք հետևյալ օժանդակ լեմման.

**Լեմմա 3.1:** Եթե  $r$  ֆունկցիան  $x_0$  կետում  $n$  անգամ դիֆերենցելի է և

$$r(x_0) = dr(x_0) = \cdots = d^n r(x_0) = 0, \quad (3.5)$$

( $r$  ֆունկցիան և նրա մինչև  $n$ -րդ կարգի բոլոր մասնակի ածանցյալները  $x_0$  կետում ընդունում են 0 արժեք), ապա

$$r(x) = o(\rho^n):$$

► Ապացուցենք մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով:  $n = 1$  դեպքում  $r$  ֆունկցիայի դիֆերենցելիությունից և (3.5)-ից ուստի՝

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0) \Delta x_i + o(\rho) = o(\rho):$$

Այժմ ապացուցենք, որ

$$r(x_0) = dr(x_0) = \cdots = d^{n+1} r(x_0) = 0 \Rightarrow r(x) = o(\rho^{n+1}):$$

Նկատենք, որ

$$dr(x_0) = d^2 r(x_0) = \cdots = d^{n+1} r(x_0) = 0$$

պայմանից հետևում է, որ (3.5) պայմանը տեղի ունի  $\frac{\partial r}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,

ֆունկցիաների համար: Հետևաբար, ինդուկտիվ ենթադրության համաձայն,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = o(\rho^n), \text{ եթե } \rho \rightarrow 0, 1 \leq i \leq m,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{\frac{\partial r}{\partial x_i}(c)}{|c - x_0|^n} \rightarrow 0, \text{ եթե } c \rightarrow x_0, 1 \leq i \leq m : \quad (3.6)$$

Այսուհետև, վերջավոր աճերի բանաճկի համաձայն,

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x_i ,$$

որտեղ  $0 < \theta < 1$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ :

Հետևաբար,

$$\frac{|r(x)|}{\rho^{n+1}} \leq \sum_{i=1}^m \frac{\left| \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0 + \theta \Delta x) \right|}{|\theta \Delta x|^n} \cdot \frac{|\theta \Delta x|^n |x_i - x_i^0|}{\rho^{n+1}} \rightarrow 0, \text{ եթե } \rho \rightarrow 0 :$$

Իսկ, մի կողմից, նշանակելով  $c = x_0 + \theta \Delta x$ , կոնենանք՝  
 $(\rho \rightarrow 0) \Rightarrow (c \rightarrow x_0)$  և, (3.6)-ի համաձայն՝

$$\frac{\left| \frac{\partial r}{\partial x_i}(x_0 + \theta \Delta x) \right|}{|\theta \Delta x|^n} = \frac{\left| \frac{\partial r}{\partial x_i}(c) \right|}{|c - x_0|^n} \rightarrow 0 ,$$

իսկ մյուս կողմից,  $\frac{|\theta \Delta x|^n |x_i - x_i^0|}{\rho^{n+1}} \leq 1$ : Լեմման ապացուցվեց: ■

Թեորեմի ապացույցն ավարտելու համար մեզ մնում է ստուգել, որ  $r_n(x)$ -ը բավարարում է (3.5) պայմանին կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{\partial^k r_n(x_0)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} = 0, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = k, 0 \leq \alpha_i \leq k, k = 1, 2, \dots, n :$$

Իսկ դա հետևում է

$$\frac{\partial^k \left[ (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \cdots (x_m - x_m^0)^{\alpha_m} \right]}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_m^{\beta_m}}(x_0) = \begin{cases} 0, & (\beta_1, \dots, \beta_m) \neq (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \\ \alpha_1! \cdots \alpha_m!, & (\beta_1, \dots, \beta_m) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \end{cases}$$

հավասարություններից: ■

## §4. ԷՌԱՍՏՐԵՍՈՒՄՆԵՐ

### 1. Էքստրեմումներ:

Անհրաժեշտ պայմաններ: Դիցուք  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  ֆունկցիան ոլոշված է  $D$  տիրույթում և  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ -ն  $D$  տիրույթի ներքին կետ է:

**Սահմանում:**  $x_0$  կետը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի մաքսիմումի (մինիմումի) կետ, եթե գոյություն ունի այդ կետի  $\delta$  - շրջակայր՝  $B(x_0, \delta)$ , այնպիսին, որ յուրաքանչյուր  $x \in B(x_0, \delta)$  կետի համար տեղի ունենա

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \leq f(x_0)) \quad (4.1)$$

անհավասարությունը:

Մաքսիմումի և մինիմումի կետերը միասին կոչվում են էքստրեմումի կետեր, իսկ ֆունկցիայի արժեքներն այդ կետերում կոչվում են էքստրեմումներ:

**Թեորեմ 4.1:** Եթե  $x_0$ -ն  $f$  ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում գոյություն ունեն  $f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_m^0), \dots, f'_{x_m}(x_1^0, \dots, x_m^0)$  մասնակի ածանցյալները, ապա նրանք բոլորը հավասար են զրոյի՝

$$\begin{cases} f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 \\ \dots \\ f'_{x_m}(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

► Ապացուենք (4.2) հավասարություններից, օրինակ, առաջինը: Դիտարկենք  $g(t) = f(t, x_2^0, \dots, x_m^0)$  մեկ փոփոխականի ֆունկցիան  $x_1$  կետի շրջակայրում: Քանի որ  $x_1^0$ -ն  $g$  ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է և այդ կետում գոյություն ունի

$$g'(x_1^0) = f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_m^0)$$

ածանցյալը, ապա այն հավասար է զրոյի: ■

(4.2) պայմանին բավարարող կետերը կոչվում են ստացիոնար կետեր:

Դիֆերենցելի ֆունկցիաների դեպքում էքստրեմումի համար անհրաժեշտ (4.2) պայմանը կարելի է գրել նաև հետևյալ տեսքով՝

$$df(x_1^0, \dots, x_m^0) = 0 : \quad (4.2)$$

## 2. Բավարար պայմաններ (Երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպք):

Դիցուք  $f(x, y)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $M_0 = (x_0, y_0)$  ստացիոնար կետի շրջակայքում և երկու անգամ դիֆերենցելի է  $M_0$  կետում։ Այդ դեպքում, (4.2)-ի համաձայն,  $n = 2$  դեպքում նրա Թեյլորի բանաձևը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0, y_0) + \varepsilon \rho^2,$$

որտեղ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , եթե  $\rho \rightarrow 0$  :

Տեղադրելով

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2, \quad dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y,$$

և նշանակելով

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

ֆունկցիայի աճի համար կստանանք հետևյալ ներկայացումը.

$$\Delta f = \frac{1}{2} (a_{11} \Delta x^2 + 2a_{12} \Delta x \Delta y + a_{22} \Delta y^2) + \varepsilon \rho^2 : \quad (4.3)$$

Այնուհետև,  $\Delta x$  և  $\Delta y$  աճերը արտահայտելով  $(\rho, \varphi)$  քեռային կոորդինատների միջոցով՝

$$\Delta x = \rho \cos \varphi, \quad \Delta y = \rho \sin \varphi,$$

կստանանք

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2} (a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \cos \varphi \sin \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + 2\varepsilon) \quad (4.4)$$

բանաձևը։ Ելնելով ֆունկցիայի աճի այս ներկայացումից, ապացուցենք՝

\*  $\varphi$ -ը  $\overline{M_0 M}$  վեկտորի կազմած անկյունն է  $OX$  առանցքի հետ՝  $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ։

**Թեորեմ 4.2:** а) Եթե  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , ապա  $(x_0, y_0)$  ստացիոնար կետը  $f$  ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ է, ընդ որում,  $a_{11} > 0$  դեպքում այս մինիմումի կետ է, իսկ  $a_{11} < 0$  դեպքում՝ մաքսիմումի:

բ) Եթե  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ , ապա  $(x_0, y_0)$  ստացիոնար կետը  $f$  ֆունկցիայի էքստրեմումի կետ չէ:

► ա) պնդումն ապացուելու համար նկատենք, որ այդ դեպքում  $a_{11}a_{22} > 0$ , հետևաբար,  $a_{11} \neq 0$ , այնպես որ (4.4) արտահայտությունը կարող ենք ներկայացնել հետևյալ տեսքով՝

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2a_{11}} \left[ (a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \varphi + 2\varepsilon a_{11} \right]: \quad (4.5)$$

Քանի որ  $(a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2$  և  $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \varphi$  ոչ քացասական ֆունկցիաներն անընդհատ են  $[0, 2\pi]$  հատվածում և միաժամանակ 0 չեն դառնում, ապա

$$m := \min_{[0, 2\pi]} \left[ (a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \sin^2 \varphi \right] > 0:$$

Մյուս կողմից, քանի որ  $\varepsilon \rightarrow 0$ , եթե  $\rho \rightarrow 0$ , ապա գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին, որ  $\rho < \delta \Rightarrow |2\varepsilon| < m$ : Հետևաբար, եթե  $\rho < \delta$ ,  $\Delta f$ -ի նշանը համընկնում է  $a_{11}$ -ի նշանի հետ: Այսինքն՝ եթե  $a_{11} > 0$ , ապա  $\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) > 0$ , հետևաբար, առկա է մինիմում: Իսկ եթե  $a_{11} < 0$ , ապա  $\Delta f < 0$ , հետևաբար, առկա է մաքսիմում:

Թեորեմի բ) պնդումն ապացուելու համար նախ քննարկենք այն դեպքը, եթե  $a_{11} \neq 0$ : Այդ դեպքում կարող ենք օգտվել ֆունկցիայի աճի (4.5) ներկայացումից: Հեշտ է նկատել, որ այս դեպքում գոյություն ունեն  $(x_0, y_0)$  կետից ելնող երկու ճառագայթներ, որոնց վրա  $\Delta f$ -ն ընդունում է տարբեր նշանի արժեքներ (քավականաչափ փոքր  $\rho$ -ի դեպքում):

Իրոք, եթե վերցնենք  $\varphi_1 = 0$ , ապա (4.5)-ի միջակ փակազգերի մեջ գրվածը հավասար է՝  $a_{11}^2 + \varepsilon(\rho)$ , որը դրական է, եթե  $\rho$ -ն քավականաչափ փոքր է: Իսկ եթե  $\varphi_2$ -ը լըստրենք այնպես, որ  $a_{11} \cos \varphi_2 + a_{12} \sin \varphi_2 = 0$ ,

ապա (4.5)-ի միջակ փակագծերի մեջ զրվածը հավասար է՝  $(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\sin^2 \varphi_2 + \varepsilon(\rho)$ , որը բացասական է, եթե  $\rho$ -ն բավականաչափ փոքր է:

Մնում է թ) պնդումն ապացուցել այն դեպքում, եթե  $a_{11} = 0$ : Այս դեպքում օգտվենք (4.5) ներկայացումից.

$$\Delta f = \frac{\rho^2}{2} [(2a_{12} \cos \varphi + a_{22} \sin \varphi) \sin \varphi + 2\varepsilon],$$

ընդ որում,  $a_{12} \neq 0$ : Հետևաբար, եթե վերցնենք մողուլով բավականաչափ փոքր հակադիր անկյուններ՝  $\varphi_2 = -\varphi_1$ , այնպես, որ բավարարվի  $|a_{22} \sin \varphi_1| < |2a_{12} \cos \varphi_1|$  անհավասարությունը, ապա համապատասխան ճառագայթների վրա  $\Delta f$ -ը կընդունի տարբեր նշանի արժեքներ (եթե  $\rho$ -ն բավականաչափ փոքր է): թ) կետը ևս ապացուցված է: ■

**3. Բավարար պայմաններ, բնիհանուր դեպքը:** Դիցուք  $f(x_1, \dots, x_m)$  ֆունկցիան դիֆերենցելի է  $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  ստացիոնար կետի շրջակայրում և երկու անգամ դիֆերենցելի է  $x_0$  կետում: Այս դեպքում թեյլորի բանաձևից կստանանք՝

$$\Delta f = f(x_1, \dots, x_m) - f(x_1^0, \dots, x_m^0) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k \right) + \varepsilon \rho^2,$$

որտեղ  $a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_1^0, \dots, x_m^0)$ ,  $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^m \Delta x_i^2}$  և  $\varepsilon \rightarrow 0$ , եթե  $\rho \rightarrow 0$ :

$$\text{Նշանակելով } \xi_i = \frac{\Delta x_i}{\rho}, \text{ ֆունկցիայի աճի համար կստանանք} \\ \Delta f = \frac{\rho^2}{2} \left( \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k + 2\varepsilon \right) \quad (4.4)$$

ներկայացումը, որտեղ  $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$ : Հետևաբար,  $\Delta f$ -ի ուսումնասիրությունը հանգում է  $\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = 1$  միավոր սֆերայի վրա որոշված

$$\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \xi_i \xi_k \quad (4.5)$$

քառակուսային ձևի\* ուսումնասիրությանը:

Դիցուք (4.5) քառակուսային ձևը դրական որոշյալ է, այսինքն՝ այն ընդունում է դրական արժեքներ, եթե  $(\xi_1, \dots, \xi_m) \neq (0, \dots, 0)$ :

Քանի որ միավոր սֆերան փակ և սահմանափակ բազմություն է, իսկ (4.5) քառակուսային ձևն անընդհատ ֆունկցիա է, ապա Վայերշտրասի երկրորդ թեորեմի համաձայն, (4.5) քառակուսային ձևը միավոր սֆերայի վրա կընդունի իր փոքրագույն արժեքը, որը դրական է: Հետևաբար, (4.4)-ից հետևում է, որ եթե  $\rho$ -ն բավականաչափ փոքր է, ապա  $\Delta f > 0$ , այսինքն՝  $x_0$  կետը  $f$  ֆունկցիայի մինիմումի կետ է:

Մյուս կողմից, Սիլվեստրի թեորեմի համաձայն, որպեսզի (4.5) քառակուսային ձևը լինի դրական որոշյալ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0:$$

Նման ձևով կհամոզվենք, որ եթե (4.5) քառակուսային ձևը բացասական որոշյալ է, ապա  $x_0$  կետը  $f$  ֆունկցիայի մաքսիմումի կետ է: Եվ եթե (4.5) քառակուսային ձևը անորոշ է (այսինքն՝ այն ընդունում է թե՛ դրական, և թե՛ բացասական արժեքներ), ապա  $x_0$ -ն եքստրեմումի կետ չէ:

Քանի որ դրական որոշյալ քառակուսային ձևի բոլոր գրդակիցների նշանները փոխելիս՝ ստացվում է բացասական որոշյալ ձև, և հակառակը,

\* §2, կետ 2-ի համաձայն՝  $a_{ik} = a_{ki}$ :

ապա (4.5) քառակուսային ձևի բացասական որոշյալ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմանը կլինի հետևյալը.

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad (-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} > 0:$$

## IX ԳԼՈՒԽ

## ԹՎԱՅԻՆ ԾԱՐՁԵՐ

## §1. ԹՎԱՅԻՆ ԾԱՐՁԻ ԳՈՒՄԱՐԸ ԵՎ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

**1. Հիմնական գաղափարները:** Դիցուք  $a_n$ -ը կամայական թվային հաջորդականություն է: Դիտարկենք հետևյալ սիմվոլը՝

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots : \quad (1.1)$$

Այդ սիմվոլ կոչվում է *շարք*, իսկ  $a_n$ -երը՝ այդ շարքի անդամներ: Օգտվելով գումարի նշանից՝ (1.1) սիմվոլը հաճախ գրում են նաև

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1.1')$$

տեսքով:

Մեր առաջիկա նպատակը (1.1) սիմվոլին իմաստ վերագրելն է, այսինքն՝ սահմանել (1.1) շարքի գումար (սահմանել անվերջ թվով գումարելիների գումար): Այդ նպատակով նշանակենք՝

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad n=1,2,\dots, \quad (1.2)$$

որը կոչվում է (1.1) շարքի  $n$ -րդ մասնակի գումար:

**Սահմանում:** Եթե գոյություն ունի հետևյալ վերջավոր կամ անվերջ սահմանը՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A,$$

ապա այն կոչվում է (1.1) շարքի գումար և գրվում է՝

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n :$$

Եթե  $A$  սահմանը վերջավոր է, ապա (1.1) շարքը կոչվում է զուգամետ: Իսկ եթե այդ սահմանն անվերջ է, կամ գոյություն չունի, ապա (1.1) շարքը կոչվում է տարամետ:

Այլ կերպ ասած՝ (1.1) շարքը կոչվում է զուգամետ (տարամետ), եթե զուգամետ է (տարամետ է) նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը:

### Օրինակներ:

1) Շարքի պարզագույն օրինակ է հանդիսանում երկրաչափական պրոցեսիայի անդամների գումարը՝

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots : \quad (1.3)$$

Նրա մասնակի գումարն է՝

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} :$$

Եթե  $|q| < 1$  (այսինքն՝ պրոցեսիան անվերջ նվազող է), ապա  $S_n$ -ը ունի վերջավոր սահման՝

$$S = \frac{a}{1 - q},$$

այսինքն՝ (1.3) շարքը գուգամետ է և  $S$ -ը նրա գումարն է:

Եթե  $|q| \geq 1$ , ապա (1.3) շարքը տարամետ է, ընդ որում, եթե  $q \geq 1$  (և  $a > 0$ ), ապա շարքի գումարը  $+\infty$ -ն է, իսկ եթե  $q \leq -1$ ,  $S_n$ -ը սահման չունի, այսինքն՝ շարքը գումար չունի:

Օրինակ, եթե  $a = 1$  և  $q = -1$ , կստանանք

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

շարքը, որի մասնակի գումարների հաջորդականությունն է՝

$$1, 0, 1, 0, \dots :$$

2) Դիտարկենք  $\alpha$  իրական թվի տասնորդական վերլուծությունը՝

$$\alpha = C, c_1 c_2 \dots c_n \dots,$$

այսինքն՝

$$C, c_1 c_2 \dots c_n \leq \alpha \leq C, c_1 c_2 \dots c_n + \frac{1}{10^n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

հետևաբար,

$$C_n = C, c_1 c_2 \dots c_n \rightarrow \alpha :$$

Մյուս կողմից,  $C_n$ -ը

$$C + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \dots$$

շարքի մասնակի գումարն է: Հետևաբար, այդ շարքը գուգամես է և նրա գումարը  $\alpha$ -ն է՝

$$\alpha = C + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} + \cdots :$$

3) Ապացուցենք, որ  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \infty$ :

Իրոք, եթե  $A_n$ -ով նշանակենք այդ շարքի  $n$ -րդ մասնակի գումարը, ապա

$$A_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n [\ln(1+k) - \ln k] = \ln(n+1) \rightarrow \infty :$$

4) Ցույց տանք, որ  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)} = \frac{1}{\alpha+1}$  ( $\alpha \neq -1, -2, \dots$ ):

Իսկապէս՝

$$A_n = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+k+1} \right] = \frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+n+1} \rightarrow \frac{1}{\alpha+1} :$$

5) Համոզվենք, որ  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$ :

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow \infty :$$

6) Ցույց տանք, որ  $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e$ , կամ կարծ՝  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ :

Այս դեպքում ունենք՝

$$y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \rightarrow e \quad (\text{տես՝ զլուխ 2, §2, կետ 3}):$$

**2. Զուգամես շարքերի պարզագույն հատկությունները:** Եթե (1.1) շարքից դեռ նետենք առաջին  $m$  անդամները, ապա կստանանք մի նոր շարք՝

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

որը կոչվում է (1.1) շարքի մնացորդ կամ՝ պոչ:

**Հատկություն 1:** Եթե (1.1) շարքը գուգամետ է, ապա գուգամետ են նաև նրա բոլոր մնացորդ շարքերը, ընդ որում, եթե  $\gamma_m$ -ով նշանակենք (1.4) շարքի գումարը, ապա տեղի ունի

$$A = A_m + \gamma_m \quad (1.5)$$

հավասարությունը:

►  $m$ -ը ֆիքսենք և  $A'_k$ -ով նշանակենք (1.4) շարքի  $k$ -րդ մասնակի գումարը: Այդ դեպքում

$$A'_k = A_{m+k} - A_m : \quad (1.6)$$

Այս հավասարության մեջ անցնելով սահմանի, երբ  $k \rightarrow \infty$  ( $m$ -ը ֆիքսված է), կստանանք

$$A'_k \rightarrow A - A_m :$$

Հետևաբար, (1.4) շարքը գուգամետ է և նրա գումարը  $A - A_m$ -ն է, ինչը համարժեք է (1.5)-ին: ■

Դժվար չէ նկատել, որ ֆիքսած  $m$ -ի դեպքում (1.4) մնացորդ շարքի գուգամիտուրյունից բխում է (1.1) շարքի գուգամիտուրյունը: Այդ բանում համոզվելու համար (1.6) հավասարությունը գրենք

$$A_n = A_m + A'_{n-m}$$

տեսքով, որտեղ  $m$ -ը ֆիքսված է: Այստեղ  $n$ -ը ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք այն, ինչ պահանջվում էր:

Ապացուցված հատկությունը նկարագրական լեզվով կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ: Շարքից վերջավոր քվով անդամները դեռ նետելը կամ ավելացնելը չի ազդում շարքի վարքի վրա:

**Հատկություն 2:** Զուգամետ շարքի մնացորդը ձգտում է զրոյի:

Այս պնդումը բխում է (1.5) հավասարությունից:

**Հատկություն 3:** Զուգամետ շարքի ընդհանուր անդամը ձգտում է զրոյի՝

$$a_n \rightarrow 0 : \quad (1.7)$$

► Իրոք,  $a_n = A_n - A_{n-1} \rightarrow A - A = 0 : ■$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ (1.7) պայմանը (1.1) շարքի

գուգամիտության համար անհրաժեշտ է, բայց բավարար չէ:

**Հատկություն 4:** Եթե (1.1) շարքը զուգամետ է և  $c$ -ն հաստատում է, ապա  $\sum c a_n$  շարքը նոյնպես զուգամետ է և

$$\sum c a_n = c A :$$

► Իրոք, այս նոր շարքի  $n$ -րդ մասնակի գումարը նշանակելով  $\bar{A}_n$ , կստանանք

$$\bar{A}_n = c A_n \rightarrow c A : \blacksquare$$

**Հատկություն 5:** Եթե  $\sum a_n$  և  $\sum b_n$  շարքերը զուգամետ են և  
 $\sum a_n = A$ ,  $\sum b_n = B$ ,  
 ապա զուգամետ կլինի նաև  $\sum (a_n + b_n)$  շարքը և  
 $\sum (a_n + b_n) = A + B :$

► Իրոք, նշանակելով այդ շարքերի  $n$ -րդ մասնակի գումարները  $A_n$ ,  $B_n$  և  $C_n$ , կստանանք

$$C_n = A_n + B_n \rightarrow A + B : \blacksquare$$

### 3. Կոչիի զուգամիտության սկզբունքը:

**Թեորեմ 1.1:** Որպեսզի (1.1) շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և րավարար, որ յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար զոյլություն ունենա  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $n > N(\varepsilon)$  դեպքում բավարարվեն

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon, \quad m=1,2,\dots \quad (1.8)$$

անհավասարությունները:

► (1.1) շարքի զուգամիտությունը, ըստ սահմանման, նշանակում է, որ նրա մասնակի գումարների  $A_n$  հաջորդականությունը զուգամետ է, իսկ, մյուս կողմից, քանի որ

$$A_{n+m} - A_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m},$$

ապա (1.8)-ը  $A_n$  հաջորդականության ֆունդամենտալության պայմանն է: Մնում է օգտվել Կոչիի զուգամիտության սկզբունքից  $A_n$  հաջորդականության համար: ■

**Օրինակ:** Ապացուցենք, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  շարքը, որը կոչվում է *հարմոնիկ շարք*, տարամետ է:

Ունենք՝

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2};$$

Հետևաբար,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  թվի համար խախտվում է Կոչիի (1.8) պայմանը,

ուստի  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  շարքը տարամետ է:

## § 2. ԴՐԱԿԱՆ ՇԱՐՔԵՐ

**1. Դրական շարքի գուգամիտության պայման:** Դիցուք  $a_n \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ : Այդ դեպքում

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad (2.1)$$

շարքը կանվանենք *դրական շարք*:

Դրական շարքի մասնակի գումարների  $A_n$  հաջորդականությունը աճող է (լայն իմաստով), հետևաբար այն միշտ ունի սահման՝  $A_n \uparrow A$ : Այդ  $A$  սահմանը կիսնի վերջավոր, եթե  $A_n$  հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, հակառակ դեպքում՝  $A = +\infty$ :

Զևսկերպենք այս պնդումը շարքերի լեզվով.

**Լեմմա 2.1:** Դրական շարքը միշտ ունի գումար՝ վերջավոր կամ անվերջ: Այդ գումարը վերջավոր է (շարքը գուգամետ է) այն և միայն այն դեպքում, եթե նրա մասնակի գումարների հաջորդականությունը վերևից սահմանափակ է, հակառակ դեպքում շարքի գումարը  $+\infty$  է:

Այժմ, ելնելով (2.1) շարքից, կազմենք մի նոր շարք<sup>\*</sup>

\* (2.2) շարքի  $k$ -րդ անդամը  $b_k := a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}$  թիվն է:

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \\ & + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

որտեղ  $n_k$ -ն բնական թվերի խիստ աճող հաջորդականություն է ( $n_0 = 1$ ): Այս շարքը կոչվում է (2.1) շարքի խմբավորված շարք: Եթե այս շարքի  $k$ -րդ մասնակի գումարը նշանակենք  $\tilde{A}_k$ , ապա

$$\tilde{A}_k = A_{n_k},$$

այսինքն՝ (2.2) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հանդիսանում է (2.1) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության ենթահաջորդականություն:

Մյուս կողմից,  $A_n$  աճող հաջորդականության գուգամիտությունը համարժեք է նրա  $A_{n_k}$  ենթահաջորդականության գուգամիտությանը: Հետևաբար, (2.1) և (2.2) շարքերը գուգամիտում կամ տարամիտում են միաժամանակ:

**Օրինակներ:** 1) Դիտարկենք հարմոնիկ շարքը՝

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots;$$

Նրանից կազմենք խմբավորված շարք՝

$$\begin{aligned} & 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) + \\ & + \cdots + \left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} \right) + \cdots =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \end{aligned}$$

որտեղ

$$b_k = \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2};$$

Նշանակելով հարմոնիկ շարքի  $n$ -րդ մասնակի գումարը  $H_n$ -ով կստանանք

$$H_{2^{k+1}} > k \cdot \frac{1}{2}$$

անհավասարությունը: Հետևաբար, հարմոնիկ շարքի գումարը  $+ \infty$  է:

2) Այժմ դիտարկենք ընդհանուր հարմոնիկ շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots,$$

որտեղ  $s$ -ը կամայական դրական թիվ է:

Ցույց տանք, որ  $s > 1$  դեպքում ընդհանուր հարմոնիկ շարքը զուգամեն է: Դիտարկենք հետևյալ խմբավորած շարքը՝

$$1 + \left( \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} \right) + \dots + \left( \frac{1}{(2^k)^s} + \frac{1}{(2^k+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^s} \right) + \dots =: \sum_{k=0}^{\infty} b_k :$$

Վերևից զնահատնենք այս շարքի ընդհանուր անդամը.

$$b_k = \frac{1}{(2^k)^s} + \frac{1}{(2^k+1)^s} + \dots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^s} < 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^s} = \frac{1}{2^{k\sigma}},$$

որտեղ  $\sigma = s - 1 > 0$ : Հետևաբար,

$$\sum_{k=0}^n b_k < \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k\sigma}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^\sigma}},$$

ինչը նշանակում է, որ խմբավորված շարքը ու նրա հետ մեկտեղ՝ նաև ընդհանուր հարմոնիկ շարքը, զուգամեն է:

## 2. Բարդատման հայտանիշները: Դիցուք

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (1) \quad \text{և} \quad \sum b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (2)$$

շարքերը դրական են:

**Թեորեմ 2.1 (Բարդատման I հայտանիշը):** Եթե  $a_n \leq b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ապա (2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (1) շարքի զուգամիտությունը:

► Իրոք, տրված պայմանից հետևում է, որ  $A_n \leq B_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , որտեղ  $A_n$ -ը և  $B_n$ -ը այդ շարքերի մասնակի գումարներն են: Հաշվի առնելով լիմմա 2.1-ը՝ թեորեմի պնդումը բխում է այդ անհավասարությունից: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմի պնդումը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե  $a_n \leq b_n$  անհավասարությունը տեղի ունի՝ սկսած որոշ համարից: Բանը

նրանում է, որ շարքի սկզբից վերջավոր թվով անդամներ դեռ նետելը չի ազդում շարքի վարքի վրա:

**Թեորեմ 2.2 (Բաղդատման II հայտանիշը):** Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad 0 \leq K \leq \infty$$

սահմանը, ապա

ա)  $0 \leq K < \infty$  դեպքում (2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (1) շարքի զուգամիտությունը;

բ)  $0 < K \leq \infty$  դեպքում (1) շարքի զուգամիտությունից բխում է (2) շարքի զուգամիտությունը:

► ա) Զուգամետ հաջորդականությունների առաջին հատկության համաձայն՝

$$\frac{a_n}{b_n} < K + 1, \quad \text{եթե } n > n_0,$$

այսինքն՝

$$a_n < (K + 1)b_n :$$

Այժմ կլիրառենք զուգամետ շարքերի 4-րդ հատկությունը և նախորդ հայտանիշը:

բ) Վերցնենք մի  $p$  թիվ, այնպիսին, որ  $0 < p < K$ : Այդ դեպքում, սկսած որոշ համարից տեղի կունենան  $p < a_n / b_n$  անհավասարությունները կամ, որ նույնն է՝  $p b_n < a_n$ : Մնում է կրկին կլիրառել նախորդ հայտանիշը և զուգամետ շարքերի 4-րդ հատկությունը: ■

**Թեորեմ 2.3 (Բաղդատման III հայտանիշը):** Եթե տեղի ունեն

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2.3}$$

անհավասարությունները, ապա (2) շարքի զուգամիտությունից բխում է (1) շարքի զուգամիտությունը:

► Ունենք, որ

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \quad \dots, \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}};$$

$$\text{Բազմապատկելով այդ անհավասարությունները՝ կստանանք } \frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1}$$

անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝

$$a_n \leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_n \quad n=1,2,\dots:$$

Այնուհետև կիրառենք զուգամետ շարքերի 4-րդ հատկությունը և բաղդատման առաջին հայտանիշը: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմը մնում է ուժի մեջ նաև այն դեպքում, եթե (2.3) անհավասարությունը բավարարվում է՝ սկսած որոշ համարից:

**Օրինակներ:** 1) Հարմոնիկ շարքերի հետ համեմատությունը հնարավորություն է տալիս անմիջական եզրակացություն անել բազմաթիվ շարքերի վարքի վերաբերյալ: Ըստ թեորեմ 2.1-ի՝

$$\text{ա) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty, \text{ եթե } s < 1, \text{ քանի որ } \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}:$$

$$\text{բ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \infty, \text{ քանի որ } \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}:$$

$$\text{գ) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \infty, \text{ քանի որ } \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}:$$

$$\text{դ) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} = \infty, \text{ քանի որ } (\ln n)^p < n, \text{ եթե } n > n_0:$$

$$\text{ե) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty, \text{ քանի որ } \frac{n!}{n^n} < \frac{2}{n^2}, \text{ եթե } n > 3:$$

$$\text{զ) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \infty, \text{ քանի որ } \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}, \text{ եթե } n > n_0:$$

$$\text{թ) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} < \infty, \text{ քանի որ } \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln \ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}, \text{ եթե } n > n_0:$$

$$\text{ը) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln \ln n)^{\ln n}} = \infty, \text{ քանի որ } \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}:$$

Ըստ թեորեմ 2.2-ի՝

ա)  $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(a+bn)^s}$  շարքը ( $b > 0$ ) զուգամետ է, եթե  $s > 1$  և տարամետ է,

եթե  $s \leq 1$  : Իլուր.

$$\frac{1}{(a+bn)^s} : \frac{1}{n^s} \rightarrow \frac{1}{b^s} :$$

բ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{n}} n} = \infty$ , քանի որ  $\frac{1}{n^{\frac{n}{n}}} : \frac{1}{n} \rightarrow 1$  :

գ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{n} = \infty$  ( $0 < x < \pi$ ), քանի որ  $\sin \frac{x}{n} : \frac{1}{n} \rightarrow x$  :

դ)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) = \infty$  ( $x > 0$ ), քանի որ  $\ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right) : \frac{1}{n} \rightarrow x$  :

ե)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{x}{n} \right) < \infty$ , քանի որ  $\left( 1 - \cos \frac{x}{n} \right) : \frac{1}{n^2} \rightarrow \frac{x^2}{2}$  :

### 3. Եյլերի բանաձևը: Նշանակենք՝

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} :$$

Ապացուցենք հետևյալ բանաձևը՝

$$H_n = \ln n + C + \gamma_n, \quad (2.4)$$

որտեղ  $\gamma_n \rightarrow 0$ ,  $0 < C < \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$ :

Լազրանմի վերջավոր աճերի բանաձևի համաձայն՝

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n+\theta}, \quad 0 < \theta < 1 :$$

Հետևաբար,

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} : \quad (2.5)$$

Այժմ դիտարկենք

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) \quad (2.6)$$

շարքը: (2.5)-ի համաձայն՝

$$0 < \frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1};$$

Հետևաբար, (2.6) շարքը դրական է և զուգամետ: Եթե նրա գումարը նշանակենք  $C$ -ով, ապա կստանանք՝

$$H_n - \ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right) \rightarrow C,$$

ինչը համարժեք է (2.4)-ին:

Ըստեղողին առաջարկում ենք հաշվել  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  գումարը՝ օգտվելով

Էյլերի (2.4) բանաձևից:

#### 4. Կոչիի թեորեմն մոնուռն շարքերի վերաբերյալ:

**Թեորեմ 2.4:** Եթե  $a_n$  հաջորդականությունը մոնուռն նվազելով ձգուում է 0-ի, ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  և  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  շարքերը զուգամիտում են միաժամանակ:

► Իրոք, մենք զիտենք, որ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքի զուգամիտությունը համարժեք է:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + \\ + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) + \cdots \end{aligned}$$

Խմբավորված շարքի զուգամիտությանը:

Մյուս կողմից, օգտվելով  $a_n$  հաջորդականության մոնուռնությունից, կստանանք

$$2^k \cdot a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1} \leq 2^k \cdot a_{2^k}$$

զնահատականները:

Մնում է օգտվել բարդատման առաջին հայտանիշից: ■

**Օրինակներ:**

ա)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  շարքը տարամետ է, քանի որ

$$2^k \cdot a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln 2^k} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{k};$$

բ)  $s > 1$  դեպքում  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$  շարքը զուգամետ է, քանի որ

$$2^k \cdot a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k (\ln 2^k)^s} = \frac{1}{(\ln 2)^s} \cdot \frac{1}{k^s};$$

գ) Դիտարկենք  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^s}$  շարքը: Ուսնենք, որ\*

$$2^k \cdot a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln 2^k \cdot (\ln \ln 2^k)^s} \sim \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{k(\ln k)^s};$$

Հետևաբար, հաշվի առնելով նախորդ երկու օրինակները, բաղդատման երկրորդ հայտանիշից հետևում է, որ շարքը զուգամետ է, եթե  $s > 1$ , և տարամետ՝ եթե  $s \leq 1$ :

**5. Կոչիի և Ռալմբերի հայտանիշներ:**

**Թեորեմ 2.5 (Կոչիի հայտանիշը):** Դիցուք  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը դրական է և

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} =: K : Uյու դեպքում՝$$

ա) եթե  $K < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամետ է,

բ) եթե  $K > 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը տարամետ է:

\*  $x_n \sim y_n$  սիմվոլը նշանակում է, որ  $x_n = \alpha_n y_n$ , որտեղ  $\alpha_n \rightarrow 1$ : Այն դեպքում, եթե  $y_n \neq 0$ ,

նշված պայմանը համարժեք է.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$  առնչությանը:

► ա) Վերցնենք  $K < q < 1$  պայմանին բավարարող որևէ  $q$  թիվ: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $n_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $n > n_0$  դեպքում տեղի ունենա  $\sqrt[n]{a_n} < q$  անհավասարությունը կամ, որ նույնն է՝

$$a_n < q^n, \quad n > n_0:$$

Մնում է օգտվել բաղդատման առաջին հայտանիշից:

բ) Դիցուք  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}}$  ենթահաջորդականությունը ձգտում է  $K$ -ի և  $K > 1$ : Այդ դեպքում ի վերջո բավարարվում է  $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1$  անհավասարությունը, ինչը համարժեք է

$$a_{n_k} > 1$$

անհավասարությանը, եթե  $k > k_0$ : Այսպիսով, խախտվում է զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը՝  $a_n \rightarrow 0$ : Հետևաբար, շարքը տարամետ է: ■

**Օրինակներ:**

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \text{շարքը զուգամետ է, քանի որ}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} < 1:$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n \quad (x > 0) \text{ շարքը զուգամետ է, քանի որ} \sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{n} \rightarrow 0 < 1:$$

$$3) \text{Դիտարկենք} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} \text{ շարքը, որտեղ } x > 0: \text{Քանի որ}$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^s} \rightarrow x,$$

ապա  $0 < x < 1$  դեպքում շարքը զուգամետ է, իսկ  $x > 1$  դեպքում՝ տարամետ: Եթե  $x = 1$ , ստանում ենք  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  հարմոնիկ շարքը, որի վարքն արդեն

կախված է  $s$ -ի արժեքից. եթե  $s > 1$ , այն զուգամետ է, եթե  $s \leq 1$ ՝ տարամետ է: Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ եթե  $K = 1$ , շարքը կարող է լինել թե' զուգամետ, թե' տարամետ:

**Թեորեմ 2.6 (Դալամբերի հայտանիշը):** Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  դրական շարքի

համար գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$$

սահմանը, ապա

ա)  $D < 1$  դեպքում շարքը զուգամետ է,

բ)  $D > 1$  դեպքում շարքը տարամետ է:

► ա) Դիցուք  $D < q < 1$ : Այդ դեպքում, սկսած որոշ համարից՝  $n > n_0$ ,

տեղի ունեն

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q = \frac{q^{n+1}}{q^n}$$

անհավասարությունները: Մնում է կիրառել բաղդատման երրորդ հայտանիշը:

բ) դեպքում, սկսած որոշ համարից՝  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ : Դա նույնն է, որ  $a_{n+1} > a_n$ ,

այսինքն՝ խախտվում է շարքի զուգամիտության անհրաժեշտ պայմանը՝  $a_n \rightarrow 0$ : Հետևաբար, շարքը տարամետ է: ■

**Օրինակներ:** 1)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  շարքը զուգամետ է ( $x > 0$ ), քանի որ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0:$$

2) Դիտարկենք  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$  շարքը ( $x > 0$ ): Այս դեպքում

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = x \left( \frac{n}{n+1} \right)^s \rightarrow x:$$

Հետևաբար, եթե  $0 < x < 1$ , շարքը զուգամետ է, իսկ եթե  $x > 1$ , շարքը տարամետ է: Եթե  $x = 1$ , ստանում ենք  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$  հարմոնիկ շարքը, որը զուգամետ է, եթե  $s > 1$  և տարամետ է, եթե  $s \leq 1$ : Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ եթե  $D = 1$ , շարքը կարող է լինել թե' զուգամետ, և թե' տարամետ:

**Թեորեմ 2.6'** (**Դալամբերի հայտանիշի ընդհանուր ձևակերպումը**):

*Դիցուք՝  $a_n \geq 0$  : Այդ դեպքում*

*ա) եթե  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը զուգամետ է;*

*բ) եթե  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը տարամետ է:*

Ապացուցվում է նախորդ թեորեմի դատողություններով:

**Թեորեմ 2.7** (**Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշների համեմատումը**):

Յուրաքանչյուր  $a_n$  դրական հաջորդականության համար ճիշտ են  
հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}:$$

► Ապացուցենք, օրինակ, երկրորդը: Այդ նպատակով նշանակենք  $D = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  և ենթադրենք, որ  $D < +\infty$  ( $D = +\infty$  դեպքում անհավասարությունն ակնհայտ է):

Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Այդ դեպքում գոյություն ունի  $n_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < D + \varepsilon$ , եթե  $n \geq n_0$  կամ, որ նոյնն է՝

$$a_{n+1} < (D + \varepsilon)a_n, \text{ եթե } n \geq n_0:$$

Կամայական  $n > n_0$  թվի համար  $(n - n_0)$  անգամ կիրառելով այս անհավասարությունը, կստանանք

$a_n < (D + \varepsilon)a_{n-1} < (D + \varepsilon)^2 a_{n-2} < \dots < (D + \varepsilon)^{n-n_0} \cdot a_{n_0}$   
անհավասարությունները կամ, որ նույնն է՝

$$\sqrt[n]{a_n} < (D + \varepsilon) \cdot \sqrt[n]{a_{n_0} \cdot (D + \varepsilon)^{-n_0}} :$$

Հետևաբար՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq D + \varepsilon :$$

Մնում է հիշել, որ  $\varepsilon$ -ը կամայական էր: ■

Այս թեորեմը ցույց է տալիս, որ Դալամբերի հայտանիշը Կոչիի հայտանիշից ուժեղ չէ\*: Հետևյալ օրինակով կարելի է համոզվել, որ Կոչիի հայտանիշն ավելի ուժեղ է.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

շարքի համար ունեն՝

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n = +\infty, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0;$$

Այսուել Կոչիի հայտանիշը ցույց է տալիս, որ շարքը զուգամետ է, իսկ Դալամբերի հայտանիշը պատասխան չի տալիս:

### 6. Ռարեի հայտանիշը:

**Թեորեմ 2.8:** Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  դրական շարքի համար զոյլորյուն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = R$$

սահմանը\*\*, ապա

- ա)  $R > 1$  դեպքում շարքը զուգամետ է,
- բ)  $R < 1$  դեպքում շարքը տարամետ է:

\* Սակայն գործնականում ավելի հարմար է օգտվել Դալամբերի հայտանիշից:

\*\* Կամ  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = R$  սահմանը:

► ա) Վերցնենք  $s$  և  $r$  թվերն, այնպիսիք, որ  $1 < s < r < R$ : Այդ դեպքում գոյություն ունի  $n_1$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) > r, \text{ եթե } n > n_1,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 - \frac{r}{n}, \text{ եթե } n > n_1: \quad (2.7)$$

Այսու կողմից՝

$$\frac{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} \rightarrow s < r:$$

Հետևաբար, գոյություն ունի  $n_2$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$\frac{\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^s - 1}{-\frac{1}{n}} < r, \text{ եթե } n > n_2,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^s > 1 - \frac{r}{n}, \text{ եթե } n > n_2: \quad (2.8)$$

Վերցնելով  $n > \max\{n_1, n_2\}$ ՝ (2.7) և (2.8) անհավասարություններից կստանանք

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left( \frac{n-1}{n} \right)^s = \frac{\frac{1}{n^s}}{\frac{1}{(n-1)^s}}$$

զնահատականը: Այժմ մնում է կիրառել բաղդատման երրորդ հայտանիշը:

բ) Դիցուք՝

$$n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) < 1, \text{ եթե } n > n_0,$$

կամ, որ նույնն է՝

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}}, \quad n > n_0;$$

Բաղդատման երրորդ հայտանիշի համաձայն, շարքը տարամետ է (համեմատում ենք  $\sum \frac{1}{n-1}$  շարքի հետ): ■

**Օրինակներ:**

- 1) Դժվար չէ ստուգել, որ  $\sum \frac{1}{n}$  և  $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$  երկու շարքերի համար էլ՝  $R = 1$ , բայց նրանցից մեկը զուգամետ է, մյուսը՝ տարամետ:

2) Դիտարկենք  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$  շարքը, եթե  $x > 0$ : Քանի

$$\text{որ } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{x+n+1}, \text{ ուստի}$$

$$n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n \left(1 - \frac{n+1}{x+n+1}\right) = n \frac{x}{x+n+1} \rightarrow x :$$

Եթե  $x > 1$ , շարքը զուգամետ է, իսկ եթե  $0 < x < 1$ , շարքը տարամետ է:  $x = 1$  դեպքում ստուգվում է տարամետ հարմոնիկ շարքը:

3)  $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$  շարքը զուգամետ է, քանի որ  $R = \frac{3}{2}$ :

### 7. Կոշիի ինտեգրալային հայտանիշը:

Դիցուք  $f(x)$  ֆունկցիան որոշված է  $[a, \infty)$  միջակայքում և ինտեգրելի է յուրաքանչյուր  $[a, A]$  վերջավոր հատվածում: Դիտարկենք

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx \tag{2.9}$$

սահմանը: Եթե այդ սահմանը գոյություն ունի, ապա այն կոչվում է  $f(x)$  ֆունկցիայի անիսկական ինտեգրալ և նշանակվում է

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \quad (2.10)$$

սիմվոլով: Եթե այդ սահմանը վերջավոր է, ապա (2.10) անխակական ինտեգրալը կոչվում է *զուգամետ*, հակառակ դեպքում այն կոչվում է *տարամետ*: (2.10) անխակական ինտեգրալը տարամետ է կոչվում նաև այն դեպքում, եթե (2.9) սահմանը գոյություն չունի:

### Օրինակներ:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty, \text{քանի} \text{որ} \int_1^A \frac{dx}{x} = \ln A \rightarrow +\infty, \text{եթե} \ A \rightarrow +\infty :$$

$$2) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} \text{ անխակական ինտեգրալը} \quad s > 1 \quad \text{դեպքում} \text{ զուգամետ} \text{ է, իսկ}$$

$s \leq 1$  դեպքում՝ տարամետ:

Այժմ ձևակերպենք դրական շարքերի զուգամիտության ինտեգրալային հայտանիշը:

**Թեորեմ 2.9:** Կիցոք  $f(x)$  ֆունկցիան նվազող է  $[1, \infty)$  միջակայքում և  $f(n) = a_n, n=1,2,\dots$ : Այդ դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

շարքը և

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \quad (2.10')$$

անխակական ինտեգրալը զուգամիտում են միաժամանակ<sup>\*</sup>:

► Ունենք՝

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k, \quad k=1,2,\dots,n : \quad (2.11)$$

Գումարելով այս անհավասարությունները՝ կստանանք

\* Բովանդակալից է այն դեպքը, եթե  $a_n \downarrow 0$ :

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (2.12)$$

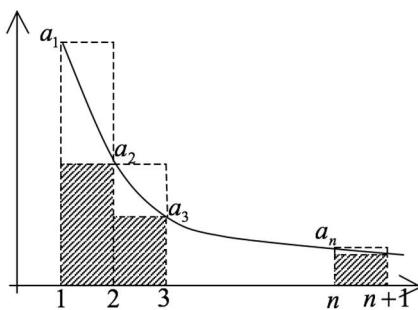
զնահատականները: Մյուս կողմից,

$$F(A) = \int_1^A f(x) dx$$

ֆունկցիան աճող է ( $f(x) > 0$ ), հետևաբար, այն կունենա վերջավոր սահման ((2.10) անխսկական ինտեգրալը կինի զուգամետ) այն և միայն այն դեպքում, եթե

$$F(n+1) = \int_1^{n+1} f(x) dx$$

հաջորդականությունը սահմանափակ է: Իսկ (2.12) անհավա-սարությունները ցոյց են տալիս, որ այդ հաջորդականության սահմանափակ լինելը համարժեք է  $\sum a_n$  շարքի զուգամիտությանը: ■



Ինտեգրալային հայտանիշն ունի պարզ երկրաչափական մեկնաբանում. դիտարկենք  $y = f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկը և որպես անխսկական ինտեգրալի արժեք պատկերացնենք  $f(x)$  ֆունկցիայի գրաֆիկով սահմանափակված կորագիծ սեղանի (աջից անսահմանափակ) մակերեսը: Այդ դեպքում ստվերագծված ուղղանկյունների մակերեսների գումարը կներկայացնի  $a_2 + a_3 + \cdots$  շարքի գումարը, իսկ  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$  շարքի գումարը կներկայացնի մեծ ուղղանկյունների մակերեսների գումարը (որը նախորդից տարբերվում է  $a_1$ -ով):

### Լրացումներ:

ա) Օգտագործելով (2.11) անհավասարությունները՝ կարող ենք զնահատել զուգամետ շարքի առջը:

Իրոք, (2.11) անհավասարությունը գրելով՝  $k = n, n+1, \dots, n+m$  արժեքների համար, և զումարելով ստացված անհավասարությունները, կստանան՝

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m+1} \leq \int_n^{n+m+1} f(x) dx \leq a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}:$$

Այստեղ  $m$ -ը ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք

$$\gamma_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx \leq \gamma_{n-1}$$

գմահատականները, որտեղ  $\gamma_n$ -ը շարքի պոչն է՝  $\gamma_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$ :

Այսպիսով՝

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x) dx \leq \gamma_n \leq \int_n^{\infty} f(x) dx : \quad (2.13)$$

Որպես օրինակ, գմահատենք  $\sum \frac{1}{n^s}$  ( $s > 1$ ) հարմոնիկ շարքի պոչը:

Ուսնենք՝

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_n^{\infty} = \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} :$$

Հետևաբար, (2.13)-ի համաձայն, կստանանք՝

$$\frac{1}{(s-1)(n+1)^{s-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \leq \frac{1}{(s-1)n^{s-1}} :$$

բ) Եյլերի քանաձնի ընդհանրացումը: Դիցուք քավարարված են ինտեգրալային հայտանիշի պայմանները և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$  ( $a_n \downarrow 0$ ):

Դիտարկենք հետևյալ շարքը

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_k - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] : \quad (2.14)$$

(2.11)-ի համաձայն՝

$$0 \leq a_k - \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k - a_{k+1} :$$

Քանի որ  $a_n \downarrow 0$ , ուստի (2.14) շարքը զուգամետ է և, այդ շարքի գումարը նշանակելով  $C$ , կունենանք՝

$$\sum_{k=1}^n a_k - \int_1^{n+1} f(x)dx = \sum_{k=1}^n \left[ a_k - \int_k^{k+1} f(x)dx \right] \rightarrow C :$$

Այսպիսով՝

$$\sum_{k=1}^n a_k = \int_1^{n+1} f(x)dx + C + \gamma_n, \text{ որտեղ } \gamma_n \rightarrow 0, \quad (2.15)$$

ըստ որում,  $C \leq a_1$ :

$$(2.15) - \text{ ում վերցնելով } f(x) = \frac{1}{x}, \text{ հանգում ենք Էյլերի (2.4) բանաձևին:}$$

**8. Արելի թեորեմը մոնուռն շարքերի մերաքերյալ:**

**Թեորեմ 2.10:** Եթե  $a_k$  հաջորդականությունը նվազելով ձգուում է զրոյի և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ , ապա

$$na_n \rightarrow 0 :$$

► Կոչիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  քվի համար գոյություն ունի  $m$  բնական, թիվ այնպիսին, որ

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ եթե } n > m :$$

Մյուս կողմից, քանի որ  $a_n$  հաջորդականությունը նվազող է, ապա

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n :$$

Հետևաբար,

$$na_n < \frac{n}{n-m} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ եթե } n > 2m : \blacksquare$$

Հակաօրինակներ:

1)  $\sum \frac{1}{n \ln n}$  շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ Արելի թեորեմի հակադարձ պնդումը ճիշտ չէ: Այսինքն՝ չնայած, որ  $a_k \downarrow 0$  և  $na_n \rightarrow 0$ , բայց շարքը տարամետ է:

2) Դիտարկենք հետևյալ շարքը.

$$1 + 0 + 0 + \frac{1}{2^2} + 0 + \dots + 0 + \frac{1}{3^2} + 0 + \dots,$$

որի անդամները որոշվում են

$$a_n = \begin{cases} 1/k^2, & \text{եթե } n = k^2, \\ 0, & \text{եթե } n \neq k^2 \end{cases}$$

բանաձևով: Այս դեպքում

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

բայց  $na_n$ -ը չի ձգտում 0-ի:

### 9. Արել - Դինիի թեորեմները:

**Թեորեմ 2.11:** Հիցոր ցանկան քվերի հաջորդականություն է և  $D_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n : \text{Եթե } \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \infty, \text{ ապա}$

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n} = \infty,$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}} < \infty, \text{ յուրաքանչյուր } \sigma > 0 \text{ քվի համար:}$$

► а) Ֆիքսած  $m$ -ի դեպքում ունենք՝

$$\frac{d_{m+1}}{D_{m+1}} + \frac{d_{m+2}}{D_{m+2}} + \dots + \frac{d_{m+n}}{D_{m+n}} \geq \frac{D_{m+n} - D_m}{D_{m+n}} = 1 - \frac{D_m}{D_{m+n}} > \frac{1}{2},$$

որտեղ վերջին անհավասարությունը բավարարվում է բավականաչափ մեծ  $n$ -երի համար ( $D_{m+n} \rightarrow \infty$ ): Հետևաբար, Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, а) շարքը տարամետ է:

թ)  $f(x) = x^{-\sigma}$  ֆունկցիայի համար  $[D_{n-1}, D_n]$  հատվածում կիրառելով Լազանմի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$\frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma} = \sigma \frac{d_n}{c^{1+\sigma}} > \sigma \frac{d_n}{D_n^{1+\sigma}}$$

զնահատականը, որտեղ  $D_{n-1} < c < D_n$ :

Քանի որ  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{D_{n-1}^\sigma} - \frac{1}{D_n^\sigma} \right) < \infty$ , ապա բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, թ) շարքը նույնպես զուգամետ է: ■

**Թեորեմ 2.12:** Հիցոր ց  $c_n$ -ը դրական թվերի հաջորդականություն է և  $\gamma_n = c_{n+1} + c_{n+2} + \dots$ : Եթե  $\sum c_n < \infty$ , ապա

$$w) \sum \frac{c_n}{\gamma_{n-1}} = \infty,$$

p)  $\sum \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}} < \infty$ , յուրաքանչյուր  $\sigma \in (0, 1)$  թվի համար:

► ա) Ֆիբոնաչի մեջ դեպքում ունենք՝

$$\frac{c_{m+1}}{\gamma_m} + \frac{c_{m+2}}{\gamma_{m+1}} + \dots + \frac{c_{m+n}}{\gamma_{m+n-1}} \geq \frac{\gamma_m - \gamma_{m+n}}{\gamma_m} = 1 - \frac{\gamma_{m+n}}{\gamma_m} > \frac{1}{2},$$

եթե  $n$ -ը բավականաշափ մեծ է ( $\gamma_{m+n} \rightarrow 0$ ): Հետևաբար, Կոչիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, ա) շարքը տարամետ է:

թ)  $f(x) = x^\sigma$  ֆունկցիայի համար  $[\gamma_n, \gamma_{n-1}]$  հատվածում կիրառելով Լազանմի վերջավոր աճերի բանաձևը՝ կստանանք

$$\gamma_{n-1}^\sigma - \gamma_n^\sigma = \sigma \frac{c_n}{c^{1-\sigma}} > \sigma \frac{c_n}{\gamma_{n-1}^{1-\sigma}}$$

զնահատականը, որտեղ  $\gamma_n < c < \gamma_{n-1}$ :

Քանի որ  $\sum_{n=2}^{\infty} (\gamma_{n-1}^\sigma - \gamma_n^\sigma) < \infty$ , ապա բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն, թ) շարքը նույնպես զուգամետ է: ■

**Դիտողություն:** Թեորեմ 2.12-ի բ) պնդման մեջ  $\gamma_{n-1}$ -ը չի կարելի փոխարինել  $\gamma_n$ -ով: Ըստեցողին առաջարկում ենք համոզվել դրանում, վերցնելով, օրինակ՝  $c_n = 1/n^n$ :

### §3. ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇԱՐՔԵՐ

Եթե շարքի բացասական անդամների քանակը վերջավոր է, ապա, այդ անդամները դեմ գցելով (ինչը չի ազդի շարքի վարքի վրա), կստանանք դրական շարք, որն արդեն ուսումնասիրել ենք: Իսկ եթե շարքի դրական անդամների քանակն է վերջավոր, ապա շարքի բոլոր անդամները բազմապատկելով (-1)-ով, հարցող կրերենք նախորդ դեպքին: Այսպիսով, մեզ մնում է ուսումնասիրել այնպիսի շարքերը, որոնցում թե՛ դրական, և թե՛ բացասական անդամների քանակն անվերջ է: Այդպիսի շարքերից պարզագույններն, այսպես կոչված, նշանափոխ շարքերն են:

**1. Նշանափոխ շարքեր:** Նշանափոխ են կոչվում հետևյալ տիպի շարքերը՝

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots + (-1)^{n-1} c_n + \cdots \quad (c_n > 0); \quad (3.1)$$

**Թեորեմ 3.1 (Լայքնից):** Եթե  $c_n$  հաջորդականությունը նվազելով ձգուում է 0 -ի՝  $c_n \downarrow 0$ , ապա (3.1) շարքը զուգամես է:

► Չույզ կարգի մասնակի զումարների  $C_{2m}$  հաջորդականությունը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$C_{2m} = (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2m-1} - c_{2m}):$$

Հետևաբար,  $C_{2m}$  հաջորդականությունը աճող է:

Մյուս կողմից,

$$C_{2m} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m-2} - c_{2m-1}) - c_{2m} < c_1:$$

Մոնուռն հաջորդականությունների վերաբերյալ թեորեմի համաձայն,  $C_{2m}$  հաջորդականությունը զուգամես է՝

$$C_{2m} \uparrow C: \quad (3.2)$$

Կենսությունը  $C_{2m+1}$  մասնակի զումարի համար ունինք

$$C_{2m+1} = C_{2m} + c_{2m+1} \rightarrow C : \quad (3.3)$$

Թե՛ղբեմի պնդումը թիում է (3.2) և (3.3) առնչություններից: ■

**Լրացում:** Կենտ կարգի  $C_{2m+1}$  մասնակի գումարը ներկայացնելով հետևյալ տեսքով՝

$$C_{2m+1} = c_1 - (c_2 - c_3) - \cdots - (c_{2m} - c_{2m+1}),$$

մենք համոզվում ենք, որ  $C_{2m+1} \downarrow C$ : Այսպիսով,

$$0 < C_{2m} < C < C_{2m+1} < c_1;$$

Այս գնահատականը հնարավորություն է տալիս գնահատել լայրնիցյան շարքի պոչը՝

$$\gamma_n = (-1)^n c_{n+1} + (-1)^{n+1} c_{n+2} + \cdots = (-1)^n (c_{n+1} - c_{n+2} + \cdots) \quad (c_n \downarrow 0):$$

Քանի որ  $c_{n+1} - c_{n+2} + \cdots$  շարքն իր հերթին նշանափոխ շարք է, հետևաբար,

$$\operatorname{sgn} \gamma_n = (-1)^n, \quad |\gamma_n| < c_{n+1}:$$

## 2. Բացարձակ և պայմանական գուգամիտություն:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (3.4)$$

շարքը կոչվում է բացարձակ գուգամետ, եթե

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (3.5)$$

շարքը գուգամետ է:

**Թեորեմ 3.2 (Կոշի):** Բացարձակ գուգամետ շարքը գուգամետ է:

► Վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ: Քանի որ (3.5) շարքը գուգամետ է, ապա Կոշիի գուգամիտության սկզբունքի համաձայն, գոյություն ունի  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots :$$

Մյուս կողմից, ունենք՝

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_{n+m}| < \varepsilon, \quad n > N :$$

Այժմ, օգտվելով Կոշիի պայմանի բավարարությունից, կստանանք, որ (3.4) շարքը զուգամետ է: ■

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ շարքի օրինակը ցույց է տալիս, որ կան շարքեր, որոնք}$$

զուգամետ են, բայց շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքը տարամետ է: Այդպիսի շարքերը կոչվում են **պայմանական զուգամետ շարքեր**:

Եթե շարքի բացասական (կամ դրական) անդամների քանակը վերջավոր է, ապա այդ շարքը և նրա անդամների մոդուլներից կազմած շարքը զուգամիտում են միաժամանակ: Այդ պատճառով պայմանական զուգամետ շարքի թե՛ դրական, և թե՛ բացասական անդամների քանակն անվերջ է:

Այժմ ենթադրենք, որ (3.4) շարքի թե՛ դրական, և թե՛ բացասական անդամների քանակն անվերջ է և (3.4) շարքի դրական անդամներից կազմենք նոր շարք՝

$$p_1 + p_2 + \cdots, \quad (3.6)$$

պահպանելով (3.4) շարքի մեջ այդ անդամների հանդիպման հերթականությունը: Բացասական անդամների մոդուլներից կազմենք մեկ այլ շարք՝

$$q_1 + q_2 + \cdots : \quad (3.7)$$

Եթե (3.4), (3.5), (3.6) և (3.7) շարքերի մասնակի զումարները նշանակենք համապատասխանաբար  $A_n$ ,  $A_n^*$ ,  $P_n$  և  $Q_n$ , իսկ զումարները՝  $A$ ,  $A^*$ ,  $P$ ,  $Q$ , ապա կունենանք՝

$$A_n = P_k - Q_m, \quad A_n^* = P_k + Q_m : \quad (3.8)$$

Հետևաբար, եթե (3.4) շարքը բացարձակ զուգամետ է (այսինքն՝ (3.5) շարքը զուգամետ է՝  $A_n^* \rightarrow A^*$ ), ապա (3.6) և (3.7) դրական շարքերը զուգամետ են, որովհետև  $P_k^*, Q_m^* \leq A_n^* \leq A^*$ : (3.8) հավասարություններում անցնելով սահմանի՝ կստանանք  $A = P - Q$ ,  $A^* = P + Q$ :

Իսկ եթք (3.4) շարքը պայմանական զուգամետ է ( $A_n \rightarrow A$  (վերջավոր),  $A_n^* \rightarrow +\infty$ ), ապա (3.6) և (3.7) շարքերը երկուսն էլ տարածեն են: Եթոք, եթե նրանցից մեկը լինի զուգամետ՝  $P_k \rightarrow P$  (վերջավոր), ապա  $Q_m = P_k - A_n$  հաջորդականությունը նույնպես կունենա վերջավոր սահման, ինտևաբար,  $A_n^* = P_k + Q_m$  հաջորդականությունը նույնպես կունենա վերջավոր սահման, ինչը հակասում է  $A_n^* \rightarrow +\infty$  պայմանին:

### 3. Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշներն ընդհանուր դեպքում: Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

ընդհանուր շարքը: Այս դեպքում Կոշիի հայտանիշը ձևակերպելու համար նշանակենք՝

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K^* :$$

Ճշմարիտ են հետևյալ պնդումները.

ա) Եթե  $K^* < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը բացարձակ զուգամետ է:

բ) Եթե  $K^* > 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը տարամետ է:

Այս պնդումներն ապացուցելու համար ուղղակի կիրառում ենք Կոշիի հայտանիշը  $\sum |a_n|$  շարքի համար: Մնում է նկատել, որ բ) դեպքում

$|a_n| \rightarrow 0$ , հետևաբար,  $a_n \rightarrow 0$ , հետևաբար,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը տարամետ է:

Դալամբերի հայտանիշը ձևակերպելու համար, ենթադրենք, որ գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = D^*$$

սահմանը: Այդ դեպքում,

ս) Եթե  $D^* < 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը բացարձակ զուգամետ է:

թ) Եթե  $D^* > 1$ , ապա  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը տարամետ է:

Այստեղ կրկին թ) դեպքում՝  $|a_n| \rightarrow 0$ :

Ինչպես դրական շարքերի դեպքում, այնպես էլ ընդհանոր շարքերի դեպքում Դալամբերի հայտանիշը կարելի է ձևակերպել վերին և ստորին սահմանների լեզվով:

Այժմ դիտարկենք օրինակներ.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} :$$

Այս դեպքում  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow |x|$ ,  $D^* = |x|$ , հետևաբար, շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե  $|x| < 1$ , տարամետ է, եթե  $|x| > 1$ : Եթե  $|x| = 1$ , ապա  $x = 1$  կետում շարքը զուգամետ է, որպես լայնիցյան շարք, իսկ  $x = -1$  կետում շարքը տարամետ է, որպես հարմոնիկ շարք:

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե  $|x| < 1$ , իսկ եթե  $|x| = 1$ , շարքը պայմանական զուգամետ է:$$

$$3) \sum n! \left( \frac{x}{n} \right)^n շարքի համար  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n} \rightarrow \frac{|x|}{e}$ ,  $D^* = \frac{|x|}{e}$  :$$

Եթե  $|x| < e$ , ապա շարքը բացարձակ զուգամետ է, եթե  $|x| > e$ , շարքը տարամետ է, իսկ  $|x| = e$  դեպքում՝  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$ , հետևաբար՝  $a_n \not\rightarrow 0$ , ուստի շարքը տարամետ է:

**4. Արելի և Դիրիխլեի հայտանիշներ:** Այս կետը նվիրված է

$$\sum a_n b_n$$

տեսքի շարքերի ուսումնասիրությանը: Այդ հարցում կարեղոր դեր է խաղում Արելի ձևակողմությունը՝

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n^{(p)} (b_n - b_{n+1}) + A_q^{(p)} b_q, \quad (3.9)$$

որտեղ  $A_n^{(p)} = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$ ,  $p \leq n \leq q$ :

(3.9) հավասարությունն ապացուելու համար ձախ կողմի գումարի մեջ տեղադրենք՝  $a_p = A_p^{(p)}$ ,  $a_n = A_n^{(p)} - A_{n-1}^{(p)}$ ,  $p < n \leq q$ : Կատացվի

$$\sum_{n=p}^q a_n b_n = A_p^{(p)} b_p + (A_{p+1}^{(p)} - A_p^{(p)}) b_{p+1} + \dots + (A_q^{(p)} - A_{q-1}^{(p)}) b_q$$

հավասարությունը, որի աջ կողմում բացելով փակագծերը և վերախմբավորելով ստացվածը, կհանգենք (3.9) հավասարությանը:

**Թեորեմ 3.3 (Դիրիխլի հայտանիշը):** Եթե

ա)  $\sum a_n$  շարքի մասնակի գումարների  $A_n$  հաջորդականությունը սահմանափակէ,

$$p) b_n \downarrow 0,$$

ապա  $\sum a_n b_n$  շարքը զուգամետ է:

**Թեորեմ 3.4 (Արելի հայտանիշը):** Եթե

ա)  $\sum a_n$  շարքը զուգամետ է,

$$p) b_n \text{ հաջորդականությունը մոնուռն է և սահմանափակ},$$

ապա  $\sum a_n b_n$  շարքը զուգամետ է:

► Դիրիխլի հայտանիշի ապացույցը: Դիցուք՝  $|A_n| \leq M$ , այդ դեպքում

$$|A_n^{(p)}| \leq 2M : \text{Հետևաբար, (3.9)-ից կունենանք՝}$$

$$\left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| \leq 2M b_p, \quad (3.10)$$

քանի որ  $b_n - b_{n+1} \geq 0$ ,  $(b_p - b_{p+1}) + (b_{p+1} - b_{p+2}) + \dots + (b_{q-1} - b_q) + b_q = b_p$ :

Այժմ վերցնենք կամայական  $\varepsilon > 0$  թիվ:  $b_n \rightarrow 0$  պայմանի համաձայն, գոյություն ունի  $p_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$p > p_0 \Rightarrow b_p < \varepsilon / 2M :$$

Ոստի, հաշվի առնելով (3.10)-ը, կստանանք՝

$$p > p_0 \Rightarrow \left| \sum_{n=p}^q a_n b_n \right| < \varepsilon :$$

Մնում է կիրառել Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:

*Աբելի հայտանիշի ապացույցը:* Աբելի հայտանիշն ապացուցելու համար ենթադրենք՝  $b_n \downarrow b$  (հակառակ դեպքում  $\sum a_n b_n$  շարքի բոլոր անդամները կրազմապատկենք  $(-1)$ -ով), ինչը չի ազդում շարքի վարքի վրա):

$$\sum a_n b_n \text{ շարքի ընդհանուր անդամը ներկայացնենք}$$

$$a_n b_n = a_n (b_n - b) + a_n b$$

տեսքով:

Քանի որ  $\sum a_n (b_n - b)$  շարքը բավարարում է Դիրիխլեի հայտանիշի պայմաններին, ապա այն զուգամետ է:  $\sum a_n b_n$  շարքի զուգամիտությունն ապացուցելու համար մնում է օգտվել զուգամետ շարքերի  $4^0$  և  $5^0$  հատկություններից: ■

*Դիրիխլեի հայտանիշից բխեցնենք Լայրնիցի թեորեմը:* Ունենք  $\sum (-1)^{n-1} b_n$  շարքը, որտեղ  $b_n \downarrow 0$ : Ապացուցենք, որ այն զուգամետ է: Վերցնենք  $a_n = (-1)^{n-1}$ : Քանի որ  $\sum a_n$  շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ է, ինտեղաբար, կարող ենք կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը:

Ներկայացնենք Դիրիխլեի հայտանիշի մեկ այլ կիրառություն.

**Թեորեմ 3.5:** Եթե  $b_n \downarrow 0$ , ապա  $\sum b_n \sin nx$  և  $\sum b_n \cos nx$  շարքերը զուգամետ են, եթե  $x \neq 2\pi k$ ,  $k \in Z$  (դժվար չէ նկատել, որ առաջին շարքը զուգամետ է նաև այդ կետերում):

► Որպեսզի կարողանանք կիրառել Դիրիխլեի հայտանիշը, պեսք է ցույց տանք, որ  $\sum \sin nx$  և  $\sum \cos nx$  շարքերի մասնակի գումարների

հաջորդականությունները սահմանափակ են: Սահմանափակվենք առաջինով.

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx &= \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left( 2 \sin x \sin \frac{x}{2} + 2 \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \cdots + 2 \sin nx \sin \frac{x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \left[ \left( \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3}{2}x \right) + \left( \cos \frac{3}{2}x - \cos \frac{5}{2}x \right) + \cdots + \right. \\ &\quad \left. + \left( \cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left( \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right); \end{aligned}$$

Հետևաբար,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|},$$

ինչ և պետք էր ապացուցել: ■

#### §4. ԶՈՒԳԱՍԵՏ ԸՆՔԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

**1. Շարքերի խմբավորումը:** Դիտարկենք

$$\sum a_n \tag{4.1}$$

ընդհանուր շարքը և, նրանից ելնելով, կազմենք *խմբավորված շարք*:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + \\ + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots, \end{aligned} \tag{4.2}$$

որտեղ  $n_k$ -ն բնական թվերի խիստ աճող հաջորդականություն է ( $n_0 = 1$ ):

Եթե (4.1) շարքի  $n$ -րդ մասնակի գումարը նշանակենք  $A_n$ -ով, իսկ (4.2)

շարքի  $k$ -րդ մասնակի գումարը՝  $\tilde{A}_k$ , ապա

$$\tilde{A}_k = A_{n_k},$$

այսինքն՝ (4.2) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականությունը հանդիսանում է (4.1) շարքի մասնակի գումարների հաջորդականության ենթահաջորդականություն: Հետևաբար, (4.1) շարքի գուզամիտությունից բխում է (4.2) շարքի գուզամիտությունը և նրանց գումարների հավասարությունը:

Հակառակը ճիշտ չէ, օրինակ՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

շարքը տարամետ է, իսկ խմբավորված

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

շարքը՝ գուզամնետ:

**Թեորեմ 4.1:** Եթե (4.2) խմբավորված շարքի մեջ միևնույն խմբի բոլոր անդամները նույն նշանի են (խմբից խումք այդ նշանը կարող է փոխվել), ապա (4.2) շարքի գուզամիտությունից բխում է (4.1) շարքի գուզամիտությունը:

► Դիցուք (4.2) շարքը գուզամիտում է  $A$  թվին՝

$$A_{n_k} \rightarrow A :$$

Այդ դեպքում յուրաքանչյուր  $\varepsilon > 0$  թվի համար գոյություն ունի  $k_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$k \geq k_0 - 1 \Rightarrow A - \varepsilon < A_{n_k} < A + \varepsilon : \quad (4.3)$$

Մյուս կողմից, եթե  $n_{k-1} < n \leq n_k$  և  $k$ -րդ խմբի անդամները դրական (բացասական) են, ապա

$$A_{n_{k-1}} < A_n \leq A_{n_k} \quad \left( A_{n_k} \leq A_n < A_{n_{k-1}} \right) :$$

Հետևաբար, (4.3)-ից բխում է, որ եթե  $n > n_{k_0}$ , ապա

$$A - \varepsilon < A_n < A + \varepsilon ,$$

այսինքն՝  $A_n \rightarrow A$ : ■

**2. Շարքերի տեղափոխությունները:** Դիցուք  $k_n$  հաջորդականությունը  $N$  բնական թվերի բազմությունը փոխամիարժեք արտապատկերում է  $N$ -ի

վրա (այսինքն՝  $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$  հաջորդականության մեջ յուրաքանչյուր բնական թիվ հանդիպում է մեկ և միայն մեկ անգամ): Նշանակեմք՝

$$a'_n = a_{k_n} \quad (n=1,2,\dots): \quad (4.4)$$

Այդ դեպքում

$$\sum a'_n \quad (4.5)$$

շարքը կոչվում է (4.1) շարքի տեղափոխություն (կամ տեղափոխված շարք):

**Թեորեմ 4.2 (Դիրիխլե):** Եթե (4.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա (4.5) շարքը նույնական բացարձակ զուգամետ է և նրանց գումարները համընկնում են:

► ա) Նախ ապացուցենք դրական շարքերի դեպքում (այս դեպքում բացարձակ զուգամիտությունը համընկնում է զուգամիտության հետ):

Այդ շարքերի մասնակի գումարները նշանակենք համապատասխանարար  $A_n$ ,  $A'_n$ -ով, իսկ գումարները՝  $A$ ,  $A'$ -ով:

Այդ դեպքում, (4.4)-ի համաձայն, կունենանք՝

$$A'_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n} \leq A_m \leq A,$$

որտեղ  $m = \max(k_1, k_2, \dots, k_n)$ : Հետևաբար, (4.5) շարքը զուգամետ է և  $A' \leq A$  (օգտվեցինք դրական շարքերի զուգամիտության պայմանից):

Քանի որ (4.1) շարքն էլ իր հերքին հանդիսանում է (4.5) շարքի տեղափոխություն, ապա ճիշտ է նաև հակառակ անհավասարությունը՝  $A \leq A'$ : Այսպիսով՝  $A = A'$ :

բ) Այժմ թերեմն ապացուցենք ընդհանուր դեպքում: Ըստ թերեմի պայմանի, (4.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, այսինքն՝ զուգամետ է  $\sum |a_n|$  դրական շարքը: Հետևաբար, զուգամետ կլինի նաև  $\sum |a'_n|$  շարքը, որպես այդ շարքի տեղափոխություն, այսինքն՝ (4.5) շարքը բացարձակ զուգամետ է:

Որպեսզի ապացուցենք  $A = A'$  հավասարությունը, օգտվենք նախորդ պարագափի 2 կետի կառուցվածքից: Ունենք՝

$$A = P - Q, \quad A' = P' - Q',$$

որտեղ  $P$ -ն (4.1) շարքի դրական անդամներից կազմած շարքի գումարն է,  $Q$ -ն բացասական անդամների մոդուլներից կազմած շարքի գումարն է, իսկ

$P'$ -ը և  $Q'$ -ը նույն գումարներն են տեղափոխված շարքի համար: Քանի որ  $P = P'$ ,  $Q = Q'$ , ապա  $A = A'$ : ■

► Երկրորդ ապացույց: Նախ նկատենք, որ

$$|A - A'_n| \leq |a_p| + |a_{p+1}| + \dots =: \gamma_{p-1}^*,$$

որտեղ  $p$ -ն  $A'_n$  գումարի մեջ չմտնող՝ (4.1) շարքի անդամների ինդեքսներից փոքրագույնն է:

Այժմ, եթե  $n \rightarrow \infty$ , կիենանի՝  $p \rightarrow \infty$ , որտեղից էլ՝  $\gamma_{p-1}^* \rightarrow 0$ : ■

**Թեորեմ 4.3 (Ոխմանի թեորեմը):** Եթե (4.1) շարքը պայմանական գուգամնետ է, ապա  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha$  թվի համար գոյություն ունի այդ շարքի տեղափոխություն, որի գումարը  $\alpha$ -ն է ( $\alpha$ -ն կարող է լինել նաև  $+\infty$  կամ  $-\infty$ ):

► Պայմանական գուգամիտության դեպքում

$$p_1 + p_2 + \dots, q_1 + q_2 + \dots$$

երկու շարքերն ել տարամետ են (§3, կետ 2):

Նախ քննարկենք վերջավոր  $\alpha$ -ի դեպքը:  $k_1$ -ով նշանակենք այն ամենամեծ ինդեքսը, որի համար՝

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} > \alpha :$$

Այնուհետև  $m_1$ -ով նշանակենք այն ամենամեծ ինդեքսը, որի համար՝

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1}) - (q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}) < \alpha :$$

Հաջորդ քայլում որպես  $k_2$  և  $m_2$  վերցնենք այն ամենամեծ ինդեքսները, որոնց համար՝

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1}) - (q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}) +$$

$$+ (p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \dots + p_{k_2}) > \alpha,$$

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1}) - (q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}) +$$

$$+ (p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2}) - (q_{m_1+1} + \dots + q_{m_2}) < \alpha :$$

Այս պղոցեսն անվերջ շարունակելով՝ կստանանք մի խմբավորված շարք.

$$(p_1 + \dots + p_{k_i}) - (q_1 + \dots + q_{m_i}) + \dots + \\ + (p_{k_{i-1}+1} + \dots + p_{k_i}) - (q_{m_{i-1}+1} + \dots + q_{m_i}) + \dots,$$

որը զուգամիտում է  $\alpha$  զումարին, քանզի նրա մասնակի զումարների շեղումը  $\alpha$ -ից չի գերազանցում համապատասխանաբար  $p_{k_i}$  կամ  $q_{m_i}$  թվերը, որոնք ձգտում են 0-ի ((4.1) շարքի զուգամիտության շնորհիվ):

Շարքերի խմբավորման թեորեմի համաձայն,

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 - \dots - q_{m_1} + \dots + p_{k_{i-1}+1} + \dots + p_{k_i} - \\ - q_{m_{i-1}+1} - \dots - q_{m_i} + \dots$$

շարքը, որը հանդիսանում է (4.1) շարքի տեղափոխություն, նույնպես կզուգամիտի  $\alpha$  զումարին:

$\alpha = +\infty$  դեպքում թեորեմն ապացուցելու համար որպես (4.1) շարքի տեղափոխություն կվերցնենք

$p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 + p_{k_1+1} + \dots + p_{k_2} - q_2 + \dots + p_{k_{i-1}+1} + \dots + p_{k_i} - q_i + \dots$   
շարքը, որտեղ  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  ինդեքսներն ընտրում ենք այնպես, որ

$$p_1 + \dots + p_{k_1} - q_1 + p_2 + \dots + p_{k_2} - q_2 + \dots + p_{k_{i-1}+1} + \dots + p_{k_i} > i$$

անհավասարությունները տեղի ունենան բոլոր  $i = 1, 2, \dots$  արժեքների համար:

Նման ապացույցն անցնում է նաև  $\alpha = -\infty$  դեպքում: ■

**3. Կրկնակի շարքերի թեորեմ:** (4.1) շարքի անդամներից կազմենք անվերջ քվով շարքեր, այնպիսիք, որ (4.1)-ի յուրաքանչյուր անդամ մասնակցի կազմած շարքերից միայն մեկը անզամ: Դիցուք՝

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1k} + \dots =: s_1$$

$$a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2k} + \dots =: s_2$$

...

...

$$a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mk} + \dots =: s_m$$

...

...

Այս նոր շարքերը կոչվում են տրված շարքի սրոհման շարքեր:

**Թեորեմ 4.4:** Եթե (4.1) շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա

ա) տրոհման շարքերը բացարձակ զուգամետ են,

բ) նրանց զումարներից կազմած շարքը բացարձակ զուգամետ է,

$$q) \sum_{m=1}^{\infty} s_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n :$$

► ա) Նշանակենք՝

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots = A^* :$$

Այդ դեպքում  $|a_{m1}| + |a_{m2}| + \dots + |a_{mk}| \leq A^*$ , ինտևաբար, տրոհման  $m$ -րդ շարքը բացարձակ զուգամետ է ( $m = 1, 2, \dots$ ):

բ) Նշանակենք՝

$$s_{mk}^* = |a_{m1}| + |a_{m2}| + \dots + |a_{mk}|, \quad s_m^* = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mk}| :$$

Այդ դեպքում  $\sum_{m=1}^n s_{mk}^* \leq A^*$  և,  $k$ -ն ձգտեցնելով անվերջության, կստանանք՝  $\sum_{m=1}^n s_m^* \leq A^*$ : Այստեղից բխում է, որ  $\sum_{m=1}^n |s_m| \leq A^*$ , որովհետև

$$|s_m| \leq s_m^* :$$

զ) Նշանակենք՝

$$s_{mk} = a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mk} :$$

Այդ դեպքում

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{m=1}^n s_{mk} \right| \leq |a_p| + |a_{p+1}| + \dots ,$$

որտեղ  $p$ -ն այն ամենափոքր ինդեքսն է, որ  $a_p$ -ն ընդգրկված չէ  $\sum_{m=1}^n s_{mk}$

զումարի մեջ:  $k$ -ն ձգտեցնելով անվերջության՝ կստանանք

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{m=1}^n s_m \right| \leq |a_q| + |a_{q+1}| + \dots$$

անհավասարությունը, որտեղ  $q$ -ն այն ամենափոքր ինդեքսն է, որ  $a_q$ -ն ընդգրկված չէ տրոհման առաջին  $n$  շարքերի մեջ: Եթե  $n \rightarrow \infty$ , ապա  $q \rightarrow \infty$ , հետևաբար,  $q$ -ն բխում է ստացված անհավասարությունից: ■

**Դիտողություն:** Տրոհման շարքերի մի մասը (կամ բոլորը) կարելի է փոխարինել վերջավոր գումարներով: Հետևաբար, այս թեորեմից բխում է բացարձակ զուգամետ շարքերի տեղափոխելիության հատկությունը:

#### 4. Շարքերի Կոշիի արտադրյալ:

**Թեորեմ 4.5 (Կոշի):** Եթե

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \text{ և } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$$

շարքերը բացարձակ զուգամետ են, ապա

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = AB, \quad (4.6)$$

ըստ որում, (4.6) շարքը (որը կոչվում է տրված շարքերի Կոշիի արտադրյալ), նույնականացնելու համար անհնարինություն է:

► Դիտարկենք

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \cdots + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 + \cdots \quad (4.7)$$

շարքը: Քանի որ

$$(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|)(|b_0| + |b_1| + \cdots + |b_n|) \leq A^* B^*, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

որտեղ  $A^* = \sum |a_n|$ ,  $B^* = \sum |b_n|$ , ապա (4.7) շարքի անդամների մոդուլներից կազմած շարքի մասնակի գումարները չեն գերազանցի  $A^* B^*$  թիվը: Ուստի (4.7) շարքը բացարձակ զուգամետ է և, հետևաբար, (4.6) շարքը նույնականացնելու համար անհնարինություն է:

Այժմ նկատենք, որ (4.7) շարքի գումարը մի կողմից հավասար է (իր խմբավորումից ստացված) (4.6) շարքի գումարին, մյուս կողմից, կրկնակի շարքերի թեորեմի համաձայն, այն հավասար է

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_k + \cdots,$$

որտեղ  $s_k = a_k(b_0 + b_1 + \cdots)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ : Այստեղից էլ հետևում է (4.6) հավասարությունը: ■

**Լրացում:** Ելնելով (4.7) շարքից՝ (4.6) շարքի փոխարեն դիտարկենք

$$\sum s_n \quad (4.6')$$

շարքը, որտեղ  $s_n$ -երը (4.7) շարքի անդամներից կազմված այնպիսի (վերջավոր կամ անվերջ) գումարներ են, որ (4.7)-ի յուրաքանչյուր անդամ (որպես գումարելի) ընդգրկվի  $s_n$ -երից մեկի և միայն մեկի մեջ: Այդ դեպքում

$$\sum s_n = A \cdot B :$$

Կիրառելով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը՝ այս եզրակացությունը կարելի է տարածել երկուսից ավելի բվով շարքերի վրա:

**Թեորեմ 4.6 (Մերժենու):** Եթե արկած շարքերից մեկը բացարձակ զուգամնտ է, իսկ մյուսը՝ պայմանական, ապա նրանց Կոշիի արտադրյալը զուգամնտ է և տեղի ունի (4.6) հավասարությունը:

► Ենթադրենք, թե այդ շարքերից առաջինն է բացարձակ զուգամնտ՝

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = A^* < \infty : \quad (4.8)$$

Նշանակենք՝

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^n b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^n (a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k b_0),$$

$$\beta_n = B_n - B, \quad M = \max_{n \geq 0} |\beta_n|.$$

Ցույց տանք, որ  $C_n \rightarrow AB$ : Ունենք՝

$$\begin{aligned} C_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \cdots + \\ &+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) = a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \cdots + a_n B_0 = \\ &= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \cdots + a_n (B + \beta_0) = \\ &= A_n B + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0 : \end{aligned}$$

Այժմ նշանակենք  $\gamma_n = a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \cdots + a_n \beta_0$  և ցույց տանք, որ  $\gamma_n \rightarrow 0$ :

Դիցուք՝  $\varepsilon > 0$ : Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի համաձայն, (4.8)-ից հետևում է, որ զոյություն ունի  $m_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$\left|a_{m_0+1}\right| + \dots + \left|a_n\right| < \varepsilon, \text{ եթե } n > m_0:$$

Այսուհետև,  $\beta_n \rightarrow 0$  պայմանից հետևում է, որ

$$\left|\beta_k\right| < \varepsilon, \text{ եթե } k > k_0:$$

Վերցնելով  $n > m_0 + k_0$  և հաշվի առնելով, որ  $|\beta_k| \leq M$ ՝ կոնենանք

$$\begin{aligned} |\gamma_n| &\leq \left|a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \dots + a_{m_0}\beta_{n-m_0}\right| + \\ &+ \left|a_{m_0+1}\beta_{n-m_0-1} + \dots + a_n\beta_0\right| < \varepsilon A^* + M\varepsilon \end{aligned}$$

զնահատականը: ■

**Կոշիի օրինակ:** Յույց տանք, որ *Սերտենսի թեորեմում շարքերից մեկի բացարձակ զուգամիտության պայմանն էական է.*  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$  պայմանական զուգամետ շարքը ինքն իր հետ բազմապատկելով ըստ Կոշիի՝ կստանանք տարամետ շարք:

Իրոք, այս դեպքում արտադրյալ շարքի ընդհանուր անդամն է՝

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} :$$

Քանի որ  $(k+1)(n-k+1) \leq (n+1)^2$ , ապա

$$\left|c_n\right| \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1 :$$

Հետևաբար,  $c_n$ -ը չի ճակատում զրոյի, ուստի արտադրյալ շարքը տարամետ է:

## §5. ԹԵՅԼՈՐԻ ԸԱՐՁ

**1. Աստիճանային շարքեր:** Աստիճանային շարք են անվանում

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.1}$$

տեսքն ունեցող շարքերին, որտեղ  $a_n$ -ը կամայական թվային հաջորդականություն է: Նշանակենք՝

$$\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad R = \frac{1}{\alpha} :^*$$

**ԹԵՂՂՈՐԻ 5.1:**

ա) Եթե  $|x| < R$ , ապա (5.1) շարքը բացարձակ զուգամեն է,

բ) եթե  $|x| > R$ , ապա (5.1) շարքը տարամեն է:

► Ապացույցն անմիջապես բխում է. Կոչիի հայտանիշից: Իրոք, նշանակենք՝  $c_n = a_n x^n$ : Այդ դեպքում ունենք, որ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|x|}{R}$$

ու մնում է կիրառել Կոչիի հայտանիշը: ■

$R$  բխը կոչվում է (5.1) շարքի զուգամիտության շառավիղ, իսկ

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

բանաձևը կոչվում է Կոչի – Հադամարի բանաձև:

**Օրինակներ:**

ա)  $\sum n^n x^n$  շարքը զուգամիտում է միայն  $x = 0$  կետում ( $R = 0$ ):

բ)  $\sum \frac{x^n}{n!}$  շարքի համար՝  $R = \infty$  (այստեղ հարմար է օգտվել Դալամբերի հայտանիշից):

զ)  $\sum x^n$  շարքի համար՝  $R = 1$ ; (-1,1) զուգամիտության միջակայքի  $x = 1$  և  $x = -1$  ծայրակետերում շարքը տարամեն է:

դ)  $\sum \frac{x^n}{n}$  շարքի դեպքում՝  $R = 1$ :  $x = -1$  կետում շարքը պայմանական զուգամեն է, իսկ  $x = 1$  կետում՝ տարամեն:

ե)  $\sum \frac{x^n}{n^2}$ ,  $R = 1$ : Զուգամիտության միջակայքի  $x = 1$  և  $x = -1$

ծայրակետերում շարքը բացարձակ զուգամեն է:

\* Պայմանավորվում ենք, որ  $\alpha = 0$  դեպքում՝  $R = \infty$ , իսկ եթե  $\alpha = \infty$ , ապա  $R = 0$ :

Վերջում նշենք, որ  $\sum a_n(x - x_0)^n$  տեսքի շարքերը նույնպես կոչվում են աստիճանային շարքեր, որոնց ուսումնավրությունը  $t = x - x_0$  նշանակման միջոցով բերվում է նախորդ դեպքին: Այս դեպքում շարքը կզուգամիտի  $|x - x_0| < R$  միջակայքում (կարող են ավելանալ նաև միջակայքի ծայրակետերը):  $a_n$  թվերը կոչվում են այդ աստիճանային շարքի գործակիցներ:

**2. ԹԵՂՈՐԻ ՀԱՐՔ:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան  $x_0$  կետի մի ինչ - որ շրջակայքում անվերջ դիֆերենցելի է (ունի բոլոր կարգի ածանցյալները): Այդ դեպքում

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

աստիճանային շարքը կոչվում է  $f$  ֆունկցիայի ԹԵՂՈՐԻ ՀԱՐՔ ( $x_0$  կետի շրջակայքում), ընդ որում, նրա

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \dots$$

գործակիցները կոչվում են ԹԵՂՈՐԻ գործակիցներ:

**Թեորեմ 5.2:** Որպեսզի որևէ  $x$  կետում  $f$  ֆունկցիայի ԹԵՂՈՐԻ ՀԱՐՔը գուգամիտի  $f(x)$ -ին՝

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \tag{5.3'}$$

անհրաժեշտ է և բավարար, որ այդ  $x$  կետում ԹԵՂՈՐԻ բանաձևի մնացորդային անդամը ձգողի զրոյի՝

$$r_n(x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty):$$

Այս պնդումն անմիջապես բխում է շարքի գումարի սահմանումից և ԹԵՂՈՐԻ բանաձևի մնացորդային անդամի սահմանումից՝

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = r_n(x), \quad n = 1, 2, \dots:$$

Այսպիսով, ԹԵՂՂՈՐԻ շարքի ուսումնասիրությունը հանգում է ԹԵՂՂՈՐԻ բանաձևի մնացորդային անդամի ուսումնասիրությանը:

Հաճախ  $x_0$  կետի դերում հանդես է զալիս  $x_0 = 0$  կետը: Այս դեպքում (5.3)՝ վերլուծությունը կընդունի հետևյալ տեսքը՝

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \quad (5.3)$$

իսկ մնացորդային անդամը՝

ա) Լազրանժի տեսքով.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1,$$

բ) Կոշիի տեսքով.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1:$$

ա) Ցուցային և հիմնական եռանկյունաչափական ֆունկցիաների վերլուծությունները:

Նախ ապացուցենք հետևյալ ընդհանուր բնույթի թեորեմը.

**Թեորեմ 5.3:** Դիցուք  $f$  ֆունկցիան անվերջ դիֆերենցելի է  $[-h, h]$  հաստվածում և

$$|f^{(n)}(x)| \leq L, \quad x \in [-h, h], \quad n = 1, 2, \dots :$$

Այդ դեպքում  $[-h, h]$  հաստվածում (այսինքն՝ այդ հաստվածի բոլոր կետերում) տեղի ունի (5.3) վերլուծությունը:

► Ելնելով մնացորդային անդամի Լազրանժի տեսքից՝

$$|r_n(x)| \leq L \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \quad \text{եթե } n \rightarrow \infty:$$

Մնում է օգտվել նախորդ թեորեմից: ■

$f(x) = e^x, \sin x, \cos x$  ֆունկցիաների համար թեորեմ 5.3-ը կարելի է կիրառել կամայական  $[-h, h]$  հաստվածում, որովհետև

$$f^{(n)}(x) = e^x, \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

ածանցյալների մոդուլները սահմանափակ են վերևից, համապատասխանաբար,  $e^x$ , 1, 1 թվերով: Արդյունքում կստանանք (տե՛ս գլուխ 4, §6, կետ 5):

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \cdots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots; \end{aligned}$$

Քանի որ այս վերլուծությունները տեղի ունեն կամայական  $[-h, h]$  հատվածում, ապա նրանք ճիշտ են ամբողջ թվային առանցքի վրա:

b)  $y = \arctgx$  ֆունկցիայի վերլուծությունը:

Այս դեպքում ունենք՝

$$y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \sin n\left(y + \frac{\pi}{2}\right);$$

Այստեղ նախորդ թեորեմը կիրառելի չէ: Այս ֆունկցիայի Թեյլորի շարքն է

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots,$$

որը զուգամիտում է միայն  $[-1, 1]$  միջակայքում (տե՛ս §3, կետ 3): Հետևաբար,  $r_n(x)$ -ը պետք է ուսումնամիեն միայն այդ միջակայքում:

Մնացորդային անդամի Լագրանժի տեսքից կստանանք՝

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad x \in [-1, 1]:$$

Հետևաբար, թեորեմ 5.2-ի համաձայն, այդ միջակայքում  $\arctgx$  ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը զուգամիտում է իրեն՝

$$\arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1} + \cdots, \quad x \in [-1, 1]:$$

Այստեղ վերցնելով  $x = 1$ ՝ կստանանք Լայբնիցի նշանավոր շարքը.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \dots;$$

c) Լոգարիթմական շարք:

$f(x) = \ln(1+x)$  ֆունկցիայի մեջլորի շարքն է՝

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots,$$

որը զուգամիտում է միայն  $(-1, 1]$  միջակայքում (§3, կետ 3): Հետևաբար,  $r_n(x)$ -ը պետք է ուսումնակրել միայն այդ միջակայքում: Նախ այն դիտարկենք Լագրանժի տեսքով: Քանի որ

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

ապա

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}:$$

Եթե  $0 \leq x \leq 1$ , ապա

$$|r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \text{ եթե } n \rightarrow \infty: \quad (5.4)$$

Սակայն, եթե  $x < 0$ ,  $r_n(x)$ -ի Լագրանժի տեսքը մեզ ոչինչ չի տալիս: Այս դեպքում դիտարկենք Կոշիի տեսքը՝

$$r_n(x) = (-1)^n \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} \cdot x^{n+1},$$

որտեղից կստանանք

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \cdot \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n$$

զնահատականը: Քանի որ  $x > -1$  պայմանից հետևում է, որ  $1+\theta x > 1-\theta$ , ապա վերջին արտադրիչը փոքր է մեկից: Հետևաբար,  $-1 < x < 0$  դեպքում կունենանք՝

$$|r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \rightarrow 0, \text{ եթե } n \rightarrow \infty : \quad (5.5)$$

Թեորեմ 5.2-ի համաձայն, (5.4)-ից և (5.5)-ից հետևում է, որ

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]:$$

Այստեղ վերցնելով  $x=1$ ՝ կստանանք

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

հավասարությունը:

d) Թիմոմական շարք:

Դիտարկենք  $f(x) = (1+x)^m$  ֆունկցիան, որտեղ  $m$ -ը բնական թիվ չէ (եթե  $m$ -ը բնական թիվ է, ստացվում է Նյուտոնի երկանդամի բանաձևը): Այդ ֆունկցիայի Թեյլորի շարքը է՝

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots;$$

Կիրառելով Դալամբերի հայտանիշը՝ կհամոզվենք, որ այդ շարքը (որը կոչվում է թիմոմական շարք) բացարձակ զուգամետ է, եթե  $|x| < 1$ , իսկ եթե  $|x| > 1$ , այն տարամետ է: Այս նկատառումով  $r_n(x)$  մնացորդային անդամը նախ ուսումնասիրենք  $(-1, 1)$  միջակայքում: Այն կվերցնենք Կոշիի տեսքով: Զանի որ

$$f^{(n+1)}(x) = m(m-1)\cdots(m-n+1)(m-n)(1+x)^{m-n-1},$$

ապա

$$r_n(x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}:$$

Վերջինս ներկայացնենք հետևյալ տեսքով՝

$$r_n(x) = \left[ \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-1-n+1)}{n!} x^n \right] mx(1+\theta x)^{m-1} \cdot \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n:$$

Միջակ փակագծերի մեջ զրված արտահայտությունը ձգտում է 0-ի, եթե  $n \rightarrow \infty$ , որպես զուգամետ թիմոմական շարքի ընդհանուր անդամ ( $m$ -ը փոխարինված է  $(m-1)$ -ով): Վերջին արտադրիչը մոդուլով փոքր է մեկից (ապացուցվում է այնպես, ինչպես օ) դեպքում): Վերջապես,  $mx(1+\theta x)^{m-1}$

արտադրիչի մոդուլն ընկած է  $|mx|(1 - |x|)^{m-1}$  և  $|mx|(1 + |x|)^{m-1}$  սահմանների միջև:

Այսպիսով,  $r_n(x) \rightarrow 0$ , եթե  $x \in (-1, 1)$ : Հետևաբար, թերեմ 5.2-ի համաձայն,  $|x| < 1$  դեպքում ստանում ենք՝

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots : \quad (5.6)$$

Վերջում նշենք (ապացույցը՝ զլիի վերջում), որ  $x = 1$  կետում (5.6) հավասարությունը տեղի ունի  $m > -1$  արժեքների դեպքում, իսկ  $x = -1$  կետում՝  $m > 0$  արժեքների դեպքում:

$$\text{Բիմոմական } \quad \text{վերլուծության } \quad \text{մեջ } \quad \text{վերցնելով} \quad m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Կստանանք

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad |x| < 1,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \dots + (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + \dots, \quad |x| \leq 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + \dots, \quad -1 < x \leq 1$$

Վերլուծությունները:

### e) Կոշիի օրինակը:

Դիտարկենք

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Փունկցիան: Նախ ապացույցները, որ այն անկերզ դիֆերենցելի է ամբողջ թվային սուստրի վրա և

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots : \quad (5.7)$$

Ապացույցի ընթացքում օգտվելու ենք հետևյալ հայտնի սահմանից (IV գլուխ, §5, կետ 2).

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z^n}{e^z} = 0, \quad n=1,2,\dots : \quad (5.8)$$

$$\text{Եթե } x \neq 0, \text{ ապա } f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left( -\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6} \right) e^{-1/x^2}, \dots :$$

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով կհամոզվենք, որ

$$f^{(n)}(x) = P_n \left( \frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2}, \quad n=1,2,\dots,$$

որտեղ  $P_n$ -ը  $3n$  աստիճանի բազմանդամ է:

Այժմ ապացուցենք (5.7)-ը: Նախ՝

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{1/x^2}} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{t^2}} = 0,$$

որտեղ վերջին հավասարությունը բխում է (5.8) սահմանից: Այնուհետև, կիրառենով մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը, կստանանք

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} P_n \left( \frac{1}{x} \right)}{e^{1/x^2}} = 0,$$

որտեղ վերջին հավասարությունը նորից բխում է (5.8) սահմանից: Այսպիսով, առաջադրված պնդումն ապացուցված է: Այստեղից բխում է, որ  $f$  ֆունկցիայի մեջը գործակիցները 0 կետում 0 են, ինտեղաբար, նրա ժեղյորի շարքը ամենուրեք զուգամիտում է (*զրոյի*), բայց  $n$ ' ՝  $f(x)$  ֆունկցիային (եթե  $x \neq 0$ ):

Այս օրինակը ցույց է տալիս մնացորդային անդամի հետազոտության անհրաժեշտությունը:

### 3. Ստիումօքի բանաձևը: Ապացուցենք

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1, \quad (5.9)$$

բանաձևը, որտեղ  $\theta$  -ն կախված է միայն  $n$  -ից:

Քանի որ ապացույցը բավականին երկար է, հարմար է այն տրոհել մի քանի քայլերի:

**I Քայլ.** Ապացուցենք

$$1 < \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} \quad (5.10)$$

անհավասարությունը, ինչը նույնան է, քեզ՝

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)} : \quad (5.10)$$

Ապացուցելու համար օգտվենք լոգարիթմական ֆունկցիայի ԹԵՂՂՈՐԻ շարքից՝

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \end{cases} \Rightarrow \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + \dots ,$$

հետևաբար,

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right) :$$

$$\text{Այս } \quad \text{բանաձևի } \quad \text{մեջ } \quad \text{տեղադրելով } \quad x = \frac{1}{2n+1}, \quad 2x = \frac{1}{n+\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{կստանանք}$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^4 + \dots :$$

հավասարությունը: Հետևաբար՝

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2n+1}\right)^4 + \dots \right] :$$

Հաշվելով միջակ փակագծերի մեջ զրված անվերջ նվազող երկրաչափական պլոգրեսիայի գումարը՝ կստանանք (5.10)-ը:

**Պրայլ.** Յուց տանք, որ գոյություն ունի  $a$  հաստատում, այնպիսին, որ

$$n! = an^{\frac{n+1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad 0 < \theta < 1 : \quad (5.11)$$

Նշանակենք՝

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+1/2}} : \quad (5.12)$$

Այդ դեպքում

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! e^n (n+1)^{n+3/2}}{n^{n+1/2} (n+1)! e^{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2} :$$

Օգտվելով (5.10) անհավասարությունից՝ կստանանք

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}$$

զնահատականները: Այստեղից կստանանք երկու անհավասարություն՝

$$\text{ա) } a_{n+1} < a_n, \quad \text{բ) } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} :$$

Առաջին անհավասարությունը ցույց է տալիս, որ  $a_n$  դրական թվերի հաջորդականությունը նվազող է: Մոնուն հաջորդականությունների վերաբերյալ թերեմի համաձայն, այն զուգամետ է՝

$$a_n \downarrow a : \quad (5.13)$$

Երկրորդ անհավասարությունից հետևում է, որ

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} \uparrow a : \quad (5.14)$$

Հաշվի առնելով (5.13)-ը և (5.14)-ը՝ կստանանք

$$a < a_n < a e^{\frac{1}{12n}}$$

կրկնակի անհավասարությունը: Քանի որ  $\varphi(x) = ae^{\frac{x}{12n}}$  ֆունկցիան (Փիքսած  $n$ -ի դեպքում)  $[0,1]$  հատվածում անընդհատ է և խիստ աճող, իսկ

$a_n$ -ը ընկած է հատվածի ծայրակետերում ֆունկցիայի ընդունած արժեքների միջև, ապա գոյություն ունի միջանկյալ  $\theta$  կետ ( $0 < \theta < 1$ ), այնպիսին, որ  $a_n = ae^{\theta/12n}$ : Տեղադրելով  $a_n$ -ի ստացված արժեքը (5.12)-ի մեջ՝ կստանանք (5.11)-ը:

**III բայլ.** Վախիսի բանաձևի համաձայն՝

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} :$$

Հաշվի առնելով ֆակտորիալի (5.11) ներկայացումը՝ կստանանք

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} a^2 n^{2n+1} e^{-2n}}{a (2n)^{2n+1/2} e^{-2n}} \cdot \frac{1}{n^{1/2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

հավասարությունը, որտեղից էլ, տեղադրելով  $a = \sqrt{2\pi}$  արժեքը (5.11)-ի մեջ, կստանանք Ստիլունդի (5.9) բանաձևը:

## § 6. ԱՆՎԵՐՋ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐ

**1. Հիմնական գաղափարները:** Դիցուք  $p_n$ -ը կամայական թվային հաջորդականություն է: Դիտարկենք

$$p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_n \cdots$$

սիմվոլ: Այն կոչվում է *անվերջ արտադրյալ* և հաճախ գրվում է արտադրյալի նշանի միջոցով՝

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n : \tag{6.1}$$

$p_n$ -ը կոչվում է այդ արտադրյալի  $n$ -րդ անդամ կամ ընդհանուր անդամ:

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_n \quad (n=1,2,\dots)$$

հաջորդականությունը կոչվում է (6.1) անվերջ արտադրյալի մասնակի արտադրյալների հաջորդականություն:

Եթե գոյություն ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \tag{6.2}$$

սահմանը (վերջավոր կամ անվերջ), ապա այն կոչվում է (6.1) **անվերջ արտադրյալի արժեք** և գրվում է՝

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots \equiv \prod_{n=1}^{\infty} p_n :$$

Եթե  $P$ -ն վերջավոր է և *զրոյից տարբեղ*, ապա (6.1) անվերջ արտադրյալը կոչվում է *զուգամետ*, հակառակ դեպքում (եթե (6.2) սահմանը գոյություն չունի, անվերջ է, կամ՝ հավասար է զրոյի) (6.1) անվերջ արտադրյալը կոչվում է *տարամետ*:

**Օրինակներ:**

$$1) \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} :$$

Իլոր,  

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} :$$

2) Վալիսի բանաձևը (գլուխ 5, § 8, կետ 3) կարող ենք գոել հետևյալ տեսքով՝

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{4k^2 - 1}\right) :$$

Վալիսի բանաձևից ստացվում են նաև հետևյալ բանաձևեր՝

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{(2m+1)^2}\right] = \frac{\pi}{4}, \quad \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4m^2}\right) = \frac{2}{\pi} :$$

## 2. Պարզագույն թեորեմներ: Կապը շարքերի հետ:

(6.1) անվերջ արտադրյալից դեն նետելով առաջին  $m$  հատ անդամները՝ կստանանք *մնացորդ արտադրյալը* (կամ *պոչը*).

$$p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdot \dots \cdot p_{m+k} \cdot \dots = \prod_{n=m+1}^{\infty} p_n : \tag{6.3}$$

**Հատկություն 1:** Եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, ապա զուգամետ է նաև (6.3) արտադրյալը (կամայական  $m$ -ի դեպքում): Հակառակը՝ եթե որևէ  $m$ -ի դեպքում զուգամետ է (6.3) արտադրյալը, ապա զուգամետ է նաև

նախնական (6.1) արտադրյալը\*: Հնդ որում, եթե նշանակենք՝  
 $\pi_m = p_{m+1} \cdot p_{m+2} \cdots \cdot p_{m+k} \cdots$ , ապա տեղի ունի

$$P = P_m \cdot \pi_m \quad (6.4)$$

հավասարությունը:

Այս պնդումն անմիջապես բխում է սահմանումից:

**Հատկություն 2:** Եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, ապա  $\pi_m \rightarrow 1$ :

Այս հատկությունը բխում է (6.4) հավասարությունից:

**Հատկություն 3:** Եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, ապա  $p_n \rightarrow 1$ :

► Իրոք,

$$p_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \rightarrow \frac{P}{P} = 1: \blacksquare$$

Այս հատկությունից հետևում է, որ զուգամետ արտադրյալի անդամները, սկսած որոշ համարից, դրական են: Այդ պատճառով, առաջին հատկության շնորհիվ, ընդհանրությունը չի խախտվի, եթե առաջիկայում ենք բարդենք, որ  $p_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

**Հատկություն 4:** Որպեսզի (6.1) արտադրյալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամետ լինի

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n =: L \quad (6.5)$$

շարքը, ընդ որում,  $P = e^L$ :

► Նշանակենք  $L_n$ -ով (6.5) շարքի մասնակի գումարը՝ կունենանք

$$\text{ա) } L_n = \ln P_n \text{ և բ) } P_n = e^{L_n}$$

հավասարությունները: Այժմ անհրաժեշտությունը բխում է ա) հավասարությունից, իսկ բավարարությունը՝ բ)-ից: ■

**Դիտողություն:** Եթե  $L = -\infty$ , ապա  $P = 0$  (ճիշտ է նաև հակադարձը):

Հաճախ հարմար է անվերջ արտադրյալի ընդհանուր անդամը ներկայացնել

$$p_n = 1 + a_n$$

\*Ենթադրվում է, որ  $p_n \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

տեսքով: Այդ դեպքում անվերջ արտադրյալը կմերկայացվի

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \quad (6.1)$$

տեսքով, իսկ (6.5) շարքը՝

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n); \quad (6.5)$$

**Հատկություն 5:** Դիցուք  $a_n > 0$ , եթե  $n > n_0$ : Որպեսզի (6.1) արտադրյալը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ զուգամիտի

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (6.6)$$

շարքը:

► Քանի որ (6.1) արտադրյալի (կամ (6.5) շարքի) զուգամիտության համար անհրաժեշտ է, որ  $a_n \rightarrow 0$ , ապա կենթադրենք, որ այդ պայմանը բավարարված է: Այդ դեպքում՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + a_n)}{a_n} = 1;$$

Դրական շարքերի բաղդատման երկրորդ հայտանիշի համաձայն, (6.5) և (6.6) շարքերը զուգամիտում են միաժամանակ: Մնում է օգտվել 4-րդ հատկությունից: ■

Այս հատկությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, եթե  $a_n < 0$  ( $n > n_0$ ):

Հետաքրքիր է նշել, որ այս դեպքում  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքի տարամիտությունից բխում է, որ  $\sum \ln(1 + a_n) = -\infty$ , ինչից իր հերթին (4-րդ հատկության դիտողության շնորհիվ) բխում է, որ

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0;$$

**Օրինակներ:**

ա)  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^x}\right)$  արտադրյալը զուգամետ է, եթե  $x > 1$ , և տարամետ է,

եթե  $x \leq 1$ :

$$\text{թ) } \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^x}\right) = 0, \text{ եթե } 0 \leq x \leq 1, \text{ իսկ եթե } x > 1, \text{ այդ արտադրյալը}$$

գուգամետ է (արժեքը մեծ է զրոյից):

### 3. Բացարձակ և պայմանական գուգամիտություն:

**Սահմանում:** (6.1') արտադրյալը կոչվում է բացարձակ (պայմանական) գուգամետ, եթե բացարձակ (պայմանական) գուգամետ է (6.5') շարքը:

**Թեորեմ 6.1:** Որպեսզի (6.1') արտադրյալը լինի բացարձակ գուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ բացարձակ գուգամետ լինի (6.6) շարքը:

► Իրոք, քանի որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\ln(1 + a_n)|}{|a_n|} = 1,$$

ապա (6.5') և (6.6) շարքերը բացարձակ գուգամետ են միաժամանակ, իսկ (6.5') շարքի բացարձակ գուգամիտությունը, ըստ սահմանման, (6.1') արտադրյալի բացարձակ գուգամիտությունն է: ■

Այժմ անդրադառնանք (6.1) արտադրյալի պայմանական գուգամիտությանը:

**Թեորեմ 6.2:** Դիցուք (6.6) շարքը պայմանական գուգամետ է: Այդ դեպքում (6.1') արտադրյալը և  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքը ունեն միևնույն վարքը

(գուգամիտում են միաժամանակ):

► Գրենք  $\ln(1+x)$  ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևը  $n = 2$  դեպքում՝ վերցնելով մնացորդային անդամը Պեսոնյի տեսքով:

$$\ln(1 + a_n) = a_n - \frac{1}{2} a_n^2 + o(a_n^2), \text{ եթե } n \rightarrow \infty: \quad (6.7)$$

Ոստի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - \ln(1 + a_n)}{a_n^2} = \frac{1}{2};$$

Բաղդատման երկրորդ հայտանիշի համաձայն ( $a_n - \ln(1 + a_n) > 0$ ), հաշվի առնելով (6.6) շարքի գուգամիտությունը, այստեղից կստանանք, որ

$$\sum a_n^2 \text{ և } \sum \ln(1 + a_n)$$

շարքերը զուգամիտում են միաժամանակ: ■

**Դիտողություն:** Եթե  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  շարքը պայմանական զուգամետ է, իսկ  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  շարքը՝ տարամետ, ապա

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = 0 :$$

Իլոր, (6.7)-ի շնորհիվ՝  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n) = -\infty$ , և մնում է օգտվել 4-րդ

հատկության դիտողությունից:

**Օրինակներ:**

1) Դիտարկենք  $\prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right]$  անվերջ արտադրյալը: Եթե  $x > 1$ ,

այն բացարձակ զուգամետ է: Եթե  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ , ապա արտադրյալը պայմա-

նական զուգամետ է, իսկ եթե  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , արտադրյալը տարամիտում է

զրոյի (արժեքը 0 է):

2) Այժմ քերենք մի *օրինակ*, եթե (6.1) արտադրյալը զուգամետ է, բայց (6.6) շարքը տարամետ է:

Դիցուք՝  $\ln(1 + a_n) = (-1)^n / \sqrt{n}$ : Այդ դեպքում (6.5) շարքը (հետևաբար, նաև (6.1) արտադրյալը) կզուգամիտի: Իսկ (6.6) շարքը կտարամիտի, որովհետև,  $e^x$  ֆունկցիայի Թեյլորի բանաձևի մեջ վերցնելով  $n = 3$  (իսկ մնացորդային անդամը՝ Պեսոնյի տեսքով), կտանանաք՝

$$a_n = e^{(-1)^n / \sqrt{n}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2! n} + \frac{1}{3!} \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^3 + o\left( \frac{1}{(\sqrt{n})^3} \right),$$

այսինքն՝

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \alpha_n,$$

որտեղ

$$|\alpha_n| < \frac{1}{n^{3/2}}, \text{ եթե } n > n_0:$$

#### 4. Էյերի բանաձևը պարզ թվերի համար:

**Թեորեմ 6.3:** Դիցուք պարզ թվերը համարակալված են աճման կարգով՝  $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_k < \dots$ : Եթե  $x > 1$ , ապա տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - p_k^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}:$$

► Յուրաքանչյուր  $n$  բնական թիվ միակ ձևով վերլուծվում է պարզ արտադրյաների՝

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \cdots p_{i_m}^{\alpha_m}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_m: \quad (6.8)$$

Երկրաչափական պրոզեսիայի գումարի բանաձևի համաձայն՝

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^x}} = 1 + \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^2)^x} + \cdots + \frac{1}{(p_k^m)^x} + \cdots : \quad (6.9)$$

Բազմապատկելով  $N$  բնական թիվը զգերազանցող բոլոր պարզ թվերին համապատասխանող (6.9) տեսքի շարքերը՝ կստանանք

$$P_x^{(N)} := \prod_{p_k \leq N} \frac{1}{1 - 1/p_k^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \quad (6.10)$$

հավասարությունը, որտեղ  $\sum \frac{1}{n^x}$  սիմվոլը այն  $\frac{1}{n^x}$  տեսքի գումարելիների գումարն է, որոնց համար  $n$ -ի (6.8) տեսքի վերլուծության մեջ մասնակցում են միայն  $p_k \leq N$  թվերը: Այստեղից ստանում ենք՝

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x}:$$

Քանի որ  $\sum \frac{1}{n^x} < \infty$ , ուստի  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \rightarrow 0$ , եթե  $N \rightarrow \infty$ : Հետևաբար,

$$P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^x} \rightarrow 0, \text{ եթե } N \rightarrow \infty:$$

Էյլերի բանաձևն ապացուցված է: ■

**Լրացում:**  $x = 1$  դեպքում (6.10) ներկայացումը մնում է ուժի մեջ, ուստի

$$P_1^{(N)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = H_N:$$

Քանի որ  $H_N \rightarrow \infty$ , եթե  $N \rightarrow \infty$ , ուստի  $P_1^{(N)} \rightarrow \infty$ : Այսինքն՝

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \cdots} = \infty$$

կամ, որ նույն է՝  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = 0$ :

Այսպիսով, պարզ քերի հակադարձներից կազմված շարքը տարամետ է՝

$$\sum 1/p_k = \infty:$$

## § 7. ԿՈՒՄԵՐԻ, ԲԵՐՏՐԱՎՆԻ ԵՎ ԳԱՌԽԻ ՀԱՅՏԱՆԻԾՆԵՐԸ

**1. Կումերի հայտանիշը:** Դիցուք՝  $a_n > 0$ : Դիտարկենք

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{7.1}$$

դրական շարքը և կամայական  $b_n > 0$  հաջորդականության համար նշանակենք

$$K_n = b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1}:$$

**Թեորեմ 7.1:** \* (7.1) շարքը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի  $b_n > 0$  հաջորդականություն, այնպիսին, որ տեղի ունենաւ  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n > 0$  պայմանը:

(7.1) շարքը տարամետ է այն և միայն այն դեպքում, եթե գոյություն ունի  $b_n > 0$  հաջորդականություն, այնպիսին, որ տեղի ունենաւ

$$\sum 1/b_n = \infty \text{ և } K_n \leq 0 \quad (7.2)$$

պայմանները:

► ‘Դիցուք՝  $0 < r < \lim_{n \rightarrow \infty} K_n$ : Այդ դեպքում գոյություն ունի  $n_0$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $K_n > r$ , եթե  $n > n_0$ : Հետևաբար,

$$b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1} > r a_{n+1} > 0, \text{ եթե } n > n_0: \quad (7.3)$$

Այսպիսով,  $a_n b_n$  հաջորդականությունը նվազող է և դրական, ուստի

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1}) < \infty:$$

Բացի դրանից, (7.3)-ից հետևում է, որ  $a_{n+1} < \frac{1}{r}(a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1})$ , եթե  $n > n_0$ , ուստի, բաղդատման առաջին հայտանիշի համաձայն,  $\sum a_n < \infty$ :

$$\text{Մյուս կողմից, եթե (7.1) շարքը զուգամետ է, նշանակենք՝ } b_n = \frac{\gamma_n}{a_n},$$

որտեղ  $\gamma_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ : Այդ դեպքում

$$K_n = \frac{\gamma_n}{a_{n+1}} - \frac{\gamma_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 \rightarrow 1 > 0:$$

Այժմ քննարկենք տարամիտության դեպքը: ‘Դիցուք բավարարվում են (7.2) պայմանները: Քանի որ  $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \leq 0$  պայմանը համարժեք է

$$\frac{1/b_{n+1}}{1/b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

\* J.Tong, Amer. Math. Monthly, May, 1994, 450-452.

անհավասարությանը և  $\sum 1/b_n = \infty$ , ապա, բաղդատման երրորդ հայտանիշի համաձայն,  $\sum a_n = \infty$ :

$$\text{Սյուս} \quad \text{կողմից,} \quad \text{եթե} \quad \sum a_n = \infty, \quad \text{նշանակենք՝} \quad b_n = \frac{A_n}{a_n}, \quad \text{որտեղ}$$

$A_n = \sum_{k=1}^n a_k$  : Այդ դեպքում Աբել-Կինիի առաջին թեորեմի համաձայն՝

$$\sum 1/b_n = \infty$$

և

$$K_n = \frac{A_n}{a_{n+1}} - \frac{A_{n+1}}{a_{n+1}} = -\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 \leq 0; \blacksquare$$

2. Բերուրանի հայտանիշը: Նշանակենք՝  $B_n = \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right]$ :

**Թեորեմ 7.2:** a) Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n > 1$ , ապա  $\sum a_n < \infty$ :

b) Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n < 1$ , ապա  $\sum a_n = \infty$ :

► Նշանակենք՝  $b_n = n \ln n$  : Այդ դեպքում

$$\begin{aligned} K_n &= b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} = n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln n + (n+1) \ln n - (n+1) \ln(n+1) = \\ &= \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] - (n+1) \ln \frac{n+1}{n} = B_n - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

ուստի

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n - 1; \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} K_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} B_n - 1 :$$

Մնում է կիրառել Կումերի հայտանիշը: ■

### 3. Գառսի հայտանշից:

**Թեորեմ 7.3:** Դիցուք  $a_n / a_{n+1}$  հարաբերությունն իւ վերջու մերկայացվում է՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^p},$$

տեսքով, որտեղ  $\lambda, \mu \in R$ ,  $p > 1$ , իսկ  $\theta_n$ -ը սահմանափակ հաջորդականությունն է՝  $|\theta_n| \leq M$  : Այդ դեպքում

ա) եթե  $\lambda > 1$ , ապա  $\sum a_n$  շարքը զուգամետ է,

եթե  $\lambda < 1$ , ապա  $\sum a_n = \infty$ ,

բ) եթե  $\lambda = 1$  և  $\mu > 1$ , ապա  $\sum a_n$  շարքը զուգամետ է, իսկ եթե  $\lambda = 1$

և  $\mu \leq 1$ , ապա  $\sum a_n = \infty$  :

► ա)-ն ամմիջապես բխում է Դալամբերի հայտանշիցից:

բ) Դիցուք՝

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^p} :$$

Առանձնացնենք երկու դեպք՝ 1)  $\mu \neq 1$  և 2)  $\mu = 1$  :

1)  $\mu \neq 1$  դեպքում կիրառենք Ռաբեի հայտանշը. քանի որ

$$R_n = n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu + \frac{\theta_n}{n^{p-1}} \rightarrow \mu,$$

ապա  $\mu > 1$  դեպքում՝  $\sum a_n < \infty$ , իսկ  $\mu < 1$  դեպքում՝  $\sum a_n = \infty$  :

2)  $\mu = 1$  դեպքում կիրառենք Բերտրանի հայտանշը. քանի որ

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\theta_n}{n^p},$$

$$B_n = \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \frac{\ln n}{n^{p-1}} \cdot \theta_n \rightarrow 0 < 1,$$

ապա  $\sum a_n$  շարքը տարամետ է: ■

Որպես Գաուսի հայտանիշի կիրառություն՝ հետազոտենք  $BH$ -պերերկրաչափական (Գաուսի) շարքը.

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) := \\ := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n : \quad (7.4)$$

Այդ շարքի ընդհանուր անդամը նշանակելով  $a_n$ -ով՝ կունենանք

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} x = \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)} x$$

Աերկայացումը, հետևաբար,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| :$$

Այժմ, ըստ Գալամբերի հայտանիշի, (7.4) շարքը  $|x| < 1$  դեպքում բացարձակ զուգամետ է, իսկ  $|x| > 1$  դեպքում՝ տարամետ:

Հիպերերկրաչափական շարքն աստիճանային շարք է, որի զուգամիտության շառավիղը հավասար է 1: Հետազոտենք շարքի զուգամիտությունը  $x = 1$  և  $x = -1$  կետերում:

Ունենք՝

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \alpha/n} &= 1 - \frac{\alpha/n}{1 + \alpha/n} = 1 - \frac{\alpha}{n} \cdot \frac{1}{1 + \alpha/n} = \\ &= 1 - \frac{\alpha}{n} \left(1 - \frac{\alpha/n}{1 + \alpha/n}\right) = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1 + \alpha/n} \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1 + \beta/n} = 1 - \frac{\beta/n}{1 + \beta/n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1 + \beta/n} \cdot \frac{1}{n^2} :$$

Հետևաբար,  $x = 1$  կետում կունենանք՝

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(1+1/n)(1+\gamma/n)}{(1+\alpha/n)(1+\beta/n)} = \left(1 + \frac{\gamma+1}{n} + \frac{\gamma}{n^2}\right) \cdot \\ &\cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^2}{1+\alpha/n} \cdot \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\beta^2}{1+\beta/n} \cdot \frac{1}{n^2}\right) = \\ &= 1 + \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}; \quad |\theta_n| \leq M: \end{aligned}$$

Ըստ Գառսի հայտանշի,  $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$  շարքը  $\gamma - \alpha - \beta > 0$  դեպքում բացարձակ զուգամետ է, իսկ  $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$  դեպքում՝ տարամետ (քանի որ  $a_n / a_{n+1} \rightarrow 1$ , ապա շարքի անդամները, սկսած որոշ համարից, ունեն նույն նշանը):

Հետազոտենք  $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ -ը: Ունենք՝

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(1+1/n)(1+\gamma/n)}{(1+\alpha/n)(1+\beta/n)} = 1 + \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^2}, \quad |\theta_n| \leq M,$$

ուստի  $\gamma - \alpha - \beta > 0$  դեպքում (7.4) շարքը ( $x = -1$  կետում) բացարձակ զուգամետ է:

$$\gamma - \alpha - \beta < -1 \text{ դեպքում՝ } \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} < 0, \text{ ուստի գոյություն ունի}$$

$$n_0 \in N \text{ թիվ, այնպիսին, որ } \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} < 1, \text{ եթե } n > n_0: \text{Սա նշանակում է, որ } |a_n|$$

հաջորդականությունն ի վերջո խիստ աճող է, հետևաբար՝  $a_n \not\rightarrow 0$ , այսինքն՝  $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$ -ը տարամետ է:

Մնում է հետազոտել  $-1 \leq \gamma - \alpha - \beta \leq 0$  դեպքը: Ունենք՝

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = 1 - \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2}; \quad |\lambda_n| \leq L:$$

$$\text{Եթե } \gamma - \alpha - \beta > -1, \text{ ի վերջո տեղի կունենա } \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \text{ անհա-$$

վասարությունը, այսինքն՝  $|a_n|$  հաջորդականությունն ի վերջո կնվազի: Ցույց տանք, որ այն ձգտում է զրոյի: Իրոք, քանի որ

$$|a_k| = |a_1| \prod_{n=1}^{k-1} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |a_1| \prod_{n=1}^{k-1} \left[ 1 - \left( \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} - \frac{\lambda_n}{n^2} \right) \right],$$

ապա անվերջ արտադրյալների 5-րդ հատկության համաձայն՝  $|a_k| \rightarrow 0$ : Հետևաբար,  $L\alpha\beta\gamma$  թերեմի համաձայն,  $F(\alpha, \beta, \gamma, -1)$  նշանափոխ շարքը  $-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$  դեպքում գուգամետ է (պայմանական):

Իսկ եթե  $\gamma - \alpha - \beta = -1$ , ապա

$$|a_k| = |a_1| \prod_{n=1}^{k-1} \left( 1 + \frac{\lambda_n}{n^2} \right) \not\rightarrow 0,$$

այսինքն՝ այս դեպքում (7.4) շարքը  $-1$  կետում տարամետ է:

Վերջում հետազոտենք բինոմական շարքը՝

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \quad (7.5)$$

դիտարկելով այն որպես հիպերերկարչափական շարք՝

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-m(-m+1)\cdots(-m+n-1)}{n!} (-x)^n : \quad (7.5')$$

Իսկապես, եթե (7.4) շարքի մեջ վերցնենք  $\beta = \gamma$ ,  $\alpha = -m$  և  $x$ -ը փոխարինենք  $(-x)$ -ով, կստանանք (7.5') շարքը: Այս դեպքում  $\gamma - \alpha - \beta = m$ , հետևաբար, (7.5') շարքը  $x = -1$  ( $-x = 1$ ) կետում գուգամետ է (բացարձակ), եթե  $m > 0$ , և տարամետ է, եթե  $m < 0$ : Իսկ  $x = 1$  կետում (7.5') շարքը բացարձակ գուգամետ է, եթե  $m > 0$ , պայմանական գուգամետ է, եթե  $-1 < m < 0$  և տարամետ է, եթե  $m \leq -1$ :

## § 8. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԾԱՐՔԵՐ

**1. Կոմպլեքս թվերի դաշտը:** Իրական թվերի  $(a, b)$  կարգավորված զույգը կոչվում է կոմպլեքս թիվ: Հետևաբար,  $(a, b) = (c, d)$  կոմպլեքս թվերի հավասարությունը համարժեք է  $a = c$ ,  $b = d$  երկու հավասարություններին:

$z = (a, b)$  և  $t = (c, d)$  կոմպլեքս թվերի գումարն ու արտադրյալը սահմանվում են հետևյալ կերպ.

$$z + t = (a + c, b + d); \quad zt = (ac - bd, ad + bc):$$

Դժվար չէ ապացուել, որ նշված գործողությունների նկատմամբ կոմպլեքս թվերի բազմությունը դաշտ է՝ կազմում, այսինքն, բավարարվում են հետևյալ արժիությունները՝

1. Կոմպլեքս թվերի բազմությունը գումարման գործողության նկատմամբ արելիան խումբ է.

$$z + t = t + z, \quad z + (t + \zeta) = (z + t) + \zeta, \quad z + 0 = z, \quad z + (-z) = 0,$$

զլրյական տարրի դերը կատարում է՝  $(0, 0)$ -ն, իսկ  $(a, b)$ -ի հակադարձի դերը՝  $(-a, -b)$ -ն:

2. Բազմապատկման գործողությունը տեղափոխական է, գուգորդական և գոյություն ունի միավոր՝  $(1, 0)$ :
3.  $z(t + \zeta) = zt + z\zeta$ :
4.  $(0, 0)$ -ից տարրեր յուրաքանչյուր տարր հակադարձն է՝ բազմապատկման գործողության նկատմամբ.  $(a, b)$ -ի հակադարձն է՝

$$\left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right):$$

Հեշտ է նկատել, որ  $a \rightarrow (a, 0)$  արտապատկերումը  $\hbar q \eta m \eta p \phi h q \eta t^*$ , որը գործում է իրական թվերի դաշտի և  $(a, 0)$  տեսքի կոմպլեքս թվերի ենթադաշտի միջև: Այսպիսով, կոմպլեքս թվերի դաշտը հանդիսանում է իրական թվերի դաշտի ընդլայնում: Այս փաստը մեզ քոյլ է տալիս  $a$  իրական թիվը նույնացնել  $(a, 0)$  կոմպլեքս թվի հետ:

Նշանակենք՝  $i = (0, 1)$ : Ակնհայտ է, որ  $i^2 = -1$ : Հաշվի առնելով վերևում ձեռք բերած պայմանավորվածությունները՝  $z = (a, b)$  կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել նաև  $z = a + bi$  տեսքով: Իբրոք,

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0)i = a + bi:$$

$a$  թիվը կոչվում է  $z = a + bi$  կոմպլեքս թվի իրական մաս և նշանակվում է  $\operatorname{Re} z$  սիմվոլով:  $b$ -ն կոչվում է  $z = a + bi$  կոմպլեքս թվի կեղծ մասի  $\operatorname{Im} z$  սիմվոլով:

\*  $\hbar q \eta m \eta p \phi h q \eta t^*$  կոչվում գործողությունները պահպանող փոխմիարժեք արտապատկերումը:

Երկրաչափորեն  $(a, b)$  կոմպլեքս թիվը կապատկերենք որպես կոորդինատային հարթության կետ ( $a$  աբսցիսկ և  $b$  օրդինատով), կամ որպես վեկտոր, որի սկզբնակետը կոորդինատների սկզբնակետն է, իսկ ծայրակետը՝  $(a, b)$ -ն (ապացուցել, որ վերջին դեպքում գումարման գործողության նկատմամբ առկա է իզոմորֆիզմ): Այդ վեկտորի երկարությունը կանվանենք  $z$  կոմպլեքս թվի մոդուլ և կնշանակենք  $|z|$  սիմվոլով, իսկ այդ վեկտորի, որպես շառավիղ վեկտորի, և աբսցիսների առանցքի դրական ուղղության կազմած  $\varphi$  անկյունը կանվանենք  $z$  կոմպլեքս թվի արգումենտ և կնշանակենք  $\varphi = \arg z$  սիմվոլով ( $z \neq 0$ ): Հետևաբար,  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , իսկ  $\arg z$ -ը բազմաթերթ ֆունկցիա է, որի արժեքները միմյանցից տարբերվում են  $2\pi$ -ի բազմապատճիկներով:

$(-\pi, \pi]$  միջակայքին պատկանող արգումենտի արժեքը կոչվում է նրա գլխավոր արժեք:

Նման մեկնաբանությամբ հարթությունը կանվանենք կոմպլեքս հարթություն, իսկ կոմպլեքս թվերը՝ կետեր:

Այսպիսով,  $z$  կետի դիրքը կոմպլեքս հարթության վրա որոշվում է ինչպես նրա  $a, b$  դեկարտյան կոորդինատների միջոցով, այնպես և  $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$  թետային կոորդինատների միջոցով: Այդ կոորդինատները կապված են  $a = r \cos \varphi$ ,  $b = r \sin \varphi$  բանաձևերով: Հաշվի առնելով այդ բանաձևերը,  $z$  կոմպլեքս թիվը կարելի է ներկայացնել

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

տեսրով, որը կոչվում է կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական ներկայացում:

$a - bi$  կոմպլեքս թիվը կանվանենք  $z = a + bi$  թվի կոմպլեքս համալուծ և կնշանակենք  $\bar{z}$  սիմվոլով: Հեշտ է ստուգել հետևյալ հավասարությունները.

$$\text{ա) } \overline{z+t} = \bar{z} + \bar{t}, \quad \text{բ) } \overline{zt} = \bar{z}\bar{t}, \quad \text{զ) } \overline{\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{1}{\bar{t}},$$

$$\text{դ) } \overline{\left(\frac{z}{t}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{t}}, \quad \text{ե) } z\bar{z} = |z|^2, \quad \text{զ) } z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z:$$

Սովորված համար ճիշտ են հետևյալ պնդումները.

$$1) |z \cdot t| = |z| |t| \quad (\text{ապացույց՝ } |zt|^2 = z \cdot t \cdot \bar{z} \cdot \bar{t} = |z|^2 |t|^2);$$

$$2) \left| \frac{z}{t} \right| = \frac{|z|}{|t|} \quad (\text{ապացույց՝ } |z| = \left| t \frac{z}{t} \right| = |t| \cdot \left| \frac{z}{t} \right|);$$

$$3) |z + t| \leq |z| + |t|$$

$$(\text{ապացույց՝ } |z + t|^2 = (z + t)(\bar{z} + \bar{t}) = |z|^2 + 2 \operatorname{Re} z \bar{t} + |t|^2 \leq (|z| + |t|)^2);$$

Վերջին անհավասարությունը կոչվում է եռանկյան անհավասարություն: Նրա երկրաչափական իմաստը կայանում է նրանում, որ եռանկյան մի կողմի երկարությունը չի գերազանցում մյուս երկու կողմերի երկարությունների գումարը:

Կոմպլեքս թվերի բազմությունը կնշանակենք  $\mathbb{C}$ -ով:

**2. Հաջորդականություններ և շարքեր:**  $z$  և  $t$  կոմպլեքս թվերի  $d(z, t)$  հեռավորությունը սահմանվում է այսպես՝  $d(z, t) = |z - t|$  (որը համընկնում է հարթության մեջ սովորական հեռավորությանը):

$z_0$  կետի  $\varepsilon$  - շրջակայր ասելով՝ հասկանում ենք  $z_0$  կենտրոնով և  $\varepsilon$  շառավղով  $D(z_0, \varepsilon)$  բաց շրջանը.  $D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < \varepsilon\}$ :

$z_0$  կոմպլեքս թիվը կոչվում է  $z_n$  կոմպլեքս թվերի հաջորդականության սահման, եթե ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թիվն համապատասխան գոյություն ունի  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ  $n > N(\varepsilon)$  պայմանից հետևի  $|z_n - z_0| < \varepsilon$  անհավասարությունը:

Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ  $z_0$  կետի ինչպիսի  $D(z_0, \varepsilon)$  շրջակայր էլ վերցնենք, սկսած որոշ համարից  $z_n$  կետերը ընկած կլինեն այդ շրջակայրում:

Հետևյալ թեորեմի միջոցով կոմպլեքս հաջորդականության սահմանի ուսումնակիրությունը բերվում է իրական հաջորդականության սահմանին.

**Թեորեմ 8.1:** *Որպեսզի  $z_n = x_n + i y_n$  կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը զուգամիտի  $z_0 = x_0 + i y_0$  կոմպլեքս թվին, անհրաժեշտ է և բավարար, որ  $x_n \rightarrow x_0$ ,  $y_n \rightarrow y_0$ :*

Ապացույցն անմիջապես բխում է հետևյալ անհավասարություններից.

$$|a|, |b| \leq |a + bi| \leq |a| + |b| : \quad (8.1)$$

Այս թեորեմի միջոցով իրական հաջորդականությունների հատկությունները (որոնցում չի մասնակցում իրական թվերի բազմության կարգավորվածությունը) կարելի է տարածել կոմպլեքս հաջորդականությունների վրա: Ներկայացնենք դրանցից մի քանիսը.

**Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմմա:** Յուրաքանչյուր սահմանափակ հացորդականություն պարունակում է զուգամետ ենթահաջորդականություն:

**Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը:** Որպեսզի  $z_n$  հացորդականությունը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվին համապատասխան զոյտություն ունենա  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n, n' > N(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z_{n'}| < \varepsilon :$$

Անհրաժեշտությունն ակնհայտ է, իսկ բավարարությունն ապացուցելու համար կիրառենք (8.1) անհավասարությունը և Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը իրական հացորդականությունների համար:

**Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը շարքերի համար:** Որպեսզի  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  շարքը լինի զուգամետ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ ցանկացած  $\varepsilon > 0$  թվին համապատասխան զոյտություն ունենա  $N(\varepsilon)$  բնական թիվ, այնպիսին, որ

$$n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots :$$

**Սահմանում:**  $\sum z_n$  շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է  $\sum |z_n|$  շարքը:

Կոշիի զուգամիտության սկզբունքից բխում է, որ բացարձակ զուգամետ շարքը զուգամետ է:

Շարքերի բացարձակ զուգամիտությունը ստուգելու համար կարելի է օգտագործել դրական շարքերի վերաբերյալ հայտանիշները: Հիշեցնենք դրանցից երկուսը.

**Դալամբերի հայտանիշը:** Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = q$ , ապա  $q < 1$  դեպքում

շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ  $q > 1$  դեպքում՝ տարամետ:

Տարամիտությունը բխում է այն բանից, որ  $q > 1$  դեպքում խախտվում է  $z_n \rightarrow 0$  (զուգամիտության անհրաժեշտ) պայմանը:

**Կոշիի հայտանիշը:** Եթե  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = k$ , ապա  $k < 1$  դեպքում շարքը բացարձակ զուգամետ է, իսկ  $k > 1$  դեպքում՝ տարամետ:

Այժմ  $\sum z_n$  շարքի անդամներից կազմենք անվերջ թվով շարքեր, այնպիս, որ յուրաքանչյուր անդամ այդ շարքերում մասնակցի մեկ և միայն մեկ անգամ.

$$\begin{aligned} z_{11} + z_{12} + \cdots + z_{1k} + \cdots \\ z_{21} + z_{22} + \cdots + z_{2k} + \cdots \\ \hline \hline z_{m1} + z_{m2} + \cdots + z_{mk} + \cdots \\ \hline \hline \end{aligned}$$

Այս նոր շարքերին կանվանենք տրված շարքի տրոհման շարքեր:

**Կրկնակի շարքերի թեորեմը:** Եթե տրված շարքը բացարձակ զուգամետ է, ապա բացարձակ զուգամետ կլինեն նաև տրոհման շարքերը և, եթե նրանց գումարները նշանակենք համապատասխանաբար  $s_1, s_2, \dots$ -ով, ապա բացարձակ զուգամետ կլինի նաև  $\sum s_n$  շարքը և տեղի կունենա

$$\sum s_n = \sum z_n$$

հավասարությունը:

**Դիսողություն:** Տրոհման շարքերի մի մասը կամ բոլորը կարելի է փոխարինել վերջավոր գումարներով: Հետևաբար, այդ թեորեմից բխում է բացարձակ զուգամետ շարքերի տեղափոխելիության հատկությունը:

**Շարքերի Կոշիի արտադրյալի մասին թեորեմը:** Եթե  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = A$  և

$\sum_{n=0}^{\infty} t_n = B$  շարքերը բացարձակ զուգամես են, ապա բացարձակ զուգամես

կլինի նաև նրանց Կոշիի արտադրյալը՝  $\sum_{n=0}^{\infty} (z_0 t_n + z_1 t_{n-1} + \dots + z_n t_0)$

շարքը, և վերջինիս գումարը հավասար է նախորդների գումարների արտադրյալին՝  $AB$ :

**3. Երսպնենցիալ և եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ:** Նշանակենք՝

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}:$$

Դամբարակի հայտանիշի համաձայն, այս շարքը բացարձակ զուգամես է ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա: Ապացուցենք ցուցչային ֆունկցիայի իմնական հատկությունը՝  $e^z \cdot e^t = e^{z+t}$ : Դրա համար օգտվենք շարքերի բազմապատկման թեորեմից: Ունենք՝

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^t &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k t^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+t)^n}{n!} = e^{z+t}: \end{aligned}$$

Նախապերջին հավասարությունը բխում է բինոմի բանաձևից: Այժմ նշանակենք՝

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots ; \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots :$$

Կրկին Դամբարակի հայտանիշի համաձայն, այս շարքերը բացարձակ զուգամիտում են ամբողջ կոմպլեքս հարթության վրա:

Ապացուցենք Էյլերի բանաձևը՝  $e^{iz} = \cos z + i \sin z, z \in \mathbb{C}$ :

Ունենք, որ

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + i \left( z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) = \cos z + i \sin z \end{aligned}$$

(օգտվեցինք կրկնակի շարքերի թեորեմից):

Եյլերի բանաձևը քոյլ է տալիս եռանկյունաչափական ֆունկցիաներն արտահայտել էքսպոնենցիալ ֆունկցիայի միջոցով՝

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Մասնավորաբար, Եյլերի բանաձևի մեջ վերցնելով  $z = \varphi$  իրական թիվը, կստանանք՝  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ : Հետևաբար, կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական ներկայացումը կարելի է գրել նաև  $z = re^{i\varphi}$  տեսքով, որին անվանում են կոմպլեքս թվի բևեռային ներկայացում ( $r = |z|$ ,  $\varphi = \arg z$ ):

Ցույց տանք, որ  $e^z$  ֆունկցիան պարբերական է: Այս համար լրիծենք  $e^z = 1$  հավասարումը: Նշանակենք՝  $z = x + iy$ : Ունենք, որ

$$\begin{aligned} 1 &= e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} \Rightarrow e^x = 1; e^{iy} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = 0; \cos y = 1 \Rightarrow x = 0; y = 2\pi k; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Այժմ դիտարկենք  $e^{z_1} = e^{z_2}$  հավասարությունը: Օգտվելով  $e^{-z} = 1/e^z$  նույնությունից (որը բխում է հիմնական հատկությունից)՝ կստանանք  $e^{z_1-z_2} = 1$  հավասարությունը, որն էլ համարժեք է՝  $z_1 - z_2 = 2\pi ki$ :

Արված դատողություններից բխում է, որ  $w = e^z$  ֆունկցիան  $y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi$  հորիզոնական շերտի տարրեր կետերում ընդունում է տարրեր արժեքներ (միաբնական է) և այդ շերտն արտապատկերում է  $y_0 < \arg w < y_0 + 2\pi$  լիվ անկյան վրա (այդ անկյունն իրենից ներկայացնում է ողջ կոմպլեքս հարթությունը՝ առանց  $\arg w = y_0$

ճառագայթի): Եթոք, եթե  $w = e^x \cdot e^{iy}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ,  $y_0 < y < y_0 + 2\pi$ , ապա  $0 < |w| < \infty$ ,  $y_0 < \arg w < y_0 + 2\pi$ :

**4.Լոգարիթմ:** Եքաղնենցիալ ֆունկցիայի հակադարձին կանվանենք լոգարիթմական ֆունկցիա և կնշանակենք  $w = \log z$  (բազմաթերթ է): Նշանակենք  $w = u + iv$  և  $u, v$ -ն արտահայտենք  $z$ -ի միջոցով.

$$e^w = z \Rightarrow e^{u+iv} = z \Rightarrow e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi} \quad (z = re^{i\varphi}) \Rightarrow$$

$$e^u = r, \quad e^{iv} = e^{i\varphi} \Rightarrow u = \ln r, \quad v = \arg z:$$

Այսպիսով, ստանում ենք  $\log z = \ln|z| + i \arg z$ : Հետևաբար, լոգարիթմական ֆունկցիայի բազմաթերթությունը պայմանավորված է  $\arg z$ -ի բազմաթերթությամբ: Ընտրելով  $\arg z$ -ի զիսավոր արժեքը՝  $-\pi < \arg z < \pi$ , կստանանք լոգարիթմի զիսավոր արժեքը, որը կնշանակենք  $\ln z$ :

Լոգարիթմական ֆունկցիայի զիսավոր արժեքը բացասական կիսաառանցքով ճեղված կոմպլեքս հարթությունը փոխմիարժեք արտապատկերում է  $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$  բաց շերտի վրա:

**5.Աստիճան:** Կոմպլեքս աստիճանը սահմանվում է  $z^t = e^{t \log z}$  հավասարությամբ (բազմաթերթ է): Եթե  $t$ -ն համընկնում է  $n$  բնական թվի հետ,  $z^n$ -ի համար ունենում ենք երկու սահմանումներ: Դժվար չէ նկատել որ նրանք իրար հետ հաճընկնում են: Եթոք,  $\log z$ -ի կամայական ֆիքսված արժեքի համար ունենք

$$e^{n \log z} = e^{\log z} \cdot e^{\log z} \cdots e^{\log z} = z^n:$$

$\sqrt[n]{z}$ -ը նույնպես կարելի է սահմանել երկու ձևով՝ մեկը, որպես աստիճան բարձրացնելու հակադարձը, մյուսը՝  $z^{1/n}$ : (Ապացուցել, որ արդյունքը նույնը կլինի):

Ունենք՝

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \log z} = e^{\frac{1}{n}(\ln|z| + i \arg z)} = |z|^{1/n} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \dots,$$

որտեղ  $\varphi$ -ն  $\arg z$ -ի որևէ արժեք է: Եթե  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , կստանանք միմյանցից տարրեր արժեքներ, իսկ մնացած  $k$ -երի դեպքում այդ արժեքները կկրկնվեն: Այսպիսով,  $\sqrt[n]{z}$  ֆունկցիան յուրաքանչյուր  $z \neq 0$  կետում ընդունում է  $n$  հատ արժեքներ:

Տանգենս և կոտանգենս ֆունկցիաները մտցվում են որպես սիմուս և կոսիմուս ֆունկցիաների հարաբերություններ:

$$\arccos z \text{ ֆունկցիան ստանալու համար լուծում ենք հետևյալ հավասարումը՝} \quad \cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = w:$$

$$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}, \text{ հետևաբար,}$$

$$\arccos w = z = -i \log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}):$$

Այս հավասարությունը կարող ենք գրել նաև

$$\arccos w = \pm i \log(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

տեսքով, քանի որ  $w + \sqrt{w^2 + 1}$  և  $w - \sqrt{w^2 - 1}$  թվերը հակադարձ են:

Հակադարձ սիմուսը կարելի ներմուծել

$$\arcsin w = \frac{\pi}{2} - \arccos w$$

հավասարության միջոցով:

## Բ ՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

<b>ՆԱԽԱԲԱՆ .....</b>	<b>3</b>
<b>I ԳԼՈՒԽ, ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐ</b>	
<b>ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ.....</b>	<b>5</b>
§1. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԻ ՍԱՀՄԱՆՈՒՄԸ: ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ԲԱԶԱՆԻԹՅԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԸ	
1. Իրական թվի սահմանումը.....	6
2. Իրական թվերի բազմության կարգավորումը.....	9
3. Իրական թվերի համակարգի լիիվությունը.....	10
4. Ծշգրիտ եղբերի գոյությունը.....	11
§2. ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԳՈՐԾՈՂՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏ	
1. Իրական թվերի գումարը.....	13
2. Իրական թվերի արտադրյալը.....	16
§3. ԻՐԱԿԱՆ ԹՎԵՐԻ ՀԵՏԱԳԱ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
1. Արմատի գոյությունը.....	18
2. Իրական ցուցիչով աստիճան.....	20
3. Լոգարիթմի գոյությունը.....	22
4. Իրական թվի տասնորդական ներկայացումը.....	23
5. Թվային առանցք.....	26
<b>II ԳԼՈՒԽ, ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ</b>	
§1. ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆ	
1. Հաջորդականության սահմանի սահմանումը.....	29
2. Չուզամետ հաջորդականությունների պարզագոյն հատկությունները... ...32	32
3. Անվերջ փորբեր.....	34
4. Անվերջ մեծեր.....	35

5. Թժկարանական գործողություններ զուգամետ հաջորդականությունների հետ.....	36
6. Անորոշություններ.....	38
7. Սահմանային անցում անհավասարություններում.....	39
<b>§2. ՄՈՆՈՏՈՆ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ</b>	
1. Մոնոտոն հաջորդականության սահմանը.....	40
2. Ը բիվը.....	42
3. Ը բվի մոտավոր հաշվումը.....	43
4. Ծողուցի թեորեմը.....	45
5. Ներդրված հատվածների լեմման.....	47
<b>§3. ԵՆԹԱՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՄԱՄՆԱԿԻ ՍԱՀՄԱՆ</b>	
1. Մամնակի սահման.....	48
2. Հաջորդականության վերին և ստորին սահմանները.....	50
3. Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման.....	51
<b>§4. ԿՈՇԽԻ ԶՈՒԳԱՍԻՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ</b>	
1. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը.....	53
<b>§5. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ</b>	
1. Կոտակման կետ.....	54
2. Ֆունկցիայի սահմանի Կոշիի սահմանումը.....	56
3. Ֆունկցիայի սահմանի Հայնեի սահմանումը.....	59
4. Միակողմանի սահման.....	60
5. Ը բվի ընդհանուր բանաձևը.....	61
6. Վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիայի պարզագոյն հատկությունները.....	62
7. Թժկարանական գործողություններ վերջավոր սահման ունեցող ֆունկցիաների հետ.....	63
8. Մոնոտոն ֆունկցիայի սահմանը.....	64

**9. Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը.....65**

**III ԳԼՈՒԽ, ԱՆԲԵՂԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ**

**§1. ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ԱՆԲԵՂԱՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ԽԶՈՒՄՆԵՐԸ**

1. Անընդհատության սահմանումը.....67

2. Թվաբանական գործողություններ անընդհատ ֆունկցիաների հետ.....68

3. Սիակողմանի անընդհատություն.....69

4. Սոնուտոն ֆունկցիայի խզումները և անընդհատությունը.....71

5. Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը.....72

6. Երեք իհմնական սահմանները.....74

**§2. ԱՆԲԵՂԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՍՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ**

1. Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները.....75

2. Հակադարձ ֆունկցիայի գոյությունը և անընդհատությունը.....78

3. Վայերշտրասի թեորեմները.....79

4. Հավասարաչափ անընդհատություն.....81

**§3. ԲՈՐԵԼԻ ԼԵՍՍԱՆ ԵՎ ՆՐԱ ԿԻՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ**

1. Բորելի լեմման.....85

2. Բորելի լեմմայի ընդհանուր ձևակերպումը.....87

3. Վայերշտրասի առաջին թեորեմի ապացույցը Բորելի լեմմայի  
օգնությամբ.....88

4. Կանոնորի թեորեմի ապացույցը Բորելի լեմմայի օգնությամբ.....89

5. Իրական բվերի լրիվությանը համարժեք պնդումներ.....91

**IV ԳԼՈՒԽ, ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱԾԻՎ**

**§1. ԱԾԱՆՑՅԱԼ**

1. Ածանցյալ սահմանումը.....93

2. Ածանցման բանաձևերը.....94

3. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը.....96

---

4. Ածանցման կանոնները.....	97
5. Բարդ ֆունկցիայի ածանցյալը.....	98
6. Ածանցյալի երկրաչափական իմաստը.....	99
7. Հակադարձ ֆունկցիայի ածանցյալը.....	100
<b>§2. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ</b>	
1. Դիֆերենցիուրյուն և դիֆերենցիալ.....	102
2. Դիֆերենցման կանոնները.....	104
<b>§3. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ</b>	
1. Բարձր կարգի ածանցյալներ.....	104
2. Լայբնիցի բանաձևը.....	106
3. Բարձր կարգի դիֆերենցիալներ.....	107
<b>§4. ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԹԵՌՈՒՄՆԵՐԸ</b>	
1. Ֆերմայի թեորեմը.....	108
2. Ռոդի թեորեմը.....	108
3. Լաքրանժի վերջավոր ածերի բանաձևը.....	109
4. Կոշիի վերջավոր ածերի բանաձևը.....	111
5. Դարրուի թեորեմը.....	111
<b>§5. ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԲԱՑԱՌԱՆ ԼՈՊԻՏԱԼԻ ԿԱՆՈՆԸ</b>	
1. 0/0 տեսքի անորոշություններ.....	112
2. $\infty/\infty$ տեսքի անորոշություններ.....	114
<b>§6. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՋԵՎԸ</b>	
1. Թեյլորի բանաձևը բազմանդամների համար.....	116
2. Թեյլորի բանաձևը կամայական ֆունկցիայի համար.....	118
3. Սնացորդային անդամը Պեսոնյի տեսքով.....	118
4. Սնացորդային անդամը Լագրանժի և Կոշիի տեսքերով.....	120
5. Հիմնական տարրական ֆունկցիաների Թեյլորի բանաձևերը.....	121
<b>§7. ՖՈՒՆԿՑԻԱԼՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐԻ ՄԻՋԱՑՈՎ</b>	
1. Ֆունկցիայի հաստատուն լինելու պայմանը.....	122

---

2. Ֆունկցիայի մոնոտոն լինելու պայմանը.....	123
3. Երստրեմումներ.....	124
4. Երստրեմումներ գտնելու առաջին կանոնը.....	124
5. Երստրեմումներ գտնելու երկրորդ կանոնը.....	125
6. Բարձր կարգի ածանցյալների օգտագործումը.....	125
7. Գոգավորության ուղղություն.....	126
8. Ծրջման կետ.....	127
9. Ասիմպտոտներ.....	128
<b>§8. ՈՒՌՈՒՑԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ</b>	
1. Ուսուցիկ ֆունկցիայի սահմանումը և աճընդհատությունը.....	130
2. Դիֆերենցելի ուսուցիկ ֆունկցիաներ.....	132
3. Ոչ դիֆերենցելի ուսուցիկ ֆունկցիաներ.....	133
4. Յենէնի անհավասարությունը.....	134
5. Հյուրերի անհավասարությունը.....	135
6. Մինկովսկիի անհավասարությունը.....	136

## V ԳԼՈՒԽ, ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՇԻՎ

### §1. ԱՆՈՐՈՇ ԻՆՏԵԳՐԱԼ

1. Նախմական ֆունկիա և անորոշ ինտեգրալ.....	138
2. Ինտեգրման պարզագույն կանոնները.....	139
3. Փոփոխականի փոխարիժում.....	141
4. Սաւերով ինտեգրում.....	142

### §2. ՈՐՈՇՅԱԼ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՍԱԿԱՄՈՒՄ ԵՎ ԳՈՅՆԻԹՅԱՆ

#### ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԸ

1. Որոշյալ ինտեգրալի սահմանումը.....	144
2. Ինտեգրելության անհրաժեշտ պայմանը.....	145
3. Դարրուի գումարները.....	146
4. Ինտեգրալի գոյության պայմանը.....	149

---

§3. ԻՆՏԵԳՐԵԼԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐ	152
§4. ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
1. Հավասարությունով արտահայտվող հատկություններ	154
2. Անհավասարություններով արտահայտվող հատկություններ	156
3. Միջին արժեքի բնորեմբը	157
4. Միջին արժեքի ընդհանրացված բնորեմբը	158
§5. ԻՆՏԵԳՐԱԼԸ ՈՐՊԵՍ ՎԵՐԻՆ ՍԱՀԱԱԾԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱ	159
§6. ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՃՎԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱԶԵՎԸ (ՆՅՈՒՏՈՆ – ԼԱՅԲՆԻՑ)	161
§7. ՄԻՋԻՆ ԱՐԺԵՔԻ ԵՐԿՐՈՐԴ ԹԵՇՈՐԵՄԸ (ԲՈՆՆԵ)	162
§8. ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՓՈԽԱՐԲՆՈՒՄ ԵՎ ԱՎԱԵՐՈՎ ԻՆՏԵԳՐՈՒՄ	
1. Փոփոխականի փոխարինում	164
2. Մասերով ինտեգրում	164
3. Վալյուի բանաձևը	165
4. Թեյլորի բանաձևի մնացորդային անդամը	166
 VI ԳԼՈՒԽ, ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ԿԻՐԱԱՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
§1. ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ՍԱԿԵՐԵՍ	
1. Քառակուսելի պատկերներ	168
2. Կորագիծ սեղանի մակերեսը	169
3. Քառակուսելիության հայտանիշներ	170
4. Մակերեսի աղիտիվությունը	172
5. Մակերեսի արտահայտումը բևեռային կոորդինատներով	174
§2. ՍԱՐՍԻՆՆԵՐԻ ԾԱՎԱԼՆԵՐԸ	
1. Խորանարդելի մարմիններ	177
2. Գլանի ծավալը	178
3. Ծավալի արտահայտումն ինտեգրալով	179
4. Պտտման մարմնի ծավալը	181

---

 §3. ԿՈՐԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

1. Ուղելի կորեր.....	182
2. Կորի երկարության արտահայտումն իմտեզրալով.....	183
3. Տարածական կորի երկարությունը.....	186
4. Կորի երկարության երկրորդ սահմանումը.....	186

 VII ԳԼՈՒԽ, ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ  
ԱՆԸՆԴՀԱՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

 §1. ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԸ  $R^m$  ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

1. $R^m$ -ը որպես գծային նորմավորված տարածություն.....	189
2. Հաջորդականության սահման.....	190
3. Կոորդինատային գուգամիտություն.....	191
4. Բոլցանո - Վայերշտրասի լեմման.....	192
5. Կոչիի գուգամիտության սկզբունքը.....	193

## §2. ՄԻ ՔԱՆԻ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՍԱՀՄԱՆ

1. Կոտակման կետ $R^m$ -ում.....	193
2. Մի քանի փոփոխականի ֆունկցիայի սահմանի սահմանումը.....	193
3. Թվաբանական գործողություններ.....	195
4. Կոչիի գուգամիտության սկզբունքը.....	195
5. Հաջորդական սահմաններ.....	196
6. Վեկտոր - ֆունկցիայի սահմանը.....	198

## §3. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐ

1. $R^m$ տարածության տոպոլոգիան.....	199
2. Բորելի լեմման.....	201
3. Անընդհատ ֆունկցիաներ.....	203
4. Բարդ ֆունկցիայի անընդհատությունը.....	205
5. Անընդհատ ֆունկցիաների օրինակներ.....	206

<b>§4. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ</b>	
1. Բոլցանո - Կոշիի թեորեմները.....	207
2. Վայերշտրասի թեորեմները.....	209
3. Հավասարաչափ անընդհատություն.....	210
<b>§5. ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐ</b>	
1. Անընդհատությունն արտապատկերումների լեզվով.....	212
2. Կոմպակտ բազմության անընդհատ պատկերը.....	215
3. Կապակցվածություն.....	215
4. Կապակցված բազմության անընդհատ պատկերը.....	218
 <b>VIII ԳԼՈՒԽ, ԹՎԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՇԻՎ</b>	
<b>§1. ՍԱՄՆԱԿԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ</b>	
1. Մասնակի ածանցյալներ.....	220
2. Ֆունկցիայի աճի բանաձևը.....	221
3. Դիֆերենցիալ և դիֆերենցիալ.....	224
4. Դիֆերենցիալի երկրաչափական իմաստը.....	226
5. Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիությունը և մասնակի ածանցյալները.....	229
6. Դիֆերենցիալի տեսքի ինվարիանտությունը.....	231
7. Լազրանժի վերջավոր աճերի բանաձևը.....	232
8. Ուղղությամբ ածանցյալ.....	233
9. Համասեռ ֆունկցիաներ.....	235
<b>§2. ԲԱՐՁՐ ԿԱՐԳԻ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼՆԵՐ</b>	
1. Բարձր կարգի մասնակի ածանցյալներ և դիֆերենցիալներ.....	237
2. Խտան ածանցյալների թեորեմները.....	240
3. Նյուտոնի բազմանդամի բանաձևը.....	243
4. Բարդ ֆունկցիայի դիֆերենցիալները.....	245
<b>§3. ԹԵՅԼՈՐԻ ԲԱՆԱՋԵՎԸ</b>	
1. Մնացորդային անդամը Լազրանժի տեսքով.....	246

2. Սնացորդային անդամը Թեանոյի տեսքով.....	247
§4. ԷքՍՏՐԵՄՈՒՄՆԵՐ	
1. Էրստրեմումներ.....	250
2. Բավարար պայմաններ (երկու փոփոխականի ֆունկցիայի դեպքը).....	251
3. Բավարար պայմաններ, ընդհանուր դեպքը.....	253
<b>IX ԳԼՈՒԽ, ԹՎԱՅԻՆ ԾԱՐՔԵՐ</b>	
§1. ԹՎԱՅԻՆ ԾԱՐՔԻ ԳՈՒԱՄՐԸ ԵՎ ԶՈՒԳԱԽՏՈՒԹՅՈՒՆԸ	
1. Հիմնական գաղափարներ.....	256
2. Չուզամեն շարքերի պարզագույն հատկությունները.....	258
3. Կոշիի զուգամիտուրյան սկզբունքը.....	260
§ 2. ԴՐԱԿԱՆ ԾԱՐՔԵՐ	
1. Դրական շարքի զուգամիտուրյան պայմանը.....	261
2. Բաղդատման հայտանիշները.....	263
3. Էլերի բանաձևը.....	266
4. Կոշիի քեռորեմը մոնուռն շարքերի վերաբերյալ.....	267
5. Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշները.....	268
6. Ուրբեի հայտանիշը.....	272
7. Կոշիի ինտեղրապային հայտանիշը.....	274
8. Արելի քեռորեմը մոնուռն շարքերի վերաբերյալ.....	278
9. Արել - Դիմիի քեռորեմները.....	279
§3. ԸՆԴՀԱՄՈՒՐ ԾԱՐՔԵՐ	
1. Նշանափոխ շարքեր.....	281
2. Բացարձակ և պայմանական զուգամիտուրյուն.....	282
3. Կոշիի և Դալամբերի հայտանիշներն ընդհանուր դեպքում.....	284
4. Արելի և Դիմիլելի հայտանիշները.....	285
§4. ԶՈՒԳԱՍԵՏ ԾԱՐՔԵՐԻ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	
1. Շարքերի խմբավորումը.....	288

---

2. Ծարքերի տեղափոխությունները.....	289
3. Կրկնակի շարքերի թեորեմը.....	292
4. Ծարքերի Կոչիի արտապրյալը.....	294
§5. ԹԵՅԼՈՐԻ ԾԱՐՁ	
1. Աստիճանային շարքեր.....	296
2. Թեյլորի շարք.....	298
3. Ստիռլինգի բանաձևը.....	304
§ 6. ԱՆՎԵՐՁ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐ	
1. Հիմնական գաղափարներ.....	307
2. Պարզագույն թեորեմներ: Կապը շարքերի հետ.....	308
3. Բացարձակ և պայմանական զուգամիտություն.....	311
4. Էյլերի բանաձևը պարզ բվերի համար.....	313
§ 7. ԿՈՒՄԵՐԻ, ԲԵՐՏՐԱՎԻ ԵՎ ԳԱՈՒԽԻ ՀԱՅՏԱԿԱՆՆԵՐԸ	
1. Կոմերի հայտանիշը.....	314
2. Բերտրանի հայտանիշը.....	316
3. Գառսի հայտանիշը.....	317
§ 8. ԿՈՄՊԼԵՔՍ ԹՎԵՐԻ ՀԱԶՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՎ ԾԱՐՁԵՐ	
1. Կոմպլեքս բվերի դաշտը.....	320
2. Հաջորդականություններ և շարքեր.....	323
3. Էրսկոնենցիալ և եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ.....	326
4. Լոգարիթմ.....	328
5. Աստիճան.....	328
<b>Բ ՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ</b> .....	<b>330</b>

## ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՍՏԱՐԱՐԱՆ

Վ. Խ. ՄՈՒՍՈՅԱՆ

# ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆԱԼԻԶ

## առաջին մաս

Երկրորդ՝ լրամշակված հրատարակություն

Երաշխավորված է ՀՀ ԿԳ. նախարարության կողմից  
որպես բուհական դասագիրք

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի  
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի  
Հրատ. սրբագրումը՝ Մ. Մարտիրոսյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:  
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Ստորագրված է տպագրության՝ 20.02.2018:  
Չափսը՝ 60x84<sup>1/16</sup>: Տպ. մամուլ՝ 21.25:  
Տպարանակը՝ 150:

ԵՊՀ հրատարակչություն  
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1  
[www.publishing.am](http://www.publishing.am)



## ՎԻԴՈԿ ԽԱՅՔԻ ՄՈՒՍՈՅԱՆ

Վիդոկ Խայքի Մուսոյանը ծնվել է 1938-ի հոկտեմբերի 24-ին, Նոր Բայազեն (այժմ՝ Գավառ) քաղաքում։ Նախնական կրթությունը ստացել է տեղի Հ. Սարգսիանյանի անվան միջնակարգ դպրոցում։ 1957-ին ընդունվել և 1962-ին ավարտել է Երևանի պետական համալսարանը՝ ստանալով մարենատիկոսի որակավորում։ Նոյն թվականին գրուովել է ԽՍՀՄ ԳԱ Վ. Ա. Ստելլովի անվան ինստիտուտի ասպիրանտուրա։ 1966-ին պաշտպանելով թեկնածուական ատենախոսություն՝ վերադարձել է Երևան և աշխատանքի անցել ՀՀ ԳԱ մարենատիկական անվան ինստիտուտում։

1967-ին որպես ավագ դասախոս հրավիրվել է աշխատանքի Խ. Արովյանի անվան հայկական մանկավարժական ինստիտուտ, իսկ 1968-ին աշխատանքի է անցել Երևանի պետական համալսարանում՝ որպես մարենատիկական անվայիզի և ֆոնկցիաների տեսության ամբիոնի դոցենտ։

Վ. Մուսոյանը 1977-ին ընտրվել է Երևանի պետական համալսարանի մեխանիկամարենատիկական, իսկ 1992-ին՝ մարենատիկայի ֆակուլտետի դիվան։ 1988-ին պաշտպանել է դրվագական ատենախոսություն և ստացել ֆիզիկամարենատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճան, իսկ 1991-ին՝ պրոֆեսորի գիտական կոչում։ 1992-1997-ին մարենատիկական անվայիզի ամբիոնի վարչին էլու Նրա գիտական աշխատանքները նվիրված են կոմպյուտերագործության առաջական մեջքերի համար։

Վախճանվել է 2009-ի օգոստոսի 18-ին։

Անվանի գիտականը և մանկավարժը երկար տարիներ վարել է մարենատիկական անվայիզի և ֆոնկցիաների տեսության ընդիհանուր և մասնագիտական շուրջ երկու տասնյակ դասընթացներ։ Նրա դասախոսություններով կրթվել և ոգեշնչվել են բազմաթիվ երիտասարդներ, որոնք այսօր գիտական անուններ, ուսուցիչներ կամ պարզապես հայրենասեր մարդիկ են։

