Դիսկրետ մաթեմատիկա

Պատասխանների ամբողջական բանալի

Վարժություններ 1–8

Այս փաստաթուղթը պարունակում է ճիշտ պատասխաններ և լուծումների համառոտ ուրվագծեր 1-ից 8-րդ բոլոր վարժությունների համար: Վերջնական թվային պատասխանները առանձնացված են $\boxed{\cdot}$ շրջանակով: Մանրամասն մեկնաբանություններով լուծումների համար տե՛ս առանձին լուծումների փաստաթղթերը:

Contents

Գործնական 1 — Բազմությունների տեսություն

Խնդիր 1

Ի՞նչ է ներկայացնում $\{\varnothing\}$ բազմությունը և քանի՞ տարր ունի այն:
$\{\varnothing\}$-ն բազմություն է, որի միակ տարրը դատարկ բազմությունն է: Այն ունի $\boxed{1}$ տարր:

Խնդիր 2

Ո՞ր պնդումներն են ճիշտ:

2.1. $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ — **ՃԻՇՏ Է**: Բազմությունը պարունակում է $\varnothing$-ն որպես տարր:

2.2. $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ — **ՃԻՇՏ Է**: $\{\{\varnothing\}\}$ բազմության միակ տարրը $\{\varnothing\}$-ն է:

2.3. $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$ — **ՍԽԱԼ Է**: Միակ տարրը $\{\varnothing\}$-ն է, որը հավասար չէ $\varnothing$-ին:

Խնդիր 3

Քանի՞ տարր ունի $\{\{\varnothing\}\}$ բազմությունը:
$\boxed{1}$: Նրա միակ տարրը $\{\varnothing\}$-ն է:

Խնդիր 4

Քանի՞ տարր ունեն հետևյալ բազմությունները:

4.1. $\{1, 2, 1\}$՝ $\boxed{2}$ (կրկնությունները անտեսվում են, բազմությունը $\{1, 2\}$-ն է):

4.2. $\{1, 2, \{1, 2\}\}$՝ $\boxed{3}$ (տարրերն են՝ 1, 2, $\{1, 2\}$):

4.3. $\{\{2\}\}$՝ $\boxed{1}$ (տարրն է՝ $\{2\}$):

4.4. $\{1, \{1\}\}$՝ $\boxed{2}$ (տարրերն են՝ 1 և $\{1\}$, դրանք տարբեր են):

4.5. $\{1, \varnothing\}$՝ $\boxed{2}$ (տարրերն են՝ 1 և $\varnothing$):

4.6. $\{\{\varnothing\}, \varnothing\}$՝ $\boxed{2}$ (տարրերն են՝ $\{\varnothing\}$ և $\varnothing$):

4.7. $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$՝ $\boxed{1}$ (կրկնություն, բազմությունը $\{\{\varnothing\}\}$-ն է):

4.8. $\{x \mid 2x = 1\}$, որտեղ $x \in \mathbb{R}$՝ $\boxed{1}$ (բազմությունը $\{\frac{1}{2}\}$-ն է):

Խնդիր 5

Ճի՞շտ է արդյոք, որ $\{1, 2\} \in \{1, 2, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$:
ՈՉ: Աջ կողմի բազմության տարրերն են՝ 1, 2, $\{1, 3\}$ և $\{1, 2, 3\}$: Դրանցից ոչ մեկը հավասար չէ $\{1, 2\}$-ին:

Խնդիր 6

Բերեք բազմությունների օրինակներ, որոնք իրենք իրենց տարր են:

ZFC բազմությունների ստանդարտ տեսությունում (Ռեգուլյարության աքսիոմով) ոչ մի բազմություն իր տարրը չէ: Սակայն, «նաիվ» տեսությունում կամ առանց ռեգուլյարության տեսություններում, «բոլոր բազմությունների բազմությունը»՝ $V = \{x \mid x = x\}$, կբավարարեր $V \in V$ պայմանին: Մեկ այլ դասական օրինակ՝ եթե S-ը սահմանենք որպես «բոլոր այն բազմությունների բազմություն, որոնք թվերի բազմություններ չեն», ապա $S \in S$ (Ռասելյան տիպի կառուցում): ZFC-ում **նման բազմություն գոյություն չունի**:

Խնդիր 7

Բերեք A, B, C բազմությունների օրինակներ, որտեղ $A \in B$, $B \in C$, բայց $A \notin C$:

Դիցուք $A = 1$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1, 2\}, 3\}$: Այդ դեպքում $1 \in \{1, 2\}$, $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 3\}$, բայց $1 \notin \{\{1, 2\}, 3\}$, քանի որ C-ի տարրերն են $\{1, 2\}$-ը և 3-ը:

Խնդիր 8

Ապացուցել՝ $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \iff a = c$ և $b = d$:

Ապացույց. ($\Leftarrow$) Ակնհայտ է տեղադրմամբ: ($\Rightarrow$) Հավասարությունից հետևում է, որ $\{a\}$-ն պետք է հավասար լինի կա՛մ $\{c\}$-ին, կա՛մ $\{c, d\}$-ին: Եթե $\{a\} = \{c, d\}$, ապա $c = d = a$, և այդ դեպքում $\{a, b\} = \{c\} = \{a\}$, ինչից հետևում է $b = a = c = d$: Եթե $\{a\} = \{c\}$, ապա $a = c$, և մնացած տարրը տալիս է $\{a, b\} = \{c, d\} = \{a, d\}$, հետևաբար $b = d$: □

Խնդիր 9

Ապացուցել երեք բազմային հավասարություններ/ներառումներ:

(a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y,\ x = 6y\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists u, v,\ x = 2u$ և $x = 3v\}$:

Ապացույց. ($\subseteq$) Եթե $x = 6y$, ապա $x = 2(3y)$ և $x = 3(2y)$: ($\supseteq$) Եթե $x = 2u$ և $x = 3v$, ապա x-ը բաժանվում է և՛ 2-ի, և՛ 3-ի, հետևաբար նաև ԱԸԲ$(2, 3) = 6$-ի: □

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y,\ x = y^2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$:

Ապացույց. ($\subseteq$) $x = y^2 \geq 0$: ($\supseteq$) Եթե $x \geq 0$, վերցնենք $y = \sqrt{x}$, այդ դեպքում $x = y^2$: □

(c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y,\ x = 6y\} \subset \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y,\ x = 2y\}$:

Ապացույց. Եթե $x = 6y$, ապա $x = 2(3y)$, ուստի $\subseteq$ տեղի ունի: Ներառումը խիստ է, քանի որ $2 = 2 \cdot 1$-ը աջ կողմի բազմությունում է, բայց 2-ը 6-ի բազմապատիկ չէ: □

Խնդիր 10

Ապացուցել $\subseteq$ և $\subset$ հարաբերությունների տրանզիտիվությունը:

(a) Եթե $A \subseteq B$ և $B \subseteq C$, ապա $A \subseteq C$:

Ապացույց. Դիցուք $x \in A$: Այդ դեպքում $x \in B$ (քանի որ $A \subseteq B$), որտեղից էլ $x \in C$ (քանի որ $B \subseteq C$): □

(b) Եթե $A \subseteq B$ և $B \subset C$, ապա $A \subset C$:

Ապացույց. Ըստ (a)-ի, $A \subseteq C$: Քանի որ $B \subset C$, գոյություն ունի $z \in C \setminus B$: Եթե $A = C$, ապա $z \in A \subseteq B$, ինչը հակասություն է: Ուստի $A \neq C$, այսինքն՝ $A \subset C$: □

(c) Եթե $A \subset B$ և $B \subseteq C$, ապա $A \subset C$:

Ապացույց. Ըստ (a)-ի, $A \subseteq C$: Քանի որ $A \subset B$, գոյություն ունի $z \in B \setminus A$, և $z \in C$, քանի որ $B \subseteq C$: Այսպիսով $z \in C \setminus A$, հետևաբար $A \neq C$: □

(d) Եթե $A \subset B$ և $B \subset C$, ապա $A \subset C$:

Ապացույց. Հետևում է (c)-ից, քանի որ $B \subset C$ ենթադրում է $B \subseteq C$: □

Խնդիր 11

Բերեք A, B, C, D, E բազմությունների օրինակներ, որտեղ $A \subseteq B$, $B \in C$, $C \subseteq D$, $D \subseteq E$:

$A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1, 2\}, 3\}$, $D = \{\{1, 2\}, 3, 4\}$, $E = \{\{1, 2\}, 3, 4, 5\}$:

Խնդիր 12

Ո՞ր պնդումներն են ճիշտ կամայական A, B, C բազմությունների համար:

(a) Եթե $A \notin B$ և $B \notin C$, ապա $A \notin C$: — **ՍԽԱԼ Է**: Հակաօրինակ՝ $A = 1$, $B = \{2\}$, $C = \{1\}$: Այդ դեպքում $1 \notin \{2\}$ և $\{2\} \notin \{1\}$, բայց $1 \in \{1\}$:

(b) Եթե $A \neq B$ և $B \neq C$, ապա $A \neq C$: — **ՍԽԱԼ Է**: Հակաօրինակ՝ $A = C = \{1\}$, $B = \{2\}$:

(c) Եթե $A \in B$ և $B \subseteq C$, ապա $A \in C$: — **ՃԻՇՏ Է**: Քանի որ $A \in B$ և B-ի յուրաքանչյուր տարր C-ում է, ստանում ենք $A \in C$:

(d) Եթե $A \subseteq B$ և $B \subseteq C$, ապա $C \subseteq A$: — **ՍԽԱԼ Է**: Հակաօրինակ՝ $A = \varnothing$, $B = C = \{1\}$:

(e) Եթե $A \subseteq B$ և $B \in C$, արդյո՞ք $A \notin C$: — **ՍԽԱԼ Է** (պարտադիր չէ): Հակաօրինակ՝ $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$: Այդ դեպքում $A \subseteq B$, $B \in C$, և նաև $A \in C$:

Խնդիր 13

Բերեք բազմությունների օրինակներ, որոնց յուրաքանչյուր տարր նաև այդ բազմության ենթաբազմություն է (տրանզիտիվ բազմություններ):

$\varnothing$ (դատարկ պայման): Նաև $\{\varnothing\}$՝ իր միակ տարրը $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$: Նաև $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$՝ $\varnothing \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ և $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$: Ընդհանուր առմամբ, ցանկացած օրդինալ թիվ տրանզիտիվ բազմություն է:

Խնդիր 14

Թվարկեք 2^A բազմության տարրերը:

14.1. $A = \varnothing$՝ $\boxed{2^A = \{\varnothing\}}$ (1 տարր):

14.2. $A = \{x\}$՝ $\boxed{2^A = \{\varnothing, \{x\}\}}$ (2 տարր):

14.3. $A = \{1, a\}$՝ $\boxed{2^A = \{\varnothing, \{1\}, \{a\}, \{1, a\}\}}$ (4 տարր):

14.4. $A = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}$՝ 2^A-ն ունի $2^3 = 8$ տարր.

$$2^A = \{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\{1\}\},\ \{\{2\}\},\\ \{\varnothing, \{1\}\},\ \{\varnothing, \{2\}\},\ \{\{1\}, \{2\}\},\ \{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}\}$$

14.5. $A = \{1, \{3\}, \{1, 2\}\}$՝ 2^A-ն ունի $2^3 = 8$ տարր.

$$2^A = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{\{3\}\},\ \{\{1,2\}\},\\ \{1,\{3\}\},\ \{1,\{1,2\}\},\ \{\{3\},\{1,2\}\},\ \{1,\{3\},\{1,2\}\}\}$$

Խնդիր 15

Ապացուցել $\varnothing \subseteq A \cap B \subseteq A \cup B$:

Ապացույց. $\varnothing \subseteq S$ ցանկացած S բազմության համար: Եթե $x \in A \cap B$, ապա $x \in A$, հետևաբար $x \in A \cup B$: Ուստի $A \cap B \subseteq A \cup B$: □

Խնդիր 16

Նկարագրեք $\overline{A}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{C}$, $A \setminus C$, $C \setminus (A \cup B)$, եթե $U = \mathbb{Z}$, $A = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ (դրական զույգ թվեր), $B = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{Z}^+\}$ (դրական կենտ թվեր), $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 10\}$:

Այստեղ $A \cap B = \varnothing$ և $A \cup B = \mathbb{Z}^+$ (յուրաքանչյուր դրական ամբողջ թիվ զույգ է կամ կենտ):

- $\boxed{\overline{A} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0 \text{ կամ } x\text{-ը կենտ է}\}}$
- $\boxed{\overline{A \cup B} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{0, -1, -2, \ldots\}}$
- $\boxed{\overline{C} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 10\}}$
- $\boxed{A \setminus C = \{10, 12, 14, \ldots\}}$ (զույգ թվեր ≥ 10)
- $\boxed{C \setminus (A \cup B) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 0\} = \{\ldots, -2, -1, 0\}}$

Խնդիր 17

A = դրական զույգ թվեր, B = դրական կենտ թվեր, C = 3-ի պատիկ դրական թվեր:

(a)

- $A \cap C = \{6, 12, 18, \ldots\}$ = 6-ի պատիկ դրական թվեր:
- $B \cup C = \{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n\text{-ը կենտ է կամ } 3 \mid n\} = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, \ldots\}$:
- $B \setminus C = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ = 3-ի չբաժանվող դրական կենտ թվեր:

(b) Այո, բաշխականության օրենքը՝ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, տեղի ունի բոլոր բազմությունների համար: Քանի որ $A \cap B = \varnothing$ (չկա դրական թիվ, որը միաժամանակ զույգ է և կենտ), ստանում ենք $A \cap (B \cup C) = \varnothing \cup (A \cap C) = A \cap C$ = 6-ի պատիկ դրական թվեր: Մյուս կողմից, $A \cap (B \cup C)$-ն բաղկացած է դրական զույգ թվերից, որոնք կենտ են կամ 3-ի պատիկ; «կենտ» մասը անհնար է, ուստի սա 3-ի պատիկ դրական զույգ թվերն են (6-ի պատիկներ): Երկու կողմերը համընկնում են: ✓

Խնդիր 18

Կամայական A բազմության համար՝

$\boxed{A \cap \varnothing = \varnothing}$, $\boxed{A \cup \varnothing = A}$, $\boxed{A \setminus \varnothing = A}$, $\boxed{A \setminus A = \varnothing}$, $\boxed{\varnothing \setminus A = \varnothing}$:

Խնդիր 19

Հաշվել՝

- $\varnothing \setminus \{\varnothing\} = \boxed{\varnothing}$ (դատարկ բազմությունից հեռացնելու բան չկա):
- $\{\varnothing\} \setminus \{\varnothing\} = \boxed{\varnothing}$ (միակ տարրը՝ $\varnothing$-ն, հեռացվում է):
- $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \varnothing = \boxed{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}}$ (ոչինչ չի հեռացվում):
- $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\} = \boxed{\{\{\varnothing\}\}}$ ($\varnothing$ տարրը հեռացվում է; մնում է $\{\varnothing\}$-ն):

Խնդիր 20

Ապացուցել համարժեք նկարագրությունները:

Մաս 1: $A \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq \overline{A} \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A$:

Ապացույցի ուրվագիծ. Փակում ենք ցիկլը՝ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow A \cap B = A \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A} \Rightarrow A \subseteq B$: $(A \subseteq B) \Rightarrow (A \cup B = B)$: A-ի յուրաքանչյուր տարր արդեն B-ում է, ուստի $A \cup B = B$: $(A \cup B = B) \Rightarrow (A \cap B = A)$: եթե $x \in A$, ապա $x \in A \cup B = B$, ուստի $x \in A \cap B$: $(A \cap B = A) \Rightarrow (\overline{B} \subseteq \overline{A})$: $A \cap B = A$-ն տալիս է $A \subseteq B$; եթե $x \notin B$, ապա $x \notin A$, այսինքն $\overline{B} \subseteq \overline{A}$: $(\overline{B} \subseteq \overline{A}) \Rightarrow (A \subseteq B)$: կոնտրապոզիցիա — եթե $x \in A$, ապա $x \notin \overline{A}$, ուստի $x \notin \overline{B}$, այսինքն $x \in B$: □

Մաս 2: $A \cap B = \varnothing \iff A \subseteq \overline{B} \iff B \subseteq \overline{A}$:

Ապացույցի ուրվագիծ. Չհատվող լինելը նշանակում է, որ A-ի բոլոր տարրերը B-ից դուրս են (այսինքն՝ $\overline{B}$-ում), և սիմետրիկորեն՝ B-ի բոլոր տարրերը A-ից դուրս են: □

Մաս 3: $A \cup B = U \iff \overline{A} \subseteq B \iff \overline{B} \subseteq A$:

Ապացույցի ուրվագիծ. Եթե $A \cup B = U$ և $x \notin A$, ապա $x \in B$; ուստի $\overline{A} \subseteq B$: Եթե $\overline{A} \subseteq B$ և $x \notin B$, ապա $x \notin \overline{A}$, այսինքն՝ $x \in A$; ուստի $\overline{B} \subseteq A$: Եթե $\overline{B} \subseteq A$, ապա ցանկացած $x \in U$-ի համար կա՛մ $x \in B$, կա՛մ $x \in \overline{B} \subseteq A$, ուստի $A \cup B = U$: □

Խնդիր 21

Ապացուցել $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$: Արդյո՞ք $C \subseteq A$ պայմանը համարժեք է:

Ապացույց. $x \in (A \setminus B) \setminus C \iff x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \iff x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \iff x \in A \setminus (B \cup C)$: □

$C \subseteq A$ պայմանը համարժեք **չէ** այս նույնությանը: Նույնությունը՝ $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$, տեղի ունի *բոլոր* A, B, C բազմությունների համար, անկախ նրանից՝ $C \subseteq A$ է թե ոչ:

Խնդիր 22

Ապացուցել $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$:

Ապացույց. $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \iff x \in A \wedge x \notin C \wedge \neg(x \in B \wedge x \notin C)$: Քանի որ $x \notin C$, $\neg(x \in B \wedge x \notin C)$ պայմանը հանգում է $x \notin B$-ի: Այսպիսով սա հավասար է $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C = x \in (A \setminus B) \setminus C$: □

Խնդիր 23

Ապացուցել $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$: Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք ճիշտ է $n = k$-ի համար: Ապա $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$: □

Խնդիր 24

Ապացուցել $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$: Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք k-ի համար: Ապա $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$: □

Խնդիր 25

Ապացուցել $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{n(3n-1)}{2}$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $\frac{k(3k-1)}{2} + (3(k+1)-2) = \frac{k(3k-1)+2(3k+1)}{2} = \frac{3k^2+5k+2}{2} = \frac{(k+1)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$: □

Խնդիր 26

Ապացուցել $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{3}$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$: □

Խնդիր 27

Ապացուցել $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 = 2^1 - 1$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $(2^k - 1) + 2^k = 2\cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$: □

Խնդիր 28

Ապացուցել $1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$, երբ $r \neq 1$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 = \frac{1-r}{1-r}$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $\frac{1-r^k}{1-r} + r^k = \frac{1-r^k+r^k(1-r)}{1-r} = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$: □

Խնդիր 29

Ապացուցել $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 = 1^2$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $k^2 + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$: □

Խնդիր 30

Ապացուցել $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $2 = 1 + 1$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $(k^2 + k) + 2(k+1) = k^2 + 3k + 2 = (k+1)^2 + (k+1)$: □

Խնդիր 31

Ապացուցել ինդուկցիայով՝ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$:

Ապացույց. Ֆիքսենք m-ը; ինդուկցիա ըստ n-ի: Հենք՝ $n = 0$: $a^{m+0} = a^m = a^m \cdot 1 = a^m \cdot a^0$:

Ինդուկցիոն քայլ՝ $a^{m+(k+1)} = a^{(m+k)+1} = a^{m+k} \cdot a = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^m \cdot a^{k+1}$: □

Խնդիր 32

Ապացուցել ինդուկցիայով՝ $(ab)^k = a^k b^k$:

Ապացույց. Հենք՝ $k = 0$: $(ab)^0 = 1 = a^0 b^0$: (Կամ $k = 1$: $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$:) Ինդուկցիոն քայլ՝ $(ab)^{k+1} = (ab)^k \cdot ab = a^k b^k \cdot ab = a^{k+1} b^{k+1}$ (օգտվելով բազմապատկման տեղափոխականությունից □

Խնդիր 33

Ապացուցել $n^2 > 2n + 1$, երբ $n \geq 3$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 3$: $9 > 7$: Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք $k^2 > 2k + 1$ ինչ-որ $k \geq 3$-ի համար: $(k+1)^2 = k^2+2k+1 > (2k+1)+2k+1 = 4k+2 \geq 2(k+1)+1+(2k-1) > 2(k+1)+1$, քանի որ $2k - 1 \geq 5 > 0$: □

Խնդիր 34

Ապացուցել $2^n > n^2$, երբ $n \geq 5$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 5$: $32 > 25$: Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք $2^k > k^2$, երբ $k \geq 5$: $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2$: Մեզ պետք է $2k^2 \geq (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$, այսինքն՝ $k^2 - 2k - 1 \geq 0$, որը ճիշտ է $k \geq 3$-ի համար: □

Խնդիր 35

Ապացուցել $a^3 > 3a^2 + 3a + 1$, երբ $a \geq 4$:

Ապացույց. Հենք՝ $a = 4$: $64 > 48 + 12 + 1 = 61$: ✓

Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք $k^3 > 3k^2 + 3k + 1$, երբ $k \geq 4$: Ցույց տանք, որ $(k + 1)^3 > 3(k+1)^2+3(k+1)+1$: $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1 > (3k^2+3k+1)+3k^2+3k+1 = 6k^2+6k+2$: Մեզ պետք է $6k^2 + 6k + 2 \geq 3k^2 + 9k + 7$, այսինքն՝ $3k^2 - 3k - 5 \geq 0$, որը ճիշտ է $k \geq 2$-ի համար: □

Խնդիր 36

Ապացուցել, որ $5^{2n} + 3 \cdot 2^{5n-2}$-ը բաժանվում է 7-ի ցանկացած n դրական ամբողջ թվի համար:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $25 + 3 \cdot 8 = 25 + 24 = 49 = 7 \cdot 7$: ✓

Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք $7 \mid (5^{2k} + 3 \cdot 2^{5k-2})$: Ապա $5^{2(k+1)} + 3 \cdot 2^{5(k+1)-2} = 25 \cdot 5^{2k} + 32 \cdot 3 \cdot 2^{5k-2} = 25 \cdot 5^{2k} + 25 \cdot 3 \cdot 2^{5k-2} + 7 \cdot 3 \cdot 2^{5k-2} = 25(5^{2k} + 3 \cdot 2^{5k-2}) + 7 \cdot 3 \cdot 2^{5k-2}$: Երկու գումարելիներն էլ բաժանվում են 7-ի: □

Խնդիր 37

Ապացուցել, որ $3^{n+2} + 4^{2n+1}$-ը բաժանվում է 13-ի ցանկացած $n \geq 0$-ի համար:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 0$: $9 + 4 = 13$: ✓ (Կամ $n = 1$: $27 + 64 = 91 = 7 \cdot 13$:)

Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք $13 \mid (3^{k+2} + 4^{2k+1})$: Ապա $3^{k+3} + 4^{2k+3} = 3 \cdot 3^{k+2} + 16 \cdot 4^{2k+1} = 3(3^{k+2} + 4^{2k+1}) + 13 \cdot 4^{2k+1}$: Երկու գումարելիներն էլ բաժանվում են 13-ի: □

Խնդիր 38

Ապացուցել, որ $5^{2n}+7$-ը բաժանվում է 8-ի ցանկացած n դրական ամբողջ թվի համար:

Ապացույց. $5^{2n}=25^n\equiv 1^n=1 \pmod 8$, ուստի $5^{2n}+7\equiv 1+7=8\equiv 0 \pmod 8$:

Այլ տարբերակ ինդուկցիայով՝ Հենք՝ $n=1$: $25+7=32=8\cdot 4$: Ինդուկցիոն քայլ՝ $5^{2(k+1)}+7=25\cdot 5^{2k}+7=25(5^{2k}+7)-25\cdot 7+7=25(5^{2k}+7)-168$: Ե՛վ $25(5^{2k}+7)$-ը, և՛ $168=8\cdot 21$-ը բաժանվում են 8-ի: □

Խնդիր 39

Ապացուցել, որ $3^{3n+1}+2^{n+1}$-ը բաժանվում է 5-ի ($n\in\mathbb{N}$):

Ապացույց. Հենք՝ $n=0$: $3+2=5$: ✓

Ինդուկցիոն քայլ՝ $3^{3(k+1)+1}+2^{k+2}=27\cdot 3^{3k+1}+2\cdot 2^{k+1}=27\cdot 3^{3k+1}+27\cdot 2^{k+1}-25\cdot 2^{k+1}$ $=27(3^{3k+1}+2^{k+1})-25\cdot 2^{k+1}$: Ըստ ենթադրության $5\mid 27(3^{3k+1}+2^{k+1})$ (քանի որ 5-ը բաժանում է փակագծի արտահայտությունը) և $5\mid 25\cdot 2^{k+1}$: □

Խնդիր 40

Ապացուցել, որ 9^n-1-ը բաժանվում է 8-ի ($n\in\mathbb{N}$):

Ապացույց. $9^n-1=(9-1)(9^{n-1}+9^{n-2}+\cdots+1)=8\cdot\sum_{i=0}^{n-1}9^i$:

Այլ տարբերակ՝ $9\equiv 1 \pmod 8$, ուստի $9^n\equiv 1 \pmod 8$: □

Խնդիր 41

Ապացուցել, որ 10^n-1-ը բաժանվում է 9-ի ($n\in\mathbb{N}$):

Ապացույց. $10\equiv 1 \pmod 9$, ուստի $10^n\equiv 1 \pmod 9$, հետևաբար $9\mid(10^n-1)$:

Այլ տարբերակ՝ $10^n-1=\underbrace{99\ldots9}_{n}=9\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}$: □

Խնդիր 42

Ապացուցել, որ n^2-1-ը բաժանվում է 4-ի բոլոր կենտ բնական թվերի համար:

Ապացույց. Դիցուք $n=2m+1$, որտեղ $m\geq 0$: Ապա $n^2-1=(2m+1)^2-1=4m^2+4m=4m(m+1)$, որը բաժանվում է 4-ի: □

(Ինդուկցիայի կարիք չկա; ուղղակի ապացույցը բավարար է:)

Խնդիր 43

Գտնել և ապացուցել՝ $3+7+11+\cdots+(4n-1)$:

Գումարն է՝ $\boxed{n(2n+1)}$:

Ապացույց. Հենք՝ $n=1$: $3=1\cdot 3$: ✓

Ինդուկցիոն քայլ՝ $k(2k+1)+(4(k+1)-1)=2k^2+k+4k+3=2k^2+5k+3=(k+1)(2k+3)=(k+1)(2(k+1)+1)$: □

Խնդիր 44

Գտնել և ապացուցել՝ $1+5+9+\cdots+(4n+1)$:

Վերջին $4n+1$ անդամը $1, 5, 9, \ldots$ հաջորդականության $(n+1)$-րդ անդամն է, ուստի գումարն ունի $n+1$ անդամ և հավասար է $\boxed{(n+1)(2n+1)}$-ի:

Ապացույց. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}(4k-3) = 4\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3(n+1) = (n+1)\big[2(n+2)-3\big] = (n+1)(2n+1)$: Ստուգում՝ $n=1$: $1+5=6=2\cdot 3$; $n=2$: $1+5+9=15=3\cdot 5$: ✓ □

Խնդիր 45

Գտնել և ապացուցել՝ $-1+2-3+4-\cdots-(2n-1)+2n$:

Գումարն է՝ $\boxed{n}$:

Ապացույց. Խմբավորենք n զույգով՝ $\big(-(2k-1)+2k\big) = 1$ $k=1,\ldots,n$-ի համար: Ուստի ընդհանուրը $n\cdot 1 = n$ է: Ստուգում՝ $-1+2=1$; $-1+2-3+4=2$; $-1+2-3+4-5+6=3$: ✓ □

Խնդիր 46

Գտնել և ապացուցել՝ $1-3+5-7+\cdots+(4n-3)-(4n-1)$:

Գումարն է՝ $\boxed{-2n}$:

Ապացույց. Խմբավորենք n զույգով՝ $\big((4k-3)-(4k-1)\big) = -2$ $k=1,\ldots,n$-ի համար: Ուստի ընդհանուրը $-2n$ է: Ստուգում՝ $1-3=-2$; $1-3+5-7=-4$; $1-3+5-7+9-11=-6$: ✓ □

Խնդիր 47

Ապացուցել $2^n > n^3$ և $n! > 100^n$ մեծ n-երի համար:

(a) $2^n > n^3$, երբ $n \geq 10$:

Ապացույց. Հենք՝ $n=10$: $1024 > 1000$: Ինդուկցիոն քայլ՝ ենթադրենք $2^k > k^3$, երբ $k \geq 10$: Ապա $2^{k+1} = 2\cdot 2^k > 2k^3$: Մեզ պետք է $2k^3 \geq (k+1)^3$, այսինքն՝ $(1+1/k)^3 \leq 2$: $k \geq 10$ դեպքում՝ $(1+1/k)^3 \leq (1.1)^3 = 1.331 < 2$: ✓ □

(b) $n! > 100^n$, երբ $n \geq 200$ (օրինակ):

Ապացույց. Ինչ-որ պահից սկսած, երբ $k \geq 200$, ունենք $k+1 > 100$, ուստի $(k+1)! = (k+1)\cdot k! > 100\cdot 100^k = 100^{k+1}$. Հենքը՝ $200! > 100^{200}$ կարելի է ստուգել Ստիռլինգի բանաձևով: □

Խնդիր 48

Հանոյի աշտարակ. ապացուցել, որ n սկավառակը կարելի է տեղափոխել 2^n-1 քայլով:

Ապացույց. Հենք՝ $n=1$: տեղափոխել միակ սկավառակը ուղղակիորեն (1 քայլ $= 2^1-1$): Ինդուկցիոն քայլ՝ $k+1$ սկավառակ A-ից C տեղափոխելու համար նախ տեղափոխում ենք վերևի k սկավառակները A-ից B (ըստ վարկածի՝ 2^k-1 քայլ), հետո ամենամեծ սկավառակը A-ից C (1 քայլ), այնուհետև k սկավառակները B-ից C (2^k-1 քայլ): Ընդհանուր՝ $2(2^k-1)+1 = 2^{k+1}-1$: □

Խնդիր 49

Բեռնուլիի անհավասարություն. $(1+h)^n \geq 1+nh$, երբ $h > -1$, $n \in \mathbb{N}$:

Ապացույց. Հենք՝ $n = 1$: $1 + h \geq 1 + h$: ✓

Ինդուկցիոն քայլ՝ $(1+h)^{k+1} = (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) = 1 + (k+1)h + kh^2 \geq 1 + (k+1)h$, քանի որ $kh^2 \geq 0$: (Օգտվեցինք նրանից, որ $1 + h > 0$, անհավասարության նշանը պահպանելու համար): □

Խնդիր 50

Ապացուցել Թեորեմ 1-ը (բազմությունների հանրահաշվի հիմնական օրենքները)՝ օգտվելով պատկանելության հարաբերությունից:

«Թեորեմ 1»-ը սովորաբար վերաբերում է հիմնական նույնություններին՝

1. Տեղափոխականություն՝ $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$:
2. Զուգորդականություն՝ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, նմանապես $\cap$-ի համար:
3. Բաշխականություն՝ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:
4. Նույնություն՝ $A \cup \varnothing = A$, $A \cap U = A$:
5. Լրացում՝ $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$:
6. Իդեմպոտենտություն՝ $A \cup A = A$, $A \cap A = A$:
7. Դե Մորգան՝ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

Ապացույցի ուրվագիծ. Յուրաքանչյուր նույնություն ապացուցվում է ցույց տալով, որ $x \in$ Ձախ մաս $\iff$ $x \in$ Աջ մաս կամայական x-ի համար, թարգմանելով բազմային գործողությունները տրամաբանական գործողությունների ($\cup \to \vee$, $\cap \to \wedge$, $\bar{\cdot} \to \neg$) և կիրառելով ստանդարտ տրամաբանական օրենքները: □

Խնդիր 51

Ապացուցել Թեորեմ 2-ը՝ օգտվելով պատկանելության հարաբերությունից:

«Թեորեմ 2»-ը սովորաբար ներառում է լրացուցիչ նույնություններ՝ կլանում ($A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$), ինվոլյուցիա ($\overline{\overline{A}} = A$), գերակայություն ($A \cup U = U$, $A \cap \varnothing = \varnothing$), և $\overline{U} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = U$:

Ապացույցի ուրվագիծ. Ինչպես Խնդիր 50-ում, յուրաքանչյուրն ապացուցվում է տարր առ տարր՝ վերածվելով ասույթային տրամաբանության նույնաբանությունների: Օրինակ՝ կլանում՝ $x \in A \cup (A \cap B) \iff x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \iff x \in A$: □

Խնդիր 52

Ապացուցել Թեորեմ 2-ը՝ օգտվելով Թեորեմ 1-ի նույնություններից որպես աքսիոմներ (հանրահաշվական ապացույց, առանց տարր առ տարր):

Ապացույցի ուրվագիծ. Օրինակ՝ կլանում՝ $A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B) = A \cap U = A$, օգտվելով Թեորեմ 1-ի նույնության, բաշխականության և գերակայության օրենքներից: Թեորեմ 2-ի յուրաքանչյուր նույնություն կարելի է ստանալ զուտ հանրահաշվորեն Թեորեմ 1-ից: □

Խնդիր 53

Թեորեմ 1-ի և 2-ի օգնությամբ ապացուցել նույնությունները:

(1) $(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{A}) = A \cap B \cap X$.

Ապացույցի ուրվագիծ. Երրորդ անդամը պարունակում է $A \cap \overline{A} = \varnothing$, ուստի այն անհետանում է: Երկրորդ անդամն առաջինի ենթաբազմություն է (ունի լրացուցիչ C և Y պայմաններ), ուստի առաջին $\cup$ երկրորդ $=$ առաջին՝ կլանմամբ: Արդյունք՝ $A \cap B \cap X$: □

(2) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = U$.

Ապացույցի ուրվագիծ. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) = (A \cup \overline{A}) \cap B \cap C = B \cap C$, ուստի ձախ կողմը $(B \cap C) \cup \overline{B} \cup \overline{C} = (B \cap C) \cup \overline{B \cap C} = U$ է (Դե Մորգան): □

(3) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X) = C$.

Ապացույցի ուրվագիծ. Դուրս բերենք C-ն՝ ձախ կողմը $C \cap \left[(A \cap B \cap \overline{X}) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup X\right]$ է: $S = A \cap B \cap \overline{X}$-ով՝ $\overline{A} \cup \overline{B} \cup X = \overline{S}$, ուստի փակագիծը $S \cup \overline{S} = U$ է: Հետևաբար արդյունքը $C \cap U = C$ է: □

Խնդիր 54

Ապացուցել բազմությունների նույնությունները (բոլորը ճիշտ; յուրաքանչյուրը՝ տարր առ տարր, $\setminus$-ը գրելով որպես $\cap\overline{(\cdot)}$, իսկ $A \triangle B$-ն՝ «x-ը A, B-ից ճիշտ մեկում»):

(1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
Երկու կողմում էլ՝ $x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$: ✓

(2) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.
Երկու կողմում էլ՝ $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$: ✓

(3) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
$(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \iff (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)$: ✓

(4) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.
$x \in A$-ի դեպքում $\neg(x \in A \wedge x \in C)$-ն վերածվում է $x \notin C$-ի; երկու կողմն էլ՝ $x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$: ✓

(5) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$: ✓

(6) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.
$x \notin C$-ի դեպքում $B \setminus C$-ն վերածվում է B-ի; երկու կողմն էլ՝ $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$ (հմմտ. Խնդիր 22): ✓

(7) $A \triangle \varnothing = A$. $(A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \cup \varnothing = A$: ✓

(8) $A \triangle B = B \triangle A$. «$A, B$-ից ճիշտ մեկում»-ը սիմետրիկ է A, B-ի նկատմամբ: ✓

(9) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$. Երկու կողմն էլ ճիշտ են, երբ x-ը պատկանում է A, B, C-ից *կենտ* թվով բազմության (զույգությունն ասոցիատիվ է): ✓

(10) $A \triangle A = \varnothing$. $(A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing$: ✓

(11) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
Երկու կողմն էլ վերածվում են $(x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C) \vee (x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in C)$-ի: ✓

Խնդիր 55

Ցույց տալ, որ $A \cup (B \setminus C) \neq (A \cup B) \setminus (A \cup C)$ ընդհանուր դեպքում:

Հակաօրինակ՝ $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1\}$: Ձախ՝ $B \setminus C = \{2\}$, ուստի $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\}$: Աջ՝ $A \cup B = \{1, 2\}$, $A \cup C = \{1\}$, ուստի $(A \cup B) \setminus (A \cup C) = \{2\}$: $\{1, 2\} \neq \{2\}$: □

Խնդիր 56

Ապացուցել, որ $A \triangle X = B$-ն ունի միակ լուծում:

Միակ լուծումն է՝ $\boxed{X = A \triangle B}$:

Ապացույց. **Գոյություն:** Դիցուք $X = A \triangle B$: Ապա $A \triangle X = A \triangle (A \triangle B) = (A \triangle A) \triangle B = \varnothing \triangle B = B$: ✓

Միակություն: Եթե $A \triangle X = B$, երկու կողմին կիրառենք $A \triangle$՝ $A \triangle (A \triangle X) = A \triangle B$, որից $X = A \triangle B$: (Օգտվեցինք $\triangle$-ի ասոցիատիվությունից և $A \triangle A = \varnothing$, $\varnothing \triangle X = X$-ից:) □

Խնդիր 57

Գոյություն ունե՞ն A, B բազմություններ, որ $|A \times B|$ հավասար է՝

57.1. 12 տարր: **ԱՅՈ:** Օրինակ՝ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$; $|A| \cdot |B| = 3 \cdot 4 = 12$:

57.2. 13 տարր: **ԱՅՈ:** Քանի որ 13-ը պարզ է, $|A| \cdot |B| = 13$ պահանջում է $|A| = 1, |B| = 13$ կամ հակառակը: Օրինակ՝ $A = \{1\}$, B՝ ցանկացած 13-տարրանոց բազմություն:

57.1: Այո (օր. $3 \times 4 = 12$):	57.2: Այո (օր. $1 \times 13 = 13$):

Խնդիր 58

Ապացուցել, որ $A \times B = B \times A \implies A = B$ (ենթադրելով երկուսն էլ ոչ դատարկ):

Ապացույց. Ենթադրենք $A, B \neq \varnothing$ և $A \times B = B \times A$: Ցույց տալու համար $A \subseteq B$՝ դիցուք $a \in A$, ընտրենք ցանկացած $b \in B$: Ապա $(a, b) \in A \times B = B \times A$, ուստի $a \in B$: Ցույց տալու համար $B \subseteq A$՝ դիցուք $b \in B$, ընտրենք ցանկացած $a \in A$: Ապա $(b, a) \in B \times A = A \times B$, ուստի $b \in A$: Հետևաբար $A = B$: (Եթե որևէ բազմություն դատարկ է, երկու արտադրյալներն էլ $\varnothing$ են՝ անկախ $A = B$-ից:) □

Խնդիր 59

Թվարկել $A \times B$-ի տարրերը՝ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$-ի համար:

$$\boxed{A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}}$$

(8 տարր:)

Խնդիր 60

Ապացուցել, որ դեկարտյան արտադրյալը բաշխվում է բազմությունների գործողությունների վրա:

(1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Ապացույց. $(x, y) \in A \times (B \cup C) \iff x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$: □

(2) $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$. Նույն ապացույցը՝ առաջին բաղադրիչի վրա:

(3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Ապացույց. $(x, y) \in$ ձախ $\iff x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in$

$C)$: $\square$

(4) $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$. (3)-ի հայելին:

(5) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Ապացույց. $(x, y) \in$ ձախ $\iff x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$: $(x, y) \in$ աջ $\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge \neg(x \in A \wedge y \in C)$: $x \in A$-ի դեպքում երկրորդ պայմանը վերածվում է $y \notin C$-ի: $\square$

(6) $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$. (5)-ի հայելին:

Խնդիր 61

Ապացուցել $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$:

Ապացույց. $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D) \iff x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D \iff (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in D) \iff (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$: $\square$

Խնդիր 62

Ապացուցել $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \implies A \times C \subseteq B \times D$:

Ապացույց. Դիցուք $(x, y) \in A \times C$: Ապա $x \in A \subseteq B$ տալիս է $x \in B$, իսկ $y \in C \subseteq D$ տալիս է $y \in D$: Ուստի $(x, y) \in B \times D$: $\square$

Գործնական 2–3 — Հարաբերություններ

Խնդիր 1.1

(a) 12-ի բաժանարարները $\mathbb{N}$-ում՝

$$\boxed{\{(1,12),(2,12),(3,12),(4,12),(6,12),(12,12)\}}$$

(b) Զույգեր (d,n), որտեղ $d,n \in \{2,3,4,5,6\}$ և $d \mid n$՝

$$\boxed{\{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}}$$

(c) Եռյակներ (x,y,z), որտեղ $x = y+z$, և բոլորը պատկանում են $\{1,2,3\}$ բազմությանը՝

$$\boxed{\{(2,1,1),(3,1,2),(3,2,1)\}}$$

Խնդիր 1.2

(a) $\boxed{D = \{a,c,d\}, \quad R = \{1,2,4,5\}}$:

(b) Օրինաչափություն $(n,2n)$՝ $\boxed{D = \mathbb{N}, \quad R = 2\mathbb{N}}$:

(c) $x = y^2$՝ $\boxed{D = [0,+\infty), \quad R = \mathbb{R}}$:

(d) $x^2 + y^2 \le 16$՝ $\boxed{D = [-4,4], \quad R = [-4,4]}$:

(e) $(x,y) \in \mathbb{N}^2,\ x \le y$՝ $\boxed{D = \mathbb{N}, \quad R = \mathbb{N}}$:

(f) $(x,y) \in \mathbb{N}^2,\ y \le x$՝ $\boxed{D = \mathbb{N}, \quad R = \mathbb{N}}$:

(g) $x + y \ge 0$ $\mathbb{R}^2$-ում՝ $\boxed{D = \mathbb{R}, \quad R = \mathbb{R}}$:

(h) $2x \ge 3y$ $\mathbb{R}^2$-ում՝ $\boxed{D = \mathbb{R}, \quad R = \mathbb{R}}$:

Խնդիր 2.1

$A = \{a,b,c,d,e\}$ բազմության վրա:

(a) Սիմետրիկ է; չուղղորդված կողեր՝ a–b, a–c, b–c, d–e:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Չուղղորդված կողեր՝ a–b, a–c, b–c, c–d. e գագաթը մեկուսացված է:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Նույնական է (b) մասին; նույն գրաֆը և մատրիցը:

Խնդիր 2.2

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ բազմության վրա: Տողեր/սյունակներ a, b, c, d, e, f հերթականությամբ:

(a) Ուղղորդված կողեր՝ $a \to b,\ b \to c,\ a \to c,\ b \to e,\ c \to f,\ c \to d,\ d \to f,\ f \to e$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Ուղղորդված կողեր՝ $a \to b,\ b \to c,\ d \to c,\ d \to e,\ f \to e,\ f \to a,\ b \to e$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Ուղղորդված կողեր՝ $a \to c,\ c \to c,\ c \to d,\ c \to e,\ e \to c,\ e \to e,\ e \to f,\ a \to e$. b գագաթը մեկուսացված է:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Խնդիր 3.1

Ապացույցի ուրվագիծ ($^{-1}$ և $\circ$ ստանդարտ հատկություններ):

(i) $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$: $(x, y) \in (\rho^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in \rho$:

(ii) $(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$: $(z, x) \in (\rho \circ \sigma)^{-1} \Leftrightarrow \exists y\colon\ (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \sigma \Leftrightarrow \exists y\colon\ (z, y) \in \sigma^{-1} \wedge (y, x) \in \rho^{-1} \Leftrightarrow (z, x) \in \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}$: $\square$

Խնդիր 3.2

$\rho = \{(x, y) \mid y = x^2 + 5\}$, $\sigma = \{(x, y) \mid y = 3x\}$ $\mathbb{R}$-ի վրա: Կոմպոզիցիան կարդացվում է ձախից աջ ($\rho \cdot \sigma$-ում սկզբում կիրառվում է ρ-ն):

$\rho \cdot \sigma$: $x \xrightarrow{\rho} x^2 + 5 \xrightarrow{\sigma} 3(x^2 + 5)$: $\boxed{\rho \cdot \sigma = \{(x,\ 3x^2 + 15)\}}$:

$\sigma \cdot \rho$: $x \xrightarrow{\sigma} 3x \xrightarrow{\rho} (3x)^2 + 5$: $\boxed{\sigma \cdot \rho = \{(x,\ 9x^2 + 5)\}}$:

$\boxed{\rho^{-1} = \{(x, y) \mid x = y^2 + 5\}}$ (այսինքն՝ $y = \pm\sqrt{x - 5}$, որոշված է $x \geq 5$-ի համար):

$\boxed{\sigma^{-1} = \{(x, y) \mid y = x/3\}}$:

$\rho \cdot \sigma^{-1}$: $x \xrightarrow{\rho} x^2 + 5 \xrightarrow{\sigma^{-1}} \frac{x^2+5}{3}$: $\boxed{\rho \cdot \sigma^{-1} = \left\{\left(x,\ \frac{x^2+5}{3}\right)\right\}}$:

$\rho^{-1}\cdot\sigma$: $x \xrightarrow{\rho^{-1}} \pm\sqrt{x-5} \xrightarrow{\sigma} \pm 3\sqrt{x-5}$ $(x \geq 5)$: $\boxed{\rho^{-1}\cdot\sigma = \{(x,\, \pm 3\sqrt{x-5}) \mid x \geq 5\}}$:

Խնդիր 3.3

$\rho = \{(x, x+2)\}$, $\sigma = \{(x, x^2)\}$ $\mathbb{Z}$-ի վրա:

$\rho\cdot\sigma$: $x \xrightarrow{\rho} x+2 \xrightarrow{\sigma} (x+2)^2$: $\boxed{\rho\cdot\sigma = \{(x,\, (x+2)^2)\}}$:

$\sigma\cdot\rho$: $x \xrightarrow{\sigma} x^2 \xrightarrow{\rho} x^2+2$: $\boxed{\sigma\cdot\rho = \{(x,\, x^2+2)\}}$:

Դրանք *հավասար չեն* ($x = 1$-ում՝ $\rho\cdot\sigma$-ն տալիս է 9, $\sigma\cdot\rho$-ն՝ 3):

Խնդիր 3.4

$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y$ կենտ է$\}$:

ρ^2-ու համար՝ պետք է գտնել z, որ $x+z$ կենտ է և $z+y$ կենտ է, ուստի $x \equiv y \pmod 2$:

$\boxed{\rho^2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \text{ զույգ է}\}}$:

$\boxed{\rho^3 = \rho}$, և ընդհանուր առմամբ $\rho^{2k} = \rho^2$, $\rho^{2k+1} = \rho$:

Խնդիր 3.5

$\rho = \{(x, x+1) \mid x \in \mathbb{N}\}$:

$$\boxed{\rho^k = \{(x,\, x+k) \mid x \in \mathbb{N}\}, \quad k \geq 1.}$$

Խնդիր 3.6

$\rho = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$:

$\boxed{\rho^2 = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}}$:

$\boxed{\rho^3 = \{(1,4), (2,5)\}}$:

$\boxed{\rho^4 = \{(1,5)\}}$:

$\boxed{\rho^5 = \varnothing}$:

Խնդիր 4.1

	Ռեֆլ.	Սիմ.	Հակասիմ.	Տրանզ.
(a) $x^2+y^2=1$, $\mathbb{R}$	Ոչ	Այո	Ոչ	Ոչ
(b) $x^2=y^2$, $\mathbb{R}$	Այո	Այո	Ոչ	Այո
(c) x/y, $\mathbb{Z}$	Այո	Ոչ	Ոչ	Այո
(d) x/y, $\mathbb{N}$	Այո	Ոչ	Այո	Այո
(e) gcd $= 1$, $\mathbb{N}$	Ոչ	Այո	Ոչ	Ոչ
(f) gcd $= 1$, $\mathbb{Z}$	Ոչ	Այո	Ոչ	Ոչ

Այստեղ x/y-ն նշանակում է բաժանելիություն ($y \mid x$): (b)-ն համարժեքության հարաբերություն է: (d)-ն (բաժանելիությունը $\mathbb{N}$-ի վրա) մասնակի կարգ է, բայց *ոչ* գծային — օրինակ՝ 2-ը և 3-ը անհամեմատելի են: (c)-ն (բաժանելիությունը $\mathbb{Z}$-ի վրա) միայն նախակարգ է (ռեֆլեքսիվ ու տրանզիտիվ, բայց հակասիմետրիկ չէ), քանի որ $2 \mid -2$ և $-2 \mid 2$, բայց

$2 \neq -2$:

Խնդիր 4.2

$\rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid |x - y|$ զույգ է$\}$:

Ռեֆլեքսիվ — Այո; Սիմետրիկ — Այո; Հակասիմետրիկ — Ոչ; Տրանզիտիվ — Այո:

Համարժեքության հարաբերություն: Դասեր՝ զույգ ամբողջ թվեր և կենտ ամբողջ թվեր:

Խնդիր 4.3

Ռեֆլեքսիվության պահպանումը (R, S ռեֆլեքսիվ են A-ի վրա)՝

(a) $R \cap S$: **Ճիշտ է:** (b) $R \cup S$: **Ճիշտ է:** (c) $R \circ S$: **Ճիշտ է:**

(d) $R \setminus S$: **Սխալ է** ($(x, x) \in R \cap S$, ուստի $(x, x) \notin R \setminus S$): (e) $R \oplus S$: **Սխալ է** (նույն պատճառով):

Խնդիր 4.4

Սիմետրիկության պահպանումը (R, S սիմետրիկ են)՝

(a) $R \cap S$: **Ճիշտ է:** (b) $R \cup S$: **Ճիշտ է:**

(c) $R \circ S$: **Սխալ է:** ($R = \{(1, 2), (2, 1)\}$, $S = \{(2, 3), (3, 2)\}$: $(1, 3) \in R \circ S$, բայց $(3, 1) \notin R \circ S$:)

(d) $R \setminus S$: **Ճիշտ է:** (e) $R \oplus S$: **Ճիշտ է:**

Խնդիր 4.5

Հակասիմետրիկության պահպանումը (R, S հակասիմետրիկ են)՝

(a) $R \cap S$: **Ճիշտ է:** (b) $R \cup S$: **Սխալ է** ($R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 1)\}$):

(c) $R \circ S$: **Սխալ է:** (d) $R \setminus S$: **Ճիշտ է** ($R \setminus S \subseteq R$):

(e) $R \oplus S$: **Սխալ է** (նույն հակաօրինակը, ինչ (b)-ում):

Խնդիր 4.6

Տրանզիտիվության պահպանումը (R, S տրանզիտիվ են)՝

(a) $R \cap S$: **Ճիշտ է:**

(b) $R \cup S$: **Սխալ է** ($R = \{(1, 2)\}$, $S = \{(2, 3)\}$; $(1, 3) \notin R \cup S$):

(c) $R \circ S$: **Սխալ է:**

(d) $R \setminus S$: **Սխալ է** ($R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, $S = \{(1, 3)\}$; $R \setminus S = \{(1, 2), (2, 3)\}$, տրանզիտիվ չէ):

(e) $R \oplus S$: **Սխալ է:**

Խնդիր 5.1

Կառուցել մասնակի կարգավորված բազմություն, որն ունի միակ մինիմալ տարր, բայց չունի ամենափոքր տարր:

Նշում. Ցանկացած *վերջավոր* մասնակի կարգում միակ մինիմալ տարրը ավտոմատ կերպով ամենափոքրն է, ուստի անհրաժեշտ է անվերջ մասնակի կարգ (անվերջ նվազող շղթայով):

$$\boxed{A = \mathbb{Z}^- \cup \{m\}},$$

որտեղ $\mathbb{Z}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ ունի սովորական կարգը, իսկ m-ն անհամեմատելի է $\mathbb{Z}^-$-ի յուրաքանչյուր տարրի հետ:

Այդ դեպքում m-ը *միակ մինիմալ* տարրն է՝ ոչ մի $n \in \mathbb{Z}^-$ մինիմալ չէ (շղթան $\cdots < -2 < -1$ անվերջ նվազում է, ուստի յուրաքանչյուր n-ի համար $n - 1 < n$ գտնվում է նրանից ներքև), իսկ m-ից ներքև ոչինչ չկա: Բայց m-ը *ամենափոքր* տարր չէ, քանի որ $m \not\leq n$ որևէ $n \in \mathbb{Z}^-$-ի համար (m-ն անհամեմատելի է նրանց հետ): □

Խնդիր 5.2

Ապացույցի ուրվագիծ. Դիցուք ρ-ն մասնակի կարգ է A-ի վրա: Ցույց տանք, որ ρ^{-1}-ը ռեֆլեքսիվ, հակասիմետրիկ և տրանզիտիվ է: Ռեֆլեքսիվ՝ $(x, x) \in \rho \Rightarrow (x, x) \in \rho^{-1}$: Հակասիմետրիկ՝ $(x, y), (y, x) \in \rho^{-1} \Rightarrow (y, x), (x, y) \in \rho \Rightarrow x = y$: Տրանզիտիվ՝ $(x, y), (y, z) \in \rho^{-1} \Rightarrow (z, y), (y, x) \in \rho \Rightarrow (z, x) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho^{-1}$: □

Խնդիր 5.3

Ապացույցի ուրվագիծ. Դիցուք $\{\rho_i\}$-ն մասնակի կարգեր են A-ի վրա, $\rho = \bigcap_i \rho_i$: Ռեֆլեքսիվ՝ $(x, x) \in \rho_i$ բոլոր i-երի համար: Հակասիմետրիկ՝ $(x, y), (y, x) \in \rho \subseteq \rho_i \Rightarrow x = y$: Տրանզիտիվ՝ $(x, y), (y, z) \in \rho \subseteq \rho_i \Rightarrow (x, z) \in \rho_i$ բոլոր i-երի համար $\Rightarrow (x, z) \in \rho$: □

Խնդիր 5.4

Ապացույցի ուրվագիծ. $\rho_A = \rho \cap (A \times A)$-ն ժառանգում է ռեֆլեքսիվությունը ($x \in A$-ի համար), հակասիմետրիկությունը և տրանզիտիվությունը ρ-ից, քանի որ $\rho_A \subseteq \rho$ և դիտարկվող բոլոր տարրերը պատկանում են A-ին: □

Խնդիր 5.5

$\boxed{\rho_1 \cup \rho_2\text{-ը գծային կարգ է այն և միայն այն դեպքում, եթե } \rho_1 \subseteq \rho_2 \text{ կամ } \rho_2 \subseteq \rho_1.}$

Եթե մեկը պարունակում է մյուսին, միավորումը հավասար է մեծագույնին: Հակառակ դեպքում, եթե ոչ մեկը մյուսին չի պարունակում, միավորման հակասիմետրիկությունը կարող է խախտվել:

Խնդիր 5.6

Ապացույցի ուրվագիծ. Ինդուկցիա ըստ $|A| = n$-ի: Հենք՝ $n = 1$: ակնհայտ է: Քայլ՝ վերցնենք $a \in A$; ըստ վարկածի $A \setminus \{a\}$-ն ունի գծային կարգ $a_1 < \cdots < a_{n-1}$: Ավելացնենք a-ն վերջում՝ $a_1 < \cdots < a_{n-1} < a$: Սա գծային կարգ է A-ի վրա: □

Խնդիր 6.1

(a) $xy > 0$ $\mathbb{Q}$-ի վրա՝ **Ոչ:** Ռեֆլեքսիվ չէ ($0 \cdot 0 = 0 \not> 0$):

(b) $x - y \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$-ի վրա՝ **Այո:** Ռեֆլեքսիվ ($x - x = 0 \in \mathbb{Z}$), սիմետրիկ և տրանզիտիվ ($x - y,\ y - z \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - z \in \mathbb{Z}$): Դասերը $x + \mathbb{Z}$ հարակից դասերն են՝ միևնույն կոտորակային մասն ունեցող ռացիոնալ թվերը:

(c) $(a \leq b) \vee (a > b)$ $\mathbb{N}$-ի վրա՝ **Այո:** Քանի որ ցանկացած a, b-ի համար $a \leq b$ կամ $a > b$՝ պայմանը միշտ ճիշտ է, ուստի $\rho = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$-ը համընդհանուր հարաբերությունն է —

տրիվիալ կերպով ռեֆլեքսիվ, սիմետրիկ, տրանզիտիվ (մեկ դաս՝ ամբողջ $\mathbb{N}$-ը):

(d) $|a-b| \leq 2$ $\mathbb{N}$-ի վրա՝ **Ոչ:** Տրանզիտիվ չէ ($|1-3| = 2 \leq 2$, $|3-5| = 2 \leq 2$, բայց $|1-5| = 4 > 2$):

Խնդիր 6.2

(Համարժեքության հարաբերություն $\Leftrightarrow$ տրոհում:)

Ապացույցի ուրվագիծ. ($\Rightarrow$) Դասերը ծածկում են A-ն (ռեֆլեքսիվություն՝ $x \in [x]$): Եթե $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, վերցրեք c երկուսից էլ; ապա $a\rho c$ և $c\rho b$, ուստի $a\rho b$ և $[a] = [b]$: ($\Leftarrow$) Սահմանեք $x\rho y$ այն և միայն այն դեպքում, եթե x, y-ը նույն բլոկում են; ռեֆլեքսիվությունը, սիմետրիկությունը, տրանզիտիվությունը անմիջական են: $\square$

Խնդիր 6.3

$\mathbb{Z}_2$:

$+$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$
$[1]$	$[1]$	$[0]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$

$\mathbb{Z}_3$:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[1]$

$\mathbb{Z}_4$:

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$
$[2]$	$[2]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$
$[3]$	$[3]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$

$\cdot$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$	$[0]$
$[1]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$[3]$
$[2]$	$[0]$	$[2]$	$[0]$	$[2]$
$[3]$	$[0]$	$[3]$	$[2]$	$[1]$

Խնդիր 6.4

$[a] \in \mathbb{Z}_n$ հակադարձելի է այն և միայն այն դեպքում, եթե $\gcd(a, n) = 1$:

Ապացույցի ուրվագիծ. ($\Rightarrow$) $ab \equiv 1 \pmod{n}$ նշանակում է $ab - kn = 1$, ուստի $\gcd(a, n) = 1$ ըստ Բեզուի: ($\Leftarrow$) $\gcd(a, n) = 1$ հետևում է $\exists\, b, k$: $ab + kn = 1$, ուստի $ab \equiv 1 \pmod{n}$: $\square$

Խնդիր 7.1

$A = \{a, b, c\}$-ի վրա, $\Delta_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$:

(a) $\rho = \{(a, b), (b, a)\}$: $r(\rho) = \rho \cup \Delta_A = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$: $s(\rho) = \rho$ (արդեն սիմետրիկ է): $t(\rho) = \{(a, b), (b, a), (a, a), (b, b)\}$:

(b) $\rho = \{(a, b), (b, c)\}$: $r(\rho) = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$: $s(\rho) = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b)\}$: $t(\rho) = \{(a, b), (b, c), (a, c)\}$:

(c) $\rho = \{(a, a), (a, b), (c, b), (c, a)\}$: $r(\rho) = \rho \cup \{(b, b), (c, c)\}$: $s(\rho) = \rho \cup \{(b, a), (b, c), (a, c)\}$: $t(\rho) = \rho$ (արդեն տրանզիտիվ է՝ $(c, a) \circ (a, b) = (c, b) \in \rho$):

(d) $\rho = \{(a, a), (a, c), (b, c)\}$: $r(\rho) = \rho \cup \{(b, b), (c, c)\}$: $s(\rho) = \rho \cup \{(c, a), (c, b)\}$: $t(\rho) = \rho$ (արդեն տրանզիտիվ է):

(e) $\rho = \{(a,b),(c,a),(b,c)\}$: $r(\rho) = \rho \cup \Delta_A$: $s(\rho) = \{(a,b),(b,a),(c,a),(a,c),(b,c),(c,b)\}$: $t(\rho) = A \times A$ (ամբողջական ցիկլը $a \to b \to c \to a$ գեներացնում է բոլոր 9 զույգերը):

(f) $\rho = \{(a,b),(c,b),(b,c)\}$: $r(\rho) = \rho \cup \Delta_A$: $s(\rho) = \{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c)\}$: $t(\rho) = \{(a,b),(a,c),(b,c),(b,b$

Խնդիր 7.2

$A = \{1,2,3,4\}$, $\rho = \{(1,2),(3,1),(3,2),(2,4)\}$:

$\boxed{r(\rho) = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,4),(3,1),(3,2)\}}$:

$\boxed{s(\rho) = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2)\}}$:

$\boxed{t(\rho) = \{(1,2),(1,4),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4)\}}$:

(Նոր զույգեր ρ^2-ից՝ $(1,4)$ ճանապարհով $1 \to 2 \to 4$; $(3,4)$ ճանապարհով $3 \to 2 \to 4$; $(3,2)$ ճանապարհով $3 \to 1 \to 2$ արդեն կա: 4-ը մտնող կող չունի, ուստի ρ^3-ը ոչինչ չի ավելացնում:)

Խնդիր 7.3

Ապացույցի ուրվագիծ. $\tau = \rho \cap \sigma$, որտեղ ρ, σ համարժեքության հարաբերություններ են: Ռեֆլեքսիվ՝ $(x,x) \in \rho \cap \sigma$: Սիմետրիկ՝ $(x,y) \in \tau \Rightarrow (y,x) \in \rho$ և $(y,x) \in \sigma \Rightarrow (y,x) \in \tau$: Տրանզիտիվ՝ $(x,y),(y,z) \in \tau \subseteq \rho \Rightarrow (x,z) \in \rho$; նմանապես $\in \sigma$; ուստի $(x,z) \in \tau$: □

Խնդիր 7.4

$\rho \circ \theta$-ն համարժեքության հարաբերություն է այն և միայն այն դեպքում, եթե $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$:

Ապացույցի ուրվագիծ. $(\Rightarrow)$ $(\rho \circ \theta)^{-1} = \theta^{-1} \circ \rho^{-1} = \theta \circ \rho$: Քանի որ $\rho \circ \theta$-ն սիմետրիկ է, $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$: $(\Leftarrow)$ Ռեֆլեքսիվություն՝ $\Delta \subseteq \rho, \theta \Rightarrow \Delta \subseteq \rho \circ \theta$: Սիմետրիկություն՝ $(\rho \circ \theta)^{-1} = \theta \circ \rho = \rho \circ \theta$: Տրանզիտիվություն՝ $(\rho \circ \theta)^2 = \rho \circ (\theta \circ \rho) \circ \theta = \rho \circ (\rho \circ \theta) \circ \theta \subseteq \rho^2 \circ \theta^2 \subseteq \rho \circ \theta$: □

Խնդիր 7.5

$\rho \cup \theta$-ն համարժեքության հարաբերություն է այն և միայն այն դեպքում, եթե $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$:

Ապացույցի ուրվագիծ. $(\Rightarrow)$ Եթե $\rho \cup \theta$-ն համարժեքություն է (հետևաբար տրանզիտիվ), ապա $\rho \circ \theta \subseteq (\rho \cup \theta) \circ (\rho \cup \theta) \subseteq \rho \cup \theta$: Նմանապես $\theta \circ \rho \subseteq \rho \cup \theta$: Քանի որ $\rho \cup \theta \subseteq \rho \circ \theta$ (քանի որ $\rho = \rho \circ \Delta \subseteq \rho \circ \theta$), ստանում ենք $\rho \cup \theta = \rho \circ \theta$, և սիմետրիայից նաև $= \theta \circ \rho$:

$(\Leftarrow)$ Եթե $\rho \circ \theta = \theta \circ \rho$, ապա ըստ Խնդիր 7.4-ի, $\rho \circ \theta$-ն համարժեքության հարաբերություն է: Ցույց է տրվում, որ $\rho \cup \theta = \rho \circ \theta$, որը հետևաբար համարժեքության հարաբերություն է: □

Վարժություն 4. Ֆունկցիաներ (Արտապատկերումներ)

Խնդիր 1

f-ը ամբողջական է, g-ն՝ մասնակի: Կոմպոզիցիան կարդացվում է ձախից աջ՝ $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$.

- $g \cdot f$ (սկզբում՝ g). որոշված է x-ում միայն այն դեպքում, երբ $g(x)$-ը որոշված է; որտեղ $g(x)$-ը որոշված է, $f(g(x))$-ը նույնպես որոշված է, քանի որ f-ը ամբողջական է: Ուստի $\mathrm{Dom}(g \cdot f) = \mathrm{Dom}(g)$:
- $f \cdot g$ (սկզբում՝ f). $f(x)$-ը միշտ որոշված է, բայց $g(f(x))$-ը պահանջում է $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$: Ուստի $f \cdot g$-ն կարող է լինել մասնակի՝ որոշված է x-ում միայն այն դեպքում, երբ $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$:

Խնդիր 2

(a) $f(x) = x^2 + 3$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [3, +\infty)$:
(b) $f(x) = \sqrt{x-2}$: $D_f = [2, +\infty)$, $R_f = [0, +\infty)$:
(c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$: $D_f = (2, +\infty)$, $R_f = (0, +\infty)$:
(d) $f(x) = |x|$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = [0, +\infty)$:
(e) $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$: $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \left(0, \frac{1}{2}\right]$:
(f) $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$, $R_f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup (0, +\infty)$:

Խնդիր 3

(a) $\rho = \{(x, \sqrt{x^2+4}) \mid x \in \mathbb{R}\}$: **Այո**, սա ֆունկցիա է: Յուրաքանչյուր x արտապատկերվում է եզակի $\sqrt{x^2+4}$ արժեքի:
(b) $\rho = \{(x, 5) \mid x \in \mathbb{R}\}$: **Այո**, սա (հաստատուն) ֆունկցիա է:
(c) $\rho = \{(7, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$: **Ոչ**, սա ֆունկցիա չէ: 7 տարրը զուգորդվում է յուրաքանչյուր իրական թվի հետ՝ խախտելով միարժեքությունը:

Խնդիր 4

(Ձախից աջ՝ $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$, սկզբում կիրառվում է f-ը:)

(a) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x + 3$:

$$(f \cdot g)(x) = x^2 + 4, \qquad (g \cdot f)(x) = x^2 + 6x + 10 :$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2+2}$, $g(x) = x^2 + 3$:

$$(f \cdot g)(x) = x^2 + 5, \qquad (g \cdot f)(x) = \sqrt{x^4 + 6x^2 + 11} :$$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x + 3$:

$$(f \cdot g)(x) = \frac{2+3x}{x} \ (x \neq 0), \qquad (g \cdot f)(x) = \frac{1}{2x+3} \ (x \neq -\tfrac{3}{2}) :$$

Խնդիր 5

(a) $f(x) = \frac{x+4}{2}$: $f^{-1}(x) = 2x - 4$:
(b) $f(x) = x^3$: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$:
(c) $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$: $f^{-1}(x) = \dfrac{2+3x}{1-x}$, $x \neq 1$:

Խնդիր 6

(a) $f(x) = |x|$: ոչ ինյեկտիվ է, ոչ էլ սյուրյեկտիվ: ($f(1) = f(-1)$; արժեքների տիրույթը $= [0, \infty) \neq \mathbb{R}$:)
(b) $f(x) = x^2 + 4$: ոչ ինյեկտիվ է, ոչ էլ սյուրյեկտիվ: ($f(1) = f(-1)$; արժեքների տիրույթը $= [4, \infty) \neq \mathbb{R}$:)
(c) $f(x) = x^3 + 6$: **բիյեկտիվ է**: (Խիստ աճող է, հետևաբար՝ ինյեկտիվ; խորանարդ արմատը ապահովում է սյուրյեկտիվություն:)
(d) $f(x) = x + |x|$: ոչ ինյեկտիվ է, ոչ էլ սյուրյեկտիվ: ($f(x) = 0$ բոլոր $x < 0$; արժեքների տիրույթը $= [0, \infty) \neq \mathbb{R}$:)
(e) $f(x) = x(x-2)(x+2) = x^3 - 4x$: սյուրյեկտիվ է, բայց **ոչ** ինյեկտիվ: (Խորանարդը ձգտում է $\pm\infty$, ինչը տալիս է սյուրյեկտիվություն; $f(0) = f(2) = 0$ ցույց է տալիս, որ ինյեկտիվ չէ:)

Խնդիր 7

Միջուկը՝ Ker$(f) = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$: Համարժեքության դասերն են.

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = |x|$: Ker(f)-ը տրոհում է $\mathbb{Z}$-ը $\{0\}$ և $\{-n, n\}$ բազմությունների՝ յուրաքանչյուր $n \geq 1$-ի համար:
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$: դասերը $[n, n+1)$ կիսաբաց միջակայքերն են յուրաքանչյուր $n \in \mathbb{Z}$-ի համար:
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x \rceil$: դասերը $(n-1, n]$ կիսաբաց միջակայքերն են յուրաքանչյուր $n \in \mathbb{Z}$-ի համար:

Խնդիր 8

Պետք է ցույց տանք, որ $(a) \Leftrightarrow (b)$, որտեղ (a)-ն $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ պնդումն է, իսկ (b)-ն՝ $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$:

(b) պնդումը (a)-ի հակադիր (contrapositive) պնդումն է: Պայմանական պնդումը և դրա հակադիրը տրամաբանորեն համարժեք են, ուստի (a)$\Leftrightarrow$(b): □

Խնդիր 9

(Հղում. Լեմմաներ 1, 2, 3, 5 ֆունկցիաների մասին դասախոսության նշումներից:)

Լեմմա 1 (Ինյեկցիաների համադրույթը ինյեկտիվ է). Եթե f, g ինյեկտիվ են, ենթադրենք $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$: Այդ դեպքում՝ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$; g ինյեկտիվ $\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$; f ինյեկտիվ $\Rightarrow x_1 = x_2$: □

Լեմմա 2 (Սյուրյեկցիաների համադրույթը սյուրյեկտիվ է). Եթե $f : A \to B$ և $g : B \to C$ սյուրյեկտիվ են, տրված $c \in C$-ի համար $\exists\, b \in B$, որ $g(b) = c$, և $\exists\, a \in A$, որ $f(a) = b$, ուստի $(g \circ f)(a) = c$: □

Լեմմա 3 (Բիյեկցիաների համադրույթը բիյեկտիվ է). Հետևում է Լեմմա 1-ից և 2-ից:

Լեմմա 5 (Եթե $g \circ f$-ը ինյեկտիվ է, ապա f-ը ինյեկտիվ է). Ենթադրենք $f(x_1) = f(x_2)$: Ապա $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, այսինքն՝ $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$; քանի որ $g \circ f$-ը ինյեկտիվ է, $x_1 = x_2$: □

Խնդիր 10

Ker$(f) = \{(a_1, a_2) \in A \times A : f(a_1) = f(a_2)\}$-ը համարժեքության հարաբերություն է.

- *Ռեֆլեքսիվ.* $f(a) = f(a)$, ուստի $a \sim a$:

- *Սիմետրիկ.* $f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a)$:
- *Տրանզիտիվ.* $f(a) = f(b)$ և $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c)$: □

Խնդիր 11

(a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$: համարժեքության դասերն են $\{0\}$ և $\{-n, n\}$, որտեղ $n \geq 1$:
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$: համարժեքության դասերը $[n, n+1)$ միջակայքերն են յուրաքանչյուր $n \in \mathbb{Z}$-ի համար:

(Նույնն է, ինչ Խնդիր 7(a) և 7(b):)

Խնդիր 12

$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, $f(x) = \frac{x}{2x+1}$:

Ինյեկտիվ է. $\frac{x_1}{2x_1+1} = \frac{x_2}{2x_2+1} \Rightarrow$ խաչաձև բազմապատկենք $\Rightarrow 2x_1x_2 + x_1 = 2x_1x_2 + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$: ✓

Սյուրյեկտիվ չէ. $f(x) = \frac{1}{2+1/x} < \frac{1}{2}$ բոլոր $x > 0$-ների համար, ուստի $y = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}^+$ չունի նախապատկեր: ✓

Խնդիր 13

$f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{15}$, $f(x) \equiv 4x \pmod{15}$:

Բիյեկտիվ է. $\gcd(4, 15) = 1$, ուստի 4-ով բազմապատկումը բիյեկցիա է $\mathbb{Z}_{15}$-ի վրա:

Հակադարձ. Մեզ պետք է $4^{-1} \pmod{15}$: Քանի որ $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$, ապա $4^{-1} \equiv 4$: Այսպիսով՝ $f^{-1}(x) \equiv 4x \pmod{15}$ (ֆունկցիան իր հակադարձն է):

Խնդիր 14

$f : \mathbb{Z}_{15} \to \mathbb{Z}_{15}$, $f(x) \equiv 2x + 4 \pmod{15}$:

Բիյեկտիվ է: Քանի որ $\gcd(2, 15) = 1$, 2-ով բազմապատկումը հակադարձելի է $\pmod{15}$-ով, ուստի f-ը բիյեկցիա է: Ստուգում. $f(0) = 4$, $f(1) = 6$, $f(2) = 8$, $\ldots$, $f(13) = 0$, $f(14) = 2$ — բոլոր 15 մնացորդները հանդիպում են:

Հակադարձ. $2^{-1} \equiv 8 \pmod{15}$ (քանի որ $2 \cdot 8 = 16 \equiv 1$): Ուստի $f^{-1}(y) \equiv 8(y - 4) \equiv 8y + 13 \pmod{15}$:

Խնդիր 15

Պնդում. Եթե A-ն վերջավոր է, ապա $f : A \to A$-ն բիյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ինյեկտիվ է:

Ապացույցի ուրվագիծ. ($\Rightarrow$) Բիյեկտիվ $\Rightarrow$ ինյեկտիվ ակնհայտորեն: ($\Leftarrow$) Եթե f-ը ինյեկտիվ է, ապա $|f(A)| = |A|$: Քանի որ $f(A) \subseteq A$ և A-ն վերջավոր է, $|f(A)| = |A|$ պայմանից հետևում է $f(A) = A$, ուստի f-ը սյուրյեկտիվ է, հետևաբար՝ բիյեկտիվ: □

Խնդիր 16

Պնդում. Եթե A-ն վերջավոր է, ապա $f : A \to A$-ն բիյեկտիվ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն սյուրյեկտիվ է:

Ապացույցի ուրվագիծ. ($\Rightarrow$) Ակնհայտ է: ($\Leftarrow$) Եթե f-ը սյուրյեկտիվ է, ապա $f(A) = A$, ուստի $|f(A)| = |A|$: Ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի (pigeonhole principle), վերջավոր

բազմությունից իր վրա սյուրյեկցիան պետք է լինի ինյեկտիվ (հակառակ դեպքում երկու մուտքային արժեքներ կունենան նույն ելքային արժեքը՝ թողնելով առավելագույնը $|A| - 1$ տարբեր ելքային արժեքներ, ինչը հակասում է սյուրյեկտիվությանը): □

Խնդիր 17

Հետևանք 1 (դասախոսությունից). Վերջավոր A բազմության համար $f : A \to A$ ինյեկտիվ է $\Leftrightarrow$ սյուրյեկտիվ է $\Leftrightarrow$ բիյեկտիվ է:

Սա Խնդիր 15-ի և 16-ի անմիջական համադրությունն է: □

Խնդիր 18

(Հղում. Թեորեմներ 6 և 7 դասախոսության նշումներից:)

Թեորեմ 6 (f-ը ունի ձախ հակադարձ այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը ինյեկտիվ է). ($\Leftarrow$) Եթե $f : A \to B$ ինյեկտիվ է, սահմանենք $g : B \to A$-ն այսպես՝ $g(y) =$ այն եզակի x-ը, որի համար $f(x) = y$, եթե $y \in \mathrm{Ran}(f)$, և $g(y) = a_0$ (ֆիքսված տարր) հակառակ դեպքում: Այդ դեպքում $g \circ f = \mathrm{id}_A$: ($\Rightarrow$) Եթե $g \circ f = \mathrm{id}_A$, ապա $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$:

Թեորեմ 7 (f-ը ունի աջ հակադարձ այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը սյուրյեկտիվ է). ($\Leftarrow$) Եթե f-ը սյուրյեկտիվ է, յուրաքանչյուր $y \in B$-ի համար ընտրենք որևէ $x_y \in f^{-1}(\{y\})$ և սահմանենք $h(y) = x_y$: Այդ դեպքում $f \circ h = \mathrm{id}_B$: ($\Rightarrow$) Եթե $f \circ h = \mathrm{id}_B$, ապա ցանկացած $y \in B$-ի համար $f(h(y)) = y$, ուստի $y \in \mathrm{Ran}(f)$:

Խնդիր 19

$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ տեղի ունի բոլոր A, B-ների համար այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը **ինյեկտիվ է**:

Ուրվագիծ. ($\Rightarrow$) Եթե f-ը ինյեկտիվ չէ, վերցնենք $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$, որտեղ $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) = f(x_2)$: Այդ դեպքում $f(\varnothing) = \varnothing \neq \{f(x_1)\} = f(A) \cap f(B)$: ($\Leftarrow$) Եթե f-ը ինյեկտիվ է, ապա $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ ներդրումը տեղի ունի, որովհետև $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$: □

Խնդիր 20

$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ տեղի ունի բոլոր A, B-ների համար այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը **ինյեկտիվ է**:

Ուրվագիծ. ($\Rightarrow$) Եթե f-ը ինյեկտիվ չէ, վերցնենք $a \neq b$, որոնց համար $f(a) = f(b)$, $A = \{a, b\}$, $B = \{b\}$: Այդ դեպքում $f(A \setminus B) = f(\{a\}) = \{f(a)\}$, բայց $f(A) \setminus f(B) = \{f(a)\} \setminus \{f(b)\} = \varnothing$: ($\Leftarrow$) Եթե f-ը ինյեկտիվ է և $y \in f(A \setminus B)$, ապա $y = f(a)$ եզակի $a \in A \setminus B$-ի համար; ինյեկտիվությունը երաշխավորում է, որ ոչ մի $b \in B$ չի արտապատկերվում y-ին, ուստի $y \notin f(B)$, ինչից հետևում է $y \in f(A) \setminus f(B)$: Մյուս ներդրումը տեղի ունի ցանկացած ֆունկցիայի համար: □

Խնդիր 21

Այո: Հնարավոր է, որ $X_1 \neq X_2$, բայց $f(X_1) = f(X_2)$:

Օրինակ՝ $f : \{1, 2\} \to \{a\}$, որտեղ $f(1) = f(2) = a$: Վերցնենք $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{1, 2\}$: Այդ դեպքում $X_1 \neq X_2$, բայց $f(X_1) = \{a\} = f(X_2)$:

Խնդիր 22

Այո: Չհատվող ոչ դատարկ ենթաբազմությունները կարող են ունենալ հավասար պատկերներ, եթե f-ը ինյեկտիվ չէ:

Օրինակ՝ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$, $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = b$: Վերցնենք $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{3, 4\}$: Այդ դեպքում $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ և $f(X_1) = \{a, b\} = f(X_2)$:

Խնդիր 23

Այո: Հնարավոր է, որ $Y_1 \neq Y_2$, բայց $f^{-1}(Y_1) = f^{-1}(Y_2)$:

Օրինակ՝ $f : \{1\} \to \{a, b\}$, որտեղ $f(1) = a$: Թող $Y_1 = \{a\}$ և $Y_2 = \{a, b\}$: Այդ դեպքում $Y_1 \neq Y_2$, բայց $f^{-1}(Y_1) = \{1\} = f^{-1}(Y_2)$, քանի որ b-ն չունի նախապատկեր:

Խնդիր 24

Այո, դա միշտ ճիշտ է: Եթե $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, ապա $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = \varnothing$:

Ապացույց. $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$՝ օգտագործելով այն փաստը, որ նախապատկերները պահպանում են հատումները: $\square$

Խնդիր 25

Պնդում. $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ ցանկացած $f : A \to B$ և $Y \subseteq B$-ի համար:

Ապացույց. Դիցուք $y \in f(f^{-1}(Y))$: Այդ դեպքում $y = f(x)$ որևէ $x \in f^{-1}(Y)$-ի համար, ինչը նշանակում է՝ $f(x) \in Y$, ուստի $y \in Y$: $\square$

Հակաօրինակ հավասարության համար. $A = \{1\}$, $B = \{a, b\}$, $f(1) = a$, $Y = B$: Այդ դեպքում $f(f^{-1}(Y)) = \{a\} \subsetneq \{a, b\} = Y$:

Հավասարությունը տեղի ունի բոլոր $Y \subseteq B$-ների համար այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ը սյուրյեկտիվ է:

Վարժություն 5. Կոմբինատորիկա. Հիմնական կանոններ

Բաժին 1. Գումարի և արտադրյալի կանոններ

Խնդիր 1

0-ից 1000 ամբողջ թվերի քանակը, որոնց թվանշաններում կա *ճիշտ մեկ* 6:

Յուրաքանչյուր 0–999 թիվ գրենք որպես 3-նիշ տող՝ առաջատար զրոներով (առաջատար զրոները 6 չեն ավելացնում): Ճիշտ մեկ թվանշանն է 6. ընտրենք նրա դիրքը (3 եղանակ), դնենք 6, մնացած երկու դիրքերը լրացնենք ոչ-6 թվանշաններով (9 յուրաքանչյուրը): 1000 թիվը 6 չունի:

$$\binom{3}{1} \cdot 9^2 = 3 \cdot 81 = \boxed{243}$$

Խնդիր 2

0-ից 1000 ամբողջ թվերի քանակը, որոնց թվանշաններում կա *մեկ կամ ավելի* 6 (գոնե մեկ):

Լրացում. հաշվել այն ամբողջ թվերը, որոնք *չունեն* 6 թվանշան:

- 1-նիշ թվեր (0–9): 9 հատ չունեն 6 (բոլորը, բացի 6-ից):
- 2-նիշ թվեր (10–99): առաջին թվանշանը $\{1, \ldots, 9\} \setminus \{6\}$-ից՝ 8 հատ, երկրորդ թվանշանը $\{0, \ldots, 9\} \setminus \{6\}$-ից՝ 9 հատ: Ընդամենը $8 \cdot 9 = 72$:
- 3-նիշ թվեր (100–999): $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$:
- 1000 թիվը չի պարունակում 6: $+1$ հատ:

Առանց վեցերի ընդհանուր քանակը՝ $9 + 72 + 648 + 1 = 730$; 0-ից 1000 բոլոր թվերը՝ 1001:

$\boxed{1001 - 730 = 271}$

Խնդիր 3

Ընտրել երկու տարբեր առարկաների գրքեր 15 ինֆորմատիկայի, 12 մաթեմատիկայի, 10 ֆիզիկայի գրքերից:

Ըստ գումարի/արտադրյալի կանոնների՝ $15 \cdot 12 + 15 \cdot 10 + 12 \cdot 10 = 180 + 150 + 120 = \boxed{450}$:

Խնդիր 4

Կենտ թվեր 100-ից 1000 միջակայքում (այսինքն՝ 3-նիշ կենտ թվեր 101, 103, …, 999):

Վերջին թվանշանը՝ 5 ընտրություն ($\{1, 3, 5, 7, 9\}$): Առաջին թվանշանը՝ 9 ընտրություն (1–9): Միջին թվանշանը՝ 10 ընտրություն (0–9):

$\boxed{9 \times 10 \times 5 = 450}$

Խնդիր 5

700-ից փոքր բնական թվեր ($\{1, \ldots, 699\}$).

(a) Բաժանվում են 5-ի. $\lfloor 699/5 \rfloor = \boxed{139}$:

(b) Դրանցից (5-ի բաժանվողներից) քանիսն են բաժանվում 3-ի՞: Դրանք հենց $\mathrm{lcm}(3, 5) = 15$-ի պատիկներն են. $\lfloor 699/15 \rfloor = \boxed{46}$:

(c) Դրանցից քանիսն են բաժանվում և՛ 3-ի, և՛ 5-ի (այսինքն՝ 15-ի). $\lfloor 699/15 \rfloor = \boxed{46}$:

Խնդիր 6

Երևան $\to$ Մոսկվա: 15 չվերթ: Մոսկվա $\to$ Լոնդոն: 20 չվերթ: Ըստ արտադրյալի կանոնի՝ $\boxed{15 \times 20 = 300}$:

Խնդիր 7

4-նիշ թվեր, որոնք ունեն առնվազն երկու միանման թվանշաններ:

Բոլոր 4-նիշ թվերը՝ $9 \times 10^3 = 9000$: 4-նիշ թվեր, որոնց բոլոր թվանշանները տարբեր են. առաջին թվանշանը՝ 9 ընտրություն, երկրորդը՝ 9, երրորդը՝ 8, չորրորդը՝ 7, ստացվում է $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$:

$\boxed{9000 - 4536 = 4464}$

Խնդիր 8

7-նիշ թվեր, որոնց առաջին և վերջին թվանշանները տարբեր են:

Բոլոր 7-նիշ թվերը՝ 9×10^6: 7-նիշ թվեր, որոնց առաջին = վերջին թվանշանը. առաջին թվանշանը՝ 9 ընտրություն, վերջին թվանշանը ֆիքսված է (հավասար է առաջինին՝ 1 ընտրություն), միջին 5 թվանշանները՝ 10^5 յուրաքանչյուրը: Ընդամենը՝ 9×10^5:

Պատասխան՝ $9 \times 10^6 - 9 \times 10^5 = 9 \times 10^5(10 - 1) = 9 \times 10^5 \times 9$:

$\boxed{9 \times 10^6 - 9 \times 10^5 = 8{,}100{,}000}$

Խնդիր 9

6-նիշ թվեր, որտեղ հարևան թվանշանները տարբեր են (թվանշանները 0–9, առաջին թվանշանը $\neq 0$):

Դիրք 1: 9 ընտրություն (1–9): Հաջորդ յուրաքանչյուր դիրք՝ 9 ընտրություն (ցանկացած թվանշան, բացի նախորդից):

$\boxed{9 \times 9^5 = 9^6 = 531{,}441}$

Խնդիր 10

7-նիշ թվեր. զույգ դիրքերում (2,4,6) կենտ թվանշաններ են, կենտ դիրքերում (1,3,5,7)՝ զույգ թվանշաններ:

Դիրքեր 2,4,6: 5 կենտ թվանշան յուրաքանչյուրում $\Rightarrow 5^3$: Դիրք 1 (առաջին, պետք է լինի զույգ և $\neq 0$): 4 ընտրություն $\{2, 4, 6, 8\}$: Դիրքեր 3,5,7: 5 զույգ թվանշան յուրաքանչյուրում $\Rightarrow 5^3$:

$\boxed{4 \times 5^3 \times 5^3 = 4 \times 15{,}625 = 62{,}500}$

Բաժին 2. Տեղափոխություններ և կարգավորություններ

Խնդիր 1

Արտապատկերումներ 6-տարրանոց բազմությունից 3-տարրանոց բազմություն. 6 տարրերից յուրաքանչյուրը արտապատկերվում է 3 պատկերներից մեկին:

$\boxed{3^6 = 729}$

Խնդիր 2

Ինյեկտիվ արտապատկերումներ 6-տարրանոց բազմությունից 3-տարրանոց բազմություն: Քանի որ $6 > 3$, ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի (Pigeonhole Principle), ոչ մի ինյեկցիա գոյություն չունի:

$\boxed{0}$

Խնդիր 3

5 տղա և 6 աղջիկ շարքում; տղաները զբաղեցնում են առաջին 5 դիրքերը:

Դասավորել 5 տղաներին առաջին 5 դիրքերում՝ $5!$: Դասավորել 6 աղջիկներին մնացած 6 դիրքերում՝ $6!$:

$\boxed{5! \times 6! = 120 \times 720 = 86{,}400}$

Խնդիր 4

6 տղա և 7 աղջիկ (13 մարդ) շարքում; առաջին դիրքում տղա է:

Ընտրել տղային 1-ին դիրքի համար՝ 6 եղանակ: Դասավորել մնացած 12 մարդկանց՝ $12!$:

$\boxed{6 \times 12! = 6 \times 479{,}001{,}600 = 2{,}874{,}009{,}600}$

Խնդիր 5

6 տղա և 7 աղջիկ շարքում; առաջին և վերջին դիրքերում տղաներ են:

Առաջին դիրք՝ 6 ընտրություն: Վերջին դիրք՝ 5 մնացած տղաներից: Միջին 11 դիրքերը՝ $11!$:

$\boxed{6 \times 5 \times 11! = 30 \times 39{,}916{,}800 = 1{,}197{,}504{,}000}$

Խնդիր 6

5 տղա և 6 աղջիկ շարքում; տղաները զբաղեցնում են 5 *հաջորդական* դիրքեր:

Դիտարկենք 5 տղաների խումբը որպես մեկ միավոր: 6 աղջիկների հետ միասին ունենք 7 օբյեկտ շարքում դասավորելու համար՝ $7!$ եղանակ: Խմբի ներսում 5 տղաները կարող են տեղափոխվել՝ $5!$ եղանակով:

$\boxed{7! \times 5! = 5040 \times 120 = 604{,}800}$

Խնդիր 7

Դասավորել 9 տարբեր մարդկանց շարքում:

$\boxed{9! = 362{,}880}$

Խնդիր 8

8-նիշ թվեր՝ կազմված 23122313 թվի թվանշաններից:

Թվանշաններ. 1-ը հանդիպում է 2 անգամ, 2-ը՝ 3 անգամ, 3-ը՝ 3 անգամ: Ընդամենը 8 թվանշան:

Կրկնություններով տեղափոխություններ՝ $\dfrac{8!}{2!\,3!\,3!} = \dfrac{40320}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \dfrac{40320}{72}$:

$$\boxed{\frac{8!}{2!\,3!\,3!} = 560}$$

Խնդիր 9

6 երկարությամբ բառեր $\{a, b, g, d, e, z\}$ այբուբենից (ձայնավորներ՝ a, e, բաղաձայններ՝ b, g, d, z), որտեղ երկու ձայնավորներ հարևան չեն:

6 երկարությամբ բոլոր բառերը՝ $6^6 = 46656$:

Բառեր, որտեղ ՉԿԱՆ երկու հարևան ձայնավորներ. Դիցուք V_n, C_n = ձայնավորով/բաղաձայնով վերջացող բառերի քանակը: $V_n = 2C_{n-1}$, $C_n = 4(V_{n-1} + C_{n-1})$:

$V_1 = 2, C_1 = 4, V_2 = 8, C_2 = 24, V_3 = 48, C_3 = 128, V_4 = 256, C_4 = 704,\ V_5 = 1408, C_5 = 3840, V_6 = 7680, C_6 = 20992$: Ընդամենը՝ $f(6) = 28672$:

$$\boxed{46656 - 28672 = 17984}$$

Խնդիր 10

Ապացուցել. 6 հոգուց բաղկացած ցանկացած խմբում կա՛մ կան 3 փոխադարձ ծանոթներ, կա՛մ 3 փոխադարձ անծանոթներ ($R(3, 3) = 6$):

Ապացույցի ուրվագիծ. Մոդելավորենք 6 մարդկանց որպես K_6-ի գագաթներ՝ կողերը ներկված կարմիր (ծանոթ) կամ կապույտ (անծանոթ): Վերցնենք որևէ A գագաթ; այն ունի 5 կող, ուստի ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի՝ առնվազն 3-ը ունեն նույն գույնը, ասենք՝ կարմիր, դեպի B, C, D գագաթները: Եթե B, C, D-ի միջև որևէ կող կարմիր է, այն A-ի հետ կազմում է կարմիր եռանկյուն; հակառակ դեպքում B, C, D-ն կազմում են կապույտ եռանկյուն: □

Խնդիր 11

Քանի՞ թիվ պետք է ընտրել $\{1, 2, \ldots, 210\}$ բազմությունից՝ երաշխավորելու համար, որ կա գոնե մեկ զույգ թիվ:

$\{1, \ldots, 210\}$-ում կան 105 կենտ թվեր: Վատագույն դեպքում մենք ընտրում ենք բոլոր 105 կենտ թվերը: Եվս մեկ ընտրություն երաշխավորում է զույգ թիվ:

$$\boxed{106}$$

Խնդիր 12

Ապացուցել. $7, 77, 777, \ldots$ հաջորդականության առաջին 2014 անդամների մեջ կա մեկը, որը բաժանվում է 2013-ի:

Ապացույցի ուրվագիծ. Դիցուք $a_k = \underbrace{77\ldots7}_{k}$: Դիտարկենք 2014 մնացորդները a_k mod 2013: Եթե որևէ մնացորդ 0 է, ապացուցված է: Հակառակ դեպքում 2014 մնացորդները ընկնում են $\{1, \ldots, 2012\}$ բազմության մեջ (2012 դաս), ուստի ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի՝ երկու անդամ a_i, a_j ($i < j$) ունեն նույն մնացորդը: Այդ դեպքում $2013 \mid a_j - a_i = a_{j-i} \cdot 10^i$: Քանի որ $\gcd(10, 2013) = 1$, ստանում ենք $2013 \mid a_{j-i}$, և $1 \le j - i \le 2013$: □

Վարժություն 6. Զուգորդություններ և Նյուտոնի երկանդամ

Խնդիր 1

9 երկարությամբ բիթային տողեր՝ ճիշտ 5 հատ զրոներով (և 4 հատ մեկերով):

Ընտրել դիրքեր 5 զրոների համար՝ $\binom{9}{5}$:

$$\boxed{\binom{9}{5} = 126}$$

Խնդիր 2

Կոմիտե՝ կազմված 6 ուսուցչից և 8 աշակերտից, ընտրված 12 ուսուցիչներից և 20 աշակերտներից:

$$\boxed{\binom{12}{6} \cdot \binom{20}{8} = 924 \times 125970 = 116{,}396{,}280}$$

Խնդիր 3

Ընտրել 13 խաղաքարտ 52-ից այնպես, որ դրանք պարունակեն նույն մասի (suit) 5 խաղաքարտ:

Օգտագործելով լրացումը (ոչ մի մաս չունի ≥ 5 խաղաքարտ, այսինքն՝ յուրաքանչյուր մաս տալիս է ≤ 4 խաղաքարտ):

Հնարավոր բաշխումները (a, b, c, d), որտեղ յուրաքանչյուրը ≤ 4 է և գումարը 13 է՝ $(4, 4, 4, 1)$, $(4, 4, 3, 2)$, $(4, 3, 3, 3)$ են:

$$\begin{aligned}
(4,4,4,1): &\quad 4 \cdot \binom{13}{4}^3 \binom{13}{1} = 19{,}007{,}345{,}500 \\
(4,4,3,2): &\quad 12 \cdot \binom{13}{4}^2 \binom{13}{3} \binom{13}{2} = 136{,}852{,}887{,}600 \\
(4,3,3,3): &\quad 4 \cdot \binom{13}{4} \binom{13}{3}^3 = 66{,}905{,}856{,}160
\end{aligned}$$

$N_{\leq 4} = 222{,}766{,}089{,}260$: Ընդամենը 13-խաղաքարտանոց ձեռքեր՝ $\binom{52}{13} = 635{,}013{,}559{,}600$:

$$\boxed{635{,}013{,}559{,}600 - 222{,}766{,}089{,}260 = 412{,}247{,}470{,}340}$$

Խնդիր 4

Բաժանել 10 մարդու 5 հոգանոց երկու թիմի:

Քանի որ երկու թիմերը չկարգավորված են (անզանազանելի պիտակներ). $\frac{1}{2}\binom{10}{5} = \frac{252}{2}$:

$$\boxed{126}$$

Խնդիր 5

$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$: 5-տարրանոց ենթաբազմությունների քանակը, որոնք պարունակում են a տարրը:

Ֆիքսենք a-ն ենթաբազմության մեջ; ընտրենք ևս 4 տարր մնացած 7 տարրերից:

$$\boxed{\binom{7}{4} = 35}$$

Խնդիր 6

x^6y^4-ի գործակիցը $(2x+3y)^{10}$-ի վերլուծության մեջ:

Ըստ Նյուտոնի երկանդամի բանաձևի՝ $\binom{10}{6}(2x)^6(3y)^4 = \binom{10}{6} \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot x^6y^4$:

$\binom{10}{6} = 210$, $2^6 = 64$, $3^4 = 81$:

$$\boxed{210 \cdot 64 \cdot 81 = 1{,}088{,}640}$$

Խնդիր 7

Նավակը a1-ից հասնում է e5՝ շարժվելով միայն աջ կամ վերև:

a1-ից e5՝ 4 քայլ աջ ($a \to b \to c \to d \to e$) և 4 քայլ վերև ($1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$): Ընդամենը 8 քայլ, ընտրել 4-ը աջ գնալու համար:

$$\boxed{\binom{8}{4} = 70}$$

Խնդիր 8

Ցանցային ճանապարհներ $O(0,0)$-ից $A(7,8)$՝ անցնելով $(3,4)$-ով:

$O \to P(3,4)$: $\binom{7}{3} = 35$ ճանապարհ: $P \to A$: $\binom{8}{4} = 70$ ճանապարհ:

$$\boxed{35 \times 70 = 2450}$$

Խնդիր 9

6-ը երեք ոչ բացասական գումարելիների կարգավորված գումարի տեսքով՝ $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ (թերթիկի “կրկնություններով զուգորդություններ” բաժնում): Ըստ աստղեր-և-ձողիկներ եղանակի՝

$$\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \boxed{28}.$$

(Եթե մասերը պետք է լինեն ≥ 1, ապա $\binom{5}{2} = 10$; իսկ *չկարգավորված* տրոհումները՝ $4{+}1{+}1$, $3{+}2{+}1$, $2{+}2{+}2$, 3 հատ են:)

Խնդիր 10

Գնել 7 թխվածք 3 տեսակից (զուգորդություններ կրկնություններով):

$$\boxed{\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36}$$

Խնդիր 11

«մաթեմատիկա» բառի տարբեր վերադասավորումները (10 տառ): Կրկնվում են միայն մ ($\times 2$)-ն ու ա ($\times 3$)-ն (թ-ն և տ-ն տարբեր տառեր են), մնացած հինգ տառերը տարբեր են:

$$\boxed{\frac{10!}{2!\,3!} = \frac{3{,}628{,}800}{12} = 302{,}400}$$

Խնդիր 12

Դասավորել 15 մաթեմատիկայի, 16 ինֆորմատիկայի, 12 ֆիզիկայի գրքեր դարակի վրա (նույն առարկայի գրքերը անզանազանելի են): Ընդամենը $15 + 16 + 12 = 43$ գիրք:

$$\boxed{\frac{43!}{15! \cdot 16! \cdot 12!} = \binom{43}{15,\ 16,\ 12}}$$

Խնդիր 13

$x_1^4 x_2^3 x_3^2$-ի գործակիցը $(x_1 + x_2 + x_3)^9$-ի վերլուծության մեջ:

Ըստ բազմանդամի (multinomial) թեորեմի՝ $\frac{9!}{4!\,3!\,2!}$:

$$\boxed{\frac{9!}{4!\,3!\,2!} = \frac{362880}{24 \cdot 6 \cdot 2} = 1260}$$

Վարժություն 7. Տրոհումներ և Ներառման-բացառման սկզբունքը

Խնդիր 1

Տրոհել 5-տարրանոց բազմությունը 3 ոչ դատարկ դասերի. Ստիռլինգի թիվ $S(5,3)$:

$S(5,3) = S(4,2) + 3 \cdot S(4,3) = 7 + 3 \cdot 6 = \boxed{25}$:

Խնդիր 2

Բաշխել m տարբեր գնդակները n տարբեր արկղերի մեջ այնպես, որ ոչ մի արկղ դատարկ չմնա ($m \to n$ սյուրյեկցիաներ):

Ըստ ներառման-բացառման սկզբունքի՝

$$\boxed{n!\, S(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m}$$

Խնդիր 3

Թվեր $\{1, \ldots, 1000\}$ բազմությունից, որոնք չեն բաժանվում 2-ի, 3-ի կամ 5-ի:

Դիցուք $A_d = d$-ի բազմապատիկները: Ըստ ներառման-բացառման սկզբունքի՝

$$|A_2| = 500,\ |A_3| = 333,\ |A_5| = 200,$$
$$|A_6| = 166,\ |A_{10}| = 100,\ |A_{15}| = 66,\ |A_{30}| = 33:$$

$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$:

$\boxed{1000 - 734 = 266}$

Խնդիր 4

4-նիշ թվեր, որոնք պարունակում են գոնե մեկ 7 թվանշան:

Բոլոր 4-նիշ թվերը՝ 9000: Այն թվերը, որոնք չունեն 7. առաջին թվանշանը՝ 8 ընտրություն, մնացած յուրաքանչյուրը՝ 9 ընտրություն $= 8 \times 9^3 = 5832$:

$\boxed{9000 - 5832 = 3168}$

Խնդիր 5

Ամբողջ թվեր $\{1, \ldots, 16500\}$ բազմությունից, որոնք չեն բաժանվում 5-ի:

5-ի բաժանվողներ. $\lfloor 16500/5 \rfloor = 3300$:

$\boxed{16500 - 3300 = 13200}$

Խնդիր 6

Ամբողջ թվեր $\{1, \ldots, 16500\}$ բազմությունից, որոնք չեն բաժանվում ո՛չ 5-ի, ո՛չ էլ 3-ի:

$|A_3| = 5500$, $|A_5| = 3300$, $|A_{15}| = 1100$: $|A_3 \cup A_5| = 5500 + 3300 - 1100 = 7700$:

$\boxed{16500 - 7700 = 8800}$

Խնդիր 7

Ամբողջ թվեր $\{1, \ldots, 16500\}$ բազմությունից. բաժանվում են 11-ի, բայց չեն բաժանվում 5-ի և չեն բաժանվում 3-ի:

Ունիվերս S. 11-ի բազմապատիկներ, $|S| = 1500$: Դիցուք $A =$ նաև բաժ. 3-ի (բաժ. 33-ի), $B =$ նաև բաժ. 5-ի (բաժ. 55-ի): $|A| = 500$, $|B| = 300$, $|A \cap B| = \lfloor 16500/165 \rfloor = 100$: $|A \cup B| = 700$:

$\boxed{1500 - 700 = 800}$

Խնդիր 8

Ամբողջ թվեր $\{1, \ldots, 16500\}$ բազմությունից, որոնք չեն բաժանվում 5-ի, 3-ի կամ 11-ի:

$|A_3| = 5500$, $|A_5| = 3300$, $|A_{11}| = 1500$: $|A_{15}| = 1100$, $|A_{33}| = 500$, $|A_{55}| = 300$: $|A_{165}| = 100$:

$|A_3 \cup A_5 \cup A_{11}| = 5500 + 3300 + 1500 - 1100 - 500 - 300 + 100 = 8500$:

$\boxed{16500 - 8500 = 8000}$

Խնդիր 9

30 ուսանող; 20-ը գիտեն անգլերեն, 12-ը՝ ֆրանսերեն, 6-ը՝ երկուսն էլ:

$|E \cup F| = 20 + 12 - 6 = 26$: Չգիտեն ոչ մեկը.

$\boxed{30 - 26 = 4}$

Խնդիր 10

$\triangle ABC$-ի յուրաքանչյուր կողմը բաժանված է 8 հավասար մասի: Հաշվել եռանկյունները, որոնց գագաթները բաժանման կետերն են, A, B, C-ն գագաթ *չեն*, և ոչ մի կողմ *զուգահեռ չէ* ABC-ի կողմին:

Գագաթներն ընտրվում են յուրաքանչյուր կողմի 7 ներքին բաժանման կետերից (ընդամենը՝ 21 կետ): Եթե երկու գագաթ նույն կողմի վրա լինեն, եռանկյան այդ կողմը զուգահեռ կլինի ABC-ի մի կողմին. ուստի վավեր եռանկյունն ունի *ճիշտ մեկ գագաթ յուրաքանչյուր կողմի վրա՝* $7^3 = 343$ եռանկյուն (ոչ մեկը այլասերված չէ):

Հանենք նրանք, որոնք ունեն ABC-ին զուգահեռ կողմ: Եռանկյան կողմը զուգահեռ է ABC-ի որոշակի կողմին $7 \cdot 7 = 49$ դեպքում (մի գագաթը՝ ազատ, մյուս երկուսը՝ կապված): Ըստ ներառման-բացառման սկզբունքի՝ երեք ուղղություններով ($|A_i| = 49$, $|A_i \cap A_j| = 7$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$).

$$343 - \big(3 \cdot 49 - 3 \cdot 7 + 1\big) = 343 - 127 = \boxed{216}.$$

Խնդիր 11

Երեք գորգ՝ յուրաքանչյուրը 3 մ^2 մակերեսով, 6 մ^2 մակերեսով սենյակում: Ապացուցել, որ նրանցից երկուսը հատվում են 1 մ^2-ից ոչ պակաս մակերեսով:

Ապացույցի ուրվագիծ. Գորգերի ընդհանուր մակերեսը $= 9$ մ^2, սենյակի մակերեսը $= 6$ մ^2, ուստի ընդհանուր հատումը (հաշված բազմապատիկությամբ) $\geq 9 - 6 = 3$ մ^2 է: Կան $\binom{3}{2} = 3$ զույգ գորգեր: Ըստ Դիրիխլեի սկզբունքի՝ առնվազն մեկ զույգը հատվում է $\geq 3/3 = 1$ մ^2 մակերեսով: $\square$

Խնդիր 12

$x_1+x_2+x_3=40$ հավասարման ամբողջ լուծումները $4 \le x_1 \le 15$, $9 \le x_2 \le 18$, $5 \le x_3 \le 16$ պայմաններով:

Տեղադրենք $y_i = x_i -$ ստորին սահման. $y_1+y_2+y_3=22$, որտեղ $0 \le y_1 \le 11$, $0 \le y_2 \le 9$, $0 \le y_3 \le 11$:

Առանց սահմանափակումների. $\binom{24}{2} = 276$: Խախտումները ըստ ներառման-բացառման սկզբունքի. $|A_1|+|A_2|+|A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (66+91+66) - (1+0+1) + 0 = 221$:

$\boxed{276 - 221 = 55}$

Վարժություն 8. Անդրադարձ առնչություններ

Խնդիր 1

$a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$:

Հաջորդականությունը պարբերական է 6 պարբերությամբ. $3,\ 9,\ 6,\ -3,\ -9,\ -6,\ 3,\ 9,\ \ldots$

Քանի որ $200 = 33 \times 6 + 2$, ունենք $a_{200} = a_2$:

$\boxed{a_{200} = 9}$

Խնդիր 2

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 10$:

Բնութագրիչ հավասարում. $r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = 2, 3$: Ընդհանուր լուծում. $a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n$: Սկզբնական պայմաններից. $\alpha = -2$, $\beta = 2$:

$\boxed{a_n = 2(3^n - 2^n)}$

Խնդիր 3

$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$:

Բնութագրիչ հավասարում. $r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = 2$ (կրկնակի արմատ): Ընդհանուր լուծում. $a_n = (\alpha + \beta n) \cdot 2^n$: $a_0 = \alpha = 2$, $a_1 = (\alpha + \beta) \cdot 2 = 2(2 + \beta) = 6 \Rightarrow \beta = 1$:

$\boxed{a_n = (2 + n) \cdot 2^n}$

Խնդիր 4

$a_n = 2\sqrt{2}\, a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$:

Բնութագրիչ հավասարում. $r^2 - 2\sqrt{2}\, r + 4 = 0$: $r = \sqrt{2}(1 \pm i)$: Բևեռային տեսքով. $\rho = 2$, $\theta = \pi/4$:

$a_0 = \alpha = 1$: $a_1 = \sqrt{2}(1 + \beta) = 2 \Rightarrow \beta = \sqrt{2} - 1$:

$$\boxed{a_n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + (\sqrt{2} - 1) \sin \frac{n\pi}{4} \right)}$$

Խնդիր 5

$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$:

Բնութագրիչ հավասարում. $r^2 - 2r - 1 = 0 \Rightarrow r = 1 \pm \sqrt{2}$: $a_0 = \alpha + \beta = 0$, $a_1 = (1 + \sqrt{2})\alpha + (1 - \sqrt{2})\beta = 2\sqrt{2}\,\alpha = 1$, ուստի $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$:

$$\boxed{a_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}}$$

Խնդիր 6

10 երկարությամբ երկուական տողեր, որոնք պարունակում են (առնվազն) երկու հաջորդական զրոներ:

Հաշվել լրացումը. դիցուք b_n = n երկարությամբ տողեր առանց “00”-ի: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ (Ֆիբոնաչիի նման), $b_1 = 2$, $b_2 = 3$: $b_{10} = 144$: Ընդհանուր տողեր՝ $2^{10} = 1024$:

$\boxed{1024 - 144 = 880}$

Խնդիր 7

n երկարությամբ բառեր $\{a, b, c\}$ բազմությունից այնպես, որ a-ն և b-ն երբեք հարևան չլինեն:

Դիցուք A_n, B_n, C_n = բառեր, որոնք վերջանում են a, b, c-ով և չունեն հարևան a, b: $A_n = A_{n-1} + C_{n-1}$, $B_n = B_{n-1} + C_{n-1}$, $C_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}$: $A_1 = B_1 = C_1 = 1$, ուստի $f(1) = 3$:

Ընդհանուր քանակը $f(n) = A_n + B_n + C_n$ բավարարում է $f(n) = 2f(n-1) + f(n-2)$ առնչությանը, որտեղ $f(1) = 3, f(2) = 7$:

$$\boxed{f(n) = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2}}$$

(Կոնկրետ երկարությունների համար. $f(10) = 8119$:)