Դիսկրետ մաթեմատիկա - Գործնական 4

Ֆունկցիաներ՝ մանրամասն լուծումներ
դատողությունները՝ քայլ առ քայլ բացված

Ընդգրկում է Գործնական 4-ի հանձնարարված խնդիրները՝ 2, 4, 5, 6, 10, 12, 19, 22, 24, 25:

Նախապատրաստում

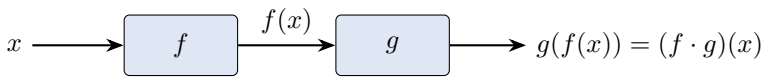
Ֆունկցիան $f : A \to B$ կանոն է, որը յուրաքանչյուր մուտքին $x \in A$ վերագրում է ճիշտ մեկ ելք $f(x) \in B$: A բազմությունը որոշման տիրույթն է (որտեղ կանոնին թույլատրվում է գործել), իսկ իրականում արտադրված արժեքների բազմությունը՝ $\{f(x) : x \in A\}$, արժեքների տիրույթն է (կամ պատկերը): Այս թերթիկը չորս տեսակի հարց է տալիս: (1) Որոշման և արժեքների տիրույթը կարդալ բանաձևից (խնդիր 2)՝ որտեղ է բանաձևը օրինական, և ինչ արժեքներ են դուրս գալիս: (2) Համադրել երկու ֆունկցիա և գտնել հակադարձներ (խնդիրներ 4, 5): (3) Ֆունկցիան դասակարգել որպես ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ կամ բիյեկտիվ (խնդիրներ 6, 12): (4) Դատել բազմությունների պատկերների և նախապատկերների մասին (խնդիրներ 10, 19, 22, 24, 25), որտեղ ողջ խաղն այն է, թե արդյոք f-ը ինյեկտիվ է:

Մի պայմանավորվածություն, որ պետք է ֆիքսել մյուս ամեն ինչից առաջ՝ համադրումը ձախից աջ է

Այս դասընթացում ֆունկցիաների կետային արտադրյալը կարդացվում է ձախից աջ՝ $f \cdot g$ նշանակում է «նախ արա f, ապա g», ուստի

$$(f \cdot g)(x) \;=\; g\big(f(x)\big):$$

Սա հակառակն է $\circ$ սիմվոլի, որ թերևս տեսել ես, որտեղ $g \circ f$ նշանակում է $g(f(x))$: Ստորև ամենուր օգտագործում ենք դասընթացի պայմանավորվածությունը՝ խնդիր 4-ն այնտեղ է, որ սա կծում է, ուստի հետևիր կարգին: Մտածիր այն որպես խողովակաշար՝ մուտքը նախ հոսում է ձախ արկղով:



ձախ արկղը նախ է գործում

Խնդիր 2 - Որոշման և արժեքների տիրույթը բանաձևից

Խնդիր 2

Դիցուք $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$: Գտիր որոշման և արժեքների տիրույթը յուրաքանչյուր բանաձևի համար՝

$$\text{(ա) } x^2 + 3, \quad \text{(բ) } \sqrt{x-2}, \quad \text{(գ) } \tfrac{1}{\sqrt{x-2}}, \quad \text{(դ) } |x|, \quad \text{(ե) } \tfrac{1}{x^2+2}, \quad \text{(զ) } \tfrac{1}{x^2-2}.$$

Գաղափարը

Երկու առանձին հարց, որ կարդացվում են գրաֆիկից։ Որոշման տիրույթը «որտեղ է բանաձևը օրինական» հարցն է՝ խուսափիր միայն երկու վտանգից՝ քառակուսի արմատի տակ բացասական արժեքից և հայտարարում զրոյից՝ մնացած ամեն ինչ թույլատրելի է, ուստի որոշման տիրույթը ողջ $\mathbb{R}$-ն է՝ հանած այդ արգելված կետերը։ Արժեքների տիրույթը «ինչ բարձրությունների է հասնում գրաֆիկը» հարցն է՝ կառուցիր այն ներսից դեպի դուրս։ $\frac{1}{x^2-2}$-ի նման բանաձևի համար նախ տես, թե ինչ կարող է լինել $u = x^2 - 2$-ը, ապա տես, թե $\frac{1}{u}$-ն ինչ է անում այդ բազմությանը։ Հակադարձ արժեքը շրջում է միջակայքի կարգը և 0-ին մոտ արժեքներն ուղարկում $\pm\infty$, ինչը ճիշտ պատճառն է, որ (զ)-ի արժեքների տիրույթը բաժանվում է երկու կտորի։

Քայլ 1 - Որոշման տիրույթներ (գտիր արգելված կետերը)։ (ա),(դ),(ե) չունեն ոչ արմատ, ոչ հայտարար, և $x^2+2 \geq 2 > 0$, ուստի օրինական են ամենուր՝ որոշման տիրույթը $\mathbb{R}$ է։ (բ) $\sqrt{x-2}$-ի համար պետք է $x-2 \geq 0$, այսինքն $x \geq 2$։ (գ) $\frac{1}{\sqrt{x-2}}$-ի համար արմատը պետք է լինի օրինական և ոչ զրոյական, ուստի $x-2 > 0$, այսինքն $x > 2$։ (զ) $\frac{1}{x^2-2}$-ի համար պետք է $x^2-2 \neq 0$, այսինքն $x \neq \pm\sqrt{2}$։

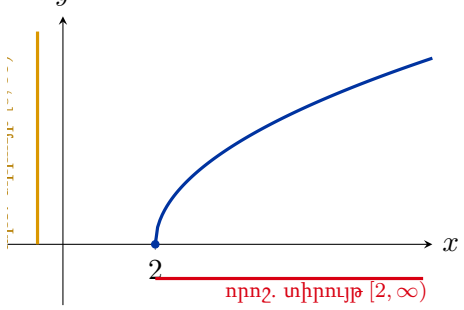
Քայլ 2 - Արժեքների տիրույթներ (աշխատիր ներսից դեպի դուրս)։ (ա) $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+3 \geq 3$, ≥ 3 ամեն արժեքին հասնում ենք, արժեքների տիրույթը $[3, \infty)$ է։ (բ) $\sqrt{\cdot} \geq 0$ և անսահման աճում է, արժեքների տիրույթը $[0, \infty)$ է։ (գ) $\frac{1}{\sqrt{x-2}} > 0$՝ երբ $x \to 2^+$, այն պայթում է, երբ $x \to \infty$, ձգտում է 0-ի (առանց երբևէ հասնելու դրան), արժեքների տիրույթը $(0, \infty)$ է։ (դ) $|x| \geq 0$, արժեքների տիրույթը $[0, \infty)$ է։ (ե) $x^2+2 \in [2, \infty)$, ուստի $\frac{1}{x^2+2} \in (0, \frac{1}{2}]$՝ առավելագույնը՝ $\frac{1}{2}$, $x = 0$-ում է, և արժեքները փոքրանում են դեպի 0, երբ $|x| \to \infty$։ Արժեքների տիրույթը՝ $(0, \frac{1}{2}]$։ (զ) Դիցուք $u = x^2-2$, ուստի $u \in [-2, \infty) \setminus \{0\}$։ $u \in [-2, 0)$-ի վրա հակադարձ արժեքը տալիս է $\frac{1}{u} \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ ($-\frac{1}{2}$ արժեքը գալիս է $u = -2$-ից, այսինքն $x = 0$-ից)՝ իսկ $u \in (0, \infty)$-ի վրա այն տալիս է $\frac{1}{u} \in (0, \infty)$։ Արժեքների տիրույթը՝ $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$։

Քայլ 3 - Միշտ ստուգիր եզրային արժեքները։ (ե) $x = 0$-ում՝ $\frac{1}{0+2} = \frac{1}{2}$։ ✓ (զ) $x = 0$-ում՝ $\frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$, բացասական ճյուղի գագաթը։ ✓ Թվային ընտրանքը խիտ ցանցի վրա հաստատում է վերևի յուրաքանչյուր մինիմում/մաքսիմում։

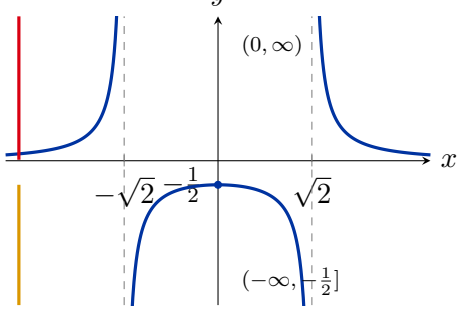
Պատասխան՝ (ա) dom $= \mathbb{R}$, արժ. տիրույթ $[3, \infty)$; (բ) dom $= [2, \infty)$, արժ. տիրույթ $[0, \infty)$; (գ) dom $= (2, \infty)$, արժ. տիրույթ $(0, \infty)$;
(դ) dom $= \mathbb{R}$, արժ. տիրույթ $[0, \infty)$; (ե) dom $= \mathbb{R}$, արժ. տիրույթ $(0, \frac{1}{2}]$; (զ) dom $= \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$, արժ. տիրույթ $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$.

Որոշման և արժեքների տիրույթը նկարից կարդալը։ Երկու ամենապարզ դեպքերը՝ (բ) և (զ)։ (բ)-ի համար որոշման տիրույթը x առանցքի վրա փակագիծն է ($x \geq 2$), իսկ արժեքների տիրույթը y առանցքի վրա փակագիծն է ($y \geq 0$)։ (զ)-ի համար կորն ունի ուղղաձիգ ասիմպտոտներ $x = \pm\sqrt{2}$-ում և y առանցքը բաժանում է հենց արժեքների տիրույթի երկու կտորի։

(բ) $f(x) = \sqrt{x-2}$



(գ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2}$



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ որոշման տիրույթ = «բոլոր x-երը, բացի այնտեղ, որտեղ արմատը դառնում է բացասական կամ հայտարարը՝ զրո»: Արժեքների տիրույթ = կառուցիր արժեքների բազմությունը ներսից դեպի դուրս՝ հետևիր, թե ինչ կարող է լինել ներքին արտահայտությունը (x^2, $x-2$, x^2-2), ապա կիրառիր արտաքին գործողությունը ($+3$, $\sqrt{\ }$, հակադարձ արժեք): Հակադարձ արժեքը խորամանկն է՝ այն ուղարկում է $(0, M]$-ը $[\frac{1}{M}, \infty)$, իսկ 0-ն շրջապատող բազմությունը՝ երկու առանձին կտորի:

Խնդիր 4 - Համադրություններ $f \cdot g$ և $g \cdot f$

Խնդիր 4

Դիցուք $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: Գտիր $f \cdot g$-ն և $g \cdot f$-ը (դասընթացի պայմանավորվածությունը՝ $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$, նախ կիրառիր f)՝

$$\text{(ա) } f(x) = x^2+1,\ g(x) = x+3; \qquad \text{(բ) } f(x) = \sqrt{x^2+2},\ g(x) = x^2+3;$$

$$\text{(գ) } f(x) = \tfrac{1}{x},\ g(x) = 2x+3.$$

Գաղափարը

Համադրումը պարզապես մեկ մեքենայի ելքը հաջորդ մեքենայի մեջ դնելն է: Միակ բանը, որ պետք է ճիշտ անել, ո՞ր մեքենան է առաջինն աշխատում-ն է: Դասընթացի ձախից-աջ կանոնով $f \cdot g$-ն նախ աշխատեցնում է f-ը՝ վերցրու x, հաշվիր $f(x)$, ապա այն կերակրիր g-ին՝ տալով $g(f(x))$: Ուստի $f \cdot g$ կառուցելու համար գրիր $g(\square)$ և յուրաքանչյուր $\square$ փոխարինիր $f(x)$-ի ողջ բանաձևով: Կարգը կարևոր է՝ ընդհանուր դեպքում $f \cdot g \neq g \cdot f$, և (ա) մասը դա ցույց է տալիս բարձրաձայն:

Քայլ 1 - Ֆիքսիր բաղադրատոմսը: $(f \cdot g)(x) = g(f(x))$ (f-ը տեղադրիր g-ի մեջ)՝ $(g \cdot f)(x) = f(g(x))$ (g-ն տեղադրիր f-ի մեջ):

Քայլ 2 - (ա) մաս: $f(x) = x^2+1$, $g(x) = x+3$:

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)) = \underbrace{(x^2+1)}_{f(x)} + 3 = x^2+4, \qquad (g \cdot f)(x) = f(g(x)) = \underbrace{(x+3)}_{g(x)}{}^2 + 1 = x^2+6x+10.$$

Երկուսը տարբեր են ($x^2+4 \neq x^2+6x+10$)՝ այս խնդրի գլխավոր դասը:

Քայլ 3 - (բ) մաս: $f(x) = \sqrt{x^2+2}$, $g(x) = x^2+3$:

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{x^2+2}\right)^2 + 3 = (x^2+2)+3 = x^2+5,$$

$$(g \cdot f)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2+3)^2+2}.$$

$f \cdot g$-ում քառակուսին և քառակուսի արմատը մաքուր կերպով չեղարկվում են, քանի որ $x^2+2 \geq 0$:

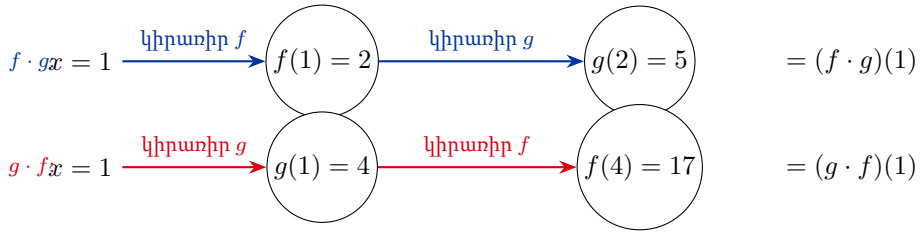
Քայլ 4 - (գ) մաս: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 2x+3$:

$$(f \cdot g)(x) = g(f(x)) = 2 \cdot \tfrac{1}{x} + 3 = \tfrac{2}{x} + 3, \qquad (g \cdot f)(x) = f(g(x)) = \tfrac{1}{2x+3}.$$

Քայլ 5 - Միշտ ստուգիր ընտրանքի կետում: (ա) $x = 1$-ում՝ $f(1) = 2$, $g(2) = 5$, և $1^2 + 4 = 5$: ✓ $g \cdot f$-ի համար՝ $g(1) = 4$, $f(4) = 17$, և $1 + 6 + 10 = 17$: ✓ Երեք մասերն էլ ու երկու կարգերն էլ թվային կերպով հաստատվեցին բազմաթիվ կետերում:

Պատասխան՝ (ա) $f \cdot g = x^2 + 4$, $g \cdot f = x^2 + 6x + 10$; (բ) $f \cdot g = x^2 + 5$, $g \cdot f = \sqrt{(x^2+3)^2+2}$; (գ) $f \cdot g = \frac{2}{x} + 3$, $g \cdot f = \frac{1}{2x+3}$.

Սլաքների շղթան, որ կարգն անվրեպ է դարձնում: (ա)-ի համար $x = 1$ ընտրանքի կետում երկու համադրությունները հետևում են տարբեր ուղիների: Վերին շարքը $f \cdot g$-ն է (դասընթացի կարգը, նախ f)՝ ստորին շարքը $g \cdot f$-ն է:



Նույն մեկնարկը $x = 1$, տարբեր ավարտներ (5 ընդդեմ 17)՝ համադրումը կոմուտատիվ չէ, և ձախից-աջ կանոնն ասում է, թե որ արկղն է առաջինը գործում:

★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ $f \cdot g$ կառուցելու համար (դասընթացի կարգ) գրիր երկրորդ ֆունկցիան $g(\square)$ և $\square$-ի փոխարեն տեղադրիր ողջ առաջին բանաձևը: Միշտ խելամտության ստուգում արա մեկ թվում՝ բառացիորեն քայլելով խողովակաշարով: Եթե քո երկու համադրությունները հավասար են դուրս գալիս ֆունկցիաների ընդհանուր զույգի համար, գրեթե հաստատ կարգը խառնել ես:

Խնդիր 5 - Հակադարձ ֆունկցիաներ

Խնդիր 5

Գտիր հակադարձ ֆունկցիան յուրաքանչյուրի համար՝

$$\text{(ա) } f(x) = \frac{x+4}{2}, \qquad \text{(բ) } f(x) = x^3, \qquad \text{(գ) } f(x) = \frac{x-2}{x+3}.$$

Գաղափարը

Հակադարձը f^{-1} չեղարկում է f-ը՝ եթե f-ն ուղարկում է x-ը y-ի, ապա f^{-1}-ն ուղարկում է y-ը հետ x-ի: Բանաձև գտնելու համար պարզապես լուծիր $y = f(x)$-ը x-ի նկատմամբ: Ինչ

Էլ որ ստանաս, $x =$ (արտահայտություն y-ով), դա $f^{-1}(y)$-ն է՝ ի վերջո վերանվանիր y-ը x-ի, եթե ուզում ես: Երկրաչափորեն հակադարձը գրաֆիկի հայելային պատկերն է $y = x$ ուղղի նկատմամբ, որովհետև մուտքի և ելքի դերերը փոխանակելը փոխանակում է երկու առանցքները:

Քայլ 1 - (ա) մաս: Լուծիր $y = \frac{x+4}{2}$-ը՝ բազմապատկիր 2-ով, $2y = x + 4$, ուստի $x = 2y - 4$: Հետևաբար $f^{-1}(x) = 2x - 4$:

Քայլ 2 - (բ) մաս: Լուծիր $y = x^3$-ը՝ վերցրու (իրական) խորանարդ արմատը, $x = \sqrt[3]{y}$: Հետևաբար $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$: (Խորանարդ արմատը որոշված է բոլոր իրականների համար, ներառյալ բացասականները, ուստի սա իսկական հակադարձ է ողջ $\mathbb{R}$-ի վրա՝ ինչը հենց աշխատում է, քանի որ $x^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-ը բիյեկցիա է, ինչպես հաստատում է Խնդիր 6(գ)-ն):

Քայլ 3 - (գ) մաս: Լուծիր $y = \frac{x-2}{x+3}$-ը: Մաքրիր հայտարարը՝ $y(x+3) = x - 2 \Rightarrow yx + 3y = x - 2 \Rightarrow x(y-1) = -2 - 3y$, ուստի

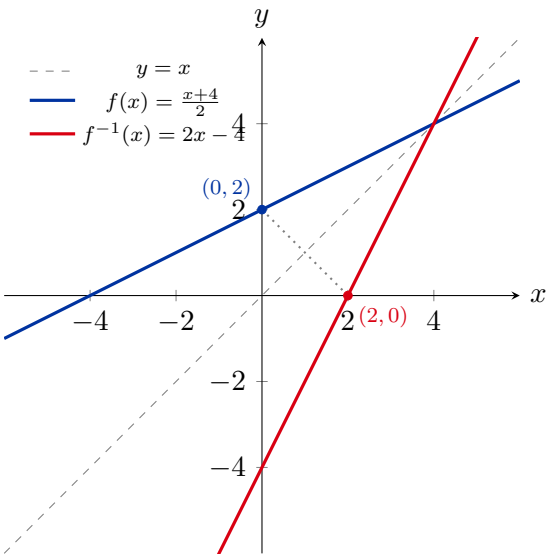
$$x = \frac{-2-3y}{y-1} = \frac{3y+2}{1-y}.$$

Հետևաբար $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{1-x}$ (որոշված է $x \neq 1$-ի համար՝ 1 արժեքը հենց այն բարձրությունն է, որին գրաֆիկը երբեք չի հասնում՝ իր հորիզոնական ասիմպտոտը):

Քայլ 4 - Միշտ ստուգիր՝ f^{-1}-ն իսկապես չեղարկում է f-ը: (ա) $f^{-1}(f(x)) = 2 \cdot \frac{x+4}{2} - 4 = (x + 4) - 4 = x$: ✓ (գ) վերցրու $x = 0$՝ $f(0) = \frac{-2}{3}$, ապա $f^{-1}(-\frac{2}{3}) = \frac{3(-2/3)+2}{1-(-2/3)} = \frac{0}{5/3} = 0$: ✓ Երկու ուղղություններն էլ ստուգված են թվային կերպով:

Պատասխան՝ (ա) $f^{-1}(x) = 2x - 4$; (բ) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; (գ) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{1-x}$ ($x \neq 1$-ի համար).

Հակադարձը $y = x$-ի նկատմամբ արտացոլում է: Ահա (ա) մասը՝ $f(x) = \frac{x+4}{2}$ ուղիղը և իր հակադարձը $f^{-1}(x) = 2x - 4$-ը հայելային պատկերներ են կետագիծ անկյունագծում: Ընտրիր ցանկացած կետ մի գրաֆիկի վրա, փոխանակիր նրա կոորդինատները, և կհայտնվես մյուսի վրա:



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ հակադարձելու համար լուծիր $y = f(x)$-ը x-ի նկատմամբ: $\frac{ax+b}{cx+d}$ կոտորակի համար խաչաձև բազմապատկիր և բոլոր x անդամները հավաքիր մի կողմ: Ստուգիր համադրելով՝ $f^{-1}(f(x))$-ը պետք է պարզեցվի x-ի: Հակադարձի գրաֆիկը միշտ f-ի արտացոլումն է $y = x$-ի նկատմամբ:

Խնդիր 6 - Ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ, բիյեկտիվ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Խնդիր 6

Որոշիր, թե $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ արտապատկերումներից որոնք են ինյեկտիվ, սյուրյեկտիվ կամ բիյեկտիվ՝

$$\text{(ա) } |x|, \quad \text{(բ) } x^2+4, \quad \text{(գ) } x^3+6, \quad \text{(դ) } x+|x|, \quad \text{(ե) } x(x-2)(x+2).$$

Գաղափարը

Երկու անկախ հարց, և յուրաքանչյուրն ունի մեկ-տողանի նկար-թեստ: Ինյեկտիվ («միարժեք») նշանակում է, որ տարբեր մուտքերը տալիս են տարբեր ելքեր՝ ոչ մի երկու x արժեք չեն կիսում նույն բարձրությունը: Նկար-թեստ՝ յուրաքանչյուր հորիզոնական ուղիղ հատում է գրաֆիկն առավելագույնը մեկ անգամ: Եթե թեկուզ մեկ հորիզոնական ուղիղ կտրում է գրաֆիկը երկու անգամ, ինյեկտիվությունը ձախողվում է: Սյուրյեկտիվ («$\mathbb{R}$-ի վրա») նշանակում է, որ ամեն թիրախ-բարձրության հասնում ենք՝ արժեքների տիրույթը ողջ $\mathbb{R}$-ն է: Նկար-թեստ՝ յուրաքանչյուր հորիզոնական ուղիղ հատում է գրաֆիկն առնվազն մեկ անգամ: Բիյեկտիվ = երկուսն էլ = յուրաքանչյուր հորիզոնական ուղիղ հատում է ճիշտ մեկ անգամ (և այդ դեպքում f-ն ունի հակադարձ): Դասական մարդասպանները՝ $|x|$-ը կամ զույգ աստիճանը կիսում է ուղիղը երկու մասի (սպանում է ինյեկտիվությունն ու սյուրյեկտիվությունը)՝ x^3-ի նման կենտ աստիճանը մաքուր աճող կոր է (բիյեկտիվ):

Քայլ 1 - Հորիզոնական ուղղի թեստը՝ ֆունկցիա առ ֆունկցիա:

(ա) $|x|$՝ $y = 1$ ուղիղը հանդիպում է դրան $x = \pm 1$-ում (երկու կետ) $\Rightarrow$ ոչ ինյեկտիվ՝ $y = -1$ ուղիղը ոչ մի տեղ չի հանդիպում դրան ($|x| \geq 0$) $\Rightarrow$ ոչ սյուրյեկտիվ: Ոչ մեկը:

(բ) x^2+4՝ $f(1) = f(-1) = 5 \Rightarrow$ ոչ ինյեկտիվ՝ արժեքների տիրույթը $[4, \infty)$ է, ուստի $y = 0$-ին երբեք չենք հասնում $\Rightarrow$ ոչ սյուրյեկտիվ: Ոչ մեկը:

(գ) x^3+6՝ խիստ աճող է (եթե $x_1 < x_2$, ապա $x_1^3 < x_2^3$), ուստի յուրաքանչյուր հորիզոնական ուղիղ հանդիպում է դրան առավելագույնը մեկ անգամ $\Rightarrow$ ինյեկտիվ՝ երբ $x \to \pm\infty$, արժեքն անցնում է ողջ $\mathbb{R}$-ով, ուստի յուրաքանչյուր ուղիղ հանդիպում է դրան առնվազն մեկ անգամ $\Rightarrow$ սյուրյեկտիվ: Բիյեկտիվ, հակադարձով $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-6}$:

(դ) $x+|x|$՝ $x \leq 0$-ի համար սա $x+(-x) = 0$ է, ուստի ողջ $x \leq 0$ ճառագայթն արտապատկերվում է 0-ի $\Rightarrow$ խիստ ոչ ինյեկտիվ՝ ելքը երբեք բացասական չէ (այն հավասար է 0-ի կամ $2x > 0$-ի) $\Rightarrow$ արժեքների տիրույթը $[0, \infty)$ է, ոչ սյուրյեկտիվ: Ոչ մեկը:

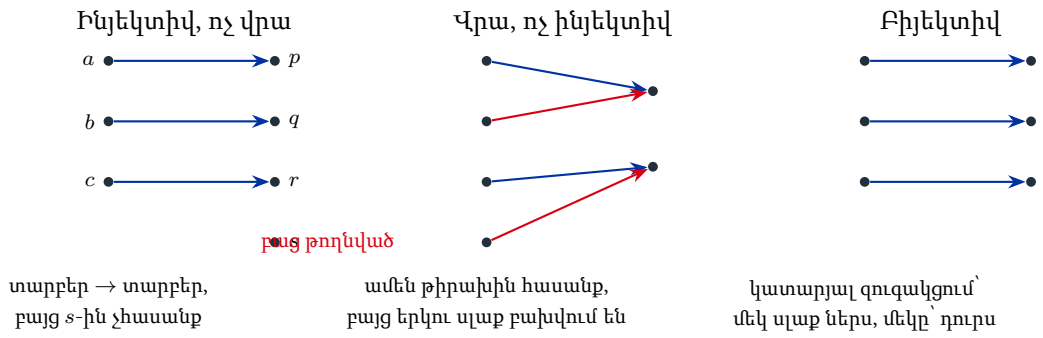
(ե) $x(x-2)(x+2) = x^3-4x$՝ խորանարդ է, ուստի երբ $x \to \pm\infty$, այն ծածկում է ողջ $\mathbb{R}$-ը $\Rightarrow$ սյուրյեկտիվ՝ բայց $f(0) = f(2) = f(-2) = 0$, ուստի $y = 0$ ուղիղը հանդիպում է դրան երեք անգամ $\Rightarrow$ ոչ ինյեկտիվ: Միայն սյուրյեկտիվ:

Քայլ 2 - Միշտ ստուգիր վկաները: Ոչ-ինյեկտիվ վճիռներից յուրաքանչյուրը հենվում է կոնկրետ բախման վրա՝ $|-1| = |1|$, $(-1)^2+4 = 1^2+4$, $f(-2) = f(0)$ (դ)-ում, և $(-2)(-4)(0) = 0 = 2 \cdot 0 \cdot 4$ (ե)-ում: Ոչ-սյուրյեկտիվ վճիռները հենվում են բաց թողնված թիրախի վրա ($y = -1$ (ա)-ի համար,

$y = 0$ (բ)/(դ)-ի համար)։ (գ)-ի համար խորանարդ-արմատի բանաձևն ակնհայտորեն տալիս է նախապատկեր ամեն թիրախի համար։ Ամենը հաստատված է խիտ ընտրանքով։

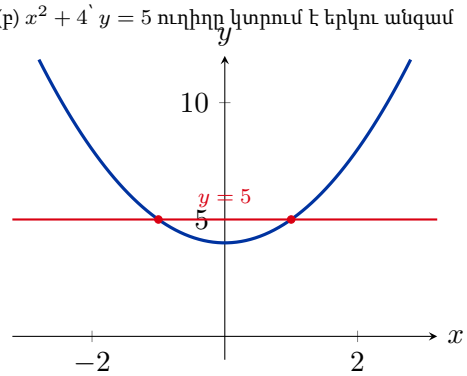
Պատասխան՝ (ա) ոչ մեկը; (բ) ոչ մեկը; (գ) բիյեկտիվ; (դ) ոչ մեկը; (ե) սյուրյեկտիվ, բայց ոչ ինյեկտիվ.

Ցուցադրությունը՝ սլաք-դիագրամեր և հորիզոնական ուղղի թեստ։ Նախ՝ երեք նկարները, որ յուրաքանչյուր ուսանող պետք է կրի գլխում։ Ձախ կողմի կետերը մուտքերն են, աջ կողմի կետերը՝ թիրախները՝ սլաքն $x \mapsto f(x)$-ն է։

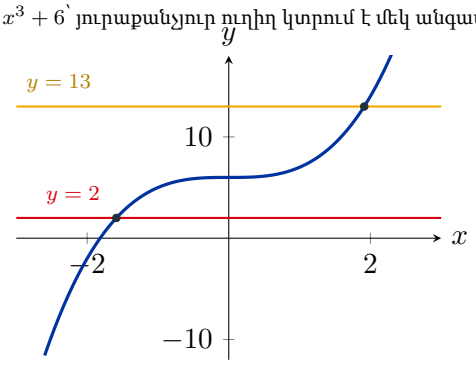


Հիմա հորիզոնական ուղղի թեստը կիրառված այս խնդրի երկու հակադրվող գրաֆիկներին՝ x^2+4 (ծալված, ուղիղը կարող է երկու անգամ կտրել) ընդդեմ x^3+6 (միապաղաղ, յուրաքանչյուր ուղիղ կտրում է ճիշտ մեկ անգամ)։

(բ) $x^2 + 4$՝ $y = 5$ ուղիղը կտրում է երկու անգամ



(գ) $x^3 + 6$՝ յուրաքանչյուր ուղիղ կտրում է մեկ անգամ



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ ինյեկտիվությունը հերքելու համար ցույց տուր մեկ բախում $f(a) = f(b)$՝ $a \neq b$-ով։ Սյուրյեկտիվությունը հերքելու համար ցույց տուր մեկ չհասած թիրախ։ Իրական ֆունկցիայի բիյեկտիվությունն ապացուցելու համար ցույց տուր, որ այն խիստ միապաղաղ է (ինյեկտիվ) և անցնում է $-\infty$-ից $+\infty$ (սյուրյեկտիվ)՝ ապա այն ունի հակադարձ։ Զույգ աստիճանները և $|x|$-ը ծալում են՝ կենտ աստիճանները՝ ոչ։

Խնդիր 10 - Ker(f)-ը համարժեքության հարաբերություն է

Խնդիր 10

Ցույց տուր, որ ցանկացած $f : A \to B$ ֆունկցիայի համար նրա միջուկը $\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y) \in A \times A : f(x) = f(y)\}$ համարժեքության հարաբերություն է A-ի վրա:

Գաղափարը

Միջուկը կապում է երկու մուտք հենց այն ժամանակ, երբ դրանք ունեն նույն ելքը: Բայց «նույն արժեքն ունենալը» կառուցված է ուղիղ այդ արժեքների հավասարությունից (=), իսկ հավասարությունն ամենահամարժեքության-նման հարաբերությունն է, որ կա՝ ամեն ինչ հավասար է ինքն իրեն, հավասարությունը սիմետրիկ է, և այն շղթայվում է: Ուստի Ker(f)-ը ժառանգում է =-ի բոլոր երեք հատկությունները ձրիաբար: Շահող պատկերը՝ Ker(f)-ը կտրում է որոշման տիրույթը շերտերի, մեկ կույտ ելքի ամեն արժեքի համար, որտեղ $f^{-1}(b)$ շերտը բոլոր այն մուտքերն են, որ f-ն ուղարկում է b-ի: Համարժեքության դասերը = շերտեր:

Քայլ 1 - Ռեֆլեքսիվ: Ցանկացած $x \in A$-ի համար $f(x) = f(x)$ ակնհայտորեն, ուստի $(x, x) \in \mathrm{Ker}(f)$:

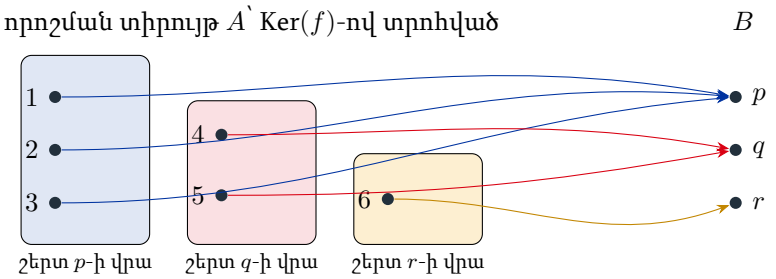
Քայլ 2 - Սիմետրիկ: Եթե $(x, y) \in \mathrm{Ker}(f)$, ապա $f(x) = f(y)$՝ հավասարությունը սիմետրիկ է, ուստի $f(y) = f(x)$, հետևաբար $(y, x) \in \mathrm{Ker}(f)$:

Քայլ 3 - Փոխանցական: Եթե $(x, y), (y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$, ապա $f(x) = f(y)$ և $f(y) = f(z)$՝ հավասարությունները շղթայելով՝ $f(x) = f(z)$, հետևաբար $(x, z) \in \mathrm{Ker}(f)$:

Քայլ 4 - Եզրակացություն և շերտերի պատկերը: Բոլոր երեքն էլ տեղի ունեն, ուստի Ker(f)-ը համարժեքության հարաբերություն է: x-ի համարժեքության դասն է $\{y : f(y) = f(x)\} = f^{-1}(f(x))$՝ շերտը $f(x)$ արժեքի վրա: Այս շերտերը տրոհում են A-ն՝ ամեն մուտք ընկնում է ճիշտ մեկ շերտում (իր սեփական ելքը), և տարբեր ելքի արժեքները տալիս են չհատվող շերտեր:

Պատասխան՝ Ker(f)-ը ռեֆլեքսիվ է, սիմետրիկ և փոխանցական (B-ի վրա =-ից ժառանգված), հետևաբար համարժեքության հարաբերություն է A-ի վրա՝ նրա դասերը $f^{-1}(b)$ շերտերն են:

Շերտերի տրոհումը: Վերցրու խաղալիք արտապատկերումը $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{p, q, r\}$՝ $f(1) = f(2) = f(3) = p$, $f(4) = f(5) = q$, $f(6) = r$: Միջուկը տրոհում է որոշման տիրույթը երեք շերտի, մեկ՝ ամեն արժեքի համար: Երկու մուտք Ker(f)-կապված են այն և միայն այն դեպքում, երբ նստած են նույն ստվերավորված կույտում:



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ ցանկացած «$x \sim y$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $g(x) = g(y)$» («ինչ-որ մեծության նույն արժեքը») ձևի հարաբերություն ինքնաբերաբար համարժեքության հարաբերություն է, քանի որ այն հետ է քաշված $=$-ից: Նրա դասերն g-ի մակարդակային բազմություններն / շերտերն են: Սա ամենատարածված եղանակն է, որով համարժեքության հարաբերություններն առաջանում են:

Խնդիր 12 - $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$-ը $\mathbb{Q}^+$-ի վրա ինյեկտիվ է, բայց ոչ սյուրյեկտիվ

Խնդիր 12

Դիցուք $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ լինի $f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$: Ցույց տուր, որ f-ն ինյեկտիվ է, բայց ոչ սյուրյեկտիվ:

Գաղափարը

Ինյեկտիվությունը մաքուր հանրահաշիվ է՝ ենթադրիր, որ երկու մուտք տալիս են նույն ելքը, և մանրացրու հավասարումը, մինչև այն հարկադրի, որ մուտքերը հավասար լինեն: Ոչ սյուրյեկտիվությունը պահանջում է թիրախ առանց նախապատկերի, և այն գտնելու մաքուր եղանակը արժեքների տիրույթը սահմանափակելն է: Դրական x-ի համար հայտարարը $2x+1$-ը մի փոքր մեծ է $2x$-ից, ուստի $\frac{x}{2x+1}$-ը մի փոքր փոքր է $\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$-ից: Ուստի ամեն ելք խստորեն ցածր է $\frac{1}{2}$-ից: Այսպիսով, $\geq \frac{1}{2}$ ամեն ինչ (օրինակ՝ 1 արժեքը, որ $\mathbb{Q}^+$-ում է) անհասանելի է՝ սյուրյեկտիվությունը ձախողվում է մեծ լայնքով:

Քայլ 1 - Ինյեկտիվ: Ենթադրիր $f(x) = f(y)$, այսինքն $\dfrac{x}{2x+1} = \dfrac{y}{2y+1}$: Խաչաձև բազմապատկիր (երկու հայտարարներն էլ դրական են)՝ $x(2y+1) = y(2x+1)$, ուստի $2xy+x = 2xy+y$, հետևաբար $x = y$: Տարբեր մուտքերը չեն կարող կիսել նույն ելքը, ուստի f-ն ինյեկտիվ է:

Քայլ 2 - Սահմանափակիր արժեքների տիրույթը: $x \in \mathbb{Q}^+$-ի համար ունենք $x > 0$, ուստի $2x+1 > 2x > 0$ և հետևաբար

$$f(x) = \frac{x}{2x+1} < \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

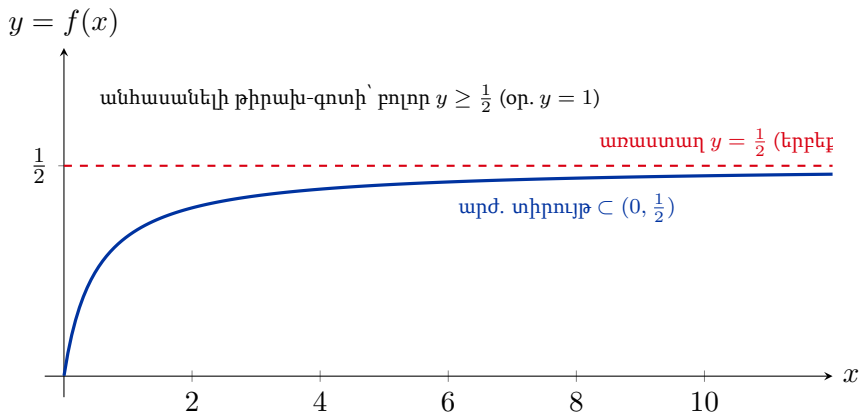
Նաև $f(x) > 0$: Ուստի ողջ արժեքների տիրույթը նստած է $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ բաց միջակայքի ներսում:

Քայլ 3 - Ցույց տուր բաց թողնված թիրախ: $1 \in \mathbb{Q}^+$ թիվը բավարարում է $1 \geq \frac{1}{2}$, ուստի այն $(0, \frac{1}{2})$-ից դուրս է և չի կարող լինել f-ի արժեք: (Հանրահաշվորեն՝ $\frac{x}{2x+1} = 1$ հարկադրում է $x = 2x+1$, այսինքն $x = -1 \notin \mathbb{Q}^+$:) Հետևաբար f-ն ոչ սյուրյեկտիվ է:

Քայլ 4 - Միշտ ստուգիր, որ սահմանը խիստ է, բայց երբեք չի հասնում: Երբ $x \to \infty$, $f(x) = \frac{x}{2x+1} \to \frac{1}{2}$ ներքևից (օրինակ՝ $f(10000) \approx 0.49998$), ուստի $\frac{1}{2}$-ը սուպրեմումն է, բայց նույնպես երբեք չի հասնում՝ հաստատելով, որ արժեքների տիրույթը խստորեն $(0, \frac{1}{2})$-ի ներսում է:

Պատասխան՝ Ինյեկտիվ՝ $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$: Ոչ սյուրյեկտիվ՝ ամեն արժեք $< \frac{1}{2}$ է, ուստի օրինակ 1-ը (և $\geq \frac{1}{2}$ ամեն արժեք) նախապատկեր չունի:

Արժեքների տիրույթը նստած է $y = \frac{1}{2}$-ից ցածր: f-ը $x > 0$-ի համար գծագրելով՝ կորը բարձրանում է 0-ից, բայց հավերժ մնում է կետագիծ առաստաղի $y = \frac{1}{2}$-ի տակ: $\mathbb{Q}^+$-ի ողջ թիրախ-գոտին $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$՝ ներառյալ 1-ը՝ դատարկ է արժեքներից:



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ «ոչ սյուրյեկտիվ» ցույց տալու համար սահմանափակիր արժեքների տիրույթը և անվանիր մեկ թիրախ՝ սահմանից դուրս: $\frac{x}{2x+1} < \frac{x}{2x}$ գնահատականը (փոքրացրու հայտարարի $+1$-ը) ռացիոնալ ֆունկցիաների բանվոր հնարքն է: Հարաբերության ինյեկտիվությունը սովորաբար մեկ-տողանի խաչաձև բազմապատկում է:

Խնդիր 19 - Ե՞րբ է $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Խնդիր 19

Որ ֆունկցիաների համար է $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ տեղի ունենում բոլոր A, B բազմությունների համար:

Գաղափարը

Մեկ պարունակումը ձրի է, մյուսն ինյեկտիվություն արժե: Ձրի ուղղություն՝ եթե $x \in A \cap B$, ապա $f(x)$-ը և՛ $f(A)$-ում է, և՛ $f(B)$-ում, ուստի $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ միշտ: Հակառակը կարող է ձախողվել, որովհետև $f(A) \cap f(B)$-ն հավաքում է ընդհանուր ելքի արժեքները, որոնք կարող են գալ տարբեր մուտքերից՝ մեկ մուտք A-ում, մյուսը՝ B-ում՝ որոնք պարտադիր չէ, որ հանդիպեն $A \cap B$-ում: Հենց երբ f-ն ինյեկտիվ է, ընդհանուր ելքը հարկադրում է ընդհանուր մուտք, և երկու կողմերը դառնում են հավասար: Ուստի նույնությունը տեղի ունի բոլոր A, B-ի համար այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ն ինյեկտիվ է:

Քայլ 1 - Միշտ ճիշտ պարունակումը: Դիցուք $y \in f(A \cap B)$, ուստի $y = f(x)$՝ $x \in A \cap B$-ով: Ապա $x \in A$ տալիս է $y \in f(A)$, և $x \in B$ տալիս է $y \in f(B)$, ուստի $y \in f(A) \cap f(B)$: Հետևաբար $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ ամեն f-ի համար:

Քայլ 2 - Եթե f-ն ինյեկտիվ է, հակառակը տեղի ունի: Դիցուք $y \in f(A) \cap f(B)$, ուստի $y = f(a) = f(b)$՝ $a \in A$-ով և $b \in B$-ով: Ինյեկտիվությունը հարկադրում է $a = b$, և այս ընդհանուր կետը ընկած է $A \cap B$-ում: Այսպիսով $y = f(a) \in f(A \cap B)$: Ուստի $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$, և Քայլ 1-ի հետ զուգակցելով՝ ստանում ենք հավասարություն:

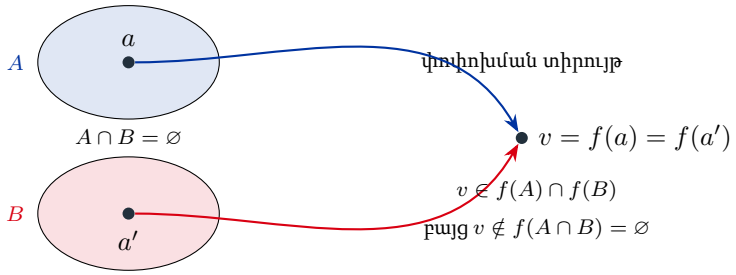
Քայլ 3 - Եթե f-ն ինյեկտիվ չէ, նույնությունը ձախողվում է որոշ A, B-ի համար: Ընտրիր $a \neq a'$՝ $f(a) = f(a')$-ով, և դիր $A = \{a\}$, $B = \{a'\}$: Ապա $A \cap B = \varnothing$, ուստի $f(A \cap B) = \varnothing$, բայց $f(A) \cap f(B) = \{f(a)\} \cap \{f(a')\} = \{f(a)\} \neq \varnothing$: Նույնությունը կոտրվում է:

Քայլ 4 - Միշտ ստուգիր կոնկրետ արտապատկերման վրա: $f(x) = x^2$, $A = \{1\}$, $B = \{-1\}$՝ $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$, բայց $f(A) \cap f(B) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$: Խիստ ճեղքը տեսանելի է, և դա հենց

ոչ-ինյեկտիվությունն է ($1 \neq -1$, բայց $f(1) = f(-1)$), որ բացում է այն՝ ինյեկտիվ f-ի համար Քայլ 2-ը հարկադրում է հավասարություն։

Պատասխան՝ Հենց ինյեկտիվ ֆունկցիաները։ $\subseteq$ պարունակումը միշտ տեղի ունի՝ հավասարությունը տեղի ունի բոլոր A, B-ի համար այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ն ինյեկտիվ է։

Ինչու՞ է ոչ-ինյեկտիվությունը կոտրում այն։ Երկու տարբեր մուտքեր $a \in A$ և $a' \in B$ փլվում են նույն ելքին v։ Այդ ելքն ընկնում է և՛ $f(A)$-ում, և՛ $f(B)$-ում, ուստի այն նստած է հատման մեջ աջ կողմում՝ թեև A-ն և B-ն ընդհանրապես ոչ մի մուտք չեն կիսում՝ թողնելով $f(A \cap B)$-ն դատարկ։



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ պատկերի օրենքների համար այն պարունակումը, որ վարկած չի պահանջում, միշտ «հատման պատկերը $\subseteq$ պատկերների հատում»-ն է։ Հակառակը պահանջում է ինյեկտիվություն, և հակառակ օրինակը միշտ տարբեր եզակիների մեջ տեղադրված երկու բախման կետ է։ (Միավորումս ավելի լավ է պահվում՝ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ ամեն f-ի համար։)

Խնդիր 22 - Կարո՞ղ են չհատվող ոչ դատարկ X_1, X_2 ունենալ $f(X_1) = f(X_2)$

Խնդիր 22

$f : A \to B$-ի և չհատվող ոչ դատարկ $X_1, X_2 \subseteq A$-ի համար (ուստի $X_1 \cap X_2 = \varnothing$), կարո՞ղ են պատկերները հավասար լինել՝ $f(X_1) = f(X_2)$։

Գաղափարը

Պատկերները ելքի արժեքների մասին են, ոչ թե այն մասին, թե որ մուտքերն են դրանք արտադրել։ Երկու բոլորովին առանձին մուտքի բազմություններ կարող են, այնուամենայնիվ, հասնել ճիշտ նույն ելքերի բազմությանը, պայմանով, որ f-ն իրար սոսնձի դրանց կետերը։ Ուստի հենց որ f-ն ոչ ինյեկտիվ է, պատասխանը այո է, հավասար պատկերները հնարավոր են։ (Նկատի առ հարցի ամենամաքուր ընթերցումը՝ հավասար պատկերներ հարկադրված չեն՝ վերցրու $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{2\}$ նույնական արտապատկերման տակ՝ անհավասար պատկերներ ստանալու համար, բայց դրանք կարող են պատահել, ինչը հետաքրքրական բովանդակությունն է։)

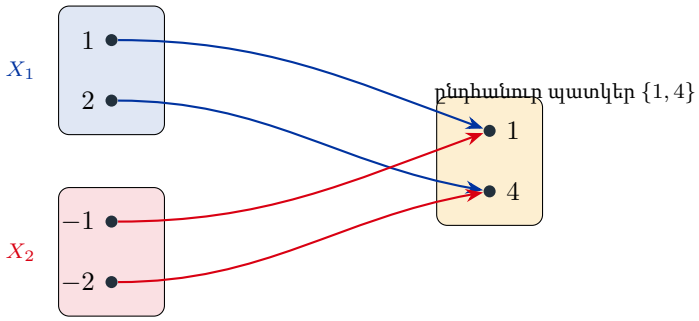
Քայլ 1 - Կառուցիր օրինակ։ Վերցրու $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, և չհատվող եզակիները $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{-1\}$։ Դրանք ոչ դատարկ են, և $X_1 \cap X_2 = \varnothing$։

Քայլ 2 - Հաշվիր պատկերները: $f(X_1) = \{1^2\} = \{1\}$ և $f(X_2) = \{(-1)^2\} = \{1\}$: Ուստի $f(X_1) = f(X_2) = \{1\}$՝ հավասար պատկերներ չհատվող բազմություններից:

Քայլ 3 - Միշտ ստուգիր տրամաբանությունը: Հնարքը հենց ոչ-ինյեկտիվությունն է՝ f-ն ուղարկում է տարբեր 1 և -1 կետերը նույն արժեքին: Ավելի մեծ օրինակով՝ $X_1 = \{1, 2\}$, $X_2 = \{-1, -2\}$ տալիս է $f(X_1) = \{1, 4\} = f(X_2)$ նույնպես: (Եթե f-ն ինյեկտիվ լիներ, չհատվող ոչ դատարկ բազմությունները միշտ կունենային անհավասար՝ իրականում չհատվող՝ պատկերներ:)

Պատասխան՝ Այո, հնարավոր է: Օրինակ՝ $f(x) = x^2$, $X_1 = \{1\}$, $X_2 = \{-1\}$ չհատվող են, սակայն $f(X_1) = f(X_2) = \{1\}$: (Հավասար պատկերները հարկադրված չեն, բայց կարող են պատահել, երբ f-ն ոչ ինյեկտիվ է:)

Պատկեր՝ երկու չհատվող բազմություն, մեկ ընդհանուր պատկեր: $f(x) = x^2$-ի սլաք-դիագրամը $\{-2, -1, 1, 2\}$-ի վրա՝ սիմետրիկ զույգերը $\{1, 2\}$-ը և $\{-1, -2\}$-ը արտապատկերվում են նույն արժեքների բազմությանը $\{1, 4\}$:



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ «բազմության պատկերը» մոռանում է պատիկությունը և ծագումը: Երբ որևէ հատկություն միայն պատկերների մասին է, ոչ-ինյեկտիվ f-ը (ծալող արտապատկերում՝ x^2-ի կամ $|x|$-ի նման) անակնկալների քո գնալիք աղբյուրն է:

Խնդիր 24 - Արդյո՞ք $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$-ը հարկադրում է $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = \varnothing$

Խնդիր 24

Ճի՞շտ է, որ $f : A \to B$-ի և $Y_1, Y_2 \subseteq B$-ի համար, եթե $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, ապա $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = \varnothing$:

Գաղափարը

Նախապատկերներն իրենց պահում են կատարյալ՝ պատկերներից շատ ավելի լավ՝ քանի որ ամեն մուտք x ունի ճիշտ մեկ ելք $f(x)$, ուստի «արդյո՞ք x-ը $f^{-1}(Y)$-ում է» հարցնելը պարզապես «արդյո՞ք միակ արժեքը $f(x)$-ը Y-ում է» հարցնելն է: Եթե x-ը երկու նախապատկերներում էլ լիներ, միակ արժեքը $f(x)$-ը ստիպված կլիներ ապրել և՛ Y_1-ում, և՛ Y_2-ում միաժամանակ՝ անհնարին, երբ դրանք չհատվող են: Ինյեկտիվություն պետք չէ՝ սա միշտ ճիշտ է: Ավելի խորը փաստն այն է, որ $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ ամեն f-ի համար:

Քայլ 1 - Ենթադրիր, որ հատումը ոչ դատարկ է, և բեր հակասության: Դիցուք $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$: Ապա $f(x) \in Y_1$ և $f(x) \in Y_2$, ուստի $f(x) \in Y_1 \cap Y_2$:

Քայլ 2 - Օգտագործիր չհատվածությունը: Բայց $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$, ուստի $f(x)$-ը պատկանում է դատարկ բազմությանը՝ անհնարին: Հետևաբար այդպիսի x գոյություն չունի, և $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = \varnothing$:

Քայլ 3 - Մաքուր պատճառը (ընդհանուր նույնություն): Ցանկացած x-ի համար՝

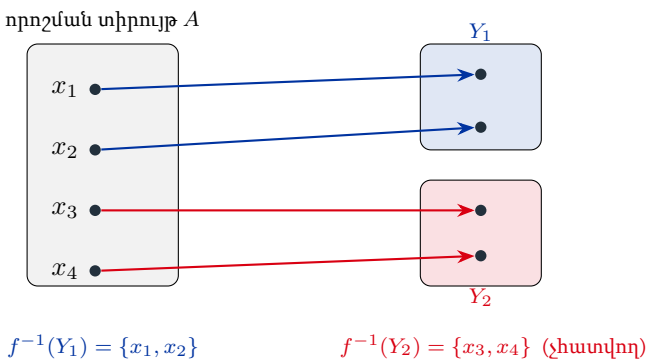
$$x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \iff f(x) \in Y_1 \text{ և } f(x) \in Y_2 \iff f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \iff x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2).$$

Ուստի $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$ միշտ, և չհատվող դեպքը հատուկ դեպքն է՝ $Y_1 \cap Y_2 = \varnothing \Rightarrow f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$:

Քայլ 4 - Միշտ ստուգիր կոնկրետ արտապատկերման վրա: Քայլ 3-ը ապացուցում է նույնությունն ամեն f-ի համար՝ $f(x) = x^2$-ով կոնկրետ դեպքը ($Y_1 = \{1\}$, $Y_2 = \{4\}$՝ տալով չհատվող նախապատկերներ $\{\pm 1\}, \{\pm 2\}$, որոնց միավորումը $f^{-1}(\{1, 4\})$ է) հաստատում է և՛ նույնությունը $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$, և՛ չհատվող հետևանքը:

Պատասխան՝ Այո, միշտ (f-ի վրա վարկած պետք չէ): Իրականում $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) = f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$, ուստի չհատվող Y-երը տալիս են չհատվող նախապատկերներ:

Ինչու՞ նախապատկերները չեն կարող այստեղ համընկնել: Ամեն մուտք ունի միակ ելք, ուստի այն կարող է նստել միայն այն թիրախ-բլոկի նախապատկերում, որ պարունակում է այդ միակ արժեքը: Չհատվող թիրախ-բլոկներ $\Rightarrow$ ամեն մուտք պարտավորված է առավելագույնը մեկին $\Rightarrow$ ոչ մի մուտք չի կիսվում:



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ նախապատկերը կոմուտում է ամեն ինչի հետ՝ հատման, միավորման և լրացման՝ ամեն ֆունկցիայի համար՝ $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$, նմանապես $\cup$-ի և լրացման համար: Սա այն պատճառով, որ նախապատկերը որոշված է մեկ պատկանելության թեստով միակ $f(x)$ արժեքի վրա: Պատկերները վատ պահվող ուղղությունն են՝ նախապատկերները՝ բարեկամականը:

Խնդիր 25 - $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$՝ խիստ օրինակով

Խնդիր 25

Ցույց տուր, որ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ ամեն $f : A \to B$-ի և $Y \subseteq B$-ի համար: Բեր օրինակ, որտեղ պարունակումը խիստ է:

Գաղափարը

Կարդա երկու գործողություններն ուղիղ իմաստով: $f^{-1}(Y)$ նախապատկերը «բոլոր մուտքերն են, որոնց ելքն ընկնում է Y-ում»: Կիրառիր f-ն այդ բազմությանը, և կստանաս հետ ելքեր, որոնք, ըստ կառուցման, արդեն Y-ում էին: Ուստի կարող ես միայն հետ ընկնել Y-ի ներսում՝ երբեք չփախչել դրանից: Ինչու՞ կարող ես չլցնել ողջ Y-ը: Որովհետև Y-ը կարող է պարունակել թիրախ-արժեքներ, որ f-ն երբեք չի արտադրում (արժեքների տիրույթից դուրս արժեքներ): Դրանք չունեն դեպի իրենց ուղղված մուտքեր, ուստի $f(f^{-1}(Y))$-ը բաց է թողնում դրանք՝ դարձնելով պարունակումը խիստ:

Քայլ 1 - Ապացուցիր պարունակումը: Դիցուք $y \in f(f^{-1}(Y))$: Ապա $y = f(x)$ որոշ $x \in f^{-1}(Y)$-ի համար: Բայց $x \in f^{-1}(Y)$ նշանակում է հենց, որ $f(x) \in Y$: Ուստի $y = f(x) \in Y$: Քանի որ y-ը կամայական էր, $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$:

Քայլ 2 - Կառուցիր խիստ օրինակ: Վերցրու $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, և $Y = \{-1, 1\}$: Ապա

$$f^{-1}(Y) = \{x : x^2 \in \{-1, 1\}\} = \{x : x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$

(ոչ մի իրական x չունի $x^2 = -1$), և կիրառելով f՝

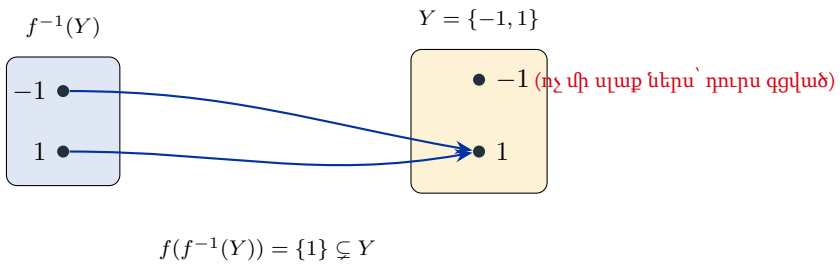
$$f(\{-1, 1\}) = \{1\}.$$

Ուստի $f(f^{-1}(Y)) = \{1\} \subsetneq \{-1, 1\} = Y$: $-1 \in Y$ արժեքն f-ի արժեքների տիրույթից դուրս է, ուստի այն դուրս է գցվում:

Քայլ 3 - Միշտ ստուգիր եզրային պայմանը: Հավասարությունը $f(f^{-1}(Y)) = Y$ տեղի ունի հենց այն ժամանակ, երբ $Y \subseteq f(A)$ (Y-ի ամեն տարր իրականում արտադրվում է): Այստեղ $-1 \notin f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$, ուստի խստությունը հարկադրված է: Քայլ 1-ն արդեն ապացուցում է $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ ամեն f-ի համար՝ վերևի օրինակը խիստ դուրսմղման կոնկրետ դեպքն է:

Պատասխան՝ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ միշտ: Խիստ օրինակ՝ $f(x) = x^2$, $Y = \{-1, 1\}$ տալիս է $f(f^{-1}(Y)) = \{1\} \subsetneq Y$ (-1 արժեքը երբեք ելք չէ):

Պատկեր՝ անհասանելի թիրախը դուրս է գցվում: Քաշիր $Y = \{-1, 1\}$-ը հետ իր նախապատկերին, ապա հրիր առաջ: Միայն 1-ն է գոյատևում, որովհետև -1-ին ոչ մի սլաք չի մտնում:



★ Հիշարժան մեթոդ

Փոխանցելի տեխնիկա՝ երկու շրջագայությունները գնում են հակառակ ուղղություններով։ Հրելն ապա քաշելը փոքրացնում է կամ պահում նույնը՝ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ (հավասարություն այն և միայն այն դեպքում, երբ $Y \subseteq f(A)$)։ Քաշելն ապա հրելը մեծացնում է կամ պահում նույնը՝ $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ (հավասարություն այն և միայն այն դեպքում, երբ f-ն ինյեկտիվ է)։ Անգիր արա ամեն $\subseteq$-ի ուղղությունը՝ հարցնելով «արդյո՞ք արժեք/կետ կարող է կորչել կամ ավելանալ»։